



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SANSÜRLÜ ÖRNEKLEM ALTINDA KOMPETİTİF RİSK DATA ANALİZİ

Esra AYDIN ÜNAL

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Mart 2015
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Esra AYDIN ÜNAL

24.02.2015

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SANSÜRLÜ ÖRNEKLEM ALTINDA KOMPETİTİF RİSK DATA ANALİZİ

Esra AYDIN ÜNAL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ

2015, 62 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Coşkun KUŞ
Doç. Dr. İsmail KINACI
Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA

Bir hastalıkta ölümün ortaya çıkması için birden fazla ölüm nedeni varsa bu nedenlerden hangisi ya da hangilerinin diğerlerine göre öne çıktığına ilişkin olasılıkların hesaplanmasında kompetitif riskler yaklaşımından yararlanılır. Ölümlere birden fazla faktör etki eder ve bu faktörlerden bir tanesi öne çıkarak ölüme neden olur ise buna kompetitif riskler (competing risks) adı verilir. Bu tez çalışmasında ilerleyen tür tip-I ve tip-I sansürleme yöntemleri altında Weibull, Pareto ve BurrXII dağılımları için kompetitif risk analizi uygulanmıştır. Bu dağılımlar için En Çok olabilirlik methodu ile parametre tahminleri elde edilmiştir. Simülasyon çalışmaları ile de farklı durumlar için en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan, hata kareler ortalaması ve güven aralıkları elde edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: En çok olabilirlik tahmini, Kompetitif risk, Tip-I sansürleme, İlerleyen tür Tip-I sansürleme.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

COMPETING RISK DATA ANALYSIS UNDER CENSORED SAMPLE

Esra AYDIN ÜNAL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN STATISTICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet BEKÇİ

2015, 62 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Muhammet BEKÇİ
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Assoc. Prof. Dr. İsmail KINACI
Asst. Prof. Dr. Aydın KARAKOCA

In a disease data, if there are more than one cause of death, competing risks approach is used to risk probabilities for determining which cause or causes are preceding.In death-end diseases, many factors can be cause of death. If one of the factors is precedind the cause of death, then this is called competing risks. In this thesis, applied competing risks data for Weibull, Pareto ve BurrXII distribution under progressive type-I censoring and type-I censoring. Maximum likelihood estimation obtained for this distribution's parameters. A simulation study is conducted to investigate the bias, variance and mse of estimates in different case and results are compared for different parameters. A numerical example is also provided.

Keywords: Competing risks, Maximum likelihood estimation(MLE), Type-I censoring, Progressive Type-I censoring

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocalarım sayın Doç.Dr. Muhammet BEKÇİ'ye, Doç.Dr. Coşkun KUŞ ve Doç.Dr. İsmail KINACI'ya teşekkürlerimi sunarım. Beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan her zaman destek olan sevgili eşim Yener ÜNAL' a teşekkürü bir borç bilirim. Manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Esra AYDIN ÜNAL
KONYA-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **5**

2.1 Bazı Dağılımlar 5
2.1.1 Pareto dağılımı 5
2.1.2 BurrXII dağılımı 5
2.1.3 Weibull dağılımı 6
2.2 Sıra İstatistikleri 6
2.3. Kompetitif Risk Analizi 8
2.4. Sansürleme Şemaları 9
2.4.1. Tip I sansürleme 9
2.4.1.1 Kompetitif risk durumunda tip I sansürleme 10
2.4.2. İlerleyen Tür Grup Sansürleme 12
2.4.2.1 Kompetitif risk durumunda ilerleyen tür tip I sansürleme 14
2.5. Tahmin 15
2.5.1. Nokta tahmini 15
2.5.2. Aralık tahmini 16
2.5.3. Fisher bilgi matrisi 17
2.5.4. Newton-Raphson Yöntemi 19

3. BAZI DAĞILIMLAR İÇİN SANSÜRLEME ALTINDA KOMPETİTİF RİSK ANALİZİ **21**

3.1. Pareto Dağılımı İçin Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi 21
3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi 22
3.1.2. Risk ve güven aralıkları 23
3.1.3. Simülasyon Çalışması 25
3.2. Burr XII Dağılımı İçin Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi 29
3.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmin edicisi 29
3.2.2. Risk ve güven aralıkları 31
3.2.3. Simülasyon Çalışması 35
3.3. Weibull Dağılımı İçin İlerleyen Tür Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi 39
3.3.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi 40
3.3.2. Güven Aralıkları 42
3.3.3. Simülasyon Çalışması 44

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 58

KAYNAKLAR 59

ÖZGEÇMİŞ.....62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$f_j(.)$: X_{ij} değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x_i, j)$: $i.$ birimin $j.$ nedenden kaynaklanan riskinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F(x_i, j)$: $i.$ birimin $j.$ nedenden kaynaklanan riskinin birikimli dağılım fonksiyonu

$F(.)$: X_i rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu

$L(.)$: Olabilirlik fonksiyonu

q_{ij} : $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında $j.$ nedenden kaynaklı bozulma olasılığı

q_i : $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulma olasılığı

X_i : $i.$ birimin bozulma zamanı, $i = 1, \ldots, N$

X_{ij} : $i.$ birimin $j.$ bileşenden dolayı bozulma zamanı , $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, k$

λ^* : Tüm risklerin hazard oranlarının toplamı

Kısaltmalar

EÇO : En çok olabilirlik

HKO : Hata Kareler Ortalaması

Min : Minimum

Maks : Maksimum

O.o.y.f: Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

Ort : Ortalama

Var :Varyans

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kompetitif riskler teorisi bir sistemin iki ya da daha fazla sebepten başarısızlığa veya ölüme maruz kaldığı fakat başarısızlığın bu sebeplerden sadece biri tarafından meydana geldiği durumlarla ilgilenir. Fiziki bilimlerde, birden fazla başarısızlık nedeni varsa kompetitif riskler verisi yaşam testlerinden ya da güvenilirlik analizlerinden elde edilir. Eğer risk faktörlerinin belirli bir başarsızlık nedenini nasıl etkilediği araştırılıyorsa kompetitif riskler göz önüne alınmalıdır. Yarışan başarısızlık sebepleri ile başarısızlık zamanı analizindeki problemler, üzerinde çalışılan grupların belirli bir başarısızlık tipine etkisinin tahminini, başarısızlık modları arasındaki ilişkinin tespitini ve belirli bir başarısızlık tipinin yok edilmesi durumunda diğer nedenlerin başarısızlık oranlarının belirlenmesini içerir (Talu,1999). Kompetitif risk analizi mühendislik, biyoistatistik, medikal ve biyolojik çalışmalarda oldukça yaygın bir uygulamadır.

Güvenirlik analizinde sistemin bozulma nedeninin gözardı edilmesi yanlış sonuç çıkarımlarına neden olmaktadır. Bu yüzden kompetitif risk analizleri parçanın ya da sistemin bozulma zamanlarını gösterirken aynı zamanda gösterge değişkeni de sistemin bozulma nedenini göstermektedir. Bu yüzden gözlemler iki değişkenli olmak zorundadır, bunlar bozulma zamanı ve bozulma nedenidir. Cox (1959) çalışmasında bozulma nedenlerini analiz etmeyi amaçlamıştır. Ayrıca bozulma nedeninin bağımsız veya bağımlı olabileceğini söyleyerek çalışmasında kompetitif riski bağımsız olarak kullanmıştır.

Kompetitif riskler bağımsız ya da bağımlı olabilmekle beraber genellikle bunların bağımsız oldukları varsayılır. Ancak bağımlılık varsayımı daha gerçekçidir. Kalbfleisch ve Prentice (2002), sistemin bozulmasında bağımsızlık varsayımını kullanmayarak bağımlılık yapısı ile ilgilenmişlerdir. Bağımlılık yapısının gerçek verilere daha uygun olduğunu düşünerek öndeğişkenleri (kovariate) kullanmışlardır.

Crowder (2001) çalışmasında sistemlerin bozulma nedenlerinin belirlenmesini ele almıştır. Bozulma nedenleri belirlenerek gerekli risk hesaplamaları yapmıştır. Bu hesaplamalarla ilgili örnekler vererek sonuçları tartışılmıştır.

Han ve Balakrishnan (2010) üstel dağılıma sahip olan bağımsız risk faktörleri için basit step-stres metodunu uygulamışlardır. En çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini ve güven aralıklarını elde etmişlerdir. Bootsrap metodu ve bayes yaklaşımı ile parametre tahmini elde edip sonuçları tartışılmıştır.

Liu ve Qiu (2011) çalışmalarında bağımsız risk faktörleri için step-stres yöntemini uygulamışlardır. Asimptotik, -D-, Ds ALT optimal değerleri geliştirmişlerdir. Simülasyon çalışması yaparak sayısal sonuçlar vermişlerdir.

Pareek, Kundu ve Kumar (2009) çok genel olan ilerleyen tür sansür şemasıyla ilgilenmişlerdir. Birbirinden bağımsız bileşenlerin bozulma yaşam zamanı dağılımları; aynı şekil parametreleri fakat farklı ölçek parametreleri ile Weibull dağılımını ele almışlardır. Bilinmeyen parametreler için en çok olabilirlik ve yaklaşık en çok olabilirlik tahmin edicileri elde etmişlerdir. Fisher bilgi matrisi kullanarak asimptotik güven aralıkları hesaplamışlardır. Monte-Carlo simülasyon yöntemi ile farklı metotları karşılaştırmışlardır. Farklı optimallik kriterleri ve belirlenmiş optimal ilerleyen tür sansürleme planları sunmuşlardır.

Miyawaka (1984) çalışmasında tamamlanmamış veri yapısını kompetitif risk analizi için uygulamıştır. Üstel dağılım için tamamlanmamış veri yapısını ve kompetitif risk analizini kullanarak parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicisini (MLE) ve UMVUE' sini bulmuştur.

Kundu ve Basu (1999) bozulma zamanlarının bilindği ancak bozulma nedenlerinin bilinmediği durumda yani tamamlanmamış veri yapısı için kompetitif risk analizini kullanmışlardır. Tamamlanmamış veri yapısını kullanarak Weibull dağılımı için en çok olabilirlik tahmin edici ve yaklaşık güven aralıklarını bularak gerçek veri setinde uygulama yapmışlardır.

Güvenilirlik (risk) analizinde sistemlerin veya parçaların dayanma sürelerini gözlemlemek doğal ortamlarda yapıldığı gibi yapay olarak oluşturulan ortamlarda da yapılmaktadır. Dayanma süresi büyük olan parçaların bozulma zamanını gözlemlemek uzun zaman alabilir. Böyle durumlarda doğal ortamlara benzer ve hızlandırılmış şartlar altında gözlemler alınmaktadır. Örnekleme sonucu seçilen parçaların tümü bozuluncaya kadar gözlem yapılıp her birinin dayanma süresinin gözlenmesi veya belli bir zamana kadar gözlemleme yapılıp bu ana kadar bozulanların dayanma sürelerinin gözlenmesi ya da ilk bozulanlardan belli bir sayıda olanların dayanma sürelerinin gözlenmesi gibi değişik gözlemleme stratejileri kullanılabilir. Birinci durumda, örnekleme seçilen n birimin her birinin bozulma zamanı gözlenmekte (tam gözlem), ikinci durum birinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modelidir. t gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce, sistemdeki bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. Üçüncü durum ise n birimden oluşan bir sistemin bozulan ilk k $(k \leq n)$

biriminin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. İkinci tip sansürleme olarak adlandırılmaktadır. Rasgele sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli ise birimlerin bozulma zamanlarının başka bir rasgele olaydan dolayı sansürlenmesi durumudur (Kale, 2003).

Bir yaşam zamanı testini sürekli olarak gözlemleme yapmak bazen mümkün olmayabilir. Test birimleri aralıklarla gözlenmiş olabilir, yani bir birimin bozulma zamanını tam olarak ölçmek yerine belli bir aralıkta bozulmaların sayısı gözlemlenebilir. Bu tür sansürlemeye grup sansürleme adı verilir. Literatürde Chang ve Chen (1988), Chen ve Mi (1996), Aggarwala (2001), Xiang ve Tse (2005), Yang ve Tse (2005), Lu ve ark. (2009) gibi birçok araştırmacı grup sansürleme üzerinde çalışmışlardır.

Tip I ve Tip II sansürleme şemaları güvenirlik analizinde yaygın olarak kullanılır. Tip I ve Tip II sansürleme şemalarının en önemli özelliği, yaşam testine tabi tutulan birimlerin başlangıç anından bitiş anına kadar testten çekilmesine (sansürlemesine) izin vermemesidir. Ancak; yaşam testini sürdüren gözlemci, yaşam testini bitirmeden belli bir noktada yaşayan birimleri sansürlemek(testten çekmeyi) isteyebilir. Gözlemcinin bu isteği yukarıda verilen iki tür sansür şeması ile mümkün değildir. İlerleyen tür sansürleme altında bazı dağılımların parametreleri için istatistiksel sonuç çıkarımı birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu yazarlar Gouno ve ark. (2004), Soliman (2005), Mann (1971), Cohen (1975), Cohen (1976), Cohen ve Norgaard (1975), Aggarwala ve Balakrishnan (1998), Ng ve ark, (2002), Balakrishnan ve ark. (2002) , Ali Mousa ve Jaheen (2002) olarak sıralanabilir.

Sarhan, Hamilton ve Smith (2010) çalışmalarında; üç dağılım modeli parametreleri için tip I sansür altında kompetitif risk analizini kullanarak istatistiksel sonuç çıkarımına yer vermişlerdir. Bozulmalar için ikiden fazla sebep olduğunu varsayarak, bilinmeyen parametreler için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve asimptotik güven aralıkları elde etmişlerdir.

Wu, Chang, Liao ve Huang (2008) çalışmalarında; ilerleyen tür tip I grup sansürü altında Weibull dağılımı için yaşam zamanı incelenmiştir. En çok olabilirlik yöntemi kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Yaşam testleri için maliyet minimize edilmeye çalışılmıştır. Farklı kriterler için algoritma geliştirilerek optimal değerler bulunmuştur.

Wu ve Huang (2014) çalışmalarında; ilerleyen tür tip I sansürleme modeli altında kompetitif risk analizini kullanmışlardır. Bazı güvenirlik ve kalite problemleri

için sansürleme altında kompetitif risk analizini ele alarak en çok olabilirlik yöntemini kullanarak üstel dağılıma sahip yaşam zamanları için parametre tahmini elde etmişlerdir. İki kriter dikkate alınarak optimal plan elde edilmiştir. Monte- Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Bu tez çalışmasında bazı dağılımlar için tip I sansür altında kompetitif risk analizi uygulaması yapılmıştır. Bu dağılımlar Pareto ve Burr XII dağılımlarıdır. Bu dağılımların parametreleri için tip I sansür altında kompetitif risk analizi kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunmuştur. Bu dağılımlar için bozulma nedeni olasılıkları hesaplanmıştır. Fisher bilgi matrisi bulunarak güven aralıkları oluşturulmuştur.

İlerleyen tür grup sansür altında kompetitif risk analizi uygulaması yapılmıştır. Bu uygulama için Weibull dağılımı kullanılmıştır. Weibull dağılımı parametreleri için grup sansürlü örneklem altında kompetitif risk analizi kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunarak güven aralıkları hesaplanmıştır.

Bu tez çalışmasının İkinci Bölümü beş alt başlık altında düzenlenmiştir. Birinci kısımda çalışmada kullanılan dağılımların olasılık yoğunluk, dağılım, yaşam ve hazard fonksiyonları verilmiştir. İkinci kısımda sıra istatistikleri hakkında temel tanımlardan bahsedilmiştir. Üçüncü kısımda Kompetitif risk analizinin tanımı verilmiştir. Dördüncü kısımda sansürleme şemaları olan Tip I ve İlerleyen Tür Tip I kısaca anlatılmıştır. Yine bu kısımda kompetitif risk analizi durumunda Tip I ve İlerleyen Tür Tip I sansürleme yöntemlerinin temel tanımları verilmiştir. Beşinci kısmında tahmin konusu, Fisher bilgi matrisinin elde edilişi ve Newton Raphson yöntemi tanıtılmıştır. Çalışmanın esasını oluşturan üçüncü bölümde ise bazı dağılımlar için sansürleme altında kompetitif risk analizi uygulaması ve simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Son bölümde çalışmadan elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yapılmış olan çalışma için gerekli olan ilgili tanımlar ve temel bilgiler verilmiştir.

2.1 Bazı Dağılımlar

Bu bölümde tezde ele alınan dağılımların olasılık yoğunluk, dağılım ve yaşam (güvenilirlik) fonksiyonları ile hazard oranı verilmiştir.

2.1.1 Pareto dağılımı

X , Pareto dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere, X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk, dağılım, yaşam ve hazard fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x)=\beta x^{-\beta-1}, \qquad x>1, \beta>0 \tag{2.1}$$

$$F(x)=1-x^{-\beta}, \qquad x>1, \beta>0 \tag{2.2}$$

$$S(x)=x^{-\beta}, \qquad x>1,\ \beta>0 \tag{2.3}$$

$$h(x)=\beta x^{-1}, \qquad x>1,\ \beta>0. \tag{2.4}$$

şeklindedir.

2.1.2 BurrXII dağılımı

X , BurrXII dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere, X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk, dağılım, yaşam ve hazard fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x)=\beta\lambda x^{\beta-1}\left(1+x^{\beta}\right)^{-(\lambda+1)}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.5}$$

$$F(x)=1-\left(1+x^{\beta}\right)^{-\lambda}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.6}$$

$$S(x)=(1+x^{\beta})^{-\lambda}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.7}$$

$$h(x)=\beta\lambda x^{\beta-1}(1+x^{\beta})^{-1}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.8}$$

şeklindedir.

2.1.3 Weibull dağılımı

X, Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere, X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk, dağılım, yaşam ve hazard fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x)=\beta\lambda x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\beta}}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.9}$$

$$F(x)=1-e^{-\lambda x^{\beta}}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.10}$$

$$S(x)=e^{-\lambda x^{\beta}}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.11}$$

$$h(x)=\lambda\beta x^{\beta-1}, \qquad x>0,\ \beta>0,\ \lambda>0 \tag{2.12}$$

şeklindedir.

2.2 Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, ..., X_n$, birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere $X_{r:n}$ $(1\le r\le n)$ ile bu örneklemin r-inci en küçük değeri gösterilsin. Bu durumda, bu örneklemin sıra istatistikleri $X_{1:n}\le X_{2:n}\le\cdots\le X_{n:n}$ şeklinde ifade edilir ve $X_{r:n}$' ye r-inci sıra istatistiği denir. r-inci sıra istatistiği olan $X_{r:n}$'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_r(x) = P\{X_{r:n} \le x\} = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} \quad , \quad 1 \le r \le n \tag{2.13}$$

biçiminde verilmektedir.

$1 \le r < s \le n$ için r-inci ve s-inci sıra istatistiklerinin ortak dağılım fonksiyonu ;

$$\begin{aligned} F_{r,s}(x,y) &= P\{X_{r:n} \le x, X_{s:n} \le x\} \\ &= \sum_{i=r}^{n} \sum_{j=\max(0,s-i)}^{n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!} F(x)^i (F(y)-F(x))^j (1-F(y))^{n-i-j} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$x < y \, , 1 \le r < s \le n$$

$F(x)$ dağılım fonksiyonu mutlak sürekli olup $f(x)$ gibi bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması durumunda r-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[F(x)\right]^{r-1} \left[1-F(x)\right]^{n-r} f(x) \tag{2.15}$$

$$-\infty < x < \infty \, , \quad 1 \le r \le n$$

$1 \le r < s \le n$ için r-inci ve s-inci sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{r,s}(x,y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \times \left[F(x)\right]^{r-1} \times \left[F(y)-F(x)\right]^{s-r-1} \\ &\times \left[1-F(y)\right]^{n-s} f(x) f(y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$-\infty < x < y < \infty \quad , \quad 1 \le r < s \le n$$

dir.

$1 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_k \le n \ (1 \le k \le n)$için, $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, ..., X_{r_k:n}$'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!}$$

$$\times\left[F(x_1)\right]^{r_1-1}\left[F(x_2)-F(x_1)\right]^{r_2-r_1-1}\ldots\left[1-F(x_k)\right]\times f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_k) \qquad (2.17)$$

$$-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_k<\infty$$

olarak elde edilir. Burada $x_0=-\infty$, $x_{k+1}=+\infty$, $r_0=0$ ve $r_{k+1}=n+1$ olarak alınması durumunda

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=n!\prod_{i=0}^{k}\left[\frac{\left[F(x_{i+1})-F(x_i)\right]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1}-r_i-1)!}\right]\left[\prod_{i=1}^{k}f(x_i)\right] \qquad (2.18)$$

olmaktadır. Ayrıca $X_{1:n},X_{2:n},\ldots,X_{n:n}$ rasgele değişkenlerinin (n tane sıra istatistiğinin) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.o.y.f)

$$f_{1,2,\ldots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=n!\,f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n) \quad -\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty \qquad (2.19)$$

olarak verilir (David, 2003).

2.3. Kompetitif Risk Analizi

Bir hastalıkta ölümün ortaya çıkması için birden fazla ölüm nedeni varsa bu nedenlerden hangisi ya da hangilerinin diğerlerine göre öne çıktığına ilişkin olasılıkların hesaplanmasında kompetitif riskler yaklaşımından yararlanılır. Ölümlere birden fazla faktör etki eder ve bu faktörlerden bir tanesi öne çıkarak ölüme neden olur ise buna kompetitif riskler (competing risks) adı verilir.

Kompetitif riskler bir birimin yada bir sistemin iki ya da ikiden fazla bozulma nedenine maruz kalması durumunda ortaya çıkan bir terimdir. Kompetitif risk teorisi var olan karmaşık riskler içinde, belirli bir riskin değerlendirilmesi işlemini ele alır.

2.4. Sansürleme Şemaları

Belli bir hastalığa sahip olan hastaların bir kitlesini göz önüne alalım. Hastalığın tedavisi için yeni geliştirilen bir tedavinin, hastalığın tedavi edilme süresine etkili olup olmadığı araştırılmak istensin. Bu durumda, çalışma hastalığın tedavi süresi rasgele değişkeni üzerine kurulur ve T bu süreyi gözler. Çalışma kapsamındaki her bir hastanın sadece bir kez bu hastalıktan dolayı hastalandığını varsayalım. Tıbbi bir çalışmada, hasta çalışmaya konu olan hastalıktan farklı bir hastalıktan ölebileceği gibi ani bir kalp krizi ile ölebilir ya da tedaviye devam etmek istemeyebilir. Bu gibi durumlarda, hastanın yaşam süresi tam olarak gözlenemez ve alınan gözlem değeri bu hastanın izlenebildiği süre ile sınırlanacaktır. Böyle durumlarda gözlemin yaşam süresi sansürlüdür denir (D. Biçer, 2011).

$F(t)$ ve $f(t)$ sırasıyla T yaşam süresi rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, T rasgele değişkeninin yaşam fonksiyonu ve hazard (risk) fonksiyonu sırasıyla

$$S(t)=P(T>t)=1-F(t),\ \ t\geq 0$$

ve

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)},\quad S(t)\geq 0,$$

olarak tanımlanır (Lawless, 1982).

Çalışmalarda değişik sansürleme tipleri kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında tip I sansürleme ve ilerleyen tür grup sansürleme kullanılacaktır.

2.4.1. Tip I sansürleme

Bir yaşam testinde, birimlerin her birinin önceden belirlenen bir L_i zamanına kadar gözlenmesi şeklinde kurulan bir test planı Tip I sansürleme olarak adlandırılır. n tane birimin yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. $L_1,L_2,...,L_n$ önceden belirlenmiş zaman noktaları ve $T_1,T_2,...,T_n$ birimlerin yaşam süreleri olmak üzere $T_i\leq L_i$ olduğu

durumlarda birimlerin yaşam zamanı olarak T_i, aksi halde L_i gözlenir ve bu sansürlü gözlem olarak adlandırılır.

Bu durumda birimlerin yaşam zamanı $t_i = min(T_i, L_i)$ olarak ifade edilebilir. Ayrıca i. gözlemin sansürlü bir gözlem olup olmadığı;

$$Z_i = \begin{cases} 1, & T_i \le L_i \ \ (sansürsüz) \\ 0, & T_i > L_i \ \ (sansürlü) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir indikator fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir. Bu durumda t_i ve Z_i' nin o.o.y.f

$$f(t_i, Z_i) = f(t_i)^{Z_i} S(t_i)^{1-Z_i} \tag{2.20}$$

dir.

Bağımsız (t_i, Z_i) değerleri için olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)^{Z_i} S(L_i)^{1-Z_i} \tag{2.21}$$

dir (Lawless, 1982).

2.4.1.1 Kompetitif risk durumunda tip I sansürleme

N tane özdeş ve bağımsız parçanın bir yaşam testine tabi tutulduğunu varsayalım. Bu parçaların herbirinin bozulması $k \ge 2$ olmak üzere k nedenden dolayı olabilir. Yaşam testi parça bozulana kadar veya sansürleme zamanına ulaştığında sonlandırılır. Parçanın bir nedenden dolayı bozulduğunu varsayalım. O halde parça bozulduğunda biri parçanın yaşam zamanı T, diğeri ise bozulma nedeni δ, $\delta \in \{1,2,...,k\}$ olmak üzere iki değişken gözlenir. Sansürleme durumunda ise sadece bir değişken olan sansürleme zamanı vardır. Bu durumda $\delta = 0$ olur.

Burada $f_j(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu, $h_j(x)$ hazard fonksiyonu ve yaşam fonksiyonu $S_j(x)$ kullanılarak, sistemin yaşam fonksiyonu,

$$S(x)=\prod_{j=1}^{k}S_j(x)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k}f_j(x)\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{k}S_\ell(x)=\sum_{j=1}^{k}h_j(x)\prod_{\ell=1}^{k}S_\ell(x)$$

ve hazard fonksiyonu ise

$$h(x)=\sum_{j=1}^{k}h_j(x)$$

şeklinde verilir.

X_{ij} $i.$sistemin $j.$bileşenden dolayı bozulma zamanı olmak üzere, X_{ij} rasgele değişkenleri $i=1,2,...,N,$ parçalar üzerinde bağımsız ve aynı dağılımlı iken, $j=1,2,...,k$ nedenler üzerinde bağımsız fakat aynı dağılımlı olmadığı varsayılsın. İlk n gözlemin bozulma nedenlerinin bilindiği, kalan $(N-n)$ gözlemin ise tip-I sansürlendiği varsayılsın. İlk n gözlemin bozulma zamanları ve bozulma nedenleri gözlenirken kalan $(N-n)$ gözlemin sadece sansürleme zamanları gözlenmektedir. Yani ilk n sistemin yaşam zamanlarının gözlemlendiği, geri kalanların yaşam zamanlarının sansürlendiği düşünülsün. Bu varsayıma dayalı olarak, gözlenen veriler, $(X_1,\delta_1),\ (X_2,\delta_2),\ \ldots,(X_n,\delta_n),(X_{n+1},0),...,(X_N,0)$ şeklinde olacaktır. O halde olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\left[f_j(x_i)\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{k}S_\ell(x_i)\right]^{I(\delta_i=j)}\prod_{i=n+1}^{N}\prod_{\ell=1}^{k}S_\ell(x_i) \qquad (2.22)$$

Burada $\boldsymbol{\theta}$ modelin içerdiği parametrelerin vektörüdür. Ayrıca,

$$I\left(\delta_i=j\right)=\begin{cases}1, & \delta_i=j\\ 0, & \delta_i\neq j\end{cases}$$

dır. Yaşam, bozulma oranı ve olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki kullanılarak Eşitlik (2.22) yeniden yazılırsa olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\left[h_j(x_i)\right]^{I(\delta_i=j)}\right]\left[\prod_{i=1}^{N}\prod_{\ell=1}^{k}S_\ell(x_i)\right] \tag{2.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Ω_j $j.$ bileşenden kaynaklı bozulan sistemlerin indis kümesi olmak üzere $L(\boldsymbol{\theta})$

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{k}\left[\prod_{i\in\boldsymbol{\Omega}_j}h_j(x_i)\prod_{i=1}^{N}S_j(x_i)\right] \tag{2.24}$$

olarak da ifade edilebilir.

Burada eşitlik (2.24)' in logaritması alındığında log olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{k}\ell_j = \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i\in\Omega_j}\ln h_j(x_i) + \sum_{i=1}^{N}\ln S_j(x_i)\right] \tag{2.25}$$

olarak elde edilir (Sarhan, Hamilton ve Smith, 2010).

Tüm modelin log-olabilirlik fonksiyonu ℓ_j, $j=1,...,k$ bağımsız fonksiyonların toplamıdır. Burada ℓ_j sadece dağılımın $j.$ bileşenden kaynaklı nedenlerin parametrelerine bağlıdır, diğer nedenlerin parametrelerine bağlı değildir.

2.4.2. İlerleyen Tür Grup Sansürleme

İlerleyen tür grup sansürlü örneklem şu şekilde tanımlanır: n sayıda özdeş bileşenin (aynı yaşam zamanı dağılımına sahip) $\tau_0 = 0$ anında yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. τ_1 zamanına kadar bozulanların sayısı n_1 olmak üzere aynı anda geriye kalan $n-n_1$ bileşenden r_1 tane bileşen testten çekilsin. Geriye kalan $n-n_1-r_1$ bileşenden $[\tau_1,\tau_2]$ aralığında bozulanların sayısı n_2 olmak üzere aynı anda r_2 tane bileşen testten çekilsin ve böylece, τ_k zamanına kadar bozulanların sayısı n_k olmak üzere geriye kalan $r_k = n-\sum_{i=1}^{k}n_i-\sum_{j=1}^{k-1}r_j$ tane bileşen testten çekilsin. Bu şekilde elde

edilen k hacimli $n_1, n_2, \ldots, n_k$ örneklemine ilerleyen tür grup sansürlü örneklem denir. Burada $r_1, r_2, \ldots, r_k$' ların değeri, testte kalan parçaların önceden belirlenmiş yüzdeleri $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ($p_k = 1$) ile hesaplanır. Yani $r_i = (m_i - n_i)\, p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$' dir. Burada $m_i = n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j - \sum_{j=1}^{i-1} r_j$, i. durumda yaşam testinde kalan birimlerin sayısıdır.

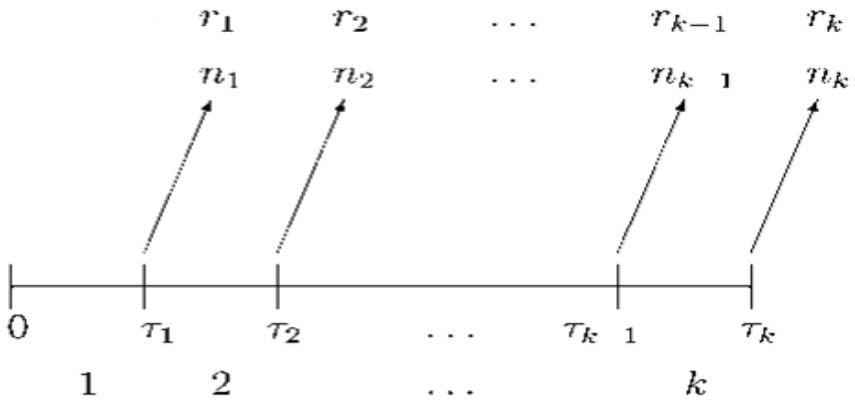
Böylece ilerleyen tür grup sansürleme şeması altında $\{n_i \mid n_{i-1}, ..., n_1, r_{i-1}, ..., r_1\}$ binom(m_i, q_i) dağılımına sahiptir, burada q_i test biriminin τ_{i-1} ile τ_i arasında bozulması olasılığıdır ve aşağıdaki gibi bulunur. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ test birimlerinin yaşam zamanı olsun. Bu durumda

$$q_i = P(\tau_{i-1} < X_i < \tau_i / X_i > \tau_{i-1}) = \frac{P(\tau_{i-1} < X_i < \tau_i, X_i > \tau_{i-1})}{P(X_i > \tau_{i-1})}$$

$$= \frac{P(\tau_{i-1} < X_i < \tau_i)}{P(X_i > \tau_{i-1})}$$

$$= \frac{F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})}{1 - F(\tau_{i-1})} \quad .$$

$F(.)$ dağılım fonksiyondur. Aşağıda verilen Şekil 2.1'de ilerleyen tür tip I grup sansürleme planı verilmiştir. Burada n_i yaşam tesinde bozulan birim sayısı, r_i önceden belirlenen p_i sansürleme oranı ile yaşam testinden çıkarılan sansürlenmiş test birimlerini ifade etmektedir. (τ_{i-1}, τ_i), zaman aralıklarını, k ise zaman aralıklarının sayısını göstermektedir.



Şekil 2.1. İlerleyen Tür Tip I Grup Sansürleme Planı

2.4.2.1 Kompetitif risk durumunda ilerleyen tür tip I sansürleme

İlerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk analizini şu şekilde tanımlayabiliriz. n sayıdaki birimin $\tau_0 = 0$ anında bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Birimler sadece önceden belirlenmiş $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, zamanlarda denetlensin. Burada $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k$' dir. n_{ij} i. durumda j. riskten dolayı $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulanların sayısıdır. r_i, τ_i anında testten çekilen bozulmamış birimlerin sayısıdır ($i = 1, \ldots, k$ ve $j = 1, \ldots, s$). Bu durumda elde edilen veriler, ilerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk analizi $\{n_{ij}, r_i; i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, s\}$'dir.

Verilen $r_1, \ldots, r_{i-1}$'den

$$n_{i1}, \ldots, n_{is} \,|\, n_{i-1,1}, \ldots, n_{i-1,s}, \ldots, n_{11}, \ldots, n_{1s}, r_{i-1}, \ldots, r_1 \sim multinomial\left(m_i, q_{i1}, \ldots, q_{is}, \ldots, 1-q_i\right),$$

olmak üzere, burada;

$$q_{ij} = \frac{F(\tau_i, j) - F(\tau_{i-1}, j)}{1 - F(\tau_{i-1})} \tag{2.26}$$

$(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulmanın j. riskten kaynaklanması olasılığı,

$$q_i = \frac{F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})}{1 - F(\tau_{i-1})} \tag{2.27}$$

$(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulma olasılığıdır, $i = 1, \ldots, k$ ve $j = 1, \ldots, s$.

Her aralıkta testten çıkartılacak birim sayısı r_i yi belirlemek için çeşitli yollar vardır. Her bir birimin testten çıkarılması birbirinden bağımsız ve p_i olasılığına sahip olsun.

$r_i \,|\, n_{i1}, \ldots, n_{is}, \ldots, n_{11}, \ldots, n_{1s}, r_{i-1}, \ldots, r_1$ $\text{binom}\left(m_i - n_{i+}, p_i\right)$ dağılımına sahiptir. Burada $n_{i+} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ değeri i. aralıkta bozulan toplam birim sayısı ve $m_i = n - \sum_{\ell=1}^{i-1} n_{\ell+} - \sum_{\ell=1}^{i-1} r_\ell$ i. aralıkta testten çıkarılmayan birimlerin sayısıdır.

İlerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk dataya dayalı en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$L(\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\beta) \propto \prod_{i=1}^{k} f(n_{i1},\ldots,n_{is}\,|\,n_{i-1,1},\ldots,n_{i-1,s},\ldots,n_{11},\ldots,n_{1s},r_{i-1},\ldots,r_1) \times f(r_i\,|\,n_{i1},\ldots,n_{is},\ldots,n_{11},\ldots,n_{1s},r_{i-1},\ldots,r_1) \tag{2.28}$$

$$\propto \prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{s} q_{ij}^{n_{ij}}\right)(1-q_i)^{m_i-n_{i+}}$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda^*}\frac{q_i}{1-q_i}\right)^{n_{ij}}\right)(1-q_i)^{m_i}$$

dir (Wu and Huang, 2014). Burada q_i eşitlik (2.27) ' deki gibidir.

2.5. Tahmin

Dağılımı bilinen fakat parametreleri bilinmeyen bir kitlenin parametrelerinin tahmin edilmesi istatistik biliminin en önemli problemlerindendir. Kitle parametreleri, kitleden alınan bir örneklem yardımıyla oluşturulan istatistiklerle tahmin edilir. Bu şekilde elde edilen tahminlere nokta tahmini denir. Ancak çoğu zaman nokta tahmini tek başına yeterli olmayabilir. Kitle parametresini belli bir olasılıkla içinde barındıran aralık şeklindeki bir tahmine de ihtiyaç duyulur. Burada aralığın alt ve üst sınırları yine örneklemin birer fonksiyonudur(istatistiğidir) (Kuş, 2004).

2.5.1. Nokta tahmini

Parametresi tahmin edilmek istenilen kitle $f\left(x|\gamma\right), \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ dağılımına sahip olsun. Burada γ kitle parametresini, Γ ise parametre uzayını temsil etmektedir. Örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu, $L\left(\boldsymbol{x}|\gamma\right) = f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n|\gamma\right)$ biçimindedir. Burada $\boldsymbol{x} = \left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ şeklindedir. $L\left(\boldsymbol{x}|\gamma\right)$, γ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde *olabilirlik fonksiyonu(likelihood function)* adını alır.

Örneklemin bilinmeyen parametre içermeyen Borel ölçülebilir bir fonksiyonuna *istatistik* denir. İstatistikler aynı zamanda birer rasgele değişkendir. Bir istatistik bir

parametreyi veya parametrenin bir fonksiyonunu tahmin etmek amacıyla kullanıldığında *tahmin edici(estimator)* adını alır. Tahmin edicinin aldığı değere de *tahmin(estimation)* denir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $f(x|\gamma)$, $\gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ dağılımından alınmış n birimlik örneklem olmak üzere $L(\hat{\gamma}|\mathrm{x}) = \sup_{\gamma \in \Gamma}(L(\gamma|\mathrm{x}))$ olacak şekilde elde edilen $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(X_1, X_2 ..., X_n)$ istatistiğine γ'nın *en çok olabilirlik tahmin edicisi (maximum likelihood estimator)* denir.

Teorem (Roussas 1973) $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $f(x|\gamma)$ $, \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ *dağılımından alınmış tam veya sansürlü örneklem olmak üzere* $\varphi: \Gamma \to \Gamma' \subseteq \mathbb{R}^m$ *bire-bir fonksiyon olsun. O zaman* $\hat{\gamma}$, γ *'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise,* $\phi(\hat{\gamma})$ da $\phi(\gamma)$ *'nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir.*

2.5.2. Aralık tahmini

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $f(x|\gamma)$ $, \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r$ dağılımından alınmış tam veya sansürlü örneklem olsun. Rasgele aralık, en az bir sınır noktası rasgele değişken olan sonlu veya sonsuz aralıktır.

$L: \Re^n \to \Re$ ve $U: \Re^n \to \Re$, $\forall \mathbf{x} \in \Re^n$ için $L(\mathbf{x}) \le U(\mathbf{x})$ koşulunu sağlayan Borel ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere, L ve U fonksiyonları yardımıyla oluşturulan $[L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ aralığı aşağıdaki Eşitlik (2.29) sağlarsa, γ parametresi için $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ anlam seviyeli güven aralığı adını alır.

$$P_\theta\left[L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \gamma \le U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] \ge 1-\alpha, \quad \forall \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r \qquad (2.29)$$

Eğer aşağıdaki Eşitlik (2.30) sağlanırsa $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$'e, $1-\alpha$ güven seviyeli alt güven limiti denir.

$$P_\theta\left[L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \gamma \le \infty\right] \ge 1-\alpha, \quad \forall \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r \qquad (2.30)$$

Eğer aşağıdaki Eşitlik (2.31) sağlanırsa $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$'e, $1-\alpha$ güven seviyeli üst güven limiti denir.

$$P_\theta\left[-\infty \le \gamma \le U\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right] \ge 1-\alpha, \quad \forall \gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r \tag{2.31}$$

Güven aralığının, γ parametresinin çok boyutlu olması durumunda genelleştirilmesi, güven bölgesi olarak adlandırılır (Roussas, 1973).

2.5.3. Fisher bilgi matrisi

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere bu fonksiyona parametrenin bir fonksiyonu gözü ile bakıldığında

$$L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}\right), \ \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu denir. Burada $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)'$ ve $\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\right)'$ şeklinde olup Γ parametre uzayıdır. Olabilirlik fonksiyonu $L(\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{x})$ in logaritması alınarak

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \log\left(\mathrm{L}(\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{x})\right), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{\mathrm{p}} \tag{2.33}$$

şeklinde elde edilen fonksiyona log-olabilirlik fonksiyonu denir.

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklem için Fisher bilgi matrisi

$$I(\boldsymbol{\gamma}) = -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \log\left(L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{X})\right)\right)\right\}$$
$$= -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \ell(\boldsymbol{\gamma})\right)\right\}$$

$$= -\begin{pmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1^{\,2}}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_p}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2^{\,2}}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_p}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_2}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p^{\,2}}\right) \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlanır, burada $L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{X})$ ve $\ell(\boldsymbol{\gamma})$ sırasıyla Eşitlik (2.32) ve (2.33) de verilen olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonlarıdır (Wu ve Kuş, 2009).

Olabilirlik veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\boldsymbol{\gamma}$ değeri

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg\max\left(L(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{x})\right) = \arg\max\left(\ell(\boldsymbol{\gamma})\right) \tag{2.35}$$

$\boldsymbol{\gamma}$' nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak adlandırılır. Eşitlik (2.35) de tanımlanan en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ bazı düzgünlük şartları altında

$$\sqrt{n}\left(\boldsymbol{\gamma} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, I^{-1}(\boldsymbol{\gamma})\right)$$

olmak üzere asimptotik normaldir. Burada $I^{-1}(\boldsymbol{\gamma})$, Eşitlik (2.34) tanımlı Fisher bilgi matrisidir. Fisher bilgi matrisinin tersi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$' nın asimptotik varyans-kovaryans matrisidir. Bu matrisin bilinmesi, büyük örneklemler için $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, ..., \hat{\gamma}_n$ tahmin edicilerinin ayrı ayrı asimptotik varyanslarının bilinmesi anlamına gelmektedir.

Bu Fisher bilgi matrisinin tutarlı bir tahmin edicisi

$$\hat{I}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_p} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p^{\,2}} \end{pmatrix}^{-1}_{\gamma=\hat{\gamma}} \tag{2.36}$$

dır (Adamidis ve Loukas, 1998). Buradan γ_i, $i=1,...,p$ için $\hat{\gamma}_i$' ya bağlı asimptotik güven aralığı

$$P\left(\hat{\gamma}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}} < \gamma_i < \hat{\gamma}_i + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}}\right) \cong 1-\alpha$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada V_{ii}, (2.36) eşitliğinde verilen matrisin i. diogonal elemanıdır ve $\alpha \in (0,1)$ için z_α, standart normal dağılımın α. kuantilidir (Wu ve Kuş, 2009).

2.5.4. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün bulunmasındaki iteratif yöntemlerden biridir. $f(x)$ sürekli ve türevlenebilen fonksiyonunun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. $f(x_n+h)$ fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa

$$f(x_n+h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} hf''(\xi_n) \quad \xi \in (x_n, x_n+h)$$

yazılabilir. $x_n + h = x_{n+1}$ değerinin gerçek köke çok yakın olduğu yani $f(x_n+h)$' ın hemen hemen sıfır olduğu düşünülürse,

$$0 = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_n) \qquad \xi \in (x_n, x_n+h)$$

yazılır. Şayet h yeterince küçük ise h^2'yi içeren terim ve sonraki terimler ihmal edilebilir. Böylece

$$f(x_n)+hf'(x_n)=0$$

veya

$$h=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

olarak elde edilir. Eğer $h=x_{n+1}-x_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterasyon denklemine ulaşılır (Oturanç ve ark., 2003).

Newton – Raphson yöntemi geometrik olarak incelenecek olursa $f(x)=0$ fonksiyonunun başlangıç yaklaşık kökü x_0 olmak üzere fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

olarak yazılabilir. Bu teğetin x eksenini kestiği nokta ilk kök yaklaşımı olur ve

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilir. Bu şekilde ardışık yaklaşımlar kullanılarak, gerçek köke ulaşılır.

3. BAZI DAĞILIMLAR İÇİN SANSÜRLEME ALTINDA KOMPETİTİF RİSK ANALİZİ

Yaşam testleri üretim güvenirliliği açısından oldukça önemlidir. Sansürleme tipleri yaşam testlerinde çok yaygındır. Genellikle yaşam testlerinde yaşam zamanları bilinmediği durumlarda sansürleme kullanılır. Güvenilirlik analizinde kullanılan yaygın sansürleme şemaları Tip I ve Tip II' dir. Tip I ve Tip II sansürleme şemalarının en önemli özelliği, yaşam testine tabi tutulan birimlerin başlangıç anından bitiş anına kadar testten çekilmesine (sansürlemesine) izin vermemesidir. Ancak; yaşam testini sürdüren gözlemci, yaşam testini bitirmeden belli bir noktada yaşayan birimleri sansürlemek(testten çekmeyi) isteyebilir. Gözlemcinin bu isteği yukarıda verilen iki tür sansür şeması ile mümkün değildir. Bu yüzden ilerleyen tür sansürleme kullanılması giderek yaygınlaşmıştır. Uygulamada test süresince gözlem yapmak genellikle imkansızdır. Test aralıklı olarak denetlenebilir, parçanın bozulmasını kesin zaman şeklinde değil ancak belirli aralıklarla bozulmaların sayısı gözlemlenebilir. Bu yaşam testi ilerleyen tür grup sansür olarak adlandırılır.

Güvenirlik analizinde parçanın ya da sistemin bozulma nedeninin gözardı edilmesi yanlış sonuç çıkarımlarına neden olmaktadır. Bu yüzden kompetitif risk modellerinde parçanın ya da sistemin bozulma zamanlarını ve gösterge değişkeni ile de sistemin bozulma nedeni gösterilmektedir. Sistemin bozulma nedeni bağımsız ya da bağımlı olabilir. Genellikle kompetitif risklerin bağımsız olduğu varsayılır.

Kompetitif risk analizi sansürlü örneklem türleri altında literatürde çok fazla kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında Pareto ve BurrXII dağılımları için Tip I sansürleme altında kompetitif risk dataya dayalı EÇO tahmin edicileri ve bunlara bağlı olarak güven aralıkları, bozulma nedeni olasılıkları elde edilecektir. Weibull dağılımı için de ilerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk dataya dayalı EÇO tahmin edicileri ve bunlara bağlı olarak güven aralıkları bulunacaktır.

3.1. Pareto Dağılımı İçin Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi

Tip I sansürleme altında kompetitif risk analizi için bölüm 2.4.1.1 'de verilen en çok olabilirlik tahmin edicileri ile bu bölümde verilecek bozulma nedeni olasılıkları ve buna bağlı olarak güven aralıkları Pareto dağılımı için uygulanacaktır.

3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

X_{ij} rasgele değişkeni β_j dağılımlı pareto dağılımna sahip olsun, $i = 1,2,...,N$ ve $j = 1,2,...,k$. Pareto dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla Eşitlik (3.1) ve Eşitlik (3.2)' de verilmiştir.

$$f_j(x) = \beta_j x^{-\beta_j - 1}, \quad \beta_j > 0,\ x > 1 \tag{3.1}$$

$$F_j(x) = 1 - x^{-\beta_j} \quad , \quad \beta_j > 0,\ x > 1 \tag{3.2}$$

Pareto dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu sırasıyla,

$$S_j(x) = x^{-\beta_j} \text{ ve } h_j(x) = \beta_j x^{-1}, \qquad \beta_j > 0, \ x > 1 \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Eşitlik (3.3), alt bölüm 2.4.1.1' de verilen Eşitlik (2.25) log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\ell_P(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{k} \ell_{P_j}(\beta_j), \tag{3.4}$$

elde edilir. $\boldsymbol{\theta} = (\beta_1,...,\beta_k)$ ' dir.

Burada

$$\ell_{P_j}(\beta_j) = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i \in \Omega_j} \ln h_j(x) + \sum_{i=1}^{N} \ln S_j(x) \right] \tag{3.5}$$

şeklindedir. Böylece gerekli çözümler yapılarak elde edilen eşitlikler sırasıyla,

$$\ell_P(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i \in \Omega_j} (\ln \beta_j - \ln x_i) + \sum_{i=1}^{N} \ln x_i^{-\beta_j} \right] \tag{3.6}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left[r_j \ln \beta_j - \sum_{i \in \Omega_j} \ln x_i - \beta_j \sum_{i=1}^{N} \ln x_i \right] \tag{3.7}$$

yazılabilir. Olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ell_P(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{r_j}{\beta_j} - \sum_{i=1}^{N} \ln x_i \right] = 0, \qquad j = 1, 2, ..., k. \tag{3.8}$$

olmak üzere β_j ' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_j = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{N} \ln x_i}, \qquad j = 1, 2, ..., \text{k}. \tag{3.9}$$

olarak elde edilir.

3.1.2. Risk ve güven aralıkları

En çok olabilirlik hesaplandıktan sonra kompetitif risk analizinde bozulan parçanın bozulma nedeninin olasılık hesapları güvenilirlik teorisinde önemlidir. x zamanında parçanın $j.$ bileşenden kaynaklı bozulma olasılığı Bocchetti ve ark. (2009) tarafından aşağıdaki gibi önerilmiştir.

$$F_{C_j}(x) = \int_0^x h_j(x) \prod_{\ell=1}^{k} S_\ell(z) dz, \quad j = 1, 2, ..., k. \tag{3.10}$$

olmak üzere parçanın $j.$ bileşenden kaynaklı bozulma riski (olasılığı)

$$\pi_j = \lim_{x \to \infty} F_{C_j}(x) = \int_0^x h_j(x) \prod_{\ell=1}^{k} S_\ell(x) dx \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlardan yola çıkarak bozulma nedenleri Pareto dağılımına sahip olduğunda Eşitlik (3.3)' deki yaşam fonksiyonları ve bozulma oranı fonksiyonları Eşitlik (3.11)' de yerine yazılırsa,

$$\pi_j = \int_1^{\infty} \beta_j x^{-1} x^{-\sum_{\ell=1}^{k} \beta_\ell} dx, \qquad j = 1, 2, ..., k \tag{3.12}$$

$$\pi_j = \frac{\beta_j}{\sum_{\ell=1}^{k} \beta_\ell}, \qquad j = 1, 2, ..., k \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

En çok olabilirlik tahmin edicisinin değişmezlik (invariant) özelliği kullanılarak, π_j ' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\pi}_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\sum_{\ell=1}^{k} \hat{\beta}_\ell} = \frac{r_j}{n}, \quad j = 1, 2, ..., k. \tag{3.14}$$

olarak bulunur.

Pareto dağılımının parametresi için asimptotik güven aralıkları oluşturulmuştur. Fisher Bilgi matrisini oluşturmak için parametrenin ikinci türevleri alınır. Burada $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ vektördür.

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\frac{r_j}{\beta_j} - \sum_{i=1}^{N} \ln x_i \right)$$

$$= -\frac{r_j}{\beta_j^2}$$

Daha sonra elde edilen ikinci türev kullanılarak

$$I_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial_i \partial \beta_j} \right) = E\left(\frac{r_j}{\beta_j^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta_j^2} E\left(r_j \right)$$

elde edilir.

Burada $r_j \sim binom\left(n, \pi_j\right)$ olduğundan $E\left(r_j\right) = n\pi_j$' dir.

$$I_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{n\pi_j}{\beta_j^2}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.13) yerine yazılırsa

$$I_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{n}{\beta_j \sum_{\ell=1}^{k} \beta_\ell} \text{ olarak bulunur.}$$

O halde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ vektörünün Fisher Bilgi matrisi $\mathrm{I}(\boldsymbol{\beta}) = \left(I_{ij}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right),\ i, j = 1, 2, ..., k$' dir. Fisher bilgi matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right) = \begin{cases} \dfrac{n}{\beta_j \sum_{j=1}^{k} \beta_j} & if\ i = j, \\ 0 \qquad if\ i \neq j. \end{cases} \tag{3.15}$$

Bu nedenle β_j için asimptotik güven aralığı

$$\hat{\beta}_j \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\beta}_j \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j}{n}}, \qquad j = 1, 2, ..., k,$$

dir. Burada $Z_{\alpha/2}$ standart normal dağılımın $\alpha/2.$ kuantilidir.

3.1.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde Eşitlik (3.9)' da bulunan en çok olabilirlik tahmin edicisinin $k = 2$ durumunda yan ve HKO açısından performansı bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Sonuçlar farklı parametre ve N (örneklem büyüklüğü) değerleri için 10,000 tekrarla elde edilmiştir. Bu tekrarlarda bir defaya mahsus (0,1) aralığında düzgün dağılımından üretilen değerler, birimlerim sansürleme zamanı olarak kullanılmıştır.

Çizelge (3.1)-(3.3)'de, örneklem büyüklüğü (N), gözlemlenen minimum, maksimum ve ortalama gözlem sayısının yanı sıra β_1 ve β_2 parametrelerinin farklı durumlarında en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri verilmiştir. Ayrıca EÇO tahmin edicileri için Eşitlik (3.15)' de verilen Fisher bilgi matrisinden elde edilen asimptotik varyanslar ile simülasyon sonucu elde edilen varyanslar ile birlikte asimptotik güven aralıklarının parametreleri kapsama olasılıkları verilmiştir.

Çizelgedeki değerlerin ondalık kısımları 4 basamaklı olarak yuvarlanmıştır.

Çizelge 3.1. $\beta_1 = 2,\ \beta_2 = 1$ için simülasyon sonuçları

								Simülasyon		Fisher		Kapsama Olasılıkları	
N	Min	Maks.	Ort	Yan$(\hat{\beta}_1)$	HKO$(\hat{\beta}_1)$	Yan$(\hat{\beta}_2)$	HKO$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	β_1	β_2
10	2	10	7	0.1751	1.1445	0.0859	0.5522	1.1140	0.5449	1.0368	0.5190	0.9228	0.8875
20	6	19	13	0.0896	0.5540	0.0489	0.2692	0.5461	0.2669	0.5252	0.2636	0.9325	0.9110
30	10	27	18	0.0592	0.3623	0.0274	0.1802	0.3589	0.1794	0.3576	0.1785	0.9395	0.9213
40	14	34	24	0.0357	0.2633	0.0248	0.1310	0.2621	0.1304	0.2582	0.1299	0.9421	0.9289
50	19	42	30	0.0240	0.2025	0.0218	0.1029	0.2020	0.1025	0.2026	0.1023	0.9420	0.9332
100	42	74	59	0.0160	0.1033	0.0130	0.0523	0.1031	0.0522	0.1044	0.0525	0.9497	0.9428
250	133	181	157	0.0039	0.0391	0.0046	0.0194	0.0391	0.0194	0.0383	0.0192	0.9470	0.9464

Çizelge 3.2. $\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 1$ için simülasyon sonuçları

								Simülasyon		Fisher		Kapsama Olasılıkları	
N	Min	Maks.	Ort	Yan$(\hat{\beta}_1)$	HKO$(\hat{\beta}_1)$	Yan$(\hat{\beta}_2)$	HKO$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	β_1	β_2
10	3	10	8	0.2646	2.1595	0.0892	0.6480	2.0897	0.6401	1.8892	0.6271	0.9333	0.8811
20	7	19	14	0.1360	1.0136	0.0462	0.3201	0.9952	0.3180	0.9584	0.3192	0.9401	0.8967
30	9	27	19	0.1008	0.7120	0.0297	0.2290	0.7019	0.2281	0.6751	0.2240	0.9415	0.9075
40	17	36	27	0.0600	0.4798	0.0218	0.1568	0.4763	0.1563	0.4637	0.1548	0.9436	0.9244
50	24	45	35	0.0551	0.3719	0.0154	0.1201	0.3689	0.1199	0.3618	0.1202	0.9445	0.9292
100	57	85	72	0.0203	0.1719	0.0086	0.0560	0.1715	0.0559	0.1707	0.0570	0.9491	0.9454
250	157	203	181	0.0099	0.0685	0.0047	0.0226	0.0684	0.0226	0.0670	0.0224	0.9451	0.9466

Çizelge 3.3. $\beta_1 = 1.5,\ \beta_2 = 2$ için simülasyon sonuçları

								Simülasyon		Fisher		Kapsama Olasılıkları	
N	Min	Maks.	Ort	Yan $(\hat{\beta}_1)$	HKO$(\hat{\beta}_1)$	Yan $(\hat{\beta}_2)$	HKO $(\hat{\beta}_2)$	Var $(\hat{\beta}_1)$	Var $(\hat{\beta}_2)$	Var $(\hat{\beta}_1)$	Var $(\hat{\beta}_2)$	β_1	β_2
10	3	10	7	0.1521	1.0072	0.1781	1.2907	0.9841	1.2591	0.9386	1.2332	0.9012	0.9187
20	6	18	12	0.0606	0.4607	0.0835	0.6411	0.4571	0.6342	0.4576	0.6118	0.9206	0.9318
30	11	27	20	0.0468	0.2865	0.0547	0.3824	0.2844	0.3794	0.2794	0.3710	0.9312	0.9383
40	16	36	26	0.0315	0.2165	0.0414	0.2868	0.2155	0.2851	0.2134	0.2843	0.9329	0.9374
50	21	45	34	0.0205	0.1643	0.0312	0.2181	0.1639	0.2172	0.1619	0.2163	0.9375	0.9424
100	47	79	64	0.0114	0.0837	0.0110	0.1095	0.0835	0.1094	0.0834	0.1109	0.9417	0.9467
250	136	186	161	0.0059	0.0330	0.0067	0.0444	0.0329	0.0443	0.0328	0.0437	0.9482	0.9482

Çizelge (3.1)'de elde edilen sonuçlara göre; örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söyleyebiliriz. Bununla birlikte simülasyon ve Fisher bilgi matrisinden elde edilen varyanslar da azalmaktadır. Ayrıca bu varyanslar arasındaki fark giderek azalmaktadır. Örneklem büyüklüğü 100 ve üzeri olduğunda kapsama olasılıkları % 95' yaklaşmaktadır.

Farklı parametreler için verilen Çizelge (3.2) ve (3.3)'de yine benzer sonuçlar elde edilmiştir.

3.2. Burr XII Dağılımı İçin Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi

3.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmin edicisi

X_{ij} rasgele değişkeni λ_j ve β_j parametrelerine sahip Burr XII dağılımına sahip olsun ($i = 1,2,...,N$ ve $j = 1,2,...,k$). Burr XII dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla Eşitlik (3.16) ve Eşitlik (3.17)' deki gibidir.

$$f_j(x) = \beta_j \lambda_j x^{\beta_j - 1}(1 + x^{\beta_j})^{-(\lambda_j + 1)}, \qquad \lambda_j, \beta_j > 0,\ x > 0 \tag{3.16}$$

$$F_j(x) = 1 - (1 + x^{\beta_j})^{-\lambda_j}, \qquad \lambda_j, \beta_j > 0,\ x > 0 \tag{3.17}$$

j nci bileşenden kaynaklı bozulma nedeninin sırasıyla yaşam fonksiyonu ve hazard oranı fonksiyonu sırasıyla;

$$S_j(x) = (1 + x^{\beta_j})^{-\lambda_j} \text{ ve } h_j(x) = \beta_j \lambda_j x^{\beta_j - 1}(1 + x^{\beta_j})^{-1} \quad \lambda_j, \beta_j > 0,\ x > 0 \tag{3.18}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.18), alt bölüm 2.4.1.1' de verilen Eşitlik (2.25) log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\ell_B(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{k} \ell_{B_j}(\lambda_j, \beta_j), \tag{3.19}$$

elde edilir.

Burada $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1,...,\lambda_k,\beta_1,...,\beta_k)$ ve

$$\ell_{B_j}(\lambda_j,\beta_j) = \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i\in\Omega_j}\ln\beta_j\lambda_j x_i^{\beta_j-1}(1+x_i^{\beta_j})^{-1} + \sum_{i=1}^{N}\ln(1+x_i^{\beta_j})^{\lambda_j}\right] \tag{3.20}$$

dir.

$$\ell_B(\boldsymbol{\theta}) = r_j(\ln\beta_j + \ln\lambda_j) + (\beta_j - 1)$$
$$- \sum_{i\in\Omega_j}\ln x_i - \sum_{i\in\Omega_j}\ln(1+x_i^{\beta_j}) - \lambda_j\sum_{i=1}^{N}\ln(1+x_i^{\beta_j}) \tag{3.21}$$

elde edilir.

$\lambda_1,...,\lambda_k,\beta_1,...,\beta_k$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmek için, Eşitlik (3.19)' u maksimize etmek gerekmektedir. Ancak bu eşitliği maksimize etmek $2k$ bilinmeyen parametre için $2k$ lineer olmayan denklem sisteminin çözümü olacaktır. Eşitlik (3.19) yerine doğrudan $2k$ parametre üzerinden eşitlik (3.21) de verilen $\ell_{B_j}(\lambda_j,\beta_j)$, maksimize etmek daha kolay olacaktır. ℓ_{B_j}' yi maksimize etmek λ_j' nin en çok olabilirlik tahmin edicisini β_j' nin bir fonksiyonu olarak verir. Olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial\ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_j} = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{r_j}{\lambda_j} - \sum_{i=1}^{N}\ln(1+x_i^{\beta_j})\right] = 0$$

olmak üzere λ_j' nin EÇO tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_j(\beta_j) = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{N}\ln(1+x_i^{\beta_j})} \tag{3.22}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.22)' i Eşitlik (3.21)' de yerine yazılırsa β_j' nin log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell_B(\hat{\lambda}_j, \beta_j) = r_j(-1+\ln r_j) + r_j \ln \beta_j - r_j \ln(\sum_{i=1}^{N} \ln(1+x_i^{\beta_j})) + (\beta_j - 1)\sum_{i\in\Omega_j} \ln x_i - \sum_{i\in\Omega_j} \ln(1+x_i^{\beta_j}) \quad (3.23)$$

olur. β_j' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi aşağıdaki lineer olmayan denklem çözümüyle elde edilir.

$$\beta_j = \vartheta_j(\beta_j) \quad (3.25)$$

Burada

$$\vartheta_j(\beta_j) = r_j \left[r_j \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\beta_j} \ln x_i}{\sum_{i=1}^{N} (1+x_i^{\beta_j})} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \ln(1+x_i^{\beta_j})} \right) + \sum_{i\in\Omega_j} \frac{x_i^{\beta_j} \ln x_i}{(1+x_i^{\beta_j})} - \sum_{i\in\Omega_j} \ln x_i \right]^{-1}$$

dir. β_j' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi Eşitlik (3.25)' in sabit bir noktasıdır ve aşağıdak basit iterasyon yöntemiyle elde edilir.

$$\beta_j^{(\ell+1)} = \vartheta_j(\beta_j^{(\ell)}), \quad (3.26)$$

Burada $\beta_j^{(\ell)}$, $\hat{\beta}_j$ tahmin edicisinin ℓ. iterasyonudur. Bu iterasyon yöntemi $\left|\beta_j^{(\ell+1)} - \beta_j^{(\ell)}\right|$ yeteri kadar küçük olduğunda durdurulmalıdır. β_j' nin en çok olabilirlik tahmin edicisini elde ettikten sonra eşitlik (3.22) kullanılarak λ_j' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi elde edilir.

3.2.2. Risk ve güven aralıkları

Bozulma nedeni Burr XII dağılımına sahip olduğunda Eşitlik (3.18)' deki yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonları Eşitlik (3.11)' de yerine yazılırsa,

$$\pi_j = \int_0^{\infty} \beta_j \lambda_j x^{\beta_j - 1}(1+x^{\beta_j})^{-(\sum_{\ell=1}^{k}\lambda_\ell + 1)} dx, \quad j = 1,2,...,k \tag{3.27}$$

π_j Eşitilik (3.27)' deki integralin çözümüyle elde edilir. Bozulma nedenlerinin dağılımı Burr XII dağılımında aynı şekil parametresine sahip ise, yani tüm j' ler için $\beta_j = \beta$ ise

$$\pi_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{\ell=1}^{k}\lambda_\ell}, \quad j = 1,2,...,k \tag{3.28}$$

basit bir kapalı form olarak elde edilir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin değişmezlik (invariant) özelliği kullanılarak,

$$\hat{\pi}_j = \frac{\hat{\lambda}_j}{\sum_{\ell=1}^{k}\hat{\lambda}_\ell} = \frac{r_j}{n} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir.

Burr XII dağılımının parametreleri için asimptotik güven aralıkları oluşturulmuştur. Fisher Bilgi matrisini oluşturmak için parametrenin ikinci türevleri alınır.

$$\ell_B(\boldsymbol{\theta}) = r_j(\ln\beta_j + \ln\lambda_j) + (\beta_j - 1)\sum_{i\in\Omega_j}\ln x_i - \sum_{i\in\Omega_j}\ln(1+x_i^{\beta_j}) - \lambda_j\sum_{i=1}^{N}\ln(1+x_i^{\beta_j})$$

log olabilirlik fonksiyonun da λ_j ve β_j parametrelerine göre sırasıyla ikinci türevleri alınır.

$$\frac{\partial^2\ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j} = \frac{r_j}{\lambda_j} - \sum_{i=1}^{N}(1+x_i^{\beta_j})$$

$$= -\frac{r_i}{\lambda_i^2}, \qquad i = j = 1,2,...,k$$

$$\frac{\partial^2\ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = \frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(\frac{r_j}{\beta_j} + \sum_{i\in\Omega_j}\ln x_{i'} - \sum_{i\in\Omega_j}\frac{x_i^{\beta_j}\ln^2 x_i}{1+x_i^{\beta_j}} - \lambda_j\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^{\beta_j}\ln^2 x_i}{1+x_i^{\beta_j}}\right)$$

$$= \left(-\frac{r_j}{\beta_j^2} - \sum_{i\in\Omega_j} \frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2} - \lambda_j \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2} \right), \qquad i = j = k+1, k+2, ..., 2k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_i \partial\beta_j} = \frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(\frac{r_j}{\lambda_j} - \sum_{i=1}^{N} (1+x_i^{\beta_j}) \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^{\beta_j} \ln x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)}, \qquad i = 1, 2, ..., k;\ j = k+i$$

dir. Elde edilen türevlerin herbirinin beklenen değerleri alınır. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{2k})$ burada $\theta_j = \lambda_j$, ve $\theta_{k+j} = \beta_j$, $j = 1, 2, ..., k$ dır. Sırasıyla beklenen değerler alınırsa,

$$I_{jj}(\boldsymbol{\theta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j}\right) = E\left(\frac{r_j}{\lambda_j^2}\right) = \frac{1}{\lambda_j^2} E\left(r_j\right)$$

$$= \frac{n\pi_j}{\lambda_j^2}, \qquad i = j = 1, 2, ..., k$$

$$I_{jj}(\boldsymbol{\theta}) = = -E\left(\frac{\partial^2 \ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right) = E\left(\frac{r_j}{\beta_j^2} + \sum_{i\in\Omega_j} \frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2} + \lambda_j \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{n\pi_i}{\beta_i^2} + E\left(\sum_{i\in\Omega_j} \frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2}\right) + \lambda_j \sum_{i=1}^{N} E\left(\frac{x_i^{\beta_j} \ln^2 x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)^2}\right), \qquad i = j = k+1, k+2, ..., 2k,$$

$$I_{jj}(\boldsymbol{\theta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell_B(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_i \partial\beta_j}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^{\beta_j} \ln x_i}{\left(1+x_i^{\beta_j}\right)} \right), \ i = 1, 2, ..., k;\ j = k+i$$

dir. Burada beklenen değerler

$$V_i^{(\ell)} = E\left[\frac{x^{\beta_j}\left(\ln x\right)^{\ell}}{\left(1+x^{\beta_j}\right)^{\ell}}\right] = \int_0^{\infty} \frac{x^{\beta_j}\left(\ln x\right)^{\ell}}{\left(1+x^{\beta_j}\right)^{\ell}} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \beta_j x^{\beta_j - 1}(1+x^{\beta_j})^{-1}\right)\left(\prod_{j=1}^{k}(1+x^{\beta_j})^{-\lambda_j}\right) dx$$

şeklinde hesaplanır

Bu durumda Fisher Bilgi matrisi

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \dfrac{n\pi_i}{\lambda_i^2}, & i = j = 1,2,...,k, \\ \dfrac{n\pi_{i-k}}{\beta_{i-k}^2} + n\pi_{i-k}V_{i-k}^{(2)} + N\lambda_{i-k}V_{i-k}^{(2)}, & i = j = k+1, k+2,..., 2k, \\ NV_i^{(1)}, & i = 1,2,..., \quad k;\ j = k+i, \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

θ_j parametresi için asimptotik güven aralığı,

$$\hat{\theta}_j \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{I_{jj}^{-1}}, \qquad j = 1,2,...,2k,$$

şeklindedir. Burada I_{jj}^{-1} bilgi matrisinin tersinin jj ' inci elemanıdır ve $Z_{\alpha/2}$ standart normal dağılımın $\alpha/2.$ kuantilidir.

Simülasyon çalışmasında Fisher bilgi matrisi numerik olarak elde edilemediği için bunun yerine tutarlı bir tahmin edicisi olan gözlem matrisinden elde edilen asimptotik güven aralıkları oluşturulmuştur.

3.2.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde Eşitlik (3.21)' de bulunan en çok olabilirlik tahmin edicisinin $k = 2$ durumunda yan ve HKO açısından performansı bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Sonuçlar farklı parametre ve N (örneklem büyüklüğü) değerleri için 10,000 tekrarla elde edilmiştir. Bu tekrarlarda bir defaya mahsus (0,1) aralığında düzgün dağılımından üretilen değerler, birimlerim sansürleme zamanı olarak kullanılmıştır.

Çizelge (3.4) ve (3.5)'de $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2$ parametreleri için örneklem büyüklüğü (N), gözlemlenen minimum, maksimum ve ortalama gözlem sayısının yanı sıra en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri verilmiştir. EÇO tahmin edicileri için gözlenen bilgi matrisinden elde edilen asimptotik varyanslar ile simülasyon sonucu elde edilen varyanslar ile birlikte asimptotik güven aralıklarının parametreleri kapsama olasılıkları verilmiştir.

Çizelge (3.6) ve (3.7)'de $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1$ parametreleri için elde edilen sonuçlar, Çizelge (3.4) ve (3.5)'deki gibi verilmiştir.

Çizelge (3.8) ve (3.9)'de $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.5, \beta_1 = 2, \beta_2 = 0.5$ parametreleri için elde edilen sonuçlar, Çizelge (3.4) ve (3.5)'deki gibi verilmiştir.

Çizelge 3.4. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \beta_1 = 1, \beta_1 = 2$ için simülasyon sonuçları

N	Min.	Maks.	Ort.	Yan $(\hat{\lambda}_1)$	HKO $(\hat{\lambda}_1)$	Yan $(\hat{\lambda}_2)$	HKO $(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta}_1)$	HKO $(\hat{\beta}_1)$	Yan$(\hat{\beta}_2)$	HKO $(\hat{\beta}_2)$
50	18	40	29	0,0592	0,0035	0,1878	0,0353	0,0489	0,0024	0,0959	0,0092
100	33	66	50	0,0362	0,0013	0,1243	0,0155	0,0262	0,0007	0,0524	0,0027
150	58	95	76	0,0240	0,0006	0,0779	0,0061	0,0182	0,0003	0,0340	0,0012
200	80	127	103	0,0166	0,0003	0,0557	0,0031	0,0144	0,0002	0,0259	0,0007
250	98	155	130	0,0154	0,0002	0,0354	0,0013	0,0096	0,0001	0,0200	0,0004
500	233	301	266	0,0047	0,0000	0,0228	0,0005	0,0035	0,0000	0,0110	0,0001
750	344	440	395	0,0046	0,0000	0,0118	0,0001	0,0024	0,0000	0,0052	0,0000
1000	467	575	522	0,0033	0,0000	0,0080	0,0001	0,0038	0,0000	0,0048	0,0000

Çizelge 3.5. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \beta_1 = 1, \beta_1 = 2$ için simülasyon sonuçları

	Simülasyon				**Gözlem Matrisi**				**Kapsama Olasılıkları**			
N	Var $(\hat{\lambda}_1)$	Var $(\hat{\lambda}_2)$	Var $(\hat{\beta}_1)$	Var $(\hat{\beta}_2)$	Var $(\hat{\lambda}_1)$	Var $(\hat{\lambda}_2)$	Var $(\hat{\beta}_1)$	Var $(\hat{\beta}_2)$	λ_1	λ_2	β_1	β_2
50	0.9007	0.2160	0.3092	0.0484	0.8047	0.0629	0.1983	0.0219	0.9470	0.8965	0.9123	0.8873
100	0.3892	0.0829	0.1501	0.0144	0.3124	0.0162	0.0861	0.0085	0.9452	0.9247	0.9189	0.9164
150	0.2722	0.0518	0.0896	0.0089	0.1572	0.0109	0.0535	0.0063	0.9328	0.9349	0.9285	0.9316
200	0.1868	0.0351	0.0615	0.0067	0.1478	0.0082	0.0412	0.0048	0.9393	0.9428	0.9358	0.9336
250	0.1423	0.0258	0.0453	0.0050	0.1087	0.0061	0.0316	0.0037	0.9393	0.9430	0.9425	0.9393
500	0.0563	0.0059	0.0175	0.0021	0.0491	0.0030	0.0153	0.0019	0.9507	0.9495	0.9489	0.9484
750	0.0343	0.0032	0.0112	0.0013	0.0311	0.0020	0.0099	0.0012	0.9468	0.9506	0.9500	0.9493
1000	0.0387	0.0073	0.0027	0.0028	0.0385	0.0073	0.0027	0.0028	0.9486	0.9488	0.952	0.9471

Çizelge 3.6. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_1 = 1$ için simülasyon sonuçları

N	Min.	Maks.	Ort.	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta}_1)$	HKO$(\hat{\beta}_1)$	Yan$(\hat{\beta}_2)$	HKO$(\hat{\beta}_2)$
50	21	41	31	0,3139	0,0985	0,0976	0,0095	0,0615	0,0038	0,0586	0,0034
100	53	82	68	0,1141	0,0130	0,0403	0,0016	0,0255	0,0007	0,0276	0,0008
150	79	117	98	0,0782	0,0061	0,0289	0,0008	0,0149	0,0002	0,0175	0,0003
200	81	118	100	0,0691	0,0048	0,0252	0,0006	0,0141	0,0002	0,0167	0,0003
250	144	190	165	0,0420	0,0018	0,0190	0,0004	0,0099	0,0001	0,0103	0,0001
500	285	352	319	0,0227	0,0005	0,0092	0,0001	0,0059	0,0000	0,0050	0,0000
750	439	522	480	0,0140	0,0002	0,0051	0,0000	0,0030	0,0000	0,0036	0,0000
1000	597	690	643	0,0098	0,0001	0,0037	0,0000	0,0025	0,0000	0,0026	0,0000

Çizelge 3.7. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_1 = 1$ için simülasyon sonuçları

	Simülasyon				**Gözlem Matrisi**				**Kapsama Olasılıkları**			
N	Var$(\hat{\lambda}_1)$	Var$(\hat{\lambda}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\lambda}_1)$	Var$(\hat{\lambda}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	λ_1	λ_2	β_1	β_2
50	1.2674	0.2165	0.0678	0.0747	1.1976	0.2159	0.0627	0.0685	0.9554	0.9378	0.9484	0.9460
100	0.4237	0.0779	0.0283	0.0303	0.4121	0.0780	0.0281	0.0293	0.9526	0.9421	0.9508	0.9495
150	0.2804	0.0508	0.0187	0.0194	0.2721	0.0522	0.0182	0.0191	0.9518	0.9485	0.9493	0.9494
200	0.2568	0.0482	0.0185	0.0194	0.2577	0.0497	0.0181	0.0188	0.9500	0.9517	0.9494	0.9470
250	0.1488	0.0294	0.0111	0.0113	0.1525	0.0293	0.0109	0.0111	0.9515	0.9490	0.9516	0.9473
500	0.0805	0.0151	0.0056	0.0055	0.0790	0.0149	0.0056	0.0056	0.9464	0.9474	0.9518	0.9489
750	0.0530	0.0099	0.0037	0.0038	0.0518	0.0098	0.0037	0.0037	0.9474	0.9469	0.9516	0.9467
1000	0.0382	0.0074	0.0027	0.0028	0.0384	0.0073	0.0027	0.0028	0.9513	0.9485	0.9516	0.9472

Çizelge 3.8. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.5, \beta_1 = 2, \beta_1 = 0.5$ için simülasyon sonuçları

N	Min.	Maks.	Ort.	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta}_1)$	HKO$(\hat{\beta}_1)$	Yan$(\hat{\beta}_2)$	HKO$(\hat{\beta}_2)$
50	12	34	23	0.3258	0.1062	-0.0606	0.0037	0.1952	0.0381	0.0368	0.0014
100	30	64	46	0.1749	0.0306	-0.0322	0.0010	0.1024	0.0105	0.0125	0.0002
150	49	89	69	0.1102	0.0121	-0.0211	0.0004	0.0590	0.0035	0.0084	0.0001
200	66	117	92	0.0775	0.0060	-0.0118	0.0001	0.0428	0.0018	0.0070	0.0000
250	92	143	116	0.0594	0.0035	-0.0104	0.0001	0.0305	0.0009	0.0067	0.0000
500	197	268	233	0.0205	0.0004	0.0007	0.0000	0.0099	0.0001	0.0036	0.0000
750	312	399	355	0.0137	0.0002	0.0010	0.0000	0.0066	0.0000	0.0013	0.0000
1000	594	685	643	0.0121	0.0001	0.0042	0.0000	0.0029	0.0000	0.0023	0.0000

Çizelge 3.9. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.5, \beta_1 = 2, \beta_1 = 0.5$ için simülasyon sonuçları

	Simülasyon				**Gözlem Matrisi**				**Kapsama Olasılıkları**			
N	Var$(\hat{\lambda}_1)$	Var$(\hat{\lambda}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	Var$(\hat{\lambda}_1)$	Var$(\hat{\lambda}_2)$	Var$(\hat{\beta}_1)$	Var$(\hat{\beta}_2)$	λ_1	λ_2	β_1	β_2
50	0.9007	0.2160	0.3092	0.0484	0.8047	0.0629	0.1983	0.0219	0.9470	0.8965	0.9123	0.8873
100	0.3892	0.0829	0.1501	0.0144	0.3124	0.0162	0.0861	0.0085	0.9452	0.9247	0.9189	0.9164
150	0.2722	0.0518	0.0896	0.0089	0.1572	0.0109	0.0535	0.0063	0.9328	0.9349	0.9285	0.9316
200	0.1868	0.0351	0.0615	0.0067	0.1478	0.0082	0.0412	0.0048	0.9393	0.9428	0.9358	0.9336
250	0.1423	0.0258	0.0453	0.0050	0.1087	0.0061	0.0316	0.0037	0.9393	0.9430	0.9425	0.9393
500	0.0563	0.0059	0.0175	0.0021	0.0491	0.0030	0.0153	0.0019	0.9507	0.9495	0.9489	0.9484
750	0.0343	0.0032	0.0112	0.0013	0.0311	0.0020	0.0099	0.0012	0.9468	0.9506	0.9500	0.9493
1000	0.0387	0.0073	0.0027	0.0028	0.0385	0.0073	0.0027	0.0028	0.9486	0.9488	0.952	0.9471

Çizelge (3.4)'de elde edilen sonuçlara göre; örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söylenebilir. Çizelge (3.5)' e göre simülasyon ve Fisher matrisinden elde edilen varyanslar da azalmaktadır. Ayrıca bu varyanslar arasındaki fark giderek azalmaktadır. Örneklem büyüklüğü yeteri kadar büyük olduğunda (500 ve üzeri) bu parametreler için kapsama olasılıkları % 95' e yaklaşmaktadır.

Farklı parametreler için verilen Çizelge (3.6), Çizelge (3.4) ile benzer sonuçlar elde edilmiştir. Çizelge (3.7)' e göre simülasyon ve Fisher matrisinden elde edilen varyanslar da azalmaktadır. Ayrıca bu varyanslar arasındaki fark giderek azalmaktadır. Örneklem büyüklüğü 50 ve üzeri olduğunda bu parametreler için kapsama olasılıkları % 95' e yaklaşmaktadır.

3.3. Weibull Dağılımı İçin İlerleyen Tür Tip I Sansürleme Altında Kompetitif Risk Analizi

İlerleyen Tür Tip I sansürleme altında kompetitif risk analizi için alt bölüm 2.4.1.2 'de verilen en çok olabilirlik tahmin edicileri ve buna bağlı olarak güven aralıkları Weibull dağılımı için uygulanacaktır.

X_{ij} rasgele değişkeni aynı şekil parametreleri β ve farklı ölçek parametreleri $\lambda_j,\ j=1,\dots s$ olan Weibull dağılımına sahip olsun. Bu durumda X_{ij} ' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_j(x)=\beta\lambda_j x^{\beta-1}e^{-\lambda_j x^{\beta}},\quad x>0, \tag{3.30}$$

Burada $\lambda_j,\beta>0,\ j=1,\dots s$ ' dir.

$X_{i1},\dots,X_{is}$ rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu varsayılsın. $X_i=\min\{X_{i1},\dots,X_{is}\}$ ' dir. O halde i. birimin j. nedenden kaynaklanan riskinin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve i. birimin j. nedenden kaynaklanan riskinin birikimli dağılım fonksiyonu sırasıyla,

$$f(x_i,j)=\beta\lambda_j x_i^{\beta-1}e^{-\lambda^* x_i^{\beta}},\quad x_i>0, \tag{3.31}$$

$$F(x_i, j) = \frac{\lambda_j}{\lambda^*}\left[1 - e^{-\lambda^* x_i^\beta}\right], \quad x_i > 0, \tag{3.32}$$

dir. Burada $\lambda^* = \sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell$ tüm risklerin toplam hazard oranlarıdır. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x_i) = 1 - e^{-\lambda^* x_i^\beta} \quad x_i > 0 \tag{3.33}$$

dir.

$$q_{ij} = \frac{F(\tau_i, j) - F(\tau_{i-1}, j)}{1 - F(\tau_{i-1})} = \frac{\lambda_j}{\lambda^*}\left[1 - e^{-\lambda^*(\tau_i^\beta - \tau_{i-1}^\beta)}\right] \tag{3.34}$$

$(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulmanın $j.$ riskten kaynaklanması olasılığı,

$$q_i = \frac{F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})}{1 - F(\tau_{i-1})} = 1 - e^{-\lambda^*(\tau_i^\beta - \tau_{i-1}^\beta)} \tag{3.35}$$

$(\tau_{i-1}, \tau_i]$ aralığında bozulma olasılığıdır, $i = 1, \ldots, k$ ve $j = 1, \ldots, s.$

3.3.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

İlerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk analizi en çok olabilirlik tahmin edicisi Eşitlik (2.28)'de verilmiştir. Weibull dağılımı için ilerleyen tür grup sansürleme altında kompetitif risk analizi için log olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\log L(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \beta) \propto & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log\left(\frac{\lambda_j}{\lambda^*}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log(q_i) \\
& - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log(1 - q_i) + \sum_{i=1}^{k} m_i (1 - q_i) \\
= & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log\left(\frac{\lambda_j}{\lambda^*}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log(1 - \exp\{-\lambda^* h_i\}) \\
& + \lambda^* \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} h_i - \lambda^* \sum_{i=1}^{k} m_i h_i
\end{aligned}, \tag{3.36}$$

Burada $h_i = \tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}$' dir. λ_j ve β için olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\beta)}{\partial \lambda_j}$$

$$= \frac{n_{+j}}{\lambda_j} + \sum_{i=1}^{k}\left[n_{i+}\left(\frac{\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}}{q_i} - \frac{1}{\lambda^*} \right) - m_i\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta} \right) \right] = 0 \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\beta)}{\partial \beta}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[n_{i+}\left(\frac{\lambda^*(\tau_i^{\beta}\log\tau_i - \tau_{i-1}^{\beta}\log\tau_{i-1})(1-q_i)}{q_i} + \lambda^*(\tau_i^{\beta}\log\tau_i - \tau_{i-1}^{\beta}\log\tau_{i-1}) \right) \right] \tag{3.38}$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\lambda^* m_i(\tau_i^{\beta}\log\tau_i - \tau_{i-1}^{\beta}\log\tau_{i-1}) = 0$$

olarak elde edilir. Burada $n_{+j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$ $j.$ riskten dolayı bozulan toplam birim sayısıdır $j = 1,...,s.$ Böylece λ_j' nin EÇO tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_j = \frac{n_{+j}}{n_{++}}\hat{\lambda}^*, \qquad j = 1,2,...,s, \tag{3.39}$$

olarak verilir. Burada $n_{++} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ yaşam testinde bozulan gözlemlerin toplamıdır ve $\hat{\lambda}^* = \sum_{j=1}^{s}\hat{\lambda}_j$' dir.

Eşitlik (3.39)' dan olabilirlik fonksiyonuna geri dönüldüğünde

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{i+}}{q_i}\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{k} m_i\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right) = 0 \tag{3.40}$$

elde edilir.

Eşitlik (3.40) $\hat{\lambda}^*$' ın bir fonksiyonudur. Bunu $g(\hat{\lambda}^*)$ olarak yazılır. $\lim_{\hat{\lambda}^*\to 0} g(\hat{\lambda}^*) = \infty$, olduğunu göstermek oldukça kolaydır, $\lim_{\hat{\lambda}^*\to 0} g(\hat{\lambda}^*) = \sum_{i=1}^{k}(n_{i+} - m_i)\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right) < 0$ ve $\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^*} g(\hat{\lambda}^*) = -\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_{i+}}{q_i^2}(1-q_i)\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right)^2\right] < 0$ dır. $g(\hat{\lambda}^*)$ $\hat{\lambda}^*$' ın artan bir fonksiyonudur bundan dolayı $g(\hat{\lambda}^*) = 0$ $\hat{\lambda}^*$' ın tek çözümüne sahiptir. Çünkü eşitlik (3.40) $\hat{\lambda}^*$' nın tek çözümüne sahiptir. Önce bu eşitlik çözülür daha sonra eşitlik (3.39) kullanılarak en çok olabilirlik tahmin ediciler $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_s$ elde edilir. Düzgünlük koşulları altında en çok olabilirlik tahmin edicilerin asimptotik normalliği tahmin edilebilir.

3.3.2. Güven Aralıkları

Weibull dağılımının parametreleri için asimptotik güven aralıkları oluşturulmuştur. Fisher bilgi matrisini elde etmek için Eşitlik (3.36)' deki olabilirlik fonksiyonundan ikinci türevler alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \log L(\lambda_1, ..., \lambda_s, \beta)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_\ell}$$

$$= -\frac{n_{+j}}{\lambda_j^2} - \sum_{i=1}^{k}\left[n_{i+}\left(\frac{\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right)^2 (1-q_i)}{q_i^2} - \frac{1}{\lambda^{*2}} \right)\right], \qquad j=\ell \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial^2 \log L(\lambda_1, ..., \lambda_k, \beta)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_\ell}$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}\left[n_{i+}\left(\frac{\left(\tau_i^{\beta} - \tau_{i-1}^{\beta}\right)^2 (1-q_i)}{q_i^2} - \frac{1}{\lambda^{*2}} \right)\right], \qquad j \neq \ell \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial^2 \log L(\lambda_1,...,\lambda_s,\beta)}{\partial\lambda_j\partial\beta} =$$

$$\lambda^* \sum_{i=1}^{k} \left[n_{i+} \left(-\frac{\left(\tau_i^\beta - \tau_{i-1}^\beta\right)\left(\tau_i^\beta \log\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log\tau_{i-1}\right)(1-q_i)}{q_i^2} + \frac{\left(\tau_i^\beta \log\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log\tau_{i-1}\right)}{q_i} \right) \right]$$

$$-\left[\lambda^* \sum_{i=1}^{k} m_i \left(\tau_i^\beta \log\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log\tau_{i-1}\right) \right]$$

(3.43)

$$\frac{\partial^2 \log L(\lambda_1,...,\lambda_s,\beta)}{\partial\beta^2} =$$

$$\lambda^* \sum_{i=1}^{k} \left[n_{i+} \left(\frac{\tau_i^\beta \log^2\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log^2\tau_{i-1}}{q_i} - \frac{\lambda^* \left(\tau_i^\beta \log\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log\tau_{i-1}\right)^2}{q_i^2} \right) \right] \qquad (3.44)$$

$$-\lambda^* \sum_{i=1}^{k} \left[m_i \left(\tau_i^\beta \log^2\tau_i - \tau_{i-1}^\beta \log^2\tau_{i-1}\right) \right].$$

Burada $q_i = 1 - e^{-\lambda^*(\tau_i^\beta - \tau_{i-1}^\beta)}$ ve $\hat{\lambda}^* = \sum_{j=1}^{s} \hat{\lambda}_j$ ' dır. Daha sonra elde edilen Eşitlikler (3.41) - (3.43) ve (3.44)' ü (-) ile çarpıp beklenen değerinin alınması ile Fisher bilgi matrisi elde edilir. Düzgünlük koşulları altında $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_s, \hat{\beta})$ ortalaması $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \beta)$ ve varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{I}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \beta)$ olan normal dağılıma sahiptir. Uygulamada ise, genellikle $\mathbf{I}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \beta)$ tutarlı tahmin edicisi $\hat{\mathbf{I}}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \beta)$ kullanılır.

Bu durumda $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_s, \hat{\beta}) \sim N\left((\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \beta),\ \mathbf{I}_0^{-1}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_s, \hat{\beta})\right)$,

dır. Burada $\mathbf{I}_0^{-1}$ Fisher bilgi matrisinin tutarlı bir tahmin edicisidir ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{I}_0^{-1}\left(\hat{\lambda}_1,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta}\right)=-\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1^{\,2}} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\lambda_s} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_2^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_2\partial\lambda_s} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_2\partial\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\lambda_s} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_2\partial\lambda_s} & \cdots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_s^{\,2}} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_s\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_1\partial\beta} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_2\partial\beta} & \cdots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda_s\partial\beta} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\left(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta}\right)}$$

dir. Burada $\log L(\lambda_1,...,\lambda_s,\beta)=\ell$ olarak kullanılmıştır ve log- olabilirlik fonksiyonunda parametrelerin ikinci türevleri elde edilmiştir. Bu elde edilen Eşitlik (3.41)-(3.43) ve (3.44) Fisher bilgi matrisinin tutarlı tahmin edicisinde yerlerine yazılarak asimptotik güven aralıkları oluşturulmuştur.

$(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta})$ parametre tahminleri düzgün koşullar altında $\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s,\beta\right)$ ortalamalı ve varyans kovaryans matrisi $\mathbf{I}_0^{-1}(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta})$ olan normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ ve β için

asimptotik güven aralıkları

$$\left(\hat{\lambda}_j-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{jj}}\ ,\ \hat{\lambda}_j+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{jj}}\right)$$

$$\left(\hat{\beta}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{(s+1)(s+1)}}\ ,\ \hat{\beta}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{(s+1)(s+1)}}\right),$$

şeklinde bulunur. Burada V_{jj} $\left(j=1,\ldots,s\right)$ varyans kovaryans matrisi $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta})$ $j.$ diagonal elemanı ve $V_{(s+1)(s+1)}$ varyans kovaryans matrisi $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,...,\hat{\lambda}_s,\hat{\beta})$ $(s+1).$ diagonal elemanıdır. $\alpha\in(0,1)$ için $z_{\frac{\alpha}{2}}$, standart normal dağılımın $(\alpha/2).$ kuantilidir

3.3.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde Eşitlik (3.37)' da bulunan en çok olabilirlik tahmin edicisinin $s=2$ durumunda yan ve HKO açısından performansı bir simülasyon çalışması ile

incelenmiştir. Sonuçlar farklı parametre, N (örneklem büyüklüğü), k (aralık sayısı) ve τ (kontrol zamanı) değerleri için 10000 tekrarla elde edilmiştir.

Çizelge (3.10)-(3.12)'de, örneklem büyüklüğü (N), $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ parametreleri için $p = 0.25$ ve k =3,5,7 alınarak τ 'nun farklı değerlerinde en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri verilmiştir.

Ayrıca Çizelge (3.13)-(3.15)'de EÇO tahmin edicileri için gözlem bilgi matrisinden edilen asimptotik varyanslar ile simülasyon sonucu elde edilen varyanslar ile birlikte asimptotik güven aralıklarının parametreleri kapsama olasılıkları verilmiştir.

Çizelge 3.10. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

N	**K**	τ	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta})$	HKO$(\hat{\beta})$
50			0.0325	0.0659	0.0150	0.0279	0.0110	0.0256
100			0.0160	0.0308	0.0065	0.0130	0.0035	0.0121
250	**3**	**0.25**	0.0061	0.0120	0.0029	0.0050	0.0018	0.0048
500			0.0015	0.0057	0.0012	0.0026	0.0008	0.0024
1000			0.0011	0.0028	0.0014	0.0012	0.0007	0.0012
50			0.0251	0.0513	0.0111	0.0228	0.0095	0.0171
100			0.0144	0.0237	0.0056	0.0109	0.0046	0.0081
250	**5**	**0.25**	0.0050	0.0091	0.0018	0.0042	0.0022	0.0033
500			0.0020	0.0045	0.0009	0.0021	0.0005	0.0016
1000			0.0016	0.0023	0.0009	0.0011	0.0002	0.0008
50			0.0243	0.0472	0.0120	0.0218	0.0116	0.0151
100			0.0160	0.0226	0.0062	0.0107	0.0058	0.0070
250	**7**	**0.25**	0.0062	0.0086	0.0027	0.0040	0.0028	0.0028
500			0.0022	0.0042	0.0006	0.0020	0.0010	0.0014
1000			0.0013	0.0021	0.0006	0.0010	0.0006	0.0007

Çizelge (3.10)' da elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söyleyebiliriz. örneklem büyüklüğü (N) ve τ sabit alınıp k artırıldığında HKO değerlerinin azaldığı görülmektedir. Yan miktarında ise artış ve azalışlar gözlenmiştir.

Çizelge 3.11. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta})$	HKO$(\hat{\beta})$
50			0.0268	0.0447	0.0090	0.0203	0.0122	0.0261
100			0.0115	0.0207	0.0052	0.0100	0.0053	0.0126
250	**3**	**0.5**	0.0039	0.0081	0.0018	0.0039	0.0026	0.0050
500			0.0026	0.0040	0.0018	0.0019	0.0010	0.0024
1000			0.0005	0.0020	0.0006	0.0010	0.0004	0.0012
50			0.0266	0.0426	0.0096	0.0191	0.0167	0.0191
100			0.0128	0.0195	0.0056	0.0092	0.0086	0.0092
250	**5**	**0.5**	0.0034	0.0038	0.0011	0.0018	0.0016	0.0017
500			0.0034	0.0038	0.0011	0.0018	0.0016	0.0017
1000			0.0010	0.0018	0.0003	0.0009	0.0005	0.0009
50			0.0265	0.0417	0.0116	0.0190	0.0151	0.0172
100			0.0135	0.0196	0.0054	0.0092	0.0076	0.0082
250	**7**	**0.5**	0.0055	0.0074	0.0023	0.0036	0.0030	0.0030
500			0.0023	0.0036	0.0007	0.0018	0.0025	0.0016
1000			0.0014	0.0018	0.0008	0.0009	0.0004	0.0008

Çizelge (3.11)' de elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söyleyebiliriz. örneklem büyüklüğü (N) ve τ sabit alınıp k değerleri artırıldığında yan ve HKO değerlerinde artış ve azalışlar gözlenmiştir.

Çizelge 3.12. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta})$	HKO$(\hat{\beta})$
50			0.0207	0.0427	0.0143	0.0205	0.0187	0.0299
100			0.0130	0.0202	0.0050	0.0096	0.0113	0.0144
250	**3**	**0.75**	0.0049	0.0078	0.0035	0.0038	0.0038	0.0054
500			0.0036	0.0038	0.0017	0.0018	0.0010	0.0027
1000			0.0013	0.0019	0.0003	0.0009	0.0006	0.0013
50			0.0256	0.0427	0.0108	0.0193	0.0234	0.0233
100			0.0113	0.0202	0.0053	0.0092	0.0096	0.0108
250	**5**	**0.75**	0.0041	0.0078	0.0029	0.0037	0.0045	0.0040
500			0.0026	0.0038	0.0022	0.0018	0.0019	0.0020
1000			0.0010	0.0019	0.0008	0.0009	0.0008	0.0010
50			0.0238	0.0428	0.0106	0.0192	0.0197	0.0197
100			0.0131	0.0196	0.0050	0.0091	0.0111	0.0094
250	**7**	**0.75**	0.0055	0.0079	0.0024	0.0036	0.0038	0.0037
500			0.0022	0.0038	0.0008	0.0018	0.0027	0.0018
1000			0.0006	0.0019	0.0007	0.0009	0.0009	0.0009

Çizelge (3.12) Çizelge (3.11) ile benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 3.13. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0648	0.0277	0.0254	0.0645	0.0278	0.0244	0.9473	0.9347	0.9300
100			0.0305	0.0130	0.0121	0.0302	0.0131	0.0120	0.9493	0.9458	0.9414
250	**3**	**0.25**	0.0119	0.0050	0.0048	0.0116	0.0051	0.0048	0.9455	0.9490	0.9455
500			0.0057	0.0026	0.0024	0.0057	0.0025	0.0024	0.9529	0.9459	0.9467
1000			0.0028	0.0012	0.0012	0.0029	0.0013	0.0012	0.9499	0.9504	0.9519
50			0.0507	0.0226	0.0171	0.0492	0.0228	0.0166	0.9465	0.9407	0.9411
100			0.0235	0.0109	0.0081	0.0234	0.0109	0.0082	0.9493	0.9428	0.9463
250	**5**	**0.25**	0.0091	0.0042	0.0033	0.0091	0.0043	0.0032	0.9529	0.9469	0.9460
500			0.0045	0.0021	0.0016	0.0045	0.0021	0.0016	0.9532	0.9501	0.9490
1000			0.0023	0.0011	0.0008	0.0022	0.0011	0.0008	0.9454	0.9503	0.9523
50			0.0466	0.0216	0.0149	0.0451	0.0214	0.0142	0.9488	0.9381	0.9394
100			0.0223	0.0107	0.0070	0.0217	0.0103	0.0070	0.9485	0.9383	0.9493
250	**7**	**0.25**	0.0085	0.0040	0.0028	0.0084	0.0040	0.0027	0.9504	0.9500	0.9462
500			0.0042	0.0020	0.0014	0.0042	0.0020	0.0014	0.9469	0.9497	0.9510
1000			0.0021	0.0010	0.0007	0.0021	0.0010	0.0007	0.9483	0.9461	0.9517

Çizelge 3.14. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0440	0.0202	0.0259	0.0429	0.0204	0.0253	0.9498	0.9398	0.9340
100			0.0206	0.0099	0.0126	0.0204	0.0098	0.0124	0.9487	0.9431	0.9437
250	**3**	**0.50**	0.0081	0.0039	0.0050	0.0080	0.0038	0.0049	0.9473	0.9465	0.9469
500			0.0040	0.0019	0.0024	0.0040	0.0019	0.0024	0.9507	0.9490	0.9468
1000			0.0020	0.0010	0.0012	0.0020	0.0010	0.0012	0.9505	0.9502	0.9448
50	**5**	**0.50**	0.0419	0.0190	0.0189	0.0398	0.0191	0.0184	0.9468	0.9389	0.9422
100			0.0193	0.0092	0.0092	0.0190	0.0092	0.0089	0.9523	0.9461	0.9457
250			0.0073	0.0036	0.0035	0.0074	0.0036	0.0035	0.9514	0.9485	0.9473
500			0.0038	0.0018	0.0017	0.0037	0.0018	0.0017	0.9471	0.9492	0.9506
1000			0.0018	0.0009	0.0009	0.0018	0.0009	0.0009	0.9501	0.9508	0.9496
50			0.0410	0.0188	0.0170	0.0390	0.0188	0.0160	0.9465	0.9397	0.9383
100			0.0194	0.0092	0.0081	0.0187	0.0091	0.0078	0.9456	0.9442	0.9411
250	**7**	**0.50**	0.0073	0.0036	0.0030	0.0073	0.0035	0.0030	0.9497	0.9466	0.9517
500			0.0036	0.0018	0.0016	0.0036	0.0018	0.0015	0.9470	0.9492	0.9463
1000			0.0018	0.0009	0.0008	0.0018	0.0009	0.0008	0.9523	0.9509	0.9478

Çizelge 3.15. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \beta = 0.5$ $p = 0.25$ için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0422	0.0203	0.0296	0.0412	0.0197	0.0288	0.9440	0.9390	0.9326
100			0.0201	0.0095	0.0142	0.0198	0.0094	0.0138	0.9503	0.9440	0.9410
250	**3**	**0.75**	0.0078	0.0037	0.0054	0.0077	0.0037	0.0054	0.9484	0.9441	0.9493
500			0.0038	0.0018	0.0027	0.0038	0.0018	0.0027	0.9524	0.9468	0.9468
1000			0.0019	0.0009	0.0013	0.0019	0.0009	0.0013	0.9511	0.9486	0.9483
50			0.0421	0.0192	0.0228	0.0408	0.0190	0.0215	0.9474	0.9384	0.9407
100			0.0201	0.0092	0.0107	0.0195	0.0091	0.0102	0.9477	0.9425	0.9416
250	**5**	**0.75**	0.0077	0.0037	0.0040	0.0076	0.0036	0.0040	0.9484	0.9479	0.9500
500			0.0038	0.0018	0.0020	0.0038	0.0018	0.0020	0.9498	0.9492	0.9488
1000			0.0019	0.0009	0.0010	0.0019	0.0009	0.0010	0.9503	0.9500	0.9514
50			0.0423	0.0191	0.0193	0.0404	0.0188	0.0185	0.9455	0.9397	0.9414
100			0.0194	0.0091	0.0093	0.0194	0.0091	0.0091	0.9521	0.9447	0.9461
250	**7**	**0.75**	0.0079	0.0036	0.0037	0.0076	0.0035	0.0035	0.9472	0.9470	0.9472
500			0.0038	0.0018	0.0018	0.0038	0.0018	0.0017	0.9521	0.9485	0.9485
1000			0.0019	0.0009	0.0009	0.0019	0.0009	0.0009	0.9473	0.9508	0.9500

Çizelge (3.13)-(3.15)'de elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi varyansların azaldığını söyleyebiliriz. Örneklem büyüklüğü (N) ve $\tau = 0.25$ ve $\tau = 0.5$ sabit alınarak k değerleri artırıldığında simülasyon ve gözlem bilgi matrisinden elde edilen varyanslar azalmaktadır. Fakat $\tau = 0.75$ alındığında ise varyanslarda artışlar görülebilmektedir. Örneklem büyüklüğü 50 ve üzeri olduğunda kapsama olasılıkları % 95' yaklaşmaktadır.

Çizelge (3.14)-(3.17)'de, örneklem büyüklüğü (N), $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ parametreleri için $p = 0.10$ ve k=3,5,7 alınarak τ 'nun farklı değerlerinde en çok olabilirlik tahmin edicisi için simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama HKO değerleri verilmiştir.

Ayrıca Çizelge (3.18)-(3.21)'de EÇO tahmin edicileri için gözlem bilgi matrisinden edilen asimptotik varyanslar ile simülasyon sonucu elde edilen varyanslar ile birlikte asimptotik güven aralıklarının parametreleri kapsama olasılıkları verilmiştir.

Çizelge 3.14. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan($\hat{\lambda}_1$)	HKO($\hat{\lambda}_1$)	Yan($\hat{\lambda}_2$)	HKO($\hat{\lambda}_2$)	Yan($\hat{\beta}$)	HKO($\hat{\beta}$)
50			0.0306	0.0453	0.0483	0.1073	0.0599	0.1833
100			0.0146	0.0201	0.0299	0.0493	0.0360	0.0851
250	**3**	**0.2**	0.0040	0.0075	0.0108	0.0184	0.0152	0.0336
500			0.0034	0.0038	0.0055	0.0091	0.0066	0.0164
1000			0.0006	0.0019	0.0027	0.0045	0.0027	0.0079
50			0.0175	0.0305	0.0353	0.0652	0.0509	0.1138
100			0.0077	0.0141	0.0182	0.0312	0.0329	0.0551
250	**5**	**0.2**	0.0035	0.0054	0.0065	0.0115	0.0110	0.0208
500			0.0019	0.0026	0.0046	0.0056	0.0055	0.0100
1000			0.0008	0.0013	0.0006	0.0028	0.0025	0.0050
50			0.0182	0.0252	0.0337	0.0539	0.0605	0.0903
100			0.0082	0.0116	0.0171	0.0242	0.0291	0.0410
250	**7**	**0.2**	0.0037	0.0046	0.0066	0.0092	0.0114	0.0155
500			0.0027	0.0022	0.0025	0.0045	0.0055	0.0077
1000			0.0009	0.0011	0.0012	0.0022	0.0032	0.0037

Çizelge (3.14)' de elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söyleyebiliriz. örneklem büyüklüğü (N) ve τ sabit alınıp k artırıldığında HKO değerlerinin azaldığı görülmektedir. Yan miktarında ise artış ve azalışlar gözlenmiştir.

Çizelge 3.15. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta})$	HKO$(\hat{\beta})$
50			0.0156	0.0248	0.0311	0.0541	0.0539	0.1180
100			0.0080	0.0115	0.0145	0.0259	0.0258	0.0547
250	**3**	**0.3**	0.0026	0.0045	0.0060	0.0095	0.0122	0.0209
500			0.0015	0.0023	0.0027	0.0048	0.0070	0.0105
1000			0.0006	0.0011	0.0006	0.0023	0.0010	0.0052
50			0.0163	0.0225	0.0341	0.0481	0.0590	0.0883
100			0.0077	0.0101	0.0156	0.0211	0.0269	0.0410
250	**5**	**0.3**	0.0023	0.0039	0.0045	0.0079	0.0127	0.0149
500			0.0011	0.0019	0.0031	0.0039	0.0054	0.0074
1000			0.0004	0.0010	0.0015	0.0020	0.0026	0.0036
50			0.0168	0.0212	0.0382	0.0470	0.0682	0.0840
100			0.0100	0.0101	0.0157	0.0206	0.0336	0.0381
250	**7**	**0.3**	0.0032	0.0038	0.0078	0.0079	0.0146	0.0144
500			0.0018	0.0018	0.0026	0.0038	0.0074	0.0070
1000			0.0009	0.0010	0.0011	0.0019	0.0032	0.0035

Çizelge (3.15) Çizelge (3.14) ile benzer sonuçlar içermektedir.

Çizelge 3.16. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan$(\hat{\lambda}_1)$	HKO$(\hat{\lambda}_1)$	Yan$(\hat{\lambda}_2)$	HKO$(\hat{\lambda}_2)$	Yan$(\hat{\beta})$	HKO$(\hat{\beta})$
50			0.0168	0.0228	0.0262	0.0472	0.0488	0.1043
100			0.0074	0.0105	0.0173	0.0222	0.0282	0.0490
250	**3**	**0.4**	0.0029	0.0041	0.0062	0.0082	0.0097	0.0194
500			0.0008	0.0020	0.0026	0.0041	0.0060	0.0096
1000			0.0012	0.0010	0.0019	0.0021	0.0019	0.0047
50			0.0154	0.0203	0.0353	0.0447	0.0675	0.0884
100			0.0077	0.0095	0.0152	0.0198	0.0328	0.0404
250	**5**	**0.4**	0.0035	0.0036	0.0061	0.0073	0.0105	0.0149
500			0.0017	0.0018	0.0020	0.0037	0.0069	0.0074
1000			0.0011	0.0009	0.0017	0.0019	0.0029	0.0037
50			0.0160	0.0202	0.0342	0.0445	0.0623	0.0875
100			0.0081	0.0094	0.0186	0.0202	0.0353	0.0405
250	**7**	**0.4**	0.0051	0.0037	0.0066	0.0075	0.0147	0.0149
500			0.0019	0.0018	0.0032	0.0037	0.0068	0.0075
1000			0.0007	0.0009	0.0021	0.0018	0.0022	0.0037

Çizelge (3.16)' da elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi yan ve HKO değerlerinin azaldığını söyleyebiliriz. örneklem büyüklüğü (N) ve τ sabit alınıp k artırıldığında yan ve HKO değerlerinin artış ve azalışlar gözlenmiştir.

Çizelge 3.17. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

N	K	τ	Yan($\hat{\lambda}_1$)	HKO($\hat{\lambda}_1$)	Yan($\hat{\lambda}_2$)	HKO($\hat{\lambda}_2$)	Yan($\hat{\beta}$)	HKO($\hat{\beta}$)
50			0.0144	0.0206	0.0329	0.0479	0.0707	0.1090
100			0.0077	0.0096	0.0154	0.0203	0.0288	0.0492
250	**3**	**0.5**	0.0021	0.0036	0.0061	0.0077	0.0131	0.0184
500			0.0018	0.0018	0.0031	0.0038	0.0066	0.0088
1000			0.0012	0.0009	0.0010	0.0019	0.0019	0.0045
50			0.0160	0.0204	0.0325	0.0441	0.0750	0.0985
100			0.0094	0.0093	0.0160	0.0196	0.0377	0.0458
250	**5**	**0.5**	0.0024	0.0035	0.0060	0.0072	0.0142	0.0169
500			0.0015	0.0017	0.0032	0.0036	0.0063	0.0083
1000			0.0009	0.0009	0.0020	0.0018	0.0036	0.0041
50			0.0178	0.0200	0.0343	0.0458	0.0699	0.0943
100			0.0072	0.0092	0.0142	0.0200	0.0339	0.0414
250	**7**	**0.5**	0.0038	0.0035	0.0059	0.0073	0.0172	0.0155
500			0.0013	0.0018	0.0021	0.0037	0.0085	0.0078
1000			0.0010	0.0009	0.0020	0.0018	0.0037	0.0039

Çizelge (3.17) Çizelge (3.16) ile benzer sonuçlar içermektedir.

Çizelge 3.18. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0444	0.1050	0.1797	0.0456	0.1083	0.1761	0.9299	0.9430	0.9506
100			0.0199	0.0484	0.0839	0.0205	0.0494	0.0835	0.9411	0.9474	0.9529
250	**3**	**0.2**	0.0075	0.0183	0.0334	0.0077	0.0185	0.0324	0.9463	0.9476	0.9477
500			0.0038	0.0091	0.0164	0.0038	0.0091	0.0160	0.9485	0.9483	0.9457
1000			0.0019	0.0045	0.0079	0.0019	0.0045	0.0079	0.9473	0.9498	0.9484
50			0.0302	0.0640	0.1112	0.0293	0.0631	0.1078	0.9357	0.9496	0.9483
100			0.0140	0.0309	0.0540	0.0138	0.0297	0.0522	0.9394	0.9453	0.9492
250	**5**	**0.2**	0.0054	0.0115	0.0207	0.0054	0.0115	0.0203	0.9468	0.9499	0.9486
500			0.0026	0.0056	0.0100	0.0027	0.0057	0.0101	0.9511	0.9518	0.9494
1000			0.0013	0.0028	0.0050	0.0013	0.0028	0.0050	0.9476	0.9494	0.9499
50			0.0249	0.0528	0.0867	0.0241	0.0498	0.0811	0.9397	0.9482	0.9485
100			0.0116	0.0239	0.0402	0.0114	0.0234	0.0389	0.9439	0.9516	0.9485
250	**7**	**0.2**	0.0045	0.0091	0.0154	0.0044	0.0090	0.0152	0.9443	0.9497	0.9505
500			0.0021	0.0045	0.0077	0.0022	0.0045	0.0075	0.9474	0.9468	0.9486
1000			0.0011	0.0022	0.0037	0.0011	0.0022	0.0038	0.9554	0.9477	0.9501

Çizelge 3.19. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0246	0.0531	0.1151	0.0243	0.0519	0.1106	0.9378	0.9515	0.9483
100			0.0115	0.0257	0.0540	0.0116	0.0245	0.0533	0.9463	0.9454	0.9488
250	**3**	**0.3**	0.0045	0.0094	0.0208	0.0045	0.0095	0.0209	0.9482	0.9496	0.9514
500			0.0022	0.0048	0.0104	0.0022	0.0047	0.0104	0.9460	0.9465	0.9517
1000			0.0011	0.0023	0.0052	0.0011	0.0023	0.0052	0.9482	0.9521	0.9502
50			0.0222	0.0469	0.0848	0.0212	0.0439	0.0793	0.9360	0.9508	0.9508
100			0.0100	0.0209	0.0403	0.0100	0.0205	0.0378	0.9451	0.9477	0.9434
250	**5**	**0.3**	0.0039	0.0079	0.0148	0.0039	0.0079	0.0148	0.9455	0.9482	0.9535
500			0.0019	0.0039	0.0073	0.0019	0.0039	0.0073	0.9456	0.9520	0.9530
1000			0.0010	0.0020	0.0036	0.0010	0.0019	0.0036	0.9507	0.9502	0.9523
50			0.0209	0.0456	0.0794	0.0207	0.0429	0.0749	0.9454	0.9490	0.9511
100			0.0100	0.0203	0.0370	0.0098	0.0200	0.0358	0.9443	0.9494	0.9490
250	**7**	**0.3**	0.0038	0.0078	0.0142	0.0038	0.0077	0.0139	0.9488	0.9510	0.9509
500			0.0018	0.0038	0.0069	0.0019	0.0038	0.0069	0.9496	0.9495	0.9516
1000			0.0010	0.0019	0.0035	0.0009	0.0019	0.0034	0.9479	0.9502	0.9507

Çizelge 3.20. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0226	0.0465	0.1020	0.0217	0.0453	0.0992	0.9396	0.9506	0.9505
100			0.0105	0.0219	0.0482	0.0103	0.0215	0.0480	0.9422	0.9492	0.9521
250	**3**	**0.4**	0.0041	0.0082	0.0193	0.0040	0.0083	0.0188	0.9426	0.9498	0.9481
500			0.0020	0.0041	0.0095	0.0020	0.0041	0.0093	0.9471	0.9455	0.9499
1000			0.0010	0.0021	0.0047	0.0010	0.0020	0.0046	0.9492	0.9473	0.9479
50			0.0200	0.0435	0.0839	0.0197	0.0413	0.0817	0.9408	0.9512	0.9527
100			0.0094	0.0196	0.0393	0.0093	0.0192	0.0385	0.9457	0.9479	0.9512
250	**5**	**0.4**	0.0036	0.0073	0.0148	0.0036	0.0074	0.0149	0.9473	0.9529	0.9529
500			0.0018	0.0037	0.0073	0.0018	0.0036	0.0074	0.9512	0.9493	0.9531
1000			0.0009	0.0019	0.0037	0.0009	0.0018	0.0037	0.9500	0.9474	0.9492
50			0.0200	0.0434	0.0837	0.0196	0.0411	0.0806	0.9425	0.9530	0.9557
100			0.0094	0.0198	0.0393	0.0093	0.0193	0.0384	0.9483	0.9487	0.9506
250	**7**	**0.4**	0.0036	0.0075	0.0147	0.0036	0.0074	0.0148	0.9468	0.9487	0.9494
500			0.0018	0.0037	0.0074	0.0018	0.0036	0.0073	0.9518	0.9533	0.9492
1000			0.0009	0.0018	0.0036	0.0009	0.0018	0.0036	0.9479	0.9524	0.9506

Çizelge 3.21. $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 1, \beta = 2$ p=0.10 için simülasyon sonuçları

			Simülasyon			**Gözlem Matrisi**			**Kapsama Olasılıkları**		
N	**K**	τ	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_1)$	$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_2)$	$\mathrm{Var}(\hat{\beta})$	λ_1	λ_2	β
50			0.0204	0.0468	0.1040	0.0197	0.0422	0.0981	0.9374	0.9470	0.9535
100			0.0095	0.0201	0.0483	0.0093	0.0194	0.0461	0.9446	0.9485	0.9461
250	**3**	**0.5**	0.0036	0.0077	0.0182	0.0036	0.0075	0.0179	0.9508	0.9491	0.9484
500			0.0018	0.0038	0.0088	0.0018	0.0037	0.0089	0.9488	0.9465	0.9523
1000			0.0009	0.0019	0.0045	0.0009	0.0018	0.0044	0.9516	0.9445	0.9505
50			0.0201	0.0430	0.0929	0.0194	0.0411	0.0927	0.9424	0.9508	0.9590
100			0.0092	0.0193	0.0444	0.0091	0.0190	0.0435	0.9445	0.9528	0.9533
250	**5**	**0.5**	0.0035	0.0072	0.0167	0.0035	0.0073	0.0167	0.9480	0.9529	0.9507
500			0.0017	0.0036	0.0082	0.0017	0.0036	0.0083	0.9512	0.9497	0.9519
1000			0.0009	0.0018	0.0041	0.0009	0.0018	0.0041	0.9473	0.9483	0.9475
50			0.0197	0.0447	0.0894	0.0195	0.0412	0.0862	0.9428	0.9474	0.9540
100			0.0091	0.0198	0.0402	0.0091	0.0190	0.0405	0.9467	0.9507	0.9548
250	**7**	**0.5**	0.0035	0.0073	0.0152	0.0035	0.0073	0.0157	0.9503	0.9490	0.9544
500			0.0018	0.0037	0.0078	0.0017	0.0036	0.0077	0.9463	0.9481	0.9519
1000			0.0009	0.0018	0.0039	0.0009	0.0018	0.0038	0.9515	0.9539	0.9452

Çizelge (3.18)-(3.21)'de elde edilen sonuçlara göre; k ve τ sabit alınıp örneklem büyüklüğü (N), arttıkça beklenildiği gibi varyansların azaldığını söyleyebiliriz. Örneklem büyüklüğü (N) ve $\tau = 0.2$ ve $\tau = 0.3$ sabit alınarak k değerleri artırıldığında simülasyon ve gözlem bilgi matrisinden elde edilen varyanslar azalmaktadır. Fakat $\tau = 0.4$ ve $\tau = 0.5$ alındığında ise varyanslarda artışlar görülebilmektedir. Örneklem büyüklüğü 50 ve üzeri olduğunda kapsama olasılıkları % 95' yaklaşmaktadır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Sarhan ve ark. (2010)' ın Üstel, Weibull ve Chen dağılımları için elde ettiği sonuçlar Pareto ve Burr XII dağılımına, Huang ve Wu'nun ın elde ettiği sonuçlar ise Weibull dağılımına genişletilmiştir. Tip I sansürleme altında kompetitif risk dataya dayalı Burr ve Pareto dağılımlarının parametrelerinin EÇO tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı asimptotik güven ararlıkları elde edilmiş, simülasyon çalışmasıyla elde edilen tahmin edicilerin yan ve HKO'leri, güven aralıklarının kapsama olasılıkları tablolaştırılmıştır. İlerleyen tür Tip I sansürleme altında kompetitif risk dataya dayalı Weibull dağılımının parametrelerinin EÇO tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı asimptotik güven ararlıkları elde edilmiş, yine bir simulasyon çalışmasıyla elde edilen tahmin edicilerin yan ve HKO'leri, güven aralıklarının kapsama olasılıkları tablolaştırılmış ve yorumlanmıştır. Pareto ve Burr XII dağılımları içn uygulanan simülasyon sonuçlarına göre örneklem büyüklüğü artırıldığında yan ve HKO değerlerinin ortalamalarında azalma görülmektedir. Ayrıca varyanslar azalırken ve kapsama olasılıkları yükselmektedir. Weibull dağılımı için uygulanan simülasyon sonuçlarına göre örneklem büyüklüğü artılıp, aralık sayısı (k) ve gözlem zaman aralığı (τ) sabit tutulduğunda yine yan ve HKO ortalamaları azalmaktadır. τ değerlerinin küçük olduğu durumlarda, k arttıkça HKO ortalaması ve varyanslar azalırken yan değerleri ortalamaları için yorum yapılamamaktadır. Örneklem büyüklüğü ve k 'lar sabit tutulup, τ 'lar artırıldığı durumlarda yan, HKO ve varyanslar artış ve azalış göstermektedir. Bu sonuçlar yaşam testleri için optimal aralık sayısının ve zamanının belirlenmesi ihtiyacını doğurmaktadır.

İleriki çalışmalarda, elde edilen sonuçlar, literatürdeki diğer dağılımlar için de yapılabilir. Ayrıca, ilgilenilen yaşam zamanı Weibull dağılımı olduğu durumda İlerleyen tür Tip I sansürleme için optimal deney tasarımı yapılabilir. Farklı sansürleme şemaları için Kompetitif risk dataya dayalı parametre tahmini problemi de ileride çalışılacak konular arasındadır.

KAYNAKLAR

Aggarwala R. and Balakrishnan N., 1998, Some Properties of Progressive Type-II Censored Order Statistics From Arbitrary and Uniform Distributions with Applications to Inference and Simulation. *J. Statist. Plann. Inference* 70, 35-49.

Aggarwala R., 2001, Progressive interval censoring: Some mathematical results with applications to inference, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 30, 1921-1935.

Ali Mousa, M. A. M. and Jaheen, Z. F., 2002, Statistical inference for the Burr model Based on progressively censored data. *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1441-1449.

Balakrishnan, N., Childs, A., Chandrasekar, B., 2002, An Efficient Computational Method for Moments of order Statistics Under Progressive. *Censoring Statistics & Probability Letters*, 60, 359-365.

Biçer, D., H., 2011, Sansürlü Verilerde Diskriminat Analizi: Weibull Dağılımı Durumu, Doktora Tezi , *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Bocchetti D., Giorgia M., Guida, M., and Pulcini A., 2009, A competing risk model for reliability of cylinder liners in marine diesel engines. *Reliability Engineering and System Safety* 94 1299-307.

Chang, K. F., and Chen, C. H., 1988 Estimation of the Weibull parameters with grouped data. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 17, 325-341.

Chen, Z., and Mi, J., 1996, Confidence interval for the mean of the exponential distribution, Based on grouped data. *IEEE Transactions on Reliability*, 45, 671-677.

Cohen A.C., 1975, Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution. *Technometrics* 17 (3) 347-351.

Cohen A.C. ve Norgaard N.J., 1975, Progressively Censored Sampling in the Three-Parameter Gamma Distribution. *Technometrics* 19 (3) 333-340.

Cohen A.C., 1976, Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. *Technometrics 1*8 1 99-103.

Cox, D. R., 1959, The analysis of exponentially distributed lifetimes with two types of failure. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 21, 411-421.

Crowder, M. J., 2001, Classical Competing risks, *Chapman & Hall, Bocaraton*, Florida.

David, H.A., Nagaraja, H.N., 2003, Order Statistics third edition, John Wiley, NewYork.

Gouno, E., Sen, A. and Balakrishnan, N., 2004, Optimal step-stress test under progressive type-I censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, 53, 388-393.

David, H.A., Moeschberger, M.L., 1978, The theory of competing risks, Griffin, London.

Han, D. and Balakrishnan, N., 2010, Inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from the exponential distribution under time constraint. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, 2066-2081.

Kalbfleisch, J. D. and Prentice, R. L., 2002, The Statistical Analysis of Failure Time Data, 2nd edition, Wiley, New York.

Kale, B., 2003, İlerleyen Tür Sansürlenmiş Sıra İstatistikleri: Dağılım özellikleri ve Uygulamalar, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Kundu, D. and Basu, S., 1999, Analysis incomplete data in the presence of competing risks. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 87, 221-39

Kuş, C., 2004, Bazı Yaşam Zamanı Dağılımlarının Parametrelerinin Tam ve Sansürlü Verilere Dayalı Tahmini, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Lawless J.F., 1982, Statistical Models ans Methods Lifetime Data. Wiley Newyork.

Liu, X. and Qiu, W. S., 2011, Modelling and planning of step-stress accelerated life tests with independent competing risks. *IEEE Transactions on Reliability*, 60, 712-720.

Lu, W. and Tsai, T. -R., 2009, Interval censored sampling plans for the gamma lifetime model. *European Journal of Operational Research*, 192, 116-124.

Mann, N.R., 1971, Best Linear Invariant Estimation For Weibull Parameters Under Progressive Censoring. *Technometrics* 13 (3) 521-533.

Miyakawa, M., 1984, Analysis of incomplete data in competing risks models. *IEEE Transactions on Reliability*, 33(4), 293-6.

Ng, H.K.T., Chan, P.S. and Balakrishnan N., 2002, Estimation of Parameters From Progressively Censored Data Using EM Algorithm. *Computational Statistics&Data Analysis* 39 371-386.

Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., 2003, Sayısal Analiz. Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.

Pareek, B., Kundu, D.and Kumar, S. 2009, On progressively censored competing risks data for Weibull distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 4083-4094.

Sarhan, M.A, Hamilton, C.D, Smith, B., 2010, Statistical analysis of competing risks models. *Reliability Engineering and system safety*, 95, 953-962.

Soliman, A. A., 2005, Estimation of parameters of life from progressively censored data using Burr-XII model. *IEEE Transactionson Reliability*, 54, 34-42.

Talu, C., 1999, A Survey of Competing Risk Analysis: A Medical Application, Master Thesis, *The Middle East Technical University, Natural and Applied Science*, Ankara.

Wu, S.-J. and Huang, S.-R. 2014, Planning progressive type-I interval censoring life tests with competing risks, *IEEE Transactions on Reliability*, 63, 511-522.

Wu, S.-J., Chang, C. - T., Liao, K. -J. and Huang, S. –R., 2008, Planning of progressive group censoring life tests with cost considerations. *Journal of Applied Statistics*, 35, 1293-1304.

Wu, S.-J. and Kuş, C., 2009, On estimation based on progressive first-failure-censored sampling, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53 3659-3670.

Xiang, L. and Tse, S.-K., 2005, Maximum likelihood Estimation in survival studies under progressive interval censoring with random removals, *Journal of Biopharmaceutical Statistics*. 15, 981-991.

Yang, C.ve Tse, S.-K., 2005, Planning accelerated life tests under progressive type-I İnterval censoring with random removals. *Communications in Statistics Simulation And Computation*, 34, 1001-1025.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esra AYDIN ÜNAL
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : ANKARA 1987
Telefon :
Faks :
e-mail : esos_0803@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Y.D.A İncirli Lisesi, Keçiören, Ankara	2005
Üniversite	:	Ankara Üniversitesi, Tandoğan, Ankara	2009
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi, Tandoğan, Ankara	2012
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	Devam ediyor

YABANCI DİL: İngilizce