KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK FARK DENKLEMLERİ VE UYGULAMALARI

SABRİ ALİ ÜMEKKAN

KOCAELİ 2014

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK FARK DENKLEMLERİ VE UYGULAMALARI

SABRİ ALİ ÜMEKKAN

Doç.Dr. Emine CAN
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Oktay CEBECİOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Canan KÖROĞLU
Jüri Üyesi, Hacettepe Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 24.06.2014

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Fark denklemlerinin finansal uygulamaları kararsız birçok değişkene bağlı olduğundan dolayı, bu konu üzerindeki bulanık uygulamalar, hesaplamaları kolaylaştırdığı ve isabetli sonuçlar elde edilmesini sağladığından dolayı tercih sebebi olmuştur. Bulanık uygulamalar günümüzde birçok alanda etkili çözümler sunmaktadır. Sonuç olarak lineer uygulamalardaki tutarlılığı sebebiyle lineer olmayan sistemlerde de uygulanabilirliği öngörülmektedir.

Bulanık Fark Denklemleri ve Uygulamaları konusunda bana çalışma fırsatı veren ve eğitimim boyunca bana her daim destek olan değerli hocam Emine CAN'a teşekkür ederim. Ayrıca hayatım boyunca benim hep yanımda olan canım annem Deniz TORAMAN, anneannem Suna ZİBANOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nisan ayında kaybettiğim babam Alaattin ÜMEKKAN'a.

Haziran - 2014 Sabri Ali ÜMEKKAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
TABLOLAR DİZİNİ v
SİMGELER DİZİNİ KISALTMALAR vi
ÖZET vii
ABSTRACT viii
GİRİŞ 1
1. BULANIKLIK KAVRAMI 3
1.1. Tarihçe 3
1.2. Klasik Küme Teorisi 4
1.3. Bulanıklık Kavramı 4
1.4. Bulanık Fark Denklemleri 5
1.5. Bulanık Sayıların İnterpolasyonu 5
2. BULANIK MANTIK TEMEL KAVRAMLARI VE TANIMLARI 8
2.1. Bulanık Kümeler ve Özellikleri 8
2.1.1. Bulanık kümeler 9
2.1.2. Kapsama 9
2.1.3. Birleşme 9
2.1.4. Kesişme 9
2.1.5. Tümleyen 10
2.2. Üyelik Fonksiyonları 10
2.2.1. Üçgen üyelik fonksiyonu 12
2.2.2. Yamuk üyelik fonksiyonu 13
2.2.3. Gauss üyelik fonksiyonu 14
2.3. Alfa Kesimleri 14
2.4. Bulanık Sayılar 15
2.4.1. Bulanık sayılarının özellikleri 15
2.4.2. Bulanık sayılarda işlemler 16
2.5. Bulanık Denklemler 17
3. FARK DENKLEMLERİ, BULANIK FARK DENKLEMLERİ 19
3.1. Bulanık Fark Denklemleri 19
3.1.1. Finansta fark denklem uygulamaları 19
3.2. Fark Denklemlerinin Çözümü 20
3.3. Bulanık Fark Denklemlerinin Çözümü 21
3.4. Bulanık Sayıların İnterpolasyonu 22
3.4.2. İnterpolasyon teknikleri 24
4. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI 28
4.1. Bulanık Fark Denklemlerinde Sayısal Örnek Çözüm Sonuçları 28
4.2. Bulanık Finans Fark Denklemlerinin Çözüm ve Sonucu 31
4.3. Bulanık Verilerin İnterpolasyonu 33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 38
KAYNAKLAR 39

EKLER 39
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER 44
ÖZGEÇMİŞ 45

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Üyelik fonksiyonu gösterimi 11
Şekil 2.2. Üçgen üyelik fonksiyonu 11
Şekil 2.3. Yamuk üyelik fonksiyonu 12
Şekil 2.4. Gauss üyelik fonksiyonu 13
Şekil 2.5. Alfa kesimlerinin şekil üzerinde gösterimi 13
Şekil 4.1. Bulanık denklemin alt ve üst kesimleri 25
Şekil 4.2 . Bulanık denklemin alt ve üst kesimleri 26
Şekil 4.3. Kesinti altındaki anaparanın değişimi 28
Şekil 4.4. Faiz altındaki paranın değişimi 29
Şekil 4.5. Lagrange interpolasyonu 30
Şekil 4.6. Cubic Spline Interpolasyonu 30
Şekil 4.7. Tension Spline Metodu 30
Şekil 4.8. Cubic Spline, Lagrange ve Tension Spline kıyas 31
Şekil 4.9. Cubic Spline Interpolasyonu 32
Şekil 4.10. Tension Spline Metodu 32
Şekil 4.11. Cubic Spline ve Tension Spline Metod kıyas 32

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. Akima Data 29
Tablo 4.2. Kimyasal Data..... 31

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\widetilde{A}$	:	Bir bulanık A kümesi
A	:	A bulanık sayısı
$\overline{A}$	:	A bulanık sayısının üst kesimi
$\underline{A}$	:	A bulanık sayısnın alt kesimi
A_α	:	Bir A bulanık sayının alfa kesimi
$U_L(\alpha)$	:	L bulanık sayısına ait U kümesinin alfa kesimi
$\mu_A(x)$	:	A bulanık sayısına ait üyelik fonksiyonu

BULANIK FARK DENKLEMLERİ VE UYGULAMALARI

ÖZET

Günlük hayatta birçok problemde değişken durumlar ve olgular ile karşılaşmaktayız. Temel olarak geliştirilen problemlerde bazı etkenler göz ardı edilmesine rağmen, gerçekte sonucu etkileyecek parametreler oldukça kararsız olabilirler. Örneğin çalışmada da ele alındığı üzere dinamik sistemler kararsız değişkenlere bağlı olabilirler. Burada bulanık mantık ve uygulamaları devreye girer ve bu kararsızlığın net sonucunun elde edildiği çok karışık ve uzun hesaplamaları basite indirgeyerek sağlıklı bir yaklaşım elde edilmesini sağlar. Çalışma içinde de bu ve benzeri durumlar ele alınmış olup uygulamanın tutarlılığı araştırılmış ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Ayrıca bu verilerin genel özelliklerinden bahsedilmiş ve bulanık verilere çeşitli yaklaşım teknikleri de tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Fark Denklemleri, Finans Matematiği, İnterpolasyon.

FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT

We encounter with different situations and cases in our daily life. Although, some factors are ignored in basic improved problems, but the parameters which can affect the solution, can be uncertain. For example, dynamic systems can be tie up to the uncertain variables as discussed within this study. Fuzzy logic and its applications involves at this point and decrease the hardness of long and complicated calculations which caused by uncertainty of the variables, to provide a well approximation. In this study same cases are considered, concluded and shown by graphics. At the other hand, properties of the fuzzy data are presented, and the approximation techniques are discussed.

Key Words: Fuzzy Logic, Difference Equations, Finance Mathematics, Interpolation.

GİRİŞ

Tarihin ilk zamanlarından bu yana teknoloji sürekli gelişmekte ve özellikle son yüz yılda özellikle bilişim sektöründe büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Bilgisayar sistemlerinde işlemler 0 ve 1 ile yani klasik mantık kullanılarak yapılmaktaydı. Fakat günümüze gelindiğinde artık insan gibi tasavvur eden ve insan düşünce sistemine daha yakın olan sistemler geliştirilmeye başlandı. Buna, Zadeh'in öne sürdüğü bulanık mantık öncü olmuştur. Bulanık mantık, bulanık kümeleri ve uygulamaları çok karışık sistemleri, çok daha kolay anlaşılabilir yaklaşımlar yaparak ifade etmeyi başarmıştır. Bilişimin yanında ayrıca, matematiğin başlıca konularından biri olan bulanık sistemleri, uzun vadede çok karmaşık olan finansal hesaplamaların, risk yönetimlerinin, genetik biliminin ve sayılabilecek daha birçok dalın içine girmiş, içinden çıkılması zor durumları kestirebilme kabiliyeti ile sorunları çözme konusunda en kullanışlı araçlardan biri haline gelmiştir.

Türkçe 'de bulanık anlamına gelen "Bulanık", temelleri, Azerbaycan asıllı Rus olan ve hala Kaliforniya Üniversitesi'nde profesörlük görevini yapmaya devam eden 93 yaşındaki Lütfi A. Zade (Lotfi A. Zadeh) tarafından atılan, matematiksel mantığın bir çeşididir. Bulanık mantık her gün karşılaştığımız, davranış ve durumları yorumlamamızı, gerçek yapıya yaklaşmamızı sağlayan matematiksel bir disiplindir. Aslında bulanık mantık, klasik mantığın yetersiz kaldığı noktalarda, mantığın zaman içinde evrimleşmesiyle ortaya çıkmıştır. Doğru ve yanlışın, 1 ve 0'ın yetersiz kaldığı noktalarda çok değerli mantık ortaya çıkmış, belki ve 0,5 kavramlarıyla belirsizlik durumunu ifade etmiştir. Aslında bulanık mantık, sonsuz değerli mantık ile teorilerde ortaya çıkmış olsa da Zadeh'in Üyelik Fonksiyonu kavramıyla literatürdeki yerini almış ve kullanılmaya başlanmıştır. Matematikte bilinen mantık durumları "1" doğru ya da "0" yanlış olarak değerlendirirken, bulanık mantığa getirdiği yenilik ile doğru ve yanlış, 0-1 arası bir skala ile belirlenmiş olmasıdır. Bunu bir örnek ile ifade edecek olursak, "Bugün hava sıcak mı?" sorusunu ele alabiliriz. Cevabımız için en soğuk -10 derece ve en sıcak 30 derece sınırını ele alalım. Doğal olarak normal

mantıkta 0 en soğuk, 1 en sıcak durumu temsil eder. Başka bir değişle hava ya sıcaktır ya da soğuk. Bulanık mantık burada havanın ne kadar sıcak olduğunu ifade eden bir olgudur. Bulanık mantıkta bunun cevabı 0,6 olabilir. Bu havanın ortalamadan daha sıcak olduğuna, 0,2 ise en soğuğa daha yakın bir değerde olduğuna işaret eder. Bu değerlerin ne kadar sıcak olduğu ise üyelik fonksiyonlarıyla belirlenir.

Başka bir örnek daha verecek olursak, bilindik Giritli Epimenides Paradoksu' nu ele alabiliriz. Kendisi de Giritli olan Epimenides "Bütün Giritliler yalancıdır." demiştir. Eğer doğruyu söylüyorsa kendi önermesinin de bir yalan olması gerekir. Ancak bu durumda da önermesi yanlış olduğundan doğruyu söylemiyor demektir. Klasik mantıkta önerme hem doğru hem yanlış olamaz. Bulanık mantık ise bu duruma Giritlilerin ne kadarının yalancı olduğu sorusuna cevap getirir. Epimenides bu önermesinde Giritlilerin %99'undan bahsetmiş olabilir. Girit'te çok az doğru konuşan insan vardır ve bende bunlardan biriyim demek istemiş olabilir. Bu durumu bulanık mantık ile ifade ederiz.

Bu gelişmelerin ardından Lotfi A. Zadeh ile başlayan ve popülaritesi günümüze kadar artan bulanık mantığın, artık günümüzde birçok kullanım alanı mevcuttur. Bunlara, bilgisayar yazılımları, iklimlendirme sistemleri, seri üretim ve otomasyon sistemleri başlıca örnekler olarak gösterilebilirler. Çalışmamızda Bulanık mantığın özellikle finansta kullanılan 1. dereceden fark denklemlerine uygulanabilirliği öngörülmüş ve sayısal örneklerle desteklenmiştir. Bu durumu bir parça açacak olursak 12 ay süreyle banka hesabındaki 1000 TL anaparanın %5 faiz ile kazanacağı değer bellidir. Fakat gerçek durumlar için 12 ay boyunca faiz sabit kalmaz enflasyon ve dış etmenler ile faiz oranlarında değişimler olur. Bu oran Ocak, Şubat ayında %5.2, takip eden aylarda %4.3 olabilir. 12 ay boyunca %4.3 ile %5.5 arasında değişen faiz oranları için kullanılan denklemlere bulanık mantık uygulanarak 12 ay sonunda max. ve min. kazanç hesaplanabilir ve bu doğrultuda riskler azaltılabilir.

1. BULANIKLIK KAVRAMI

1.1.Tarihçe

Geliştirilmesi imkânsız matematik modellere dayalı sistemler 1960 yılı ortalarında araştırmacılara artan bir hızda gelmeye başladı. 1965 yılında Kaliforniya Üniversitesi'nden Prof. Lotfi A. Zadeh ilk defa bulanık küme kuramının temel taşı olan " Yumuşak " yaklaşım ile sistem tanıma ve tasarımını gerçekleştirdi. 1966'da Bulanık Mantık, Bell laboratuvarlarında Dr. Peter Marinos tarafından oluşturuldu. 1972 yılında Londra Üniversitesi'nden Prof. E. H. Mamdani bulanık mantık temelli uzman sistemle bir buhar türbinin hızının ve performansının çok başarılı bir şekilde denetilebileceğini gösterdi.

Bulanık mantık kuramının ilk önemli endüstriyel uygulaması 1980 yılında Danimarka'daki bir çimento fabrikasında (F. L. Smidth) gerçekleştirilmiş, değirmen (clement klin) içinde çok hassas bit denge ile oranlanması gereken sıcaklık ve oksijen ayarı en uygun biçimde yapılmıştır. Bundan sonra bir başka dikkate değer uygulama ise Hitachi firması tarafından 1987 yılında Sendai Metro'sunda (JAPONYA) gerçekleştirilmiştir. Bu sayede trenin istenen konumda durması üç kat daha geliştirilmiş kullanılan enerji ise yüzde 10 azaltılmıştır. Bunun üzerine Hitachi firmasına benzeri bir sistemin Tokyo Metro'suna da kurulması için istek gelmiştir. 1988'de ise Yamaichi Securities'in geliştirdiği, Bulanık Mantık temelli uzman sistem 1988 yılının Ekim ayında KARA PAZAR adı verilen çöküşün sinyallerini on sekiz gün önceden haber vermiştir. 1988 yılından beri portföyündeki hisse senetlerinin değerleri Nikkei ortalamasından sürekli olarak yüzde 20 ve genelde yüzde 40 daha fazla olmuştur. Bu kadar başarılı uygulamanın ardından Bulanık Mantığa olan ilgi artmış, uluslararası bir çalışma ortamı oluşturabilmek amacıyla 1989 yılında aralarında SGS - Thomson, Omron, Hitachi, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi Dünya devlerinin de aralarında bulunduğu 51 firma tarafından LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) laboratuvarları kurulmuştur. Son yıllarda giderek

artan yapay zekâ ile ilgili çalışmalarda, bulanık sınıflandırıcıların kullanımı ile Bulanık Kontrole yeni bir bakış açısı getirmişlerdir.

1.2. Klasik Küme Teorisi

Öncelikle her şeyin başı olan klasik küme teorisini ele alalım. Bir evren içinde bulunan ve diğerlerinden bir kuralla ayrılmış gruba küme denir. Örnek olarak doğal sayılar evreninde 6'dan küçük, 0'dan büyük sayılar dediğimizde bu bize bir küme tanımlar.

$$A = \{x \,||\, x \in N, 0 < x < 6\}$$

$$B = \{x \,||\, x \in N, 3 < x < 8\}$$

Burada durumlar kesindir. Klasik mantıksal olarak incelediğimizde her elemanın bu kümelere dâhil olma durumu 1 ve 0 ile ifade edilebilir.

Klasik kümelerde kesişim, her iki kümenin de barındırdığı elemanlardan oluşur. Birleşim, her iki kümenin bütün elemanlarını içeren kümedir. Tamlayan ise, bir kümenin içermediği, kümenin evreninde geriye kalan her şeydir.

1.3. Bulanıklık Kavramı

Zadeh 1965 yılında üyelik fonksiyonlarını tanımlamıştır [1]. Örnek olarak hayvanlar kümesini ele aldığımızda, mutlaka kedi, kuş, köpek bu kümeye dâhil olurken ağaç, kaya bu kümede olmayacaktır. Fakat bakteri, denizyıldızı için belirsiz bir durum oluşacaktır. Aynı şekilde sayılar içinde 10 gibi bir sayı da bütün reel sayılar için baktığımızda birden fazla kümeye ait olacaktır (tam sayılar, doğal sayılar kümesi gibi). [2]

Bu gibi durumları tanımlamak için üyelik fonksiyonlarına ihtiyaç duyarız. X , genel terimi $x$ile gösterilen bir noktalar uzayı ($X = \{x\}$), A ise bu noktalar uzayını da kapsayan bir basit küme olsun, A'nın her bir elemanının X içindeki durumu bir üyelik fonksiyonu (karakteristik fonksiyon) ile tanımanır [2]. Sayısal olarak bir örnek verecek olursak, X reel sayılarda kapalı bir aralık $[0,1]$, A basit kümesi ise reel sayılar

kümesi olursa, *A*'nın her bir elemanının bu kümeye üyeliğini gösteren fonksiyon üyelik fonksiyonu olacaktır. $\mu_A(x)$ ile gösterilir..

1.4. Bulanık Fark Denklemleri

Günümüze kadar, zaman - değer problemlerinin çözümündeki kararsızlığı ölçmek adına birçok çalışma yapıldı.

Fark denklemleri, iki periyot arasındaki bir değişkenin zamana göre değişimi tanımlayan denklemlerdir. Klasik fark denklemleri kararlı bir değişken ile problemi sonuca götürür, fakat gerçek hayatta bu değişkenler kararlı olmayabilir. Örneğin, finans matematiğinde başlangıç-değer problemlerinde faizler ve kesintiler her iki periyot arasında değişebilir ve günlük yaşamda umulmadık durumlarla karşılaşılabilir. Bu durumda bu problemin çözümü için bulanık fark denklemlerine başvurulur.

Bu konuda önemli bir adım, finansta basit birleşik faiz problemleri için bulanık anolojiyi geliştiren Buckley tarafından atılmıştır [3]. Konstantinos, Chrysafis, Papadapoulos, Papaschinopoulos farklı bir yöntem belirlemiştir. Finans denklemlerinde, bu zaman-değer değişimindeki kararsızlığa sebep olan faktörleri incelemişlerdir [4].

Fuzzy fark denklemleri başlangıçta Kendell ve Byatt tarafından önerilmiştir [1, 5]. Bu tezde bulanık fark denklemlerinin finans matematiğindeki uygulamalara yönelik olarak Chrysafis, Papadapoulos, Papaschinopoulos yayınlarında geçen durumlar ele alınmıştır [6-8].

1.5. Bulanık Sayıların İnterpolasyonu

Bulanık sayılar kullanılırken, bu sayıların üyelik fonksiyonlarının bazı özelliklere sahip olması beklenir [9-11]. Örnek olarak, nöro-bulanık öğrenme modelleri diferansiyellenebilen bir üyelik fonksiyonu kullanır [12, 13]. Eğer üyelik fonksiyonunu oluşturacak girdi datası sonlu kesikli bir yapıdaysa, bu durum bazı yaklaşım tekniklerinin kullanılmasını şart koşar.

Bulanık mantık teknikleri, günden güne gelişerek, optimizasyon, görüntü işleme, öğrenme yöntemleri, karar alma mekanizmaları ve data analizi gibi çeşitli alanlarda kullanımını yaygınlaştırmıştır [14-20]. Bulanık kümeler üzerinde çeşitli parametrik yaklaşım metotları literatürlerde önerilmiştir [21, 22].

Bulanık sayılara yaklaşım metodu ilk olarak Zadeh tarafından yapılmıştır [2]. Şimdilerde bu konuyla ilgili fazlaca makale literatüre girmiştir.

Chanas bir bulanık sayıya değişken yaklaşımını göstermiş [23], Abbasbandy ve Asady tarafından ise yakınsak trapezoidal bulanık sayılarını öne sürmüşlerdir [24]. Tapezoidal yaklaşımın birçok özelliği Grzegorzewki ve Mrówka tarafından ispatlanmıştır [25]. Abbasbandy ve Babolian bulanık data üzerine spline yaklaşımlarını öngörmüşlerdir. Referanslarda bulanık sayılara yaklaşım teknikleri gösterilmiştir [26-31].

Lagrange yaklaşımı, bilinen data noktaları kullanılarak oluşturulan bir polinom fonksiyonu elde edilmesi ile bu aralıklarda bilinmeyen değerlere yaklaşma yöntemidir. Lagrange Polinom yaklaşımın kullanılabilirliği diferansiyellenebilir olmalarından kaynaklıdır.

Lagrange interpolasyonunda pürüzsüzlük ve diferansiyellenebilme koşulları bulanık problemler açısından iyi olmasına rağmen istenilen monotonluğu sağlamaz.

Kübik spline ve Tension spline metotları ise bilinen data üzerinde, her iki data noktası arasına bir polinom uydurma yöntemini kullanır. Daha sonra bu parçalı fonksiyonlar birleştirilerek yaklaşım yapılır. Fakat burada da kübik spline metodu monotonluğu sağlamaz. Buna karşın Tension Spline metodu ise bulanık problemler için gerekli monotonluğu ve diferansiyellenebilme gerekliliklerini karşılar.

Bu çalışmada bulanık fark denklemleri ve İnterpolasyon teknikleri ele alınmıştır. Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

1. Bölümde, bulanık mantığın tarihçesi verilmiştir.
2. Bölümde, bulanık mantığın temel kavramları ve tanımları açıklanmıştır.

3. Bölümde, bulanık fark denklemleri ile ilgili farklı durumlar ele alınmış ve bunların çözümleri yapılmıştır. Aynı zamanda bu bölümde bulanık sayılar üzerine interpolasyon teknikleri ele alınmıştır.

4. Bölümde, sayısal çözüm sonuçlarının karşılaştırmalı analizi yapılmış ve ilgili grafikler çizilerek yorumlar yapılmıştır.

5. Bölümde ele aldığımız problemlerin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiş ve daha sonra yapılacak çalışmalar da ele alınacak problemler ifade edilmiştir

2. BULANIK MANTIK TEMEL KAVRAMLARI VE TANIMLARI

2.1. Bulanık Kümeler ve Özellikleri

Bulanık kümeler aşağıdaki başlıklarda daha ayrıntılı açıklayacağım şekilde daha çok doğal durumları içeren gerçekliği daha yüksek olan ve her elemanın bir kümeye belirli bir derecede üye olduğu ve bunun ifade edilmesinde özel üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yapılardır.

Bir karşılaştırma yapacak olursak, klasik mantığın temelinde aslında ihtimal hesapları yatar. Yani, bir olayın olabilirliği bu mantıkla çözümlenmeye çalışılır. Sonuç ise yalnızca evet ya da hayır ile sınırlıdır. Ancak bulanık mantık bundan tamamen farklıdır ve olabilirliği değil ne kadar olduğunu verir. Dolayısıyla alınacak cevap evet ya da hayırla beraber bunların ara değerlerini de içerir. West Florida Üniversitesi'nden Prof. James Bezdek bu farkı şu örnekle ortaya koymaktadır:

Çölde kaybolduğumuzu ve elimizde iki şişe su bulunduğunu düşünelim. Bu şişelerden birinin üzerinde "yüzde 91 ihtimalle kirli su" ve diğerinin üzerinde de "yüzde 91'i kirli su" yazsın. Hangisini içersiniz? İlk şişedeki su yüzde 91 ihtimalle kirlidir fakat %9 gibi bir şansla da olsa temiz olma ihtimali vardır. Yani bu su temiz de kirli de olabilir. Ancak ikinci şişenin üzerindeki etikette ise suyun yüzde 91'inin kirli olduğu, yani bu suyun çok büyük bir kısmının kirlendiği ve neredeyse içilemez halde olduğu belirtilmektedir. Bir başka deyişle bu Bulanık mantıkta, Üyelik işlevi (Membership Function) olarak da belirtebileceğimiz gibi "kötü su" olarak adlandırılır. Şimdi elimizde bir de mini kimya seti olduğunu düşünelim. İlk şişedeki su tahlil sonucu "saf" olsun. Yani yüzde 9 ihtimal ortaya çıkmış ve su yüzde 100 temiz çıkmıştır. İkinci şişeyi tahlil ettiğimizde ise elde ettiğimiz sonuç olarak doğaldır ki hala yüzde 91 oranında "kirli" su olacaktır. Bu da gösteriyor ki Bulanık mantıkta belirsiz her durumun etkisi incelenmelidir.

2.1.1. Bulanık kümeler

Bulanık küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır [2].

Bulanık kümeler ve üyelik fonksiyonları için şu tanımlama yapılabilir.

$$A = \left\{ x, \mu_A(x) \,||\, x \in X \right\}$$

Burada A kümesi bir bulanık küme, $\mu_A(x)$ ise bu kümeye ilişkin üyelik fonksiyonudur.

2.1.2. Kapsama

B bulanık kümesi, A bulanık kümesini kapsar yalnız ve yalnız $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ durumunda.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

2.1.3. Birleşme

A ve B iki bulanık kümenin birleşimi C bulanık kümesi ve $C = A \cup B$ ise üyelik bu birleşimin üyelik fonksiyonu diğer kümelerin üyelik fonksiyonlarının birleşimidir. C kümesinin üyelik fonksiyonu için,

$$\mu_C(x) = \max\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

2.1.4. Kesişme

A ve B iki bulanık kümesinin kesişimi C bulanık kümesi ve $C = A \cap B$ ise üyelik bu kesişimi üyelik fonksiyonu diğer kümelerin üyelik fonksiyonlarının kesişimidir. C kümesinin üyelik fonksiyonu için,

$$\mu_C(x) = \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

2.1.5. Tümleyen

A bulanık kümesinin tümleyeni *NOT A* ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{NOT\ A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

2.2. Üyelik Fonksiyonları

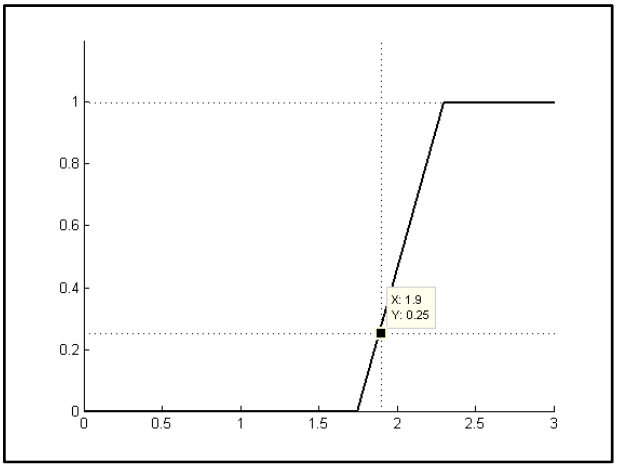
Üyelik fonksiyonları belli bir aralıkta alfa kesimlerine göre değerin kümeye üyelik derecesini belirlenmesini sağlayan fonksiyonlardır. Problemin karakteristiğine göre farklı üyelik fonksiyonları kullanılır. Daha açık bir ifade ile bir kümeye dâhil olma olasılığı olan belirli bir aralıktaki değerlerin ne oranda o kümeye ait olduklarını belirlemede kullanılan fonksiyondur. Şekil 2.1'de görebileceğiniz gibi belirli bir fonksiyonu takip ederek değerlerin o kümeye ne kadar ait oldukları tespit edilmiştir.

Bulanık kümeler belli bir üyelik fonksiyonu oluşturan elemanlardan oluşur. Açık bir şekilde ifade edecek olursak klasik kümelerde aitlik durumları bellidir. Bir *A* kümesi için uzun buylu erkeklerin bulunduğu küme tanımı yaparsak bu kümede sadece uzun boylu erkekler bulunmaktadır. Fakat uzun erkek olmanın ölçüsü nedir?

Bulanık küme burada devreye girer. Bulanık kümeler için ise her boy ölçüsündeki erkekler alfa kesimlerinin belirlediği bir oranda bu kümeye dâhildirler.

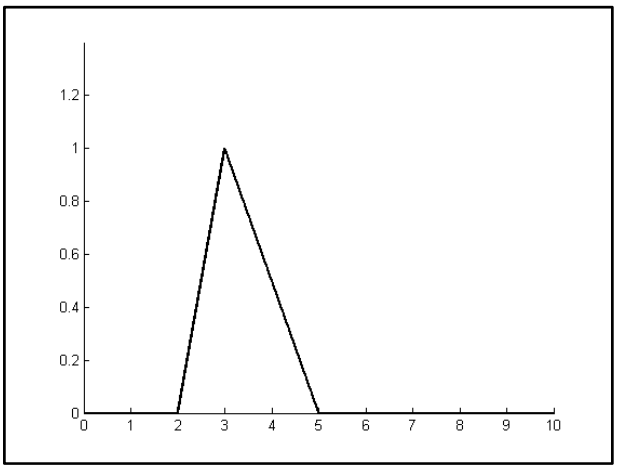
Şekil 2.1'de görüleceği gibi 190cm boyundaki bir erkek bu bulanık kümesine 0,25 oranında üyedir. 0,25 burada 190 cm boyundaki erkekler için alfa kesimidir. 175 cm'den daha kısa olanların alfa kesimi ise 0'dır. Başka bir deyiş ile uzun boylu erkekler kümesine dâhil değildirler.

Klasik küme kesin sınırlamalar ile verilen bir kümedir. Örneğin, $A = \{x \,||\, x > 6\}$ kapalı sınır noktası burada 6'dır. Burada olduğu gibi eğer *x* bu sayıdan büyükse *x*, *A*'nın kümesine aittir. Aksi takdirde *x* bu kümeye ait değildir. Klasik kümelere göre bulanık kümeler, adından da anlaşılacağı gibi kesin limitleri olmayan kümelerdir. Yani kümeye ait olandan, kümeye ait olmayana geçiş aşamalı olur ve bulanık kümelere "su sıcak " veya "sıcaklık çok yüksek" gibi tanımlarda olduğu gibi modellemelere, çoğunlukla dilsel açıklamalar ile esneklik kazandıran bu düzgün geçiş, üyelik fonksiyonları olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 2.1. Üyelik fonksiyonu gösterimi

2.2.1. Üçgen üyelik fonksiyonu

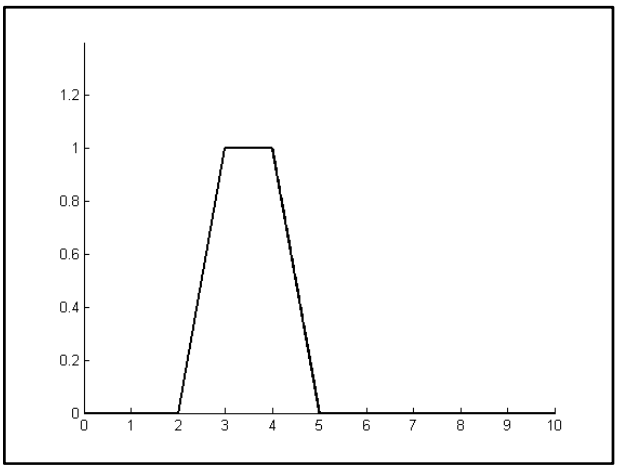


Şekil 2.2. Üçgen üyelik fonksiyonu

Üyelik fonksiyonları isimlerini şeklinden almaktadır. Bir $\tilde{A}$ üçgen üyelik fonksiyonu, tabanı *a, c* ve tepesi *b* olmak üzere, $a < b < c$ sayıları ile tanımlanır (Şekil 2.2). Üçgen üyelik fonksiyonu $\tilde{A} = (a/b/c)$ şeklinde yazılır [33].

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{m-\alpha} & \alpha \le x < m \\ 1 & x = m \\ \dfrac{x-\beta}{m-\beta} m & ' < x \le \beta \\ 0 & diğer \end{cases}$$

2.2.2. Yamuk üyelik fonksiyonu



Şekil 2.3. Yamuk üyelik fonksiyonu

Bir $\tilde{A}$ yamuk üyelik fonksiyonu, tabanı *a, d* ve tepesi *b, c* olmak üzere, $a < b < c < d$ sayıları ile tanımlanır (Şekil 2.3). Yamuk üyelik fonksiyonu $\tilde{A} = (a/b, c/d)$ şeklinde yazılır [33].

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{m-\alpha} & \alpha \le x < m \\ 1 & x, [m,n] \\ \dfrac{x-\beta}{n-\beta} m & , \; n < x \le \beta \\ 0 & diğer \end{cases}$$

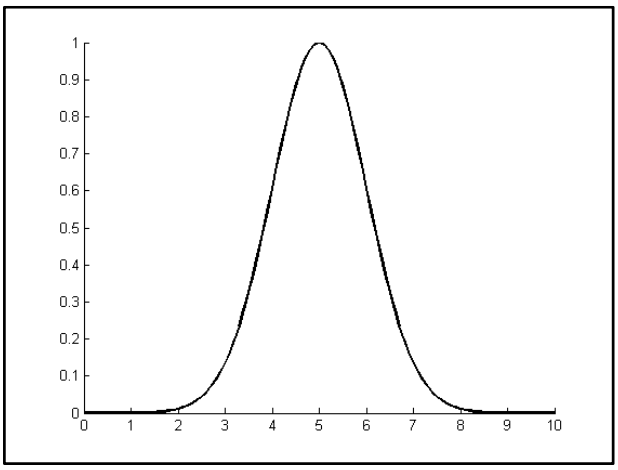
Basit formülleri ve hesaplanmasındaki verimliliği dolayısıyla hem üçgen, hem de yamuk üyelik fonksiyonları, özellikle gerçek zaman uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır [34]. Bununla birlikte üyelik fonksiyonları, doğru parçalarının birleşiminden oluştuğu için, bu fonksiyonların parametrelerce belirlenmiş dönüm noktalarındaki geçişleri düzgün değildir. Aşağıda, düzgün ve lineer olmayan fonksiyonlar tarafından tanımlanan diğer üyelik fonksiyonlarından Gauss üyelik fonksiyonu verilmiştir.

2.2.3. Gauss üyelik fonksiyonu

Gauss üyelik fonksiyonu merkezi a ve genişliği etkileyen b olmak üzere iki parametre ile tanımlanır.

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

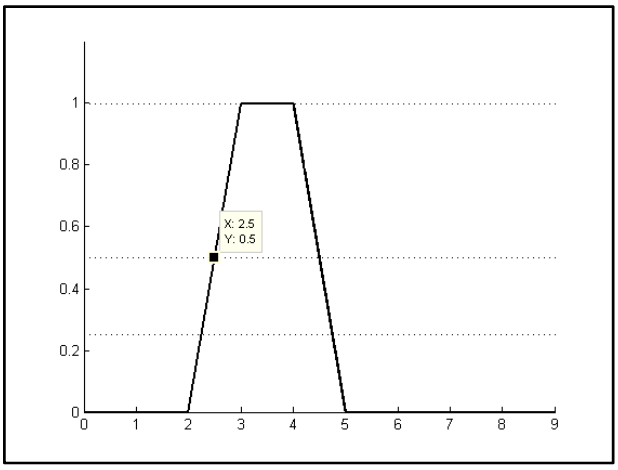
İle hesaplanan Gauss üyelik fonksiyonu Şekil 2.4'deki gibidir.



Şekil 2.4. Gauss üyelik fonksiyonu

2.3. Alfa Kesimleri

Alfa kesimi, bir üyelik fonksiyonu yatay kesen ve aralıktaki bir sayının o bulanık kümeye ne kadar ait olduğunu belirleyen kesimlerdir (Şekil 2.5). Alfa kesimleri [0,1] aralığındaki değerleri alır ve üyelik fonksiyonunda kendine karşılık gelen değerin üyelik derecesini ifade eder.



Şekil 2.5. Alfa kesimlerinin şekil üzerinde gösterimi

Şekilden de görüldüğü gibi 2.5 değeri 0,5 oranında bu kümeye dâhildir.

2.4. Bulanık Sayılar

Bulanık sayılar bir durumu ifade edebilmek için kullanılan, üyelik fonksiyonları ve bu fonksiyonların alfa kesimleri ile oluşturulan sayılardır.

2.4.1. Bulanık sayılarının özellikleri

Bir bulanık sayı bir sabit sayı ile çarpılabilir:

$$\tilde{A} = [\alpha, \beta]$$

$$m\,\tilde{A} = [m\alpha, m\beta]$$

Bir bulanık sayı bir sabit sayıya bölünebilir

$$\tilde{A} = [\alpha, \beta]$$

$$\tilde{A}/\,m = [\alpha\,/\,m, \beta\,/\,m]$$

Bir bulanık sayı bir sabit sayıyla toplanabilir

$$\tilde{A} = [\alpha, \beta]$$

$$m + \tilde{A} = [m + \alpha, m + \beta]$$

2.4.2. Bulanık sayılarda işlemler

İki bulanık sayı arasında dört işlem aşağıdaki gibi verilir.

$$\tilde{A} = [a_1, b_1]$$

$$\tilde{B} = [a_2, b_2]$$

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık sayılar olsun. Bu iki sayının toplamı, küçükten büyüğe doğru elemanlarının birebir toplanması ile hesaplanır. Farkları ise bu elemanların aynı şekilde bire bir farkı alınarak elde edilir.

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B} = [\alpha, \beta] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$$

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B} = [\alpha, \beta] = [a_1 - a_2, b_1 - b_2]$$

Bu iki bulanık sayının çarpımı ise iki bulanık kümenin Kartezyen çarpımından elde edilen kümenin minimum ve maksimum elemanları alınarak hesaplanır.

$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B} = [\alpha, \beta]$$

$$\alpha = \min\{a_1 a_2, a_1 b_1, b_1 a_2, b_1 b_2\}$$

$$\beta = \max\{a_1 a_2, a_1 b_1, b_1 a_2, b_1 b_2\}$$

Bulanık sayıları birbirine bölme işlemi ise paydadaki sayının tersi alınır ve bulanık kümelerde çarpma işlemi uygulanır.

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = [a_1 b_1].\left[\frac{1}{a_2}\frac{1}{b_2}\right]$$

2.5. Bulanık Denklemler

$$\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} = \tilde{C}$$

Bulanık olmayan $ax + b = c$ denkleminde çözümün $x = (c - b)/a$ olduğu açıktır. Bulanık denklemlerde ise en genel yöntem, klasik çözüme bulanık sayı aritmetiği uygulamaktır.

$$\tilde{A} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

$$\tilde{B} = \left[b_1(\alpha), b_2(\alpha) \right]$$

$$\tilde{C} = \left[c_1(\alpha), c_2(\alpha) \right]$$

$$\tilde{X} = \left[x_1(\alpha), x_2(\alpha) \right]$$

Olmak üzere ;

$$\left[a_1(\alpha), a_2(\alpha) \right]\left[x_1(\alpha), x_2(\alpha) \right] + \left[b_1(\alpha), b_2(\alpha) \right] = \left[c_1(\alpha), c_2(\alpha) \right]$$

$$\left[x_1(\alpha), x_2(\alpha) \right] = \left(\left[c_1(\alpha), c_2(\alpha) \right] - \left[b_1(\alpha), b_2(\alpha) \right] \right) / \left[a_1(\alpha), a_2(\alpha) \right]$$

$$\left[d_1(\alpha), d_2(\alpha) \right] = \left[c_1(\alpha), c_2(\alpha) \right] - \left[b_1(\alpha), b_2(\alpha) \right]$$

$$\left[x_1(\alpha), x_2(\alpha) \right] = \left(d_1(\alpha), d_2(\alpha) \right) / \left[a_1(\alpha), a_2(\alpha) \right]$$

$$\left[x_1(\alpha) \right] = \max \left\{ d_1(\alpha)\frac{1}{a_1(\alpha)}, d_2(\alpha)\frac{1}{a_1(\alpha)}, \frac{1}{a_2(\alpha)} d_1(\alpha), \frac{1}{a_2(\alpha)} d_2(\alpha) \right\}$$

$$\left[x_2(\alpha) \right] = \min \left\{ d_1(\alpha)\frac{1}{a_1(\alpha)}, d_2(\alpha)\frac{1}{a_1(\alpha)}, \frac{1}{a_2(\alpha)} d_1(\alpha), \frac{1}{a_2(\alpha)} d_2(\alpha) \right\}$$

Şeklinde aralık aritmetiği ile çözülür.

Bu durumda;

1. $0 \le \alpha < 1$ aralığında $\left[x_1(\alpha) \right]$ monoton artan
2. $0 \le \alpha < 1$ aralığında $\left[x_2(\alpha) \right]$ monoton artan
3. $\left[x_1(1) \right] \le \left[x_2(1) \right]$ ise üçgensel veya gausyan
4. $\left[x_1(1) \right] < \left[x_2(1) \right]$ ise yamuk üyelik fonksiyonuna sahip bulanık sayısı olabilir.

3. FARK DENKLEMLERİ, BULANIK FARK DENKLEMLERİ

3.1. Bulanık Fark Denklemleri

Bulanık fark denklemleri uygulamaları yıllar içinde hızlı bir gelişim göstermişlerdir. Fark denklemini çözmek için, denklemi sağlayan ve her adım için geçerli bir çözüm bulmak esastır. Chrysafis, Papadapoulos, Papaschinopoulos [1, 7, 35, 36], Kendell ve Byatt [1, 5, 37, 38] ve Buckley [39-44] bu problemler için çeşitli çözümler önermişlerdir.

3.1.1. Finansta fark denklem uygulamaları

Bilindiği üzere değer analizi yapmak finans matematiğinin ilgi alanıdır. Anapara hareketleri, faiz ya da kesinti işletimi, kredi geri ödemeleri ve bunun gibi birçok finansal işlem fark denklemleri ile hesaplanır. Bunun temelinde sürecin ilerleyişinin zaman faktörüne bağlı olması durumu vardır. Böylece n.zaman dilimi ile $n+1$. Zaman dilimi arasındaki bağlantılarla bu hesaplamalar yapılabilmektedir. Bu zaman dilimi yıllık, dönemlik, yıl çeyreği gibi farklı durumlar alabilir. Her durum içinde n ile $n+1$ bir dönem öncesi ve sonrası olarak ifade edilir.

Bazı bilindik finans fark denklemleri aşağıdaki gibidir.

1. Tip: Bu durumda banka paranın hesapta kaldığı $n+1$ süre boyunca müşteriden belli bir miktar kesinti yapar. Örneğin belli bir miktardan daha az para varsa hesap işletim ücreti kesintisi gibi.

   $$P_{n+1} = P_n - a$$

2. Tip: Faiz oranı altında değer kazanan banka hesabındaki paranın hareketini ifade eder.

   $$P_{n+1} = P_n + a_n P_0$$

3. Tip: $n+1$ sürede gelen para düzenli olarak sermayeleştiriliyorsa aşağıdaki gibi ifade edilir.

   $P_{n+1} = (1 + a_n) P_n, n = 0,1,\ldots$

4. Tip: $n+1$ süre sonunda anaparaya ek yapılıyorsa aşağıdaki denklem geçerlidir. Eğer anaparadan çekiliyorsa o zaman $-b_i$ şeklinde kullanılır. b_i burada eklenen ya da çekilen para miktarıdır.

   $P_{n+1} = (1 + a_n) P_n + b_n, n = 0,1,\ldots$

5. Tip: Para miktarına bağlı faiz oranı belirlenmesi durumunda aşağıdaki denklem kullanılır.

   $P_{n+1} = (1 + a_n (P_n)) P_n + b_n, n = 0,1,\ldots$

Yukarda belirtmiş olduğum finans fark denklemlerinden bazılarının bulanık ve normal çözümleri, sayısal ve grafiksel olarak incelenecektir. Fark denklemlerinin başlangıç değer problemlerinde çözüm her zaman mevcuttur ve tekildir.

3.2. Fark Denklemlerinin Çözümü

Aşağıdaki finansal fark denklemini ele alalım,

$$\begin{cases} P(n+1) = bP(n) + a \\ P(n_0) = P_0 \end{cases}, n = 0,1,2,..$$

Bu fark denklemini aşağıdaki gibi çözebiliriz. Başlangıç değerlerinden yola çıkılarak adım adım çözüm ilerletilir ve son adımda başlangıç değerlerine bağlı bir genel çözüm elde edilir.

$P(1) = bP(n_0) + a$

$P(2) = b(bP(n_0) + a) + a$

$P(2) = b^2 P(n_0) + a(b+1)$

$P(3) = b^3 P(n_0) + a(b^2 + b + 1)$

$$\vdots$$

$$P(n+1) = b^{n+1}.P(n_0) + a.\left(b^n + b^{n-1} + \ldots + b^1 + b^0\right)$$

$\left(b^n + b^{n-1} + \ldots + b^1 + b^0\right)$ ifadesini ele alalım.

$$\left(b^n + b^{n-1} + \ldots + b^1 + b^0\right) = \left[\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right]$$

Burada $n = 1, 2, \ldots$ olmak üzere fark denkleminin çözümü,

$$P(n+1) = b^{n+1}.P(n_0) + a.\left[\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right]$$

Şekline tanımlanır.

3.3. Bulanık Fark Denklemlerinin Çözümü

Durum 1: P_0 ve a bulanık sayıları, b bir sabit sayı ve fark denklemimiz aşaıdaki gibi olsun.

$$\tilde{P}(n+1) = b\,\tilde{P}(n) + \tilde{a}$$

$$\tilde{P}(n_0) = \tilde{P}_0$$

Bu denklemi çözmek için denklem çözümünde bulanık kesimlerini belirlemeliyiz

$$\tilde{P}(n+1) = b^{n+1}.\tilde{P}(n_0) + \tilde{a}\left[\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right]$$

Alt ve üst çözümleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\overline{P}(n+1) = b^{n+1}\overline{P}(n_0) + \overline{a}\left[\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right]$$

$$\overline{P}(n+1) = b^{n+1}.\overline{P}(n_0) + \overline{a}\left[\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right]$$

Durum 2: *k, a, b* bulanık sayılar ve fark denklemi ise aşağıdaki gibi belirlenmiş olsun.

$$\tilde{P}(n+1) = \tilde{b}\,\tilde{P}(n) + \tilde{a}\,\tilde{P}(n_0) = \tilde{k}\,P_0$$

$\tilde{b}.\tilde{k} = \tilde{c}$ olur ve denklemin yeni şekli,

$$\tilde{P}(n+1) = \tilde{c}\,P(n) + \tilde{a}$$

ve denklemin bulanık çözümü yapılır.

$$\tilde{P}(n) = \tilde{c}^{n+1}.P(n_0) + \tilde{a}\left[\frac{1-\tilde{c}^{n+1}}{1-\tilde{c}}\right]$$

Alt ve üst kesimler aşağıdaki gibidir.

$$\overline{P}(n) = \overline{c}^{n+1}P(n_0) + \overline{a}\left[\frac{1-\overline{c}^{n+1}}{1-\overline{c}}\right]$$

$$\overline{P}(n) = \overline{c}^{n+1}.P(n_0) + \overline{a}\left[\frac{1-\overline{c}^{n+1}}{1-\overline{c}}\right]$$

3.4. Bulanık Sayıların İnterpolasyonu

Reel sayılarda bir bulanık alt küme olan *U*'nun üyelik fonksiyonu $\mu_U : R \to [0,1]$ şeklinde tanımlanıyorsa *U* bir bulanık sayıdır denir.

a. $\mu_U(x_0) = 1$ olacak şekilde bir x_0 mevcutsa *U* normaldir.

b. *U*, bulanık dışbükeydir eğer

$$\mu_U(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \mu_U(x_1) \Lambda \mu_U(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in R, \forall \lambda \in [0,1]$$

c. μ_U üst yarısüreklidir.

d. *cl* kapatma operatörü olmak üzere, $SuppU = cl(x \in R : \mu_U > 0)$ olduğunda supp U bağlıdır.

Bilindiği üzere herhangi bir U bulanık sayısı $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$ gibi dört sayı ve $l_U, r_U : R \to [0,1]$ olmak üzere iki fonksiyondan oluşur. l_U azalmayan, r_U artmayan ve aşağıdaki gibi tanımanan fonksiyonlardır. Bu iki fonksiyonu kullanarak μ_U üyelik fonksiyonu tanımlanır.

$$\begin{cases} 0 \;\; eğer \;\;\; x < a_1 \\ l_U \;\; eğer \;\; a_1 \le x \le a_2 \\ 1 \;, eğer \;, a_2 \le x \le a_3 \\ r_U \;\; eğer \;\; a_3 \le x \le a_4 \\ 0 \;\; eğer \;\;\; x > a_4 \end{cases}$$

l_U ve r_U fonksiyonlarına U bulanık sayısının sağ ve sol tarafı denir. Bu sayının alfa kesimi tanımdaki üzere bulanık değildir.

$$U_\alpha = \{x \in R : \mu_U(x) \ge \alpha\}$$

Bir bulanık sayının α kesimleri birer kapalı aralıktır. Şöyle ki, $U_L(\alpha) = \inf\{x \in R : \mu_U(x) \ge \alpha\}$ ve $U_R(\alpha) = \sup\{x \in R : \mu_U(x) \ge \alpha\}$ zaman U'nun alfa kesimi $U_\alpha = [U_L(\alpha), U_R(\alpha)]$ olur. Tüm bulanık sayılarını kapsayan uzay $F(R)$ ile gösterilir.

Bir bulanık sayının parametrik gösterimi, aşağıdaki özellikleri sağlayan $0 \le \alpha \le 1$ aralığındaki $U_L(\alpha), U_R(\alpha)$ düzenli ikilileri şeklindedir.

a. $U_L(\alpha)$, $\alpha = 0$ için $(0,1]$ aralığında sağ sürekli ve azalmayan fonksiyon,

b. $U_R(\alpha)$, $\alpha = 0$ için $(0,1]$ aralığında sağ sürekli ve artmayan fonksiyon,

c. $U_L(\alpha) \le U_R(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$

F(R)'nin metriği denklemdeki gibi tanımlanır.

$$D(U,V) = \sup\sup d_H(U_\alpha, V_a)$$

$d_H(U_\alpha, V_a) = \max\left(\left|U_L(\alpha) - V_L(\alpha)\right|, \left|U_R(\alpha) - V_R(\alpha)\right|\right)$, U_α ve V_α arasındaki Hausdorff uzaklığıdır.

3.4.2. İnterpolasyon teknikleri

İnterpolasyon bilinen *N* adet x_i, y_i değerlerinden hareket ile *N-1*. dereceden bir polinom yardımıyla, bu bilinen noktalar arasındaki bilinmeyen değerleri belirleme yöntemidir. İnterpolasyon tekniklerinin tutarlılığı, problemin cinsine göre ara değerlere yaklaşma oranıyla belirlenir. Her problem için farklı bir İnterpolasyon tekniği daha tutarlı olabilir.

3.4.2.1. Lagrange interpolasyonu

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

Data noktaları üzerine Lagrange İnterpolasyonu uygulamak için,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Şeklinde bir polinom elde etmemiz gerekir.

Bunun için önce verilen değerleri kullanarak,

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), i = 0, \ldots, n$$

Şeklinde L_i, Lagrange Polinomları elde edilir ve bu noktalardan geçecek olan Lagrange İnterpolasyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i y_i$$

3.4.2.2. Kübik spline interpolasyon

Verilen veri noktaları için, kübik spline aşağıdaki parçalı fonksiyonlardan oluşur.

$S_i(x) = y_i, y_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, i = 0,\ldots,n$ ve $S_i(x), S_i'(x), S_i''(x)$ fonksiyonu $[x_0, x_n]$ aralığında süreklidir.

1. $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), i = 1,\ldots,n-2$
2. $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i), i = 1,\ldots,n-2$
3. $S_{i+1}'(x_i) = S_{i+1}''(x_i), i = 1,\ldots,n-2$

Bu dört basamak kullanılarak a_i, b_i, c_i, d_i elde edilir. [45]

3.4.2.3. Monoton kübik interpolasyon

Monoton Kübik Hermite İnterpolasyonu, sonucun monotonluğunu sağlamak için, Hermite spline ve tanjant modifikasyonunu kullanır.

Bu yöntem $(x_k, y_k), k = 1,\ldots,n$ data noktaları için aşağıdaki gibidir.

1. Data noktaları arasındaki eğimin hesabı,

   $d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, k = 0,\ldots,n-1$ için.
2. Tanjantları, her data noktasında sekantların ortalaması olarak refere etmek, $k = 2,\ldots,n-1$ için $m_k = \frac{d_{k-1} + d_k}{2}$. Her son nokta için tek taraflı farklar alınır. $m_1 = d_1$ ve $m_n = d_{n-1}$.
3. Eğer $d_k = 0$ ise, $m_k = m_{k+1} = 0$, $k = 1,\ldots,n$ olarak işlem yapılır. 4. Ve 5. Adım es geçilir.
4. $\alpha_k < 0$ ya da $\beta_k < 0$ vedata noktalarının monotonluğu kesin değil ise, $\alpha_k = m_k / d_k$ ve $\beta_k = m_{k+1} / d_k$ olur. Bu durumda parçalı monoton cubic spline eğrileri $m_k = m_{k+1} = 0$ seçilerek elde dilir.
5. Monotonluktan emin olmak için son olarak aşağıdaki durumlar sağlanmalıdır.

   i. $\varnothing(\alpha_k, \beta_k) = \alpha_k - \frac{(2\alpha_k + \beta_k - 3)^2}{3(\alpha_k + \beta_k - 2)} \geq 0$

   ii. $\varnothing(\alpha_k, \beta_k) = \alpha_k + 2\beta_k - 3 \leq 0$ ya da,

iii. $\varnothing(\alpha_k, \beta_k) = 2\alpha_k + \beta_k - 3 \le 0$

Eğer $\varnothing(\alpha_k, \beta_k) > 0$ ise monotonluk kesin olacaktır.bu kısıtlamayı sağlamak için yeterli durum $\alpha_k \le 3$ ve $\beta_k \le 3$ olmasıdır. $\alpha_k > 3$ durumunda $m_k > 3d_k$ olması bunu sağlar. Benzer şekilde β_k içinde durum böyledir. Bunu x'te değerlendimek için, $x_{lower} \le x \le x_{upper}$ durumunu sağlayacak, x'den büyük en küçük bir x_{upper} ve x'den daha küçük en büyük bir x_{lower} bulunur.

$h = x_{upper} - x_{lower}$ ve $t = (x - x_{lower})/h$ hesaplanır ve buradan interpolant $h_i(i = 0$ ya da $1)$ olduğu yerde monoton cubix splineın temel fonksiyonu, [46]

$$f_{interpolated}(x) = y_{lower}h_{00}(t) + hm_{lower}h_{10}(t) + y_{upper}h_{01}(t) + hm_{upper}h_{11}(t)$$

3.4.2.4. Tension splines methodu

Bu yaklaşımda splinelar, diferansiyel çoklu-nokta sınır değer problemleri (DMBVP) olarak tanımlanır. DMBVP 'nin nümerik çözümünde sonlu fark yöntemleri kullanılır.

Bu yöntemde $(x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,N$ datası için bir hiperbolik spline İnterpolasyonu (S) tension parametreleri $\{p_i \ge 0, i = 0,1,\ldots,N-1\}$ DMBVP'nin çözümü için yapılandırılır.

$\frac{d^4S}{dx^4} - \left(\frac{P_i}{h_i}\right)^2 \frac{d^2S}{dx^2} = 0$, her (x_i, x_{i+1}) ve $i = 0,1,\ldots,N-1$ için.

$S \in C^2[a,b]$.

Aşağıdaki İnterpolasyon,

$S(x_i) = y_i, i = 0,1,\ldots,N$

Ve aşağıdaki bitiş koşullarıyla tamamlanır. [47]

$S''(a) = y_0''$ ve $S''(b) = y_N''$

4. SAYISAL ÇÖZÜM SONUÇLARI

4.1. Bulanık Fark Denklemlerinde Sayısal Örnek Çözüm Sonuçları

Örnek 4.1.1.

Bulanık denklem aşağıdaki gibi düzenlensin [4]

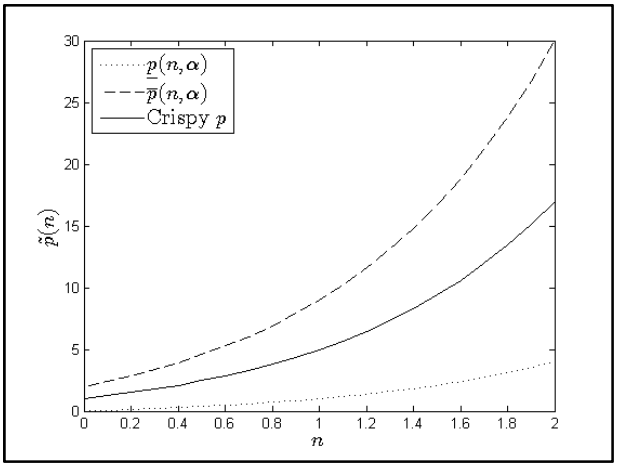
$$\begin{cases} \tilde{P}(n+1) = 3.\tilde{P}(n) + \tilde{2} \\ \tilde{P}(n_0) = \tilde{k}\left(1 + {n_0}^2\right) \end{cases}, n = 0,1,2,\ldots$$

Tanım 5'e göre, $\tilde{2} = [1+\propto, 3-\propto]$ ve $\tilde{k} = [\propto, 2-\propto]$ $\propto$-kesimine sahip üçgensel bulanık sayılardır. Şimdi bu $\propto$-kesimleri (4.1)'de yerine koyarsak $\tilde{P}(n)$'nin alt ve üst kesimlerini elde etmiş oluruz.

$$\overline{P}(n,\propto) = 3^n(\propto)P(n_0) + \left[\frac{1-3^n}{1-3}\right].(1+\propto)$$

$$\overline{P}(n,\propto) = 3^n(2-\propto)P(n_0) + \left[\frac{1-3^n}{1-3}\right].(3-\propto)$$

Grafiği Şekil 4.1'deki gibidir.



Şekil 4.1. Bulanık denklemin alt ve üst kesimleri

Örnek 4.1.2.

Bulanık denklemi aşağıdaki gibi düzenlensin [4]

$$\tilde{P}(n+1) = \tilde{2}\tilde{P}(n) + \tilde{0}$$

Başlangıç koşulları verilsin.

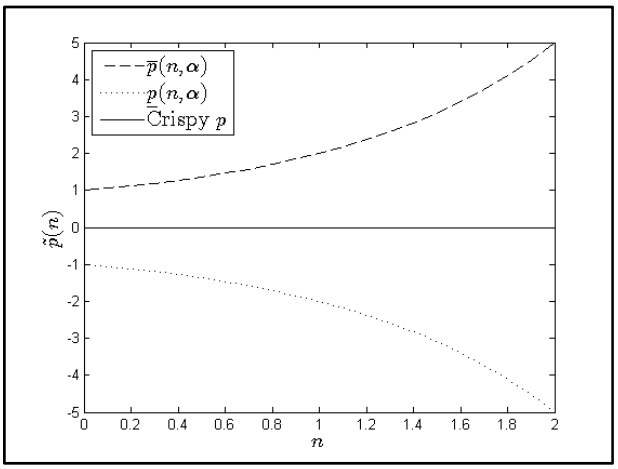
$$\begin{cases} \tilde{P}(n_0) = \tilde{k}.n_0\left(1+{n_0}^2\right) \\ \tilde{k} = [\propto -1, 1-\propto] \\ \tilde{2} = [1+\propto, 3-\propto] \\ \tilde{0} = [\propto -1, 1-\propto] \end{cases}$$

Tanım 6 ya göre çözüm,

$$\underline{P}(n,\propto) = (3-\propto)^n(\alpha-1)P(n_0) + (\propto -1).\left[\frac{1-\left(4\propto -\propto^2+3\right)^n}{1-\left(3-4\propto+\propto^2\right)}\right]$$

$$\overline{P}(n,\propto) = (3-\propto)^n(1-\propto)P(n_0) + (1-\propto).\left[\frac{1-\left(4\propto -\propto^2+3\right)^n}{1-\left(3-4\propto+\propto^2\right)}\right]$$

Ve grafiği Şekil 4.2'deki gibi olur.



Şekil 4.2. Bulanık denklemin alt ve üst kesimleri

4.2. Bulanık Finans Fark Denklemlerinin Çözüm ve Sonucu

Örnek 4.2.1.

Bankadaki bir anaparanın durumunu inceleyelim. Banka anaparanın sabit durması için bir limite sahip ve bu limitin altındaki miktarlarda düzenli kesinti yapılıyor olsun (Şekil 4.3). Bu limitin altındaki anaparanın durumu için. $P(n)$ bank hesabındaki anapara ve $\tilde{z}$ banka hesabındaki paradan yapılan kesinti oranı ise. İki yıl sonra banka hesabındaki değişim için aşağıdaki bulanık fark denklemini takip deriz. [4]

$$\tilde{P}(n+1) = \tilde{P}(n) - \tilde{z}, z > 0$$

$$\tilde{P}(n_0) = \tilde{k}P(n_0)$$

$$\tilde{P}(n_0) = \tilde{k}P(n_0)$$

$$P(n_0) = 1000€$$

$$\tilde{z} = [0,025 + 0,002\alpha, 0,029 - 0,002\alpha]$$

$$\tilde{k} = [\alpha, 2 - \alpha]$$

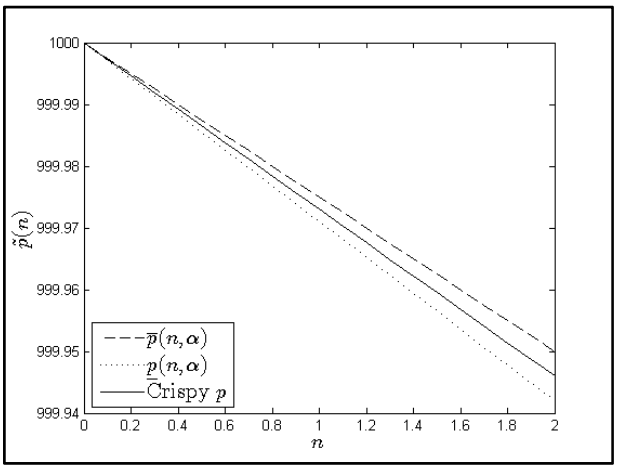
$\tilde{z}$ burada enflasyona bağlı %2.5 ile %2.9 arasında değişen kesinti oranını, $\tilde{k}$ ise süreyü temsil eder. Burada kesin olmayan iki durum incelenmiştir. Birincisi değişken bir faiz oranıdır. İkincisi ise anaparanın kesinti altında kaldığı süre. $\tilde{k}$bulanık sayısından da anlaşılabileceği gibi tabanı [0,2] olan bir üçgensen bulanık sayısıdır. Bu süre içinde her an hesaptan para çekilip bu kesinti süreci durdurulabilir. Bu durumda uğranacak en az ve en fazla zararı kestirebilmek bulanık denklemin çözümü ile mümkündür.

Bulanık fark denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{P}(n) = \tilde{P}(n_0) - n\tilde{z}$$

$$\overline{P}(n) = \overline{P}(n_0) - n\overline{z}$$

$$\underline{P}(n) = \overline{P}(n_0) - n\underline{z}$$



Şekil 4.3. Kesinti altındaki anaparanın değişimi

Bu grafikte bulanık fark denkleminin çözümünde alt ve üst kesimler anaparadaki değişimi ifade eder.

Örnek 4.2.2.

Burada banka hesabında, 2 yıl boyunca değişen bir faiz oranı altındaki anapara $P_{(n)}$ ile gösterilmiştir (Şekil 4.4). P_0 başlangıçta hesapta bulunan anapara ve Ĩ ise 2 yıl içinde değişen kararsız bir faiz oranı olsun. Bu sistem faiz oranı ile değer kazanan para hesapları için genellikle uygulanan bir denklemdir. İki yıl sonra banka hesabındaki değişim için aşağıdaki bulanık fark denklemini takip deriz. [4]

$$\tilde{P}(n+1) = P(n) + \tilde{I}\tilde{P}(n_0)$$

$$\tilde{P}(n_0) = \tilde{k}P(n_0)$$

$$P(n_0) = 2000€$$

$$\tilde{I} = [0,025 + 0,002\alpha, 0,029 - 0,002\alpha]$$

$\tilde{z}$ burada enflasyona bağlı %2.5 ile %2.9 arasında değişen faiz oranını, $\tilde{k}$ ise süreyi temsil eder. Burada kesin olmayan iki durum incelenmiştir. Birincisi değişken bir faiz oranıdır. İkincisi ise anaparanın faiz altında kaldığı süredir. $\tilde{k}$ bulanık sayısından da anlaşılabileceği gibi tabanı [0,2] olan bir üçgensen bulanık sayısıdır. Bu süre

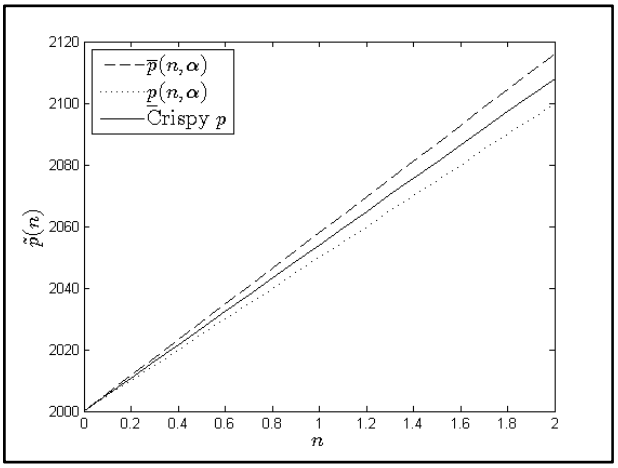
içinde her an hesaptan para çekilip bu kesinti süreci durdurulabilir. Bu durumda elde edilebilecek en az ve en fazla karı kestirebilmek bulanık denklemin çözümü ile mümkündür.

Bulanık fark denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\tilde{P}(n) = P(n_0) + n\tilde{I}\tilde{P}(n_0)$$

$$\overline{P}(n) = P(n_0) + n\overline{IP}(n_0)$$

$$\underline{P}(n) = P(n_0) + n\underline{IP}(n_0)$$



Şekil 4.4. Faiz altında anaparanın değişimi

4.3. Bulanık Verilerin İnterpolasyonu

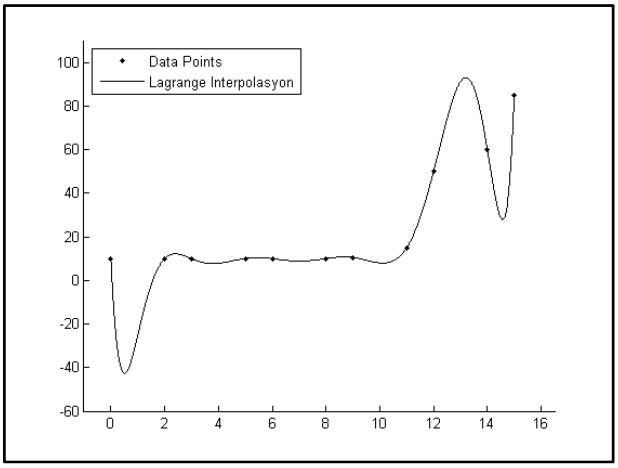
Örnek 4.3.1.

Tablo 4.1. Akima Verileri

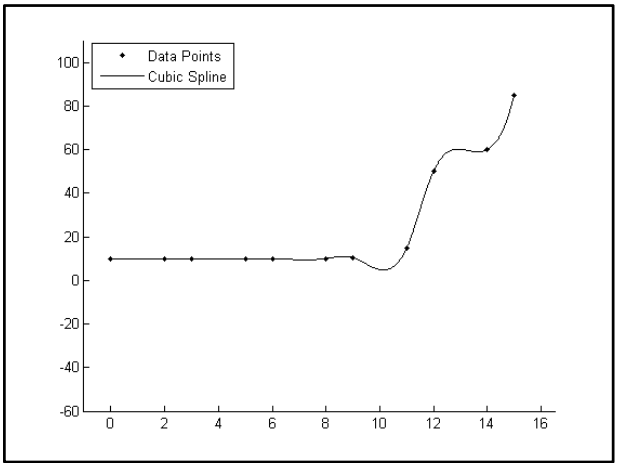
x_i	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
y_i	10	10	10	10	10	10	10,5	15	50	60	85

Tablo 4.1.'de verilmiş bu data Akimas bulanık sayıları olarak kabul edilir [49].

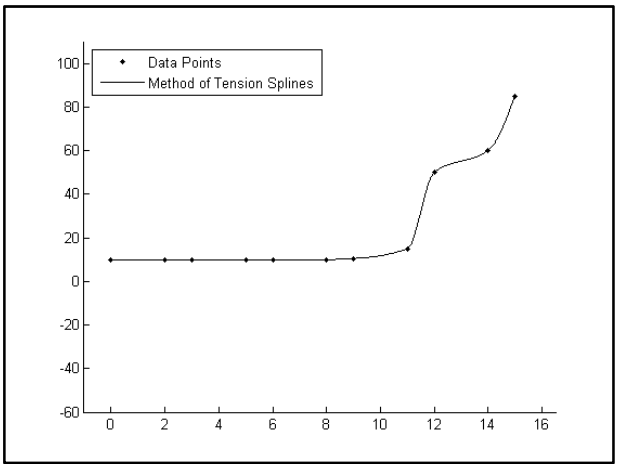
Daha önceki bölümlerde bahsi geçen İnterpolasyon tekniklerinin yukarıdaki datalara olan uygulamaları aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



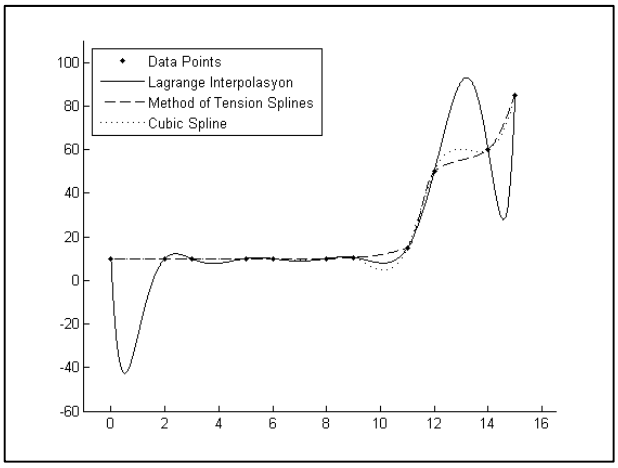
Şekil 4.5. Lagrange Interpolasyonu



Şekil 4.6. Cubic Spline Interpolasyonu



Şekil 4.7. Tension Spline Metodu



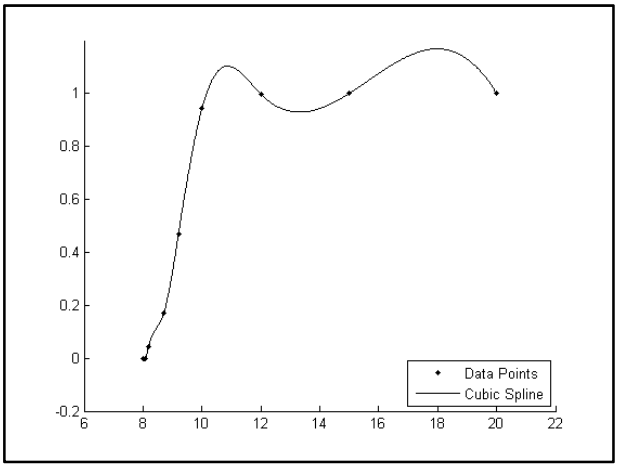
Şekil 4. 1. Cubic Spline, Lagrange ve Tension Spline kıyas

Örnek 4.3.2.

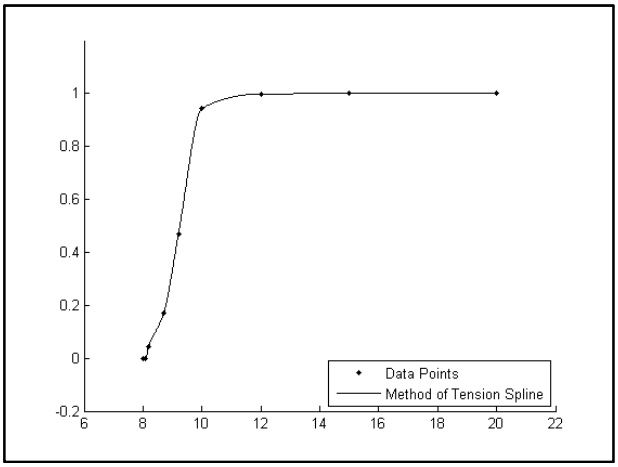
Tablo 4. 1. Kimyasal veriler

x_i	y_i
7,99	0
8,09	0,76419 E-5
8,19	4.37498 E-2
8,7	0,169183
9,2	0,469428
10	0,943740
12	0,998636
15	0,999916
20	0,999994

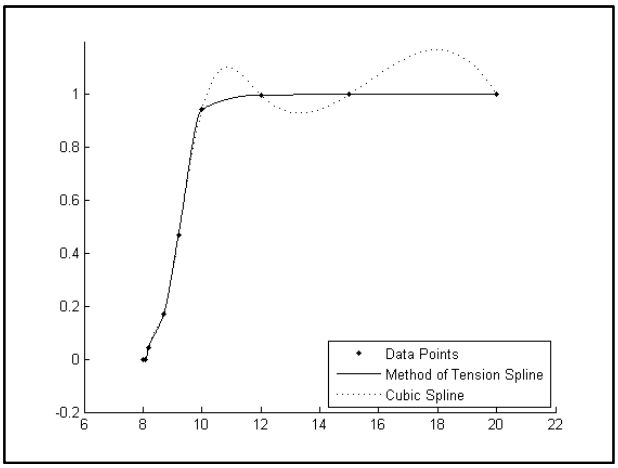
Tablo 4.2.'de verilmiş bu data kimyasal bulanık sayılar olarak kabul edilir [48].



Şekil 4.9. Cubic Spline Interpolasyonu



Şekil 4.10. Tension Spline Methodu



Şekil 4.11. Cubic Spline ve Tension Spline Metod kıyas

Şekil 4.5, 6, 7, 8, 9, 10, 11'de farklı interpolasyon teknikleri karşılaştırılmıştır. Grafiklerden de görüldüğü üzere Lagrange İnterpolasyon ve Kübik spline metodu istenilen monotonluğu sağlamamaktadır. Tension Splines metodu ise monotondur ve diferansiyellenebilirdir. Bu sebeple, bu durumda en iyi yaklaşım Tension Spline Metodudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde aşağıdaki problemler ele alınmıştır.

1. Finans matematiğinde kullanılan fark denklemlerinde sonucu etkileyecek olan değişkenler günlük hayatta sabit olmayabilir. Bunun neticesinde bir kararsızlık oluşur ve klasik sistemler istenilen sonucu vermeyebilir ya da hesaplaması çok karışık bir hal alabilir. Bu durumda bulanık yaklaşımlar devreye girer ve olası riskli durumlar için bir ön görü ile probleme bir yaklaşım sağlar. Örneğin, enflasyona bağlı bir değişim gösteren faiz oranı etkisindeki anaparadan, belli bir dönem sonunda ne maksimum ve minimum ne kadar gelir elde edilebileceği hesaplanabilir. Bu da bizi çok karışık hesaplamalardan kurtararak, fark denklerinin metodik çözümünü aynı şekilde bulanık hesaplarda kullanmamıza olanak tanır.

2. Bu kısımda ise bulanık kümelerin sağlaması gereken özellikler belirtilmiş, üyelik fonksiyonlarının özellikleri tanımlanmış ve üyelik fonksiyonların özellikleri tanımlanmış ve bu özellikleri kullanarak İnterpolasyon tekniklerinin uygulamaları farklı iki veri üzerinde yapılmıştır. Bu örneklerde ele aldığımız veriler literatürde vardır [46]. Bunun sonucunda Tension Spline metodu sağladığı monotonluk ve diferansiyellenebilirlik özelliklerinden ötürü bulanık verilerin interpolasyonunda en kullanışlı yöntem olduğu grafiksel örneklerle gösterilmiştir.

Bu çalışmada genel haliyle lineer sistemler ele alınmış ve bu konudaki tutarlı sonuçlardan sonra, gelecek çalışmalarda lineer olmayan sistemlere uygulanılması öngörülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Kandel A., Byatt W. J., *Proc. Int. Conf. Cybernatics and Society*, Tokyo, 1978, 1213-1216.

[2] Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Fuzzy sets. Inform. Control*, 1965, **8**, 338–353.

[3] Buckley J. J., The fuzzy mathematics of finance, *Fuzzy Sets and Systems,* **21**, 257–273.

[4] Chrysafis K. A., Papadopoulos B. K., Papaschinopoulos G., On the fuzzy difference equations of finance, *Fuzzy Sets and Systems* **159**, 2008, 3259–3270.

[5] Kandel A., Byatt W. J., *Proc. IEEE*, 1978, **66**, 1619-1639.

[6] Kwapisz M., On difference equations arising in mathematics of finance*, Nonlinear Anal. Theory, MethodsAppl.*, 1997, **30**, 1207–1218.

[7] Papaschinopoulos G., Papadopoulos B. K., On the fuzzy difference equation $x_{n+1}=A+(x/x_{n-m})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **129**, 73–81**.**

[8] Papaschinopoulos G., Papadopoulos B. K, On the fuzzy difference equation $x_{n+1}=A+(B/x_n)$, *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **6**, 456‑461.

[9] Colling I. L., Kloeden P., Continuous approximation of fuzzy sets, *J. Fuzzy Math.*, 1995, **3**, 449‑453.

[10] Diamond P., Kloeden P., Metric spaces of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and System,* 1990, **35**, 241-249.

[11] Chalco-Cano R. H. Y., Rojas-Medar M. A., Convolution of fuzzy sets and applications, *Comput. Math. Appl*., 2003, **46**, 1245–1251.

[12] Castellano F. A. M. G., Mencar C., An empirical risk functional to improve learning in a fuzzy-neuroclassifier, *IEEE Trans. Magn. Cybern*., 2004, **34**, 725–731.

[13] Guimaraes F. G., Campelo F., Saldanha R. R., Ramirez J. A., A hybrid methodology fuzzy optimization of electromagnetic devices. *IEEE Trans. Magn*., 2005, **41**, 1744–1747.

[14] Ayala L. T. G., Zapater V., Differentaverages of a fuzzy set with an application to vessel segmentation, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, **13**, 384–393.

[15] D’ ursa P., Giordani P., A weighted fuzzy c – means clustering model for fuzzy data, *Computational Statistics Data Analysis*, 2006, **50**, 1496–1523.

[16] Narukawa Y., Torra, V., Fuzzy measures and integrals in evaluation of strategies, *Information Sciences*, 2007, **177**, 4686–4695.

[17] Parkasha O., Sharmab P. K., Mahajanc R., New measures of weighted fuzzy entropy and their applications for thestudy of maximum weighted fuzzy entropy principle. *Information Sciences*, 2008, **178**, 2389–2395.

[18] Ranilla J., Rodriquez-Muniz L. J., A heuristic approach to learning rules from fuzzy databases, *IEEE Intelligent Systems*, 2007, **22**, 62–68.

[19] Wang F. H., On discovery of soft associations with most fuzzy quatifier for item promotion applications. *Information Sciences*, 2008, **178**, 1848–1876.

[20] Yager R. R., Using trapezoids for representing granular objects: applications to learning and owaaggregation. *Information Sciences*, 2008, **178**, 363–380.

[21] Yager R. R., The nearest approximation of a fuzzy quantity in parametric *form. Appl. Math. Comput.*, 2006, **172**, 624–632.

[22] Nasibov E. N., Peker, S., On the nearest parametric approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, **159**, 1365–1375.

[23] Chanas S., On the interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **122**, 353–356.

[24] Abbasbandy S., Asady B., Thenearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity. *Appl. Math. Comput.*, 2004, **156**, 381–386.

[25] Grzegorzewki P., Mr´owka E., Trapezoidal approximation of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, **153**, 115–135.

[26] Wolberg G., Alfy I., An energy minimization framework for monotonic cubic spline interpolation, *J.Comput. Appl.Math.*, 2002, **143**, 145–188.

[27] Sarfraz M., A rational cubic spline for the visualization of monotonic data, *Comput. Graphics*, 2000, **24**, 509–516.

[28] Sarfraz B. S. M., Hussain M. Z., Visualization of shaped data by a rational cubic spline interpolation, *Comput. Graphics*, 2001, **25**, 833–845.

[29] Shrivasta M., Joseph J., C2 rational cubic spline involving tension parameters, *Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.)*, 2000, **110**, 305–314.

[30] Fritschand F. N., Carlson R. E., Monotone Piecewise Cubic Interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, **17**, 238–246.

[31] Kvasov B. I., Dmbvp for tension splines, *Proc. of the Conf. onAppl. Math. and Sci. Comput*., 2005, 67–94.

[32] Sevim F., Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Niğde, 2012, 329311.

[33] Ozgur D., Fuzzy diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hakkında, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 2008, 177912.

[34] Gao S., Zhang Z., Cao C., Multiplication operation on fuzzy numbers, Journal Of Software, DOI:10.4304/jsw.4.4.331-338.

[35] Dubois D., Kerre E., Mesiar R., Prade H., *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Kluwer, Boston, 2000.

[36] Deeba E. Y., De Korvin A., Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO2 level in theblood, *Appl. Math. Lett*., 1999, **12,** 33‑40.

[37] Papaschinopoulos G., Stefanidou G., Bounded nessand asymptotic behaviour of the solutions of a fuzzy difference equation*, Fuzzy Sets and Systems*, 2003, **140**, 523‑539.

[38] Sedaghat H., A class of nonlinear second order difference equations from macro economics, *Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl*., 1997, **29,** 593–603.

[39] Zhang Q., Yang L., Liao D., On the fuzzy difference equation, *Engineering and Technology*, 2012, **75**, 1032-1037.

[40] Papaschinopoulos G., Stefanidouand G, Efraimidis P., Existence uniqueness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy differential equation with piecewise constant argument, *Information Sciences*, 2007, **177**, 3855-3870.

[41] Buckley J. J., The fuzzy mathematics of finance, *Fuzzy Setsand Systems*, 1987, **21**, 257-273.

[42] Zehua L. V., Jin H., Yuan P., The theory of triangle type-2 fuzzy sets, *IEEE Computer and Informaton Technology*, DOI:10.1109/CIT.2009.79.

[43] Darusand M., Wahab A., Review on Fuzzy difference equation, *Malasysian Journal of Fundemental & Applied Sciences*, 2012, **8** , 172-176.

[44] Elaydi S., Gyory I., Ladas G., Advances in Difference Equations, *Advances in Difference Equations*, Hungary, 1995.

[45] Abbasbandy S., Babolian E., Interpolation of fuzzy data by natural splines, *Korean J. Comput. Appl. Math*., 1998, **5**, 457–463.

[46] Akima H., A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, *J. Assoc. Comput. Mech*., 1970, **17**, 589–602.

[47] Kocic L. M., Milanovic G. V., Shape preserving approximations by polynomials and splines, *Comput. Math. Appl*., 1997, **33**, 59–97.

[48] Kvasov B. I., Parallel mesh points for tension splines, *J. of Comput. and Appl. Math*., 2011, **236**, 843–859.

EKLER

EK-A

Grafik.m dosyası (Matlab)

```
clear;
clc;

load('akimas_data.mat')
for i=1:9
x(i) = A(1,i);
y(i) = A(2,i);
end

load('chemical_data.mat')
for i=1:9
x(i) = A(1,i);
y(i) = A(2,i);
end

a = min(x):.01:max(x);
P = pchip(x,y,a);

hold on
lagrange(x,y);
plot(x,y,'.k')
plot(a,P,'k')
plot(a,spline(x,y,a),':k')

%axis([min(x)-(10/100*max(x)) max(x)+(10/100*max(x)) min(P)-
(20/100*max(P)) max(P)+(20/100*max(P))])
%axis([-1 16.5 -60 110])

axis([6 22 -0.2 1.2])
legend('Data Points','Method of Tension Spline','Cubic
Spline',4)
hold off
```

lagrange.m dosyası (Matlab)

```
function P = lagrange(x,y)

%Girilen Data Noktalarına göre Lagrange Polinomunu bulup
Grafik çizer.
%Örnek:
%x=[2 7 9 11 14];
%y=[4 8 6 5 7];
%lagrange(x,y);

n = length(x);
syms a
toplam = 0;
for i = 1:1:n
    carpim = 1;
    for j = 1:1:n
        if (i~=j)
           carpim = carpim*L(a,x(i),x(j));
        end
    end
    carpim = carpim*y(i);
    toplam = toplam+carpim;
end
   Pa = toplam;
   a = min(x):.01:max(x);
   P = subs(Pa,a);
   plot(x,y,'k.',a,P,'k');
   axis([min(x)-(10/100*max(x)) max(x)+(10/100*max(x)) min(P)-
(20/100*max(P)) max(P)+(20/100*max(P))])
   %legend('Data','Lagrange',2)

   function fx= L(a,xi,xj)
   fx=(a-xj)/(xi-xj);
```

Ornek43.m dosyası (Matlab)

```
clear;
clc;
t=0:.1:2;
n=length(t);
a=2;
b=3;
p =1+t.^2;


for alpha = 0:1

    P0=1;
    pa=1000-(t).*(0.029-0.002*alpha);
    pu=1000-(t).*(0.025+0.002*alpha);

    hold on
    box on

    if alpha == 0
        plot(t,pu,'k--')
        plot(t,pa,'k:')
    else
        %pca=(4*alpha-alpha^2-3).*t.*(1+t.^2)+(1-alpha);
        %pcu=(3-4*alpha+alpha^2).*t.*(1+t.^2)+(alpha-1);
        plot(t,pa,'k');
        %plot(t,pcu,'b');
    end

    %axis([ 0 2 0 100])

legend('$\overline{p}(n,\alpha)$','$\underline{p}(n,\alpha)$',
'Crispy $p$',3);
    h = legend;
    set(h,'fontName','Arial')
    set(h,'fontSize',14)
    set(h, 'interpreter', 'latex')
    f = (xlabel('$n$'));
    set(f,'fontName','Arial')
    set(f,'fontSize',14)
    set(f, 'interpreter', 'latex')
    g = (ylabel('$\tilde{p}(n)$'));
    set(g,'fontName','Arial')
    set(g,'fontSize',14)
    set(g, 'interpreter', 'latex')
end
    hold off
```

ornek44.m dosyası (Matlab)

```
clear;
clc;
t=0:.1:2;
n=length(t);
a=2;
b=3;
%p =1+t.^2;


for alpha = 0:1

    pu=(2000)+((t).*(0.029-0.002*alpha)*2000);
    pa=(2000)+((t).*(0.025+0.002*alpha)*2000);

    hold on
    box on

    if alpha == 0
        plot(t,pu,'k--')
        plot(t,pa,'k:')
    else
        %pca=(4*alpha-alpha^2-3).*t.*(1+t.^2)+(1-alpha);
        %pcu=(3-4*alpha+alpha^2).*t.*(1+t.^2)+(alpha-1);
        plot(t,pa,'k');
        %plot(t,pcu,'b');
    end

    %axis([ 0 2 0 100])

legend('$\overline{p}(n,\alpha)$','$\underline{p}(n,\alpha)$',
'Crispy $p$',2);
    h = legend;
    set(h,'fontName','Arial')
    set(h,'fontSize',14)
    set(h, 'interpreter', 'latex')
    f = (xlabel('$n$'));
    set(f,'fontName','Arial')
    set(f,'fontSize',14)
    set(f, 'interpreter', 'latex')
    g = (ylabel('$\tilde{p}(n)$'));
    set(g,'fontName','Arial')
    set(g,'fontSize',14)
    set(g, 'interpreter', 'latex')
end
    hold off
```

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

[1] Can E., **Ümekkan S. A.**, Canan K., Piecewise cubic approximation for data, American *Journal of Applied Mathematics*, 2013, **1**, 24-27.

[2] **Ümekkan S. A.**, Can E., Bayrak M. A., Fuzzy difference equations in finance, *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research*, **2**, 729-735.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Ankara ve İstanbul'da tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'ndeki eğitimine 2005 yılında ara verdi. Bu süre içinde turizm ve spor sektöründe çalıştıktan sonra 2011 yılında af programı dahilinde üniversiteye döndü ve Fizik Bölümündeki eğitimini 2012 yılında tamamladı. 2012 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'ndaki yüksek lisans eğitimine tez aşamasında halen devam etmektedir. Yüksek lisans eğitimi sırasında bir yandan da iş hayatını devam ettirmekte olup, halen medikal cihazlar geliştiren, üreten ve satışını yapan bir firmada Ar-Ge proje koordinatörlüğü ve yönetim kalite temsilciliği görevini sürdürmektedir.