



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PELL MATRİS DİZİLERİ ve ÖZELLİKLERİ

Hasan Hüseyin GÜLEÇ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Hasan Hüseyin GÜLEÇ

13.06.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

PELL MATRİS DİZİLERİ ve ÖZELLİKLERİ

Hasan Hüseyin GÜLEÇ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2014, 59 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Bu çalışmada, öncelikle $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (s,t)-Pell ve $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (s,t)-Pell Lucas sayı dizileri tanımlanmış ve bu dizilerin temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu sayı dizileri için çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir. Daha sonra, elemanları $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizilerinden oluşan $\{\mathcal{P}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (s,t)-Pell ve $\{\mathcal{Q}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (s,t)-Pell Lucas matris dizileri tanımlanarak, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kısmi toplamları ve bu matris dizilerinin aralarındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur. Son olarak da, bazı tridiagonal matrisler tanımlanmış ve bu matrislerin permanentlerinin (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas sayılarına eşit oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris dizileri, Permanent, Sayı dizileri (s,t)-Pell sayıları, (s,t)-Pell Lucas sayıları.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

PELL MATRIX SEQUENCES and THEIR PROPERTIES

Hasan Huseyin GULEC

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELCUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA

2014, 59 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA
Prof. Dr. Durmus BOZKURT
Prof. Dr. Galip OTURANC
Doç. Dr. Suleyman SOLAK
Advisor Assist. Prof. Dr. Saadet ARSLAN

In this study, firstly (s,t)-Pell $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ and (s,t)-Pell Lucas $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ number sequences are defined and the main properties of these sequences are investigated. In addition, several identities are obtained for these number sequences. Then, by defining (s,t)-Pell $\{\mathcal{P}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ and (s,t)-Pell Lucas $\{\mathcal{Q}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ matrix sequences which have elements of $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ number sequences, respectively, Binet formulas, generating functions, partial sums and the relations among these matrix sequences are emphasized. Finally, some tridiagonal matrices are defined and it is showed that the permanents of these matrices are equal to (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas numbers.

Keywords: Matrix sequences, Number sequences, Permanent, (s,t)-Pell numbers, (s,t)-Pell Lucas numbers.

ÖNSÖZ

"Pell Matris Dizileri ve Özellikleri" adlı bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya, sabır ve ilgileriyle daima yanımda olan, karşılaştığım zorlukları aşarken maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve bu süreçte beni yalnız bırakmayan, sevgili eşim Selcan GÜLEÇ'e ve biricik kızım Melike Mercan GÜLEÇ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hasan Hüseyin GÜLEÇ
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Amaç ve Kapsam 2
1.2. Kaynak Araştırması 2
1.3. Temel Kavramlar 5
1.3.1. Sayı dizileri 5
1.3.2. Üreteç fonksiyonu 9
1.3.3. Matris teorisi ile ilgili bazı tanımlar 10

2. (s,t)-PELL VE (s,t)-PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ **13**

2.1. (s,t)-Pell Sayı Dizisi 13
2.2. (s,t)-Pell Lucas Sayı Dizisi 15
2.3. (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları 17
2.4. (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas Sayı Dizilerinin Binet Formülleri ve Aralarındaki Bağıntılar 19

3. (s,t)-PELL VE (s,t)-PELL LUCAS MATRİS DİZİLERİ **22**

3.1. (s,t)-Pell Matris Dizisi ve Özellikleri 22
3.2. (s,t)-Pell Lucas Matris Dizisi ve Özellikleri 28
3.3. (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas Matris Dizileri Arasındaki Bağıntılar 33

4. BAZI TRİDİAGONAL MATRİSLERİN PERMANENTLERİ **38**

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **46**

KAYNAKLAR **47**

ÖZGEÇMİŞ **50**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

F_n : n. Fibonacci sayısı

L_n : n. Lucas sayısı

P_n : n. Pell sayısı

Q_n : n. Pell-Lucas sayısı

J_n : n. Jacobsthal sayısı

j_n : n. Jacobsthal-Lucas sayısı

m_n : n. Mersenne sayısı

r_n : n. Fermat sayısı

$A \circ B$: A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı

$p_n(s,t)$: n. (s,t) – Pell sayısı

$q_n(s,t)$: n. (s,t) – Pell Lucas sayısı

$\mathcal{P}_n(s,t)$: n. (s,t) – Pell matrisi

$\mathcal{Q}_n(s,t)$: n. (s,t) – Pell Lucas matrisi

1. GİRİŞ

Briç masasında kaç farklı eşleşme yapılabileceğini, belli şartlar altında bir haritanın tamamlanması için kaç renk gerekeceğini, bir filin satranç tahtasında kaç farklı yol izleyebileceğini veya belli bir yolun izlenmesi şartıyla bir kentten diğerine en kısa nasıl gidilebileceğini kim gerçekten umursar? Ama işte, matematik umursar ve hep umursamıştır (Isaac Asimov).

Mantıkla doğrudan ilişki içinde bir bilim olan matematik, akıl yürütme yoluyla sayılar, şekiller vb. somut ve soyut nesne ve olguların özelliklerini ve bunlar arasındaki bağıntıları inceleyen bir temel bilim dalıdır. Düşünsel olarak kavranabilen olgu ve görüntülere ilişkin nicel ilişkileri inceler (Tez, 2011). Ancak bu kavramı bizim için sıradan olmaktan çıkaran şey matematiğin kişide uyandırdığı haz duygusudur. Matematikten duyulan zevk, ilk kez mikroskoba bakıp da daha önce çevremizde her zaman olan ama göremediğimiz şeyleri gördüğümüz anki kadar heyecan verici olabilir. Çocuksu bir hayranlık ve şaşkınlık insanı sarar, bu deneyimi bir kez yaşadıktan sonra bir daha unutamazsınız (Pappas, 2007).

Şimdiye kadar çevremizde hep var olagelmiş ve bizim keşfetmemizi bekleyen belki de en önemli sır evrendeki "altın oran" mucizesidir ve bunu bize kazandıran ünlü matematikçi Fibonacci'dir.

Doğada birbiriyle ilişkisiz canlı veya cansız pek çok yapının belli bir matematik formülüne göre şekillenmiş olması onların özel olarak tasarlanmış olduklarının en açık delillerinden biridir. Altın oran, sanatçıların çok iyi bildikleri ve uyguladıkları bir estetik kuralıdır. Bu kural, estetik mükemmellik manasına gelir ve resim, heykel, mimari gibi alanlarda temel bir ölçü olarak kullanılmaktadır. Sanatçıların taklit ettikleri bu kuralla tasarlanan bitkiler, galaksiler, mikroorganizmalar, kristaller ve canlılar Allah'ın üstün sanatının birer örneğidirler.

Bununla birlikte sayı dizileri, günümüz bilim dünyasında yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayar ile grafik çizimlerinde (Mcllory, 1992), zaman serileri analizinde (Box ve Jenkins, 1970) vb. alanda sıkça kullanılmaktadır. Fizikteki kullanım alanlarından birisi ise, verilen n tane dirençten maksimum verim elde etmek için dirençlerin paralel bağlanması gerektiği tespit edilmiştir. İşte bu bağlama sonucu elde edilen eşdeğer direnç altın orana eşittir (Koshy, 2001).

1.1. Amaç ve Kapsam

Matematik, yer ve zaman sınırlarını aşan üstün yetenekli bir avuç insanın olağanüstü çabaları ile bugünkü düzeyine ulaşmıştır. Matematiğin bu özgün dünyasında sayı dizilerine yeni bir bakış açısıyla yaklaşarak, (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas sayı dizileri ve elemanları bu sayı dizilerinin elemanlarından oluşan (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas matris dizileri tanımlanmıştır. Bu çalışmanın amacı, sayı ve matris dizilerinin temel özelliklerini incelemek ve bazı matris uygulamalarını araştırmaktır.

1.2. Kaynak Araştırması

Sayı dizileri matematikten fiziğe, bilgisayar bilimlerinden güzel sanatlara kadar bir çok bilimsel alandaki modern araştırmalarda karşımıza çıkmaktadır. Günümüzde, lineer rekürans bağıntıları için elde edilen bilgilerin bir araya getirildiği ve sunulduğu çeşitli makaleler ve kitaplar bulunmaktadır (Bicknell, 1975; Lidl ve Niederreiter, 1983; Cerlienco ve ark., 1987; Mignotte, 1989; Myerson ve Poorten, 1995; Mikhalev ve Nechaev, 1996; Koshy, 2001; Stakhov ve Rozin, 2006; Benjamin ve ark., 2008).

Minc (1964) ve (1978) çalışmalarında, $n\times n$ tridiagonal A_n matrisini tüm elemanları 1 olacak şekilde, yani

$$A_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alarak, $perA_n = F_{n+1}$ olduğunu ispatlamıştır.

Strang (1986), $n\times n$ tridiagonal D_n matrisini aşağıdaki gibi tanımlayarak,

$$D_n=\begin{bmatrix} 1 & i & \cdots & 0 \\ i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix}$$

$\det D_n = F_{n+1}$ olduğunu göstermiştir. Böylece, A_n matrisinin permanenti ile D_n matrisinin determinantı aynı sonucu vermektedir. Yani,

$$per\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & i & \cdots & 0 \\ i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Horadam (1965), "*Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*" isimli çalışmasında Horadam dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin genel özelliklerini incelemiştir.

Matris teoride sıkça kullanılan $(0,1)$-matrisleri göz önüne alınarak bu matrislerin determinantı ve permanenti ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Örneğin, Lehmer (1975) çalışmasında, genel bir tridiagonal (üçlü bant) matrisin permanenti ve indirgeme bağıntıları arasındaki bağıntıları elde etmiştir.

Silvester (1979), "*Fibonacci Properties by Matrix Methods*" makalesinde $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bir matris kullanarak, Fibonacci dizisinin matris gösterimini ve bu gösterimi kullanarak Fibonacci dizisinin bazı önemli özelliklerini elde etmiştir.

Horadam (1996), *"Jacobsthal Representation Numbers"* isimli çalışmasında, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını tanımlamış ve bu sayıların önemini, birbirleri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Ayrıca, bu dizilerin bazı özellikleri de elde edilmiştir.

Melham (1999), *"Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers"* isimli çalışmasında, Pell ve Pell-Lucas sayılarının sağladığı bazı eşitlikleri vermiş, Fibonacci ve Pell sayılarını içeren toplam formülleri elde etmiştir.

Kalman ve Mena (2003), çalışmalarında ikinci dereceden rekürans dizileri üzerinde belli şartlar altında Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarını tanımlamışlar ve bu sayıların Binet formülleri ve matris temsilleri ile ilgili inceleme yapmışlardır.

Kılıç ve Taşçı (2006) genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayılarının k-dizilerini tanımlayarak, matris gösterimini yapmışlar ve elde ettikleri formüllerle bu dizinin elemanlarının doğrudan elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Kılıç ve Ark. (2006), genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell sayılarının *k*-dizileri üzerinde çalışmışlar ve bu dizilerin terimlerinin toplamını veren bir algoritma geliştirmişlerdir.

Cerin and Gianella (2007), "*On Sums of Pell Numbers*" isimli çalışmalarında, Pell sayılarının çift ve tek çarpımlarının toplamları, çift ve tek kareleri toplamları, çift, tek ve ardışık toplamlar için açık formüller vermişlerdir.

Falcon ve Plaza (2007), *"On the Fibonacci k-numbers"* isimli çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak *k*-Fibonacci sayı dizisini tanımlamışlar ve bu tanımlanan dizinin, klasik Fibonacci ve Pell sayılarının genelleştirilmesi olduğunu göstermişlerdir.

Civciv ve Türkmen (2008 (a) ve (b)) çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas sayılarının yeni bir matris genellemesini tanımlamış ve bu matris dizilerinin sağladığı özellikleri göstermişlerdir.

Lee ve Cho (2008), Pascal matrisinin, Fibonacci matrisinin ve Pell matrisinin genelleştirmelerinden bahsetmişlerdir. Birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi ile genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisini tanımlamışlar ve bu matrisler arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Pascal matrislerinin, Fibonacci ve Pell matrisleri yardımıyla çarpanlara ayrılabileceğini göstermişlerdir. Üreteç fonksiyonu ve Riordan metodundan bahsederek, bunların çarpanlarını bulmuşlardır.

Gulec ve Taskara (2009), *"On the Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients"* isimli çalışmalarında, Fibonacci sayılarının sağladığı yeni özellikleri araştırmış ve binom katsayılı Fibonacci sayılarının toplam formülleriyle ifadelerini elde etmişlerdir.

Kılıç (2009), genelleştirilmiş Pell (p,i)-sayılarını tanımlamış ve bu sayılar için üreteç matrisini vermiştir. Daha sonra bu sayı dizisinin genelleştirilmiş Binet formüllerini, toplamlarını ve kombinatorik temsillerini de elde etmiş ve bazı matrislerin permanentleri ve toplamları ile genelleştirilmiş Pell (p,i)-sayılarının aralarındaki ilişkileri sunmuştur.

Falcon ve Plaza (2009), "*On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes*" isimli çalışmalarında indisleri aritmetik dizi olan *k*-Fibonacci sayılarının toplamları elde edilmiştir.

Taskara ve Ark. (2010 (a)), "*On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients*" isimli çalışmalarında, yeni bir yolla binom katsayılı Lucas sayılarının bazı yeni özelliklerini elde etmişlerdir.

Taşkara ve Ark. (2010 (b)), Horadam polinomlarının sağladığı yeni cebirsel özellikler bulmuşlar, bu polinomlar için bazı toplamsal formüller elde etmişler ve diğer polinomlar ile aralarındaki ilişkileri araştırmışlardır.

Uslu ve Ark. (2011 (a)), "*The generalized k-Fibonacci and k-Lucas numbers*" isimli çalışmalarında, genelleştirilmiş *k*-Fibonacci dizisini tanımlamış ve bu dizinin özelliklerini incelemişlerdir.

Uslu ve Ark. (2011 (b)), *"Combinatorial Sums of Generalized Fibonacci and Lucas Numbers"* isimli çalışmalarında, Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını, fark denklemleri kullanarak kombinatorik toplamlar şeklinde elde etmişlerdir.

Falcon (2011), "*On the k-Lucas numbers*" isimli çalışmasında, *k*-Lucas dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin özelliklerini incelemiş ve bu dizinin, *k*-Fibonacci sayıları ile arasındaki ilişkilerini sunmuştur.

Gulec ve Ark. (2013 (a)), Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını kullanarak Fibonacci ve Lucas sayılarını elde etmişlerdir. Bununla birlikte binom katsayılı Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için yeni özellikler bulmuşlardır.

1.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmanın temel sonuçlarıyla ilgili diğer bölümlerde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

1.3.1. Sayı dizileri

Bu kısımda, yıllardır bir çok matematikçi tarafından çalışılan ve literatürde önemli bir yeri olan, sabit katsayılı ikinci mertebeden rekürans bağıntısına sahip olan bazı sayı dizilerinin tanımları verilecektir.

Tanım 1.3.1.1. (Vajda, 1989; Koshy, 2001) $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.3.1.1}$$

ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Fibonacci sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Fibonacci sayıları* denir.

(1.3.1.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, Binet formülü olarak adlandırılan $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, n. Fibonacci sayısı elde edilir. Binet formülünden hareketle, $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = 1.618...$ olarak altın orana yakınsadığı görülür.

Tanım 1.3.1.2. (Koshy, 2001) $L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{1.3.1.2}$$

ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Lucas sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Lucas sayıları* denir.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, n. Lucas sayısı $L_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklinde Binet formülü ile ifade edilir ve bu formülden hareketle de $\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$ dır.

Tanım 1.3.1.3. (Horadam, 1971) $P_0 = 0, P_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{1.3.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Pell sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Pell sayıları* denir.

(1.3.1.3) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere, Binet formülü $P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ şeklindedir.

Tanım 1.3.1.4. (Horadam, 1971) $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ $n > 1$ olmak üzere,

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{1.3.1.4}$$

ile tanımlanan $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Pell-Lucas sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Pell-Lucas sayıları* denir.

$\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere, n. Pell-Lucas sayısı $Q_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ şeklindedir.

Tanım 1.3.1.5. (Horadam, 1996) $J_0 = 0, J_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \tag{1.3.1.5}$$

şeklinde tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Jacobsthal sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal sayıları* denir.

(1.3.1.5) ile verilen denklemin karakteristik denklemi $x^2 - x - 2 = 0$ dir. Bu denklemin kökleri $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ olmak üzere, Jacobsthal sayılarının Binet formülü $J_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ şeklinde verilir.

Tanım 1.3.1.6. (Horadam, 1996) $j_0 = 2, j_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} \tag{1.3.1.6}$$

ile tanımlanan $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Jacobsthal-Lucas sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir.

$\alpha = 2$ ve $\beta = -1$ olmak üzere, n. Jacobsthal-Lucas sayısı $j_n = 2^n + (-1)^n$ şeklindedir.

Tanım 1.3.1.7. (Robinson, 1954) $m_0 = 0,\ m_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$m_n = 3m_{n-1} - 2m_{n-2} \tag{1.3.1.7}$$

ile tanımlanan $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Mersenne sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Mersenne sayıları* denir.

n. Mersenne sayısı $m_n = 2^n - 1$ şeklindedir.

Tanım 1.3.1.8. (Robinson, 1954) $r_0 = 2,\ r_1 = 3$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$r_n = 3r_{n-1} - 2r_{n-2} \tag{1.3.1.8}$$

ile tanımlanan $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *Fermat sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Fermat sayıları* denir.

n. Fermat sayısı $r_n = 2^n + 1$ şeklindedir.

Tanım 1.3.1.9. (Koshy, 2001) $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için $F_0(s,t) = 0, F_1(s,t) = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$F_n(s,t) = sF_{n-1}(s,t) + tF_{n-2}(s,t) \tag{1.3.1.9}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *(s,t)-Fibonacci sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *(s,t)-Fibonacci sayıları* denir.

Tanım 1.3.1.10. (Koshy, 2001) $s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki $s > 0$ ve $t \neq 0$ reel sayıları için $L_0(s,t) = 2, L_1(s,t) = s$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$L_n(s,t) = sL_{n-1}(s,t) + tL_{n-2}(s,t) \tag{1.3.1.10}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine, *(s,t)-Lucas sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *(s,t)-Lucas sayıları* denir.

1.3.2. Üreteç fonksiyonu

Tanım 1.3.2.1. Üreteç fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1.3.2.1)$$

şeklinde bir kuvvet serisidir ve $f(x)$'e, (a_n) dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir.

Şimdi, tamsayı dizilerinin terimlerini elde etmekte kullanılan üreteç fonksiyonunu bazı sayı dizileri için verelim.

Kabul edelim ki,

$$F(x) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + F_5 x^5 + \ldots + F_n x^n + \ldots$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)F(x) &= F(x) - xF(x) - x^2F(x)\\ &= F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + F_5 x^5 + \ldots\\ &\quad - F_1 x^2 - F_2 x^3 - F_3 x^4 - F_4 x^5 - F_5 x^6 - \ldots\\ &\quad - F_1 x^3 - F_2 x^4 - F_3 x^5 - F_4 x^6 - F_5 x^7 - \ldots\end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)F(x) = F_1 x &+ (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 +\\ &(F_4 - F_3 - F_2)x^4 + (F_5 - F_4 - F_3)x^5 + \ldots +\\ &(F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})x^{n-1} + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \ldots\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Fibonacci sayılarının tanımı kullanılarak,

$$(1-x-x^2)F(x) = F_1 x = x$$

bulunur. Böylece, Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=\frac{x}{1-x-x^2}$$

olarak elde edilir (Horadam, 1965 (b)).

Benzer şekilde, diğer sayı dizileri içinde üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

- $L(x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n=\frac{2-x}{1-x-x^2}$ (Lucas)
- $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n x^n=\frac{x}{1-2x-x^2}$ (Pell)
- $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n x^n=\frac{2-2x}{1-2x-x^2}$ (Pell-Lucas)
- $J(x)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n x^{n-1}=\left(1-x-2x^2\right)^{-1}$ (Jacobsthal)
- $j(x)=\sum_{n=1}^{\infty}j_n x^{n-1}=(1+4x)\left(1-x-2x^2\right)^{-1}$ (Jacobsthal-Lucas)

1.3.3. Matris teorisi ile ilgili bazı tanımlar

Tanım 1.3.3.1. (Horn & Johnson, 1985) $m\times n$ tipindeki $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri verilsin. A'nın (i,j)-inci elemanı ile B'nin (i,j)-inci elemanının çarpımına A ve B matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir ve $A\circ B$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$A\circ B=[a_{ij}b_{ij}] \tag{1.3.3.1}$$

dir.

Hadamard çarpımının yapılabilmesi için şart, matris toplamına benzer olarak her iki matrisin de aynı mertebeli olması ve aynı indisli elemanlarının çarpımını çarpım matrisinde de aynı indisli elemanı oluşturacak şekilde yazılmasıdır. Buradan A ve B matrislerinin Hadamard çarpımının yapılabilmesi için, matrislerin kare matris olması gerekmediği sonucuna varılır. Bu ise, Hadamard çarpımı ile alışılmış matris çarpımı arasındaki önemli farklardan biridir.

Tanım 1.3.3.2. (Horn & Johnson, 1985) $A=[a_{ij}]$ $n\times n$ kare matris olmak üzere, $i>j+1$ için $a_{ij}=0$ ise, yani

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.3.3.2}$$

formundaki matrise *üst Hessenberg matris* denir. Üst Hessenberg matrisin transpozesi olan matrise de *alt Hessenberg matris* denir.

Tanım 1.3.3.3. (Horn & Johnson, 1985) $A=[a_{ij}]$ $n\times n$ kare matris olmak üzere, $|i-j|>1$ için $a_{ij}=0$ ise, yani

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.3.3.3}$$

şeklindeki hem alt hem de üst Hessenberg matrise, *tridiagonal (üçlü bant) matris* denir.

Tanım 1.3.3.4. (Minc, 1978) $A=[a_{ij}]$ $n\times n$ kare matrisinin *permanenti*, S_n simetrik grup ve σ permütasyon olmak üzere,

$$per(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)} \tag{1.3.3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Permanent artı determinant olarak da bilinmektedir.

Tanım 1.3.3.5. (Brualdi & Gibson, 1977) $A=[a_{ij}]$, satır vektörleri $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ olacak şekildeki $m \times n$ tipindeki matris olsun. Eğer A matrisinin k. sütununda tam olarak iki elemanı sıfırdan farklı, diğer elemanlarının hepsi sıfır ise, A matrisine k. sütuna göre *contraction (büzüşme)* uygulanabilir denir. A matrisinde, $a_{ik} \neq 0 \neq a_{jk}$ ve $i \neq j$ olmak üzere k. sütuna göre *contraction* uygulandığını varsayalım. O halde, A matrisinde i. satır $a_{jk}r_i + a_{ik}r_j$ vektörü ile yer değiştirerek ve j. satır ile k. sütun silinerek $A_{ij:k}$ $(m-1)\times(n-1)$ matrisi oluşturulur. Bu işlem, A matrisinin i. ve j. satırlarıyla k. sütununa göre *contraction* olarak adlandırılır. Eğer A matrisi $a_{ki} \neq 0 \neq a_{kj}$ ve $i \neq j$ olmak üzere k. satıra göre *contraction* yapılabilirse, $A_{k:ij} = [A_{ij:k}^T]^T$ ile belirtilen matrise A matrisinin i. ve j. sütunlarıyla k. satırına göre *contraction*'ı denir.

$n > 1$ için, A matrisi elemanları negatif olmayan tamsayılardan oluşan matris ve B matrisi de, A matrisinden *contraction* ile elde edilen matris olmak üzere,

$$perA = perB \tag{1.3.3.5}$$

dir.

Tanım 1.3.3.6. (Kılıç & Taşçı, 2010) Eğer $perA = \det(A \circ K)$ olacak şekilde $(1,-1)$ elemanlarından oluşan

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.3.6}$$

$n \times n$ matrisi varsa, A matrisine *dönüştürülebilen matris* denir. K matrisine de, A matrisinin *dönüştürücüsü (converter)* denir.

2. (*s*,*t*)-PELL VE (*s*,*t*)-PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde, (s,t)-Pell, (s,t)-Pell Lucas sayı dizileri tanımlanarak, bu diziler için elde edilen özellikler verilecektir.

2.1. (*s*,*t*)-Pell Sayı Dizisi

Tanım 2.1.1. $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için $p_0(s,t)=0, p_1(s,t)=1$ ve $n\geq 2$ olmak üzere,

$$p_n(s,t)=2sp_{n-1}(s,t)+tp_{n-2}(s,t) \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(s,t)-Pell sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *(s,t)-Pell sayıları* denir (Gulec & Taskara, 2012).

(2.1.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2=2sx+t$ olup, bu denklemin kökleri de $x_1=s+\sqrt{s^2+t}$ ve $x_2=s-\sqrt{s^2+t}$ olarak elde edilir. Ayrıca kökler arasında,

$$x_1+x_2=2s,\ x_1-x_2=2\sqrt{s^2+t} \text{ ve } x_1\cdot x_2=-t \tag{2.1.2}$$

bağıntıları sağlanır.

(2.1.1) ile verilen rekürans bağıntısında s ve t'nin bazı değerleri için $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi literatürde yer alan bazı sayı dizilerine indirgenir. Örneğin; $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde,

- $s=\frac{1}{2}, t=1$ için, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacci sayı dizisi,
- $s=t=1$ için, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Pell sayı dizisi,
- $s=\frac{1}{2}, t=2$ için, $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal sayı dizisi,
- $s=\frac{3}{2}, t=-2$ için, $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Mersenne sayı dizisi

elde edilir.

Teorem 2.1.2. x_1 ve x_2, $x^2 = 2sx + t$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$p_n(s,t) = x_1 p_{n-1}(s,t) + x_2^{n-1} \tag{2.1.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.1.2)'deki eşitlikler göz önüne alınarak (2.1.1) denklemi,

$$\begin{aligned} p_n(s,t) &= (x_1 + x_2) p_{n-1}(s,t) - (x_1 x_2) p_{n-2}(s,t) \\ p_n(s,t) - x_1 p_{n-1}(s,t) &= x_2 \left(p_{n-1}(s,t) - x_1 p_{n-2}(s,t) \right) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Yine, $p_{n-1}(s,t)$ sayısı için de benzer işlemler yapılırsa,

$$p_{n-1}(s,t) - x_1 p_{n-2}(s,t) = x_2 \left(p_{n-2}(s,t) - x_1 p_{n-3}(s,t) \right) \tag{2.1.5}$$

bulunur. (2.1.5) denklemi (2.1.4) denkleminin sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$p_n(s,t) - x_1 p_{n-1}(s,t) = x_2^2 \left(p_{n-2}(s,t) - x_1 p_{n-3}(s,t) \right)$$

olur. Bu şekilde indirgeme işlemine devam edilirse,

$$p_n(s,t) = x_1 p_{n-1}(s,t) + \left(p_1(s,t) - x_1 p_0(s,t) \right) x_2^{n-1}$$

ve $p_0(s,t) = 0, p_1(s,t) = 1$ yerine yazılırsa,

$$p_n(s,t) = x_1 p_{n-1}(s,t) + x_2^{n-1}$$

elde edilir. ■

2.2. (*s*,*t*)-Pell Lucas Sayı Dizisi

Tanım 2.2.1. $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için $q_0(s,t)=2, q_1(s,t)=2s$ ve $n\geq 2$ olmak üzere

$$q_n(s,t)=2sq_{n-1}(s,t)+tq_{n-2}(s,t) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(s,t)-Pell Lucas sayı dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *(s,t)-Pell Lucas sayıları* denir (Gulec & Taskara, 2012).

(2.2.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2=2sx+t$ olup, bu denklemin kökleri de $x_1=s+\sqrt{s^2+t}$ ve $x_2=s-\sqrt{s^2+t}$ olarak elde edilir. Ayrıca kökler arasında, $x_1+x_2=2s$, $x_1-x_2=2\sqrt{s^2+t}$ ve $x_1\cdot x_2=-t$ bağıntıları sağlanır.

(2.2.1) ile verilen rekürans bağıntısında *s* ve *t* nin bazı değerleri için $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi literatürde yer alan bazı sayı dizilerine indirgenir. Örneğin; $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde,

- $s=\frac{1}{2}$, $t=1$ için, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lucas sayı dizisi,
- $s=t=1$ için, $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Pell-Lucas sayı dizisi,
- $s=\frac{1}{2}$, $t=2$ için, $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Jacobsthal-Lucas sayı dizisi,
- $s=\frac{3}{2}$, $t=-2$ için, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fermat sayı dizisi

elde edilir.

Teorem 2.2.2. x_1 ve x_2, $x^2=2sx+t$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$q_n(s,t)=x_1\left(q_{n-1}(s,t)-x_2^{n-1}\right)+x_2^n \tag{2.2.2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.1.2)'deki eşitlikler göz önüne alınarak (2.2.1) denklemi,

$$q_n(s,t) = (x_1 + x_2)q_{n-1}(s,t) - (x_1x_2)q_{n-2}(s,t)$$
$$q_n(s,t) - x_1q_{n-1}(s,t) = x_2\left(q_{n-1}(s,t) - x_1q_{n-2}(s,t)\right) \tag{2.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Yine, $q_{n-1}(s,t)$ sayısı için de benzer işlemler yapılırsa,

$$q_{n-1}(s,t) - x_1q_{n-2}(s,t) = x_2\left(q_{n-2}(s,t) - x_1q_{n-3}(s,t)\right) \tag{2.2.4}$$

bulunur. (2.2.4) denklemi (2.2.3) denkleminin sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$q_n(s,t) - x_1q_{n-1}(s,t) = x_2^2\left(q_{n-2}(s,t) - x_1q_{n-3}(s,t)\right)$$

olur. Bu şekilde indirgeme işlemine devam edilirse,

$$q_n(s,t) = x_1q_{n-1}(s,t) + \left(q_1(s,t) - x_1q_0(s,t)\right)x_2^{n-1}$$

ve $q_0(s,t) = 2, q_1(s,t) = 2s$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} q_n(s,t) &= x_1q_{n-1}(s,t) + \left(2s - 2x_1\right)x_2^{n-1} \\ &= x_1q_{n-1}(s,t) + 2sx_2^{n-1} - 2x_1x_2^{n-1} \\ &= x_1q_{n-1}(s,t) + (x_1 + x_2)x_2^{n-1} - 2x_1x_2^{n-1} \\ &= x_1q_{n-1}(s,t) - x_1x_2^{n-1} + x_2^n \end{aligned}$$

olup, buradan

$$q_n(s,t) = x_1\left(q_{n-1}(s,t) - x_2^{n-1}\right) + x_2^n$$

elde edilir. ■

2.3. (*s*,*t*)-Pell ve (*s*,*t*)-Pell Lucas Sayı Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Üreteç fonksiyonları farklı şekillerde elde edilebilir. Bu yöntemlerden biri de, kuvvet serisi yardımıyla üreteç fonksiyonu bulmaktır. O halde,

$$p(x) = p_0x^0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + \ldots + p_nx^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} p_ix^i \tag{2.3.1}$$

dir. (2.3.1) denkleminin her iki tarafını önce $2sx$, daha sonra da tx^2 ile çarpalım. Buradan,

$$2sxp(x) = 2sxp_0 + 2sx^2p_1 + 2sx^3p_2 + 2sx^4p_3 + \ldots + 2sx^{n+1}p_n + \ldots \tag{2.3.2}$$

$$tx^2p(x) = tx^2p_0 + tx^3p_1 + tx^4p_2 + tx^5p_3 + \ldots + tx^{n+2}p_n + \ldots \tag{2.3.3}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi, (2.3.1) eşitliğinden (2.3.2) ve (2.3.3) eşitlikleri çıkartılırsa,

$$(1-2sx-tx^2)p(x) = p_0 + x(p_1 - 2sp_0) + x^2(p_2 - 2sp_1 - tp_0) + x^3(p_3 - 2sp_2 - tp_1) + \ldots$$

olur. Burada,

$p_0 = 0,\ p_1 = 1$ ve $p_{n+1} = 2sp_n + tp_{n-1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(1-2sx-tx^2)p(x) = x$$

olup, buradan da (*s*,*t*)-Pell sayı dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$p(x) = \frac{x}{1-2sx-tx^2} \tag{2.3.4}$$

olarak elde edilir.

(2.3.4) ile verilen $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonunda;

- $s=\frac{1}{2}$, $t=1$ için, $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n$ Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu,
- $s=t=1$ için, $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n x^n$ Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

elde edilir.

Benzer bir metotla (s,t)-Pell Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonunu elde edelim.

$$q(x)=q_0x^0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+\ldots+q_nx^n+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}q_ix^i$$

olsun. $q_0=2$ ve $q_1=2s$ olduğundan,

$$q(x)=2+2sx+\sum_{i=2}^{\infty}q_ix^i$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
q(x)-2-2sx&=\sum_{i=2}^{\infty}q_ix^i\\
&=\sum_{i=2}^{\infty}(2sq_{i-1}+tq_{i-2})x^i\\
&=2s\sum_{i=2}^{\infty}q_{i-1}x^i+t\sum_{i=2}^{\infty}q_{i-2}x^i\\
&=2sx\sum_{i=1}^{\infty}q_ix^i+tx^2\sum_{i=0}^{\infty}q_ix^i\\
&=2sx\left(q(x)-q_0\right)+tx^2q(x)\\
&=2sxq(x)-4sx+tx^2q(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlikten $q(x)$ çekilirse,

$$q(x)=\frac{2-2sx}{1-2sx-tx^2} \tag{2.3.5}$$

eşitliği elde edilir.

(2.3.5) ile verilen $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonunda;

- $s=\frac{1}{2}$, $t=1$ için, $L(x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n$ Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu,
- $s=t=1$ için, $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n x^n$ Pell-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

elde edilir.

2.4. (*s*,*t*)-Pell ve (*s*,*t*)-Pell Lucas Sayı Dizilerinin Binet Formülleri ve Aralarındaki Bağıntılar

Teorem 2.4.1. $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$p_n(s,t)=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2} \tag{2.4.1}$$

$$q_n(s,t)=x_1^n+x_2^n \tag{2.4.2}$$

dir.

İspat. (2.1.3) eşitliğinin her iki tarafını x_2^n ile bölersek,

$$\frac{p_n(s,t)}{x_2^n}=\frac{x_1}{x_2}\frac{p_{n-1}(s,t)}{x_2^{n-1}}+\frac{1}{x_2}$$

olur. $\frac{p_n(s,t)}{x_2^n}=u_n(s,t)$ olsun. Buradan,

$$u_n(s,t)=\frac{x_1}{x_2}u_{n-1}(s,t)+\frac{1}{x_2}$$

şeklinde 1. mertebeden lineer fark denklemi elde edilir. Bu fark denkleminin $u_0(s,t)$ başlangıç değerine karşılık gelen çözüm ise,

$$\begin{aligned}u_n(s,t)&=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n u_0(s,t)+\frac{1}{x_2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^i\\&=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n u_0(s,t)+\frac{1}{x_2}\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n-1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\\&=\frac{1}{x_2^n}\left(x_1^n u_0(s,t)+\frac{1}{x_1-x_2}\left(x_1^n-x_2^n\right)\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $u_n(s,t)=\frac{p_n(s,t)}{x_2^n}$ son eşitlikte yerine yazılarak tekrar düzenlenirse,

$$p_n(s,t)=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}$$

elde edilir.

Benzer işlemler yapılarak,

$$q_n(s,t)=x_1^n+x_2^n$$

olduğu gösterilebilir. ■

Aşağıdaki teorem $\{p_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizileri arasındaki ilişkileri vermektedir.

Teorem 2.4.2. $n \geq 1$ için

- $q_n(s,t) = 2sp_n(s,t) + 2tp_{n-1}(s,t)$ (2.4.3)
- $q_{n+2}^2(s,t) + tq_{n+1}^2(s,t) = 4(s^2+t)p_{2n+3}(s,t)$ (2.4.4)
- $q_{n+2}^2(s,t) + tq_{n+1}^2(s,t) = q_{2n+4}(s,t) + tq_{2n+2}(s,t)$ (2.4.5)
- $q_{2n}(s,t) = p_n(s,t)q_{n+1}(s,t) + tp_{n-1}(s,t)q_n(s,t)$ (2.4.6)

eşitlikleri sağlanır (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. (2.4.3) eşitliğini ispatlamak için (2.2.1) eşitliğinde başlangıç şartlarıyla verilen diziyi ele alalım. Burada $q_1(s,t) = 2s$ başlangıç şartı,

$$q_1(s,t) = 2s = (2s)1 + (2t)0$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $q_1(s,t)$, (s,t)-Pell sayı dizisinin $p_0(s,t)$ ve $p_1(s,t)$ başlangıç şartlarını içerir. Yani,

$$q_1(s,t) = 2s = (2s)p_1(s,t) + (2t)p_0(s,t)$$

olur. Ayrıca, $q_2(s,t) = 4s^2 + 2t$'de aynı şekilde ifade edilebilir. Buradan,

$$q_2(s,t) = 4s^2 + 2t = (2s)(2s) + (2t)1 = (2s)p_2(s,t) + (2t)p_1(s,t)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, $q_3(s,t)$'nin eşiti olan $(2s)p_3(s,t) + (2t)p_2(s,t)$ ifadesi bulunur. Böylece iterasyona devam edilirse, genel terim olan $(2s)p_n(s,t) + (2t)p_{n-1}(s,t)$ ifadesine ulaşılır ki, bu $q_n(s,t)$'nin eşitidir.

(2.4.4), (2.4.5) ve (2.4.6) eşitlikleri de, (2.4.3) eşitliğinin ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

3. (*s,t*)-PELL VE (*s,t*)-PELL LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde, (*s,t*)-Pell ve (*s,t*)-Pell Lucas sayı dizilerinin elemanları yardımıyla oluşturulan (*s,t*)-Pell ve (*s,t*)-Pell Lucas matris dizileri tanımlanarak, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, kısmi toplamları ve sağladığı özellikler verilecektir. Daha sonra da, bu matris dizilerinin aralarındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır.

3.1. (*s,t*)-Pell Matris Dizisi ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için $\mathscr{P}_0(s,t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathscr{P}_1(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 1\\ t & 0\end{pmatrix}$ ve $n\geq 2$ olmak üzere,

$$\mathscr{P}_n(s,t)=2s\mathscr{P}_{n-1}(s,t)+t\mathscr{P}_{n-2}(s,t) \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan matris dizisine $\{\mathscr{P}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(s,t)-Pell matris dizisi* denir (Gulec & Taskara, 2012).

Çalışma boyunca, gösterimde kolaylık olması için $\mathscr{P}_n(s,t)$ ile gösterilen (*s,t*)-Pell matris dizisinin genel terimi, $\mathscr{P}_n$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem *n*. (*s,t*)-Pell matrisi için Binet formülünü vermektedir.

Teorem 3.1.2. (Binet Formülü) x_1 ve x_2 (3.1.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $n\geq 0$ için

$$\mathscr{P}_n=\left(\frac{\mathscr{P}_1-x_2\mathscr{P}_0}{x_1-x_2}\right)x_1^n-\left(\frac{\mathscr{P}_1-x_1\mathscr{P}_0}{x_1-x_2}\right)x_2^n \tag{3.1.2}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. (3.1.1) denkleminin çözümü,

$$\mathcal{P}_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n \tag{3.1.3}$$

olduğundan $\mathcal{P}_0 = c_1 + c_2$ ve $\mathcal{P}_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$ dir. Buradan, $c_1 = \dfrac{\mathcal{P}_1 - x_2 \mathcal{P}_0}{x_1 - x_2}$, $c_2 = \dfrac{\mathcal{P}_1 - x_1 \mathcal{P}_0}{x_1 - x_2}$ olur. Bulunan c_1 ve c_2'ler (3.1.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{P}_n = \left(\frac{\mathcal{P}_1 - x_2 \mathcal{P}_0}{x_1 - x_2} \right) x_1^n - \left(\frac{\mathcal{P}_1 - x_1 \mathcal{P}_0}{x_1 - x_2} \right) x_2^n$$

elde edilir. ■

Aşağıda verilen teorem, (*s*,*t*)-Pell sayı dizisi ile (*s,t*)-Pell matris dizisi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 3.1.3. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} p_{n+1}(s,t) & p_n(s,t) \\ t p_n(s,t) & t p_{n-1}(s,t) \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $p_2(s,t) = 2s$, $p_1(s,t) = 1$ ve $p_0(s,t) = 0$ olduğundan,

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_2(s,t) & p_1(s,t) \\ t p_1(s,t) & t p_0(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, $n = 1$ için iddia doğrudur. Bütün $n = k \in \mathbb{Z}^+$ için (3.1.4) bağıntısı doğru olsun. Şimdi, $n = k + 1$ için de bu ifadenin doğruluğunu gösterelim. Buradan (2.1.1) ve (3.1.1) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k+1} &= 2s\mathcal{P}_k + t\mathcal{P}_{k-1} \\ &= 2s\begin{pmatrix} p_{k+1}(s,t) & p_k(s,t) \\ tp_k(s,t) & tp_{k-1}(s,t)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p_k(s,t) & p_{k-1}(s,t) \\ tp_{k-1}(s,t) & tp_{k-2}(s,t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2sp_{k+1}(s,t)+tp_k(s,t) & 2sp_k(s,t)+tp_{k-1}(s,t) \\ 2stp_k(s,t)+t^2p_{k-1}(s,t) & 2stp_{k-1}(s,t)+t^2p_{k-2}(s,t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{k+2}(s,t) & p_{k+1}(s,t) \\ tp_{k+1}(s,t) & tp_k(s,t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, istenendir. ■

Teorem 3.1.4. (Üreteç Fonksiyonu) $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{P}_k}{x^k} = \frac{1}{x^2-2sx-t}\left(x\mathcal{P}_1+\left(x^2-2sx\right)\mathcal{P}_0\right) - \frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left(x\mathcal{P}_{n+1}+t\mathcal{P}_n\right) \tag{3.1.5}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. Teorem 3.1.2'den,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{P}_k}{x^k} = \left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_1}{x}\right)^k - \left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_2}{x}\right)^k$$

eşitliği yazılır. Sonra bu eşitlikte geometrik dizi tanımı kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{P}_k}{x^k}=\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{x_1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{x_1}{x}}\right)-\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{x_2}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{x_2}{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_1^{n+1}}{x^{n+1}\left(\frac{x-x_1}{x}\right)}\right)-\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_2^{n+1}}{x^{n+1}\left(\frac{x-x_2}{x}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_1^{n+1}}{x-x_1}\right)-\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_2^{n+1}}{x-x_2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left\{\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+1}-x_1^{n+1}\right)\left(x-x_2\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+1}-x_2^{n+1}\right)\left(x-x_1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left\{\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_2\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+2}-x^{n+1}x_2-xx_1^{n+1}+x_1^{n+1}x_2\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\mathcal{P}_1-x_1\mathcal{P}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+2}-x^{n+1}x_1-xx_2^{n+1}+x_2^{n+1}x_1\right)\right\}$$

bulunur. Burada, $x_1+x_2=2s$, $x_1\cdot x_2=-t$ ve (s,t)-Pell matrisi için Binet formülü kullanılarak son eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{P}_k}{x^k}=\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left(x^{n+2}\mathcal{P}_0-x^{n+1}(2s\mathcal{P}_0-\mathcal{P}_1)-x\mathcal{P}_{n+1}-t\mathcal{P}_n\right)$$

olur ve buradan da gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{P}_k}{x^k}=\frac{1}{x^2-2sx-t}\left(x\mathcal{P}_1+\left(x^2-2sx\right)\mathcal{P}_0\right)-\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left(x\mathcal{P}_{n+1}+t\mathcal{P}_n\right)$$

elde edilir. ■

Aşağıda verilen teoremlerde, (s,t)-Pell matris dizisinin toplamsal özellikleri incelenmiştir.

Teorem 3.1.5. $2s+t-1\neq 0$ ve $n\geq 1$ için,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_i=\frac{1}{2s+t-1}\left(\mathcal{P}_n+t\mathcal{P}_{n-1}-\mathcal{P}_1+(2s-1)\mathcal{P}_0\right) \tag{3.1.6}$$

dir.

İspat. (3.1.1) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$-t\mathcal{P}_{i-2}=-\mathcal{P}_i+2s\mathcal{P}_{i-1} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. (3.1.7) eşitliği $i=2,3,4,\ldots,n+1$ için yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-t\mathcal{P}_0&=-\mathcal{P}_2+2s\mathcal{P}_1\\
-t\mathcal{P}_1&=-\mathcal{P}_3+2s\mathcal{P}_2\\
&\vdots\\
-t\mathcal{P}_{n-1}&=-\mathcal{P}_{n+1}+2s\mathcal{P}_n
\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$-t\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_i=(2s-1)\left(\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_3+\ldots+\mathcal{P}_n\right)-\mathcal{P}_{n+1}+2s\mathcal{P}_1 \tag{3.1.8}$$

bulunur. Buradan (3.1.8) eşitliğinin her iki tarafına $(1-2s)\left(\mathcal{P}_0+\mathcal{P}_1\right)$ eklenerek tekrar düzenlenirse,

$$\left(2s+t-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_i=\mathcal{P}_n+t\mathcal{P}_{n-1}-\mathcal{P}_1+(2s-1)\mathcal{P}_0$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.6. $j > m \geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{mi+j} = \frac{1}{x_1^m + x_2^m - (-t)^m - 1}\left(\mathcal{P}_{mn+m+j} + (-t)^m \mathcal{P}_{j-m} - (-t)^m \mathcal{P}_{mn+j} - \mathcal{P}_j\right) \tag{3.1.9}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. $A = \left(\frac{\mathcal{P}_1 - x_2\mathcal{P}_0}{x_1 - x_2}\right), B = \left(\frac{\mathcal{P}_1 - x_1\mathcal{P}_0}{x_1 - x_2}\right)$ olmak üzere, Teorem 3.1.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{mi+j} &= \sum_{i=0}^{n}\left(Ax_1^{mi+j} - Bx_2^{mi+j}\right) \\ &= Ax_1^j \sum_{i=0}^{n} x_1^{mi} - Bx_2^j \sum_{i=0}^{n} x_2^{mi}\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Geometrik dizi tanımından,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{mi+j} &= Ax_1^j\left(\frac{1 - x_1^{m(n+1)}}{1 - x_1^m}\right) - Bx_2^j\left(\frac{1 - x_2^{m(n+1)}}{1 - x_2^m}\right) \\ &= \frac{\left(Ax_1^j - Ax_1^{mn+m+j}\right)\left(1 - x_2^m\right) - \left(Bx_2^j - Bx_2^{mn+m+j}\right)\left(1 - x_1^m\right)}{\left(1 - x_1^m\right)\left(1 - x_2^m\right)}\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte, $x_1 \cdot x_2 = -t$ olduğunu da hatırlayarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_{mi+j} = \frac{1}{x_1^m + x_2^m - (-t)^m - 1}\left(\mathcal{P}_{mn+m+j} + (-t)^m \mathcal{P}_{j-m} - (-t)^m \mathcal{P}_{mn+j} - \mathcal{P}_j\right)$$

elde edilir. ■

3.2. (*s*,*t*)-Pell Lucas Matris Dizisi ve Özellikleri

Tanım 3.2.1. $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için $\mathcal{Q}_0(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 2\\ 2t & -2s\end{pmatrix}$, $\mathcal{Q}_1(s,t)=\begin{pmatrix}4s^2+2t & 2s\\ 2st & 2t\end{pmatrix}$ ve $n\geq 2$ olmak üzere,

$$\mathcal{Q}_n(s,t)=2s\mathcal{Q}_{n-1}(s,t)+t\mathcal{Q}_{n-2}(s,t) \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlanan matris dizisine $\{\mathcal{Q}_n(s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(s,t)-Pell Lucas matris dizisi* denir (Gulec & Taskara, 2012).

Çalışma boyunca, gösterimde kolaylık olması için $\mathcal{Q}_n(s,t)$ ile gösterilen (*s,t*)-Pell Lucas matris dizisinin genel terimi $\mathcal{Q}_n$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem *n*. (*s,t*)-Pell Lucas matrisi için Binet formülünü vermektedir.

Teorem 3.2.2. (Binet Formülü) x_1 ve x_2 (3.2.1) ile verilen eşitliğin karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $n\geq 0$ için

$$\mathcal{Q}_n=\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)x_1^n-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)x_2^n \tag{3.2.2}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. (3.2.1) denkleminin çözümü,

$$\mathcal{Q}_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n \tag{3.2.3}$$

olduğundan $\mathcal{Q}_0=c_1+c_2$ ve $\mathcal{Q}_1=c_1x_1+c_2x_2$ dir. Buradan $c_1=\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}$, $c_2=\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}$ olur. Bulunan c_1 ve c_2'ler (3.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{Q}_n = \left(\frac{\mathcal{Q}_1 - x_2\mathcal{Q}_0}{x_1 - x_2} \right) x_1^n - \left(\frac{\mathcal{Q}_1 - x_1\mathcal{Q}_0}{x_1 - x_2} \right) x_2^n$$

elde edilir. ■

Aşağıda verilen teorem, (*s*,*t*)-Pell Lucas sayı dizisi ile (*s,t*)-Pell Lucas matris dizisi arasındaki bağıntıyı sunmaktadır.

Teorem 3.2.3. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{Q}_n = \begin{pmatrix} q_{n+1}(s,t) & q_n(s,t) \\ tq_n(s,t) & tq_{n-1}(s,t) \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $q_2(s,t) = 4s^2 + 2t$, $q_1(s,t) = 2s$ ve $q_0(s,t) = 2$ olduğundan,

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_2(s,t) & q_1(s,t) \\ tq_1(s,t) & tq_0(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, $n = 1$ için iddia doğrudur. Bütün $n = k \in \mathbb{Z}^+$ için (3.2.4) bağıntısı doğru olsun. Şimdi, $n = k + 1$ için de bu ifadenin doğruluğunu gösterelim. Buradan (2.2.1) ve (3.2.1) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{k+1} &= 2s\mathcal{Q}_k + t\mathcal{Q}_{k-1} \\ &= 2s \begin{pmatrix} q_{k+1}(s,t) & q_k(s,t) \\ tq_k(s,t) & tq_{k-1}(s,t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_k(s,t) & q_{k-1}(s,t) \\ tq_{k-1}(s,t) & tq_{k-2}(s,t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2sq_{k+1}(s,t) + tq_k(s,t) & 2sq_k(s,t) + tq_{k-1}(s,t) \\ 2stq_k(s,t) + t^2q_{k-1}(s,t) & 2stq_{k-1}(s,t) + t^2q_{k-2}(s,t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{k+2}(s,t) & q_{k+1}(s,t) \\ tq_{k+1}(s,t) & tq_k(s,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, istenendir. ■

Teorem 3.2.4. (Üreteç Fonksiyonu) $s^2+t>0$ olacak şekildeki $s>0$ ve $t\neq 0$ reel sayıları için,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{Q}_k}{x^k}=\frac{1}{x^2-2sx-t}\left(x\mathcal{Q}_1+\left(x^2-2sx\right)\mathcal{Q}_0\right)-\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left(x\mathcal{Q}_{n+1}+t\mathcal{Q}_n\right) \tag{3.2.5}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. Teorem 3.2.2'den,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{Q}_k}{x^k}=\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_1}{x}\right)^k-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x_2}{x}\right)^k$$

eşitliği yazılır. Sonra bu eşitlikte geometrik dizi tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathcal{Q}_k}{x^k}&=\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{x_1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{x_1}{x}}\right)-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{x_2}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{x_2}{x}}\right)\\
&=\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_1^{n+1}}{x^{n+1}\left(\frac{x-x_1}{x}\right)}\right)-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_2^{n+1}}{x^{n+1}\left(\frac{x-x_2}{x}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_1^{n+1}}{x-x_1}\right)-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x^{n+1}-x_2^{n+1}}{x-x_2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left\{\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+1}-x_1^{n+1}\right)\left(x-x_2\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+1}-x_2^{n+1}\right)\left(x-x_1\right)\right\}\\
&=\frac{1}{x^n\left(x^2-2sx-t\right)}\left\{\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+2}-x^{n+1}x_2-xx_1^{n+1}+x_1^{n+1}x_2\right)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)\left(x^{n+2}-x^{n+1}x_1-xx_2^{n+1}+x_2^{n+1}x_1\right)\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $x_1 + x_2 = 2s$, $x_1 \cdot x_2 = -t$ ve (s,t)-Pell Lucas matrisi için Binet formülü kullanılarak son eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathcal{Q}_k}{x^k} = \frac{1}{x^n\left(x^2 - 2sx - t\right)}\left(x^{n+2}\mathcal{Q}_0 - x^{n+1}(2s\mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_1) - x\mathcal{Q}_{n+1} - t\mathcal{Q}_n\right)$$

olur ve buradan da gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathcal{Q}_k}{x^k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t}\left(x\mathcal{Q}_1 + \left(x^2 - 2sx\right)\mathcal{Q}_0\right) - \frac{1}{x^n\left(x^2 - 2sx - t\right)}\left(x\mathcal{Q}_{n+1} + t\mathcal{Q}_n\right)$$

elde edilir. ■

Aşağıda verilen teoremlerde, (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin toplamsal özellikleri incelenmiştir.

Teorem 3.2.5. $2s + t - 1 \neq 0$ ve $n \geq 1$ için,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{Q}_i = \frac{1}{2s + t - 1}\left(\mathcal{Q}_n + t\mathcal{Q}_{n-1} - \mathcal{Q}_1 + (2s-1)\mathcal{Q}_0\right) \tag{3.2.6}$$

dir.

İspat. (3.2.1) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$-t\mathcal{Q}_{i-2} = -\mathcal{Q}_i + 2s\mathcal{Q}_{i-1} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.2.7) eşitliği $i = 2,3,4,\ldots,n+1$ için yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-t\mathcal{Q}_0 &= -\mathcal{Q}_2 + 2s\mathcal{Q}_1 \\
-t\mathcal{Q}_1 &= -\mathcal{Q}_3 + 2s\mathcal{Q}_2 \\
&\vdots \\
-t\mathcal{Q}_{n-1} &= -\mathcal{Q}_{n+1} + 2s\mathcal{Q}_n
\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$-t\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{Q}_i=(2s-1)\left(\mathcal{Q}_2+\mathcal{Q}_3+\ldots+\mathcal{Q}_n\right)-\mathcal{Q}_{n+1}+2s\mathcal{Q}_1 \tag{3.2.8}$$

bulunur. Buradan (3.2.8) eşitliğinin her iki tarafına $(1-2s)\left(\mathcal{Q}_0+\mathcal{Q}_1\right)$ eklenerek tekrar düzenlenirse,

$$\left(2s+t-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{Q}_i=\mathcal{Q}_n+t\mathcal{Q}_{n-1}-\mathcal{Q}_1+(2s-1)\mathcal{Q}_0$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2.6. $j>m\geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\mathcal{Q}_{mi+j}=\frac{1}{x_1^m+x_2^m-(-t)^m-1}\left(\mathcal{Q}_{mn+m+j}+(-t)^m\mathcal{Q}_{j-m}-(-t)^m\mathcal{Q}_{mn+j}-\mathcal{Q}_j\right) \tag{3.2.9}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. $A=\left(\dfrac{\mathcal{Q}_1-x_2\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right), B=\left(\dfrac{\mathcal{Q}_1-x_1\mathcal{Q}_0}{x_1-x_2}\right)$ olmak üzere, Teorem 3.2.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\mathcal{Q}_{mi+j}&=\sum_{i=0}^{n}\left(Ax_1^{mi+j}-Bx_2^{mi+j}\right)\\&=Ax_1^j\sum_{i=0}^{n}x_1^{mi}-Bx_2^j\sum_{i=0}^{n}x_2^{mi}\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Geometrik dizi tanımından,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{mi+j} = Ax_1^j \left(\frac{1-x_1^{m(n+1)}}{1-x_1^m} \right) - Bx_2^j \left(\frac{1-x_2^{m(n+1)}}{1-x_2^m} \right)$$
$$= \frac{\left(Ax_1^j - Ax_1^{mn+m+j} \right)\left(1-x_2^m\right) - \left(Bx_2^j - Bx_2^{mn+m+j} \right)\left(1-x_1^m\right)}{\left(1-x_1^m\right)\left(1-x_2^m\right)}$$

olur. Bu son eşitlikte, $x_1 \cdot x_2 = -t$ olduğunu da hatırlayarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{Q}_{mi+j} = \frac{1}{x_1^m + x_2^m - (-t)^m - 1}\left(\mathcal{Q}_{mn+m+j} + (-t)^m \mathcal{Q}_{j-m} - (-t)^m \mathcal{Q}_{mn+j} - \mathcal{Q}_j \right)$$

elde edilir. ■

3.3. (*s*,*t*)-Pell ve (*s*,*t*)-Pell Lucas Matris Dizileri Arasındaki Bağıntılar

Bu bölümde, (*s*,*t*)-Pell ve (*s*,*t*)-Pell Lucas matris dizilerinin sağladığı diğer özellikler ve bu iki matris dizisi arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Teorem 3.3.1. $m,n \in \mathbb{Z}^+$ için,

- $\mathcal{P}_m \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m+n}$ (3.3.1)
- $\mathcal{Q}_m \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_n \mathcal{Q}_m$ (3.3.2)
- $\mathcal{Q}_1 \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{n+1}$ (3.3.3)
- $\mathcal{Q}_n \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{n+1}$ (3.3.4)
- $\mathcal{P}_n \mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{Q}_{2n+1}$ (3.3.5)

eşitlikleri sağlanır (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. Teorem 3.1.3, Teorem 3.2.3, matris çarpımı ya da tümevarım metodu kullanılarak ispatlar kolayca yapılabilir. ■

Teorem 3.3.2. $m,n \in \mathbb{Z}^+$ için,

- $\mathcal{Q}_n = 2s\mathcal{P}_n + 2t\mathcal{P}_{n-1}$ (3.3.6)
- $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_{n+1} + t\mathcal{P}_{n-1}$ (3.3.7)
- $\mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_n = 4(s^2+t)\mathcal{P}_{m+n}$ (3.3.8)
- $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n+2} + t\mathcal{P}_n$ (3.3.9)
- $\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m = 2s\mathcal{Q}_{m+n-2} + t^2\mathcal{P}_{m+n-4}$, $(m+n \geq 4)$ (3.3.10)

eşitlikleri sağlanır (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. Önce (3.3.6) ve (3.3.9) eşitliklerinin ispatı yapılacaktır. (3.3.7), (3.3.8) ve (3.3.10) eşitlikleri de benzer şekilde gösterilebilir.

(3.3.6) eşitliğinin sağ tarafını alarak ve Teorem 3.1.3'ü kullanarak,

$$2s\mathcal{P}_n + 2t\mathcal{P}_{n-1} = 2s\begin{pmatrix} p_{n+1}(s,t) & p_n(s,t) \\ tp_n(s,t) & tp_{n-1}(s,t) \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} p_n(s,t) & p_{n-1}(s,t) \\ tp_{n-1}(s,t) & tp_{n-2}(s,t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2sp_{n+1}(s,t) + 2tp_n(s,t) & 2sp_n(s,t) + 2tp_{n-1}(s,t) \\ t\left(2sp_n(s,t) + 2tp_{n-1}(s,t)\right) & t\left(2sp_{n-1}(s,t) + 2tp_{n-2}(s,t)\right) \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. (2.4.3) eşitliğinden,

$$2s\mathcal{P}_n + 2t\mathcal{P}_{n-1} = \begin{pmatrix} q_{n+1}(s,t) & q_n(s,t) \\ tq_n(s,t) & tq_{n-1}(s,t) \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_n$$

olur ki, istenendir.

Şimdi de, (3.3.9) eşitliğinin sol tarafını alarak ve Teorem 3.1.3'ü kullanarak,

$$\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} 4s^2+2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n+1}(s,t) & p_n(s,t) \\ tp_n(s,t) & tp_{n-1}(s,t) \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada matris çarpımı yapılır ve eşitlik düzenlenirse,

$$\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} p_{n+3}(s,t) & p_{n+2}(s,t) \\ tp_{n+2}(s,t) & tp_{n+1}(s,t) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p_{n+1}(s,t) & p_n(s,t) \\ tp_n(s,t) & tp_{n-1}(s,t) \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{P}_{n+2} + t\mathcal{P}_n$$

olur. ■

Teorem 3.3.3. $m,n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{Q}_{n+1}\mathcal{P}_m = \mathcal{Q}_{m+n+1} \tag{3.3.11}$$

$$\mathcal{Q}_{n+1}^m = \mathcal{Q}_1^m\mathcal{P}_{mn} \tag{3.3.12}$$

dir (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. (3.3.11) eşitliğinin sol tarafını alarak ve (3.3.3) eşitliğini kullanarak,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{P}_m\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n$$

eşitliği bulunur. Buradan (3.3.6) eşitliğinden,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{P}_m(2s\mathcal{P}_1 + 2t\mathcal{P}_0)\mathcal{P}_n$$

elde edilir. Şimdi, (3.3.1) eşitliğinden

$$\mathcal{P}_m\mathcal{Q}_{n+1} = 2s\mathcal{P}_{n+m+1} + 2t\mathcal{P}_{n+m}$$
$$= 2s\mathcal{P}_1\mathcal{P}_{n+m} + 2t\mathcal{P}_{n+m}$$
$$= (2s\mathcal{P}_1 + 2t\mathcal{P}_0)\mathcal{P}_{n+m}$$

olur. Dahası (3.3.6) ve (3.3.3) eşitliğinden,

$$\mathcal{P}_m\mathcal{Q}_{n+1} = \underbrace{(2s\mathcal{P}_1 + 2t\mathcal{P}_0)}_{\mathcal{Q}_1}\underbrace{\mathcal{P}_{n+m}}_{\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m}$$
$$= \mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m$$
$$= \mathcal{Q}_{n+1}\mathcal{P}_m$$

bulunur. Buradan da (3.3.5) eşitliğinden,

$$\mathcal{P}_m \mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{Q}_{m+n+1}$$

olduğu açıktır.

(3.3.12) eşitliğini ispatlamak için m üzerinden tümevarım kullanılacaktır. $m = 1$ için (3.3.3) eşitliğinden ifadenin doğruluğu görülmektedir. Varsayalım ki, bütün $m = k \in \mathbb{Z}^+$ için eşitlik doğru olsun. Yani,

$$\mathcal{Q}_{n+1}^k = \mathcal{Q}_1^k \mathcal{P}_{kn}$$

doğru olsun. Şimdi, $m = k+1$ için de bu ifadenin doğruluğunu gösterelim. Bu son eşitliğin her iki tarafını da sağdan $\mathcal{Q}_{n+1}$ ile çarparsak,

$$\mathcal{Q}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{Q}_1^k \mathcal{P}_{kn} \mathcal{Q}_{n+1}$$

olur. Buradan (3.3.3) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{n+1}^{k+1} &= \mathcal{Q}_1^k \mathcal{P}_{kn} \mathcal{Q}_1 \mathcal{P}_n \\ &= \mathcal{Q}_1^k \mathcal{Q}_1 \mathcal{P}_{kn} \mathcal{P}_n \\ &= \mathcal{Q}_1^{k+1} \mathcal{P}_{kn} \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

olur. Buradan da (3.3.1) eşitliği kullanılarak,

$$\mathcal{Q}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{Q}_1^{k+1} \mathcal{P}_{(k+1)n}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3.4. $m,n \geq 0$ ve $n \geq r$ için,

- $\mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} = \mathcal{P}_n^2$ (3.3.13)
- $\mathcal{P}_m\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_{m+1}\mathcal{P}_n$ (3.3.14)
- $\mathcal{Q}_{n-r}\mathcal{Q}_{n+r} = \mathcal{Q}_n^2$ (3.3.15)
- $\mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{Q}_{m+1}\mathcal{Q}_n$ (3.3.16)

eşitlikleri sağlanır (Gulec & Taskara, 2012).

İspat. (3.3.13) ve (3.3.16) eşitliklerinin ispatı yapılacaktır. (3.3.14) ve (3.3.15) eşitliklerinin ispatı da benzer şekilde gösterilebilir.

$A = \left(\dfrac{\mathcal{P}_1 - x_2\mathcal{P}_0}{x_1 - x_2} \right)$, $B = \left(\dfrac{\mathcal{P}_1 - x_1\mathcal{P}_0}{x_1 - x_2} \right)$ olmak üzere, Teorem 3.1.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} - \mathcal{P}_n^2 &= \left(Ax_1^{n-r} - Bx_2^{n-r} \right)\left(Ax_1^{n+r} - Bx_2^{n+r} \right) - \left(Ax_1^n - Bx_2^n \right)^2 \\ &= ABx_1^{n-r}x_2^{n-r}\left(2x_1^r x_2^r - x_1^{2r} - x_2^{2r} \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$\mathcal{P}_{n-r}\mathcal{P}_{n+r} = \mathcal{P}_n^2$$

bulunur.

(3.3.16) eşitliğinin ispatı için (3.3.8) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_{n+1} &= 4(s^2 + t)\mathcal{P}_{m+n+1} \\ &= \mathcal{Q}_{m+1}\mathcal{Q}_n \end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. BAZI TRİDİAGONAL MATRİSLERİN PERMANENTLERİ

Bu bölümde, bazı tridiagonal matrisler tanımlanarak permanentlerinin ve bu matrislerin (1.3.3.6) eşitliği ile verilen matrisle Hadamard çarpımlarının determinantlarının (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas sayılarına eşit oldukları gösterilecektir.

Lemma 4.1. (Kılıç & Taşçı, 2007) $C_1(n)$, $n\times n$ tridiagonal matrisi

$$C_1(n)=\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & & \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & & \\ & c_{3,2} & c_{3,3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ & & & c_{n,n-1} & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, $C_1(n)$ matrisinin birbirini izleyen permanentleri sırasıyla,

$$perC_1(1)=c_{1,1}$$
$$perC_1(2)=c_{1,1}c_{2,2}+c_{1,2}c_{2,1}$$
$$perC_1(n)=c_{n,n}perC_1(n-1)+c_{n-1,n}c_{n,n-1}perC_1(n-2)$$

şeklindedir.

Şimdi, $G_n(s,t)$ ile gösterilen aşağıdaki matrisi tanımlayalım.

$(1,2s,t)$ elemanlarından oluşan $n\times n$ tridiagonal matrisi,

$$G_n(s,t)=\begin{cases} 2s, & j=i \\ t, & j=i+1 \\ 1, & j=i-1 \\ 0, & aksi\,halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Yani,

$$G_n(s,t)=\begin{bmatrix} 2s & t & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

olur.

Teorem 4.2. $p_n(s,t)$, *n*. (*s,t*)-Pell sayısı olmak üzere,

$$perG_n(s,t)=perG_n^{n-2}(s,t)=p_{n+1}(s,t)$$

dir (Gulec & Taskara, 2013 (b)).

İspat. $1\le r\le n-2$ için $G_n^r(s,t)$, $G_n(s,t)$ matrisinin *r*. *contraction* uygulanmış hali olsun. $G_n(s,t)$ matrisinin ilk sütununa göre *contraction* uygulanırsa,

$$G_n^1(s,t)=\begin{bmatrix} 4s^2+t & 2st & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

olur. $G_n^1(s,t)$ matrisinde $p_3(s,t)=4s^2+t$, $tp_2(s,t)=2st$ olduğundan,

$$G_n^1(s,t)=\begin{bmatrix} p_3(s,t) & tp_2(s,t) & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $G_n^1(s,t)$ matrisinde tekrar birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$G_n^2(s,t)=\begin{bmatrix} 8s^3+4st & 4s^2t+t^2 & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

elde edilir. $G_n^2(s,t)$ matrisinde $p_4(s,t)=8s^3+4st$, $tp_3(s,t)=4s^2t+t^2$ olduğu göz önüne alınarak,

$$G_n^2(s,t)=\begin{bmatrix} p_4(s,t) & tp_3(s,t) & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. $3 \le r \le n-4$ için *r. contraction* uygulanırsa,

$$G_n^r(s,t)=\begin{bmatrix} p_{r+2}(s,t) & tp_{r+1}(s,t) & & & 0 \\ 1 & 2s & t & & \\ & 1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse,

$$G_n^{n-3}(s,t)=\begin{bmatrix} p_{n-1}(s,t) & tp_{n-2}(s,t) & 0 \\ 1 & 2s & t \\ 0 & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

olup, $G_n^{n-3}(s,t)$ matrisinde de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$G_n^{n-2}(s,t)=\begin{bmatrix} 2sp_{n-1}(s,t)+tp_{n-2}(s,t) & tp_{n-1}(s,t) \\ 1 & 2s \end{bmatrix}$$

bulunur. (s,t)-Pell sayı dizisi tanımından,

$$G_n^{n-2}(s,t)=\begin{bmatrix} p_n(s,t) & tp_{n-1}(s,t) \\ 1 & 2s \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da (1.3.3.5) eşitliğinden,

$$perG_n(s,t)=perG_n^{n-2}(s,t)=2sp_n(s,t)+tp_{n-1}(s,t)=p_{n+1}(s,t)$$

elde edilir. ■

Şimdi de, $H_n(s,t)$ ile gösterilen aşağıdaki matrisi tanımlayalım. Elemanları $(1,2s,t)$ olan $n\times n$ tridiagonal matrisi, $h_{12}=2$ olmak üzere,

$$H_n(s,t)=\begin{cases} 2s, & j=i \\ t, & j=i-1 \\ 1, & j=i+1 \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Yani,

$$H_n(s,t)=\begin{bmatrix} 2s & 2 & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

olur.

Teorem 4.3. $q_n(s,t)$, n. (s,t)-Pell Lucas sayısı olmak üzere,

$$perH_n(s,t) = perH_n^{n-2}(s,t) = q_n(s,t)$$

dir (Gulec & Taskara, 2013 (b)).

İspat. $1 \le r \le n-2$ için $H_n^r(s,t)$, $H_n(s,t)$ matrisinin r. *contraction* uygulanmış hali olsun. $H_n(s,t)$ matrisinin ilk sütununa göre *contraction* uygulanırsa,

$$H_n^1(s,t) = \begin{bmatrix} 4s^2+2t & 2s & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix}$$

olur. $H_n^1(s,t)$ matrisinde $q_2(s,t) = 4s^2+2t$, $q_1(s,t) = 2s$ olduğundan,

$$H_n^1(s,t) = \begin{bmatrix} q_2(s,t) & q_1(s,t) & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $H_n^1(s,t)$ matrisinde tekrar birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$H_n^2(s,t) = \begin{bmatrix} 8s^3+6st & 4s^2+2t & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix}$$

elde edilir. $H_n^2(s,t)$ matrisinde $q_3(s,t)=8s^3+6st$, $q_2(s,t)=4s^2+2t$ olduğu göz önüne alınarak,

$$H_n^2(s,t)=\begin{bmatrix} q_3(s,t) & q_2(s,t) & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. $3 \le r \le n-4$ için *r. contraction* uygulanırsa,

$$H_n^r(s,t)=\begin{bmatrix} q_{r+1}(s,t) & q_r(s,t) & & & 0 \\ t & 2s & 1 & & \\ & t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & t & 2s \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde devam edilecek olursa,

$$H_n^{n-3}(s,t)=\begin{bmatrix} q_{n-2}(s,t) & q_{n-3}(s,t) & 0 \\ t & 2s & 1 \\ 0 & t & 2s \end{bmatrix}$$

olup, $H_n^{n-3}(s,t)$ matrisinde de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$H_n^{n-2}(s,t)=\begin{bmatrix} 2sq_{n-2}(s,t)+tq_{n-3}(s,t) & q_{n-2}(s,t) \\ t & 2s \end{bmatrix}$$

bulunur. (*s,t*)-Pell Lucas sayı dizisi tanımından,

$$H_n^{n-2}(s,t)=\begin{bmatrix} q_{n-1}(s,t) & q_{n-2}(s,t) \\ t & 2s \end{bmatrix}$$

olur. Buradan da (1.3.3.5) eşitliğinden,

$$perH_n(s,t) = perH_n^{n-2}(s,t) = 2sq_{n-1}(s,t) + tq_{n-2}(s,t) = q_n(s,t)$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 için Lemma 4.1'den yararlanarak farklı bir şekilde ispat yapılabilir. O halde, Teorem 4.3'ün ispatı için;

$$\begin{aligned}
perH_1(s,t) &= 2s = q_1(s,t) \\
perH_2(s,t) &= 2s2s + 2t = 2sq_1(s,t) + tq_0(s,t) = q_2(s,t) \\
perH_3(s,t) &= 2sq_2(s,t) + tq_1(s,t) = q_3(s,t) \\
&\vdots \\
perH_n(s,t) &= 2sq_{n-1}(s,t) + tq_{n-2}(s,t) = q_n(s,t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Teorem 4.2'nin de ispatı yapılabilir.

Ayrıca, yukarıdaki teoremlerden yararlanarak Hadamard çarpımı için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(1.3.3.6) eşitliğiyle verilen,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrisini alalım. Buradan sırasıyla $G_n(s,t) \circ K$ ve $H_n(s,t) \circ K$ matrisleri,

$$G_n(s,t) \circ K = \begin{bmatrix} 2s & t & & & 0 \\ -1 & 2s & t & & \\ & -1 & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & & & -1 & 2s \end{bmatrix}$$

ve

$$H_n(s,t)\circ K=\begin{bmatrix} 2s & 2 & & & 0 \\ -t & 2s & 1 & & \\ & -t & 2s & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & -t & 2s \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan da,

$$\det(G_n(s,t)\circ K)=perG_n(s,t)=p_{n+1}(s,t)$$

ve

$$\det(H_n(s,t)\circ K)=perH_n(s,t)=q_n(s,t)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas sayı dizileri tanımlanmış, bu sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve sağladığı diğer özellikler üzerinde durulmuştur. Daha sonra, tanımlanan bu sayı dizilerinin elemanları kullanılarak oluşturulan (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas matris dizileri tanımlanmış ve matris cebiri kullanılarak ilgili birçok özellik elde edilmiştir. Çalışmanın içeriğinden, tanımlanan bu sayı dizilerinin literatürde iyi bilinen Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Mersenne ve Fermat sayı dizilerinin genellemesi oldukları görülmektedir.

Farklı rekürans bağıntısına sahip sayı dizileri kullanılarak bazı özel matris dizileri tanımlanıp, bu dizilerin farklı özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Benjamin, A. T., Plott, S. S. and Sellers, J. A., 2008, Tiling proofs of recent sum identities involving Pell numbers, *Annals of Combinatorics*, 12, 271-278.

Bicknell, M., 1975, A Primer on The Pell Sequence and Related Sequences, *Fibonacci Quarterly,* 13, 345-349.

Box, G. E., Jenkins, G. M., 1970, *Times series analysis*, Forecasting and control, Holden-day, San Francisco.

Brualdi, R. A., Gibson, P. M., 1977, Convex polyhedra of Doubly Stochastic matrices I: Applications of the Permanent Function, *J. Combin. Theory A*, 194-230.

Cerin, Z., Gianella, G. M., 2007, On sums of Pell numbers, *Accad. Sc. Torino-Atti Sci. Fis.,* 141, 23-31.

Cerlienco, L., Mignotte, M. and Piras, F., 1987, Suites recurrentes linearies: proprietes algebriques et aritmetiques, *Enseign Math.*, 33 (2), 67-108.

Civciv, H. and Türkmen, R., 2008 (a), On the (s,t)-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 87, 161-173.

Civciv, H. and Türkmen, R., 2008 (b), Notes on the (s,t)-Lucas and Lucas matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 89, 271-285.

Falcon, S., Plaza A., 2007, On the Fibonacci *k*-numbers, *Chaos, Solitons and Fractals,* 32, 1615-1624.

Falcon, S., Plaza A., 2009, On *k*-Fibonacci numbers of arithmetic indexes, *Applied Mathematics and Computation,* 208, 180-185.

Falcon, S., 2011, On the *k*-Lucas numbers, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences,* 6 (21), 1039-1050.

Gulec, H. H. and Taskara, N., 2009, On the Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4 (25), 1251-1256.

Gulec, H. H., Taskara, N., 2012, On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas sequences and their matrix representations, *Applied Mathematics Letters*, 25, 1554–1559.

Gulec, H. H., Taskara, N., Uslu, K., 2013 (a), A new approach to generalized Fibonacci and Lucas numbers with binomial coefficients, *Applied Mathematics and Computation,* 220, 482–486.

Gulec, H. H. and Taskara, N., 2013 (b), On the properties of some tridiagonal matrices with (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas numbers, *4. International Conference on Matrix Analysis and Applications (ICMAA2013)*, Konya, Turkey, 15.

Horadam, A. F., 1965 (a), Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *The Fibonacci Quarterly,* 3, 161-176.

Horadam A. F., 1965 (b), Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, *Duke Math. J.*, 32, 437-446.

Horadam, A. F., 1971, Pell identities, *The Fibonacci Quarterly,* 9 (3), 245-252, 263.

Horadam, A. F., 1996, Jacobsthal representation numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 34, 40-54.

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge University Press*.

Kalman, D., Mena, R., 2003, The Fibonacci Numbers-Exposed, *Mathematics Magazine*, 76 (3), 167-181.

Kılıç, E. and Taşçı, D., 2006, The Generalized Binet Formula, Representation and Sum of the Generalized Order-*k* Pell Numbers, *Taiwanese J. Math.*, 10 (6), 1661-1670.

Kılıç, E., Altınkaynak, B. and Taşçı, D., 2006, On the Computing of the Generalized Order-*k* Pell Numbers in log time, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 511-515.

Kılıç, E., 2009, The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums, *Chaos, Solitions & Fractals*, 40, 2047-2063.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2010, Negatively subscripted Fibonacci and Lucas numbers and their complex factorizations, *Ars Combinatoria*, 275-288.

Kilic, E. and Tasci, D., 2007, On the permanents of some tridiagonal matrices with applications to the Fibonacci and Lucas numbers, *Rocky Mountain J. Math.*, 37 (6), 1953-1969.

Koshy T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *John Wiley & Sons*, New York.

Lee, G. Y., Cho, S. H., 2008, The Generalized Pascal Matrix via the Generalized Fibonacci Matrix and the Generalized Pell Matrix, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 45 (2), 479-491.

Lehmer, D. H., 1975, Fibonacci and related sequences in periodic tridiagonal matrices, *Fibonacci Quarterly*, (13), 150-158.

Lidl, R. and Niederreiter, H., 1983, Finite Fields, *Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program*, Reading, MA.

Mcllroy, M. D., 1992, Number theory in computer graphics, the unreasonable effectiveness of number theory (Orono, M.E., 1991), *Amer. Math. Soc. Providence*, RI, 105-121.

Melham, R., 1999, Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers, *Portugaliae Mathematica*, 56 (3), 309-317.

Mignotte, M., 1989, Proprietes arithmetiques des suites recurrentes lineaires, *Theorie des nombres, Annee 1988/89, Fasc. 1, Univ. Franche-Comte. Besancon*, 30.

Mikhalev, A. V. and Nechaev, A. A., 1996, Linear recurring sequences over modules, *Acta Appl. Math*., 42 (2), 161-202.

Minc, H., 1964, Permanents of (0,1) -Circulants, *Canad. Math. Bull*., 7 (2), 253-263.

Minc, H., 1978, Permanents, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 6*, *Addison-Wesley Publishing Comp*., *Reading, Mass*., 119-127.

Myerson, G. and Poorten, A. J., 1995, Some problems concerning recurrence sequences, *Amer. Math. Monthly*, 102 (8), 698-705.

Pappas, T., 2007, Yaşayan Matematik, *Doruk Yayımcılık*, Cağaloğlu, İstanbul, 11-12.

Robinson, R. M., 1954, Mersenne and Fermat Numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 5, 842-846.

Silvester, J. R., 1979, Fibonacci Properties by Matrix Methods, *Mathematical Gazette*, (63), 188-191.

Stakhov, A. and Rozin, B., 2006, Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers, *Chaos, Solitions & Fractals,* 27 (5), 1162-77.

Strang, G., 1986, Introduction to Applied mathematics, *Wellesley-Cambridge Press*, Wellesley, MA, 1-750.

Taskara, N., Uslu, K., Gulec, H. H., 2010 (a), On the properties of Lucas numbers with binomial coefficients, *Applied Mathematics Letters,* 23, 68-72.

Taşkara, N., Uslu, K., Güleç, H. H., 2010 (b), The Algebraic Properties of Horadam Polynomials, *Selçuk J. Appl. Math. Special Issue,* 73-80.

Tez, Z., 2011, Matematiğin Kültürel Tarihi, *Doruk Yayımcılık*, Topkapı, İstanbul, 11.

Uslu, K., Taskara, N., Kose, H., 2011 (a), The generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers, *Ars Combinatoria*, 99, 25-32.

Uslu, K., Taskara, N., Gulec, H. H., 2011 (b), Combinatorial Sums of Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, *Ars Combinatoria*, 99, 139-147.

Vajda S., 1989, Fibonacci and Lucas and The Golden Section, *Ellis Horwood Limited*, Chichester, England.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan Hüseyin GÜLEÇ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : KONYA / 25.08.1982
Telefon : 05053451099
Faks : -
e-mail : hhgulec@konya.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Adı	İlçe	İl	Bitirme Yılı
Lise	Enis Şanlıoğlu (YDA)	Seydişehir	Konya	2000
Üniversite	Selçuk	Selçuklu	Konya	2005
Yüksek Lisans	Selçuk	Selçuklu	Konya	2007
Doktora	Selçuk	Selçuklu	Konya	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2007-2008	MEB	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Selçuk Üniversitesi	Öğretim Elemanı
2009-2013	Selçuk Üniversitesi	Öğretim Görevlisi
2013-	Necmettin Erbakan Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

UZMANLIK ALANI : Sayılar Teorisi, Matris Teorisi

YABANCI DİLLER : İngilizce

YAYINLAR

1. **Hasan Huseyin Gulec** and Necati Taskara, 2013, On the properties of some tridiagonal matrices with (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas numbers, *4. International Conference on Matrix Analysis and Applications (ICMAA2013)*, Konya, Turkey, 15 (Doktora tezinden yapılmıştır).

2. **Hasan Huseyin Gulec**, Necati Taskara, 2012, On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas sequences and their matrix representations, *Applied Mathematics Letters*, 25, 1554-1559 (Doktora tezinden yapılmıştır).

3. **Hasan Huseyin Gulec** and Necati Taskara, 2011, The Construction of Fibonacci Numbers in Terms of Binomial Coefficients, *The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society (ICJMS'2011)*, Konya, Turkey, 21 (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).

4. **H. H. Gulec** and N. Taskara, 2009, On the Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 4 (25), 1251-1256 (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).

5. **Hasan Hüseyin GÜLEÇ**, Necati TAŞKARA, 2009, Fibonacci Matrislerinin Bazı Özellikleri, *I. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri*, Konya, Sayı 1, No:1, 282-289 (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).