



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLERLEYEN TÜR TİP II SAĞDAN SANSÜRLEME ALTINDA BAZI YAŞAM ZAMANI DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Ecem DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Ocak-2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ecem DEMİR

Tarih:06.01.2015

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLERLEYEN TÜR TİP II SAĞDAN SANSÜRLEME ALTINDA BAZI YAŞAM ZAMANI DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Ecem DEMİR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2015, 58 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. İsmail KINACI
Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu tez çalışmasında, ilerleyen tür tip II sansürleme altında, bazı yaşam zamanı dağılımlarının parametreleri için en çok olabilirlik ve lindley yaklaşımı kullanılarak yaklaşık bayes tahmin edicileri elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin yanları ve hata kareler ortalamaları Monte Carlo Simülasyon metodu kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İlerleyen tür tip-II sansürlü örneklem, En Çok Olabilirlik tahmini, Bayes tahmini, Lindley yaklaşımı

ABSTRACT

MS THESIS

PARAMETER ESTİMATİON FOR SOME LİFETİME DİSTRİBUTİONS UNDER PROGRESSİVE TYPE II CENSORED SAMPLE

Ecem DEMİR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN STATISTICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2015, 58 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. İsmail KINACI
Assoc. Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

In this thesis, it is obtained that Maximum Likelihood and approximate Bayes Estimators using Lindley approximation for parameters of some life time distributions under progressive type II censored samples and Biases and Mean Squares Eroors of these estimators are compared using Monte Carlo simulation method.

Keywords: Progressively type II censored samples, Maximum Likelihood Estimator, Bayes Estimator, Lindley Approximation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmam süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU' na, manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ecem DEMİR
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

ÇİZELGELER ..... **ix**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **4**

2.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Serisi 4
2.2. Newton-Raphson Metodu 4
2.3. Sıra İstatistikleri 6
2.4. Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem 7
2.5. İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem 7
2.5.1. İlerleyen Tür Sansürlü Örneklem İçin Sayı Üretme 8
2.6. Tahmin 10
2.6.1. En çok olabilirlik tahmini 10
2.6.2. Bayes tahmini 11
2.6.2.1. Lindley Yaklaşımı 12
2.6.3. Tahmin edicilerde aranan özellikler 14
2.6.3.1. Yansızlık 14
2.6.3.2.Küçük Hata Kareler Ortalamasına Sahip Olma 14

3. BAZI SÜREKLİ DAĞILIMLAR İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ **15**

3.1. Weibull Dağılımı 15
3.1.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Weibull Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini 15
3.1.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Weibull Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini 16
3.1.3 Simülasyon Çalışması 19
3.2. Gompertz Dağılımı 21
3.2.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Gompertz Dağılımı İçin En çok Olabilirlik Tahmini 22
3.2.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Gompertz Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini 22
3.2.3 Simülasyon Çalışması 25
3.3 Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım 27
3.3.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini 27

3.4 Chen Dağılımı 36
3.4.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Chen Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini 36
3.4.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Chen Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini 37
biçiminde elde edilir. 39
3.4.3 Simülasyon Çalışması 39
3.5. Üstelleştirilmiş Pareto 42
3.5.1. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini 42
3.5.2. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini 43
3.5.3 Simülasyon Çalışması 47
3.6. Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı 49
3.6.1. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini 50
3.6.2. Simülasyon çalışması 52

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 55

4.1 Sonuçlar 55
4.2 Öneriler 55

KAYNAKLAR 56

ÖZGEÇMİŞ.....58

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

λ : parametre

β : parametre

$\hat{\lambda}_{EÇO}$: λ parametresinin en çok olabilirlik tahmini

$\hat{\beta}_{EÇO}$: β parametresinin en çok olabilirlik tahmini

$\hat{\lambda}_{LBayes}$: λ parametresinin yaklaşık bayes tahmin edicisi

$\hat{\beta}_{LBayes}$: β parametresinin yaklaşık bayes tahmin edicisi

Kısaltmalar

MLE/ EÇO : En çok olabilirlik tahmin edicisi

MSE/HKO : Hata kareler ortalaması

o.y.f. : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

o.o.y.f. : Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

d.f. : Dağılım Fonksiyonu

ÇİZELGELER

Tablo 1: Weibull Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması
Tablo 2: Gompertz Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması
Tablo 3: Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması
Tablo 4: Chen Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması
Tablo 5: Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması
Tablo 6: Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı İçin EÇO Tahmin Edicilerinin Yan ve HKO değerleri

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bir sistemin güvenilirliği incelenirken; ilgilenilen rastgele değişken çoğu zaman yaşam süresidir. Yaşam zamanı dağılımları Üstel, Weibull, Gamma, Pareto, Lomax, Gompertz gibi dağılımlar olabilmektedir. Yaşam testinde ve güvenilirlik çalışmalarında sistemi oluşturan tüm bileşenlerin bozulma zamanlarını gözlemlemek her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin; bir klinikte tedavi gören hastalara ilişkin veriler, eksiksiz gözlenemeyebilir veya pahalı bir elektronik parçanın yaşam zamanı hakkında bilgi edinmek için yapılan yaşam testinde, parçaların hepsinin bozulmalarının gözlenmesi maliyeti ve test zamanı artıracağından istenmeyebilir. Bu tip durumlarda, deney ya da gözlem sonrası sansürlenmiş veri elde edilir. Tıp, biyoloji, mühendislik, kalite kontrol ve birçok alanda sansürlenmiş verilerle karşılaşılmaktadır (Kuş, 2004).

Deney ya da gözlemler sonucunda değişik sansür türleriyle karşılaşmak mümkündür. Birinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, t gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce, sistemdeki bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. İkinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, n birimden oluşan bir sistemin bozulan $k \le n$ biriminin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. (Kale, 2003)

İkinci tip sansürlemenin en çok kullanılan türü, ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlemedir (progressive type-II right censored). Bu sansürleme modeli şu şekilde açıklanabilir: n sayıda özdeş bileşenin (aynı yaşam zamanı dağılımına sahip) yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen *1.* bozulma ile rasgele R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini, daha sonra geriye kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, *2.* bozulma ile rasgele R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece *m.* bozulma ile rasgele R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle m bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen m hacimli örneklem ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemdir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000). Bazı yaşam zamanı dağılımları için İlerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem altında birçok tahmin çalışması bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

Preda V. ve arkadaşları (2010) Modified Weibull dağılımı için çeşitli kayıp fonksiyonları altında Lindley yaklaşımını kullanarak ölçek ve şekil parametrelerinin Bayes tahminlerini elde etmişlerdir.

El-Gohary ve arkadaşları (2013) Üstel, Gompertz Ve Genelleştirilmiş Üstel Dağılımlarının yeni bir genelleştirilmesi olan Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı önerilmiş ve tam örneklem durumunda, bu dağılımın parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicisine dayalı bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Kunimura D. (1997), bu çalışmasında en çok olabilirlik ve sıra istatistiklerine dayalı Gompertz dağılımı için tahmin ediciler elde etmiştir. Prosedürü gösteren örnekler içermektedir.

Saraçoğlu, B. (2012), bu makalede, Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmin edicilerinin yanlarını ve hata kareler ortalamalarını Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırmıştır.

Kuş, C. (2004), tarafından yazılan tez çalışmasında, tam ve sansürlü verilere dayalı bazı yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini, güven aralıklarını ve güven bölgelerini elde etmiştir. Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak, bu tahmin edicilerin özelliklerini incelemiş, tam ve ilk bozulma sansürlü örneklemler için beklenen test süresini elde etmiş ve karşılaştırmıştır.

Kuş, C. (2005), bu makalede, Düzgün dağılımın parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı Jacknife tahmin edicilerini elde etmiştir. Jacknife yönteminin uygulandığı ve uygulanmadığı tahmin edicilerin beklenen değer ve varyansları türetilmiş ve karşılaştırılmıştır. Tahmin edicilerin kullanımı için nümerik bir örnek verilmiştir.

Wu S.J. (2002). Bu makalede, Weibull dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı parametre tahmini problemi incelenmiştir. Parametrelerin nokta tahminini türetmek için en çok olabilirlik metodu kullanılmıştır. Parametreler için tam güven aralığı ve ortak güven bölgesi elde edilmiştir. Burada önerilen yöntemi göstermek için sayısal bir örnek verilmiştir.

Wu S.J. ve ark. 2003. Bu makalede ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklem altında Gompertz dağılımı için nokta ve aralık tahminleri elde edilmiştir.

Wu S.J., Chang C.T. 2003. Bu makalede Pareto dağılımın ileryen tür tip-II rasgele ayrılmalı(ayrılan parçaların sayısının dağılımı kesikli düzgün) sansürlü örneklem altında tahmin problemi ele alınmıştır. Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Beklenen test zamanı bulunmuştur.

Kundu D. (2008), ilerleyen tür sansürleme altında Weibull dağılımının bilinmeyen parametreleri için Lindley yaklaşımını kullanarak Bayes tahminini yapmıştır.

Bairamov I. 2006. Bu çalışmada çok değişkenli gözlemler için ilerleyen tür tip-II sansürlü sıra istatistikleri konusu ele alınmıştır.

Balakrishnan, N., Aggarwala, R. (2000). Bu kitapta ilerleyen tür sansür teorisi ve uygulamaları yer almaktadır.

Balakrishnan, N. (2007). İlerleyen tür sansürlü sıra istatistiklerinin özellikleri ve ilerleyen tür sansürlenmiş örnekleme dayalı istatistiksel sonuç çıkarımı konusu incelenmiştir. Bu makalede ilerleyen sansürleme alanındaki gelişmelerden bahsedilmiş ve ileriki çalışmalar için potansiyel problemler sunulmuştur.

Balakrishnan, N., Sandu, R.A. (1995). Bu çalışmada ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklem üretme metodu verilmiştir.

Chen (2000). Bu makalede, bozulma oranı fonksiyonlarını içeren iki parametreli yeni bir dağılım önerilmiştir.

Wu, C.C. ve ark. (2006). Bu makalede, binom çıkarımlarıyla ilerleyen tür sansürleme altında iki parametreli Gompertz dağılımı için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve beklenen test süresi tahminleri elde edilmiştir. İki parametrenin en çok olabilirlik tahminleri ve onların asimptotik dağılımları türetilmiştir.

Saraçoğlu, B., Kınacı, İ., Kundu D. (2012), Bu makalede, Üstel dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı stres-dayanıklılık parametresinin ($R = P(Y < X)$) EÇO ve bayes tahmin edicileri elde edilmiştir.

Shawky, A.I., Abu-Zinadah, H.H. (2009), Bu makalede, Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı için en çok olabilirlik tahmini konusu ve 5 farklı tahmin yöntemi incelenmiştir.

Kale, B. (2003), tarafından hazırlanan bu tez çalışmasında ilerleyen tür tip-II sansürlenmiş sıra istatistikleri ve dağılım özellikleri konusu incelenmiştir.

David, H. (1970), bu kitapta sıra istatistikleri ve dağılımları konusu incelenmiştir.

Lindley, D. (1980), bu makalede, Bayes tahmin edicilerinde karşılaşılan oran integrallerinin yaklaşık çözümlerine ilişkin bir metot geliştirilmiştir.

Öztürk, F. (2006), bu kitapta parametre tahmini ve hipotez testleri konuları incelenmiş ve bol örnek çözülmüştür.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez içerisinde sıklıkla kullanılan tanımlar ve temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır.

2.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Serisi

$z = f(x,y)$ kapalı bir bölgede $n.$ mertebeden sürekli ve açık bölgede $(n+1).$ mertebeden türevli ise bölgenin bir (a,b) noktası komşuluğunda iki değişkenli fonksiyonlar için Taylor formülü

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2 f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right] \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right]^n_{x=a,y=b} + R_n(x,y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada R_n,

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right]^{n+1}_{x=a,y=b} f(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanır ve Lagrange kalanı olarak adlandırılır (Berksoy ve Özkan 2001).

2.2. Newton-Raphson Metodu

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün bulunması için kullanılan iteratif yöntemlerden biridir. $f(x)$ sürekli ve türevlenebilen fonksiyonunun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. $f(x_n+h)$ fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa;

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} hf''(\xi_n), \quad \xi \in (x_n, x_n + h) \tag{2.3}$$

yazılabilir. $x_n + h = x_{n+1}$ değerinin gerçek köke çok yakın olduğu yani $f(x_n + h)$' ın hemen hemen sıfır olduğu düşünülürse,

$$0 = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_n), \qquad \xi \in (x_n, x_n + h) \tag{2.4}$$

yazılır. Şayet h yeterince küçük ise h^2'yi içeren terim ve sonraki terimler ihmal edilebilir. Böylece

$$f(x_n) + hf'(x_n) = 0 \tag{2.5}$$

veya

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir. Eğer $h = x_{n+1} - x_n$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki iterasyon denklemine ulaşılır.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.7}$$

Newton – Raphson yöntemi geometrik olarak incelenecek olursa $f(x) = 0$ denkleminin başlangıç yaklaşık kökü x_0 olmak üzere fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Bu teğetin x eksenini kestiği nokta ilk kök yaklaşımı olur ve

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.9}$$

elde edilir. Bu şekilde ardışık yaklaşımlar kullanılarak, gerçek köke ulaşılır (Oturanç ve ark, 2003).

2.3. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, herhangi bir $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenlerin sıraya dizilmesiyle elde edilen $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ rasgele değişkenlerine sıra istatistikleri denir. $X_{i:n}$ rasgele değişkeni ise *i*. sıra istatistiği olarak isimlendirilir.

$X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ile gösterilen birinci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_1(x) = P\{X_{1:n} \le x\} = 1 - (1 - F(x))^n \tag{2.10}$$

ve

$X_{n:n} = \text{maks}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ile tanımlanan n.sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_n(x) = P\{X_{n:n} \le x\} = (F(x))^n \tag{2.11}$$

biçimindedir. $1 \le r \le n$ olmak üzere *r*. sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu (df) ise

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt \tag{2.12}$$

şeklindedir. Şayet X_i' ler $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna (o.y.f) sahip sürekli rasgele değişkenler ise *r*. sıra istatistiğinin o.y.f. 'nu,

$$f_r(x) = \frac{dF_r(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x) \tag{2.13}$$

olur. Burada

$$\mathrm{B}(r, n-r+1) = (n!)^{-1} (r-1)!(n-r)!$$

şeklindedir (David 1970).

$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.o.y.f) ise

$$f_{1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \times \cdots \times f(x_n), \quad -\infty < x_1 \le \cdots \le x_n < \infty \tag{2.14}$$

biçimindedir (David 1970).

2.4. Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem

n sayıda özdeş bileşenin bir sistemde yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen $m \le n$ bozulma ile yaşam testi sona erdirilsin. Bu şekilde yapılan sansürlemeye *Tip-II sağdan sansürleme* denir (Kale 2003).

$X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{m:n}$, olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olan dağılımdan alınan tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{m:n}$' nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir (David 1970).

$$f_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{n!}{(n-m)!}\left(\prod_{i=1}^{m} f(x_i)\right)\{1-F(x_m)\}^{n-m} \quad , -\infty < x_1 < \cdots < x_m < \infty \tag{2.15}$$

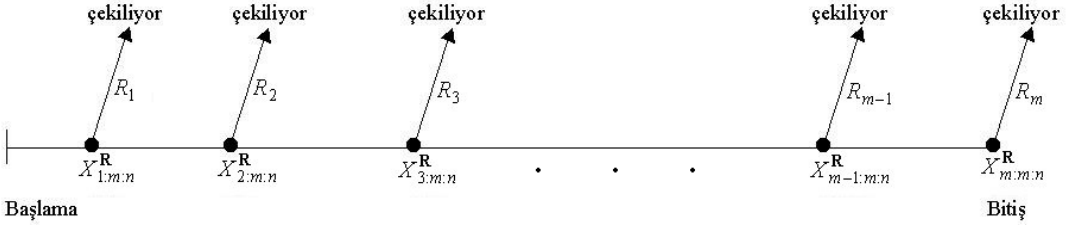
Tip-II sağdan sansürleme, yaşam testinin maliyetini ve süresini azaltmasına karşın sonuç çıkarımının güvenilirliğini azaltmaktadır.

2.5. İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem

İlerleyen tür tip-II sağan sansürlü örnekleme, yaşam zamanı analizlerinde veri elde etmede önemli bir yöntemdir. Çalışan parça diğer bir test için sistemden çekilip, deneyim maliyeti ve deney süresi azaltılabilir (Kuş 2004).

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlenmiş model (Progressive type-II right censored model) şu şekilde tanımlanmaktadır:

n sayıda özdeş bileşenin bir sistemde yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen *1.* bozulma ile R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini daha sonra geriye kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, *2.* bozulma ile R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece *m.* bozulma ile R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle *m* bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen *m* hacimli örnekleme *ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem* denir. $X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < X_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ şeklinde gösterilir. Burada $n = m + \sum_{i=1}^{m} R_i$ biçimindedir ve $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şeması olarak adlandırılır (Balakrishnan ve Aggarwala 2000).



Şekil 1. İlerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem planı

Olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olan dağılımdan alınan ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem, $X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{X^{\mathbf{R}}_{1:m:n}, X^{\mathbf{R}}_{2:m:n}, \ldots, X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$= c\prod_{i=1}^{m} f(x_i)[1-F(x_i)]^{R_i} \quad , -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty \tag{2.16}$$

şeklindedir. Burada

$$c = n(n-R_1-1)\times\cdots\times(n-R_1-R_2-\cdots-R_{r-1}-m+1), \tag{2.17}$$

biçimindedir. (2.17)'de $\mathbf{R} = (0,\ldots,0)$ alınırsa bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.14), $\mathbf{R} = (0,\ldots,n-m)$ alınırsa tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.15) elde edilir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000).

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem hakkında daha ayrıntılı bilgi için Balakrishnan ve Aggarwala'ya (2000) bakılabilir.

2.5.1. İlerleyen Tür Sansürlü Örneklem İçin Sayı Üretme

Düzgün Dağılım kullanılarak herhangi bir sürekli dağılım için ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemden sayı üretmek için aşağıdaki algoritma geliştirilmiştir (Balakrishnan ve Sandu 1995).

$U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < U^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R}$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$V_1 = \frac{1-U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}{1-U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}}$$
$$V_2 = \frac{1-U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}}{1-U^{\mathbf{R}}_{m-2:m:n}}$$
$$\vdots$$
$$V_m = 1-U^{\mathbf{R}}_{1:m:n}$$

rasgele değişkenleri bağımsızdır ve beta dağılımına sahip rasgele değişkenlerdir. Kısaca $V_i \sim Beta\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j, 1\right),\ i=1,2,\ldots,m$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $W_i = V_i^{\,i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j},\ i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımına sahiptir. Bu dönüşümden faydalanarak $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış **R** sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem üretmek için aşağıdaki algoritma yazılabilir.

1. $W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılıma sahip m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i = W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}},\ i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri tanımlanır.
3. $U^{\mathbf{R}}_{i:m:n} = 1-V_m V_{m-1}\cdots V_{m-i+1},\ i=1,2,\ldots,m$ dönüşümü kullanılarak, Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R}=(R_1,R_2,\ldots,R_m)$ sansür şemalı $U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < U^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ biçiminde gösterilen ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde edilir.
4. Son olarak $X^{\mathbf{R}}_{i:m:n} = F^{-1}\left(U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}\right),\ i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkeni tanımlanarak $X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ biçiminde gösterilen sürekli F dağılımından alınmış **R** sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde edilir. Burada $F^{-1}(\cdot)$, sayı üretilmek istenilen sürekli dağılımın dağılım fonksiyonunun tersidir. (Balakrishnan, Aggarwala, 2000).

2.6. Tahmin

İstatistik biliminin başlıca problemlerinden birisi parametre tahminidir. Parametre tahmininde esas amaç, içinde bulunulan durum için bilinmeyen parametrelerin en iyi özelliklere sahip tahmin edicisini elde etmektir. Literatürde, dağılımların parametrelerini tahmin etmek için çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Bu tez çalışmasında, bu tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik (EÇO) ve Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen yaklaşık Bayes tahmin yöntemlerine yer verilecektir.

2.6.1. En çok olabilirlik tahmini

Bu yöntemin prensibi elde edilen örneklemin değerlerine bakarak bu değerlerin elde edilmesi olasılığının en yüksek yapan parametre değerinin, kitle parametresinin tahminini vermesidir.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ o.(y).f. $f(x;\theta)$ olan bir kitleden alınan örneklem olmak üzere bu örneklemin o.o.(y).f.' na sadece θ parametresinin bir fonksiyonu gözüyle bakıldığında bu fonksiyon θ nın olabilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Buna göre θ nın olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta|\ x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n|\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\ \theta) \tag{2.18}$$

şeklinde olacaktır. Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan θ değeri θ' nın en çok olabilirlik tahmini olarak adlandırılır. Yani θ' nın en çok olabilirlik tahmin edicisi (EÇOTE);

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{arg\,max}\, L(\theta|\ X_1, X_2, ..., X_n) \tag{2.19}$$

şeklinde yazılabilir.

Genellikle büyük kolaylıklar sağlaması açısından θ' nın EÇO tahmin edicisi bulunurken $L(\theta|\ x_1, x_2, ..., x_n)$ olabilirlik fonksiyonu yerine bu fonksiyonun logaritması kullanılır. Bu fonksiyon monoton artan olduğundan;

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\ x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{\theta \in \Theta} log\, L(\theta|\ x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.20}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $log\, L(\theta|\ x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu log olabilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır ve kısaca $log\, L$ olarak gösterilir (Öztürk ve ark. (2006)).

2.6.2. Bayes tahmini

Parametre tahmin problemlerinde genellikle parametrelerin rasgele olmayan sabit değerler olduğu varsayılır. Bayes yönteminde ise, bu parametrelere uygun bir önsel dağılıma sahip rasgele değişkenler gözüyle bakılır. Yani, Bayes tahmin edicilerinin bulunmasında θ parametresinin bir dağılıma (prior veya önsel dağılım) sahip olduğu varsayılır. Daha sonra θ' nın önsel dağılım ve örneklem bilgisi kullanılarak θ' nın bir sonsal dağılımı elde edilir. θ' nın elde edilen bu sonsal dağılıma göre beklenen değeri θ' nın bayes tahmini olarak adlandırılır.

Bir θ parametresinin Bayes tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

θ' nın önsel dağılımı $\pi(\theta)$ ve θ bilindiğinde $X:(X_1, X_2, ..., X_n)$ örnekleminin geldiği o.y.f. $f(\underline{x}|\ \theta)$ olsun. Buna göre X ve θ' nın o.o.y.f. ;

$$f(\underline{x}, \theta) = \pi(\theta)\, f(\underline{x}|\ \theta) \tag{2.21}$$

biçiminde yazılabilir. (2.21) eşitliği kullanılarak X ' in marjinal o.y.f.

$$f_X(\underline{x}) = \int_{\theta} f(\underline{x}, \theta)\, d\theta \tag{2.22}$$

bulunur. X bilindiğinde θ' nın koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

$$\pi(\theta|\ \underline{x}) = \frac{f(\underline{x}, \theta)}{f_X(\underline{x})} \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\pi(\theta|\ \underline{x})$ fonksiyonu θ' nın sonsal (posterior) dağılımının o.y.f. dur. Dolayısıyla θ' nın Bayes tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{Bayes} &= E(\theta|\underline{x}) \\ &= \int_{\theta\in\Theta} \theta\pi(\theta|\underline{x})\, d\theta \\ &= \frac{\int_{\theta\in\Theta} \theta L(\theta|\underline{x})\pi(\theta)\, d\theta}{\int_{\theta\in\Theta} L(\theta|\underline{x})\pi(\theta)\, d\theta} \end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak elde edilir. (Öztürk ve ark. (2006)).

2.6.2.1. Lindley Yaklaşımı

Eşitlik (2.24) ile verilen ve iki integralin oranı şeklinde ifade edilen Bayes tahmin edicisinin elde edilmesinde genellikle güçlükler ortaya çıkmaktadır. Lindley (1980) tarafından, n' in yeterince büyük olması durumunda çok parametreli dağılımlarda zorlanılan integrallerin yaklaşık çözümüne ilişkin aşağıdaki metod geliştirilmiştir.

$$\frac{\int_{\theta} w(\underline{\theta}) e^{\ell(\theta)} d\theta}{\int_{\theta} \pi(\underline{\theta}) e^{\ell(\theta)} d\theta} \tag{2.25}$$

Burada, $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)$, parametre vektörünü, Θ parametre uzayını, $\ell(\underline{\theta})$ olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını, $\pi(\underline{\theta})$, $\underline{\theta}$ parametresinin rasgele seçilmiş ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. $u(\underline{\theta})$, $\underline{\theta}$' nın bir fonksiyonu olmak üzere $w(\underline{\theta}) = u(\underline{\theta})\pi(\underline{\theta})$ alınarak $u(\underline{\theta})$' nın sonsal beklenen değeri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$E\left[u(\underline{\theta}/X)\right] = \frac{\int_{\Theta} u(\theta) e^{\ell(\theta)+G(\theta)} d\theta}{\int_{\Theta} e^{\ell(\theta)+G(\theta)} d\theta} \tag{2.26}$$

(2.26) 'da verilen eşitlikte $G(\underline{\theta})$, $\underline{\theta}$ parametresinin ortak önsel dağılımının logaritmasıdır ve $G(\underline{\theta}) = \log \pi(\underline{\theta})$ şeklinde gösterilir. O halde (2.26) eşitliğinin yaklaşık değeri aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} u(\hat{\theta})_{LBayes} &= E\left[u(\underline{\theta})/X\right] \\ &\approx \left\{ u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left(u_{ij} + 2u_i g_j\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l \right\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Burada p, bilinmeyen parametre sayısını ifade etmektedir. Ayrıca,

$$\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial\theta_i \partial\theta_j \partial\theta_k},\ i = 1,2,...,p,\ j = 1,2,...,p,\ k = 1,2,...,p \tag{2.28}$$

$$\ell_{ij} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta_i \partial\theta_j},\ i = 1,2,...,p,\ j = 1,2,...,p \tag{2.29}$$

$$u_i = \frac{\partial u(\theta)}{\partial\theta_i},\ i = 1,2,...,p \tag{2.30}$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u(\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j},\ i = 1,2,...,p,\ j = 1,2,...,p \tag{2.31}$$

$$\sigma_{ij} = \left[-\ell_{ij}\right]^{-1},\ i = 1,2,...,p,\ j = 1,2,...,p \tag{2.32}$$

şeklindedir.

$p = 2$ için Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen yaklaşık bayes tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} u\left(\hat{\theta}\right)_{LBayes} &= E\left[u(\underline{\theta}) / X\right] \\ &\approx \left\{u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(u_{ij} + 2u_i g_j\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l\right\} \\ &\approx u\left(\hat{u}_1, \hat{u}_2\right) + \frac{1}{2}\left\{a_{1i} + a_{2i}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12}\right)d + \left(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22}\right)e\right\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$, u_1 ve u_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleridir. Burada, a_{1i}, a_{2i}, d ve e aşağıdaki gibidir.

$$a_{1i} = \left(u_{1i} + 2u_1 g_i\right)\sigma_{1i},\ i = 1,2 \tag{2.34}$$

$$a_{2i} = \left(u_{2i} + 2u_2 g_i\right)\sigma_{2i},\ i = 1,2 \tag{2.35}$$

$$d = \ell_{111}\sigma_{11} + \ell_{121}\sigma_{12} + \ell_{211}\sigma_{21} + \ell_{221}\sigma_{22} \tag{2.36}$$

$$e = \ell_{112}\sigma_{22} + \ell_{122}\sigma_{12} + \ell_{212}\sigma_{21} + \ell_{222}\sigma_{22} \tag{2.37}$$

$p = 3$ için Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen yaklaşık bayes tahmin edicisi ise

$$\begin{aligned} u\left(\hat{\theta}\right)_{LBayes} &= E\left[u(\underline{\theta}) / X\right] \\ &\approx \left\{u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(u_{ij} + 2u_i g_j\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l\right\} \\ &\approx \left(\hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \hat{u}_3\right) + \left(u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + a_4 + a_5\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}A\left(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12} + u_3\sigma_{13}\right) + \frac{1}{2}B\left(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22} + u_3\sigma_{23}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}C\left(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32} + u_3\sigma_{33}\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklindedir. Burada $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2, \hat{u}_3$, u_1, u_2 ve u_3 parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleridir. Ayrıca a_i, A, B ve C eşitlikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$a_i = g_1\sigma_{i1} + g_2\sigma_{i2} + g_3\sigma_{i3},\ i = 1,2,3 \tag{2.39}$$

$$a_4 = u_{12}\sigma_{12} + u_{13}\sigma_{13} + u_{23}\sigma_{23} \tag{2.40}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}\left(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33}\right) \tag{2.41}$$

$$A = \sigma_{11}\ell_{111} + 2\sigma_{12}\ell_{121} + 2\sigma_{13}\ell_{131} + 2\sigma_{23}\ell_{231} + \sigma_{22}\ell_{221} + \sigma_{33}\ell_{331} \tag{2.42}$$

$$B = \sigma_{11}\ell_{112} + 2\sigma_{12}\ell_{122} + 2\sigma_{13}\ell_{132} + 2\sigma_{23}\ell_{232} + \sigma_{22}\ell_{222} + \sigma_{33}\ell_{332} \tag{2.43}$$

$$C = \sigma_{11}\ell_{113} + 2\sigma_{12}\ell_{123} + 2\sigma_{13}\ell_{133} + 2\sigma_{23}\ell_{233} + \sigma_{22}\ell_{223} + \sigma_{33}\ell_{333} \tag{2.44}$$

2.6.3. Tahmin edicilerde aranan özellikler

İstatistik, birimlerin sayılabilir, tartılabilir ve ölçülebilir özellikleri ile ilgili bilgilerin yani verilerin toplanması, toplanan verilerin açık ve anlaşılır biçimde tablo ve grafiklerle gösterilmesi, verilerin alındığı grup ya da topluluğu özet olarak belirten değerlerin hesaplanması, verilerin analiz ve yorumlanması, uygun kararlar alınması ve genellemeler yapılması ile uğraşan bir bilim dalıdır.

2.6.3.1. Yansızlık

Yansızlık özelliği, bir tahmin edicinin beklenen değerinin, kitle parametresine eşit olması gerektiğini vurgular.

$T\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, $\theta \in \Theta$ parametresi için tahmin edici olmak üzere; $E_\theta\left(T\left(X\right)\right) = \theta$ veya $Bias\left(T\left(X\right)\right) = 0$ oluyorsa $T\left(\underline{X}\right)$ tahmin edicisine yansız tahmin edici denir.

2.6.3.2.Küçük Hata Kareler Ortalamasına Sahip Olma

$T_1\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, θ için bir tahmin edici olmak üzere, $MSE_\theta\left(T\right) = E\left(T-\theta\right)^2$ değerine T tahmin edicisinin Hata Kareler Ortalaması denir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$MSE_\theta\left(T\right) = E\left(T-\theta\right)^2 = \mathrm{Var}_\theta\left(T\right) + \left(E_\theta\left(T\right) - \theta\right)^2 = \mathrm{Var}_\theta\left(T\right) + \left(Bias_\theta\left(T\right)\right)^2$$

$T_1\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ ve $T_2\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ θ için iki tahmin edici olmak üzere $\forall\theta \in \Theta$ için $MSE_\theta\left(T_1\right) \le MSE_\theta\left(T_2\right)$ oluyorsa T_1 tahmin edicisine MSE ölçütüne göre daha iyidir denir. MSE ölçütüne göre en iyi tahmin edici bulmak zordur. Ancak tüm tahmin edicilerin kümesinin bazı alt kümelerinde MSE ölçütüne göre en iyi tahmin edici bulmak mümkündür.

3. BAZI SÜREKLİ DAĞILIMLAR İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

3.1. Weibull Dağılımı

Biyolojik, klinik, mühendislik, kalite kontrol ve diğer deneysel verilere iyi uyum göstermesi bakımından, Weibull (1939) tarafından önerilen ve $Weibull(\theta,\lambda)$ biçiminde gösterilen iki-parametreli Weibull dağılımı, uygulamada özel bir ilgi görmektedir. Weibull Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x/\theta,\lambda)=\theta\lambda x^{\lambda-1}\exp\left(-\theta x^{\lambda}\right), x>0,\lambda>0,\theta>0 \tag{3.1}$$

$$F(x/\theta,\lambda)=1-\exp\left(-\theta x^{\lambda}\right), x>0,\lambda>0,\theta>0 \tag{3.2}$$

$$R(x)=1-F(x)=e^{-\theta x^{\lambda}} \tag{3.3}$$

$$h(x)=\lambda\theta x^{\lambda-1} \tag{3.4}$$

Weibull dağılımı $\lambda<1$ için azalan, $\lambda=1$ için sabit ve $\lambda>1$ için artan bozulma oranına sahiptir.

3.1.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Weibull Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini

$X^{R}_{1:m:n}<X^{R}_{2:m:n}<\ldots<X^{R}_{m:m:n}$ Weibull(θ,λ) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem için olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}L\left(\theta,\lambda\middle|\mathbf{x^R}\right)=L&=c\prod_{i=1}^{m}f\left(x_{i:m:n}\right)\left(1-F\left(x_{i:m:n}\right)\right)^{R_i}\\&=c\prod_{i=1}^{m}\theta\lambda {x_{i:m:n}}^{\lambda-1}\,exp\left(-\theta {x_{i:m:n}}^{\lambda}\right)\left[1-\left(1-exp\left(-\theta {x_{i:m:n}}^{\lambda}\right)\right)\right]^{R_i}\\&=c\theta^{m}\lambda^{m}\,exp\left(-\theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right){x_{i:m:n}}^{\lambda}\right)\prod_{i=1}^{m}{x_{i:m:n}}^{\lambda-1}\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}log\,L=&\,log\,c+m\,log\,\theta+m\,log\,\lambda-\\&-\theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right){x_{i:m:n}}^{\lambda}+\left(\lambda-1\right)\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}\end{aligned} \tag{3.6}$$

biçimindedir. θ ve λ' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri,

$$\frac{d\log L}{d\theta}=\frac{m}{\theta}-\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}=0 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\log L}{d\lambda}&=\frac{m}{\lambda}+\sum_{i=1}^{m}log\left(x_{i:m:n}\right)-\\&\quad-\theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\,log\left(x_{i:m:n}\right)=0\end{aligned} \tag{3.8}$$

biçimindeki lineer olmayan denklemlerin Newton-Raphson yöntemi ile çözümünden bulunabilir.

3.1.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Weibull Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini

$X_{1:m:n}^{R}<X_{2:m:n}^{R}<...<X_{m:m:n}^{R}$, Weibull$\left(\theta,\lambda\right)$ dağılımına sahip ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere θ ve λ parametrelerinin bağımsız birer rasgele değişken olduğu ve önsel dağılımlarının da aşağıdaki şekilde Gamma Dağılımlarına sahip olduğu kabul edilsin.

$$\pi\left(\lambda\right)=\frac{b^{a}}{\Gamma\left(a\right)}\lambda^{a-1}\exp\left(-b\lambda\right),\lambda>0 \tag{3.9}$$

$$\pi\left(\theta\right)=\frac{d^{c}}{\Gamma\left(c\right)}\theta^{c-1}\exp\left(-d\theta\right),\theta>0 \tag{3.10}$$

O halde λ ve θ nın ortak önsel dağılımı ve logaritması;

$$\pi\left(\theta,\lambda\right)=\frac{b^{a}d^{c}}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(c\right)}\theta^{c-1}\lambda^{a-1}\exp\left(-b\lambda-d\theta\right),\theta>0,\lambda>0 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}G\left(\theta,\lambda\right)&=\log\pi\left(\theta,\lambda\right)\\&=a\log b+c\log d-\log\Gamma\left(a\right)-\\&\quad-\log\Gamma\left(c\right)+\left(c-1\right)\log\theta+\left(a-1\right)\log\lambda-b\lambda-d\theta\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir. Lindley yaklaşım formülleri;

$$g_1=\frac{dG\left(\theta,\lambda\right)}{d\theta}=\frac{c-1}{\theta}-d$$

$$g_2=\frac{dG\left(\theta,\lambda\right)}{d\lambda}=\frac{a-1}{\lambda}-b$$

$$L_1 = \frac{d\log L(\theta,\lambda)}{d\theta} = \frac{m}{\theta} - \sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}$$

$$L_{12} = \frac{d^2\log L(\theta,\lambda)}{d\theta d\lambda} = -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})$$

$$L_{112} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\theta^2 d\lambda} = 0$$

$$L_{121} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\theta d\lambda d\theta} = 0$$

$$L_{122} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\theta d\lambda^2} = -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})^2$$

$$L_2 = \frac{d\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda} = \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m}\log(x_{i:m:n}) - \theta\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})$$

$$L_{22} = \frac{d^2\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{m}{\theta^2} - \theta\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})^2$$

$$L_{21} = \frac{d^2\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda d\theta} = -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})$$

$$L_{221} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda^2 d\theta} = -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})^2$$

$$L_{212} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda d\theta d\lambda} = -\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})^2$$

$$L_{211} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda d\theta^2} = 0$$

$$L_{222} = \frac{d^3\log L(\theta,\lambda)}{d\lambda^3} = \frac{2m}{\lambda^3} - \theta\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\,x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log(x_{i:m:n})^3$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{U}{\mathrm{T}} & \frac{V}{\mathrm{T}} \\ \frac{V}{\mathrm{T}} & \frac{W}{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada U,V,W ve T eşitlikleri sırasıyla (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde verilmektedir. Bu elde edilen formüller yaklaşık bayes tahmini formülünde yerine yazıldığında, θ ve λ parametrelerinin Lindley yaklaşımına göre elde edilen bayes tahmin edicileri sırasıyla;

$$\hat{\theta}_{bayes} = \hat{\theta} + \left\{\left(\frac{c-1}{\theta} - d\right)\frac{U}{\mathrm{T}} + \left(\frac{a-1}{\lambda}\right)\frac{V}{\mathrm{T}}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{U}{\mathrm{T}}\left[\frac{2m}{\theta^3}\frac{U}{\mathrm{T}} - \left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^2\right)\frac{W}{\mathrm{T}}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{V}{\mathrm{T}}\left[-\left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^2\right)\frac{V}{\mathrm{T}} - \left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^2\right)\frac{V}{\mathrm{T}}\right]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{V}{\mathrm{T}}\left(\frac{2m}{\lambda^3} - \theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^3\right)\frac{W}{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$

$$\hat{\lambda}_{bayes} = \hat{\lambda} + \left\{\left(\frac{c-1}{\theta} - d\right)\frac{U}{\mathrm{T}} + \left(\frac{a-1}{\lambda}\right)\frac{V}{\mathrm{T}}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{2m}{\theta^3}\left(\frac{U}{\mathrm{T}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^2\right)\left(\frac{U}{\mathrm{T}}\frac{W}{\mathrm{T}} + 2\frac{V^2}{\mathrm{T}}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\lambda^3} - \theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^3\right)\left(\frac{V}{\mathrm{T}}\frac{W}{\mathrm{T}}\right) \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$U = \frac{m}{\lambda^2} + \theta\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)^2 \tag{3.15}$$

$$V = \sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right) \tag{3.16}$$

$$W = \frac{m}{\theta^2}, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{T} = \frac{m^2}{\theta^2\lambda^2} + \frac{m}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_i\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)x_{i:m:n}{}^{\lambda}\log\left(x_{i:m:n}\right)\right)^2 \tag{3.18}$$

biçimindedir.

3.1.3 Simülasyon Çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$ parametreli Weibull dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i = W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}}$, $i = 1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri hesaplanır.
3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ bulunur.
4. Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{\frac{\log\left(\frac{\log(1-y)}{\beta}\right)}{\lambda}}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümünden Weibull dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde edilir.

Denemenin 1000 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre $\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$ için prior parametrelerinin 0 alınması ile elde edilen yaklaşık bayes tahmin edicileri ve en çok olabilirlik tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1. Weibull Dağılımı İçin EÇO ve Bayes Tahmin Edicilerinin HKO ve Yanlarının Karşılaştırılması ($\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$).

n,m	Sansür Şeması	EÇO				Yaklaşık Bayes			
		Ortalama Yan		HKO		Ortalama Yan		HKO	
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
(20,10)	(9*0,10)	0,1060	0,0080	0,0112	0,0180	0,1121	0,0300	0,0644	0,0256
	(10,9*0)	0,0713	0,0004	0,0051	0,0220	0,0800	0,0007	0,0365	0,0289
	(10*1)	0,0977	0,0035	0,0095	0,0812	0,1048	0,0076	0,0502	0,0249
(20,20)	(20*0)	0,0331	0,0036	0,0011	0,0127	0,0445	0,0022	0,0150	0,0152
(30,10)	(9*0,20)	0,1229	0,0301	0,0151	0,0255	0,1355	0,0736	0,0742	0,0340
	(20, 9*0)	0,0460	0,0189	0,0021	0,0218	0,0466	0,0268	0,0246	0,0267
	(10*2)	0,0778	0,0189	0,0060	0,0176	0,0815	0,0359	0,0403	0,0212
(30,15)	(14*0,15)	0,0650	0,0043	0,0042	0,0096	0,0685	0,0212	0,0308	0,0121
	(15,14*0)	0,0398	0,0062	0,0016	0,0137	0,0467	0,0089	0,0180	0,0167
	(15*1)	0,0574	0,0033	0,0033	0,0115	0,0622	0,0087	0,0231	0,0136
(30,25)	(24*0,5)	0,0299	0,0033	0,0009	0,0087	0,0358	0,0064	0,0126	0,0101
	(5,24*0)	0,0256	0,0020	0,0007	0,0094	0,0340	0,0021	0,0098	0,0108
(30,30)	(30*0)	0,0224	0,0020	0,0005	0,0088	0,0305	0,0016	0,0086	0,0099
(50,30)	(29*0,20)	0,0233	0,0015	0,0005	0,0050	0,0254	0,0087	0,0089	0,0055
	(20,29*0)	0,0208	0,0039	0,0004	0,0069	0,0265	0,0054	0,0067	0,0077
(50,40)	(39*0,10)	0,0172	0,0009	0,0003	0,0046	0,0208	0,0038	0,0060	0,0050
	(10,39*0)	0,0164	0,0006	0,0003	0,0056	0,0219	0,0011	0,0055	0,0061
(50,50)	(50*0)	0,0104	0,0025	0,0001	0,0047	0,0155	0,0027	0,0039	0,0050
(60,30)	(29*0,30)	0,0328	0,0035	0,0011	0,0043	0,0343	0,0129	0,0097	0,0047
	(30,29*0)	0,0194	0,0009	0,0004	0,0071	0,0244	0,0029	0,0064	0,0078
	(30*1)	0,0211	0,0044	0,0004	0,0048	0,0234	0,0079	0,0065	0,0052
(60,40)	(39*0,20)	0,0190	0,0004	0,0004	0,0042	0,0212	0,0050	0,0064	0,0045
	(20,39*0)	0,0139	0,0029	0,0003	0,0057	0,0188	0,0039	0,0048	0,0062
(60,50)	(49*0,10)	0,0178	0,0002	0,0003	0,0041	0,0211	0,0018	0,0049	0,0043
	(10,49*0)	0,0132	0,0018	0,0002	0,0046	0,0178	0,0022	0,0040	0,0050
(60,60)	(60*0)	0,0080	0,0033	0,0001	0,0037	0,0123	0,0035	0,0031	0,0040
(90, 50)	(49*0,40)	0,0145	0,0008	0,0004	0,0030	0,0156	0,0058	0,0051	0,0053

	(40,49*0)	0,0113	0,0003	0,0002	0,0043	0,015	0,0013	0,0042	0,0049
(90,60)	(59*0,30)	0,0129	0,0006	0,0002	0,0029	0,0143	0,0020	0,0043	0,0031
	(30,59*0)	0,0111	0,0002	0,0001	0,0035	0,0147	0,0004	0,0029	0,0037
(90,70)	(69*0,20)	0,0113	0,0003	0,0001	0,0028	0,0132	0,0016	0,0032	0,0029
	(20,69*0)	0,0085	0,0008	0,0001	0,0032	0,0119	0,0012	0,0025	0,0034
(90,90)	(90*0)	0,0067	0,0007	0,0000	0,0027	0,0097	0,0009	0,0020	0,0028

Tablo 1 e göre n sabit tutulup m değeri arttırıldığında sansürlemenin sonda ve başta ve her elemanının eşit olduğu durumlarda EÇO ve bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması ve yan değerlerinde azalma görülmektedir. Ayrıca m sabit tutulup n artılığında ise hata kareler ortalaması değerlerinde genellikle artma gözlenmektedir. Bütün sansür şemaları için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. En iyi tahminler ise $n = m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

3.2. Gompertz Dağılımı

Gompertz dağılımı, büyüme modellerinde, tümör, 0-1 yaş çocuk ölümlülüğünü (infant mortality) modellemede ve aktüerya tablolarını oluşturmada kullanılmaktadır. Gompertz dağılımı, ilk defa Gompertz (1825) tarafından ileri sürülmüş ve son yirmi yıl içerisinde özel bir dikkat çekmiştir. Gompertz Dağılımının o.y.f., d.f., güvenilirlik ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f\left(x|\ \lambda,\beta\right) = \lambda\, exp\left(\beta x\right) exp\left(\frac{-\lambda(exp(\beta x)-1)}{\beta}\right) \quad ,x,\lambda,\beta > 0 \tag{3.19}$$

$$F\left(x|\ \lambda,\beta\right) = 1 - exp\left(\frac{-\lambda(exp(\beta x)-1)}{\beta}\right) \quad ,\lambda > 0,\ \beta > -1,\ x > 0 \tag{3.20}$$

$$R(x) = \exp(-\frac{\lambda\left(e^{\beta x}-1\right)}{\beta}) \tag{3.21}$$

$$h(x) = \lambda \exp\left(\beta x\right) \tag{3.22}$$

Gompertz dağılımı artan bozulma oranına sahiptir. Gompertz dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu tek tepeli (unimodal) ve pozitif çarpıklığa sahiptir.

3.2.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Gompertz Dağılımı İçin En çok Olabilirlik Tahmini

$X_{1:m:n}^{R} < X_{2:m:n}^{R} < ... < X_{m:m:n}^{R}$ Gompertz (λ,β) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L(\lambda,\beta|\mathbf{x}^{\mathbf{R}}) = L = c\prod_{i=1}^{m} f(x_i)(1-F(x_i))^{R_i}$$

$$= c\prod_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}\lambda\, exp(\beta x_{i:m:n})exp\left(\dfrac{-\lambda(exp(\beta x_{i:m:n})-1)}{\beta}\right)\times \\ \times\left(1-\left(1-exp\left(\dfrac{-\lambda(exp(\beta x_{i:m:n})-1)}{\beta}\right)\right)\right)^{R_i}\end{array}\right)$$

$$= c\lambda^{m}\, exp(\beta\sum x_{i:m:m})\prod_{i=1}^{m} exp\left(\frac{-\lambda(exp(\beta x_{i:m:n})-1)}{\beta}\right)^{R_i+1} \qquad (3.23)$$

$$log\, L = log\, c + m\, log\, \lambda + \beta\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} - \frac{\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(exp\left(\beta x_{i:m:n}\right)-1\right)\left(R_i+1\right)\right) \qquad (3.24)$$

biçimindedir. λ , β ' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri (3.25) ve (3.26) eşitliklerinde verilen lineer olmayan denklemler Newton-Raphson yöntemi ile çözülerek elde edilebilir.

$$\frac{\partial log\, L}{\partial\lambda} = \frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{exp\left(\beta x_{i:m:n}\right)-1}{\beta}\left(R_i+1\right)\right) = 0 \qquad (3.25)$$

$$\frac{\partial log\, L}{\partial\beta} = \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left(R_i+1\right)\left(\frac{\lambda x_i\left(exp\left(\beta x_{i:m:n}\right)-1\right)}{\beta} - \frac{\lambda\left(exp\left(\beta x_{i:m:n}\right)-1\right)}{\beta^2}\right) = 0 \qquad (3.26)$$

3.2.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Gompertz Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini

$X_{1:m:n}^{R} < X_{2:m:n}^{R} < ... < X_{m:m:n}^{R}$, Gompertz(λ,β) dağılımına sahip ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere λ ve β parametrelerinin bağımsız birer rasgele değişken olduğu ve önsel dağılımlarının da sırasıyla (e_1,d_1) ve (e_2,d_2) parametreli Gamma dağılımına sahip olduğu varsayılarak o.y.f.'ları sırasıyla (3.9) ve (3.10) eşitliklerine benzer şekilde yazılabilir. Ortak prior dağılımının logaritması ise (3.12) eşitliğine benzer şekilde yazılabilir. p=2 için Lindley yaklaşım formülleri ise;

$$g_1 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1$$

$$g_2 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\beta} = \frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2$$

$i, j = 1,2$ için L_{ij} değerleri;

$$L_1 = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(e^{\beta x_{i:m:N}} - 1\right)\left(R_i + 1\right)}{\beta}$$

$$L_2 = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\beta} = \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} + \frac{\lambda \sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}} - 1\right)\left(R_i + 1\right)}{\beta^2} - \frac{\lambda \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta}$$

$$L_{11} = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda^2} = -\frac{m}{\lambda^2}$$

$$L_{12} = L_{21}\frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda d\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}} - 1\right)\left(R_i + 1\right)}{\beta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta}$$

$$L_{22} = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\beta^2} = -\frac{2\lambda \sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}} - 1\right)\left(R_i + 1\right)}{\beta^3} + \frac{2\lambda \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta^2} - \frac{\lambda \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n}^2 e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta}$$

$$L_{111} = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda^3} = \frac{2m}{\lambda^3}$$

$$L_{112} = L_{121} = L_{211} = 0$$

$$L_{122} = L_{212} = L_{221} = -\frac{2\sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}} - 1\right)\left(R_i + 1\right)}{\beta^3} + \frac{2\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n}^2 e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i + 1\right)}{\beta}$$

$$L_{222}=\frac{6\lambda\sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}}-1\right)\left(R_i+1\right)}{\beta^4}-\frac{6\lambda\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i+1\right)}{\beta^3}+$$
$$+\frac{3\lambda\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}^2e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i+1\right)}{\beta^2}-\frac{\lambda\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}^3e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i+1\right)}{\beta}$$

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2\beta\left(2t-2y\beta+z\beta^2\right)}{H} & \frac{\lambda^2\beta\left(t-\beta y\right)}{H}\\ \frac{\lambda^2\beta\left(t-\beta y\right)}{H} & \frac{m\beta^4}{H}\end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Burada t, y, z ve H eşitlikleri sırasıyla (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) eşitliklerinde verilmektedir.

$$t=\sum_{i=1}^{m}\left(e^{\beta x_{i:m:n}}-1\right)\left(R_i+1\right) \tag{3.27}$$

$$y=\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i+1\right) \tag{3.28}$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}^2e^{\beta x_{i:m:n}}\left(R_i+1\right) \tag{3.29}$$

$$H=-2m\beta t+2m\beta^2y-m\beta^3z+\lambda t^2-2\lambda ty\beta+\lambda y^2\beta^2 \tag{3.30}$$

Bu elde edilen formüller yaklaşık bayes tahmini formülünde yerine yazıldığında λ ve β parametrelerinin Lindley yaklaşımına göre bayes tahmin edicileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{bayes}=\hat{\lambda}+&\left\{\left(\frac{e_1-1}{\lambda}-d_1\right)\sigma_{11}+\left(\frac{e_2-1}{\beta}-d_2\right)\sigma_{12}\right\}+\\&+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\left(L_{111}\sigma_{11}+L_{121}\sigma_{12}+L_{211}\sigma_{21}+L_{221}\sigma_{22}\right)+\\+\sigma_{21}\left(L_{112}\sigma_{22}+L_{122}\sigma_{12}+L_{212}\sigma_{21}+L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{bayes}=\hat{\beta}+&\left\{\left(\frac{e_1-1}{\lambda}-d_1\right)\sigma_{21}+\left(\frac{e_2-1}{\beta}-d_2\right)\sigma_{22}\right\}+\\&+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\left(L_{111}\sigma_{11}+L_{121}\sigma_{12}+L_{211}\sigma_{21}+L_{221}\sigma_{22}\right)+\\+\sigma_{22}\left(L_{112}\sigma_{22}+L_{122}\sigma_{12}+L_{212}\sigma_{21}+L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.3 Simülasyon Çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda = 0{,}1$ ve $\beta = 0{,}3$ parametreli Gompertz dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0{,}1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i = W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}}$, $i = 1{,}2, \ldots, m$ rasgele değişkenleri tanımlanır.
3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}$, $i = 1{,}2, \ldots, m$ dönüşümü ile Düzgün$(0{,}1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.
4. Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathrm{R}} = \dfrac{\log\left(-\dfrac{\lambda + \log(1-y)\beta}{\lambda}\right)}{\beta}$, $i = 1{,}2, \ldots, m$ dönüşümü ile Gompertz dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde edilir.

Denemenin 1000 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre λ ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 2. Gompertz Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması ($\lambda = 0{,}1$ ve $\beta = 0{,}3$)

n,m	Sansür Şeması	EÇO				LBayes			
		Ortalama Yan		HKO		Ortalama Yan		HKO	
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
(20,10)	(9*0,10)	0,0079	0,1910	0,0001	0,1622	0,0031	0,2111	0,0062	0,1872
	(10,9*0)	0,0045	0,0986	0,0000	0,0428	0,0029	0,1022	0,0044	0,0471
	(10*1)	0,0055	0,1422	0,0000	0,0912	0,0055	0,1404	0,0040	0,0978
(20,20)	(20*0)	0,0041	0,0451	0,0000	0,0150	0,0017	0,0448	0,0020	0,0157
(30,10)	(9*0,20)	-0,0065	0,2459	0,0001	0,3045	0,0044	0,2717	0,0061	0,3513
	(20, 9*0)	0,0019	0,0778	0,0000	0,0385	0,0114	0,0805	0,0052	0,0426

	(10*2)	-0,0082	0,1871	0,0001	0,1419	0,0007	0,1814	0,0038	0,1510
(30,15)	(14*0,15)	-0,0058	0,1173	0,0000	0,0891	0,0015	0,1275	0,0030	0,0981
	(15,14*0)	0,0001	0,0596	0,0000	0,0232	0,0070	0,0600	0,0033	0,0247
	(15*1)	-0,0052	0,0952	0,0000	0,0445	0,0013	0,0913	0,0026	0,0462
(30,25)	(24*0,5)	-0,0038	0,0453	0,0000	0,0179	0,0008	0,0473	0,0019	0,0188
	(5,24*0)	-0,0014	0,0326	0,0000	0,0116	0,0032	0,0355	0,0018	0,0120
(30,30)	(30*0)	0,0029	0,0299	0,0000	0,0094	0,0016	0,0290	0,0015	0,0097
(50,30)	(29*0,20)	0,0022	0,0454	0,0000	0,0292	0,0016	0,0483	0,0018	0,0306
	(20,29*0)	-0,0018	0,0298	0,0000	0,0095	0,0020	0,0290	0,0015	0,0098
(50,40)	(39*0,10)	-0,0027	0,0307	0,0000	0,0115	0,0002	0,0319	0,0011	0,0118
	(10,39*0)	-0,0016	0,0233	0,0000	0,0066	0,0014	0,0225	0,0011	0,0067
(50,50)	(50*0)	0,0004	0,0164	0,0000	0,0048	0,0020	0,0156	0,0009	0,0049
(60,30)	(29*0,30)	-0,0013	0,0528	0,0000	0,0359	0,0025	0,0564	0,0016	0,0376
	(30,29*0)	0,0007	0,0217	0,0000	0,0091	0,0044	0,0208	0,0015	0,0092
	(30*1)	-0,0023	0,0415	0,0000	0,0171	0,0011	0,0380	0,0012	0,0174
(60,40)	(39*0,20)	-0,0026	0,0339	0,0000	0,0156	0,0001	0,0357	0,0012	0,0161
	(20,39*0)	-0,0032	0,0225	0,0000	0,0056	-0,0004	0,0218	0,0009	0,0057
(60,50)	(49*0,10)	-0,0003	0,0182	0,0000	0,0079	0,0021	0,0188	0,0009	0,0080
	(10,49*0)	0,0010	0,0161	0,0000	0,0049	0,0014	0,0154	0,0008	0,0049
(60,60)	(60*0)	0,0012	0,0152	0,0000	0,0039	0,0008	0,0155	0,0007	0,0040
(90,50)	(49*0,40)	-0,0020	0,0323	0,0000	0,0170	0,0003	0,0340	0,0009	0,0175
	(40,49*0)	-0,0003	0,0141	0,0000	0,0045	0,0020	0,0134	0,0008	0,0045
(90,60)	(59*0,30)	-0,0001	0,0202	0,0000	0,0100	0,0018	0,0212	0,0008	0,0102
	(30,59*0)	-0,0004	0,0138	0,0000	0,0038	0,0016	0,0132	0,0007	0,0039
(90,70)	(69*0,20)	0,0015	0,0172	0,0000	0,0063	0,0001	0,0178	0,0006	0,0064
	(20,69*0)	-0,0006	0,0116	0,0000	0,0033	0,0012	0,0110	0,0006	0,0033
(90,90)	(90*0)	0,0003	0,0096	0,0000	0,0026	0,0011	0,0091	0,0005	0,0026

Tablo 2 ye göre n sabit tutulup m değeri arttırıldığında sansürlemenin sonda, başta ve her elemanının eşit olduğu durumlarda EÇO tahmin edicileri ve Lindley yaklaşımı yardımıyla elde edilen bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması ve yan değerlerinde azalma gözlemlenmektedir. Ayrıca sansürlemenin başta verildiği

durumlarda diğer sansür şemalarına göre en çok olabilirlik tahmin edicisi ve bayes tahmin edicilerinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Bütün sansür şemaları için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir En iyi tahmin edici $n=m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

3.3 Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım

Üstelleştirilmiş Üstel dağılım Gupta ve Kundu tarafından 1999 yılında önerilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımın o.y.f., d.f., güvenilirlik ve bozulma oranı fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f\left(x|\ \lambda,\beta\right)=\lambda\beta e^{-x\beta}\left(1-e^{-x\beta}\right)^{\lambda-1} \quad ,x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.33}$$

$$F\left(x|\ \lambda,\beta\right)=\left(1-e^{-x\beta}\right)^{\lambda} \quad ,x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.34}$$

$$R(x)=1-\left(1-\left(e^{-\beta x}\right)^{\lambda}\right) \tag{3.35}$$

$$h=\lambda\beta\left(e^{-\beta x}\right)^{1-\lambda}\left(1-\left(e^{-\beta x}\right)^{\lambda-1}\right), \quad x>0 \tag{3.36}$$

Üstelleştirilmiş Üstel dağılım Burada $\lambda=1$ iken dağılım üstel dağılıma dönüşür. Üstelleştirilmiş Üstel dağılımın hazard fonksiyonu, $\lambda>1$ durumunda artan, $\lambda<1$ durumunda azalan, $\lambda=1$ durumunda ise sabittir.

3.3.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_{1:m:n}^{R}<X_{2:m:n}^{R}<\ldots<X_{m:m:n}^{R}$ Üstelleştirilmiş Üstel(λ,β) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemin olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L\left(\lambda,\beta\left|\mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right.\right)=L=c\prod_{i=1}^{m}f\left(x_{i:m:n}\right)\left(1-F\left(x_{i:m:n}\right)\right)^{R_i}$$

$$=c\prod_{i=1}^{m}\lambda\beta e^{-x_{i:m:n}\lambda}\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda-1}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{R_i}$$

$$=c\lambda^{m}\beta^{m}\prod_{i=1}^{m}e^{-x_{i:m:n}\beta}\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda-1}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{R_i} \tag{3.37}$$

$$=c\lambda^{m}\beta^{m}e^{-\beta\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}}\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda-1}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{R_i}$$

$$\log L=\log c+m\log\lambda+m\log\beta-\beta\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{m}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}R_i\log\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right) \tag{3.38}$$

λ,β' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri (3.39) ve (3.40) eşitliklerinde verilen lineer olmayan denklemlerin, Newton-Raphson metodu ile çözümünden elde edilebilir.

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}=\frac{m}{\lambda}+\sum_{i=1}^{m}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}=0 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\beta}=\frac{m}{\beta}-\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{i:m:n}e^{-x_{i:m:n}\beta}}{1-e^{-x_{i:m:n}\beta}}-$$

$$-\lambda\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda-1}x_{i:m:n}e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}=0 \tag{3.40}$$

3.3.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini

$X_{1:m:n}^{R}<X_{2:m:n}^{R}<\ldots<X_{m:m:n}^{R}$, Üstelleştirilmiş Üstel$(\theta,\lambda)$ dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere λ ve β parametrelerinin bağımsız birer rasgele değişken olduğu ve önsel dağılımlarının da sırasıyla (e_1,d_1) ve (e_2,d_2) parametreli Gamma dağılımına sahip olduğu varsayılarak o.y.f.'ları sırasıyla (3.9) ve (3.10) eşitliklerine benzer şekilde yazılabilir. Ortak prior dağılımının

logaritması ise (3.12) eşitliğine benzer şekilde yazılabilir. Bu durumda p=2 için Lindley yaklaşım formülleri;

$$g_1 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1$$

$$g_2 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\beta} = \frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2$$

$i, j = 1,2$ için L_{ij} değerleri;

$$L_1 = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}}$$

$$L_2 = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\beta}$$

$$= \frac{m}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{i:m:n} e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda} \lambda x_i e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}$$

$$L_{11} = \frac{d\log L(\lambda,\beta)}{d\lambda^2}$$

$$= -\frac{m}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}} + \frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}$$

$$L_{12} = L_{21}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{i:m:n} e^{-x_i\beta}}{1 - e^{-x_i\beta}} - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda} \lambda x_{i:m:n} e^{-x_{i:m:n}\beta} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda} x_i e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)} \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{R_i \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda} \lambda x_{i:m:n} e^{-x_{i:m:n}\beta} \log\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2} \right)$$

$$L_{22}=-\frac{m}{\beta^2}-(\lambda-1)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{x_i}^2e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}+\frac{{x_i}^2\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda^2x_i^2\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_i^2\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}\\+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_i^2\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda^2x_i^2\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}\end{array}\right)$$

$$L_{111}=\frac{2m}{\lambda^3}+\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\dfrac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}\\-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{3\lambda}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^3}\end{array}\right)$$

$$L_{112}=L_{121}=L_{211}=\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\\-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}x_{i:m:n}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\\-\dfrac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda x_{i:m:n}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_i\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}-\\-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}x_{i:m:n}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}-\\-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{3\lambda}\lambda x_{i:m:n}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^3}\end{array}\right)$$

$$L_{122}=L_{212}=L_{221}=-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_{i:m:n}^{2}e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}+\frac{x_{i:m:n}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}
-\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda^{2}x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\\
-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}\\
-\dfrac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda^{2}x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{2}}+\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{2}}\\
-\dfrac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{3\lambda}\lambda^{2}x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{3}}+\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda x_{i:m:n}{}^{2}\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{2}}+\\
+\dfrac{R_i\left(1-e^{-x_i\beta}\right)^{2\lambda}\lambda x_i{}^{2}\left(e^{-x_i\beta}\right)^{2}\log\left(1-e^{-x_i\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_i\beta}\right)^{2}\left(1-\left(1-e^{-x_i\beta}\right)^{\lambda}\right)^{2}}
\end{array}\right)$$

$$L_{222}=\frac{2m}{\beta^3}+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{x_{i:m:n}}^3e^{-x_i\beta}}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}+\frac{3{x_{i:m:n}}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}+\frac{2{x_{i:m:n}}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l}
-\frac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda^3x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda^2x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\\
+\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda^2x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda^3x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}-\\
-\frac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}-\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\\
+\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda^2x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}-\frac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}+\\
+\frac{3R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{2\lambda}\lambda^2x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2}-\frac{2R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{3\lambda}\lambda^3x_{i:m:n}^3\left(e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3}{\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^3\left(1-\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^3}
\end{array}\right)$$

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}L_{11}&L_{12}\\L_{21}&L_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\frac{m}{\beta^2}+t\lambda-t+v}{H}&\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{x_ie^{-x_i\beta}}{-1+e^{-x_i\beta}}\right)+s}{H}\\\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{x_ie^{-x_i\beta}}{-1+e^{-x_i\beta}}\right)+s}{H}&-\frac{\frac{m}{\lambda}+w}{H}\end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Burada t,v,y,s ve H eşitlikleri sırasıyla

$$t=\sum_{i=1}^{m}-\frac{x_{i:m:n}^2e^{-x_{i:m:n}\beta}}{\left(-1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2} \tag{3.41}$$

$$v=\sum_{i=1}^{m}-\frac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\lambda x_{i:m:n}^2e^{-x_{i:m:n}\beta}\left(\lambda e^{-x_{i:m:n}\beta}-1+\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}{\left(-1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2\left(-1+\left(1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2} \tag{3.42}$$

$$y=\sum_{i=1}^{m}-\frac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^2}{\left(-1+\left(1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^2} \tag{3.43}$$

$$s=\sum_{i=1}^{m}-\frac{R_i\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}x_{i:m:n}e^{-x_{i:m:n}\beta}\left(-\lambda\log\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)-1+\left(1-e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)}{\left(-1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)\left(-1+\left(1+e^{-x_{i:m:n}\beta}\right)^{\lambda}\right)^{2}} \tag{3.44}$$

$$H=\frac{m^2}{\lambda^2\beta^2}-\frac{mt}{\lambda}+\frac{mt}{\lambda^2}-\frac{mv}{\lambda^2}-\frac{mw}{\beta^2}+\frac{w\lambda}{\beta^2}+\frac{t}{\lambda^2}-wt+wv+t^2-2ts-s^2 \tag{3.45}$$

şeklindedir. Bu elde edilen formüller yaklaşık bayes tahmini formülünde yerine yazıldığında λ ve β parametrelerinin Lindley yaklaşımına göre bayes tahmin edicileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{bayes}=\hat{\lambda}+&\left\{\left(\frac{e_1-1}{\lambda}-d_1\right)\sigma_{11}+\left(\frac{e_2-1}{\beta}-d_2\right)\sigma_{12}\right\}+\\&+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\left(L_{111}\sigma_{11}+L_{121}\sigma_{12}+L_{211}\sigma_{21}+L_{221}\sigma_{22}\right)+\\+\sigma_{21}\left(L_{112}\sigma_{22}+L_{122}\sigma_{12}+L_{212}\sigma_{21}+L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{bayes}=\hat{\beta}+&\left\{\left(\frac{e_1-1}{\lambda}-d_1\right)\sigma_{21}+\left(\frac{e_2-1}{\beta}-d_2\right)\sigma_{22}\right\}+\\&+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\left(L_{111}\sigma_{11}+L_{121}\sigma_{12}+L_{211}\sigma_{21}+L_{221}\sigma_{22}\right)+\\+\sigma_{22}\left(L_{112}\sigma_{22}+L_{122}\sigma_{12}+L_{212}\sigma_{21}+L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{3.47}$$

biçiminde elde edilir.

3.3.3 Simülasyon Çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda=0,5$ ve $\beta=0,3$ parametreli Üstelleştirilmiş Üstel dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1,W_2,\ldots,W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i=W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_j\right)^{-1}}$, $i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri hesaplanır.

3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.

4. Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathrm{R}} = -\dfrac{\log\left(1 - y^{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right)}{\beta}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Üstelleştirilmiş Üstel dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri elde edilir.

Denemenin 1000 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre λ ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 3 de verilmiştir.

Tablo 3. Üstelleştirilmiş Üstel Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması **(** $\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$**)**

n,m	Sansür Şeması	EÇO				LBayes			
		Ortalama Yan		HKO		Ortalama Yan		HKO	
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
(20,10)	(9*0,10)	0,1387	0,2463	0,0192	0,2352	0,1806	0,3801	0,0985	0,3714
	(10,9*0)	0,0798	0,1169	0,0064	0,0859	0,1141	0,1863	0,0625	0,1174
	(10*1)	0,1052	0,1987	0,0111	0,2364	0,1364	0,2846	0,0765	0,2432
(20,20)	(20*0)	0,0706	0,0574	0,0050	0,0231	0,0874	0,0901	0,0418	0,0305
(30,10)	(9*0,20)	0,1652	0,3783	0,0273	0,5236	0,1144	0,1210	0,1306	0,5911
	(20, 9*0)	0,0634	0,1127	0,0040	0,0749	0,0965	0,1774	0,0473	0,0950
	(10*2)	0,1145	0,2323	0,0131	0,3320	0,1208	0,2395	0,0967	0,2630
(30,15)	(14*0,15)	0,0773	0,1496	0,0060	0,1799	0,1018	0,1805	0,0548	0,2110
	(15,14*0)	0,0555	0,0755	0,0031	0,0349	0,0793	0,1223	0,0353	0,0490
	(15*1)	0,0724	0,1203	0,0052	0,0855	0,0937	0,1831	0,0420	0,1128
(30,25)	(24*0,5)	0,0449	0,0481	0,0020	0,0222	0,0601	0,0805	0,0251	0,0287
	(5,24*0)	0,0465	0,0425	0,0022	0,0153	0,0598	0,0688	0,0233	0,0199
(30,30)	(30*0)	0,0458	0,0426	0,0021	0,0139	0,0563	0,0641	0,0218	0,0172
(50,30)	(29*0,20)	0,0383	0,0523	0,0015	0,0243	0,0533	0,0899	0,0166	0,0325
	(20,29*0)	0,0310	0,0308	0,0010	0,0120	0,0428	0,0529	0,0154	0,0149

(50,40)	(39*0,10)	0,0320	0,0343	0,0010	0,0121	0,0417	0,0551	0,0127	0,0147
	(10,39*0)	0,0197	0,0192	0,0004	0,0084	0,0277	0,0351	0,0102	0,0098
(50,50)	(50*0)	0,0243	0,0229	0,0006	0,0063	0,0302	0,0355	0,0092	0,0074
(60,30)	(29*0,30)	0,0439	0,0734	0,0019	0,0356	0,0577	0,1161	0,0177	0,0483
	(30,29*0)	0,0286	0,0348	0,0008	0,0125	0,0408	0,0573	0,0153	0,0156
	(30*1)	0,0383	0,0553	0,0015	0,0248	0,0487	0,0856	0,0149	0,0312
(60,40)	(39*0,20)	0,0271	0,0401	0,0007	0,0158	0,0379	0,0660	0,0125	0,0197
	(20,39*0)	0,0219	0,0250	0,0005	0,0080	0,0304	0,0413	0,0104	0,0097
(60,50)	(49*0,10)	0,0219	0,0253	0,0005	0,0081	0,0291	0,0411	0,0093	0,0096
	(10,49*0)	0,0221	0,0197	0,0005	0,0063	0,0284	0,0324	0,0092	0,0073
(60,60)	(60*0)	0,0230	0,0199	0,0005	0,0054	0,0279	0,0302	0,0081	0,0061
(90,50)	(49*0,40)	0,0274	0,0414	0,0008	0,0158	0,0362	0,0649	0,0092	0,0194
	(40,49*0)	0,0173	0,0213	0,0003	0,0066	0,0244	0,0345	0,0078	0,0077
(90,60)	(59*0,30)	0,0197	0,0268	0,0004	0,0091	0,0269	0,0436	0,0070	0,0108
	(30,59*0)	0,0146	0,0153	0,0002	0,0047	0,0202	0,0260	0,0064	0,0054
(90,70)	(69*0,20)	0,0138	0,0164	0,0002	0,0057	0,0193	0,0285	0,0055	0,0065
	(20,69*0)	0,0126	0,0128	0,0002	0,0039	0,0172	0,0218	0,0058	0,0044
(90,90)	(90*0)	0,0124	0,0132	0,0002	0,0030	0,0156	0,0192	0,0042	0,0033

Tablo 3 e göre n sabit tutulup m arttırıldığında sansürlemenin sonda, başta ve her elemanın eşit olduğu durumlarda parametrelerin hem EÇO hem de yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata hareler ortalaması değerlerinde azalma görülmektedir. m sabit tutulup n değeri arttırıldığında parametrelerin EÇO ve yaklaşık bayes tahminlerinin HKO değerlerinde genellikle artış gözlemlenmektedir. Bütün sansür şemaları için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir Sansürlemenin başta verildiği durumlarda diğer sansür şemalarına göre en çok olabilirlik tahmin edicisi ve bayes tahmin edicilerinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. En iyi tahmin ediciler $n = m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

3.4 Chen Dağılımı

Chen (2000) tarafından önerilen chen dağılımı banyo küveti ya da artan bozulma oranına sahiptir. Chen Dağılımın o.y.f., d.f., güvenilirlik ve bozulma oranı fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$f\left(x|\ \lambda,\beta\right)=\lambda\beta x^{\beta-1}\,exp\left(\lambda\left(1-e^{x^{\beta}}\right)+x^{\beta}\right)\ ,\ x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.48}$$

$$F\left(x|\ \lambda,\beta\right)=1-exp\left(\lambda\left(1-e^{x^{\beta}}\right)\right)\qquad ,\ x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.49}$$

$$R(x)=exp\left(\lambda\left(1-e^{x^{\beta}}\right)\right) \tag{3.50}$$

$$h(x)=\lambda\beta x^{\beta-1}e^{x^{\beta}} \tag{3.51}$$

.

Chen dağılımı $\beta<1$ durumunda bozulma oranı banyo küveti şeklindedir (Bath-tube), $\beta\geq 1$ durumunda bozulma oranı artandır.

3.4.1 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Chen Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_{1:m:n}^{R}<X_{2:m:n}^{R}<\ldots<X_{m:m:n}^{R}$ Chen(λ,β) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemin olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L\left(\lambda,\beta\left|\mathbf{x^{R}}\right.\right)=L=c\prod_{i=1}^{m}f\left(x_{i:m:n}\right)\left(1-F\left(x_{i:m:n}\right)\right)^{R_i}$$

$$=c\prod_{i=1}^{m}\lambda\beta x_{i:m:n}^{\beta-1}\,exp\left(\lambda\left(1-e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right)+x_{i:m:n}^{\beta}\right)\left[1-\left(1-exp\left(\lambda\left(1-e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right)\right)\right)\right]^{R_i}$$

$$=c\lambda^{m}\beta^{m}\prod_{i=1}^{m}x_{i:m:n}^{\beta-1}\prod_{i=1}^{m}exp\left(\lambda\left(1-e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right)\left(1+{x_{i:m:n}}^{\beta}\right)\right)^{R_i} \tag{3.52}$$

$$log\,L=log\,c+m\,log\,\lambda+m\,log\,\beta+\left(\beta-1\right)\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}+\sum_{i=1}^{m}R_i\left(\lambda\left(1-e^{x_i^{\beta}}\right)\left(1+x_{i:m:n}^{\beta}\right)\right) \tag{3.53}$$

λ,β' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.54) ve (3.55) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan denklemlerin Newton-Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilebilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m}\left(1 - e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right) + \sum_{i=1}^{m} r_i \left(1 - e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right) = 0 \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} log\, x_{i:m:n} + \sum_{i=1}^{m}\left(-\lambda x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_{i:m:n} e^{x_{i:m:n}^{\beta}} + x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_{i:m:n}\right) + \sum_{i=1}^{m} -r_i \lambda x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_{i:m:n} e^{x_{i:m:n}^{\beta}} = 0 \tag{3.55}$$

3.4.2 İlerleyen Tür Sansürleme Altında Chen Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini

$X_{1:m:n}^{R} < X_{2:m:n}^{R} < ... < X_{m:m:n}^{R}$, $Chen(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip ilerleyen tür tip-II ağdan sansürlü örneklem olmak üzere λ ve β parametrelerinin bağımsız birer rasgele değişken olduğu ve önsel dağılımlarının da sırasıyla (e_1, d_1) ve (e_2, d_2) parametreli Gamma dağılımına sahip olduğu varsayılarak o.y.f.'ları sırasıyla (3.9) ve (3.10) eşitliklerine benzer şekilde yazılabilir. Ortak prior dağılımının logaritması ise (3.12) eşitliğine benzer şekilde elde edilebilir. Bu durumda p=2 için Lindley yaklaşım formülleri;

$$g_1 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1$$

$$g_2 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\beta} = \frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2$$

$i, j = 1, 2$ için L_{ij} değerleri;

$$L_1 = \frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^{m}\left(1 - e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right) + \sum_{i=1}^{m} r_i \left(1 - e^{x_{i:m:n}^{\beta}}\right)$$

$$L_2 = \frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} log\, x_{i:m:n} + \sum_{i=1}^{m} -\lambda x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_i e^{x_{i:m:n}^{\beta}} + x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_{i:m:n} + \sum_{i=1}^{m} -r_i \lambda x_{i:m:n}^{\beta}\, log\, x_{i:m:n} e^{x_{i:m:n}^{\beta}}$$

$$L_{11} = \frac{d \log L(\lambda,\beta)}{d\lambda^2} = -\frac{m}{\lambda^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = \sum_{i=1}^{m} -x_{i:m:n}^{\beta} \log x_{i:m:n} e^{x_{i:m:n}^{\beta}} + \sum_{i=1}^{m} -r_i x_{i:m:n}^{\beta} \log x_{i:m:n} e^{x_{i:m:n}^{\beta}}$$

$$L_{22} = -\frac{m}{\beta^2} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\lambda x_{i:m:n}^{\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} - \lambda x_{i:m:n}^{2\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} + x_{i:m:n}^{\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 \right) \right) +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{m} \left(-r_i \lambda x_{i:m:n}^{\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} - r_i \lambda x_{i:m:n}^{2\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \right) \right)$$

$$L_{111} = \frac{2m}{\lambda^3}$$

$$L_{112} = L_{121} = L_{211} = 0$$

$$L_{122} = L_{212} = L_{221} = \sum_{i=1}^{m} \left(-x_{i:m:n}^{\beta} \log {x_{i:m:n}}^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} - \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^2 \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \right)$$

$$L_{222} = \frac{2m}{\beta^3} + \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} -\lambda x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} - 3\lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^2 \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \\ -\lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^3 \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} + \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right) \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 \end{pmatrix} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} -r_i \lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right) \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} - 3r_i \lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^2 \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \\ -r_i \lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^3 \log \left(x_{i:m:n} \right)^3 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{\lambda^2 \left(m + \sum_{i=1}^{m} \left(-s - t + y \right) \beta^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(-v - w \right) \beta^2 \right)}{H}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\lambda^2 \beta^2 \sum_{i=1}^{m} z - \sum_{i01}^{m} p}{H}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{m\beta^2}{H}$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$p = r_i x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right) e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.56}$$

$$s = \lambda x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.57}$$

$$t = \lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^2 \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.58}$$

$$y = x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 \tag{3.59}$$

$$v = r_i \lambda x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.60}$$

$$w = r_i \lambda \left(x_{i:m:n}^{\beta} \right)^2 \log \left(x_{i:m:n} \right)^2 e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.61}$$

$$w = x_{i:m:n}^{\beta} \log \left(x_{i:m:n} \right) e^{x_{i:m:n}^{\beta}} \tag{3.62}$$

$$H = -m^2 + m\beta^2 \sum_{i=1}^{m}\left(-s - -t + y\right) + m\beta^2 \sum_{i=1}^{m}\left(-v - w\right) + \lambda^2\beta^2 \sum_{i=1}^{m} z^2 + 2\lambda^2\beta^2 \sum_{i=1}^{m}\left(-z\right)\sum_{i=1}^{m}\left(p\right) + \\ -\lambda^2\beta^2 \sum_{i=1}^{m} p^2 \tag{3.63}$$

şeklindedir. Eşitlikleri hesaplanarak yaklaşık bayes tahmini formülünde yerine yazıldığında λ ve β parametrelerinin Lindley yaklaşımına göre bayes tahmin edicileri sırasıyla;

$$\hat{\lambda}_{bayes} = \hat{\lambda} + \left\{\left(\frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1\right)\sigma_{11} + \left(\frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2\right)\sigma_{12}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\left(L_{111}\sigma_{11} + L_{121}\sigma_{12} + L_{211}\sigma_{21} + L_{221}\sigma_{22}\right) + \\ +\sigma_{21}\left(L_{112}\sigma_{22} + L_{122}\sigma_{12} + L_{212}\sigma_{21} + L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix} \tag{3.64}$$

$$\hat{\beta}_{bayes} = \hat{\beta} + \left\{\left(\frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1\right)\sigma_{21} + \left(\frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2\right)\sigma_{22}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\left(L_{111}\sigma_{11} + L_{121}\sigma_{12} + L_{211}\sigma_{21} + L_{221}\sigma_{22}\right) + \\ +\sigma_{22}\left(L_{112}\sigma_{22} + L_{122}\sigma_{12} + L_{212}\sigma_{21} + L_{222}\sigma_{22}\right)\end{Bmatrix} \tag{3.65}$$

biçiminde elde edilir.

3.4.3 Simülasyon Çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda = 0{,}5$ ve $\beta = 0{,}3$ parametreli Chen dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i = W_i^{\left(i + \sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}}$, $i = 1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri hesaplanır.
3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Düz(g)i dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.

4. Son olarak $X_{i:m:n}^{R} = \exp\left(\frac{\log\left(\log\left(-\frac{-\lambda+\log(1-y)}{\lambda}\right)\right)}{\beta}\right)$, $i=1,2,\ldots,m$ dönüşümü yardımıyla Chen dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiği elde edilir.

Denemenin 1000 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre λ ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 4 de verilmiştir.

Tablo 4. Chen Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması ($\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$)

n,m	Sansür Şeması	EÇO				LBayes			
		Ortalama Yan		HKO		Ortalama Yan		HKO	
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
(20,10)	(9*0,10)	0,1718	0,0943	0,0295	0,0366	0,2445	0,1379	0,3464	0,0526
	(10,9*0)	0,0542	0,0478	0,0029	0,0117	0,0372	0,0589	0,0647	0,0137
	(10*1)	0,1006	0,0631	0,0101	0,0209	0,1113	0,0847	0,1728	0,0267
(20,20)	(20*0)	0,0117	0,0230	0,0001	0,0040	0,0049	0,0259	0,0195	0,0041
(30,10)	(9*0,20)	0,0311	0,0529	0,0010	0,0126	0,0178	0,0616	0,0485	0,0140
	(20, 9*0)	0,0302	0,0528	0,0009	0,0138	0,0174	0,0617	0,0522	0,0150
	(10*2)	0,0361	0,0501	0,0013	0,0123	0,0228	0,0587	0,0501	0,0135
(30,15)	(14*0,15)	0,0122	0,0365	0,0001	0,0071	0,0033	0,0414	0,0296	0,0076
	(15,14*0)	0,0115	0,0344	0,0001	0,0066	0,0026	0,0388	0,0274	0,0069
	(15*1)	0,0216	0,0284	0,0005	0,0055	0,0121	0,0331	0,0272	0,0058
(30,25)	(24*0,5)	0,0081	0,0156	0,0001	0,0026	0,0025	0,0177	0,0133	0,0026
	(5,24*0)	0,0100	0,0179	0,0001	0,0026	0,0045	0,0200	0,0147	0,0027
(30,30)	(30*0)	0,0063	0,0154	0,0000	0,0022	0,0018	0,0170	0,0109	0,0023
(50,30)	(29*0,20)	0,0284	0,0215	0,0008	0,0046	0,0316	0,0326	0,0161	0,0055
	(20,29*0)	0,0100	0,0146	0,0001	0,0020	0,0043	0,0168	0,0116	0,0020
(50,40)	(39*0,10)	0,0084	0,0156	0,0001	0,0023	0,0049	0,0210	0,0078	0,0025
	(10,39*0)	0,0037	0,0133	0,0000	0,0015	0,0001	0,0145	0,0088	0,0015

(50,50)	(50*0)	0,0047	0,0096	0,0000	0,0012	0,0020	0,0104	0,0065	0,0012
(60,30)	(29*0,30)	0,0386	0,0245	0,0015	0,0047	0,0487	0,0370	0,0202	0,0058
	(30,29*0)	0,0094	0,0133	0,0001	0,0019	0,0035	0,0156	0,0111	0,0020
	(30*1)	0,0213	0,0172	0,0005	0,0029	0,0187	0,0222	0,0108	0,0032
(60,40)	(39*0,20)	0,0182	0,0160	0,0003	0,0031	0,0178	0,0234	0,0083	0,0036
	(20,39*0)	0,0081	0,0083	0,0001	0,0013	0,0041	0,0097	0,0075	0,0013
(60,50)	(49*0,10)	0,0089	0,0109	0,0001	0,0017	0,0057	0,0146	0,0059	0,0019
	(10,49*0)	0,0058	0,0073	0,0000	0,0011	0,0030	0,0083	0,0061	0,0011
(60,60)	(60*0)	0,0039	0,0083	0,0000	0,0010	0,0017	0,0089	0,0055	0,0010
(90,50)	(49*0,40)	0,0210	0,0143	0,0004	0,0027	0,0241	0,0212	0,0099	0,0030
	(40,49*0)	0,0084	0,0070	0,0001	0,0011	0,0051	0,0082	0,0068	0,0012
(90,60)	(59*0,30)	0,0122	0,0090	0,0001	0,0016	0,0118	0,0138	0,0053	0,0018
	(30,59*0)	0,0047	0,0074	0,0000	0,0009	0,0021	0,0082	0,0055	0,0009
(90,70)	(69*0,20)	0,0088	0,0070	0,0001	0,0012	0,0069	0,0102	0,0044	0,0013
	(20,69*0)	0,0017	0,0065	0,0000	0,0008	0,0004	0,0071	0,0047	0,0008
(90,90)	(90*0)	0,0018	0,0053	0,0000	0,0006	0,0004	0,0057	0,0037	0,0006

Tablo 4 e göre n sabit tutulup m arttırıldığında sansürlemenin sonda, başta ve her elemanın eşit olduğu durumlarda parametrelerin hem EÇO hem de yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata hareler ortalaması değerlerinde azalma görülmektedir. m sabit tutulup n değeri arttırıldığında parametrelerin EÇO ve yaklaşık bayes tahminlerinin HKO değerlerinde genellikle artış gözlemlenmektedir. Sansürlemenin başta verildiği durumlarda diğer sansür şemalarına göre en çok olabilirlik tahmin edicisi ve bayes tahmin edicilerinin genellikle daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Bütün sansür şemaları için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir En iyi tahmin edici $n = m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

3.5. Üstelleştirilmiş Pareto

Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı (EP(λ,β)), Gupta ve arkadaşları (1998) tarafından önerilmiştir. Önerilen (EP(λ,β)) dağılımın o.y.f.,d.f., güvenilirlik ve hazard fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$f\left(x|\ \lambda,\beta\right)=\lambda\beta\left(1-\left(1+x_i\right)^{-\lambda}\right)^{\beta-1}\left(1+x_i\right)^{-\lambda-1} \quad , x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.66}$$

$$F\left(x|\ \lambda,\beta\right)=\left(1-\left(1+x_i\right)^{-\lambda}\right)^{\beta} \quad , x>0,\ \beta>0\ ,\ \lambda>0 \tag{3.67}$$

$$R\left(x\right)=1-\left(1-\left(1+x_i\right)^{-\lambda}\right)^{\beta} \tag{3.68}$$

$$h\left(x\right)=\frac{\lambda\beta\left(1-\left(1+x_i\right)^{-\lambda}\right)^{\beta-1}\left(1+x_i\right)^{-\lambda-1}}{1-\left(1-\left(1+x_i\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}} \tag{3.69}$$

$\beta=1$ olduğu durumda dağılım standart pareto dağılımına dönüşür. Yine Gupta ve arkadaşları (1998) bozulma oranının β parametresinin değerlerine göre azalan ve ters küvet biçiminde olduğunu göstermiştir.

3.5.1. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini

$X^{R}_{1:m:n}<X^{R}_{2:m:n}<\ldots<X^{R}_{m:m:n}$ Üstelleştirilmiş Pareto (λ,β) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemin olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}L\left(\lambda,\beta\,|\,\mathbf{x^R}\right)=c\lambda^m\beta^m\prod_{i=1}^{m}\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta-1}\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda-1}\times\\ \times\left(1-\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)^{R_i}\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}\ell\left(\lambda,\beta\,|\,\mathbf{x^R}\right)=log\,c+m\,log\,\lambda+m\,log\,\beta+\left(\beta-1\right)\sum_{i=1}^{m}log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)-\\ -\left(\lambda+1\right)\sum_{i=1}^{m}\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)+\sum_{i=1}^{m}R_i\left(1-\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)\end{aligned} \tag{3.71}$$

λ, β' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.72) ve (3.73) eşitliklerinde verilen lineer olmayan denklemlerin Newton-Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilebilir.

$$\frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} + (\beta-1)\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda} \log\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)}{1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}} - \sum_{i=1}^{m} \log\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right) - \\ - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i \left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta} \beta \left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda} \log\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)}{\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)\left(1-\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)} = 0 \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} \log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i \left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta} \log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)}{\left(1-\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)} = 0 \tag{3.73}$$

3.5.2. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin Lindley Yaklaşımı Yardımıyla Bayes Tahmini

$X_{1:m:n}^{R} < X_{2:m:n}^{R} < ... < X_{m:m:n}^{R}$, Üstelleştirilmiş Pareto(λ,β) dağılımına sahip ilerleyen tür tip-II ağdan sansürlü sıra istatistikleri olmak üzere λ ve β parametrelerinin bağımsız birer rasgele değişken olduğu ve önsel dağılımlarının da sırasıyla (e_1,d_1) ve (e_2,d_2) parametreli Gamma dağılımına sahip olduğu varsayılarak o.y.f.'ları sırasıyla (3.9) ve (3.10) eşitliklerine benzer şekilde yazılabilir. Ortak prior dağılımının logaritması ise (3.12) eşitliğine benzer şekilde elde edilebilir. Bu durumda p=2 için Lindley yaklaşım formülleri;

$$g_1 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\lambda} = \frac{e_1 - 1}{\lambda} - d_1$$

$$g_2 = \frac{dG(\lambda,\beta)}{d\beta} = \frac{e_2 - 1}{\beta} - d_2$$

$i, j = 1, 2$ için L_{ij} değerleri;

$$L_1 = \frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{m} \frac{s^{-\lambda} \log s}{v} - \sum_{i=1}^{m} \log s - \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i v^{\beta} \beta s^{-\lambda} \log s}{v\left(1 - v^{\beta}\right)}$$

$$L_2 = \frac{\partial \log L(\lambda,\beta)}{\partial \beta} = \frac{m}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} \log v + \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i v^{\beta} \log v}{\left(1 - v^{\beta}\right)}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda^2} = -\frac{m}{\lambda^2} + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{s^{-\lambda} \log s^2}{v} - \frac{s^{-2\lambda} \log s^2}{v^2}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{R_i v^{\beta} \beta^2 s^{-2\lambda} \log s^2}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)} + \dfrac{R_i v^{\beta} \beta s^{-\lambda} \log s^2}{v\left(1 - v^{\beta}\right)} + \\ + \dfrac{R_i v^{\beta} \beta s^{-2\lambda} \log s^2}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)} - \dfrac{R_i v^{2\beta} \beta^2 s^{-2\lambda} \log s^2}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)^2} \end{array}\right)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\partial^2 L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda \partial \beta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{s^{-\lambda} \log s}{v} -$$
$$- \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{R_i v^{\beta} \log v \beta s^{-\lambda} \log s}{v\left(1 - v^{\beta}\right)} + \frac{R_i v^{\beta} s^{-\lambda} \log s}{v\left(1 - v^{\beta}\right)} + \frac{r_i v^{2\beta} \log(v) \beta s^{-\lambda} \log s}{v\left(1 - v^{\beta}\right)^2}\right)$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2 L(\lambda,\beta)}{\partial \lambda^2} = -\frac{m}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{R_i v^{\beta} \log v^2}{\left(1 - v^{\beta}\right)} + \frac{R_i v^{2\beta} \log v^2}{\left(1 - v^{\beta}\right)^2}\right)$$

$$L_{111} = \frac{2m}{\lambda^3} + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{s^{-\lambda} \log s^3}{v} + \frac{3s^{-2\lambda} \log s^3}{v^2} + \frac{2s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{R_i v^{\beta} \beta^3 s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)} + \dfrac{3R_i v^{\beta} \beta^2 s^{-2\lambda} \log s^3}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)} + \dfrac{3R_i v^{\beta} \beta^2 s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)} - \\ - \dfrac{3R_i v^{2\beta} \beta^3 s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)^2} - \dfrac{R_i v^{\beta} \beta\left(1 + x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda} \log s^3}{v\left(1 - v^{\beta}\right)} - \\ - \dfrac{3R_i v^{\beta} \beta s^{-2\lambda} \log s^3}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)} + \dfrac{3R_i v^{2\beta} \beta^2 s^{-2\lambda} \log s^3}{v^2\left(1 - v^{\beta}\right)^2} - \dfrac{2R_i v^{\beta} \beta s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)} \\ + \dfrac{3R_i v^{2\beta} \beta^2 s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)^2} - \dfrac{2R_i v^{3\beta} \beta^3 s^{-3\lambda} \log s^3}{v^3\left(1 - v^{\beta}\right)^3} + \dfrac{R_i v^{2\beta} \log(v) \beta s^{-\lambda} \log s}{v\left(1 - v^{\beta}\right)^2} \end{array}\right)$$

$$L_{112} = L_{121} = L_{211} = \sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{s^{-\lambda}\log s^2}{v} - \frac{s^{-2\lambda}\log s^2}{v^2} \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{R_i v^{\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)\beta^2 s^{-2\lambda}\log s^2}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)} - \\ -\dfrac{2R_i v^{\beta}\beta\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-2\lambda}\log v^2}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)} - \\ -\dfrac{3R_i v^{2\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)\beta^2 s^{-2\lambda}\log s^2}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)^2} + \\ +\dfrac{R_i v^{\beta}\beta\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\log s^2}{v\left(1-v^{\beta}\right)} + \dfrac{R_i v^{\beta}s^{-\lambda}\log s^2}{v\left(1-v^{\beta}\right)} + \\ +\dfrac{R_i v^{2\beta}\beta s^{-\lambda}\log s^2\log v}{v\left(1-v^{\beta}\right)^2} + \dfrac{R_i v^{\beta}s^{-2\lambda}\log s^2}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)} + \\ \dfrac{R_i v^{2\beta}\beta s^{-2\lambda}\log s^2\log v}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)^2} - \dfrac{2R_i v^{2\beta}\beta s^{-2\lambda}\log s^2}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)^2} - \\ -\dfrac{2R_i v^{3\beta}\beta^2\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-2\lambda}\log s^2\log v}{v^2\left(1-v^{\beta}\right)^3} \end{array} \right)$$

$$L_{122} = L_{212} = L_{221} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{R_i v^{\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^2\beta s^{-\lambda}\log s}{v\left(1-v^{\beta}\right)} - \\ \dfrac{2R_i v^{\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)s^{-\lambda}\log s}{v\left(1-v^{\beta}\right)} - \\ -\dfrac{3R_i v^{2\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^2\beta s^{-\lambda}\log s}{v\left(1-v^{\beta}\right)^2} - \\ \dfrac{2R_i v^{2\beta}\log vs^{-\lambda}\log s}{v\left(1-v^{\beta}\right)^2} - \dfrac{2R_i v^{3\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^2\beta s^{-\lambda}\log s}{v\left(1-v^{\beta}\right)^3} \end{array} \right)$$

$$L_{222}=\frac{2m}{\beta^3}+\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{R_i v^{\beta}\log v^3}{\left(1-\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)}-\frac{3R_i v^{2\beta}\log v^3}{\left(1-v^{\beta}\right)^2}-\frac{2R_i v^{3\beta}\log v^3}{\left(1-v^{\beta}\right)^3}\right)$$

$$\sigma_{11}=-\frac{\lambda^2\left(-m+\beta^2\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i p\log p^2}{t^2}\right)}{H}$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{\lambda^2\beta^2\sum_{i=1}^{m}\frac{s^{-\lambda}\log s}{-1+s^{-\lambda}}-\sum_{i01}^{m}\frac{R_i p s^{-\lambda}\log s\left(-\log p-1+p\right)}{\left(-1+s^{-\lambda}\right)t^2}}{H}$$

$$\sigma_{22}=-\frac{\beta^2\left(-m+\lambda^2\beta\sum_{i=1}^{m}-\frac{s^{-\lambda}\log s^2}{p^2}+\lambda^2\sum_{i=1}^{m}\frac{s^{-\lambda}\log s^2}{p^2}+\lambda^2\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i p\beta s^{-\lambda}\log s^2\left(\beta s^{-\lambda}-1+p\right)}{\left(-1+s^{-\lambda}\right)^2 t^2}\right)}{H}$$

biçimindedir. Burada,

$$p=\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}, \tag{3.74}$$

$$s=\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right), \tag{3.75}$$

$$t=\left(-1+\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right), \tag{3.76}$$

$$v=\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right), \tag{3.77}$$

$$w=\sum_{i=1}^{m}\left(-1\frac{\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\log\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^2}{\left(-1+\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^2}\right), \tag{3.78}$$

$$y=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{R_i\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\log\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^2}{\left(-1+\left(1-\left(1+x_{i:m:n}^{R_i}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)^2}\right) \tag{3.79}$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{r_i\left(1-\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\beta\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}\log\left(1+x_{i:m:n}\right)^2\left(\beta\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}-1+\left(1-\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)}{\left(-1+\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}\right)^2\left(-1+\left(1-\left(1+x_{i:m:n}\right)^{-\lambda}\right)^{\beta}\right)^2}\right) \tag{3.80}$$

$$H = \beta^2(m^2 - m\beta^2 y - \lambda^2\beta m w + w\lambda^2\beta^3 y + \lambda^2 m w - w\lambda^2 y\beta^2) - \\ -\beta^2(\lambda^2 m z + z\lambda^2 y\beta^2 - \lambda^2\beta^2 w - 2\lambda^2\beta^2 w z - \lambda^2\beta^2 z) \quad (3.81)$$

biçimindedir.

3.5.3 Simülasyon Çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$ parametreli Üstelleştirilmiş Pareto dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.
2. $V_i = W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}}$, $i = 1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri hesaplanır.
3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}$, $i = 1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.
4. Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathrm{R}} = \exp\left(-\frac{\log\left(-e^{\left(\frac{\log y}{\beta}\right)}+1\right)}{\lambda}\right) - 1$, $i = 1,2,\ldots,m$ ters dönüşümü ile Üstelleştirilmiş Pareto dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde edilir.

Denemenin 1000 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre λ ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 5 de verilmiştir.

Tablo 5. Üstelleştirilmiş Pareto Dağılımı İçin EÇO ve LBayes Tahmin Edicilerinin Karşılaştırılması ($\lambda = 0,5$ ve $\beta = 0,3$)

n,m	Sansür Şeması	MLE				Bayes			
		Ortalama Bias		MSE		Ortalama Bias		MSE	
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
(20,10)	(10,9*0)	0,3757	0,0474	0,1411	0,0162	0,4411	0,1886	0,9919	0,1890
	(10*1)	0,5480	0,0531	0,3003	0,0136	0,6827	0,1672	1,4258	0,1084
(20,20)	(20*0)	0,1351	0,0321	0,0183	0,0092	0,1485	0,0812	0,1437	0,0529
(30,10)	(9*0,20)	0,4179	0,0833	0,1747	0,0268	0,5655	0,3512	1,0958	0,6048
	(20, 9*0)	0,3435	0,0327	0,1180	0,0109	0,4047	0,1627	1,0488	0,2006
(30,15)	(14*0,15)	0,4001	0,0381	0,1601	0,0139	0,5529	0,4829	1,0024	0,4536
	(15,14*0)	0,2241	0,0276	0,0502	0,0081	0,2401	0,0883	0,3245	0,0342
	(15*1)	0,3699	0,0319	0,1369	0,0083	0,4072	0,0819	0,6325	0,0308
(30,25)	(24*0,5)	0,1486	0,0263	0,0221	0,0073	0,1512	0,0521	0,1615	0,0197
	(5,24*0)	0,0916	0,0212	0,0084	0,0057	0,0942	0,0482	0,0787	0,0136
(30,30)	(30*0)	0,0952	0,0192	0,0091	0,0052	0,0956	0,0402	0,0761	0,0115
(50,30)	(29*0,20)	0,1561	0,0209	0,0244	0,0048	0,1679	0,0387	0,1511	0,0084
	(20,29*0)	0,0848	0,0148	0,0720	0,0420	0,0858	0,0361	0,0652	0,0085
(50,40)	(39*0,10)	0,0608	0,0153	0,0037	0,0038	0,0587	0,0259	0,0671	0,0054
	(10,39*0)	0,0405	0,0102	0,0016	0,0041	0,0395	0,0236	0,0346	0,0064
(50,50)	(50*0)	0,0463	0,0115	0,0021	0,0026	0,0441	0,0205	0,0288	0,0038
(60,30)	(29*0,30)	0,2204	0,0177	0,0486	0,0030	0,2712	0,0422	0,2483	0,0091
	(30,29*0)	0,0901	0,0167	0,0081	0,0037	0,0918	0,0389	0,0625	0,0073
	(30*1)	0,1461	0,0146	0,0213	0,0033	0,2487	0,0510	0,8407	0,2464
(60,40)	(39*0,20)	0,1319	0,0211	0,0174	0,0043	0,1406	0,0339	0,1378	0,0062
	(20,39*0)	0,0627	0,0090	0,0039	0,0021	0,0605	0,0212	0,0388	0,0033
(60,50)	(49*0,10)	0,0673	0,0039	0,0045	0,0025	0,0618	0,0102	0,0511	0,0031
	(10,49*0)	0,0302	0,0163	0,0009	0,0031	0,0295	0,0268	0,0282	0,0045
(60,60)	(60*0)	0,0445	0,0109	0,0020	0,0023	0,0423	0,0181	0,0218	0,0031
(90,50)	(49*0,40)	0,1026	0,0162	0,0105	0,0021	0,1213	0,0277	0,1208	0,0053
	(40,49*0)	0,0717	0,0201	0,0051	0,0035	0,0724	0,0331	0,0343	0,0054
(90, 60)	(59*0,30)	0,0449	0,0077	0,0020	0,0021	0,0405	0,0124	0,0335	0,0024

	(30,59*0)	0,0324	0,0103	0,0011	0,0018	0,0311	0,0183	0,0189	0,0025
(90,70)	(69*0,20)	0,0389	0,0108	0,0015	0,0017	0,0349	0,0151	0,0260	0,0020
	(20,69*0)	0,0250	0,0051	0,0006	0,0014	0,0229	0,0109	0,0138	0,0017
(90,90)	(90*0)	0,0246	0,0059	0,0006	0,0014	0,0226	0,0100	0,0137	0,0016

Tablo 5 e göre n sabit tutulup m değeri arttırıldığında sansürlemenin sonda, başta ve her elemanının eşit olduğu durumlarda EÇO tahmin edicileri ve Lindley yaklaşımı yardımıyla elde edilen bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması değerlerinde azalma gözlemlenmektedir. m sabit tutulup n değeri arttırıldığında EÇO ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması değerlerinde genellikle artma gözlenmiştir. Bütün sansür şemaları için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Ayrıca sansürlemenin başta verildiği durumlarda diğer sansür şemalarına göre en çok olabilirlik tahmin edicisi ve bayes tahmin edicilerinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. En iyi tahmin ediciler $n=m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

3.6. Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı

Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı (GG(λ,c,β)) El-Gohary ve arkadaşları (2013) tarafından önerilmiştir. Önerilen GG(λ,c,β) dağılımın o.y.f.,d.f., güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x\mid\lambda,\beta)=\beta\lambda e^{cx}\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx_i}-1)\right\}\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\right]^{\beta-1},\ x,c,\ \lambda,\beta>0 \tag{3.82}$$

$$F(x\mid\lambda,\beta)=\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\right]^{\beta},\quad x>0,\ \lambda>0,\ c>0,\ \beta>0 \tag{3.83}$$

$$R(x)=1-\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\right]^{\beta} \tag{3.84}$$

$$h(x_i)=\frac{\beta\lambda e^{cx}\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\right]^{\beta-1}}{1-\left[1-\exp\left\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\right\}\right]^{\beta}},\ x_i>0 \tag{3.85}$$

Burada β şekil parametresidir. $c>0$ ya da sabit fonksiyon $c=0$ olduğu durumda ve $\beta>0$ iken hazard fonksiyonu artan fonksiyondur. Hazard fonksiyonu, $\beta<1$ için; $c=0$ olursa azalan, $c>0$ olursa küvet biçiminde olacaktır (El-Gohary, Alshamrani, Al-Otaibi, 2010).

3.6.1. İlerleyen Tür Sansürleme Altında Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı İçin En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_{1:m:n}^{R}<X_{2:m:n}^{R}<...<X_{m:m:n}^{R}$ *Genelleştirilmiş Gompertz*(λ,β) dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemin olabilirlik fonksiyonu ve log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L\left(\lambda,c,\beta\,|\,\mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right)=A\beta^{m}\lambda^{m}\,exp\left(c\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}\right)\times \times\prod_{i=1}^{m}\left(\begin{array}{l} exp\left(-\dfrac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\left(1-exp\left(-\dfrac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta-1} \\ \left(\left(1-exp\left(-\dfrac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\right)^{R_i} \end{array}\right) \tag{3.86}$$

$$\ell\left(\lambda,c,\beta\,|\,\mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right)=log\,A+m\,log\,\beta+m\,log\,\lambda+c\sum_{i=1}^{m}x_{i:m:n}- -\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)+(\beta-1)\sum_{i=1}^{m}log\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)+ +\sum_{i=1}^{m}R_i\,log\left(1-\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\right) \tag{3.87}$$

λ,c,β' nın en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.88), (3.89) ve (3.90) eşitlikleri ile verilen olmayan denklemlerin Newton-Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilebilir.

$$\frac{\partial \ell\left(\lambda,c,\beta \mid \mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right)}{\partial \lambda}=\frac{m}{\lambda}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}+$$
$$+(\beta-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)}{c\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\beta\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)e^{\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)}}{c\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)\left(1-\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\right)}=0$$

(3.88)

$$\frac{\partial \ell\left(\lambda,c,\beta \mid \mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right)}{\partial \beta}=\frac{m}{\beta}+\sum_{i=1}^{m}log\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}log\left(1-e^{\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)}\right)}{\left(1-\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\right)}=0$$

(3.89)

$$\frac{\partial \ell\left(\lambda,c,\beta \mid \mathbf{x}^{\mathbf{R}}\right)}{\partial c}=\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n}-\frac{\lambda\sum_{i=1}^{m}\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c^{2}}-\frac{\lambda\sum_{i=1}^{m} x_{i:m:n}e^{cx_{i:m:n}}}{c}-$$

$$-(\beta-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c^{2}}-\frac{\lambda x_{i:m:n}e^{cx_{i:m:n}}}{c}\right)exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)}{\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} R_i\frac{\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\beta\left(\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c^{2}}-\frac{\lambda x_{i:m:n}e^{cx_{i:m:n}}}{c}\right)exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)}{\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)\left(1-\left(1-exp\left(-\frac{\lambda\left(e^{cx_{i:m:n}}-1\right)}{c}\right)\right)^{\beta}\right)}=0 \tag{3.90}$$

3.6.2. Simülasyon çalışması

Balakrishnan ve Sandu (1995)' nun algoritması kullanılarak $\lambda=0,03$, $\beta=0,5$, $c=0,7$ parametreli Genelleştirilmiş Gompertz dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem aşağıdaki şekilde üretilir.

1. $W_1,W_2,\ldots,W_m$ bağımsız ve Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem üretilir.

2. $V_i=W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_j\right)^{-1}}$, $i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenleri hesaplanır.

3. $U_{i:m:n}^{\mathbf{R}}=1-V_mV_{m-1}\cdots V_{m-i+1}$, $i=1,2,\ldots,m$ dönüşümü ile Düzgün$(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R}=(R_1,R_2,\ldots,R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}}<U_{2:m:n}^{\mathbf{R}}<\cdots<U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.

4. Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathrm{R}}=\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\log\left(1-\exp\left(\frac{\log U_{i:m:n}^{\mathrm{R}}}{\beta}\right)\right)\right\}-1$, $i=1,2,\ldots,m$ rasgele değişkeni ile Genelleştirilmiş Gompertz dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olan $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}}<U_{2:m:n}^{\mathbf{R}}<\cdots<U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ elde edilir.

Denemenin 100 kez tekrarlanması sonucunda farklı sansür şemalarına göre λ, c ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin yan ve hata kareler ortalamasına ilişkin simülasyon sonuçları Tablo 6 da verilmiştir.

Tablo 6. Genelleştirilmiş Gompertz Dağılımı İçin EÇO Tahmin Edicilerinin Yan ve HKO değerleri ($\lambda = 0,03$ ve $\beta = 0,5$ $c = 0,7$)

(n,m)	Sansür Şeması	EÇO					
		Ortalama Yan			HKO		
		$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{c}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{c}$
(20,10)	(9*0,10)	0.1485	0.3620	0.1684	0.0221	0.7825	0.8317
	(10,9*0)	0.0470	0.1246	0.2684	0.0022	0.3346	0.6981
	(10*1)	0.0597	0.1439	0.2857	0.0036	0.3044	0.6512
(20,15)	(14*0,5)	0.0747	0.2565	0.0497	0.0056	0.6108	0.2647
	(5,14*0)	0.0405	0.1305	0.1479	0.0016	0.1598	0.3278
(20,20)	(20*0)	0.0280	0.1182	0.1042	0.0008	0.1368	0.1456
(30,15)	(14*0,15)	0.1363	0.2594	0.0971	0.0186	0.6961	0.7872
	(15,14*0)	0.0416	0.1309	0.0832	0.0017	0.2059	0.1803
	(15*1)	0.0281	0.0721	0.2177	0.0008	0.0879	0.4235
(30,20)	(19*0,10)	0.0776	0.2484	0.0790	0.0060	0.6533	0.3616
	(10,19*0)	0.0349	0.0969	0.0393	0.0012	0.0949	0.1510
(30,25)	(24*0,5)	0.0317	0.1029	0.0846	0.0010	0.1131	0.1723
	(5,24*0)	0.0199	0.0706	0.0760	0.0004	0.0704	0.1179
(30,30)	(30*0)	0.0134	0.0540	0.0518	0.0002	0.0608	0.0709
(50,30)	(29*0,20)	0.0487	0.1317	-0.0136	0.0024	0.1146	0.1972
	(20,29*0)	0.0140	0.0491	0.0666	0.0002	0.0502	0.0892
(50,40)	(39*0,10)	0.0103	0.0099	0.0741	0.0001	0.0207	0.0852
	(10,39*0)	0.0172	0.0695	0.0258	0.0003	0.0438	0.0833
(50,50)	(50*0)	0.0075	0.0330	0.0367	0.0001	0.0275	0.0346
(60,30)	(29*0,30)	0.0513	0.1359	-0.0274	0.0026	0.1217	0.2483
	(30,29*0)	0.0208	0.0526	0.0671	0.0004	0.1163	0.1140
	(30*1)	0.0189	0.0578	0.0403	0.0004	0.0435	0.0907
(60,40)	(39*0,20)	0.0139	0.0268	0.0652	0.0002	0.0359	0.1146
	(20,39*0)	0.0168	0.0525	0.0714	0.0003	0.0534	0.1133
(60,50)	(49*0,10)	0.0140	0.0427	0.0135	0.0002	0.0235	0.0581
	(10,49*0)	0.0050	0.0173	0.0524	0.0000	0.0234	0.0376
(60,60)	(60*0)	0.0058	0.0167	0.0280	0.0000	0.0165	0.0315
(90,50)	(49*0,40)	0.0197	0.0441	0.0049	0.0004	0.0282	0.1079
	(40,49*0)	0.0083	0.0181	0.0386	0.0001	0.0247	0.0438
(90,60)	(59*0,30)	0.0162	0.0492	-0.0014	0.0003	0.0237	0.0972
	(30,59*0)	0.0085	0.0283	0.0278	0.0001	0.0213	0.0394
(90,70)	(69*0,20)	0.0093	0.0327	0.0333	0.0001	0.0186	0.0537
	(20,69*0)	0.0092	0.0377	0.0134	0.0001	0.0200	0.0386
(90,90)	(90*0)	0.0060	0.0299	0.0247	0.0000	0.0145	0.0299

Tablo 6 ya göre n sabit tutulup m değeri arttırıldığında sansürlemenin sonda, başta ve her elemanının eşit olduğu durumlarda EÇO tahmin edicisinin hata kareler

ortalaması ve yan değerlerinde azalma görülmektedir. Ayrıca sansürlemenin başta verildiği durumlarda diğer sansür şemalarına göre en çok olabilirlik tahmin edicisinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. En iyi tahmin edici $n = m$ (tam örneklem) durumunda elde edilmiştir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında Balakrishnan ve Sandu' nun ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem için sayı üretme algoritması kullanılarak Weibull, Gompertz, Üstelleştirilmiş Üstel, Chen ve Üstelleştirilmiş Pareto dağılımlarından sayılar üretilerek en çok olabilirlik ve Lindley yaklaşımı kullanılarak bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Son olarak Genelleştirilmiş Gompertz dağılımı için en çok olabilirlik tahmin edicileri incelenmiştir.

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürleme altında yukarıdaki dağılımlar için elde edilen sonuçlara göre n sabit tutulup m (bozulma sayısı) arttırıldığında, sansürlemenin basta ve sonda verildiği durumlarda hem EÇO hem de bayes tahmin edicilerinde yan ve MSE değerlerinde azalma tespit edilmektedir. Ayrıca sansürlemenin başta verildiği durumda EÇO ve bayes tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinde azalma görülmektedir.

m sabit tutulup n değeri arttırıldığında EÇO ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması değerlerinde genellikle artma gözlenmiştir.

n ve m birlikte arttırıldığında eşit sansürlemede EÇO ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması değerlerinde genellikle azalma gözlenmiştir.

Bütün durumlar için en çok olabilirlik tahmin edicisi yaklaşık bayes tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

n=m için yani tam örneklem durumunda EÇO ve yaklaşık bayes tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması değerlerinde en iyi sonuçlara ulaşılmıştır.

Sonuç olarak ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem durumunda incelenen dağılımlar için yaklaşık bayes tahmin edicileri ve en çok olabilirlik tahmin edicilerinin her ikisi de kullanılabilir.

4.2 Öneriler

İleriki çalışmalarda ilerleyen tür tip-II sansürleme altında farklı dağılımlar için Lindley yaklaşımı yardımıyla bayes tahmini ve en çok olabilirlik tahmini konusu incelenebilir.

KAYNAKLAR

Al-Kutubi H. S., İbrahim N.A. 2009. Bayes Estimator For Exponential Distribution With Extension Of Jeffery Prior İnformation, Malaysian Journal Of Mathematical Sciences 3 (2), 297-313.

Bairamov I. 2006. Progressive Type II Censored Order Statistics For Multivariate Observations, Journal Of Multivariate Analysis 97, 797-809.

Balakrishnan, N., Aggarwala, R. 2000. Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Birkhauser, Boston.

Balakrishnan, N., Sandhu, R.A. 1995. A Simple Simulation Algorithm for Generating Progressively Type-II Censored Sample, American Statistician 49, 229-230.

Balakrishnan, N. 2007. Progressive Censoring Methodology: An Appraisal (with discussions), Test 16,
211–296.

Berksoy, A.H., Özkan, O. 2001. Çözümlü Analiz Problemleri. S.Ü. Basımevi, Konya.

Casella, G., Berger, R.L. 2002, Statistial Inference, Duxbury Advanced Series.

Chen, Z. 2000. A New Two Parameter Lifetime Distribution With Bathtub Shape or İncreasing Failure Rate Function, Statistics & Probability Letters 49, 155-161.

David, H., 1970. Order Statistics. John Wiley, New York.

El-Gohary A., Alshamrani A., Otaibi A.N. 2013.The generalized Gompertz distribution, Applied Mathematical Modelling 37, 13-24.

Kale, B. 2003. İlerleyen Tür Sansürlenmiş Sıra İstatistikleri: Dağılım Özellikleri Ve Uygulamalar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kundu D. 2008, Bayesian Inference and Life Testing Plan for The Weibull Distribution in Presence of Progressive Censoring, American Association and the American Society for Quality TECHNOMETRICS 50,(2), 144-154.

Kunimura D. 1998. The Gompertz Distribution-Estimation Of Parameters, Actuarial Resarch Clearing House 2.

Kuş, C. 2004, Bazı Yaşam Zamanı Dağılımlarının Parametrelerinin Tam ve Sansürlü Verilere Dayalı Tahmini, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

Kuş, C. 2005. İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örnekleme Dayalı Düzgün Dağılımın Parametrelerinin Jacknife Tahmin Edicisi, Ekonometri ve İstatistik 2, 11-29.

Lindley, D. 1980. Approximate Bayes Methods, University College London.

Omar A.A., Low H.C. 2012. Bayesian Estimate For Shape Parameter From Generalized Power Function Distribution, Mathematical Theory and Modeling 2 (12).

Oturanç G., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., 2003. Sayısal Analiz. Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H., Karabulut, İ. (2006), Parametre Tahmini ve Hipotez Testi,(157-160).

Preda V., Panaitescu E., Constantinescu A. 2010, Bayes Estimators of Modified-Weibull Distribution Parameters Using Lindley's Approximation, Wseas Transactions on Mathematics 7, 539-549

Saraçoğlu, B. 2012. Pareto Dağılımının Parametrelerinin İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklemlere Dayal En Küçük Kareler Tahmini, İstatistikçiler Dergisi 5, 43-50.

Saraçoğlu, B., Kınacı, İ., Kundu, D. (2012), On Estimation of $R = P(Y < X)$ For Exponential Distribution Under Progressive Type-II Censoring, Journal Of Statistical Computation and Simulation 2 (82), 729-744.

Shawky, A.I., Abu-Zinadah, H.H. 2009, Exponentiated Pareto Distribution: Dİfferent Method Of Estimations, Int, J. Contemp. Math. Sciences 4 (14), 677,693.

Tamam, D. 2008. Tam ve Sansürlü Örneklem Durumlarında Weibull Dağılımı İçin Bazı İstatistiki Sonuç Çıkarımları, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Wu S.J., Chang C.T. 2002. Parameter Estimations Based on Exponential Progressive Type II Censored Data With Binomial Removals, Information and Management Sciences 13 (3), 37-46.

Wu S.J. 2002. Estimations Of The Parameters Of The Weibull Distributions With Progressively Censored Data, J. Japan Statist. Soc. 32 (2), 155-163.

Wu S.J., Chang C.T., Tsai T.R. 2003. Point and İnterval Estimations For The Gompertz Distributin Under Progressive Type II Censoring, METRON-International Journal Of Statistics LXI (3), 409-418.

Wu C.C., Wu S.F., Chan H.Y., 2006. MLE and TheEstimated Expected Test Time For The Two-Parameter Gompertz Distribution Under Progressive Censoring With Binomial Removals, Applied Mathematics and Computation, 181, 1657-1670.

Yıldız T. 2007. Progressively Type II Censored Order Statistics, Distributions, Characterizations and Concomiitants, Dokuz Eylül Üniversity, Graduate School Of Naturel And Applied Sciences.

Zhang Y., Meeker W.Q. 2002. Bayesian Life Test Planning For The Weibull Distribution With Given Shape Parameter, Iowa State University Department of Statistics.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ecem DEMİR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Sivas, 1990
Telefon : 0507 359 2867
Faks :
e-mail : ecem-d@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Selçuk Anadolu Lisesi	2008
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2012
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	Devam ediyor
Yüksek Lisans	:	Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas	Devam Ediyor

UZMANLIK ALANI: İstatistik

YABANCI DİLLER: İngilizce