



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYOTLARI

Mehmet EMRE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2014

KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Mehmet EMRE

Tarih: 20.06.2014

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYOTLARI

Mehmet EMRE
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Kemal USLU

2014, 45 Sayfa

Jüri

Doç.Dr.Aynur KESKİN KAYMAKÇI
Yrd.Doç.Dr.Kemal USLU
Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI

Bu çalışmada öncelikle bazı lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini analiz ettik. Daha sonra bu sistemlerin periyotlarını elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan fark denklem sistemleri, çözümlerin periyodu.

ABSTRACT

MS THESIS

THE SOLUTIONS AND PERIODS OF SOME NON-LINEAR DISCRETE EQATION SYSTEMS

Mehmet EMRE

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Asst.Prof.Dr. Kemal USLU

2014, 44 Pages

Jury
Assoc.Prof.Dr. Aynur KESKİN KAYMAKÇI
Asst.Prof.Dr. Kemal USLU
Asst.Prof.Dr. İsmail KINACI

We firstly analysed the solutions of some non-linear discrete equation systems in this study. Then we obtained the periods of these systems.

Keywords: Non-linear discrete equation systems, the period of solutions.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek bana yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet EMRE
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR ÖZETİ **2**

3. FARK DENKLEMLERİ **9**

4. BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYOTLARI

4.1. $x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{1}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-y_{n-2}}$ **Fark Denklem Sistemi** **15**

4.2. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}}$ **Fark Denklem Sistemi** **18**

4.3. $x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{1}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-y_{n-3}}$ **Fark Denklem Sistemi** **21**

4.4. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}}$ **Fark Denklem Sistemi** **25**

4.5. $x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{1}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-4}-y_{n-4}}$ **Fark Denklem Sistemi** **29**

4.6. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{B}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-4}-y_{n-4}}$ **Fark Denklem Sistemi** **33**

5. NÜMERİK ÖRNEKLER **37**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **41**

KAYNAKLAR **42**

ÖZGEÇMİŞ **43**

1. GİRİŞ

Bu tezde;

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}},\ \ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{B}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-4}-y_{n-4}},\ n\geq 0$$

fark denklem sistemlerinin $A=1, B=1$ ve $A,B\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ olduğu durumlarda çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

2.BÖLÜM
FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR ÖZETİ

Öncelikle fark denklem sistemlerinin periyotları, çözümleri ve çözümlerin global asimptotik kararlılığı ile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış olan çalışmaları özetleyelim:

Schinas (1997) çalışmalarında,

$x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denklem sabitinden hareketle,

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}},\quad n\geq 0$$

denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denklem sabitlerini ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Çalışma sonucunda, çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etmiştir.

Grove ve arkadaşları (2001) çalışmalarında,

a, b, c ve d reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n},\ n=1,2,...$$

fark denklem sisteminin, her $n\geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n=\frac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle a, b, c ve d reel sayıları için

şartlar elde ettiler. Çalışmanın sonunda denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemeler elde ettiler.

Grove, Ladas, McGrath, Teixeira (2001) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$$

rasyonel fark sisteminin çözümlerinin davranışı ve varlığı üzerinde çalışmışlardır.

Clark ve Kulenović (2002) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{a+cy_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{b+dx_n},$$

$n\geq 0$ için a, b, c ve d pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir

Çınar (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\quad y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu elde etmiştir.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{1}{z_n},\quad y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\quad y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}},\quad n\geq 0$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Özban (2006) çalışmasında,

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}},\quad n\geq 0$$

fark denklem sisteminin bütün pozitif çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Şimşek ve arkadaşları (2009) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\right\},\ y_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\right\},\ n\geq 0$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Taşkara N., Uslu K. Ve Tollu D.T (2001) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{p_n x_n+x_{n-(k+1)}}{q_n+x_{n-(k+1)}},\ k\in\mathbb{N},$$

$x_{-k-1},x_{-k},\ldots\in\mathbb{R}$ başlangıç şartları olmak üzere fark denkleminin periyodikliği ve genelleştirilmiş çözümü için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Ayrıca, genel çözümün $(k+1)$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Henson S.M., Constantino R.F., Cushing J.M., Dennis B., Desharnais R.A. (1999) çalışmalarında,

$$L_{t+1}=bA_t e^{(-c_{ea}A_t-c_{el}L_t)}$$
$$P_{t+1}=(1-\mu_l)L_t$$
$$A_{t+1}=P_t e^{(-c_{pa}A_t)}+(1-\mu_a)A_t$$

otonom fark denklem sisteminin dinamiğini incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan,

$$x_{n+1}=\frac{A+y_n}{x_{n-p}},\quad y_{n+1}=\frac{A+x_n}{y_{n-q}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışını ve sınırlılığını incelediler. Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bu çalışmada fark denklem sisteminin denge noktasının (c, c) = (1+A, 1+A) olduğunu elde ettiler ve sisteminin çözümlerinin $A \in (0, \infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu gördüler. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. $A > 1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu elde etmişlerdir.

Amleh ve arkadaşları (1999), aşağıdaki üç fark denklemini incelemişler:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-2} + x_{n-1}}$$

bu denklemlerin pozitif başlangıç şartları altında, pozitif denge noktaları olan x = 1'de global asimptotik kararlı olduklarını göstermişlerdir. Ayrıca denklemlerin sıra değişikliği olmak üzere, pozitif yarı dönmelerinin bir veya iki terimli, negatif yarı dönmelerinin ise bir veya üç terimli olduğunu göstermişlerdir.

Briggs C.J., Hoopes M.F. (2004) yaptıkları çalışmada,

$f(p_t) = e^{(-ap_t)}$ (Nicholson-Bailey fonksiyonu, Nicholson ve Bailey, 1935)

$f(p_t) = \left(1 + \frac{ap_t}{k}\right)^{-k}$ (Negatif-Binomiyel fonksiyonu, Mayıs 1978)

$f(p_t) = e^{\left(-a(p_t)^{1-m}\right)}$ (Hassel-Varley fonksiyonu, Hassel ve Varley,1969)

parazitizim fonksiyonları olmak üzere

$$H_{t+1} = \lambda H_t f(p_t)$$
$$p_{t+1} = cH_t\left[1 - f(p_t)\right]$$

konak-parazitoit (Host-Parasitioid) modelleri üzerine literatür eleştirisi yapmışlardır.

Buchanan R.J. (2005) yapmış olduğu çalışmada,

$$u_{t+1} = u_t e^{r\left(1-\frac{u_t}{K}\right) - av_t}$$

$$v_{t+1} = u_t(1 - e^{-av_t})$$

fark denklem sisteminin dinamiğini incelemiştir.

Kulenovic ve Nurkanovic (2003), A ve B katsayıları $(0,\infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = Ax_n \frac{y_n}{1+y_n}, \quad y_{n+1} = By_n \frac{x_n}{1+x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılığını araştırmışlardır.

Elaydi S., Sacker R.J. (2006) Bu çalışmada,

$$x_{n+1} = \frac{\mu K x_n}{K+(\mu-1)x_n}, \; x_0 \geq 0, \; K > 0$$

Beverton-Holt denklemleri gibi otonom olmayan fark denklemleri üzerinde zaman faktörünü ele alan bir metot geliştirmişlerdir. Bu metot, Beverton-Holt denklemleri ile ilişkili Henson ve Cushing varsayımlarını kanıtlamak için uygulanmıştır.

Deghan M., Nasri M., Douraki M.J. (2005) Bu çalışmada ilk olarak,

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{b+cz_n}$$

$$y_{n+1} = dy_n + ex_{n+1}z_n$$

$$z_{n+1} = fz_n + y_{n+1}$$

fark denklem sistemini, sürekli HIV enfeksiyon modelinin eş fark denklem modeli olarak elde etmişlerdir. Daha sonra, fark denklem sisteminin dengesinin global ve lokal asimptotik kararlılığı, sınırlılığı, kararlılık ve dallanma olayları araştırılmıştır.

Kang Y., Armbruster D., Kuang Y. (2008) Bu çalışmada $a > 0$, $r > 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n e^{r[1-x_n]-ay_n}$$

$$y_{n+1} = x_n \left[1 - e^{-ay_n}\right] e^{r[1-x_n]}$$

fark denklem sistemini, belli bir bitki-otçul etkileşimini çalışmak için modellemişlerdir. Elde edilen iki boyutlu fark denklem modelinde durum değişkenleri olarak yaprak ve otçul biyokütlesi kullanmışlardır.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004), çalışmalarında; pozitif başlangıç şartlar altında

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\quad x_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Kulenovic ve Nurkanoviç (2005), a, b, c, d, e ve f keyfi değerleri $(0,\infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0, z_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n}{b+y_n},\ y_{n+1}=\frac{c+y_n}{d+z_n},\ z_{n+1}=\frac{e+z_n}{f+x_n},\ n=0,1,2,\ldots$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimtotik kararlığını incelediler.

Kang Y., Chesson P. (2010) Bu çalışmada,

$$x_{t+1}=x_t f(x_t,y_t)$$

$$y_{t+1}=y_t g(x_t,y_t)$$

fark denklem sisteminin non-lineerliliğe ilişkin kavramlarını geliştirmişler ve bu kavramları popülasyon dalgalanmalarında türlerin uzun sürede ve düşük yoğunluktaki büyüme oranı etkisinin nasıl olacağını göstermek için kullanılmıştır.

Kang Y., Armbruster D. (2010) Bu çalışmada,

$$P_{t+1}=F(P_t)e^{-aH_t} \qquad P_{t+1}=F(P_t)e^{-aH_t}$$
$$H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right] \quad \text{ve} \quad H_{t+1}=F(P_t)\left[1-e^{-aH_t}\right]$$

genel bitki-otçul etkileşim modellerini incelemişler ve genel bitki-otçul modellerinin dinamikleri üzerinde monoton bitki büyüme fonksiyonlarının etkisini çalışmışlardır.

Kang Y., Armbruster D., (2011) Bu çalışmada,

$$P_{n+1}^I=P_n^I e^{r(1-P_n^I)-a(1-l)H_n^I}$$

$$H_{n+1}^I=P_n^I e^{r(1-P_n^I)}\left[1-e^{-a(1-l)H_n^I}\right]$$

bitki- böcek fark zaman model çiftini çalışılmışlar ve bu modelin popülasyon dinamiğindeki hem lokal hem de global yayılım etkisinin nasıl yoğunluklarda olduğunu göstermişlerdir.

Henson S.M., Costantino R.F., Cushing J.M., Dennis B., Desharnais R.A. (1999), çalışmalarında

$$L_{t+1} = bA_t e^{(-c_{ea}A_t - c_{el}L_t)}$$

$$P_{t+1} = (1-\mu_l)L_t$$

$$A_{t+1} = P_t e^{(-c_{pa}A_t)} + (1-\mu_a)A_t$$

otonom fark denklem modelinin dinamiğini incelemişlerdir.

3. FARK DENKLEMLERİ

Bu kısımda fark denklemleri hakkında literatürde iyi bilinen bazı genel tanımlar tekrar verilecek ve hatırlatılacaktır.

Tanım 3.1 $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \tag{3.1}$$

eşitliğine fark denklemi adı verilir.

Tanım 3.2 Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi adı verilir.

Tanım 3.3 $a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{3.2}$$

biçimindeki bir denkleme k nıncı basamaktan lineer fark denklemi denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman homogen, aksi durumda homogen olmayan lineer fak denklemi olarak adlandırılır. Buna göre k nıncı basamaktan bir lineer homogen fark denklemi genel olarak

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, (3.2) denklemine sabit katsayılı, aksi halde değişken katsayılı fark denklemi denir.

Tanım 3.4 $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olmak üzere, her $n \geq n_0$ için,

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0 \tag{3.4}$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_r$ sabitleri var ise, bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir. (3.4) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir.

3.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.1.1. Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci dereceden ise bu denkleme Lineer Fark Denklemi denir. Genel olarak lineer fark denklemleri,

$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = F(n)$

şeklinde gösterilir.

Lineer fark denklemleri katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler.

- Eğer $F(n) = 0$ ise denkleme Lineer Homojen Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları sabit iseler, denkleme Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir.

3.2. Fark Denklemleri İçin Genel Tanımlar ve Teoremler

Teorem 3.2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n \geq 0 \tag{3.2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 3.2.1 Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ 'e f 'nin denge noktası denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise o zaman $\bar{x}$ 'e f 'nin sabit noktası denir.

Tanım 3.2.2 Eğer $\forall n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subset I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (3.2.1) denkleminin değişmez aralığı denir.

Tanım 3.2.3 $\bar{x}$ (3.2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere,

- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.
- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 3.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 3.2.5. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p sayısı bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 3.2.6. (3.2.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde alalım:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial u} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \tag{3.2.2}$$

Denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi adı verilir.

(3.2.2) denkleminin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^2 - r\lambda - s \tag{3.2.3}$$

dır.

Teorem 3.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

Eğer (3.2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- Eğer (3.2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.
- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olmasi için gerek ve yeter şart $|r|<1-s<2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s|>1$ ve $|r|<|1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.
- Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$'e global asimptotik kararlıdır denir.
- (3.2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2+4s>0$ ve $|r|>|1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve ark. 2003).

Aşağıdaki lineer olmayan fark denklem sistemleri ile ilgili çalışmalar Nasri ve ark (2005) dan alınmıştır.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= f_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

fark denklem sistemi verilsin.

Tanım 3.2.7. Eğer $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aşağıdaki şartları sağlarsa, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ noktasını (3.2.4) denklem sisteminin denge noktası olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{y} &= f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{z} &= f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Tanım 3.2.8. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|(x_0, y_0, z_0) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \delta$ iken $((x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3)$

$\forall n \geq 0$ için $\|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (3.2.4) sisteminin denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kararlıdır denir. Aksi halde ise kararsızdır.

Tanım 3.2.9 Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\|(x_0, y_0, z_0) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| < \gamma$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$\lim_{x \to \infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| = 0$

ise (3.2.4) sisteminin denge noktası asimptotik kararlıdır.

Tanım 3.2.10. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\lim_{x \to \infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\| = 0$

ise (3.2.4)sisteminin denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ global asimptotik kararlıdır denir.

Teorem 3.2.3. (3.2.4) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktasında jakobiyen matrisi

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_1}{dz}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \\ \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_2}{dy}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_2}{dz}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \\ \left(\frac{df_3}{dx}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_3}{dy}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} & \left(\frac{df_3}{dz}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \end{vmatrix}$$

olup, bu jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu

$P(\lambda) = \det\left[J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - \lambda I\right] = 0$

ile verilsin.

Bu polinomda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

- $P(\lambda)$ nın bütün kökleri 1 den küçükse denge noktası $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kararlıdır.

- $P(\lambda)$ nın köklerinden en az biri 1 den büyükse denge noktası $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ kararsızdır.

4. BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYOTLARI

4.1. Fark Denklem Sistemi

Bu bölümde,

$$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR-\{0\} \text{ ve } x_{-2}\neq y_{-2}, x_{-1}\neq y_{-1}, x_0\neq y_0 \quad (4.1.1)$$

olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{1}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-y_{n-2}},\ n\geq 0 \quad (4.1.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR-\{0\}$ ve $x_{-2}\neq y_{-2}, x_{-1}\neq y_{-1}, x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.1.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri sekiz periyotludur.

İspat: (4.1.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{1}{z_{n-2}}, \quad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}}, \quad z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+2}=y_n+\frac{1}{z_{n-1}}, \quad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-1}}, \quad z_{n+2}=\frac{1}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{z_{n-2}}+\frac{1}{z_n}, \quad y_{n+3}=\frac{1}{z_n}, \quad z_{n+3}=\frac{1}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+4}=\frac{1}{z_{n-1}}+x_{n-2}-y_{n-2}, \quad y_{n+4}=x_{n-2}-y_{n-2}, \quad z_{n+4}=\frac{y_n z_{n-3}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{z_n}+x_{n-1}-y_{n-1}, \quad y_{n+5}=x_{n-1}-y_{n-1}, \quad z_{n+5}=\frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+6}=x_{n-2}-y_{n-2}+x_n-y_n, \quad y_{n+6}=x_n-y_n, \quad z_{n+6}=z_{n-2}$$

$$x_{n+7}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-3}}, \qquad y_{n+7}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-3}}, \qquad z_{n+7}=z_{n-1}$$

$$x_{n+8}=x_n, \qquad y_{n+8}=y_n, \qquad z_{n+8}=z_n$$

Teorem 4.1.2 $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-2}\neq y_{-2}, x_{-1}\neq y_{-1}, x_0\neq y_0$, $x_{-2}=p, x_{-1}=q, x_0=r,$ $y_{-2}=s, y_{-1}=t, y_0=u,$ $z_{-3}=v, z_{-2}=k, z_{-1}=l, z_0=m,$ başlangıç şartları altında (4.1.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{8n+1}=\frac{t}{uv}+\frac{1}{k}, \qquad y_{8n+1}=\frac{1}{k}, \qquad z_{8n+1}=\frac{1}{p-s}$$

$$x_{8n+2}=u+\frac{1}{l}, \qquad y_{8n+2}=\frac{1}{l}, \qquad z_{8n+2}=\frac{1}{q-t}$$

$$x_{8n+3}=\frac{1}{k}+\frac{1}{m}, \qquad y_{8n+3}=\frac{1}{m}, \qquad z_{8n+3}=\frac{1}{r-u}$$

$$x_{8n+4}=\frac{1}{l}+p-s, \qquad y_{8n+4}=p-s, \qquad z_{8n+4}=\frac{uv}{t}$$

$$x_{8n+5}=\frac{1}{m}+q-t, \qquad y_{8n+5}=q-t, \qquad z_{8n+5}=\frac{1}{u}$$

$$x_{8n+6}=p-s+r-u, \qquad y_{8n+6}=r-u, \qquad z_{8n+6}=k$$

$$x_{8n+7}=q-t+\frac{t}{uv}, \qquad y_{8n+7}=\frac{t}{uv}, \qquad z_{8n+7}=l$$

$$x_{8n+8}=r, \qquad y_{8n+8}=u, \qquad z_{8n+8}=m$$

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{8n+9}=\frac{y_{8n+7}}{y_{8n+8}z_{8n+5}}+\frac{1}{z_{8n+6}}=\frac{t}{uv}+\frac{1}{k}, \qquad y_{8n+9}=\frac{1}{z_{8n+6}}=\frac{1}{k},$$

$$z_{8n+9}=\frac{1}{x_{8n+6}-y_{8n+6}}=\frac{1}{p-s}$$

$$x_{8n+10}=\frac{y_{8n+8}}{y_{8n+9}z_{8n+6}}+\frac{1}{z_{8n+7}}=u+\frac{1}{l}, \qquad y_{8n+10}=\frac{1}{z_{8n+7}}=\frac{1}{l},$$
$$z_{8n+10}=\frac{1}{x_{8n+7}-y_{8n+7}}=\frac{1}{q-t}$$

$$x_{8n+11}=\frac{y_{8n+9}}{y_{8n+10}z_{8n+7}}+\frac{1}{z_{8n+8}}=\frac{1}{k}+\frac{1}{m}, \qquad y_{8n+11}=\frac{1}{z_{8n+8}}=\frac{1}{m},$$
$$z_{8n+11}=\frac{1}{x_{8n+8}-y_{8n+8}}=\frac{1}{r-u}$$

$$x_{8n+12}=\frac{y_{8n+10}}{y_{8n+11}z_{8n+8}}+\frac{1}{z_{8n+9}}=\frac{1}{l}+p-s, \qquad y_{8n+12}=\frac{1}{z_{8n+9}}=p-s,$$
$$z_{8n+12}=\frac{1}{x_{8n+9}-y_{8n+9}}=\frac{uv}{t}$$

$$x_{8n+13}=\frac{y_{8n+11}}{y_{8n+12}z_{8n+9}}+\frac{1}{z_{8n+10}}=\frac{1}{m}+q-t, \qquad y_{8n+13}=\frac{1}{z_{8n+10}}=q-t,$$
$$z_{8n+13}=\frac{1}{x_{8n+10}-y_{8n+10}}=\frac{1}{u}$$

$$x_{8n+14}=\frac{y_{8n+12}}{y_{8n+13}z_{8n+10}}+\frac{1}{z_{8n+11}}=p-s+r-u, \qquad y_{8n+14}=\frac{1}{z_{8n+11}}=r-u,$$
$$z_{8n+14}=\frac{1}{x_{8n+11}-y_{8n+11}}=k$$

$$x_{8n+15}=\frac{y_{8n+13}}{y_{8n+14}z_{8n+11}}+\frac{1}{z_{8n+12}}=q-t+\frac{t}{uv}, \qquad y_{8n+15}=\frac{1}{z_{8n+12}}=\frac{t}{uv},$$
$$z_{8n+15}=\frac{1}{x_{8n+12}-y_{8n+12}}=l$$

$$x_{8n+16}=\frac{y_{8n+14}}{y_{8n+15}z_{8n+12}}+\frac{1}{z_{8n+13}}=r, \qquad y_{8n+16}=\frac{1}{z_{8n+13}}=u,$$
$$z_{8n+16}=\frac{1}{x_{8n+13}-y_{8n+13}}=m$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.2. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}}$ **Fark Denklem Sistemi**

Bu bölümde;

$$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in IR/\{0\} \text{ ve } x_{-2}\neq y_{-2},x_{-1}\neq y_{-1},x_0\neq y_0 \quad (4.2.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}},\ n\geq 0 \quad (4.2.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in IR/\{0\}$ ve $x_{-2}\neq y_{-2},x_{-1}\neq y_{-1},x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.2.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri sekiz periyotludur.

İspat: (4.2.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-2}}, \quad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}}, \quad z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{B}y_n+\frac{B}{z_{n-1}}, \quad y_{n+2}=\frac{B}{z_{n-1}}, \quad z_{n+2}=\frac{A}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{z_{n-2}}+\frac{B}{z_n}, \quad y_{n+3}=\frac{B}{z_n}, \quad z_{n+3}=\frac{A}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{z_{n-1}}+\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}), \quad y_{n+4}=\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}), \quad z_{n+4}=\frac{y_n z_{n-3}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+5}=\frac{A}{z_n}+\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}), \quad y_{n+5}=\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}), \quad z_{n+5}=\frac{B}{y_n}$$

$$x_{n+6}=x_{n-2}-y_{n-2}+\frac{B}{A}(x_n-y_n), \quad y_{n+6}=\frac{B}{A}(x_n-y_n), \quad z_{n+6}=z_{n-2}$$

$$x_{n+7}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{By_{n-1}}{y_n z_{n-3}}, \quad y_{n+7}=\frac{By_{n-1}}{y_n z_{n-3}}, \quad z_{n+7}=z_{n-1}$$

$$x_{n+8}=x_n, \quad y_{n+8}=y_n, \quad z_{n+8}=z_n.$$

Teorem 4.2.2 $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0, z_{-3}, z_{-2}, z_{-1}, z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-2} \neq y_{-2}, x_{-1} \neq y_{-1}, x_0 \neq y_0$, $x_{-2} = p, x_{-1} = q, x_0 = r,$ $y_{-2} = s, y_{-1} = t, y_0 = u,$ $z_{-3} = v, z_{-2} = k, z_{-1} = l, z_0 = m,$ başlangıç şartları altında (4.2.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n \geq 0$ için (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{8n+1} = \frac{At}{uv} + \frac{B}{k}, \qquad y_{8n+1} = \frac{B}{k}, \qquad z_{8n+1} = \frac{A}{p-s}$$

$$x_{8n+2} = \frac{A}{B}u + \frac{B}{l}, \qquad y_{8n+2} = \frac{B}{l}, \qquad z_{8n+2} = \frac{A}{q-t}$$

$$x_{8n+3} = \frac{A}{k} + \frac{B}{m}, \qquad y_{8n+3} = \frac{B}{m}, \qquad z_{8n+3} = \frac{A}{r-u}$$

$$x_{8n+4} = \frac{A}{l} + \frac{B}{A}(p-s), \qquad y_{8n+4} = \frac{B}{A}(p-s), \qquad z_{8n+4} = \frac{uv}{t}$$

$$x_{8n+5} = \frac{A}{m} + \frac{B}{A}(q-t), \qquad y_{8n+5} = \frac{B}{A}(q-t), \qquad z_{8n+5} = \frac{B}{u}$$

$$x_{8n+6} = p - s + \frac{B}{A}(r-u), \qquad y_{8n+6} = \frac{B}{A}(r-u), \qquad z_{8n+6} = k$$

$$x_{8n+7} = q - t + \frac{Bt}{uv}, \qquad y_{8n+7} = \frac{Bt}{uv}, \qquad z_{8n+7} = l$$

$$x_{8n+8} = r, \qquad y_{8n+8} = u, \qquad z_{8n+8} = m.$$

İspat: $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{8n+9} = \frac{Ay_{8n+7}}{y_{8n+8}z_{8n+5}} + \frac{B}{z_{8n+6}} = \frac{At}{uv} + \frac{B}{k}, \qquad y_{8n+9} = \frac{B}{z_{8n+6}} = \frac{B}{k},$$

$$z_{8n+9} = \frac{A}{x_{8n+6} - y_{8n+6}} = \frac{A}{p-s}$$

$$x_{8n+10}=\frac{Ay_{8n+8}}{y_{8n+9}z_{8n+6}}+\frac{B}{z_{8n+7}}=\frac{A}{B}u+\frac{B}{l},\qquad y_{8n+10}=\frac{B}{z_{8n+7}}=\frac{B}{l},$$
$$z_{8n+10}=\frac{A}{x_{8n+7}-y_{8n+7}}=\frac{A}{q-t}$$

$$x_{8n+11}=\frac{Ay_{8n+9}}{y_{8n+10}z_{8n+7}}+\frac{B}{z_{8n+8}}=\frac{A}{k}+\frac{B}{m},\qquad y_{8n+11}=\frac{B}{z_{8n+8}}=\frac{B}{m},$$
$$z_{8n+11}=\frac{A}{x_{8n+8}-y_{8n+8}}=\frac{A}{r-u}$$

$$x_{8n+12}=\frac{Ay_{8n+10}}{y_{8n+11}z_{8n+8}}+\frac{B}{z_{8n+9}}=\frac{A}{l}+\frac{B}{A}(p-s),\qquad y_{8n+12}=\frac{B}{z_{8n+9}}=\frac{B}{A}(p-s),$$
$$z_{8n+12}=\frac{A}{x_{8n+9}-y_{8n+9}}=\frac{uv}{t}$$

$$x_{8n+13}=\frac{Ay_{8n+11}}{y_{8n+12}z_{8n+9}}+\frac{B}{z_{8n+10}}=\frac{A}{m}+\frac{B}{A}(q-t),\qquad y_{8n+13}=\frac{B}{z_{8n+10}}=\frac{B}{A}(q-t),$$
$$z_{8n+13}=\frac{A}{x_{8n+10}-y_{8n+10}}=\frac{B}{u}$$

$$x_{8n+14}=\frac{Ay_{8n+12}}{y_{8n+13}z_{8n+10}}+\frac{B}{z_{8n+11}}=p-s+\frac{B}{A}(r-u),\qquad y_{8n+14}=\frac{B}{z_{8n+11}}=\frac{B}{A}(r-u),$$
$$z_{8n+14}=\frac{A}{x_{8n+11}-y_{8n+11}}=k$$

$$x_{8n+15}=\frac{Ay_{8n+13}}{y_{8n+14}z_{8n+11}}+\frac{B}{z_{8n+12}}=q-t+\frac{Bt}{uv},\qquad y_{8n+15}=\frac{B}{z_{8n+12}}=\frac{Bt}{uv},$$
$$z_{8n+15}=\frac{A}{x_{8n+12}-y_{8n+12}}=l$$
$$x_{8n+16}=\frac{Ay_{8n+14}}{y_{8n+15}z_{8n+12}}+\frac{B}{z_{8n+13}}=r,\qquad y_{8n+16}=\frac{B}{z_{8n+13}}=u,$$
$$z_{8n+16}=\frac{A}{x_{8n+13}-y_{8n+13}}=m.$$

4.3. $x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{1}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-y_{n-3}}$ **Fark Denklem Sistemi**

Bu bölümde;

$x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-3}\neq y_{-3},\ \ x_{-2}\neq y_{-2},$

$x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0$ (4.3.1)

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{1}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-y_{n-3}},\ n\geq 0 \quad (4.3.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.3.1. $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-3}\neq y_{-3}$, $x_{-2}\neq y_{-2}, x_{-1}\neq y_{-1}, x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.3.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on periyotludur.

İspat: (4.3.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{1}{z_{n-3}},\qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-3}},\qquad z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-y_{n-3}}$$

$$x_{n+2}=y_n+\frac{1}{z_{n-2}},\qquad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-2}},\qquad z_{n+2}=\frac{1}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{z_{n-3}}+\frac{1}{z_{n-1}},\qquad y_{n+3}=\frac{1}{z_{n-1}},\qquad z_{n+3}=\frac{1}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+4}=\frac{1}{z_{n-2}}+\frac{1}{z_n},\qquad y_{n+4}=\frac{1}{z_n},\qquad z_{n+4}=\frac{1}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{z_{n-1}}+x_{n-3}-y_{n-3},\qquad y_{n+5}=x_{n-3}-y_{n-3},\qquad z_{n+5}=\frac{y_n z_{n-4}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+6}=\frac{1}{z_n}+x_{n-2}-y_{n-2},\qquad y_{n+6}=x_{n-2}-y_{n-2},\qquad z_{n+6}=\frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+7}=x_{n-3}-y_{n-3}+x_{n-1}-y_{n-1},\qquad y_{n+7}=x_{n-1}-y_{n-1},\qquad z_{n+7}=z_{n-3}$$

$$x_{n+8}=x_{n-2}-y_{n-2}+x_n-y_n, \qquad y_{n+8}=x_n-y_n, \qquad z_{n+8}=z_{n-2}$$

$$x_{n+9}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}, \qquad y_{n+9}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-4}}, \qquad z_{n+9}=z_{n-1}$$

$$x_{n+10}=x_n, \qquad y_{n+10}=y_n, \qquad z_{n+10}=z_n .$$

Teorem 4.3.2 $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-3}\neq y_{-3}$, $x_{-2}\neq y_{-2}, x_{-1}\neq y_{-1}, x_0\neq y_0$ olmak üzere, $x_{-3}=a, x_{-2}=b, x_{-1}=c, x_0=d$, $y_{-3}=p, y_{-2}=q, y_{-1}=r, y_0=s$, $z_{-4}=k, z_{-3}=l, z_{-2}=m, z_{-1}=u, z_0=v$, başlangıç şartları altında (4.3.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{10n+1}=\frac{r}{sk}+\frac{1}{l}, \qquad y_{10n+1}=\frac{1}{l}, \qquad z_{10n+1}=\frac{1}{a-p}$$

$$x_{10n+2}=s+\frac{1}{m}, \qquad y_{10n+2}=\frac{1}{m}, \qquad z_{10n+2}=\frac{1}{b-q}$$

$$x_{10n+3}=\frac{1}{l}+\frac{1}{u}, \qquad y_{10n+3}=\frac{1}{u}, \qquad z_{10n+3}=\frac{1}{c-r}$$

$$x_{10n+4}=\frac{1}{m}+\frac{1}{v}, \qquad y_{10n+4}=\frac{1}{v}, \qquad z_{10n+4}=\frac{1}{d-s}$$

$$x_{10n+5}=\frac{1}{u}+a-p, \qquad y_{10n+5}=a-p, \qquad z_{10n+5}=\frac{sk}{r}$$

$$x_{10n+6}=\frac{1}{v}+b-q, \qquad y_{10n+6}=b-q, \qquad z_{10n+6}=\frac{1}{s}$$

$$x_{10n+7}=a-p+c-r, \qquad y_{10n+7}=c-r, \qquad z_{10n+7}=l$$

$$x_{10n+8}=b-q+d-s, \qquad y_{10n+8}=d-s, \qquad z_{10n+8}=m$$

$$x_{10n+9}=c-r+\frac{r}{sk}, \qquad y_{10n+9}=\frac{r}{sk}, \qquad z_{10n+9}=u$$

$$x_{10n+10}=d, \qquad y_{10n+10}=s, \qquad z_{10n+10}=v.$$

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{10n+11}=\frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}z_{10n+6}}+\frac{1}{z_{10n+7}}=\frac{r}{sk}+\frac{1}{l}, \qquad y_{10n+11}=\frac{1}{z_{10n+7}}=\frac{1}{l},$$
$$z_{10n+11}=\frac{1}{x_{10n+7}-y_{10n+7}}=\frac{1}{a-p}$$

$$x_{10n+12}=\frac{y_{10n+10}}{y_{10n+11}z_{10n+7}}+\frac{1}{z_{10n+8}}=s+\frac{1}{m}, \qquad y_{10n+12}=\frac{1}{z_{10n+8}}=\frac{1}{m},$$
$$z_{10n+12}=\frac{1}{x_{10n+8}-y_{10n+8}}=\frac{1}{b-q}$$

$$x_{10n+13}=\frac{y_{10n+11}}{y_{10n+12}z_{10n+8}}+\frac{1}{z_{10n+9}}=\frac{1}{l}+\frac{1}{u}, \qquad y_{10n+13}=\frac{1}{z_{10n+9}}=\frac{1}{u},$$
$$z_{10n+13}=\frac{1}{x_{10n+9}-y_{10n+9}}=\frac{1}{c-r}$$

$$x_{10n+14}=\frac{y_{10n+12}}{y_{10n+13}z_{10n+9}}+\frac{1}{z_{10n+10}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{v}, \qquad y_{10n+14}=\frac{1}{z_{10n+10}}=\frac{1}{v},$$
$$z_{10n+14}=\frac{1}{x_{10n+10}-y_{10n+10}}=\frac{1}{d-s}$$

$$x_{10n+15}=\frac{y_{10n+13}}{y_{10n+14}z_{10n+10}}+\frac{1}{z_{10n+11}}=\frac{1}{u}+a-p, \qquad y_{10n+15}=\frac{1}{z_{10n+11}}=a-p,$$
$$z_{10n+15}=\frac{1}{x_{10n+11}-y_{10n+11}}=\frac{sk}{r}$$

$$x_{10n+16}=\frac{y_{10n+14}}{y_{10n+15}z_{10n+11}}+\frac{1}{z_{10n+12}}=\frac{1}{v}+b-q, \qquad y_{10n+16}=\frac{1}{z_{10n+12}}=b-q,$$
$$z_{10n+16}=\frac{1}{x_{10n+12}-y_{10n+12}}=\frac{1}{s}$$

$$x_{10n+17}=\frac{y_{10n+15}}{y_{10n+16}z_{10n+12}}+\frac{1}{z_{10n+13}}=a-p+c-r, \qquad y_{10n+17}=\frac{1}{z_{10n+13}}=c-r,$$
$$z_{10n+17}=\frac{1}{x_{10n+13}-y_{10n+13}}=l$$

$$x_{10n+18}=\frac{y_{10n+16}}{y_{10n+17}z_{10n+13}}+\frac{1}{z_{10n+14}}=b-q+d-s, \qquad y_{10n+18}=\frac{1}{z_{10n+14}}=d-s,$$
$$z_{10n+18}=\frac{1}{x_{10n+14}-y_{10n+14}}=m$$

$$x_{10n+19}=\frac{y_{10n+17}}{y_{10n+18}z_{10n+14}}+\frac{1}{z_{10n+15}}=c-r+\frac{r}{sk}, \qquad y_{10n+19}=\frac{1}{z_{10n+15}}=\frac{r}{sk},$$
$$z_{10n+19}=\frac{1}{x_{10n+15}-y_{10n+15}}=u$$

$$x_{10n+20} = \frac{y_{10n+18}}{y_{10n+19}z_{10n+15}} + \frac{1}{z_{10n+16}} = d, \qquad y_{10n+20} = \frac{1}{z_{10n+16}}s,$$

$$z_{10n+20} = \frac{1}{x_{10n+16} - y_{10n+16}} = v.$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.4. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}}$ **Fark Denklem Sistemi**

Bu bölümde;

$x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-3}\neq y_{-3},\ x_{-2}\neq y_{-2},$

$x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0$ 4.4.1)

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}},\ n\geq 0 \qquad (4.4.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.4.1. $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-3}\neq y_{-3},\ x_{-2}\neq y_{-2},\ \ x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.4.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.4.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on periyotludur.

İspat: (4.4.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-3}}, \qquad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-3}}, \qquad z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}}$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{B}y_n+\frac{B}{z_{n-2}}, \qquad y_{n+2}=\frac{B}{z_{n-2}}, \qquad z_{n+2}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-1}}, \qquad y_{n+3}=\frac{B}{z_{n-1}}, \qquad z_{n+3}=\frac{A}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{z_{n-2}}+\frac{B}{z_n}, \qquad y_{n+4}=\frac{B}{z_n}, \qquad z_{n+4}=\frac{A}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+5}=\frac{A}{z_{n-1}}+\frac{B}{A}(x_{n-3}-y_{n-3}), \qquad y_{n+5}=\frac{B}{A}(x_{n-3}-y_{n-3}), \qquad z_{n+5}=\frac{y_n z_{n-4}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+6}=\frac{A}{z_n}+\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}), \qquad y_{n+6}=\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}), \qquad z_{n+6}=\frac{B}{y_n}$$

$$x_{n+7}=x_{n-3}-y_{n-3}+\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}),\quad y_{n+7}=\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}),\qquad z_{n+7}=z_{n-3}$$

$$x_{n+8}=x_{n-2}-y_{n-2}+\frac{B}{A}(x_n-y_n),\qquad y_{n+8}=\frac{B}{A}(x_n-y_n),\qquad z_{n+8}=z_{n-2}$$

$$x_{n+9}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{By_{n-1}}{y_nz_{n-4}},\qquad y_{n+9}=\frac{By_{n-1}}{y_nz_{n-4}},\qquad z_{n+9}=z_{n-1}$$

$$x_{n+10}=x_n,\qquad y_{n+10}=y_n,\qquad z_{n+10}=z_n.$$

Teorem 4.4.2 $x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in IR/\{0\}$ ve

$x_{-3}\neq y_{-3},\ x_{-2}\neq y_{-2},\qquad x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0\ ,\qquad x_{-3}=a,x_{-2}=b,x_{-1}=c,x_0=d,$

$y_{-3}=p,y_{-2}=q,y_{-1}=r,y_0=s,\ \ z_{-4}=k,z_{-3}=l,z_{-2}=m,z_{-1}=u,z_0=v,$ başlangıç şartları altında (4.4.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.4.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{10n+1}=\frac{Ar}{sk}+\frac{B}{l},\qquad y_{10n+1}=\frac{B}{l},\qquad z_{10n+1}=\frac{A}{a-p}$$

$$x_{10n+2}=\frac{A}{B}s+\frac{B}{m},\qquad y_{10n+2}=\frac{B}{m},\qquad z_{10n+2}=\frac{A}{b-q}$$

$$x_{10n+3}=\frac{A}{l}+\frac{B}{u},\qquad y_{10n+3}=\frac{B}{u},\qquad z_{10n+3}=\frac{A}{c-r}$$

$$x_{10n+4}=\frac{A}{m}+\frac{B}{v},\qquad y_{10n+4}=\frac{B}{v},\qquad z_{10n+4}=\frac{A}{d-s}$$

$$x_{10n+5}=\frac{A}{u}+\frac{B}{A}(a-p),\qquad y_{10n+5}=\frac{B}{A}(a-p),\qquad z_{10n+5}=\frac{sk}{r}$$

$$x_{10n+6}=\frac{A}{v}+\frac{B}{A}(b-q),\qquad y_{10n+6}=\frac{B}{A}(b-q),\qquad z_{10n+6}=\frac{B}{s}$$

$$x_{10n+7}=a-p+\frac{B}{A}(c-r),\qquad y_{10n+7}=\frac{B}{A}(c-r),\qquad z_{10n+7}=l$$

$$x_{10n+8}=b-q+\frac{B}{A}(d-s),\qquad y_{10n+8}=\frac{B}{A}(d-s),\qquad z_{10n+8}=m$$

$$x_{10n+9}=c-r+\frac{Br}{sk},\qquad y_{10n+9}=\frac{Br}{sk},\qquad z_{10n+9}=u$$

$$x_{10n+10}=d,\qquad y_{10n+10}=s,\qquad z_{10n+10}=v.$$

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{10n+11}=\frac{Ay_{10n+9}}{y_{10n+10}z_{10n+6}}+\frac{B}{z_{10n+7}}=\frac{Ar}{sk}+\frac{B}{l}, \qquad y_{10n+11}=\frac{B}{z_{10n+7}}=\frac{B}{l},$$
$$z_{10n+11}=\frac{A}{x_{10n+7}-y_{10n+7}}=\frac{A}{a-p}$$

$$x_{10n+12}=\frac{Ay_{10n+10}}{y_{10n+11}z_{10n+7}}+\frac{B}{z_{10n+8}}=\frac{A}{B}s+\frac{B}{m}, \qquad y_{10n+12}=\frac{B}{z_{10n+8}}=\frac{B}{m},$$
$$z_{10n+12}=\frac{A}{x_{10n+8}-y_{10n+8}}=\frac{A}{b-q}$$

$$x_{10n+13}=\frac{Ay_{10n+11}}{y_{10n+12}z_{10n+8}}+\frac{B}{z_{10n+9}}=\frac{A}{l}+\frac{B}{u}, \qquad y_{10n+13}=\frac{B}{z_{10n+9}}=\frac{B}{u},$$
$$z_{10n+13}=\frac{A}{x_{10n+9}-y_{10n+9}}=\frac{A}{c-r}$$

$$x_{10n+14}=\frac{Ay_{10n+12}}{y_{10n+13}z_{10n+9}}+\frac{B}{z_{10n+10}}=\frac{A}{m}+\frac{B}{v}, \qquad y_{10n+14}=\frac{B}{z_{10n+10}}=\frac{B}{v},$$
$$z_{10n+14}=\frac{A}{x_{10n+10}-y_{10n+10}}=\frac{A}{d-s}$$

$$x_{10n+15}=\frac{Ay_{10n+13}}{y_{10n+14}z_{10n+10}}+\frac{B}{z_{10n+11}}=\frac{A}{u}+\frac{B}{A}(a-p), \qquad y_{10n+15}=\frac{B}{z_{10n+11}}=\frac{B}{A}(a-p),$$
$$z_{10n+15}=\frac{A}{x_{10n+11}-y_{10n+11}}=\frac{sk}{r}$$

$$x_{10n+16}=\frac{Ay_{10n+14}}{y_{10n+15}z_{10n+11}}+\frac{B}{z_{10n+12}}=\frac{A}{v}+\frac{B}{A}(b-q), \qquad y_{10n+16}=\frac{B}{z_{10n+12}}=\frac{B}{A}(b-q),$$
$$z_{10n+16}=\frac{A}{x_{10n+12}-y_{10n+12}}=\frac{B}{s}$$

$$x_{10n+17}=\frac{Ay_{10n+15}}{y_{10n+16}z_{10n+12}}+\frac{B}{z_{10n+13}}=a-p+\frac{B}{A}(c-r), \qquad y_{10n+17}=\frac{B}{z_{10n+13}}=\frac{B}{A}(c-r),$$
$$z_{10n+17}=\frac{A}{x_{10n+13}-y_{10n+13}}=l$$

$$x_{10n+18}=\frac{Ay_{10n+16}}{y_{10n+17}z_{10n+13}}+\frac{B}{z_{10n+14}}=b-q+\frac{B}{A}(d-s), \qquad y_{10n+18}=\frac{B}{z_{10n+14}}=\frac{B}{A}(d-s),$$
$$z_{10n+18}=\frac{B}{x_{10n+14}-y_{10n+14}}=m$$

$$x_{10n+19}=\frac{Ay_{10n+17}}{y_{10n+18}z_{10n+14}}+\frac{B}{z_{10n+15}}=c-r+\frac{Br}{sk}, \qquad y_{10n+19}=\frac{B}{z_{10n+15}}=\frac{Br}{sk},$$

$$z_{10n+19}=\frac{A}{x_{10n+15}-y_{10n+15}}=u$$

$$x_{10n+20}=\frac{Ay_{10n+18}}{y_{10n+19}z_{10n+15}}+\frac{B}{z_{10n+16}}=d, \qquad y_{10n+20}=\frac{B}{z_{10n+16}}s,$$

$$z_{10n+20}=\frac{A}{x_{10n+16}-y_{10n+16}}=v.$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.5. $x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{1}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-4}-y_{n-4}}$ **Fark Denklem Sistemi**

Bu bölümde;

$x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4}$,

$x_{-3}\neq y_{-3},\ \ x_{-2}\neq y_{-2},\ \ x_{-1}\neq y_{-1},\ \ x_0\neq y_0$ (4.5.1)

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{1}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-4}-y_{n-4}},\ n\geq 0 \quad (4.5.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.5.1. $x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4},\ \ x_{-3}\neq y_{-3},\ \ x_{-2}\neq y_{-2},\ \ x_{-1}\neq y_{-1},\ \ x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.5.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri oniki periyotludur.

İspat: (4.5.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{1}{z_{n-4}},\qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-4}},\qquad z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-4}-y_{n-4}}$$

$$x_{n+2}=y_n+\frac{1}{z_{n-3}},\qquad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-3}},\qquad z_{n+2}=\frac{1}{x_{n-3}-y_{n-3}}$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{z_{n-4}}+\frac{1}{z_{n-2}},\qquad y_{n+3}=\frac{1}{z_{n-2}},\qquad z_{n+3}=\frac{1}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+4}=\frac{1}{z_{n-3}}+\frac{1}{z_{n-1}},\qquad y_{n+4}=\frac{1}{z_{n-1}},\qquad z_{n+4}=\frac{1}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{z_{n-2}}+\frac{1}{z_n},\qquad y_{n+5}=\frac{1}{z_n},\qquad z_{n+5}=\frac{1}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+6}=\frac{1}{z_{n-1}}+x_{n-4}-y_{n-4},\qquad y_{n+6}=x_{n-4}-y_{n-4},\qquad z_{n+6}=\frac{y_n z_{n-5}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+7}=\frac{1}{z_n}+x_{n-3}-y_{n-3}, \qquad y_{n+7}=x_{n-3}-y_{n-3}, \qquad z_{n+7}=\frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+8}=x_{n-4}-y_{n-4}+x_{n-2}-y_{n-2}, \qquad y_{n+8}=x_{n-2}-y_{n-2}, \qquad z_{n+8}=z_{n-4}$$

$$x_{n+9}=x_{n-3}-y_{n-3}+x_{n-1}-y_{n-1}, \qquad y_{n+9}=x_{n-1}-y_{n-1}, \qquad z_{n+9}=z_{n-3}$$

$$x_{n+10}=x_{n-2}-y_{n-2}+x_n-y_n, \qquad y_{n+10}=x_n-y_n, \qquad z_{n+10}=z_{n-2}$$

$$x_{n+11}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}, \qquad y_{n+11}=\frac{y_{n-1}}{y_n z_{n-5}}, \qquad z_{n+11}=z_{n-1}$$

$$x_{n+12}=x_n, \qquad y_{n+12}=y_n, \qquad z_{n+12}=z_n .$$

Teorem 4.5.2. $x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4},\ x_{-3}\neq y_{-3},\ x_{-2}\neq y_{-2},\ x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0$ olmak üzere, $x_{-4}=a, x_{-3}=b,$ $x_{-2}=c, x_{-1}=d, x_0=e,\ y_{-4}=f, y_{-3}=g, y_{-2}=h,\ y_{-1}=k, y_0=l,\ z_{-5}=m, z_{-4}=p, z_{-3}=q,$ $z_{-2}=s, z_{-1}=u, z_0=v,$ başlangıç şartları altında (4.5.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.5.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{12n+1}=\frac{k}{lm}+\frac{1}{p}, \qquad y_{12n+1}=\frac{1}{p}, \qquad z_{12n+1}=\frac{1}{a-f}$$

$$x_{12n+2}=l+\frac{1}{q}, \qquad y_{12n+2}=\frac{1}{q}, \qquad z_{12n+2}=\frac{1}{b-g}$$

$$x_{12n+3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{s}, \qquad y_{12n+3}=\frac{1}{s}, \qquad z_{12n+3}=\frac{1}{c-h}$$

$$x_{12n+4}=\frac{1}{q}+\frac{1}{u}, \qquad y_{12n+4}=\frac{1}{u}, \qquad z_{12n+4}=\frac{1}{d-k}$$

$$x_{12n+5}=\frac{1}{s}+\frac{1}{v}, \qquad y_{12n+5}=\frac{1}{v}, \qquad z_{12n+5}=\frac{1}{e-l}$$

$$x_{12n+6}=\frac{1}{u}+a-f, \qquad y_{12n+6}=a-f, \qquad z_{12n+6}=\frac{lm}{k}$$

$$x_{12n+7}=\frac{1}{v}+b-g, \qquad y_{12n+7}=b-g, \qquad z_{12n+7}=\frac{1}{l}$$

$$x_{12n+8}=a-f+c-h, \qquad y_{12n+8}=c-h, \qquad z_{12n+8}=p$$

$$x_{12n+9}=b-g+d-k, \qquad y_{12n+9}=d-k, \qquad z_{12n+9}=q$$

$$x_{12n+10}=c-h+e-l, \qquad y_{12n+10}=e-l, \qquad z_{12n+10}=s$$

$$x_{12n+11}=d-k+\frac{k}{lm}, \qquad y_{12n+11}=\frac{k}{lm}, \qquad z_{12n+11}=u$$

$$x_{12n+12}=e, \qquad y_{12n+12}=l, \qquad z_{12n+12}=v$$

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{12n+13}=\frac{y_{12n+11}}{y_{12n+12}z_{12n+7}}+\frac{1}{z_{12n+8}}=\frac{k}{lm}+\frac{1}{p}, \qquad y_{12n+13}=\frac{1}{z_{12n+8}}=\frac{1}{p},$$

$$z_{12n+13}=\frac{1}{x_{12n+8}-y_{12n+8}}=\frac{1}{a-f}$$

$$x_{12n+14}=\frac{y_{12n+12}}{y_{12n+13}z_{12n+8}}+\frac{1}{z_{12n+9}}=l+\frac{1}{q}, \qquad y_{12n+14}=\frac{1}{z_{12n+9}}=\frac{1}{q},$$

$$z_{12n+14}=\frac{1}{x_{12n+9}-y_{12n+9}}=\frac{1}{b-g}$$

$$x_{12n+15}=\frac{y_{12n+13}}{y_{12n+14}z_{12n+9}}+\frac{1}{z_{12n+10}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{s}, \qquad y_{12n+15}=\frac{1}{z_{12n+10}}=\frac{1}{s},$$

$$z_{12n+15}=\frac{1}{x_{12n+10}-y_{12n+10}}=\frac{1}{c-h}$$

$$x_{12n+16}=\frac{y_{12n+14}}{y_{12n+15}z_{12n+10}}+\frac{1}{z_{12n+11}}=\frac{1}{q}+\frac{1}{u}, \qquad y_{12n+16}=\frac{1}{z_{12n+11}}=\frac{1}{u},$$

$$z_{12n+16}=\frac{1}{x_{12n+11}-y_{12n+11}}=\frac{1}{d-k}$$

$$x_{12n+17}=\frac{y_{12n+15}}{y_{12n+16}z_{12n+11}}+\frac{1}{z_{12n+12}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{v}, \qquad y_{12n+17}=\frac{1}{z_{12n+12}}=\frac{1}{v},$$

$$z_{12n+17}=\frac{1}{x_{12n+12}-y_{12n+12}}=\frac{1}{e-l}$$

$$x_{12n+18}=\frac{y_{12n+16}}{y_{12n+17}z_{12n+12}}+\frac{1}{z_{12n+13}}=\frac{1}{u}+a-f, \qquad y_{12n+18}=\frac{1}{z_{12n+13}}=a-f,$$

$$z_{12n+18}=\frac{1}{x_{12n+13}-y_{12n+13}}=\frac{lm}{k}$$

$$x_{12n+19}=\frac{y_{12n+17}}{y_{12n+18}z_{12n+13}}+\frac{1}{z_{12n+14}}=\frac{1}{v}+b-g, \qquad y_{12n+19}=\frac{1}{z_{12n+14}}=b-g,$$

$$z_{12n+19}=\frac{1}{x_{12n+14}-y_{12n+14}}=\frac{1}{l}$$

$$x_{12n+20}=\frac{y_{12n+18}}{y_{12n+19}z_{12n+14}}+\frac{1}{z_{12n+15}}=a-f+c-h, \qquad y_{12n+20}=\frac{1}{z_{12n+15}}=c-h,$$

$$z_{12n+20}=\frac{1}{x_{12n+15}-y_{12n+15}}=p$$

$$x_{12n+21}=\frac{y_{12n+19}}{y_{12n+20}z_{12n+15}}+\frac{1}{z_{12n+16}}=b-g+d-k, \qquad y_{12n+21}=\frac{1}{z_{12n+16}}=d-k,$$

$$z_{12n+21}=\frac{1}{x_{12n+16}-y_{12n+16}}=q$$

$$x_{12n+22}=\frac{y_{12n+20}}{y_{12n+21}z_{12n+16}}+\frac{1}{z_{12n+17}}=c-h+e-l, \qquad y_{12n+22}=\frac{1}{z_{12n+17}}=e-l,$$

$$z_{12n+22}=\frac{1}{x_{12n+17}-y_{12n+17}}=s$$

$$x_{12n+23}=\frac{y_{12n+21}}{y_{12n+22}z_{12n+17}}+\frac{1}{z_{12n+18}}=d-k+\frac{k}{lm}, \qquad y_{12n+23}=\frac{1}{z_{12n+18}}=\frac{k}{lm},$$

$$z_{12n+23}=\frac{1}{x_{12n+18}-y_{12n+18}}=u$$

$$x_{12n+24}=\frac{y_{12n+22}}{y_{12n+23}z_{12n+18}}+\frac{1}{z_{12n+19}}=e, \qquad y_{12n+24}=\frac{1}{z_{12n+19}}=l,$$

$$z_{12n+24}=\frac{1}{x_{12n+19}-y_{12n+19}}=v$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.6. $x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{B}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-4}-y_{n-4}}$ **Fark Denklem Sistemi**

Bu bölümde;

$x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4}$,

$x_{-3}\neq y_{-3},\ \ x_{-2}\neq y_{-2},\ \ x_{-1}\neq y_{-1},\ \ x_0\neq y_0$ (4.6.1)

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{B}{z_{n-4}},\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-4}},\ z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-4}-y_{n-4}},\ n\geq 0 \tag{4.6.2}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.6.1. $x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0 \in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4},\ \ x_{-3}\neq y_{-3},\ \ x_{-2}\neq y_{-2},\ \ x_{-1}\neq y_{-1},\ \ x_0\neq y_0$ olmak üzere, (4.6.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda (4.6.2) denklem sisteminin bütün çözümleri oniki periyotludur.

İspat: (4.6.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-5}}+\frac{B}{z_{n-4}},\qquad y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-4}},\qquad z_{n+1}=\frac{A}{x_{n-4}-y_{n-4}}$$

$$x_{n+2}=\frac{A}{B}y_n+\frac{B}{z_{n-3}},\qquad y_{n+2}=\frac{B}{z_{n-3}},\qquad z_{n+2}=\frac{A}{x_{n-3}-y_{n-3}}$$

$$x_{n+3}=\frac{A}{z_{n-4}}+\frac{B}{z_{n-2}},\qquad y_{n+3}=\frac{B}{z_{n-2}},\qquad z_{n+3}=\frac{A}{x_{n-2}-y_{n-2}}$$

$$x_{n+4}=\frac{A}{z_{n-3}}+\frac{B}{z_{n-1}},\qquad y_{n+4}=\frac{B}{z_{n-1}},\qquad z_{n+4}=\frac{A}{x_{n-1}-y_{n-1}}$$

$$x_{n+5}=\frac{A}{z_{n-2}}+\frac{B}{z_n},\qquad y_{n+5}=\frac{B}{z_n},\qquad z_{n+5}=\frac{A}{x_n-y_n}$$

$$x_{n+6}=\frac{A}{z_{n-1}}+\frac{B}{A}(x_{n-4}-y_{n-4}),\qquad y_{n+6}=\frac{B}{A}(x_{n-4}-y_{n-4}),\qquad z_{n+6}=\frac{y_n z_{n-5}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+7}=\frac{A}{z_n}+\frac{B}{A}(x_{n-3}-y_{n-3}),\qquad y_{n+7}=\frac{B}{A}(x_{n-3}-y_{n-3}),\qquad z_{n+7}=\frac{B}{y_n}$$

$$x_{n+8}=x_{n-4}-y_{n-4}+\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}),\quad y_{n+8}=\frac{B}{A}(x_{n-2}-y_{n-2}),\quad z_{n+8}=z_{n-4}$$

$$x_{n+9}=x_{n-3}-y_{n-3}+\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}),\quad y_{n+9}=\frac{B}{A}(x_{n-1}-y_{n-1}),\quad z_{n+9}=z_{n-3}$$

$$x_{n+10}=x_{n-2}-y_{n-2}+\frac{B}{A}(x_n-y_n),\qquad y_{n+10}=\frac{B}{A}(x_n-y_n),\qquad z_{n+10}=z_{n-2}$$

$$x_{n+11}=x_{n-1}-y_{n-1}+\frac{By_{n-1}}{y_nz_{n-5}},\qquad y_{n+11}=\frac{By_{n-1}}{y_nz_{n-5}},\qquad z_{n+11}=z_{n-1}$$

$$x_{n+12}=x_n,\qquad y_{n+12}=y_n,\qquad z_{n+12}=z_n.$$

Teorem 4.6.2 $x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-4},y_{-3},y_{-2},y_{-1},y_0,z_{-5},z_{-4},z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0\in IR/\{0\}$ ve $x_{-4}\neq y_{-4},\ x_{-3}\neq y_{-3},\ x_{-2}\neq y_{-2},\ x_{-1}\neq y_{-1},\ x_0\neq y_0$ olmak üzere, $x_{-4}=a,x_{-3}=b,$ $x_{-2}=c,x_{-1}=d,x_0=e,\ y_{-4}=f,y_{-3}=g,y_{-2}=h,\ y_{-1}=k,y_0=l,\ z_{-5}=m,z_{-4}=p,z_{-3}=q,$ $z_{-2}=s,z_{-1}=u,z_0=v,$ başlangıç şartları altında (4.6.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.6.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{12n+1}=\frac{Ak}{lm}+\frac{B}{p},\qquad y_{12n+1}=\frac{B}{p},\qquad z_{12n+1}=\frac{A}{a-f}$$

$$x_{12n+2}=\frac{A}{B}l+\frac{B}{q},\qquad y_{12n+2}=\frac{B}{q},\qquad z_{12n+2}=\frac{A}{b-g}$$

$$x_{12n+3}=\frac{A}{p}+\frac{B}{s},\qquad y_{12n+3}=\frac{B}{s},\qquad z_{12n+3}=\frac{A}{c-h}$$

$$x_{12n+4}=\frac{A}{q}+\frac{B}{u},\qquad y_{12n+4}=\frac{B}{u},\qquad z_{12n+4}=\frac{A}{d-k}$$

$$x_{12n+5}=\frac{A}{s}+\frac{B}{v},\qquad y_{12n+5}=\frac{B}{v},\qquad z_{12n+5}=\frac{A}{e-l}$$

$$x_{12n+6}=\frac{A}{u}+\frac{B}{A}(a-f),\qquad y_{12n+6}=\frac{B}{A}(a-f),\qquad z_{12n+6}=\frac{lm}{k}$$

$$x_{12n+7}=\frac{A}{v}+\frac{B}{A}(b-g),\qquad y_{12n+7}=\frac{B}{A}(b-g),\qquad z_{12n+7}=\frac{B}{l}$$

$$x_{12n+8} = a - f + \frac{B}{A}(c-h), \qquad y_{12n+8} = \frac{B}{A}(c-h), \qquad z_{12n+8} = p$$

$$x_{12n+9} = b - g + \frac{B}{A}(d-k), \qquad y_{12n+9} = \frac{B}{A}(d-k), \qquad z_{12n+9} = q$$

$$x_{12n+10} = c - h + \frac{B}{A}(e-l), \qquad y_{12n+10} = \frac{B}{A}(e-l), \qquad z_{12n+10} = s$$

$$x_{12n+11} = d - k + \frac{Bk}{lm}, \qquad y_{12n+11} = \frac{Bk}{lm}, \qquad z_{12n+11} = u$$

$$x_{12n+12} = e, \qquad y_{12n+12} = l, \qquad z_{12n+12} = v$$

İspat: $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{12n+13} = \frac{Ay_{12n+11}}{y_{12n+12}z_{12n+7}} + \frac{B}{z_{12n+8}} = \frac{Ak}{lm} + \frac{B}{p}, \qquad y_{12n+13} = \frac{B}{z_{12n+8}} = \frac{B}{p},$$

$$z_{12n+13} = \frac{A}{x_{12n+8} - y_{12n+8}} = \frac{A}{a-f}$$

$$x_{12n+14} = \frac{Ay_{12n+12}}{y_{12n+13}z_{12n+8}} + \frac{B}{z_{12n+9}} = \frac{A}{B}l + \frac{B}{q}, \qquad y_{12n+14} = \frac{B}{z_{12n+9}} = \frac{B}{q},$$

$$z_{12n+14} = \frac{A}{x_{12n+9} - y_{12n+9}} = \frac{A}{b-g}$$

$$x_{12n+15} = \frac{Ay_{12n+13}}{y_{12n+14}z_{12n+9}} + \frac{B}{z_{12n+10}} = \frac{A}{p} + \frac{B}{s}, \qquad y_{12n+15} = \frac{B}{z_{12n+10}} = \frac{B}{s},$$

$$z_{12n+15} = \frac{A}{x_{12n+10} - y_{12n+10}} = \frac{A}{c-h}$$

$$x_{12n+16} = \frac{Ay_{12n+14}}{y_{12n+15}z_{12n+10}} + \frac{B}{z_{12n+11}} = \frac{A}{q} + \frac{B}{u}, \qquad y_{12n+16} = \frac{B}{z_{12n+11}} = \frac{B}{u},$$

$$z_{12n+16} = \frac{A}{x_{12n+11} - y_{12n+11}} = \frac{A}{d-k}$$

$$x_{12n+17} = \frac{Ay_{12n+15}}{y_{12n+16}z_{12n+11}} + \frac{B}{z_{12n+12}} = \frac{A}{s} + \frac{B}{v}, \qquad y_{12n+17} = \frac{B}{z_{12n+12}} = \frac{B}{v},$$

$$z_{12n+17} = \frac{A}{x_{12n+12} - y_{12n+12}} = \frac{A}{e-l}$$

$$x_{12n+18}=\frac{Ay_{12n+16}}{y_{12n+17}z_{12n+12}}+\frac{B}{z_{12n+13}}=\frac{A}{u}+\frac{B}{A}(a-f),\qquad y_{12n+18}=\frac{B}{z_{12n+13}}=\frac{B}{A}(a-f),$$

$$z_{12n+18}=\frac{A}{x_{12n+13}-y_{12n+13}}=\frac{lm}{k}$$

$$x_{12n+19}=\frac{Ay_{12n+17}}{y_{12n+18}z_{12n+13}}+\frac{B}{z_{12n+14}}=\frac{A}{v}+\frac{B}{A}(b-g),\qquad y_{12n+19}=\frac{B}{z_{12n+14}}=\frac{B}{A}(b-g),$$

$$z_{12n+19}=\frac{A}{x_{12n+14}-y_{12n+14}}=\frac{B}{l}$$

$$x_{12n+20}=\frac{Ay_{12n+18}}{y_{12n+19}z_{12n+14}}+\frac{B}{z_{12n+15}}=a-f+\frac{B}{A}(c-h),\qquad y_{12n+20}=\frac{B}{z_{12n+15}}=\frac{B}{A}(c-h),$$

$$z_{12n+20}=\frac{A}{x_{12n+15}-y_{12n+15}}=p$$

$$x_{12n+21}=\frac{Ay_{12n+19}}{y_{12n+20}z_{12n+15}}+\frac{B}{z_{12n+16}}=b-g+\frac{B}{A}(d-k),\qquad y_{12n+21}=\frac{B}{z_{12n+16}}=\frac{B}{A}(d-k),$$

$$z_{12n+21}=\frac{A}{x_{12n+16}-y_{12n+16}}=q$$

$$x_{12n+22}=\frac{Ay_{12n+20}}{y_{12n+21}z_{12n+16}}+\frac{B}{z_{12n+17}}=c-h+\frac{B}{A}(e-l),\qquad y_{12n+22}=\frac{B}{z_{12n+17}}=\frac{B}{A}(e-l),$$

$$z_{12n+22}=\frac{A}{x_{12n+17}-y_{12n+17}}=s$$

$$x_{12n+23}=\frac{Ay_{12n+21}}{y_{12n+22}z_{12n+17}}+\frac{B}{z_{12n+18}}=d-k+\frac{Bk}{lm},\qquad y_{12n+23}=\frac{B}{z_{12n+18}}=\frac{Bk}{lm},$$

$$z_{12n+23}=\frac{A}{x_{12n+18}-y_{12n+18}}=u$$

$$x_{12n+24}=\frac{Ay_{12n+22}}{y_{12n+23}z_{12n+18}}+\frac{B}{z_{12n+19}}=e,\qquad y_{12n+24}=\frac{B}{z_{12n+19}}=l,$$

$$z_{12n+24}=\frac{A}{x_{12n+19}-y_{12n+19}}=v$$

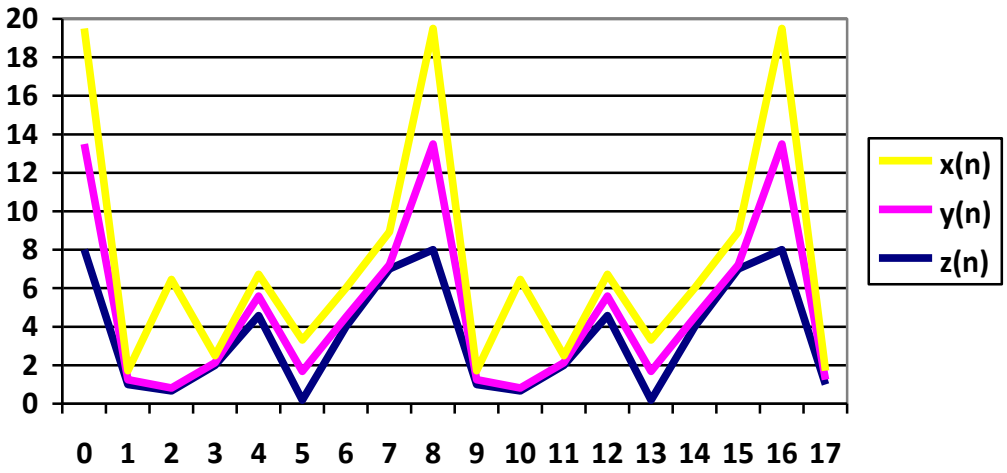
Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Örnek 5.1. (4.2.2) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, başlangıç şartları ise $x_{-2}=2$, $x_{-1}=4{,}5$, $x_0=6$, $y_{-2}=1$, $y_{-1}=3$, $y_0=5{,}5$, $z_{-3}=2{,}5$, $z_{-2}=4$, $z_{-1}=7$, $z_0=8$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin sekiz periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

n	x_n	y_n	z_n
0	6	5,5	8
1	0,468181	0,25	1
2	5,642857	0,142857	0,666666
3	0,375	0,125	2
4	1,142857	1	4,583350
5	1,625001	1,500001	0,181818
6	1,5	0,5	4
7	1,718182	0,218181	7,000007
8	6	5,5	8
9	0,468181	0,25	1
10	5,642857	0,142857	0,666666
11	0,375	0,125	2
12	1,142857	1	4,583350
13	1,625001	1,500001	0,181818
14	1,5	0,5	4
15	1,718182	0,218181	7,000007
16	6	5,5	8
17	0,468181	0,25	1
18	5,642857	0,142857	0,666666

Şekil 5.1.

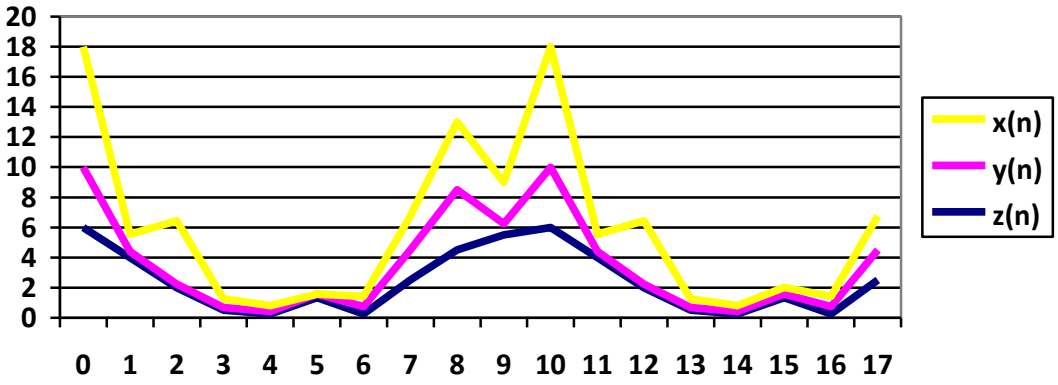


Örnek 5.2. (4.4.2) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, başlangıç şartları ise $x_{-3}=0,5$, $x_{-2}=2$, $x_{-1}=5$, $x_0=8$, $y_{-3}=0,25$, $y_{-2}=1,5$, $y_{-1}=3$, $y_0=4$, $z_{-4}=1$, $z_{-3}=2,5$, $z_{-2}=4,5$, $z_{-1}=5,5$, $z_0=6$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin on periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

n	x_n	y_n	z_n
0	8	4	6
1	1,15	0,4	4
2	4,222222	0,222222	2
3	0,581818	0,181818	0,5
4	0,388888	0,166666	0,25
5	0,431818	0,25	1,333333
6	0,666666	0,5	0,25
7	2,25	2	2,5
8	4,5	4	4,500004
9	2,75	0,75	5,500005
10	8	4	6
11	1,15	0,4	4

12	4,222222	0,222222	2
13	0,581818	0,181818	0,5
14	0,388888	0,166666	0,25
15	0,431818	0,25	1,333333
16	0,666666	0,5	0,25
17	2,25	2	2,5
18	4,5	4	4,500004

Şekil 5.2.

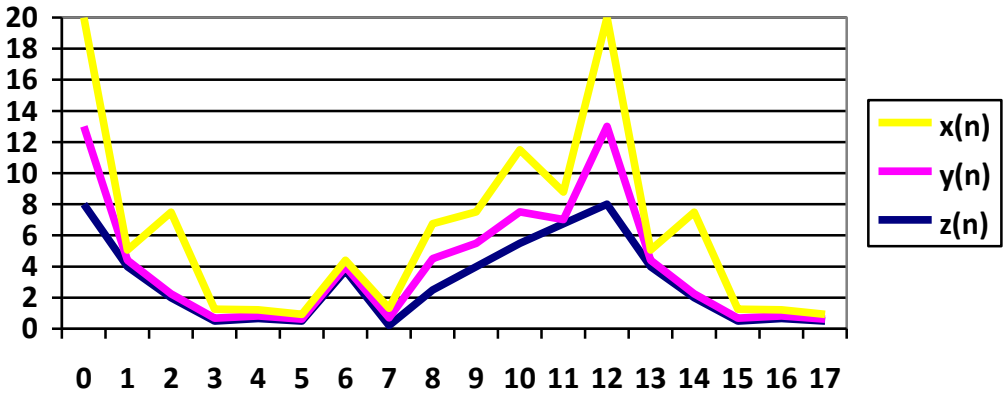


Örnek 5.3. (4.6.2) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, başlangıç şartları ise $x_{-4}=0,5$, $x_{-3}=2$, $x_{-2}=3$, $x_{-1}=6$, $x_0=7$, $y_{-4}=0,25$, $y_{-3}=1,5$, $y_{-2}=1$, $y_{-1}=4,5$, $y_0=5$, $z_{-5}=0,75$, $z_{-4}=2,5$, $z_{-3}=4$, $z_{-2}=5,5$, $z_{-1}=6,75$, $z_0=8$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin on iki periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

n	x_n	y_n	z_n
0	7	5	8
1	0,666666	0,4	4
2	5,25	0,25	2
3	0,581818	0,181818	0,5
4	0,398148	0,148148	0,666666

5	0,306818	0,125	0,5
6	0,398148	0,25	3,750009
7	0,625	0,5	0,2
8	2,25	2	2,5
9	2,000001	1,500001	4
10	4	2	5,500005
11	1,766667	0,266666	6,750006
12	7	5	8
13	0,666666	0,4	4
14	5,25	0,25	2
15	0,581818	0,181818	0,5
16	0,398148	0,148148	0,666666
17	0,306818	0,125	0,5
18	0,398148	0,25	3,750009

Şekil 5.3



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, daha önce literatürde çalışılmış olan pek çok fark modeli göz önüne alınarak, lineer olmayan fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin periyotları incelenmiş ve sonuçlar grafikler üzerinde gösterilmiştir.

6.2. Öneriler

Bu çalışmada göz önüne alınan fark modelleri bir araya getirilerek daha genel bir fark modeli oluşturulabilir. Ayrıca elde edilen bu fark denklem sisteminin davranışları, kararlılığı ve denge noktaları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Camouzis E., Papaschinopoulos G., 2004, Global asymptotic behaviour of positive solutions on the system of rational difference equations $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$, *Applied Mathematics Letters,* vol.117, no.6, 733-737.

Çınar C., Yalçınkaya İ., 2004, On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$, *International Mathematical Journal,*vol 5, no 5.

Dehghan M., Nasri M., Douraki M. J., Study of a system of non-linear difference equations arising in a deterministic model for HIV infection, *Applied Mathematics and Computation,* Iran, 1306-1330.

Doebeli M., Jong G. D., 1999, Genetic Variability in Sensitivity to Population Density Affects the Dynamics of Simple Ecological Models, *Therotical Population Biology,* Switzerland, 37-52.

Elaydi S., 1995, An Introduction to difference equations, Springer.

Hassel M.P., 1975, Density dependence in single-species populations, *J. Anim. Ecol.*,283-295.

Henson S. M., Constantino R. F., Cushing J. M., Dennis B., Desharnais R. A., 1999, Multiple Attractors, Saddles and Population Dynamics in Periodic Habitats, *Bulletin of Mathematican Biology,* USA, 1121-1149.

Kang Y., Armbruster D., 2011, Dispersal effects on a discrete two patch model for plant-insect interactions, *Journal of Therotical Biology,* USA, 84-97.

Kulenovic M. R. S., Ladas G., 2002, *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjecture,* Bocaraton, London.

Özban A. Y., 2006, On the positive solutions of the system of rational difference *and Applications,* vol. 323, 126-132.

Papaschinopoulos G., Schinas C. J., 1998, On a system of two non-linear difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 219, 415-426.

Schinas C., 1997, Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 216, 164-179.

Sun T., Xi H., 2005, Global behavior of the non-linear difference equation $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t})$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 311, 760-765.

Taskara N., Uslu K., Tollu D. T., 2010, The periodicity and solutions of the rational difference equation with periodic coefficients, *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 62 (4), 1807-1813.

Yalcinkaya İ., Cinar C., Simsek D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis,* vol 87(6), 677-687.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Mehmet EMRE
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Ankara – 16.11.1977
Telefon	**:**	0 505 6403753
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	emrebattal77@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:		
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2000
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2014
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2004 -	Konevi Anadolu Lisesi	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Emre M., Uslu K., 2014, On the periodicity of some non-linear difference equation systems, Selçuk Journal of Applied Mathematics, in press.