İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİ VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nail AL

Anabilim Dalı : FİZİK

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

ŞUBAT 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİ VE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
NAİL AL
(509021102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Aralık 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Şubat 2006

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Mahmut HORTAÇSU**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Ayşe Hümeyra BİLGE**
	Prof.Dr. Neşe ÖZDEMİR

ŞUBAT 2006

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans ve tez çalışmam sırasında gösterdiği ilgi ve destekten ötürü danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut Hortaçsu'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ocak 2006 Nail AL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	**ii**
ŞEKİL LİSTESİ	**iv**
ÖZET	**v**
SUMMARY	**vi**
1. GİRİŞ	**1**
2. GRAVİTASYONEL ALANDA IŞIK IŞINLARI	**3**
2.1. Karakteristik Yüzeyler ve Bikarakteristik Işınlar	**3**
2.2. Komplex Null Tetratları ve Spin Katsayıları	**10**
3. NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİNİN UYGULAMASI	**15**
4. SONUÇ	**15**
KAYNAKLAR	**22**
ÖZGEÇMİŞ	**30**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. : Σ karakteristik yüzeyine teğet ışıksal vektör..... 6
Şekil 2. : Null tetratları..... 10
Şekil 3.1. : Null doğrultularının karşılıklı pozisyonları..... 18
Şekil 3.2. : Petrov tiplerinin hiyerarşisi..... 18

NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİ VE UYGULAMASI

ÖZET

Genel Relativitede Newman-Penrose formalizmi Einstein alan denklemlerinin çözümlerinin bulunmasında ve çözümlerin özelliklerinin belirlenmesinde oldukça kullanışlı araçlar sağlar. Bu formalizmde tensor eşitlikleri kompleks skalerler için kısmi diferansiyel denklemlere indirgenir ve bu kompleks skalerler uzay-zamanın cebrik tipi ile direkt olarak ilişkilidir.

Einstein denklemlerinin çözümlerinin cebrik sınıflandırması ilk olarak Petrov tarafından yapıldı. Daha sonra Penrose, herhangi bir cebrik tipteki gravitasyonel alanın özelliklerinin Weyl tensörünün spinör bileşenleri üzerindeki belli cebrik şartların gerçekleştirilmesiyle ilgili olduğunu gösterdi. Gerçekte bu tür bileşemlerin Newman-Penrose denklemlerinde lineer olarak gözükmesi bu formalizmi belli bir cebrik tipin çözümlerinin çalışılması için uygun kılmaktır.

Weyl tensörü (vakumda, $R = R_{ab} = 0$, eğrilik tensörü ile çakışıktır) bir öz ışıksal vektör seti (temel ışıksal vektörler denir) belirler. Bu vektörlerin karşılıklı pozisyonu gravitasyonel alanın cebrik tipi ile ilişkilidir.

Verilen bir cebrik sınıfa ait çözümlerin özellikleri Weyl tesörünün belli spinör bileşenlerinin ve belli spin katsayılarının gözükmemesi ile ilişkilidir.

NEWMAN-PENROSE FORMALISM AND APPLICATION

SUMMARY

In General Relativity, the Newman-Penrose formalism has proven to be a very useful tool for finding solution to Einstein's field equations and determining properties. In this formalism, the tensor equations are reduced to the partial differential equations for complex scalars and these complex scalars can be related, via powerful theorems, directly to the algbraic and geometric properties of space-time.

The algebraic classification of the solution of the Einstein equations was first studied by Petrov. Subsequently, Penrose showed that the property for a gravitational field belong to one or another algebraic conditions on the spinor components of the Weyl tensor. The fact that such components appear linearly in the Newman-Penrose equations permits the successful use of the Newman-Penrose system for studying the solutions of a certain algebraic type.

The Weyl tensor (coinciding with the curvature tensor in vacuum, $R = R_{ab} = 0$) determines a set of "eigen" lightlike vectors (called principal lightlike vectors), the mutual positions of which is directly related to the algebraic type of the gravitational field.

The property for a solution to belong to a given algebraic class can be connected with the vanishing of certain spinor components of the Weyl tensor and the certain spin coefficients.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın ilk bölümünde Newman-Penrose [1] formalizmini kısaca tanıtacacağız. Bu çalışmanın hazırlanmasında esas olarak Frolov'un [2] adı geçen eserin faydalanılmıştır.

Einstein denklemlerinin çözümlerinin cebrik sınıflandırılması ilk olarak Petrov [3] tarafından çalışılır ve Pirani [4] bunları kullanarak gravitasyonel bir alanın dalga özelliklerini çalışır. Sonradan Penrose [5]spinör formalizimini kullanarak Petrov'un yöntemini oldukça basitleştirir. Herhangi bir cebrik tipteki gravitasyonel alanın özelliklerinin, Weyl tensörünün spinör bileşenleri üzerindeki bazı cebrik şartların gerçekleşmesiyle ilgili olduğu anlaşılır. Gerçekte bu tür bileşenlerin Newman-Penrose eşitliklerinde lineer olarak gözükmesi, belli bir cebrik tipteki çözümlerin çalışılması için Newman-Penrose sisteminin başarıyla kullanılmasına izin verir.

Weyl tensörü (vakumda eğrilik tensörü ile çakışıktır) bir öz (eigen) ışıksal vektör seti belirler (temel ışıksal vektörler diye adlandırılır). Bunların karşılıklı pozisyonu gravitasyonel alanın cebrik tipi ile direk olarak ilişkilidir. Temel ışıksal vektör alanlarının integral eğrileri, uzay-zaman manifoldunda ışık eğrilerinin bir ailesini (congruence) oluşturur. Bu tür ailelerin geometrik karakteristikleri gravitasyonel alanların daha detaylı bir sınıflandırmasına izin verir.

Eğer bir kompleks ışık tetratları alanı, tetradın iki reel bileşeninden biri, bir temel ışık vektörü ile çakışık olacak şekilde seçilirse, bunlara karşılık gelen diferansiyel invaryantlarla (optiksel skalerler olarak adlandırılır) çakışık spin katsayıları temel ışık ailesinin özelliklerini karakterize eder.

Hem Newman-Penrose eşitliklerini çözmek hem de çözümlerin özelliklerini çalışmak açısından koordinat sisteminin seçimi büyük önemdedir. En uygun koordinatlar, bunlardan birinin çalışılan gravitasyonel alanın temel ışık ailesinden biri ile çakışık olarak seçilmesidir. Bu koordinatlarda (bunlar çalışan çözümlerin ait olduğu sınıf ile doğrudan ilişkilidir) kompleks ışık tetratları bir temel ışık ailesine adapte edildiğinde Newman-Penrose sistemi basitleşir. Eğer bu tür koordinat

sistemlerini, genellikle kullanılan ve metrik üzerinde belli koşullar yükleyen koordinat sistemler (comoving coordinates) ile karşılaştırırsak; bir koordinat sisteminden diğerine dönüşümün sık sık açık olarak ifade edilemeyen komplike nonlineer dönüşümler içerdiğini görürüz. Değişkenlerin bu nonlineer dönüşümü çözümlerin temel ışık ailelerinden biri ile birleştirilmiş koordinatlarda açık olarak elde edilebilmesine ve basit bir forma sahip olmasına rağmen, diğer koordinatlarda çözümlerin açık olarak bulunamamasına yol açar.

Hem bir temel ışık ailsi ile birleştirilmiş ışık koordinatlarının seçimi hem de kompleks ışık tetratlarının kullanımı Newman-Penrose formalizimini kütlesiz alanların (gravitasyonel alan dahil) tanımlanması ve çalışılmasında uygun bir yöntem haline getirir.

Verilen bir cebrik sınıfa ait bir çözümün özelliği Weyl spinörünün belli spinör bileşenleri ve belli spinör katsayılarının gözükmemesi ile ikişkilendirilebilir. Ayrıca Newman-Penrose eşitlikleri gravitasyonel alanların (ve diğer kütlesiz alanların) asimptotik özelliklerinin çalışılmasında da uygundur. Bu eşitliklerin, Penrose tarafından yapılan asimptotik olarak düz uzayların tanımı ile birlikte kullanışı, alanların sonsuzdaki davranışını açıklayan bir dizi teoremi ispatlamayı mümkün kılmıştır.

2.GRAVİTASYONEL ALANDA IŞIK IŞINLARI

Bir gravitasyonel alanın yapısı üzerine bilgi elde etmenin yollarında birisi de alandaki farklı test parçacıklarının davranışını incelemektir. Eğer alan içindeki kütlesiz parçacıklar (foton, nötrino) göz önüne alınacak olursa bunlara karşılık gelen izleri de ışık ışınlarıdır (isotropic geodesics). Işık ışınları düşüncesinin önemi, çeşitli tipteki fiziksel alanların propagasyonunun (gravitasyonel alan dahil) hiperbolik bikarakteristikleri olması gerçeği ile ilgilidir. Genel olarak ışık ışınlarını gerçek fiziksel kütlesiz parçacıkların izi olarak düşünmek tam doğru değildir. Ancak bu idealizasyon, karşılık gelen radyasyonun dalgaboyu sıfıra yakın olacak kadar küçük olduğu zaman doğrudur. Radyasyonun dalga boyunun çok küçük olması temeli üzerine kurulan bu yaklaşıma "geometrik optik yaklaştırması" denir.

Null eğrileri uzaysal ve zamansal eğrilerden önemli bir noktada ayrılır. Null eğrileri, bir metriğe karşılık gelen uzayın bir alt manifoldunu oluştururlar. Ancak bunlara ait uzunluk bağıntıları tanımlanmamıştır. Vektörlerin null eğrileri boyunca paralel taşınması, onların uzay–zaman içine gömülmesiyle sağlanır ve böylece metrik bağlantılarına sahip olmadıkları için null eğrileri bir boyutlu afine uzaylarını oluştururlar.

2.1. Karakteristik Yüzeyler ve Bikarakteristik Işınlar

Gravitasyonel alan içindeki bir elektromagnetik ya da diğer bir alanın propagasyonu hiperbolik denklemlerle tanımlanır. Hiperbolik tipteki diferansiyel denklemlerin eliptiki ve parabolik denklemlerden en büyük farkı şudur; çözümler başlangıçta statik iken aniden dinamik hale gelebilir. Böylesi çözümler etkilerini bikarakteristikler olarak adlandırılan eğriler boyunca iletirler. Bu bikarakteristikler karakteristik hiperyüzeyler olarak adlandırılan yüzeyler üzerinde yer alırlar. Cauchy probleminin ve radyasyon probleminin çalışılmasında temel rol karakteristik yüzeyler ve bikarakteristik ışınlar (pertürbasyonların ilerlediği ışınlar) tarafından oynanır. Kütlesiz bir φ skarler alanı için

$$L[\varphi] \equiv g^{\mu\nu}\varphi_{;\mu;\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) = 0 \qquad (2.1)$$

yazılabilir ve şu forma dönüşebilir:

$$g^{00}\partial_0^2\varphi + 2g^{0i}\partial_0\partial_i\varphi + g^{ij}\partial_i\partial_j\varphi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)\partial_\nu\varphi = 0 \qquad (2.2)$$

Eğer $g^{00} \neq 0$ olursa Σ yüzeyi üzerindeki φ ve $\partial_0\varphi$ başlangıç verileri (Cauchy verleri), $x^0 = 0$ sabit koşullu yüzey üzerinde $\partial_0^2\varphi$'nin bulunmasına izin verir ve böylece φ'nin tek bir çözümü elde edilir (en azından Σ yüzeyinin bazı komşuluklarında). Genel durumda Σ yüzeyi şeklinde bir eşitlik ile tanımlanmışsa, $x^{0'} = u(x^\mu), x^{i'} = f^i(x^\mu)$ yeni koordinatları kullanılarak Σ üzerindeki φ ve $\partial_u\varphi$ verileri ile birlikte Cauchy probleminin tekrar çözüme izin verdiği sadece ve sadece $g^{uu} \equiv g^{0'0'} = \partial_\mu u\partial_\nu u g^{\mu\nu} \neq 0$ koşulları ile mümkündür. Diğer durumda

$$g^{uu} = g^{\mu\nu}\partial_\mu u\partial_\nu u = 0 \qquad (2.3)$$

koşulunda (2.2) eşitliği başlangıç verileri üzerinde ek koşullar yükler ve $\partial_u^2\varphi$'yi belirlemek mümkün olmaz. Bu durumda Σ üzerindeki φ ve $\partial_u\varphi$ başlangıç verileri Σ yüzeyi dışındaki φ alanın değerini belirlemez. Cauchy datalarının üzerlerinde ikinci türevleri belirlemediği böyle yüzeylere karakteristik yüzeyler denir.

Karakteristik yüzeyler dalga cepeleri rolünü oynarlar, yani böyle yüzeylerde (2.1) eşitliğinin çözümü süreksizliklere (ikinci türevlerin süreksizliği) yol açabilir. Σ yüzeyi üzerine A niceliğinin sıçramasını $\Delta[A]$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\Delta[\varphi] = \Delta[\varphi_{,\mu}] = 0, \quad \Delta[\varphi_{,\mu\nu}] = \Psi_{\mu\nu} = \Psi_{\nu\mu} \qquad (2.4)$$

$u(x^\mu) = c$ eşitliği ile tanımlanmış bir Σ yüzeyi üzerindeki birbirine yakın x^μ ve $x^\mu + dx^\mu$ noktalarını düşünelim. dx^μ yüzey boyunca öteleme vektörü olduğundan $u_{,\mu}dx^\mu = 0$ olacaktır. Böylesi herbir translasyon için $\partial_\mu\varphi(x+dx) = \varphi_{,\mu}(x) + \varphi_{,\mu\nu}dx^\nu$ Σ yüzeyinde süreklidir. Böylece

$$\Delta[\varphi_{,\mu}(x+dx)] = \Delta[\varphi_{,\mu}(x)] + \Delta[\varphi_{,\mu\nu}(x)dx^\nu] = 0 \qquad (2.5)$$

ya da

$$\Delta\left[\varphi_{,\mu\nu}(x)dx^{\nu}\right]=\Psi_{\mu\nu}dx^{\nu}=0 \tag{2.6}$$

olacaktır.

μ indisi belirlenerek ve $\Psi_{\mu\nu}=P_{(\mu)\nu}$ yazılarak, $u_{,\nu}$ ve $P_{(\mu)\nu}$ nün Σ boyunca öteleme vektörü tarafından oluşturulmuş aynı üç boyutlu yüzey elemanlarına dik oldukları belirlenir ve böylece paralel oldukları anlaşılır:

$$\Psi_{\mu\nu}=P_{(\mu)\nu}=P_{(\mu)}u_{,\nu} \tag{2.7}$$

$\Psi_{\mu\nu}$ nün simetrisinden yararlanarak;

$$\Delta\left[\varphi_{,\mu\nu}\right]=\Psi_{\mu\nu}=\Psi u_{,\mu}u_{,\nu} \tag{2.8}$$

Diğer taraftan (2.1) eşitliği tüm uzayda da geçerlidir. Bu eşitliği Σ nın bir komşuluğunda düşünerek ve (2.4) nolu eşitliğini de göz önüne alarak (2.1)'in her iki tarafındaki sıçramayı hesaplarsak;

$$g^{\mu\nu}\Delta\left[\varphi_{,\mu\nu}\right]=\Psi g^{\mu\nu}u_{,\mu}u_{,\nu}=0 \tag{2.9}$$

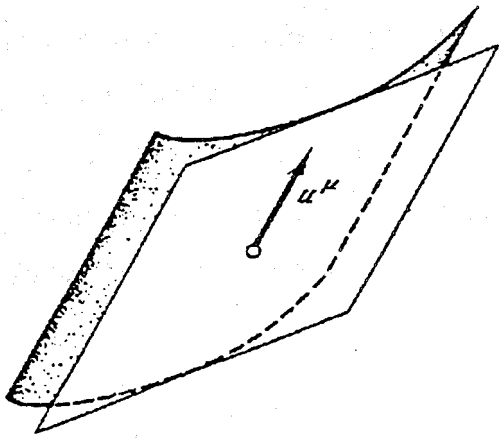
elde edilir.

Buradan hareketle $\varphi_{,\mu\nu}$ deki bir sıçramanın ancak karakteristik yüzeylerin üzerindeki mümkün olduğu söylenebilir. Böylece karakteristikleri, üzerinde Cauchy datalarının verilmediği yüzeyler olarak tanımlamak yerine, üzerinde çözümlerin fiziksel olarak anlamlı, süreksizliklerinin mümkün olduğu yüzeylere eşdeğer olarak tanımlamak daha uygundur. Böyle yüzeylere dalga cepheleri denir. Böyle bir dalga cephesi, ötesinde anında tedirgemelerin bulunmadığı bir sınırda meydana gelir. Tedirgemeleri tanımlayan çözüm bu yüzeyin bir tarafında özdeş olarak gözükmezken diğer tarafında sıfırdan farklıdır.

Verilen örnekte bir karakteristik yüzeyin, (2.3) ile verilen eşitliğin hiçbir biçimde skaler alanın özelliklerine bağlı olmadığı açıkça görülür. Karakteristik yüzey tamamen uzay-zamanın yapısı, daha doğrusu geometrisi tarafından belirlenir. Bu yüzeyden, $u=sabit$ yüzeylerinin ((2.3) eşitliğinin konusu olan yüzeyler) aynı zamanda Maxwell eşitlikleri için ve bir gravitasyonel alanın zayıf propagasyonunu tanımlayan eşitlikler için de karakteristik olması süpriz olmamıştır. Dahası, nonlineer

Einstein eşitlikleri çalışılırken anlaşılmıştır ki eğer $g_{\mu\nu}$ ve $\partial_\gamma g_{\mu\nu}$'nün sürekliliğini varsayarak $g_{\mu\nu}$'nün ikinci dereceden türevlerini içeren $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ eğrilik tensörü sadece karakteristik yüzeyler üzerinde süreksizliğe sahip olabilir. $g_{\mu\nu}$'nün sürekliliği açısından bakıldığında (2.3) eşitliği tamamen belirlenmiş bir anlama sahiptir.

Vakumdaki fiziksel alanların tedirgemeleri ışık hızına eşit bir hızla yayılırlar ve bundan dolayı dalga cephelerinin farklı zamanlardaki yerini belirleyen karakteristlikler ışıksal yüzeylerdir. Çözümlerin fiziksel süreksizlikleri, bikarakteristik ışınlar boyunca bu karakteristikler üzerinde hareket ederler ve süreksizliklerin propagasyonu basit bir adi diferansiyel denklem ile tanımlanır.



Şekil 1. Σ karakteristik yüzeyine teğet ışıksal vektör.

Σ karakteristik yüzeyinin $u(x)=c$ eşitliği ile tanımlandığını varsayalım. u, Σ yüzeyinin bir normal kovektörüdür ve $u^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu u$, Σ yüzeyine normal bir vektördür. ξ^μ vektörü Σ'ya teğettir ve $\xi^\mu u_{,\mu}=0$'dır. Diğer taraftan (2.3) eşitliği $u^\mu u_{,\mu} = g^{\mu\nu}u_{,\mu}u_{,\nu}=0$ idi. Böylece u^μ vektörünün kendisi Σ yüzeyine teğettir. Bundan dolayı u^μ vektörü ışıksaldır (Şekil1.).

Uzayın u^μ'ye parelel olmayan ve $\xi^\mu u_{,\mu}=0$ eşitliği ile belirlenen (Σ yüzeyine teğet olan) geriye kalan bütün vektörleri uzaysaldır. Bu yüzeyden karakteristik yüzeyler ışıksaldır (Bir hiperyüzey eğer teğet uzayının her noktasında tam olarak bir tane ışıksal doğrultuya sahip ise ışıksaldır. Eğer teğet uzayının her noktasında iki ayrık ışıksal doğrultuya sahipse zamansaldır ve eğer hiç ışıksal doğrultusu yoksa uzaysaldır).

Herhangi bir $u(x^\mu)=0$ karakteristik yüzeyi bir parametreli $u(x^\mu)=c$ karakteristik yüzeyler ailesinin içinde yer alabilir. Böylesi bir aile uzay-zamanın bir bölgesinde bir u^μ ışıksal vektör alanı üretebilir. Bu alanın $x^\mu(r)$ integral eğrileri şu eşitlik ile tanımlanır:

$$\frac{dx^\mu}{dr}=g^{\mu\nu}u_{,\nu} \tag{2.10}$$

Bikarakteristik ışınlar (ya da sadece bikarakteristikler, veya ışınlar) olarak adlandırılır. Şu önermeler ileri sürülebilir:

1) $u(x)=c$ yüzeyinin bir noktasında geçen her çözüm (2.10) eşitliğinin bir çözümüdür.

2) Bikarakteristikler ışıksal eğrilerdir, yani onlara teğet vektörler izoropiktir.

3) Bikarakteristikler null jeodezikleridir.

İkinci iddianın doğruluğu u^μ vektörünün (2.3) eşitliğini sağladığını hatırlarsak açıktır. Üçüncü iddiayı kanıtlamak için u^μ vektörünün bikarakteristik eğrileri boyunca paralel taşındığının onaylanması yeterli olacaktır, yani:

$$\frac{Du^\mu}{dr}\equiv u^\mu u^\mu_{;\nu}=0 \tag{2.11}$$

Bu eşitlik şu şekilde kurulur;

$$u^\mu u^\mu_{;\nu}=u^\nu\left(g^{\mu\alpha}u_{,\alpha}\right)_{;\nu}=u^\nu g^{\mu\alpha}u_{;\nu;\alpha}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(u^\nu u_\nu\right)_{;\alpha}=0 \tag{2.12}$$

Şimdi, çözümlerin süreksizliğinin ışınlar doğrultusunda meydana geldiğini göstermek istersek, bunu göstermek için $x^0=u$ olan yani $x^0=$sabit yüzeylerinin (2.1) eşitliğinin karakteristiği olduğu bir x^μ koordinat sistemi seçeriz.

(2.8) eşitliğinde, aynı anda φ'nin kendisi, birinci türevi ve $\varphi_{,00}$ hariç diğer bütün ikinci türevlerin sürekli bulunduğu $x^0=$sabit olan Σ yüzeyi üzerinde $\varphi_{,00}$ büyüklüğü bir sıçramaya uğrar. Eğer $\varphi_{,00}=\omega$ yazılarak ve $g^{00}=g^{uu}=0$ olduğu kullanılarak, (2.2) x^0'a göre türetilirse

$$2g^{0i}\partial_i\omega+\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu 0}\right)\omega+J=0 \tag{2.13}$$

elde edilir. Burada J , $\varphi_{,00}$'ı içermeyen terimlerin bir toplamıdır. $\varphi_{,00}$'daki sıçramayı $\Delta[\varphi_{,00}]=\Delta[\omega]=\Psi$ ile gösterirsek ve (2.13) deki J'yi Σ yüzeyi üzerindeki sürekli alırsak Ψ'nin propagasyonu için şu eşitlik elde edilir.

$$2g^{0i}\partial_i\Psi+\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu 0}\right)\Psi=0 \tag{2.14}$$

(2.14) eşitliğini herhangi bir koordinat sisteminde yazmak için $g^{0i}\partial_i\Psi=g^{\mu\nu}u_{,\mu}\Psi_{,\nu}=u^{\nu}\Psi_{,\nu}$ olduğu düşünülür. Böylece (2.14)'deki ilk terim bir bikarakteristik doğrultusu boyunca türevdir. İkinci terim $L[u]$'ya eşittir. Buradaki $L[\varphi]$ operatörü (2.1) tanımlanmıştır. Böylece

$$\frac{d\Psi}{dr}+P\Psi=0 \tag{2.15}$$

olur, burada d/dr, Σ yüzeyi üzerindeki bikarakteristik doğrultusundaki türevi gösterir ve $P\equiv\frac{1}{2}L[u]$'dur.

(2.15) eşitliği karakteristik süreksizlik yüzeyleri üzerinde uzanan ışınlar boyunca olan propagasyonun denklemidir. Bir adi diferansiyel denklem formundadır ve sıçramanın, ışının üzerindeki herhangi bir yerde sıfırdan farklı olması şartıyla sıçramanın büyüklüğünün ışın üzerindeki herhangi bir noktada kaybolmayacağını söyler.

$u(x)=c$ karakteristikleri ailesinin bir ışıksal $u^{\mu}=g^{\mu\nu}u_{,\nu}$ vektör alanı ürettiği böylece anlaşılır. Bu alanın integral eğrileri (ışınlar) null yüzeyleri (karakteristikler) üretir. Şimdi uzay-zamanın herhangi bir bölgesinde bir ξ^{μ} ışıksal vektör alanı verildiğini varsayalım. Genel durumda bu alanın integral eğrileri null yüzeyleri üzerinde uzanmaz. ξ^{μ} vektör alanının

$$\frac{dx^{\mu}}{dr}=\xi^{\mu} \tag{2.16}$$

ile verilen integral eğrilerinin $u(x)=c$ ile verilen bir null hiperyüzey ailesinin üzerinde tamamen uzanması için

$$\xi_{[\lambda}\xi_{\mu,\nu]}=0 \tag{2.17}$$

koşulu gerek ve yeterlidir. Eğer (2.17) eşitliği sağlanıyorsa ξ^μ vektör alanının integral eğrileri null jeodezikleridir.

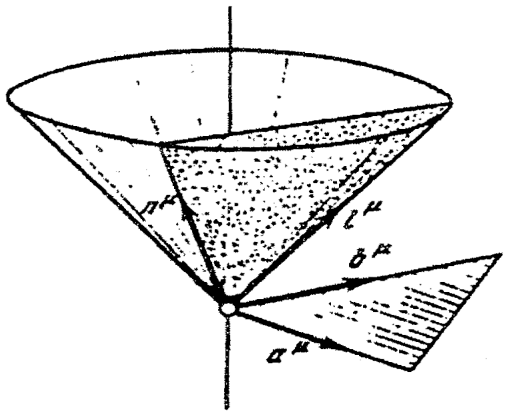
Eğer ξ^μ ve u^μ vektörleri orantılı ise geometrik olarak her iki vektör alanının integral eğrileri çakışıktır. Daha önce yapılan önermeler ışığında u^μ vektör alanının integral eğrileri null jeozedikleri idi ve bundan dolayı ξ^μ'nün integral eğrileri null jeodezikleri olur.

Bir ξ vektör alanı tarafından yaratılan null eğrilerinin (2.17) koşulunu sağlayan $\Gamma(\xi)$ ailesi, normal aile olarak adlandırılır.

Bu bölümde çalışılan null eğrileri, ileride Weyl tansörünün cebirsel sınıflandırımasında kullanılacaktır.

2.2 Kompleks Null Tetratları ve Spin Katsayıları

Bir çok sorunun ele alınmasında ve özellikle null eğrileri (jeodezik olması gerekmeyen) ailelerinin geometrik özelliklerinin çalışılmasında, uygun olarak seçilmiş ve verilen ailelere adapte edilmiş tetrat alanının önemi büyüktür. Bunun için uzay-zamanın keyfi bir P noktasında, bu P noktasından geçen ailenin null eğrilerine teğet bir ışıksal l^μ vektörü inşa edilir. Geleceğe yönelmiş başka herhangi bir n^μ ışıksal vektörü, l^μ'den lineer bağımsızdır ve $n^\mu l_\mu > 0$ dır. n^μ'yü uygun bir faktör ile çarparak $n^\mu l_\mu = 1$ yapabiliriz. l^μ ve n^μ vektör çifti kendilerine ortogonal bir iki boyutlu alt uzay belirlerler (Şekil 2.). Bu alt uzayda a^μ ve b^μ vektör çiftini içeren bir baz seçilir.



Şekil 2. Null tetratları.

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \qquad a_\mu b^\mu = 0 \tag{2.18}$$

olur ve böylece teğet uzayında $\left(l^\mu, n^\mu, a^\mu, b^\mu\right)$ bazı oluşturulur. Fakat bunlar yerine bunların kompleks bir kombinasyonuyla çalışmak daha uygun olacaktır. Bunun için

$$m^\mu = \frac{\left(a^\mu + ib^\mu\right)}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{m}^\mu = \frac{\left(a^\mu - ib^\mu\right)}{\sqrt{2}} \qquad \text{ve} \qquad m_\mu m^\mu = \overline{m}_\mu \overline{m}^\mu = 0, \qquad m^\mu \overline{m}_\mu = -1$$

alınacaktır. Bunun bir sonucu olarak uzay-zamanın her noktasına $z_m^\mu = \left(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu\right)$ şeklinde bir tetrat karşılık gelir ve şu normalizasyon koşulunu sağlar:

$$z_m^\mu z_{n\mu} = \eta_{mn}$$

$$\eta^{mn} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \eta_{mn} \tag{2.19}$$

Bu tetratlara kompleks null tetratları denir.

Yukarıdaki şekilde oluşturulmuş ve null eğrilerinin bir ailesi ile birleştirilmiş kompleks null tetratları alanı, tek şekilde belirlenmekten uzak olduğu açıktır. l^μ vektörü, aile eğrilerinin parametrizasyonundaki bir değişikliğe karşılık gelen $l'^\mu = Al^\mu$ transformasyonu ile belirlenebilir. Eğer null jeodeziklerinin bir congruencei gözönüne alınıyor ve kanonik parametrizasyon seçiliyorsa $A = A^0(y^i)$ r'ye bağlı değildir. Normalizasyon koşulu gereği $n^\mu \to n'^\mu = A^{-1}n^\mu$'dır. Kalan keyfilikler n^μ ışıksal doğrultusunun seçiminin tek şekilde olmamasıyla ilişkilidir. l^μ'yü belirlemek için böylesi her bir seçim l^μ ve n^μ'ye ortogonal bir iki boyutlu altuzayın seçimine karşılık gelir. l^μ'ye ortogonal olan böylesi bir alt uzay l^μ doğrultusu boyunca uzanan ışık konisine teğet bir hiperdüzlem içinde uzanır. n^μ'nün değiştirilmesiyle elde edilen yeni iki boyutlu alt uzaydaki bir baz, eski alt uzaydaki a^μ ve b^μ bazlarında şu şekildeki bir dönüşümle elde edilebilir:

$$a'^\mu = a^\mu + \beta_1 l^\mu \qquad b'^\mu = b^\mu + \beta_2 l^\mu \tag{2.20}$$

Ya da kompleks m^{μ} ve $\overline{m}^{\mu}$ vektörleri için,

$$m'^{\mu} = m^{\mu} + Bl^{\mu}, \quad \overline{m'}^{\mu} = \overline{m}^{\mu} + \overline{B}l^{\mu}, \quad B = \frac{(\beta_1 + i\beta_2)}{\sqrt{2}}$$

şeklinde yazılabilir. n^{μ}'nün m^{μ} ve $\overline{m}^{\mu}$'ye ortagonal olması koşulu ve $l_{\mu}n^{\mu} = 1$ normalizasyon koşulu n^{μ} için şu dönüşümü yapmamıza izin verir:

$$n'^{\mu} = n^{\mu} + \overline{B}m^{\mu} + B\overline{m}^{\mu} + B\overline{B}l^{\mu} \tag{2.21}$$

Tetradın seçiminde geriye kalan keyfilikler iki boyutlu alt uzaydaki a^{μ} ve b^{μ} bazılarının seçimlerinin tek şekilde olmamasıyla ilgilidir. Bu bazlar bir dönmeyi belirler ve bu yüzden m^{μ}'nün seçimi şu şekilde yapılabilir: $m'^{\mu} = e^{iC}m^{\mu}$

Yukarıda söylenenler özetlenecek olursa, null eğrilerinin bir ailesinde temellenmiş kompleks null tetratlarının seçimindeki en genel keyfilikler şu dönüşümlerle tanımlanır.

$$\begin{aligned} l'^{\mu} &= Al^{\mu} \\ n'^{\mu} &= A^{-1}\left(n^{\mu} + \overline{B}m^{\mu} + B\overline{m}^{\mu} + B\overline{B}l^{\mu}\right) \\ m'^{\mu} &= e^{iC}\left(m^{\mu} + Bl^{\mu}\right) \\ \overline{m'}^{\mu} &= e^{iC}\left(\overline{m}^{\mu} + \overline{B}l^{\mu}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Daha kesin olarak, (2.22) eşitliği l^{μ} vektörünün doğrultusunu ve (2.19) normalizasyon koşulunu koruyan dönüşümlerin en büyük grubunu tanımlar. Bu dönüşümler Lorentz grubunun dört parametreli bir alt grubunu oluşturur. Bu yüzden kompleks null tetratları alanının seçimindeki bütün keyiflilikler dört değişkenin dört keyfi fonksiyonu ile tanımlanır. Kanonik parametrizasyonlu null jeodeziklerinin bir ailesi durumunda üç keyfi A fonksiyonundaki biri sadece koordinata bağlı olacaktır.

z_m^{μ}'ye dual formların bazıları z_{μ}^m ile gösterilirse şu gösterilebilir;

$$z_{\mu}^m z_n^{\mu} = \delta_n^m \tag{2.23}$$

Bu eşitlik kullanılarak ve (2.19) normalizasyon koşulu ile,

$$z_{\mu}^m = g_{\mu\nu}\eta^{mn}z_n^{\nu}, \qquad z_{\mu}^m = \left(n_{\mu}, l_{\mu}, -\overline{m}_{\mu}, -m_{\mu}\right) \tag{2.24}$$

elde edilir. $z_m^\mu z_{n\mu} = \eta_{mn}$ eşitliğini z_ν^n ile çarparsak, $z_m^\mu z_{n\mu} z_\nu^n = z_{m\nu}$ bağlantısı bütün z_m^μ vektörleri için doğru olur. Bu eşitlik kullanılarak şu sonuç çıkabilir:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= z_{m\mu} z_\nu^m = \eta_{mn} z_\mu^m z_\nu^n = 2\left[l_{(\mu} n_{\nu)} - m_{(\mu} \overline{m}_{\nu)}\right] \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{mn} z_m^\mu z_n^\nu = 2\left[l^{(\mu} n^{\nu)} - m^{(\mu} \overline{m}^{\nu)}\right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

Uzay-zamanda bir kompleks null tetratları alanının verilmesi, geometrik nesnelerin tanımlanması için tetrat formalizminin kullanılmasına izin verir. Alışıldığı üzere kovaryant türev operasyonu γ_{mnl} Ricci dönme katsayılarının verilmesiyle belirlenir.

$$\gamma_{mnl} = z_n^\nu z_l^\lambda z_{m\nu;\lambda} = -\gamma_{nml} \tag{2.26}$$

Bu antisimetri özelliği nedeniyle 24 tane bağımsız γ_{mnl} reel niceliği vardır; bunlar yukarıdaki gibi kompleks lirht tetratlarının kullanıldığı durunda 12 tane kompleks nicelik içinde gruplanmıştır. Bu nicelikleri özel harflerle isimlendirmek alışılmıştır.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1/2\left(\gamma_{121} - \gamma_{341}\right) = 1/2\left(l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu l^\nu\right) \\ \alpha &= 1/2\left(\gamma_{124} - \gamma_{341}\right) = 1/2\left(l_{\mu;\nu} n^\mu \overline{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu\right) \\ \beta &= 1/2\left(\gamma_{123} - \gamma_{343}\right) = 1/2\left(l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu m^\nu\right) \\ \gamma &= 1/2\left(\gamma_{122} - \gamma_{342}\right) = 1/2\left(l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu n^\nu\right) \\ \kappa &= \gamma_{131} = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu \qquad \tau = \gamma_{132} = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu \\ \sigma &= \gamma_{133} = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu \qquad \rho = \gamma_{134} = l_{\mu;\nu} m^\mu \overline{m}^\nu \\ \pi &= -\gamma_{241} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu l^\nu \quad \nu = -\gamma_{242} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu n^\nu \\ \mu &= -\gamma_{243} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu m^\nu \quad \lambda = -\gamma_{244} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu \end{aligned} \tag{2.27}$$

Bu nicelikler spin katsayıları olarak bilinirler. Eğer kompleks null tetratları alanı null eğrilerinin bir ailesi ile belirlenmişse, spin katsayıları hem ailenin geometrik özellikleri hem de tetratların seçimi hakkında somut bilgiler içerir.

Şu ilişki kolaylıkla gösterilebilir:

$$\gamma_{m[nl]} = 1/2\, z_n^\nu z_l^\lambda \left(z_{m\nu;\lambda} - z_{m\lambda;\nu}\right) = 1/2\, z_n^\nu z_l^\lambda \left(z_{m\nu,\lambda} - z_{m\lambda,\nu}\right) \tag{2.28}$$

ve (2.26) eşitliği kullanılarak

$$\gamma_{mnl} = \gamma_{m[nl]} + \gamma_{n[lm]} - \gamma_{l[mn]} \tag{2.29}$$

Bu yüzden verilen bir z_m^μ'nün terimlerinde γ_{mnl} niceliklerinin hesaplanması sadece cebrik operasyonlarla birlikte kısmi diferansiyel operasyonları uygulanmasını gerektirir.

Tetrat formalizminde aşağıdaki ilişki ile tanımlanan tensörlerin tetrat bileşenlerini kullanarak bütün hesaplamaları yapmak uygundur.

$$T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{\beta_1\ldots\beta_q} \leftrightarrow T_{m_1\ldots m_p}^{n_1\ldots n_q} = z_{m_1}^{\alpha_1}\ldots z_{m_p}^{\alpha_p} z_{\beta_1}^{n_1}\ldots z_{\beta_q}^{n_q} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{\beta_1\ldots\beta_q} \tag{2.30}$$

Daha açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{\beta_1\ldots\beta_q};\alpha \leftrightarrow T_{m_1\ldots m_p}^{n_1\ldots n_q};m &= z_m^\alpha z_{m_1}^{\alpha_1}\ldots z_{m_p}^{\alpha_p} z_{\beta_1}^{n_1}\ldots z_{\beta_q}^{n_q} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{\beta_1\ldots\beta_q};\alpha \\ &= T_{m_1\ldots m_p}^{n_1\ldots n_q},m + \gamma_{,m_1m}^{l} T_{lm_2\ldots m_p}^{n_1\ldots n_q} + \ldots + \gamma_{,m_pm}^{l} T_{m_1\ldots m_{p-1}l}^{n_1\ldots n_q} \\ &+ \gamma_{l,m}^{n_1} T_{m_1\ldots m_p}^{ln_2\ldots n_q} + \ldots + \gamma_{l,m}^{n_q} T_{m_1\ldots m_p}^{n_1\ldots n_{q-1}l} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Burada $T_{m_1\ldots m_p,m}^{n_1\ldots n_q} = z_m^\nu \left(T_{m_1\ldots m_p}^{n_1\ldots n_q}\right)_{,\nu}$'dür.

Ricci özdeşliği:

$$z_{m\mu[;\alpha;\beta]} = -1/2\, z_{m\nu} R_{,\mu\alpha\beta}^{\nu} \tag{2.32}$$

eğrilik tensörünü tanımlamayı sağlar ve $z_\mu^n z_\alpha^p z_\beta^q$ niceliği kullanarak yapılan uygun kısaltmaların ardından eğrilik tensörünün tetrat bileşenleri hesaplanabilir.

$$R^{mnqp} = \gamma^{mnp,q} - \gamma^{mnq,p} + \gamma_l^{mq}\gamma^{lnp} - \gamma_l^{mp}\gamma^{lnq} + \gamma^{mnl}\left(\gamma_l^{pq} - \gamma_l^{qp}\right) \tag{2.33}$$

Tetrat notasyonunda Bianchi özdeşliği $R_{\alpha\beta[\gamma\delta;\mu]} = 0$ şu forma dönüşür;

$$R_{mn[pq,r]} - \gamma_{m,[r}^{l} R_{pq]ln} + \gamma_{n,[r}^{l} R_{pq]lm} - 2R_{mnl[p}\gamma_{r,q]}^{l} = 0 \tag{2..34}$$

3. NEWMAN-PENROSE FORMALİZMİNİN UYGULAMASI

Genel Relativite de NP formalizmi Eintein alan denklemlerinin çözümlerinin bulunmasında ve çözümlerin özelliklerinin belirlenmesinde çok kullanışlı araçlar sağlar. Bu formalizmde, tensör eşitlikleri komplex skalerler için diferansiyel denklemlere indirgenir ve bu komplex skalerler uzay-zamanın cebrik ve geometrik özellikleriyle direkt olarak ilişkilidir. Bundan sonraki hesaplamaları yaparken kullandığımız metod Yavuz Nutku'nun 1974'te yaptığı yayınlanmayan bir çalışmasından alınmıştır [6]. Bu yöntemde dış-formlardan yararlanarak denklemler ifade edilmiştir.

$\left(l,n,m,\overline{m}\right)$ null tetratlarını, dış diferansiyel formlardan yararlanarak ele alırsak, null tetradı bir 2x2 Hermityen $\tilde{\sigma}$ matrisinin terimleri olarak yazılabilir. Bu $\tilde{\sigma}$ matrisi bir-formlar olarak aşağıdaki gibi alınabilir.

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} l & \overline{m} \\ m & n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$\tilde{\sigma}$ üzerine bir Lorentz dönüşümü etkirse, ki burada $S \in SL(2,C)$ 'dir;

$$\tilde{\sigma} \to S\tilde{\sigma}S^{+} \tag{3.2}$$

Cartan'ın ilk eşitliği şu şekilde yazılabilir:

$$d\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \wedge \Gamma - \Gamma^{+} \wedge \tilde{\sigma} = 0 \tag{3.3}$$

burada;

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_2 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanmış $SL(2,C)$ Lie cebri-değerli bağlantıdır ve Γ aşağıdaki şekilde verilen kompleks bağlantılı bir-formlardır.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \gamma l + \varepsilon n - \alpha m - \beta \bar{m} \\ \Gamma_1 &= -\tau l - \kappa n + \rho m + \sigma \bar{m} \\ \Gamma_2 &= \nu l + \pi n - \lambda m - \mu \bar{m}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Buradaki bir-formlara ait oniki tane kompleks katsayı Newman-Penrose spin katsayıları olarak adlandırlır. Bunlar yirmidört tane reel temel Ricci dönme katsayılarına karşılık gelirler. (3.4) ve (3.5) denklemleri (3.3)'te yerine yazılırsa şunlar elde edilir.

$$\begin{aligned}dl &= -\left(\varepsilon + \bar{\varepsilon}\right) l \wedge n + \left(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau}\right) l \wedge m + \left(\bar{\alpha} + \beta - \tau\right) l \wedge \bar{m} \\ &- \bar{\kappa} n \wedge m - n \wedge \bar{m} + \left(\rho - \bar{\rho}\right) m \wedge \bar{m}, \\ dn &= -\left(\gamma + \bar{\gamma}\right) l \wedge n + \nu l \wedge m + \bar{\nu} l \wedge \bar{m} + \left(\pi - \alpha - \bar{\beta}\right) n \wedge m \\ &+ \left(\bar{\pi} - \bar{\alpha} - \beta\right) n \wedge \bar{m} + \left(\mu - \bar{\mu}\right) m \wedge \bar{m}, \\ dm &= -\left(\tau + \bar{\pi}\right) l \wedge n + \left(\bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma}\right) l \wedge m + \bar{\lambda} l \wedge \bar{m} \\ &- \sigma n \wedge \bar{m} + \left(\varepsilon - \bar{\varepsilon} - \rho\right) n \wedge m + \left(\beta - \bar{\alpha}\right) m \wedge \bar{m}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Benzer şekilde Cartan'ın ikinci eşitliği de şöyle yazılabilir.

$$R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_2 \\ \theta_1 & -\theta_0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Burada R, $SL(2,C)$ Lie-cebri değerli eğriliktir ve eğrilik iki-formlar cinsinden şu şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= d\Gamma_0 - \Gamma_1 \wedge \Gamma_2 \\ \Theta_1 &= d\Gamma_1 - 2\Gamma_0 \wedge \Gamma_1 \\ \Theta_2 &= d\Gamma_2 + 2\Gamma_0 \wedge \Gamma_2\end{aligned} \tag{3.8}$$

Eğer bu iki-formları açık halde yazarsak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= \left(\Lambda - \Phi_{11} - \Psi_2\right) l \wedge n + \Psi_3 l \wedge m + \Phi_{12} l \wedge \bar{m} - \Phi_{10} n \wedge m \\ &- \Psi_1 n \wedge \bar{m} + \left(\Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda\right) m \wedge \bar{m} \\ \Theta_1 &= \left(\Phi_{01} + \Psi_1\right) l \wedge n - \left(\Psi_2 + 2\Lambda\right) l \wedge m - \Phi_{02} l \wedge \bar{m} + \Phi_{00} n \wedge m \\ &+ \Psi_0 n \wedge \bar{m} + \left(\Phi_{01} - \Psi_1\right) m \wedge \bar{m} \\ \Theta_2 &= -\left(\Phi_{21} + \Psi_3\right) l \wedge n + \Psi_4 l \wedge m + \Phi_{22} l \wedge \bar{m} - \Phi_{20} n \wedge m \\ &- \left(\Psi_2 + 2\Lambda\right) n \wedge \bar{m} + \left(\Psi_3 - \Phi_{21}\right) m \wedge \bar{m}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Buradaki, iki-formların bazılarının komleks katsayıları, Weyl ve Ricci tensörlerinin tetrat çerçevesi üzerindeki projeksiyonlarıdır. $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ ve Ψ_4 kompleks

skalerleri Weyl spinörünün, $\Phi_{ij}(i, j = 0,1,2)$ Ricci spinörünün bağımsız bileşenleridir ve $\Lambda = g^{\mu\nu}\frac{R_{\mu\nu}}{24}$'dür. Ayrıca Ricci spinörünün bileşenleri $\overline{\Phi_{ij}} = \Phi_{ji}$ özelliğini sağlarlar.

Weyl tensörünün on tane bağımsız reel bileşeni ve Ricci tönsörünün on reel bağımsız bileşeni kompleks düzlemde sırasıyla beş tane ve altı tane Newman-Penrose skaleri ile gösterilir. Sonuç olarak alanların Newman-Penrose formu daha az sayıda denklem ortaya çıkarır.

Spin katsayıları, gölgelerin propagasyonu terimleriyle açıklanabilir. Bunun için, teğet vektörü 1 olan null eğrileri ailesi olarak görünebilecek bir ışık ışınları demetine dik olarak yerleştirilmiş bir çemberi gözönüne alalalım. Eğer çember bu eğri ailesi boyunca taşınırsa, çember, genişleyebilir, dönebilir veya shear etkisine uğrayabilir. Shear bir spin katsayısı olan σ ile ölçülür. Dönme ve genişleme sırasıyla ω ve θ ile gösterilir ve şu şekilde verilir,

$$\omega = \mathrm{Im}\,\rho, \qquad \theta = -\mathrm{Re}\,\rho \tag{3.10}$$

Burada Im ve Re niceliklerin imajiner ve reel kısmlarıdır. σ, ω ve θ propagasyonun geometrisi ile ilişkili oldukları için optik skalerler olarak adlandırılırlar.

Uzay-zamanın Petrov sınıflandırması, aynı zamanda Newman-Penrose formalizminden de elde edilebilir.

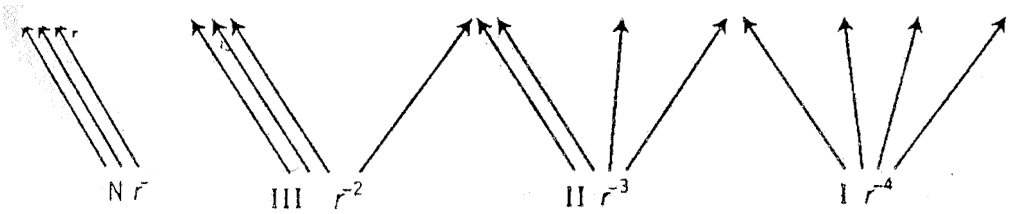
$$l \to l, \;\; n \to n + \bar{A}m + A\bar{m} + A\bar{A}l, \qquad m \to m + Al$$

$$l \to M^{-1}l, \qquad n \to Mn, \qquad m \to e^{iN}m \tag{3.11}$$

ile verilen tetrat dönüşümlerinden yararlanarak, özel bir uzay-zaman için Weyl spinörünün maksimum sayıdaki bileşenlerinin yok olduğu özel bir tetrat çerçevesinin var olduğu gösterilebilir. Böylesi bir tetrat çerçevesine göre, Petrov sınıflandırması aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

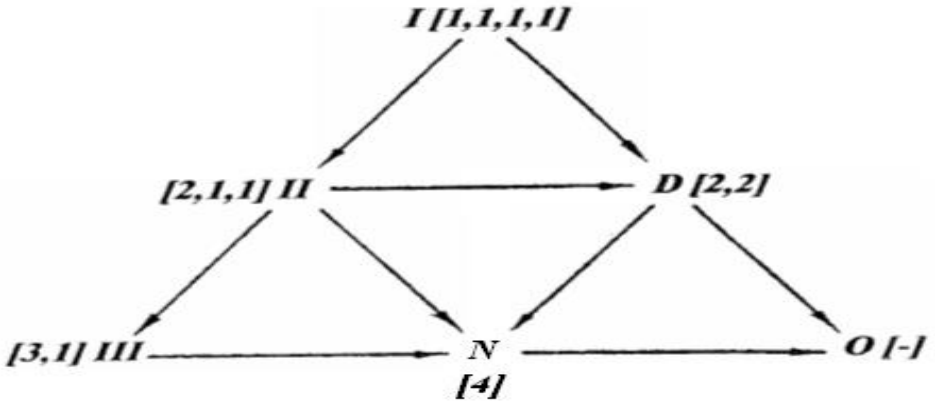
$$
\begin{aligned}
&\textit{Petrov tipi } I \quad : \Psi_0 = \Psi_4 = 0 \\
&\textit{Petrov tipi } II \quad : \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_4 = 0 \\
&\textit{Petrov tipi } D \quad : \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0 \\
&\textit{Petrov tipi } III \quad : \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0 \\
&\textit{Petrov tipi } N \quad : \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0 \\
&\textit{Petrov tipi } O \quad : \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Eğer uzay-zaman I Petrov tipinde ise, cebrik olarak genel, değilse özel olarak isimlendirilir. Cebrik olarak genel uzay-zamanda Weyl tensörünün temel null doğrultularının hepsi farklıdır, buna karşılık cebrik olarak özel uzay-zamanda en az iki tane temel null doğrultusu çakışıktır (Şekil3.1).



Şekil 3.1. Null doğrultularının karşılılı pozisyonları.

Yukarıda gösterilen bu durumlar üçgensel hiyerarşi oluştururlar (Şekil 3.2). Penrose tarafından ileri sürülen bu diyagrama göre oklarla gösterilen doğrultularda ilerledikçe cebrik olarak özelleşme artar. Bir çözüm her yerde aynı tipte olabilir veya bazı noktalarda veya bölgelerde daha alt tipte olabilir, fakat daha yüksek hiyerarşideki bir tipe gidemez.



Şekil3.2. Petrov tiplerinin hiyerarşisi.

Analiz edeceğimiz metrik, elektromanyetik alan içindeki negatif kozmolojik sabitli C-metriktir. C-metrik kaynaktan bağımsız Einstein-Maxwell alan denkleminin çözümünün üç parametreli bir ailesini oluşturur ve düzgün ivmelenen yüklü bir kütlenin elektromagnetik alanı ile gravitasyonel alanın birleşmesinin açık ve şüpheye yer bırakmayan bir yorumunu verir. Kullanacağımız metriği P.Krtous'un makalesinden alıyoruz [8];

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2}\left(-Fdt^2 + \frac{1}{F}dy^2 + \frac{1}{G}dx^2 + Gdz^2\right) \tag{3.13}$$

Burada F ve G fonksiyonları aşağıdaki formu taşırlar,

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{A^2 l^2} - 1 + y^2 - 2mAy^3 + e^2A^2y^4 \\ G(x) &= \qquad 1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ve $l = \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}$ Λ kozmolojik sabit olup, $\Lambda < 0$ 'dır.

Gecikmiş koordinatları

$$\begin{aligned} Au &= t + \int_y F^{-1}dy \\ Ar &= \frac{1}{(x+y)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde seçtiğimizde,

$$\begin{aligned} Fdt^2 &= FA^2du^2 + \frac{1}{FA^2r^4}dr^2 + \frac{1}{F}dx^2 + \frac{2}{FAr^2} + \frac{2}{r^2}dudr + 2Adudx \\ \frac{1}{F}dy^2 &= \frac{1}{F}dx^2 + \frac{1}{FA^2r^4}dr^2 + \frac{2}{FAr^2}drdx \end{aligned} \tag{3.16}$$

olarak hesaplarız ve (3.13)'de yerine yazarsak metriğimiz aşağıdaki formu alır,

$$ds^2 = -FA^2r^2du^2 - 2dudr - 2Ar^2dudx + r^2\left[G^{-1}dx^2 + Gdz^2\right] \tag{3.17}$$

du^2'nin katsayası hesaplayıp, H olarak tanımlanırsak, H'yi

$$H = FA^2r^2 = -A^2r^2\left(1-x^2-2mAx^3-e^2A^2x^4\right)+Ar\left(-2x-6mAx^2-4e^2A^2x^3\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(-2-12mAx-12e^2A^2x^2\right)+\frac{r^2}{l^2}-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-\frac{4e^2Ax}{r}$$
$$=-A^2r^2G(x)+ArG'(x)-\frac{1}{2}G''(x)+\frac{r^2}{l^2}-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-\frac{4e^2Ax}{r} \qquad (3.18)$$

olarak buluruz ve (3.17)'de yerine koyarsak, metrik,

$$ds^2 = -Hdu^2-2dudr-2Ar^2dudx+r^2\left[G^{-1}dx^2+Gdz^2\right] \qquad (3.19)$$

şeklini alır. Daha sonra Newmann-Penrose eşitliklerini kurmak için uygun bir tetrat sistemi seçtiğimizde

$$\begin{aligned} l &= du \\ n &= \frac{H}{2}du+dr+Ar^2dx \\ m &= \frac{r}{\sqrt{2}}\left[G^{-1/2}dx+iG^{1/2}dz\right] \\ \overline{m} &= \frac{r}{\sqrt{2}}\left[G^{-1/2}dx-iG^{1/2}dz\right] \end{aligned} \qquad (3.20)$$

olarak buluruz. Burada l^a vektörü (3.15)'te seçilen gecikmiş koordinatlarda, bir $N^+(u)$ hiperyüzeyi tanımlar ve bu hiperyüzey üzerinde u sabittir. r ise l^a vektörü boyunca uzanan bir affine parametredir.

Newmann-Penrose spin katsayılarını elde etmek için;

$$\begin{aligned} dl &= 0 \\ dn &= \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial r}(n\wedge l)+\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial r}\frac{ArG^{1/2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{G^{1/2}}{r\sqrt{2}}+\frac{AHG^{1/2}}{\sqrt{2}}\right]\left\{\left(m+\overline{m}\right)\wedge l\right\} \\ &\quad +\sqrt{2}AG^{1/2}\left\{n\wedge\left(m+\overline{m}\right)\right\} \\ dm &= \frac{1}{r}(n\wedge m)-\frac{H}{2r}(l\wedge m)+\left[\frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}}-\frac{\left(G^{1/2}\right)'}{r\sqrt{2}}\right]\left(m\wedge\overline{m}\right) \end{aligned} \qquad (3.21)$$

bağıntıları oluşturulur. Buradaki 12 tane kompleks katsayı 24 tane reel temel Ricci dönme katsayısına denk gelir ki bunları da (3.6)'daki ifadelerle karşılaştırdığımızda

$$\pi = \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} \qquad \tau = -\frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{4r\sqrt{2}} G^{-1/2} G' - \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} \qquad \beta = -\frac{1}{4r\sqrt{2}} G^{-1/2} G' \tag{3.22}$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial r} \qquad \mu = -\frac{H}{2r} \qquad \rho = -\frac{1}{r}$$

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial r}\frac{ArG^{1/2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{G^{1/2}}{r\sqrt{2}} - \frac{AHG^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon = \kappa = \lambda = \sigma = 0$$

olarak buluruz. Buradaki υ ifadesini açık olarak hesaplarsak,

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial r}\frac{ArG^{1/2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{G^{1/2}}{r\sqrt{2}} - \frac{AHG^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{G^{1/2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{Ar}{2}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{2r}\frac{\partial H}{\partial x} - AH\right)$$

$$= \frac{G^{1/2}}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{l} \frac{Ar}{2}\left(-2A^2rG + AG' + \frac{2r}{l^2} - \frac{2e^2}{r^3} + \frac{2m}{r^2} + \frac{4e^2Ax}{r^2}\right) - \frac{1}{2r}\left(-A^2r^2G' + ArG'' - \frac{1}{2}G''' - \frac{4e^2A}{r}\right) \\ + A^3r^2G - A^2rG' + \frac{A}{2}G'' - \frac{Ar^2}{l^2} - \frac{Ae^2}{r^2} + \frac{2mA}{r} + \frac{4e^2A^2x}{r} \end{array}\right]$$

$$= \frac{G^{1/2}}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{l} -A^3r^2G + \frac{A^2rG'}{2} + \frac{Ar^2}{l^2} - \frac{Ae^2}{r^2} + \frac{mA}{r} + \frac{2e^2A^2x}{r} + \frac{A^2rG'}{2} - \frac{AG''}{2} + \frac{1}{4r}G''' + \frac{2e^2A}{r^2} \\ + A^3r^2G - A^2rG' + \frac{A}{2}G'' - \frac{Ar^2}{l^2} - \frac{Ae^2}{r^2} + \frac{2mA}{r} + \frac{4e^2A^2x}{r} \end{array}\right)$$

$$= \frac{G^{1/2}}{\sqrt{2}}\left[\frac{3mA}{r} + \frac{6e^2A^2x}{r} + \frac{1}{4r}\left(-12mA - 24e^2A^2x\right)\right]$$

$$= \frac{G^{1/2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{3mA}{r} + \frac{6e^2A^2x}{r} - \frac{3mA}{r} - \frac{6e^2A^2x}{r}\right) \tag{3.23}$$

$$= 0$$

υ'nin de sıfır olduğunu buluruz. Sonuç olarak, Goldberg-Sach's teoremine göre eğer $\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$ ise Ψ_2 dışında $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ olur ki bu da D Petrov tipine denk gelir.

Yukarıda bulduğumuz spin katsayılarından yararlanarak bir-formları (3.5)'teki eşitliğe uygun şekilde oluşturursak,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial r} l - \frac{1}{4} G' i dz + \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} m \\
\Gamma_1 &= \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} l - \frac{1}{r} m \\
\Gamma_2 &= \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} n + \frac{H}{2r} \overline{m}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

olduğunu görürüz ve aynı şekilde (3.8)'deki eşitliğe göre iki-formları hesaplamaya başlarsak,

$$d\Gamma_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial r} dx + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} dr \right) \wedge l - \frac{i}{4} G'' dx \wedge dz + \frac{A}{2\sqrt{2}} G^{-1/2} G' dx \wedge m + \frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} dm \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial r} = -2A^2 r G' + AG'' + \frac{4e^2 A}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = -2A^2 G + \frac{2}{l^2} - \frac{4m}{r^3} + \frac{6e^2}{r^4} - \frac{8e^2 Ax}{r^3} \tag{3.26}$$

$$dx = \frac{G^{1/2}}{r\sqrt{2}}(m + \overline{m}), dr = n - \frac{H}{2} l - \frac{ArG^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(m \wedge \overline{m} \right), dx \wedge dz = \frac{i}{r^2} m \wedge \overline{m}$$

(3.26)'teki eşitlikleri (3.25)'te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
d\Gamma_0 = {} & \frac{1}{2}\left(A^2 G - \frac{1}{l^2} + \frac{2m}{r^3} - \frac{3e^2}{r^4} + \frac{4e^2 Ax}{r^3} \right) l \wedge n \\
& + \left[\frac{1}{2}\frac{G^{1/2}}{r\sqrt{2}} \left(A^2 r G' - \frac{AG''}{2} - \frac{2e^2 A}{r^2} \right) + \frac{1}{2}\frac{ArG^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(-A^2 G + \frac{1}{l^2} - \frac{2m}{r^3} + \frac{3e^2}{r^4} - \frac{4e^2 Ax}{r^3} \right) \right] l \wedge \overline{m} \\
& + \frac{AG^{1/2}}{r\sqrt{2}} n \wedge m + \frac{1}{4}\left(\frac{G''}{r^2} + 2A^2 G - \frac{2AG'}{r} \right) m \wedge \overline{m}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olarak buluruz.

$$\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \left(\frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} l - \frac{1}{r} m \right) \wedge \left(\frac{AG^{1/2}}{\sqrt{2}} n + \frac{H}{2r} \bar{m} \right)$$

$$\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \frac{A^2 G}{2} l \wedge n + \frac{AG^{1/2}}{2r\sqrt{2}} \left(-A^2 r^2 G + A^2 r G' - \frac{G''}{2} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2m}{r} + \frac{3e^2}{r^2} - \frac{4e^2 Ax}{r} \right) l \wedge \bar{m}$$

$$+ \frac{AG^{1/2}}{r\sqrt{2}} n \wedge m - \frac{H}{2r^2} m \wedge \bar{m} \qquad (3.28)$$

şeklinde oluşur ve (3.8)'e göre iki-formu oluşturduğumuzda,

$$\Theta_0 = \left(-\frac{1}{2l^2} + \frac{m}{r^3} - \frac{3e^2}{2r^4} + \frac{2e^2 Ax}{r^3} \right) l \wedge n$$

$$+ \left[\frac{G''}{4r^2} + \frac{A^2 G}{2} - \frac{AG'}{2r} - \frac{A^2 G}{2} + \frac{AG'}{2r} - \frac{G''}{4r^2} + \frac{1}{2l^2} - \frac{m}{r^3} + \frac{e^2}{2r^4} - \frac{2e^2 Ax}{r^3} \right] m \wedge \bar{m}$$

$$\Theta_0 = \left(-\frac{1}{2l^2} + \frac{m}{r^3} - \frac{3e^2}{2r^4} + \frac{2e^2 Ax}{r^3} \right) l \wedge n + \left[\frac{1}{2l^2} - \frac{m}{r^3} + \frac{e^2}{2r^4} - \frac{2e^2 Ax}{r^3} \right] m \wedge \bar{m} \qquad (3.29)$$

olarak hesaplarız. Diğer iki formları hesapladığımızda ise aşağıdaki sonuçları buluruz.

$$\Theta_1 = d\Gamma_1 - 2\Gamma_0 \wedge \Gamma_1$$

$$d\Gamma_1 = -\frac{AG'}{4r} l \wedge \left(m + \bar{m} \right) + \frac{G^{-1/2} G'}{2r^2 \sqrt{2}} m \wedge \bar{m}$$

$$\Gamma_0 \wedge \Gamma_1 = -\frac{1}{4r} \frac{\partial H}{\partial r} l \wedge m + \frac{AG'}{8r} l \wedge \left(m - \bar{m} \right) + \frac{G^{-1/2} G'}{4r^2 \sqrt{2}} m \wedge \bar{m} - \frac{A^2 G}{2} l \wedge m$$

$$\Theta_1 = \left(\frac{1}{l^2} + \frac{m}{r^3} - \frac{e^2}{r^4} + \frac{2e^2 Ax}{r^4} \right) l \wedge m \qquad (3.30)$$

$$\Theta_2 = d\Gamma_2 + 2\Gamma_0 \wedge \Gamma_2$$

$$d\Gamma_2 = -\frac{AG^{1/2}}{2\sqrt{2}} \frac{\partial H}{\partial r} l \wedge n + \left(\frac{A^2 rG}{4} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{AG}{4r} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{A^2 HG}{2} \right) l \wedge m$$

$$+ \left(\frac{A^2 rG}{4} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{AG}{4r} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{A^2 HG}{2} - \frac{H}{4r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) l \wedge \bar{m}$$

$$+ \left(-\frac{AG'}{4r} + A^2 G \right) n \wedge m + \left(-\frac{AG'}{4r} + A^2 G + \frac{1}{2r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) n \wedge \bar{m}$$

$$+\left(-\frac{AG^{1/2}}{2\sqrt{2}}\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{G^{1/2}}{2r^2\sqrt{2}}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{G^{-1/2}G'H}{4r^2\sqrt{2}}\right)m\wedge\bar{m}$$

$$\Gamma_0\wedge\Gamma_2=\frac{AG^{1/2}}{4\sqrt{2}}\frac{\partial H}{\partial r}l\wedge n+\frac{H}{8r}\frac{\partial H}{\partial r}l\wedge\bar{m}+\left(\frac{AG'}{8r}-\frac{A^2G}{2}\right)n\wedge m$$

$$-\frac{AG'}{8r}n\wedge\bar{m}+\left(\frac{AG^{1/2}H}{2r\sqrt{2}}-\frac{G^{-1/2}G'H}{8r^2\sqrt{2}}\right)m\wedge\bar{m}$$

$$\Theta_2=\left(\frac{1}{l^2}+\frac{m}{r^3}-\frac{e^2}{r^4}+\frac{2e^2Ax}{r^4}\right)n\wedge\bar{m} \tag{3.31}$$

Bu durumda yukarıda hesapladığımız iki formları (3.9)'daki bağıntılarla eşlersek aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}\Lambda-\Phi_{11}-\Psi_2&=-\frac{1}{2l^2}+\frac{m}{r^3}-\frac{3e^2}{2r^4}+\frac{2e^2Ax}{r^3}\\ \Psi_2-\Phi_{11}-\Lambda&=\frac{1}{2l^2}-\frac{m}{r^3}+\frac{e^2}{2r^4}-\frac{2e^2Ax}{r^3}\\ \Psi_2+2\Lambda&=-\frac{1}{l^2}-\frac{m}{r^3}+\frac{e^2}{r^4}-\frac{2e^2Ax}{r^3}\end{aligned} \tag{3.32}$$

ve sonuç olarak bu üç denklemi çözdüğümüzde

$$\begin{aligned}\Phi_{11}&=\frac{e^2}{2r^4}\\ \Psi_2&=-\frac{m}{r^3}+\frac{e^2}{r^4}-\frac{2e^2Ax}{r^3}\\ \Lambda&=-\frac{1}{2l^2}\end{aligned} \tag{3.33}$$

Weyl ve Ricci spinörlerinin bileşenlerini ve Ricci skalerini yukarıdaki şekilde buluruz.

SONUÇ

İncelediğimiz elektromanyetik alan içindeki negatif kozmolojik sabitli C-metrikte, Weyl spinörünün sadece Ψ_2 , ki bu da metriğin cebrik olarak D Petrov tipinde olduğunu gösterir, Ricci spinörünün de sadece Φ_{11} bileşenleri sıfırdan farklı çıktı. Ricci skalerinin ise kozmolojik sabite bağlı olarak sabit olduğunu bulduk. Eğer burada bazı durumları gözönüne alırsak şu sonuçlar karşımıza çıkar;

- Elektromanyetik alan sıfır olursa;
    1. Ricci spinörünün tüm bileşenleri sıfır olur.
    2. Ψ_2 sadece m ve r 'ye bağlı olur. $r=0$ 'da bir kutba sahip olur, $r=\infty$ 'da ise asimptotik olarak sıfıra gider ve $m=0$ olursa Ψ_2 de sıfır olur ki bu da düz uzay limitidir.
    3. Eğrilik sadece kozmolojik sabite bağlı olduğundan elektromanyetik alanın değişiminden etkilenmez.
- Kozmolojik sabit sıfır olursa bu durumdan Weyl ve Ricci spinörleri etkilenmez sadece Ricci skaleri sıfır olur.

KAYNAKLAR

[1] **Newman, E., Penrose, R.,** 1962. Journal of Mathematical Physics, **3**, p.566

[2] **Frolov, V. P.,** *The Newman Penrose Method in the Theory of general Relativity*.

[3] **Petrov, A. Z.,** 1954. Sci. Not. Kazan State Uni., 114, 55.

[4] **Pirani, F. A. E.,** 1956. Acta Phys. Polon, 15, 389, 1956. Phys. Rev., **105**, 1089.

[5] **Penrose, R.,** 1960. Ann. Phys. New York, 10, 171.

[6] **Nutku, Y.,** 1974. Unpublished.

[7] **Krtous, P.,** 2005. *Accelerated black holes in an anti-de Sitter Universe, Charles Univ. Prague,* **2**, 1-14.

[8] **Kinnersley, W.,Walker, M.,** 1970. *Uniformly Accelerating Charged Mass in General Relativity, Phys. Rev. D*, **2**, 1359-1369.

[9] **Yapışkan, B.,** 2000. Newman-Penrose Formalizmi ve Bazı Uygulamaları, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Tunceli'de doğdu. 1997'de Atakent Lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl Koç Üniversitesi Fizik (Burslu) Bölümü'nü kazandı. 2002 yılında yılında mezun olduktan sonra İTÜ Fizik Mühendisliği Yüksek Lisans programına başladı. Halen aynı programda öğrenimine devam etmektedir.