**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

# BULANIK ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR

**VİLDAN ÇETKİN**

**KOCAELİ 2014**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

# BULANIK ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR

**VİLDAN ÇETKİN**

**Prof.Dr. Halis AYGÜN**
**Danışman, Kocaeli Üniv.** .....

**Prof.Dr. Ahmet KÜÇÜK**
**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** .....

**Doç.Dr. Ali DEMİR**
**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** .....

**Prof.Dr. Refik KESKİN**
**Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.** .....

**Doç.Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU**
**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.** .....

**Tezin Savunulduğu Tarih: 09.04.2014**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Günümüzde matematik ve bilimde görülen çeşitli paradigma değişiklikleri arasında belirsizlik belki de en dikkat çekici olanıdır. Belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğine inanan geleneksel anlayıştan, belirsizlikle uğraşan ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçiş ortaya konulmaktadır. Einstein'a göre "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir." Son günlerde belirsizlik problemleri matematikçiler, mantıkçılar ve filozofların olduğu kadar yapay zeka ve bilgisayar bilimleriyle uğraşanların da dikkatini çekmiştir. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesi için geliştirilen teorilerden en önemlileri; olasılık, istatistik, bulanık (fuzzy) kümeler, sezgisel (intuitionistic) kümeler, yaklaşımlı (rough) kümeler ve esnek (soft) kümelerdir. "Esnek küme" kavramı Molodtsov tarafından belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olarak geliştirilmiştir. Sonrasında, Maji ve diğ., esnek küme ve bulanık kümenin bir genellemesi olarak bulanık esnek küme tanımını vermiştir. Bu günden sonra, hem esnek küme hem de bulanık esnek küme teorileri zengin bir uygulama potansiyeline sahip olduklarından dünya çapında birçok bilim insanı tarafında hem teorik hem de uygulama yönlerinden araştırılmaya değer görülmüştür.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen, bana matematiği candan sevdiren, başarılı bir şekilde bugüne ulaşmamda en çok emeği olan, birlikte çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, bana kendisiyle çalışma fırsatını sunan Sayın Hocam Prof. Dr. Halis AYGÜN' e yoğun çalışmaları arasında göstermiş olduğu ilgi, sabır, hoşgörü ve desteğinden ötürü canı gönülden teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca göstermiş oldukları sabır, sevgi ve şevkatlerinden ötürü aileme ve tezin yazımı sürecinde yardımını esirgemeyen kardeşim Yrd.Doç.Dr.Erdal ÇETKİN'e sonsuz minnet duygularımı sunarım. Ayrıca çalışma arkadaşlarım Doç.Dr.Abdülkadir AYGÜNOĞLU ve Yrd.Doç.Dr.Banu PAZAR VAROL ile desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan meslektaşlarım ve de dostlarım Öğr.Gör.Mevlüt SEVİNDİR, Arş.Gör.Berrak ÖZGÜR, Arş.Gör.Cüneyt YAZICI ve Vildan YAZICI'ya teşekkür ederim. Son olarak bilim insanlarının yetişmesinde büyük katkısı olan ve doktora çalışmalarım süresince beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na da teşekkürü bir borç bilirim.

Nisan – 2014 Vildan ÇETKİN

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... i
İÇİNDEKİLER ..... ii
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... iii
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR ..... iv
ÖZET ..... vi
ABSTRACT ..... vii
GİRİŞ ..... 1
1. GENEL BİLGİLER ..... 5
1.1. Latis Teorideki Temel Kavramlar ..... 5
1.2. Kategoriler ve Funktorlar ..... 14
1.3. Esnek Kümeler ..... 23
1.4. Bulanık Kümeler ..... 28
1.5. Bulanık Esnek Kümeler ..... 32
1.6. Esnek Topolojik Uzaylar ..... 37
1.7. Bulanık Topolojik Uzaylar ..... 40
2. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR ..... 45
2.1. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar ..... 45
2.2. ASTOP Kategorisi ..... 53
2.3. Bulandırılmış Esnek Topolojik Uzaylar ..... 58
2.4. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Lowen Funktorları ..... 65
3. BULANIK ESNEK KAPANIŞ VE İÇ UZAYLARI ..... 73
3.1. Bulanık Esnek Kapanış ve İç Operatörleri ..... 73
3.2. Başlangıç Bulanık Esnek Kapanış ve İç Operatörleri ..... 83
4. BULANIK ESNEK YAKINIMSI (PROXIMITY) UZAYLAR ..... 92
4.1. Bulanık Esnek Yakınımsılık (Proximity) Kavramı ..... 92
4.2. Bulanık Esnek Yakınlık ile Üretilen Bulanık Esnek Topoloji ..... 97
4.3. Başlangıç Bulanık Esnek Yakınmsılık (Proximity) ..... 101
5. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR VE BULANIK ESNEK TOPOGENOUS YAPISI ..... 110
5.1. Bulanık Esnek Uzak Komşuluk Sistemi ..... 110
5.2. Bulanık Esnek Düzgün Uzaylar ..... 114
5.3. Bulanık Esnek Düzgün Uzaylar Kategorisi ..... 121
5.4. Bulanık Esnek Topogenous Yapısı ..... 127
6. BULANIK ESNEK FİLTRE YAKINSAKLIĞI ..... 138
6.1. Bulanık Esnek Komşuluk Sistemi ..... 138
6.2. Bulanık Esnek Filtreler ..... 143
6.3. Bulanık Esnek Filtre Yakınsaklığı ..... 152
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... 155
KAYNAKLAR ..... 157
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER ..... 163
ÖZGEÇMİŞ ..... 165

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Dağılımlı latis.....6
Şekil 1.2. (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis.....6
Şekil 1.3. Cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler diyagramı.....11
Şekil 3.1. $f$ bulanık esnek kümesi .....32

## SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\forall$ | : Evrensel niceleyici, her |
| $\exists$ | : Varlıksal niceleyici, en az bir |
| $\subseteq$ | : Alt küme |
| $\sqsubseteq$ | : Bulanık esnek alt küme |
| $\cap$ ($\cup$) | : Arakesit (Birleşim) |
| $\sqcap$ ($\sqcup$) | : Bulanık esnek arakesit (birleşim) |
| $\widetilde{\sqcap}$ ($\widetilde{\sqcup}$) | : Esnek arakesit (birleşim) |
| $\in$ | : Eleman |
| $\Phi$ | : Boş (bulanık) esnek küme |
| $\tilde{E}$ | : Evrensel (bulanık) esnek küme |
| $X, Y, \ldots$ | : Klasik kümeler |
| $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ | : Bulanık kümeler |
| $f, g, h, \ldots$ | : Bulanık esnek kümeler |
| $F, G, H, \ldots$ | : Esnek kümeler |
| $E, K$ | : Parametre kümeleri |
| $\omega, \iota$ | : Lowen funktorları |
| $\underline{\alpha}$ | : $\alpha$ değerli sabit bulanık küme |
| $\chi_A$ | : A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu |
| $I$ | : [0, 1] kapalı aralığı |
| 2 | : {0, 1} iki noktalı kümesi |
| $L, M$ | : Latis (kafes, örgü) |
| $L^X$ | : L-Bulanık kümeler ailesi |
| $(L^X)^E$ | : L-Bulanık esnek kümeler ailesi |
| $(2^X)^E$ | : Esnek kümeler ailesi |
| $\vee$ ($\wedge$) | : Supremum (İnfimum) |
| $\varphi, \psi, \eta$ | : Fonksiyonlar |
| $\varphi_\psi$ ($\varphi_{\psi,\eta}$) | : (Bulanık) esnek fonksiyon |
| $0_L$ ($1_L$) | : L latisinin en küçük (en büyük) elemanı |
| $'$ | : Sırayı tersine koruyan üst alma operatörü |
| $\urcorner$ | : Bütünleme operatörü |
| $M_0$ | : $M - \{0\}$ |
| $c(L)$ | : L nin 0 dan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi |
| $Pr(L)$ | : L nin 1 den farklı asal elemanlarının kümesi |
| $\mathcal{P}(X)$ | : X in güç kümesi |
| $:=$ | : Tanım olarak eşittir |
| $:\Leftrightarrow$ | : Tanım olarak ancak ve ancak |
| $\Gamma, \Lambda$ | : İndis kümesi |
| $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ | : Kategoriler |
| $Ob\mathbb{K}$ | : $\mathbb{K}$ kategorisinin objelerinin sınıfı |
| $Mor(X, Y)$ | : X den Y ye tanımlı morfizmler kümesi |
| $\circ$ | : Bileşke işlemi |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{K}^o$ | : $\mathbb{K}$ nın dual kategorisi |
| $U, V, W$ | : Funktorlar |
| $x^\alpha$ | : Bulanık esnek nokta |
| $x_\alpha, x_t$ | : Bulanık nokta |
| $x_\alpha q \lambda$ | : $x_\alpha$ bulanık noktası ile $\lambda$ bulanık kümesi q-çakışımsıdır |
| $c(L^X)$ | : Bulanık noktaların kümesi |
| $FSPt(X)$ | : X üzerindeki bulaık esnek noktaların ailesi |
| $\varphi^{\rightarrow}(\lambda)$ | : $\lambda$ bulanık kümesinin $\varphi$ altındaki görüntüsü |
| $\varphi^{\leftarrow}(\lambda)$ | : $\lambda$ bulanık kümesinin $\varphi$ altındaki ters görüntüsü |
| $\delta$ | : Bulanık esnek yakınımsılık |
| $\mathcal{U}$ | : Bulanık esnek düzgün yapı |
| $\mathcal{B}, \beta$ | : (Bulanık) Esnek taban |
| $T$ | : Bulaık esnek topogenous yapısı |
| $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ | : Bulanık esnek filtreler |
| $\mathcal{R}$ $(\mathcal{Q})$ | : Bulanık esnek uzak (çakışımsı) komşuluk sistemi |
| $\tau, \tau'$ | : Bulanık esnek topoloji, bulanık esnek kotopoloji |
| $\mathcal{I}$ $(\mathcal{C})$ | : Bulanık esnek iç (kapanış) operatörü |

## BULANIK ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR


## ÖZET

Bu tezin amacı; bulanık esnek topolojik yapıları tanımlamak, bu yapıların özelliklerini araştırmak ve karşılıklı olarak aralarındaki doğal ilişkileri kategorik olarak incelemektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, latis teorideki ve kategori teorisindeki bazı temel tanım ve kavramlar özetlenmiştir. Buna ek olarak, esnek küme, bulanık küme, bulanık esnek küme, esnek topoloji ve bulanık topolojiye ilişkin bazı temel tanım ve düşünceler verilmiştir.

İkinci bölümde, bulanık esnek topoloji ve bulandırılmış esnek topoloji sırasıyla Shostak ve Ying anlamlarında tanımlanmıştır. Lowen funktorlarının bulanık esnek teoriye uygun olarak genişletilmesiyle bu iki kavram arasındaki kategorik ilişkiler araştırılmıştır. Bunun yanı sıra, bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisne izomorf olan anti zincir esnek topolojik uzaylar kategorisi oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde, bulanık esnek kapanış (iç) operatörü tanımı verildikten sonra, bulanık esnek topolojik uzaylar ile bulanık esnek kapanış uzayları arasındaki kategorik ilişkiler incelenmiştir. Başlangıç bulanık esnek kapanış (iç) operatörünün inşasıyla bulanık esnek kapanış uzaylar kategorisinin topolojik bir kategori olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, bulanık esnek yakınımsılık kavramı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Başlangıç (ve de çarpım) bulanık esnek yakınımsılık elde edilmiştir. Ayrıca, bulanık esnek yakınımsılıklar kümesinin bir tam latis olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, topolojiye yakın önemli bir yapı ve de topoloji kavramını araştırmak için elverişli bir araç olan bulanık esnek düzgün yapı tanımlanmıştır. Bulanık esnek kümeler arasındaki yakınlık bağıntısını araştırmak için başka bir yaklaşım olan topogenous yapısı da tasarlanmıştır.

Altıncı bölümde, bulanık esnek noktanın komşuluk sistemi oluşturulmuştur. Bulanık esnek filtre tanımı verildikten sonra bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek filtre yakınsaklığı incelenmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Bulanık Esnek Düzgün Uzay, Bulanık Esnek Kapanış Operatörü, Bulanık Esnek Küme, Bulanık Esnek Topoloji, Bulanık Esnek Yakınımsılık.

**FUZZY SOFT TOPOLOGICAL STRUCTURES**


**ABSTRACT**

The purpose of this thesis is to describe the fuzzy soft topological structures, examine their properties and consider the natural relationships between proposed structures mutually as categorical aspects.

This thesis consists six chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and notions in lattice theory and category theory were summarized. In addition, some basic concepts and definitions about (fuzzy) soft set and (fuzzy) soft topology were given.

In the second chapter, fuzzy soft topology and fuzzifying soft topology were defined in the sense of Shostak and Ying, respectively. The categorical relations between these notions were investigated by extending the Lowen functors to fuzzy soft theory. Besides this, a caharacterization of fuzzy soft topology was established.

In the third chapter, after giving the definition of fuzzy soft closure (interior) operator, the categorical relations between fuzzy soft topological space and fuzzy soft closure space were studied.

In the fourth chapter, the concept of fuzzy soft proximity was defined and studied its properties. The initial (also product) fuzzy soft proximty was obtained.

In the fifth chapter, fuzzy soft uniformity structure, which is an important concept close to topology and a convenient tool for investigating topology, was introduced. Also, the topogenous structure which is an other approach to investigate the nearnees relation between fuzzy soft sets was proposed.

In the sixth chapter, neighborhood system of a fuzzy soft point was established. After giving the definition of fuzzy soft filter, the convergence of fuzzy soft filter in fuzzy soft topological spaces was also studied.



**Keywords:** Fuzzy Soft Uniform Space, Fuzzy Soft Closure Operator, Fuzzy Soft Set, Fuzzy Soft Topology, Fuzzy Soft Proximity.

# GİRİŞ

Gerçek hayat doğrudan ve kolayca anlaşılabilir olma bakımından oldukça karmaşıktır. Bu nedenle reel dünyadaki gerçeklikleri daha basite indirgeyecek modeller oluşturulur. Ne yazık ki, bu matematiksel modellerinde fazlasıyla komplike oluşundan, en doğru çözümün bulunması da zorlaşmaktadır. Mühendislik, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler ve tıbbi bilimler gibi daha birçok alanda karşılaşılan problemlerin modellenmesinde verilerin belirsizliğinden ötürü klasik yöntemler kullanılamamaktadır. Bunun nedeni olarak doğal çevresel olayların belirsizliği, gerçek dünya hakkında insanoğlunun yetersiz bilgiye sahip olması ya da ölçüm araçlarının sınırlı olması gösterilebilir. Böylece, bu tür şüphe ve belirsizlikleri içeren problemlerin ele alınmasında kesin durumlara dayanan klasik küme teorisi yetersiz kalmaktadır.

Bulanık küme teorisi (Zadeh, 1965), sezgisel bulanık küme teorisi (Atanassov, 1986), belirsiz (vague) küme teorisi, aralık matematiği teorisi (Gorzalzany, 1987) ve yaklaşımlı (rough) küme teorisi (Pawlak, 1982) belirsizlik ve şüphe içeren problemlerin modellenmesi için geliştirilen teorilerden bazılarıdır. Ancak sözü edilen teorilerin her birisi uygulama bakımından kendilerine has bir takım zorluklara sahiptirler. Örneğin, bulanık küme teorisinde seçilecek olan üyelik fonksiyonunun kişiye göre değişmesinden ötürü bir problem için farklı çözümler elde edilebilir.

Tüm bu sorunların ortaya çıkmasının nedeni olarak parametre değerinin mevcut teorilerde hesaba katılmamış olması gösterilebilir. Bu nedenle, sözü edilen tüm bu zorluklardan tamamen bağımsız olan ve ayrıca belirsizlik ve kararsızlık içeren problemlerin modellenmesi için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olan “esnek küme” teorisi 1999 yılında Molodtsov tarafından tanımlanmıştır. Yine Molodtsov tarafından bu yeni teorinin temel özellikleri araştırılmış ve fonksiyonların pürüzsüzlüğü, oyun teorisi ve olasılık teorisi gibi daha birçok alana başarılı bir şeklide uygulanmıştır.

Geniş bir uygulama potansiyeline sahip olmasından ötürü birçok bilim insanının dikkatini çeken esnek küme teorisinin günümüzde diğer disiplinlere ve gerçek yaşam problemlerine uygulaması ivme kazanmıştır. Maji ve diğ. (2002) esnek küme teorisini karar verme problemlerine uygulamışlardır. Maji ve diğ. (2001, 2003) bulanık ve esnek kümelerin genellemesi olan bulanık esnek küme tanımını vermiştir. Pei ve Miao (2005) esnek kümelerin özel bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu göstermiştir. Kong ve diğ. (2009) karar verme problemlerine esnek küme teorik yaklaşımını uygulamıştır. Majumdar ve Samanta (2008) ise esnek küme ile bulanık esnek küme arasındaki benzerlikler üzerine çalışmıştır. Ahmad ve Kharal (2009) bulanık esnek kümeler üzerine önemli sonuçlar elde etmiştir. Kharal ve Ahmad (2009) bulanık esnek kümelerin görüntü ve ters görüntüsünü tanımlamıştır. Xu ve diğ. (2010) ise belirsiz (vague) esnek küme tanımını vermiştir.

Esnek kümelerin cebirsel yapılara ilk uygulaması Aktaş ve Çağman (2007) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada esnek grup kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Jun (2008), Jun ve Park (2008) esnek BCK/BCI-cebirlerini tanımlamış ve ideal teorisine uygulamasını araştırmıştır. Feng ve diğ. (2008) esnek yarı halka ve esnek ideal kavramlarını tanıtmıştır. Ali ve diğ. (2009) esnek yarı grup ve bir yarı grup üzerinde esnek ideal kavramlarını araştırmıştır. Sun ve diğ. (2008) esnek modülleri tanıtmıştır. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek grup tanımını vermiş ve bazı temel özelliklerini incelemiştir. Shao ve Qin (2012) ise bulanık esnek latisleri tanımlamıştır.

Esnek kümelerin topolojisi ilk kez 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından verilmiştir. Aygünoğlu ve Aygün (2012) ise esnek süreklilik ve esnek kompaktlık kavramlarının tanımlamıştır. Zorlutuna ve diğ. (2012) klasik noktanın esnek komşuluk sistemini ve Nazmul ve Samanta (2013) ise esnek noktanın komşuluk sistemini araştırmıştır. Pazar ve Aygün (2012a, 2012b, 2013) esnek topolojik uzaylarının önemli özelliklerini incelemiştir. Bulanık esnek kümelerin Chang anlamındaki topolojisi ise Tanay ve Kandemir (2011) tarafından tanımlanmıştır.

Bulanık kümelerin topolojisi ilk kez 1968 yılında Chang tarafından tanımlanmıştır. Lowen 1976 yılında tabakalaşmış bulanık topoloji tanımının vermiştir. 1985 yılında ise Shostak hem klasik topolojinin hem de Chang topolojinin bir genellemesi olarak

sadece kümelerin değil aynı zamanda topoloji aksiyomlarının da bulanık olduğu bulanık topoloji tanımını vermiştir. 1992 de birbirinden bağımsız olarak Chattopathyay ve Ramadan aynı yapıyı farklı isimlendirmelerle tanımlamışlardır. Aygün ve diğ. (1997) bu topolojik uzaylarda kompaktlık kavramını incelemiştir.

Klasik topolojik uzaylar kategorisi ile Chang topolojik uzaylar kategorisi arasındaki ilişkiler Lowen (1976) tarafından $\omega$ ve $\iota$ funktorları kurularak araştırılmıştır. Yue ve Fang (2005) bu funktorları Shostak anlamındaki uzaylara genişletmişlerdir. Böylece fuzzifying topoloji (Ying, 1991) ile bulanık topoloji arasındaki kategorik ilişkileri incelemişlerdir.

Chattopadhyay ve Samanta (1993) bulanık topoloji tanımını baz alarak bulanık kapanış uzayını tanımlamıştır. Kim (2003) bu tanımı birim aralık yerine bir tam dağılımlı tam latis kullanarak L-bulanık kapanış uzayına genellemiştir. Höhle ve Shostak (1999) bulanık iç uzayı yapısını vermiştir.

Literatürde bulanık yakınımsılık (proximity) yapısı için verilmiş birçok yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan en kullanışlı olanları Katsaras (1979, 1980), Artico-Moresco (1984, 1987) ile Markin ve Shostak (1992) tarafından getirilen yaklaşımlardır.

Düzgün yapı genel topoloji için elverişli bir araç olduğundan bulanık düzgün yapıda araştırmacılar tarafından ayrı bir öneme sahiptir. Düzgün yapının bulanık versiyonları Hutton (1977), Lowen (1981), Höhle (1982) ve Shi (1998, 2003) tarafından incelenmiştir.

Üç temel yapı olan, topoloji, yakınımsılık ve düzgün yapı arasındaki ilişkileri tek bir yapı ile araştırmak amacıyla Csaszar (1963) genel topolojide topogenous yapısını tanımlamıştır. Katsaras (1983) bu yapıyı bulanık kümeleri kullanarak çalışmıştır. Katsaras ve Petalas (1983) bulanık syntopogenous yapısını tanımlamıştır. Shostak (1997) ve Ramadan (1997) birbirinden habersiz olarak bu yapıyı Shostak anlamındaki uzaylara genişletmiştir. Ramadan ve diğ. (2003) L-bulanık topogenous ve L-bulanık yarı-düzgün yapı arasındaki ilişkileri incelemiştir. El-Dardery (2013) ve El-Dardery ve diğ. (2013) L-bulanık topolojik uzaylar kategorisinin bazı özelliklerini incelemiştir.

Bulanık komşuluk sistemi 1980 yılında Pao-Ming ve Ying-Ming tarafından tanımlanmıştır. Bu tanım 1997 yılında Ying-Ming ve Mao-Kang tarafından L-topolojik uzaylara genişletilmiştir. Jinming (2006) ise bu tanımı Shostak anlamındaki uzaylara genişletmiştir.

Klasik topolojideki temel kavramlardan birisi olan filtre kavramı bulanık topolojik uzaylarda Burton ve diğ. (1999) tarfından incelenmiştir. Höhle ve Shostak (1999) ise bu tanımı Shostak anlamındaki topolojik uzaylara genişletmiştir.

Bu çalışmada, yukarıda ayrı ayrı bahsi geçen ve bulanık topolojide önemli birer yere sahip olan Lowen funktorları, kapanış operatörü, yakınımsılık, düzgün yapı, topogenous yapısı, komşuluk, filtre ve filtre yakınsaklığının parametrelerinde göz önüne alınmasıyla esnekleştirilmesi ve bu yapılar arasındaki kategorik ilişkilerin araştırılması hedeflenmiştir.

# 1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle tezin geri kalan kısımlarında kullanılacak olan latisler, latis özellikleri, kategorik gösterimler, kategoriler ve funktorlar, esnek kümeler, bulanık kümeler, bulanık esnek kümeler, esnek topolojik uzaylar ve bulanık topolojik uzaylar gibi kavramlar hatırlatılacak ve bunların temel özellikleri verilecektir.

## 1.1. Latis Teorideki Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere;
(i) $L$ nin sonlu her alt kümesinin supremumu mevcut ise $L$ ye bir üst-yarı latis (join-semilattice) denir ve $(L, \vee, 0_L)$ ile gösterilir.
(ii) $L$ nin sonlu her alt kümesinin infimumu mevcut ise $L$ ye bir alt-yarı latis (meet-semilattice) denir ve $(L, \wedge, 1_L)$ ile gösterilir.
(iii) $L$ nin sonlu her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise $L$ ye bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve $L = (L, \vee, \wedge 0_L, 1_L)$ ile gösterilir.

Burada, $0_L = \bigvee \emptyset$ ve $1_L = \bigwedge \emptyset$ sırasıyla $L$ nin en küçük ve en büyük elemanını ifade etmektedir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Özel olarak, $I := [0,1]$ kapalı birim aralık ve $2 := \{0,1\}$ iki noktalı kümesi birer latisdir.

Önerme 1.1.2: $L = (L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır ( Birkhoff, 1967).
(i) $\forall\, a \in L$ için $a \vee a = a$ ve $a \wedge a = a$.
(ii) $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq a,\ \ b \leq a \vee b$.
(iii) $\forall\, a, b \in L$ için $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.
(iv) $\forall\, a, b, c \in L$ için $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ve $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

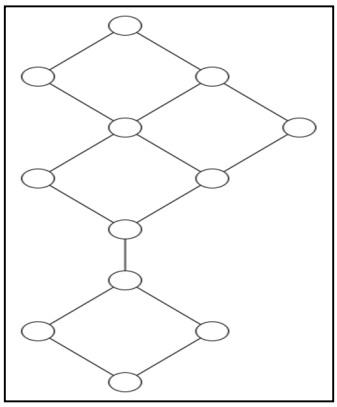
Önerme 1.1.4: $L$ bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki koşullar denktir.

$\forall\, a, b, c \in L$ için,

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.1.5: Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan bir $L$ latisine dağılımlı latis (Şekil 1.1) adı verilir (Johnstone, 1992), (Birkhoff, 1967).

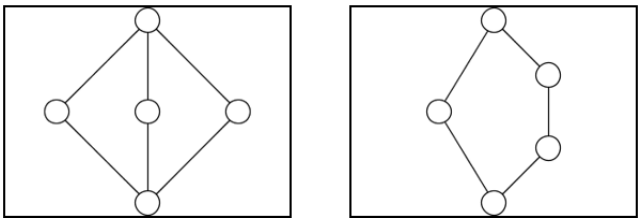


Şekil 1.1. Dağılımlı latis

Önerme 1.1.6: $L$ bir latis olsun. Bu takdirde,

$L$ dağılımlıdır $\Leftrightarrow \forall\, a, b, c \in L$ için $a \wedge c = b \wedge c$ ve $a \vee c = b \vee c$ ise $a = b$ sağlanır. (Birkhoff, 1967)

Teorem 1.1.7: Bir $L$ latisi dağılımlıdır ancak ve ancak bu latis içerisinde dağılımlı olmayan köşegensel (Şekil 1.2 (a)) veya beşgen (Şekil 1.2 (b)) latisden birini içermez (Terziler ve Öner, 2002).



(a) (b)

Şekil 1.2. (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis

Tanım 1.1.8: $L$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde,
(i) $L$ nin her alt kümesinin supremumu mevcut ise $L$ ye bir tam üst-yarı latis (complete join-semilattice) denir.
(ii) $L$ nin her alt kümesinin infimumu mevcut ise $L$ ye bir tam alt-yarı latis (complete meet-semilattice) denir.
(iii) $L$ nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise $L$ ye bir tam latis (complete lattice) denir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.9: $L$ sonlu infimum ve keyfi supremum işlemleri altında kapalı bir latis olmak üzere, $L$ ye bir çatı (frame) adı verilir : $\Leftrightarrow \forall a \in L, \{b_i\}_{i\in\Gamma} \subset L$ için

$a \wedge (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \wedge b_i)$ sağlanır (Johnstone, 1992).

Örnek 1.1.10: $X$ bir topolojik uzay olmak üzere, $\Omega(X) \coloneqq \{G \subset X : G$ açık$\}$ ailesi bir çatıdır.

Tanım 1.1.11: $L$ bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $L$ ye sonsuz dağılımlı latis adı verilir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).
(i) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B}(a \wedge b)$.
(ii) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b\in B}(a \vee b)$.

Tanım 1.1.12: $L$ bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa $L$ ye tam dağılımlı tam latis (completely distributive complete lattice) adı verilir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Her $\{\{a_{i,j} \mid j \in J_i\} \mid i \in K\} \subset \mathcal{P}(L)\backslash\{\emptyset\}$, $(K \neq \emptyset)$ için

(CD1) $\bigwedge_{i\in K}(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigwedge_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$.

(CD2) $\bigvee_{i\in K}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigvee_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$.

Örnek 1.1.13: (1) $P$, bir $m$ tamsayısının pozitif tamsayı bölenleri kümesi ve $a, b \in P$ için "$a \leq b \Leftrightarrow a,\ b$ yi böler" olsun. Buna göre, $(P, \leq)$ kısmi sıralı bir kümedir.

(2) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $X^{\mathbb{R}}$, $X$ üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların kümesi olsun. Her $f, g \in X^{\mathbb{R}}$ için "$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ \forall x \in X$" ile tanımlı $\leq$ bağıntısı $X^{\mathbb{R}}$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

(3) $(\mathbb{R}, \leq)$ bir latistir, fakat en büyük elemanı olmadığından tam latis değildir. Benzer şekilde, $(\mathbb{N}, \leq)$ de tam olmayan bir latistir.

(4) $I = [0,1]$ bilinen sıralaması ile bir tam latistir.

(5) $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in L\}$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam dağılımlı tam latistir.

(6) $I = [0,1]$ ve $\mathcal{I} = \{[0, r] \mid r \in I\} \cup \{[0, r) \mid r \in I\}$ ise, $(\mathcal{I}, \subseteq)$ bir tam dağılımlı tam latistir.

Tanım 1.1.14: $L$ bir latis olmak üzere, $L$ üzerindeki bir $': L \longrightarrow L,\ a \mapsto a'$ dönüşümüne
(i) üst alma operatörü (involution) denir $:\Leftrightarrow\ \forall\, a \in L$ için $(a')' = a$.
(ii) sırayı tersine koruyan operatör denir $:\Leftrightarrow\ \forall\, a, b \in L$ için $a \leq b \implies a' \geq b'$.
$': I \longrightarrow I,\ a \mapsto a' := 1 - a$ olarak tanımlanan dönüşüm $I$ üzerinde sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.15: Sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü ile bir tam dağılımlı tam latis bir bulanık latis (fuzzy lattice) olarak adlandırılır ve $L = (L, \leq, \wedge, \vee, ')$ ile gösterilir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.16: $\mathcal{L} = (L, \leq, ')$ üçlüsüne bir tam De-Morgan cebiri (complete De-Morgan algebra) denir $:\Leftrightarrow$ $(L, \leq)$ bir dağılımlı tam latisdir ve $', L$ üzerinde sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür (Gehrke ve diğ., 2003).

Her tam latis bir tam De-Morgan cebiri içine gömülebilir. Gerçekten, $L$ bir tam latis olmak üzere $L \times L$ üzerinde kısmi sıralama

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ ve $b_2 \leq b_1$

olarak tanımlanırsa $(L \times L, \leq)$ bir tam latisdir. Ayrıca, $': L \times L \longrightarrow L \times L$ sırayı-tersine koruyan üst alma operatörü de

$(a, b)' = (b, a)$ , $\forall\ (a, b) \in L \times L$

olarak tanımlanırsa $(L \times L, \leq, ')$ bir tam De-Morgan cebiridir.

Önerme 1.1.17: $L$ bir dağılımlı latis ve $a, b, c \in L$ olsun. Bu takdirde,
$x \wedge a = b$ ve $x \vee a = c$
olacak şekilde en çok bir $x \in L$ mevcuttur (Johnstone, 1992).

Tanım 1.1.18: $L$ bir latis ve $a \in L$ olsun. Eğer,

$x \wedge a = 0_L$ ve $x \vee a = 1_L$

olacak şekilde bir $x \in L$ mevcut ise bu $x$ elemanına $a$ nın bir bütünleyeni veya komplementi (complement) denir ve $ד a$ ile gösterilir. Burada, $ד: L \longrightarrow L,\ a \mapsto ד a$ ile tanımlanan dönüşüme ise $L$ üzerinde bir bütünleme operatörü adı verilir (Johnstone, 1992).

Önerme 1.1.17, eğer varsa dağılımlı bir latisde bütünleyenin tek türlü belirli olduğunu garanti eder.

Teorem 1.1.19: $L$ bir dağılımlı latis olsun. Bu takdirde, $L$ üzerindeki her bütünleme operatörü aynı zamanda sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.20: $L$ bir dağılımlı latis olsun. Eğer, $L$ üzerinde bir $ד: L \longrightarrow L\ , a \mapsto ד a$ bütünleme operatörü mevcut ise $L$ ye bir Boole cebiri (Boolean algebra) denir (Johnstone, 1992).

Örnek 1.1.21: (1) $X$ boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, $\mathcal{P}(X)$ güç kümesi, $\leq$ bağıntısı içerme $\subseteq$ bağıntısı, $\vee$,$\wedge$ operatörleri sırasıyla birleşim ve arakesit, en küçük ve en büyük elemanlar ise sırasıyla $\emptyset$ ve $X$ olmak üzere bir tam dağılımlı tam latisdir. Ayrıca $\mathcal{P}(X)$ in her elemanının bütünleyeni mevcut olduğundan $\mathcal{P}(X)$ bir Boole cebiridir.

(2) $A$ en küçük ve en büyük elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan tam sıralı bir küme olsun. Bu takdirde, $\vee := maks$, $\wedge := min$ operatörleri olmak üzere $A$ bir dağılımlı latisdir. Fakat $A$ ikiden fazla elemana sahip ise $A$ bir Boole cebiri olamaz. Çünkü, 0 ve 1 dışındaki hiçbir elemanın bütünleyeni yoktur.

Tanım 1.1.22: $L$ bir latis olsun. $L$ ye bir Heyting cebiri (Heyting algebra) denir $:\Leftrightarrow$ her bir $(a, b)$ eleman çifti için

$$c \leq (a \longrightarrow b) \iff c \wedge a \leq b$$

önermesini sağlayan bir $(a \longrightarrow b)$ elemanı mevcuttur (Johnstone, 1992).

Önerme 1.1.23: $L$ bir latis ve " $\longrightarrow$ ", $L$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde, "$\longrightarrow$ " işlemi $L$ yi bir Heyting cebirine dönüştürür $\Leftrightarrow \forall\, a, b, c \in L$ için aşağıdakiler sağlanır (Johnstone, 1992).
(i) $a \longrightarrow a = 1$,
(ii) $a \wedge (a \longrightarrow b) = a \wedge b$ ve $b \wedge (a \longrightarrow b) = b$,
(iii) $a \longrightarrow (b \wedge c) = (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow c)$.

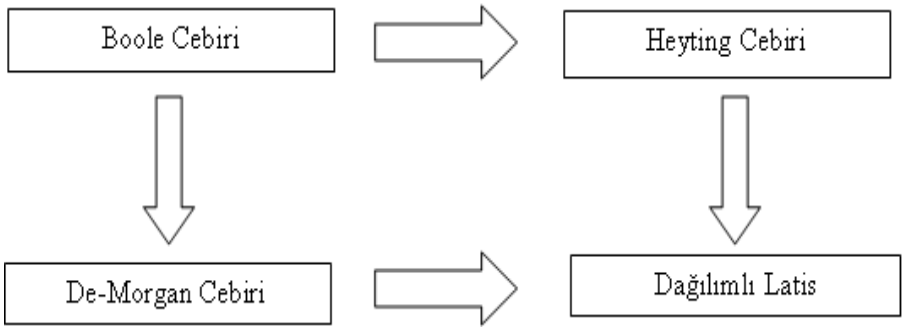
Önerme 1.1.24: Her Boole cebiri bir Heyting cebiridir.

Gerçekten, $A$ bir Boole cebiri ve $a, b \in A$ için $a \longrightarrow b := \neg a \vee b$ olarak tanımlanırsa $A$ nın bir Heyting cebiri olduğu görülür.

Bir genel Heyting cebirinde $\neg$ işlemi $\neg a := a \longrightarrow 0$ olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan $\neg a$ elemanına $a$ nın yarı tümleyeni denir. Açık olarak, $a \wedge \neg a = 0$ dır. Fakat, $a \vee \neg a = 1$ olması gerekmez (Johnstone, 1992).

Lemma 1.1.25: (1) Her Heyting cebiri dağılımlıdır.
(2) Bir $L$ Heyting cebiri bir Boole cebiridir $\Leftrightarrow \forall a \in L$ için $\neg\neg a = a$ (Johnstone, 1992).

Sonuç olarak aşağıdaki diyagram (Şekil 1.3) elde edilir.




Şekil 1.3. Cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler diyagramı

Fakat bu içermelerin terslerinin sağlanması gerekmez.

Örnek 1.1.26: (1) $A$ en küçük elemanı 0 ve en büyük elemanı 1 olan bir tam sıralı küme olsun. Bu takdirde, $A$ aşağıda tanımlanan işlem ile bir Heyting cebiridir.

$$a \longrightarrow b \coloneqq \begin{cases} 1, a \leq b \\ b, \text{diğer} \end{cases}$$

Fakat, $A$ bir Boole cebiri değildir. Gerçekten, her $a \in A, (a \neq 0)$ için $\neg\neg a = 1$ dir.

(2) Standart bulanık cebir ile $I = ([0,1], maks, min, 0, 1, 1 - a)$ bir De-Morgan cebiridir, fakat Boole cebiri değildir.

Önerme 1.1.27: $A$ bir Heyting cebiri ve $a \in A$ olmak üzere $A_{\neg\neg} \coloneqq \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$ olarak tanımlanan $A_{\neg\neg}$ kümesi bir Boole cebiridir.

Burada, $A_{\neg\neg}$ nın elemanlarına $A$ nın regüler elemanları denir (Johnstone, 1992).

Tanım 1.1.28: $L$ bir latis ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa $\alpha$ ya $L$ nin bir indirgenemez (irreducible, coprime, molecule) elemanı denir.

$L$ nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi,

$$c(L) \coloneqq \{\alpha \in L \mid \alpha \neq 0 \text{ ve } \forall a, b \in L \text{ için } \alpha \leq a \vee b \implies \alpha \leq a \text{ veya } \alpha \leq b\}$$

ile gösterilir (Gierz, 1980).

Tanım 1.1.29: $L$ bir latis ve $p \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa $p$ ye $L$ nin bir asal (prime) elemanı veya atom denir.

$L$ nin birden farklı asal elemanlarının kümesi,

$Pr(L) := \{p \in L \mid p \neq 1$ ve $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p \Longrightarrow a \leq p$ veya $b \leq p\}$

ile gösterilir (Gierz, 1980).

Tanımlar karşılaştırıldığında, $L$ bir bulanık latis olmak üzere

$\alpha \in c(L) \iff \alpha' \in \Pr(L)$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 1.1.30: $L$ bir tam dağılımlı tam latis olmak üzere, $L$ deki her eleman $L$ nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olarak yazılabilir. Benzer şekilde, $L$ bir bulanık latis iken $L$ nin her elemanı bazı asal elemanlarının infimumu olarak yazılabilir (Gierz, 1980).

Tanım 1.1.31: $L$ bir tam latis ve $a, b \in L$ olsun. $a$ elemanı $b$ yi yaklaşımsal sıralar (veya kesişimsel sıralar) (way below $b$ (wedge below $b$)) denir ve durum $a \ll b$ $(a \lhd b)$ veya $b \gg a$ $(b \rhd a)$ sembolü ile gösterilir $:\Leftrightarrow$ Yönlendirilmiş (veya keyfi) her $D \subseteq L$ alt kümesi için $\bigvee D \geq b$ iken en az bir $d \in D$ elemanı vardır öyle ki $a \leq d$ sağlanır.

Eğer $a \in c(L)$ *ise* $a \ll b \iff a \lhd b$ olduğu açıktır (Gierz ve diğ., 1980).

Lemma 1.1.32: $L$ bir tam latis ve $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Gierz ve diğ., 1980).
(1) $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$ ve $a_2 \ll \mathrm{b}_1$ ise $a_1 \ll b_2$ dir.
(2) $a_1 \ll b$ ve $a_2 \ll b$ ise $a_1 \vee a_2 \ll b$ dir.
(3) $a \ll b$ ise $a \leq b$ dir.

Tanım 1.1.33: Bir $L$ tam latisine süreklidir denir : $\Leftrightarrow$ Her $a \in L$ için $a = \bigvee_{b \ll a} b$ dir.

Teorem 1.1.34: $L$ bir tam latis olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.
(1) $L$ tam dağılımlıdır.
(2) $L$ süreklidir ve her elemanı indirgenemez elemanların supremumu olarak yazılabilir.
(3) $L$ dağılımlıdır ve $L, L^{op}$ sürekli latislerdir (Gierz ve diğ., 1980).

Sürekli bir latisteki yaklaşımsal sıralama bağıntısı ile tam dağılımlı bir tam latisteki kesişimsel sıralama bağıntısı interpolasyon özelliğine sahiptir. Yani, $L$ tam dağılımlı latis, $a \in c(L)$ ve $a \ll b$ ise en az bir $c \in c(L)$ vardır öyle ki $a \ll c \ll b$ sağlanır.

Bir $L$ tam latisindeki yaklaşımsal sıralama bağıntısı çarpımsal (multiplicative) (benzer şekilde yerel çarpımsal) özelliğe sahiptir denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ (benzer şekilde, her $a, b \in c(L)$) için $a \ll b$ ve $a \ll c$ ise $a \ll b \wedge c$ sağlanır.

Bir tam dağılımlı tam latisteki yaklaşımsal sıralama bağıntısı çarpımsal ise yerel çarpımsal olduğu açıktır. Buna ek olarak, bir $L$ tam dağılımlı tam latisi için $a \lhd \bigvee_{i \in J} b_i$ ise en az bir $b_i \in L$ mevcuttur öyle ki $a \lhd b_i$ dir (Gierz ve diğ., 1980).

Tanım 1.1.35: $L$ tam dağılımlı tam latis ve $\alpha \in L$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $B$ alt kümesine $\alpha$ nın minimal kümesi denir.
(a) $\bigvee B = \alpha$.
(b) Her $b \in B$ ve $\bigvee \Phi \geq \alpha$ olan her $\Phi \subseteq L$ için en az bir $c \in \Phi$ vardır öyle ki $c \geq b$ dir. $\alpha$ nın tüm minimal kümelerinin birleşimi en büyük minimal kümedir ve bu küme $\beta(\alpha)$ sembolü ile gösterilir. Ayrıca, $\beta^*(\alpha) = \beta(\alpha) \cap c(L)$ dir (Wang, 1988).

Önerme 1.1.36: $L$ tam dağılımlı tam latis olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.
(1) Yaklaşımsal sıralama bağıntısı yerel çarpımsal özelliğine sahiptir.
(2) $\beta^*(a) = \{b \in c(L) \mid b \lhd a\}$ olarak tanımlanan $\beta^*: L \to 2^{c(L)}$ dönüşümü sonlu infimumları korur (Gierz ve diğ., 1980).

## 1.2. Kategoriler ve Funktorlar

Küme teorisinde, kümeler ve kümeler arasında tanımlanan fonksiyonlar göz önüne alınır. Topolojide bir topolojik uzaydan diğerine sürekli fonksiyonlar, grup teorisinde bir gruptan diğerine grup homomorfizmleri tanımlanır. Bunları ayrı ayrı birer çatı altında toplarsak, bu yapı bazı objelerden ve bir objeden diğerine gitmek için tanımlanan kurallar veya yollardan oluşur. İşte bu kavramlar kategorinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 1.2.1: Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:
(K1) Bir $Ob\mathbb{K}$ sınıfı ki, bu sınıfın elemanlarına $\mathbb{K}$ nın objeleri (nesneleri) denir.
(K2) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her $(X,Y)$ ikilisi için bir $M(X,Y)$ kümesi karşılık getirilir ve bu kümenin elemanlarına $X$ den $Y$ ye morfizmler ya da $\mathbb{K}$ -morfizmler denir.

Her $X,Y,Z,W \in Ob\mathbb{K}$ için $(X,Y) \neq (Z,W)$ ise $M(X,Y) \cap M(Z,W) = \emptyset$ dir. (Yani, tanım ve değer bölgeleri tek türlü belirlidir.)

Bazen $M(X,Y)$ kümesi, $Mor(X,Y)$ veya $Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ile gösterilir.

(K3) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her $X,Y,Z$ üçlüsü için bir $\circ$ dönüşümü ki bileşke adı verilen bu dönüşüm
$\circ: M(X,Y) \times M(Y,Z) \longrightarrow M(X,Z), \quad \circ(f,g) \coloneqq g \circ f$
şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:
(i) Bileşke asosyatiftir. Yani, $\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ ve $h \in Mor(Z,W)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(ii) $\mathbb{K}$ nın her $X$ objesi için $X$ in idantik (birim) morfizmi adı verilen bir $1_X \in Mor(X,X)$ elemanı vardır öyle ki,
$\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ için $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$.

Kategorideki objelerin sınıfının kümelerden oluşması gerekmez (o yalnızca bir sınıftır). Buna rağmen herhangi iki obje için birinden diğerine olan morfizmler bir küme formunda olmak zorundadır.

$X, Y \in Ob\mathbb{K}$ ve $f \in Mor(X,Y)$ için $X$ kümesine $f$ nin tanım bölgesi, $Y$ ye ise değer bölgesi denir. $X$ ve $Y$ nin küme olmadığı durumlarda $f$ nin de bir fonksiyon olması gerekmez (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.2: (1) En önemli kategori örneklerinden birisi kümeler ve fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{SET}$ kategorisidir. Yani,
(a) $Ob(\boldsymbol{SET}) \coloneqq \{ X \mid X \text{ bir küme} \}$,
(b) $Mor(X,Y) \coloneqq \{ f \mid f: X \longrightarrow Y \text{ bir fonksiyon} \}$,
(c) Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi,
(d) $X \in Ob(\boldsymbol{SET})$ için $1_X: X \longrightarrow X, 1_X(x) \coloneqq x$ özdeşlik fonksiyon.

Burada bütün kümeleri ya da bir kümeden diğerine tanımlı bütün fonksiyonları almak gerekli değildir. (K3) koşulu kaldığı müddetçe seçilen bazı fonksiyonlarla da (örneğin, bire-bir örten fonksiyonlar) bir kategori yapılabilir. Buna ileride alt kategori diyeceğiz.

(2) $\boldsymbol{TOP}$: Topolojik uzaylar ve bunlar arasındaki sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategori, yani
(a) $Ob(\boldsymbol{TOP}) \coloneqq \{ (X,T) \mid (X,T) \text{ bir topolojik uzay} \}$,
(b) $Mor\big((X,T),(Y,T^*)\big) \coloneqq \{ f \mid f: (X,T) \longrightarrow (Y,T^*) \text{ bir sürekli fonksiyon} \}$,
(c) Bileşke dönüşümü sürekli fonksiyonların bileşkesi.
(3) Her $X$ kümesine aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathfrak{C}(X) = \mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir:

$$Ob\mathbb{K} \coloneqq \{ x \mid x \in X \}, Mor(x,y) \coloneqq \begin{cases} \{x\}, & x = y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}, \; id_X = x, \; x \circ x = x.$$

$\mathfrak{C}(\emptyset)$ kategorisine boş kategori denir. $\mathfrak{C}(\{0\})$ kategorisine ise son (terminal) kategori denir.

(4) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir.

$Ob\mathbb{K} := \{ x \mid x \in X \}$, $\forall x, y \in Ob\mathbb{K}$ için $Mor(x,y) := \begin{cases} \{(x,y)\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$

$\leq$ bağıntısının geçişme özelliği $\mathbb{K}$ nın her üç objesi için bir tek bileşke olduğunu, yansıma özelliği de idantik morfizmin varlığını garanti eder (Adamek ve diğ., 1990).

(5) $\boldsymbol{Frm}$: Çatılar kategorisi, yani

(a) $Ob\boldsymbol{Frm} := \{ L \mid L$ bir çatı ( frame ) $\}$,

(b) $Mor(L,K) := \{ f \mid f$ sonlu infimum ve keyfi supremum koruyan dönüşüm$\}$.

(6) $\boldsymbol{SET} \times \boldsymbol{SET}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:

(a) $Ob(\boldsymbol{SET} \times \boldsymbol{SET}) := \{ (A,B) \mid A, B$ bir küme $\}$,

(b) $Mor((A,B),(C,D)) := \{ (f,g) \mid f: A \longrightarrow C, g: B \to D$ bir fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke işlemi; $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$,

Benzer şekilde sonlu sayıda kategorinin çarpımı da tanımlanabilir (Adamek ve diğ., 1990).

(7) $\boldsymbol{Grp}$: Gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisi,

$\boldsymbol{Ring}$: Halkalar ve halka homomorfizmleri kategorisi,

$\boldsymbol{Bool}$: Boole cebirleri ve homomorfizmleri kategorisi (Johnstone, 1992).

(8) $\boldsymbol{Vec}$: Nesneleri tüm reel vektör uzayları ve morfizmleri bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümler kategorisi.

$\boldsymbol{Rel}$: $X$ bir küme ve $\rho, X$ üzerinde bir bağıntı olmak üzere nesneleri tüm $(X, \rho)$ ikilileri ve morfizmleri de bağıntı koruyan dönüşümler kategorisi.

$\boldsymbol{Met_c}$: Nesneleri tüm metrik uzaylar ve morfizmleri bu uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar kategorisi (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.3: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\mathbb{L}$ ye $\mathbb{K}$ nın bir alt kategorisi (subcategory) denir.

(a) $Ob\mathbb{L} \subset Ob\mathbb{K}$,

(b) $\forall X, Y \in Ob\mathbb{L}$ için $Mor_{\mathbb{L}}(X,Y) \subset Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$,

(c) $\forall X, Y, Z \in Ob\mathbb{L}$ ve $\forall f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{L}}(Y,Z)$ için

$g \circ f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Z) \implies g \circ f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Z)$,

(d) $\forall X \in Ob\mathbb{L}$ için $1_X \in Mor_{\mathbb{L}}(X,X) \implies 1_X \in Mor_{\mathbb{K}}(X,X)$.

Eğer yukarıda verilen (b) koşulu için eşitlik sağlanıyorsa $\mathbb{L}$ ye $\mathbb{K}$ nın bütünüyle alt kategorisi (full subcategory) denir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.4: (1) Objeleri kümeler, morfizmleri bire-bir örten fonksiyonlar olan kategori $\boldsymbol{SET}$ kategorisinin bir alt kategorisidir. Objeleri bütün sonlu kümeler ve morfizmleri fonksiyonlar olan kategori de $\boldsymbol{SET}$ kategorisinin bütünüyle alt kategorisidir.

(2) Objeleri kompakt (veya bağlantılı, Hausdorff vs.) topolojik uzaylar ve morfizmleri homeomorfizmler olan kategori $\boldsymbol{TOP}$ kategorisinin bir alt kategorisidir.

Tanım 1.2.5: $\mathbb{K}$ herhangi bir kategori olsun. Aşağıda tanımlanan kategoriye $\mathbb{K}$ nın dual kategorisi ( duali ) denir ve $\mathbb{K}^o$ ile gösterilir.

$Ob\mathbb{K}^o \coloneqq Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, X, Y \in Ob\mathbb{K}^o$ için $Mor_{\mathbb{K}^o}(X,Y) \coloneqq Mor_{\mathbb{K}}(Y,X)$.

Yani, $\mathbb{K}^o$ nin morfizmleri $\mathbb{K}$ nın morfizmlerinin tanım ve değer kümelerinin yer değiştirilmesi ile elde edilir. Açık olarak, $(\mathbb{K}^o)^o = \mathbb{K}$ dir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.6: (1) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye Örnek 1.5.2 (4) den bir kategori gözüyle bakılabileceğinden, bu kategorinin duali $(X, \geq)$ kısmi sıralı kümesidir (Adamek ve diğ., 1990).

(2) $\boldsymbol{Frm}$ çatılar kategorisinin dualine lokaller kategorisi denir ve bu kategori $\boldsymbol{Loc}$ ile gösterilir (Johnstone, 1992).

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $\mathbb{K}$ bir kategori ve $f: X \longrightarrow Y$, $\mathbb{K}$ da bir morfizm olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.2.7: (a) $\forall\, Z \in Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, g_1, g_2: Y \longrightarrow Z$ morfizmleri için
$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$ sağlanıyorsa $f$ ye bir epimorfizm denir.
(b) $\forall\, Z \in Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, h_1, h_2: Z \longrightarrow X$ morfizmleri için
$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Longrightarrow h_1 = h_2$ sağlanıyorsa $f$ ye bir monomorfizm denir.
Eğer $f$ hem bir epimorfizm hemde bir monomorfizm ise $f$ ye bimorfizm denir.

$\boldsymbol{SET}$ kümeler kategorisinde bir epimorfizm örten fonksiyon ve bir monomorfizm de bir bire-bir fonksiyondur.

Bu ifadenin diğer kategoriler için genel olarak doğru olması gerekmez.

Eğer $\mathbb{K}$ morfizmleri fonksiyonlar olan bir kategori ise bu kategoride örten fonksiyon olan her morfizm bir epimorfizmdir, fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Örneğin, Hausdorff topolojik uzayların kategorisinde, eğer $X$ bir $Y$ Hausdorff uzayının yoğun bir alt uzayı ise $i : X \longrightarrow Y, i(x) \coloneqq x$ olarak tanımlanan dönüşüm bir epimorfizm olmasına rağmen örten fonksiyon değildir (Mitchell, 1965).

Tanım 1.2.8: Eğer $f$'nin sağ tersi varsa, yani $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise $f$ ye bir büzülme (retraksiyon) adı verilir. Eğer $f$ sol terse sahip ise $f$ ye bir karşı (eş) büzülme (co-retraksiyon) denir.

Her retraksiyon bir epimorfizmdir. Kümeler kategorisinde bunun terside doğrudur, ancak genelde doğru olması gerekmez (Mitchell, 1965).

Tanım 1.2.9: $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise $f$ ye $\mathbb{K}$ da bir özdeşlik veya izomorfizm denir (Adamek ve diğ., 1990).

Kolaylıkla görülebilir ki, $\boldsymbol{SET}$ kategorisinde izomorfizm bir bijeksiyon, $\boldsymbol{TOP}$ kategorisinde izomorfizm bir homeomorfizm ve $\boldsymbol{Grp}$ de ise bir grup izomorfizmine karşılık gelir.

Tanım 1.2.10: Bir $\mathbb{K}$ kategorisinin objelerinin sınıfı küme ise, bu kategoriye küçük (small), aksi halde büyük (large) denir. Örneğin, kısmi sıralı kümelerin oluşturduğu kategori küçüktür.

Tanım 1.2.11: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan $U$ ya $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{L}$ ye bir kovaryant (kontravaryant) funktor denir ve $U: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ biçiminde yazılır (Adamek ve diğ., 1990).

(a) $\forall X \in Ob\mathbb{K}$ için $U(X) \in Ob\mathbb{L}$,

(b) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $U(f) \in Mor_{\mathbb{L}}(U(X),U(Y))$

( $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $U(f) \in Mor_{\mathbb{L}}(U(Y),U(X))$ ),

(c) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$
( $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $U(g \circ f) = U(f) \circ U(g)$ ),
(d) $\forall X \in Ob\mathbb{K}$ için $U(1_X) = 1_{U(X)}$.

Örnek 1.2.12: (1) $Z$ sabit bir küme olmak üzere, $U: \boldsymbol{SET} \longrightarrow \boldsymbol{SET}$ dönüşümü $U(X) \coloneqq X \times Z$ ve $f: X \longrightarrow Y$ için $U(f): X \times Z \longrightarrow Y \times Z$, $U(f) \coloneqq f \times 1_Z$ olarak tanımlanırsa $U$ bir kovaryant funktordur.

(2) $\mathbb{K} \coloneqq \boldsymbol{TOP}$ ve $\mathbb{L} \coloneqq \boldsymbol{Ring}$ olmak üzere, $U: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ dönüşümü,
$U(X) \coloneqq C(X) = \{ \lambda : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \lambda$ sürekli fonksiyon $\}$ ve $U(f) \coloneqq f^*$
($\lambda \in C(Y)$ için $f^*(\lambda) \coloneqq \lambda \circ f$) olarak tanımlanırsa, $U$ bir kontravaryant funktordur.

(3) $\Omega : \boldsymbol{TOP} \longrightarrow \boldsymbol{Loc}$, $\Omega(X,\tau) \coloneqq \tau$ ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $f^{-1} : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ fonksiyonu olmak üzere $\Omega(f) \coloneqq f^{-1}$ olarak tanımlanan $\Omega$ bir kontravaryant funktordur.

(4) $id_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $id_{\mathbb{K}}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = A \xrightarrow{f} B$ olarak tanımlanan $id_{\mathbb{K}}$ birim funktordur.

(5) $\mathbb{K}^o$, $\mathbb{K}$ nın dual kategorisi olsun. Bu takdirde, $I: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^o, I(X) \coloneqq X$ ve $I(f) \coloneqq f$ olarak tanımlanan $I$ bir kontravaryant funktordur. Ayrıca, $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ herhangi bir funktor olmak üzere, $F^o \circ I = F$ olacak şekilde bir tek $F^o : \mathbb{K}^o \longrightarrow \mathbb{L}$ funktoru vardır.

Açık olarak,

$F$ funktoru kovaryanttır $\Leftrightarrow$ $F^o$ funktoru kontravaryanttır (Adamek ve diğ., 1990).

Funktorlar bir kategori hakkındaki verileri diğer bir kategoriye taşır. Bazı kategorilerin objeleri diğer bir kategorinin objeleri üzerine ilave bazı yapılar koyularak elde edilirler. Örneğin, bir topolojik uzay bir küme (yani, $\boldsymbol{SET}$ kategorisinin bir objesi) üzerine topolojik yapı ilave edilmesi ile elde edilir. Bir halka bir Abel grubundan, bir Abel grubu da bir kümeden elde edilebilir. Bu durumların her birinde ilk kategoriden ikinci (yani, ilave özelliğin unutulduğu) kategoriye bir funktor tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan funktorlara unutkan (forgetful) funktor adı verilir.

Örneğin, $U : \boldsymbol{TOP} \longrightarrow \boldsymbol{SET}, U(X,\tau) := X$ ve $U(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir unutkan funktordur. Çünkü, $X$ objesini ikinci tarafa götürürken üzerindeki $\tau$ topolojisini ve $f$ morfizmini götürürken de sürekliliğini dikkate almıyor. Benzer şekilde, $\boldsymbol{Grp}$ gruplar kategorisinden ve $\boldsymbol{Ring}$ halkalar kategorisinden $\boldsymbol{SET}$ kümeler kategorisine unutkan funktorlar tanımlanabilir.

Unutkan funktorların tersine olarak, bir kategoriden diğer bir kategoriye ilk kategorinin objelerine daha fazla yapı ekleyecek şekilde funktorlar da tanımlanabilir. Örneğin, $V : \boldsymbol{SET} \longrightarrow \boldsymbol{TOP}$, $V(X) := (X, \tau_D)$ ve $V(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir funktordur. Benzer şekilde, $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ diskret topoloji yerine $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ trivial topoloji de alınabilir (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.13: (1) $U: \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ funktoruna bir izomorfizm denir : $\Leftrightarrow$ En az bir $V: \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ funktoru vardır öyle ki $V \circ U = id_{\mathbb{K}}$ ve $U \circ V = id_{\mathbb{L}}$ dir.

(2) $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ kategorileri arasında bir izomorfizm mevcut ise bu iki kategoriye izomorftur denir.

Tanım 1.2.14: $U: \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ bir funktor olsun. Bu takdirde,
(1) $U$ ya gömme (embedding) funktoru denir: $\Leftrightarrow U$, morfizmler üzerine bire-birdir.
(2) $U$ ya sadık (faithful) funktor denir: $\Leftrightarrow U: Mor(A, A') \to Mor(U(A), U(A'))$ morfizm-küme kısıtlanışları bire-birdir.
(3) $U$ ya dolu (full) funktor denir: $\Leftrightarrow U: Mor(A, A') \to Mor(U(A), U(A'))$ örtendir.
(4) $U$ ya unutturan (amnestic) funktor denir: $\Leftrightarrow U(f)$ birim ise $f$, $\mathbb{K}$-morfizmide birimdir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.15: (1) $U: \boldsymbol{Vec} \to \boldsymbol{SET}$ unutkan funktoru sadık ve unutturandır, fakat ne dolu nede gömme funktoru değildir.

(2) $U\left((X,d) \xrightarrow{f} (X',d')\right) = (X,\tau_d) \xrightarrow{f} (X',\tau_{d'})$ olarak tanımlanan $U: \boldsymbol{Met_c} \to \boldsymbol{TOP}$ funktoru dolu ve sadıktır, fakat gömme değildir (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.16: (1) $\boldsymbol{X}$ bir kategori olsun. $\boldsymbol{A}$ bir kategori ve $U: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{X}$ sadık bir funktor olmak üzere, $(\boldsymbol{A}, U)$ ikilisine bir somut (concrete) kategori adı verilir. Burada, $U$ ya somut kategorinin unutkan (veya altyapı) funktoru ve $\boldsymbol{X}$ e ise somut kategorinin taban kategorisi denir.

(2) $\boldsymbol{SET}$ üzerinde tanımlı bir somut kategoriye bir oluşum (construct) adı verilir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.17: Birim funktor ile her kategori kendisi üzerinde bir somut kategoridir.

Tanım 1.2.18: $(\boldsymbol{A}, U)$, $\boldsymbol{X}$ üzerinde bir somut kategori olsun. Bu durumda,
(1) $U(A) = X$ koşulunu sağlayan ve aşağıdaki sıralamaya göre tüm $A$, $\boldsymbol{A}$-objelerinin oluşturduğu ön sıralı sınıfa $X$, $\boldsymbol{X}$-objesinin bir lifi (fibre) denir.
(2) $A \leq B$ ancak ve ancak $id_X: U(A) \to U(B)$ bir $\boldsymbol{A}$-morfizmdir.
(3) $A$ ve $B$ objelerine denktir denir: $\Leftrightarrow A \leq B$ ve $B \leq A$ sağlanır.
(4) $(\boldsymbol{A}, U)$ somut kategorisine unutturan (amnestic) denir: $\Leftrightarrow$ Tüm lifleri kısmi sıralı kümelerdir, yani farklı iki $\boldsymbol{A}$-objesi denk değildir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.19: Eğer $\boldsymbol{A}$ bir oluşum ve $X$ bir küme ise, $X$ in $\boldsymbol{A}$-lifi uygun şekilde sıralanan tüm $\boldsymbol{A}$-yapıların kümesidir.

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{TOP}$ ise, $X$ üzerindeki $\tau_1, \tau_2$ topolojileri için, sıralama "$\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1$" şeklinde tanımlanır.

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Rel}$ ise $X$ üzerindeki $\rho_1, \rho_2$ bağıntıları için, sıralama "$\rho_1 \leq \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1 \subseteq \rho_2$" şeklinde tanımlanır (Adamek ve diğ., 1990).

Uyarı 1.2.20: $(\boldsymbol{A}, U)$ somut kategorisi unutturandır ancak ve ancak $U$ funktoru unutturandır. Bilinen birçok kategori unutturandır (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.21: $\boldsymbol{X}$ üzerindeki bir $(\boldsymbol{A}, U)$ somut kategorisine (tek türlü) taşınabilir denir $:\Leftrightarrow$ Her $A$, $\boldsymbol{A}$-objesi ve her $U(A) \xrightarrow{k} X$, $\boldsymbol{X}$-izomorfizmi için $U(B) = X$ olacak şekilde (bir tek) $B$, $\boldsymbol{A}$-objesi vardır öyle ki $A \xrightarrow{k} B$ bir $\boldsymbol{A}$-izomorfizmidir (Adamek ve diğ., 1990).

Örnek 1.2.22: $\boldsymbol{Vec}, \boldsymbol{Grp}, \boldsymbol{Rel}$ ve $\boldsymbol{TOP}$ oluşumları tek türlü olarak taşınabilir.

Tanım 1.2.23: $A$ bir obje ve $f_i: A \to A_i, i \in I$ tanım bölgesi $A$ olan morfizmler ise, $(A, (f_i)_{i\in I})$ ikilisine bir kaynak (source) adı verilir. Bir kaynak, $\left(A \overset{f_i}{\to} A_i\right)_{i\in I}$ şeklinde de gösterilebilir (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.24: $V: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ bir funktor olsun. $\boldsymbol{A}$ daki bir $\mathcal{S} = \left(A \overset{f_i}{\to} A_i\right)_I$ kaynağına $V$-başlangıç ($V$-initial) denir $:\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ daki her $\mathcal{T} = \left(B \overset{g_i}{\to} A_i\right)_I$ kaynağı ve $V\mathcal{T} = V\mathcal{S} \circ h$ olacak şekildeki her $V(B) \overset{h}{\to} V(A)$, $\boldsymbol{B}$-morfizmi için bir tek $B \overset{\overline{h}}{\to} A$, $\boldsymbol{A}$ -morfizmi vardır öyle ki $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \overline{h}$ ve $h = V(\overline{h})$ sağlanır (Adamek ve diğ., 1990).

Tanım 1.2.25: $\boldsymbol{A} \overset{U}{\to} \boldsymbol{B}$ funktor olmak üzere, $U(f): U(A) \to U(B)$ için sağlanan bir P özelliği $f: A \to B$ morfizmi için de sağlanıyor ise $U$ funktoru bu P özelliğini yansıtıyor (lift) denir.

Tanım 1.2.26: $\boldsymbol{A} \overset{U}{\to} \boldsymbol{B}$ funktoruna topolojiktir denir: $\Leftrightarrow$Her $\left(B \overset{f_i}{\to} UA_i\right)_I$, $U$-yapılı kaynağı bir tek $\left(A \overset{\overline{f_i}}{\to} A_i\right)_I$, $U$-başlangıç yansımasına sahiptir.

Örneğin, $\boldsymbol{TOP}$ ve $\boldsymbol{Rel}$ oluşumları üzerindeki unutkan funktorlar topolojiktir (Adamek ve diğ., 1990).

Önerme 1.2.27: $\boldsymbol{A} \overset{U}{\to} \boldsymbol{B}$ bir funktor olsun. Her $U$-yapılı kaynak bir tek $U$-başlangıç yansımasına sahip ise aşağıdaki koşullar denktir.
(1) $U$ topolojiktir.
(2) $(\boldsymbol{A}, U)$ tek türlü olarak taşınabilir.
(3) $(\boldsymbol{A}, U)$ unutturandır.

Tanım 1.2.28: Eğer $U$ topolojik ise $(\boldsymbol{A}, U)$ somut kategorisine topolojik kategori adı verilir (Adamek ve diğ., 1990).

## 1.3. Esnek Kümeler

Tanım 1.3.1: $X$ evrensel küme, $E$ parametrelerin kümesi ve $\mathcal{P}(X)$, $X$ in güç kümesi olsun.

$(F, E)$ ikilisine $X$ üzerinde bir esnek (soft) küme denir : $\Leftrightarrow$ $F : E \longrightarrow \mathcal{P}(X) = 2^X$.

Diğer bir deyişle, esnek küme $X$ in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen bir ailesidir. Her $e \in E$ için $F(e)$ değer kümesine esnek kümenin $e$-elemanı adı verilir. Dikkat edilirse, $F(e)$ boş küme veya boş olmayan $X$ in herhangi bir alt kümesi olabilir. Bir $(F, E)$ esnek kümesi aşağıdaki şekilde ikililer yardımıyla ifade edilir:

$(F, E) = \{(e, F(e)) \mid e \in E\}$ (Molodtsov, 1999).

Örnek 1.3.2: (1) $(F, E)$ esnek kümesi, bir $A$ kişisinin satın almayı düşündüğü evlerin özelliklerini tanımlasın.

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin kümesi ve

$E = \{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{e_i : i = 1,2, \dots ,5\}$

karar parametrelerinin kümesi olsun.

$F$ dönüşümünü düşünelim. Örneğin, $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır ve fonksiyon değeri $\{h \in X : h\ pahalı\ ev\}$ kümesidir. Buna göre,

$F(e_1) = \{h_2, h_4\},\ F(e_2) = \{h_1, h_3\},\ F(e_3) = \emptyset,\ F(e_4) = \{h_1, h_5\}, F(e_5) = \{h_1\}.$

$(F, E) = \{(pahalı\ ev, \{h_2, h_4\}), (güzel\ ev, \{h_1, h_3\}), (ahşap\ ev, \emptyset),$
$(ucuz\ ev, \{h_1, h_5\}), (bahçeli\ ev, \{h_1\})\}$ olarak tanımlanır (Aktaş ve Çağman, 2007).

(2) $A$, $X$ üzerinde bir bulanık küme ve $E = [0,1]$ olsun.

$F(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0,1]$

olarak tanımlanan $F : E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü $X$ üzerinde bir esnek kümedir. Burada, $F(\alpha)$, $A$ bulanık kümesinin $\alpha$-seviye kümesidir (Pei ve Miano, 2005).

Buradan, bir bulanık kümenin bir esnek küme olarak gösterilebildiğini söyleriz.

(3) $(X,\tau)$ bir topolojik uzay ve $X$ olsun. $F(x)=\{A\in\tau \mid x\in A\}$ $x$ in tüm açık komşuluklarının ailesi olmak üzere, $F: X\longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü $X$ üzerinde bir esnek kümedir (Pei ve Miano, 2005).

Tanım 1.3.3: $(F,A)$ $ve$ $(G,B)$ $X$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda,
(1) $(F,A)$ ya $(G,B)$ nin alt kümesi denir $:\Leftrightarrow$ $A\subset B$ ve her $a\in A$ $için$ $F(a)\subseteq G(a)$.
(2) $(F,A)$ $ve$ $(G,B)$ esnek kümelerine eşittir denir $:\Leftrightarrow$ $(F,A)\sqsubseteq(G,B)$ ve $(G,B)\sqsubseteq(F,A)$ sağlanır.
(3) $(F,A)$ $ve$ $(G,B)$ esnek kümelerinin birleşimi $(H,C)$ esnek kümesidir $:\Leftrightarrow$ $C=A\cup B$ ve $\forall c\in C$ için

$$H(c)=\begin{cases} F(c), & c\in A\backslash B \\ G(c), & c\in B\backslash A \\ F(c)\cup G(c) & c\in A\cap B \end{cases}$$

$(F,A)\sqcup(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir.
(4) $A\cap B\neq\emptyset$ olmak üzere, $(F,A)$ $ve$ $(G,B)$ esnek kümelerinin kesişimi $(H,C)$ esnek kümesidir $:\Leftrightarrow$ $C=A\cap B$ ve $\forall c\in C$ $için$ $H(c)=F(c)\cap G(c)$ dir.
$(F,A)\sqcap(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir.
(5) $(F,A)$ esnek kümesine boş esnek küme denir $:\Leftrightarrow$ $\forall a\in A$ $için$ $f(a)=\emptyset$. Boş esnek küme $\Phi$ ile gösterilir.
(6) $(F,A)$ esnek kümesine mutlak esnek küme denir $:\Leftrightarrow$ $\forall a\in A$ $için$ $f(a)=X$. Mutlak esnek küme $\tilde{A}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.3.4: $E=\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $E$ kümesinin değili $\neg E$ ile gösterilir ve $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\neg e_3,\dots,\neg e_n\}$' dir. Burada $\neg e_i$, her $i$ için $e_i$' nin değiline eşittir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.3.5: $X$ üzerindeki $(F,A)$ esnek kümesinin tümleyeni, $(F,A)^c$ ile gösterilir ve $(F,A)^c=(F^c,\neg A)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $F^c:\neg A\rightarrow \wp(X)$ bir fonksiyon ve $\forall a\in\neg A$ için $F^c(a)=(F(\neg a))^c=X-F(\neg a)$ dir. $F^c$ ye $F$ nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $((F,A)^c)^c=(F,A)$ olduğu açıktır (Maji ve diğ., 2003).

Önerme 1.3.6: $(F,A),(G,B)\ ve\ (H,C)$ $X$ üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır (Maji ve diğ., 2003).

(1) $(F,A)\ \tilde{\sqcup}\ (G,B) = (G,B)\ \tilde{\sqcup}\ (F,A)$.

(2) $(F,A)\ \tilde{\sqcup}\ \big((G,B)\ \tilde{\sqcup}\ (H,C)\big) = \big((F,A)\ \tilde{\sqcup}\ (G,B)\big)\ \tilde{\sqcup}\ (H,C)$.

(3) $(F,A) \sqsubseteq (F,A)\ \tilde{\sqcup}\ (G,B)\ ve\ (G,B) \sqsubseteq (F,A)\ \tilde{\sqcup}\ (G,B)$.

(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B)\ \Rightarrow (F,A)\ \tilde{\sqcup}\ (G,B) = (G,B)$.

Önerme 1.3.7: $(F,A),(G,B)\ ve\ (H,C)$ $X$ üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır (Maji ve diğ., 2003).

(1) $(F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (F,A) = (F,A)$.

(2) $(F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (G,B) = (G,B)\ \tilde{\sqcap}\ (F,A)$.

(3) $(F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (G,B) \sqsubseteq (F,A)\ ve\ (F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (G,B) \sqsubseteq (G,B)$.

(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B)\ \Rightarrow\ (F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (G,B) = (F,A)$.

(5) $\big((F,A)\ \tilde{\sqcap}\ (G,B)\big)\ \tilde{\sqcap}\ (H,C) = (F,A)\ \tilde{\sqcap}\ ((G,B)\ \tilde{\sqcap}\ (H,C))$.

Uyarı 1.3.8: $X$ evrensel küme, $E$ $X$ için uygun olan tüm parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $(F,A)$, $X$ üzerinde bir esnek küme $(F : A \longrightarrow \mathcal{P}(X))$ olmak üzere aşağıdaki düşünceyle $(F,A)$ esnek kümesi $(\bar{F},E)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir.

$$\bar{F}: E \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \bar{F}(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \\ \emptyset, & e \notin A \end{cases}.$$

Bu düşünceden hareketle, parametre kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı her esnek küme evrensel parametre kümesi üzerine genişletilebileceğinden bu tezin geri kalan kısmında esnek küme olarak genişletilmiş esnek kümeler göz önüne alınacaktır. Sadelik olması açısından bir $(F,A)$ (benzer şekilde, $(G,B),(H,C),\ldots$) esnek kümesi kısaca $F$ $(benzer\ şekilde, G, H, \ldots)$ ile gösterilecektir ve esnek küme sadece $F : E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü olarak düşünülecektir (Majumdar ve Samanta, 2008), (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

$X$ üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin ailesi $(2^X)^E$ (veya $\mathcal{P}(X)^E$) ile gösterilir.

Tanım 1.3.9: $F, G \in (2^X)^E$ olsun. Bu takdirde,

(1) $F$' ye $G$' nin alt kümesi denir ve bu durum $F \sqsubseteq G$ ile gösterilir: $\Leftrightarrow \forall\, e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ sağlanır. $F$ ve $G$ eşittir denir : $\Leftrightarrow F \sqsubseteq G$ ve $G \sqsubseteq F$.

(2) $F$ ve $G$ esnek kümelerinin birleşimi $H = F \tilde{\sqcup} G$ esnek kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde tanımlıdır.

(3) $F$ ve $G$ esnek kümelerinin kesişimi $H = F \tilde{\sqcap} G$ esnek kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlıdır.

(4) $F$ esnek kümesine boş esnek küme denir ve $F = \Phi$ (veya $F = \Phi_X$) ile gösterilir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ dir.

(5) $F$ esnek kümesine mutlak (evrensel) esnek küme denir ve $F = \tilde{E}$ ile gösterilir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F(e) = X$ dir.

(6) Bir $F$ esnek kümesinin tümleyeni $F'$ ile gösterilir. Burada, $F' : E \to 2^X$ bir dönüşüm olmak üzere $F'(e) = X \setminus F(e)$ şeklinde tanımlanır. $F'$ ye $F$ nin esnek tümleyen fonksiyonu denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Dikkat edilirse, $(\tilde{E})' = \Phi$ ve $(\Phi)' = \tilde{E}$ olduğu tanımdan açıktır.

Tanım 1.3.10: $X$ üzerindeki bir $F$ esnek kümesine yerel mutlak esnek küme denir ve $\widetilde{E_A}$ ile gösterilir : $\Leftrightarrow \forall e \in A \subset E$ için $F(e) = X$ ve $\forall\, e \in E \backslash A$ için $F(e) = \emptyset$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Önerme 1.3.11: $J$ indeks kümesi ve $F, G, H, F_i, G_i \in (2^X)^E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

(1) $F \tilde{\sqcap} F = F$ , $F \tilde{\sqcup} F = F$.

(2) $F \tilde{\sqcap} G = G \tilde{\sqcap} F$ , $F \tilde{\sqcup} G = G \tilde{\sqcup} F$.

(3) $F \tilde{\sqcup} (G \tilde{\sqcup} H) = (F \tilde{\sqcup} G) \tilde{\sqcup} H$ , $F \tilde{\sqcap} (G \tilde{\sqcap} H) = (F \tilde{\sqcap} G) \tilde{\sqcap} H$.

(4) $F \tilde{\sqcap} \left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} G_i\right) = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} (F \tilde{\sqcap} G_i)$ ve $F \tilde{\sqcup} \left(\widetilde{\bigsqcap_{\iota \in J}} G_i\right) = \widetilde{\bigsqcap_{\iota \in J}} (F \tilde{\sqcup} G_i)$ .

(5) $\Phi \sqsubseteq F \sqsubseteq \widetilde{E_A} \sqsubseteq \tilde{E}$.

(6) $(F')' = F$.

(7) $\left(\widetilde{\bigsqcap_{\iota \in J}} F_i\right)' = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} F_i'$ , $\left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} F_i\right)' = \widetilde{\bigsqcap_{\iota \in J}} F_i'$ .

(8) $F \sqsubseteq G \Rightarrow G' \sqsubseteq F'$.

Tanım 1.3.12: $\varphi : X_1 \to X_2$ , $\psi : E_1 \to E_2$ iki fonksiyon ve $E_1, E_2$ sırasıyla $X_1$ ve $X_2$ için parametre evrensel kümeleri olsun. $\varphi_\psi$ fonksiyonuna $X_1$ den $X_2$ ye bir esnek fonksiyon denir. Ayrıca,

(1) $F \in (2^{X_1})^{E_1}$, $X_1$ üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $F$ nin $\varphi_\psi$ esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(F)$, $X_2$ üzerinde bir esnek kümedir ve bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\varphi_\psi(F)(k) = \bigcup_{\psi(e)=k} \varphi(F(e)), \quad \forall\, k \in E_2.$$

(2) $G \in (2^{X_2})^{E_2}$, $X_2$ üzerinde bir esnek küme olmak üzere, $G$ nin $\varphi_\psi$ esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü ${\varphi_\psi}^{-1}(G)$, $X_1$ üzerinde bir esnek kümedir. Bu esnek küme ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${\varphi_\psi}^{-1}(G)(e) = \varphi^{-1}\left(G\left(\psi(e)\right)\right) , \ \forall\, e \in E_1.$$

Eğer $\varphi$ ve $\psi$ bire-bir (örten) ise $\varphi_\psi$ esnek dönüşümü de bire-bir (örten) dir. $\varphi_\psi$ $X$ den $Y$ ye ve $\gamma_\delta$ $Y$ den $Z$ ye birer esnek fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi_\psi$ ve $\gamma_\delta$ nın bileşke fonksiyonu $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi \coloneqq (\gamma \circ \varphi)_{(\delta \circ \psi)}$ şeklinde tanımlanır (Kharal ve Ahmad, 2010).

Önerme 1.3.13: $X_1$ ve $X_2$ klasik iki küme ve $F, F_1, F_2, F_i \in (2^{X_1})^{E_1}$ ve $G, G_1, G_2, G_i \in (2^{X_2})^{E_2}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $F_1 \sqsubseteq F_2 \ \Rightarrow \ \varphi_\psi(F_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(F_2)$.

(2) $G_1 \sqsubseteq G_2 \ \Rightarrow \ {\varphi_\psi}^{-1}(G_1) \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}(G_2)$.

(3) $F \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}\left(\varphi_\psi(F)\right)$, $\varphi_\psi$ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_\psi\left({\varphi_\psi}^{-1}(G)\right) \sqsubseteq G$ , $\varphi_\psi$ örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_\psi\left(\widetilde{\bigcap_{\iota\in J}} F_i\right) \sqsubseteq \widetilde{\bigcap_{\iota\in J}} \varphi_\psi(F_i)$, $\varphi_\psi$ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_\psi\left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota\in J}} F_i\right) = \widetilde{\bigsqcup_{\iota\in J}} \varphi_\psi(F_i)$.

(7) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota\in J}} G_i\right) = \widetilde{\bigsqcup_{\iota\in J}} {\varphi_\psi}^{-1}(G_i)$, ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\widetilde{\bigcap_{\iota\in J}} G_i\right) = \widetilde{\bigcap_{\iota\in J}} {\varphi_\psi}^{-1}(G_i)$.

(8) ${\varphi_\psi}^{-1}(G') = ({\varphi_\psi}^{-1}(G))'$, $(\varphi_\psi(F))' \sqsubseteq \varphi_\psi(F')$.

(9) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\tilde{E}_Y\right) = \tilde{E}_X$ , ${\varphi_\psi}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$.

(10) $\varphi_\psi$ örten ise $\varphi_\psi(\tilde{E}_X) = \tilde{E}_Y$.

(11) $\varphi_\psi(\Phi_X) = \Phi_Y$ (Kharal ve Ahmad, 2010).

Tanım 1.3.14: $F \in (2^{X_1})^{E_1}$ ve $G \in (2^{X_2})^{E_2}$ olsun. $F$ ve $G$ esnek kümelerinin kartezyen çarpımı her $(e,k) \in E_1 \times E_2$ *için* $(F \times G)(e,k) = F(e) \times G(k)$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre, $F \times G$ esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir esnek kümedir (Babitha ve Sunil, 2010).

Tanım 1.3.15: $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ ve $q_i : E_1 \times E_2 \to E_i$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Esnek kümeler üzerindeki $(p_q)_i$ izdüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$F_1 \times F_2$ esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir esnek küme olsun. $i \in \{1,2\}$ için

$(p_q)_i(F_1 \times F_2) = (p_i(F_1 \times F_2)_{q_i(E_1 \times E_2)}) = F_i$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

## 1.4. Bulanık Kümeler

Tanım 1.4.1: $X$ boştan farklı klasik bir küme ve $L$ bir tam latis olmak üzere her $\lambda : X \longrightarrow L$ fonksiyonuna $X$ in bir $L$-bulanık alt kümesi adı verilir.

$X$ in tüm $L$-bulanık alt kümelerinin ailesi $L^X$ ile gösterilir. Şu halde,

$L^X := \{ \lambda \mid \lambda : X \longrightarrow L$ bir fonksiyon$\}$ olarak tanımlıdır.

$x \in X$ ve $\lambda \in L^X$ olmak üzere $\lambda(x)$ değerine $x$ noktasının $\lambda$ $L$-bulanık alt kümesine ait olma (üyelik) derecesi denir.

Özel olarak, $L = I$ olması halinde her $\lambda : X \longrightarrow I$ fonksiyonu $X$ in bir bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

$\{ x \in X \mid \lambda(x) > 0_L \} \subseteq X$ klasik alt kümesine $\lambda$ $L$-bulanık alt kümesinin desteği denir ve supp$\lambda$ veya $\lambda_0$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Her $a \in L$ için $\{ x \in X \mid \lambda(x) \geq a \} \subseteq X$ klasik alt kümesine $\lambda$ $L$-bulanık alt kümesinin $a$-seviyesi denir ve $\lambda_{[a]}$ notasyonu ile gösterilir.

$\alpha \in L$ olmak üzere her $x \in X$ için $\underline{\alpha}(x) \coloneqq \alpha$ olarak tanımlanan $\underline{\alpha}$ bulanık kümesi $X$ in sabit $L$-bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

Buna göre, $\forall\, x \in X$ için $\underline{0}(x) \coloneqq 0_L$ ve $\underline{1}(x) \coloneqq 1_L$ biçiminde tanımlanır

$X$ kümesinin herhangi bir $A$ klasik alt kümesi de $A$ nın karakteristik fonksiyonu, $\chi_A \colon X \longrightarrow 2 \coloneqq \{0,1\}$

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

ile $X$ in bir bulanık alt kümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla, her klasik küme bir bulanık kümedir (Zadeh, 1965).

Not 1.4.2: Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $X$ boştan farklı klasik bir kümeyi ve $L$ ise bir bulanık latisi ifade edecektir.

Tanım 1.4.3: $\lambda, \mu \in L^X$ olmak üzere,
(a) $\lambda = \mu :\Leftrightarrow\ \forall\, x \in X$ için $\lambda(x) = \mu(x)$.
(b) $\lambda \leq \mu :\Leftrightarrow\ \forall\, x \in X$ için $\lambda(x) \leq \mu(x)$.
(c) $\lambda' \colon X \longrightarrow L, \forall\, x \in X$ için $\lambda'(x) \coloneqq (\,\lambda(x))'$. $(L = I$ ise, $\lambda'(x) \coloneqq 1 - \lambda(x)\,)$.
(d) $\lambda, \mu$ $L$-bulanık alt kümelerinin birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla
$(\lambda \vee \mu)(x) \coloneqq maks\{\lambda(x), \mu(x)\}$ ve $(\lambda \wedge \mu)(x) \coloneqq min\{\lambda(x), \mu(x)\}$, $(\forall\, x \in X)$.
(e) Daha genel olarak, $\{\lambda_i\}_{i \in \Gamma} \subset L^X$ ailesi için birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla
$(\bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i)(x) \coloneqq \bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i\,(x)$ ve $(\bigwedge_{i \in \Gamma} \lambda_i)(x) \coloneqq \bigwedge_{i \in \Gamma} \lambda_i\,(x)$, $(\forall\, x \in X)$ olarak tanımlanır.

Yukarıdaki işlemler ile $L^X$ de bir bulanık latisdir. Ayrıca,
(i) $(\bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i)' = \bigwedge_{i \in \Gamma} \lambda_i'$,
(ii) $(\bigwedge_{i \in \Gamma} \lambda_i)' = \bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i'$
De-Morgan kuralları da sağlanır (Zadeh, 1965).

Tanım 1.4.4: $c(L)$, $L$ nin sıfırdan farklı indirgenemez (irreducible, coprime) elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde,

$c(L^X) = \{ x_\alpha \mid x \in X, \alpha \in c(L) \}$

kümesinin elemanları $x_\alpha$ lar $X$ in $L$-bulanık noktaları olarak adlandırılır. Burada,

$$x_\alpha : X \longrightarrow L, \ \forall y \in X \text{ için } x_\alpha(y) := \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0_L, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $x$'e $x_\alpha$ $L$-bulanık noktasının desteği, $\alpha$ değerine de $x_\alpha$ $L$-bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir ve sırasıyla supp$x_\alpha = x$ ve $h(x_\alpha) = \alpha$ ile gösterilir.

$x_\alpha \in c(L^X)$ olmak üzere

$x_\alpha \in \lambda :\Leftrightarrow \alpha \leq \lambda(x)$ (Dongsheng, 1987).

Uyarı 1.4.5: $X$ üzerindeki her L-bulanık kümesi $c(L^X)$ deki bazı $L$-bulanık noktaların birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

Diğer bir deyişle, $\lambda = \bigvee_{x_\alpha \in \lambda} x_\alpha$ sağlanır.

Tanım 1.4.6: $\lambda \in L^X$ ve $x_\alpha \in c(L^X)$ olmak üzere, $x_\alpha$ $\lambda$ ile q-çakışımsıdır (quasi-coincident) denir ve bu durum $x_\alpha \mathrm{q} \lambda$ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow x_\alpha \notin \lambda'$ sağlanır. Buna göre,

$x_\alpha \mathrm{q} \lambda :\Leftrightarrow \alpha \not\leq \lambda'(x)$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Özel olarak, $L = I$ olması halinde $x_\alpha \mathrm{q} \lambda :\Leftrightarrow \alpha + \lambda(x) > 1$ dir. $x_\alpha$ $L$-bulanık noktasının $\lambda$ ile q-çakışımsı olmaması ise $x_\alpha q \lambda$ notasyonu ile gösterilir (Pao-Ming ve Ying-Ming, 1980).

Tanım 1.4.7: $\lambda, \mu \in L^X$ olmak üzere, $\lambda$ ile $\mu$ q-çakışımsıdır denir ve $\lambda q \mu$ notasyonu ile gösterilir $:\Leftrightarrow \exists\, x \in X :$ $\lambda$ (x) $\not\leq \mu'(x)$.

Bu durumda, $\lambda$ ile $\mu$ $x$ de q-çakışımsıdır denir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Lemma 1.4.8: $\lambda, \mu, \nu \in L^X$, $\{\lambda_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ ve $x_\alpha \in c(L^X)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

(a) Eğer $\lambda q \mu$ ve $\mu \leq \nu \Longrightarrow \lambda q \nu$.

(b) $x_\alpha q \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \iff \exists\, j \in \Gamma : x_\alpha q \lambda_j$ .

(c) $\lambda \leq \mu \iff \forall\, x_\alpha \in \lambda$ için $x_\alpha \in \mu \iff \forall\, x_\alpha q \lambda$ için $x_\alpha q \mu$.

(d) $x_\alpha q(\lambda \wedge \mu) \iff x_\alpha q \lambda$ ve $x_\alpha q \mu$.

Tanım 1.4.9: $X, Y$ boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\lambda \in L^X$ ve $\mu \in L^Y$ $L$-bulanık alt kümelerinin $\varphi$ fonksiyonu altındaki görüntü ve ters görüntüsü sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi^{\rightarrow}(\lambda)(y) \coloneqq \begin{cases} \bigvee\{\lambda(x): x \in X,\ y = \varphi(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \underline{0} & , \ \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} , \ (\forall\, y \in Y).$$

$$\varphi^{\leftarrow}(\mu)(x) \coloneqq (\mu \circ \varphi)(x) = \mu(\varphi(x)) \quad (\forall\, x \in X).$$

Açık olarak, $\varphi^{\leftarrow}(\mu)$ ve $\varphi^{\rightarrow}(\lambda)$ sırasıyla $X$ ve $Y$ klasik kümelerinin birer $L$-bulanık alt kümeleridir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 1.4.10: $\varphi: X \longrightarrow Y$, $\psi: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$, $\mu, \mu_1, \mu_2 \in L^Y$ ve $\nu \in L^Z$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(\psi \circ \varphi)^{\rightarrow}(\lambda) = \psi^{\rightarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(2) $(\psi \circ \varphi)^{\leftarrow}(\nu) = \varphi^{\leftarrow}(\psi^{\leftarrow}(\nu))$.

(3) $\lambda \leq \varphi^{\leftarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ bire-bir ise $\lambda = \varphi^{\leftarrow}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$ sağlanır.

(4) $\mu \geq \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ örten ise $\mu = \varphi^{\rightarrow}(\varphi^{\leftarrow}(\mu))$ sağlanır.

(5) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Longrightarrow \varphi^{\rightarrow}(\lambda_1) \leq \varphi^{\rightarrow}(\lambda_2)$.

(6) $\mu_1 \leq \mu_2 \Longrightarrow \varphi^{\leftarrow}(\mu_1) \leq \varphi^{\leftarrow}(\mu_2)$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 1.4.11: $\lambda, \mu \in L^X$, $\nu, \rho \in L^Y$ ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\lambda q \varphi^{\leftarrow}(\nu) \iff \varphi^{\rightarrow}(\lambda) q \nu$.

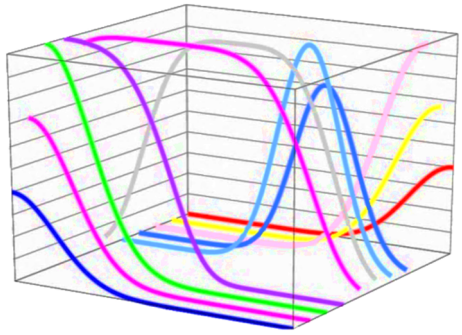
(2) $\lambda q \mu \Longrightarrow \varphi^{\rightarrow}(\lambda) q \varphi^{\rightarrow}(\mu)$.

(3) $\varphi^{\leftarrow}(\nu) q \varphi^{\leftarrow}(\nu) \Longrightarrow \nu q \rho$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

## 1.5. Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 1.5.1: $X$ boştan farklı klasik bir küme, $L$ bir latis ve $A \subseteq E$ olsun. $f_A : E \to L^X$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $L$-bulanık esnek küme adı verilir.

Tanımda $L = I$ olması durumunda, $f_A : E \to I^X$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulanık esnek küme denir (Şekil 3.1). Burada her $e \in A$ için $f_e := f_A(e) : X \to L$ boştan farklı bir $L$-bulanık küme (Zadeh 1965) ve her $e \in E \backslash A$ için $f_e := f_A(e) : X \to L$ $(f_e = \underline{0})$ boş $L$-bulanık kümedir.



Şekil 3.1. $f$ bulanık esnek kümesi

Buradaki $f_e$ $L$-bulanık küme değerine $L$-bulanık esnek kümenin $e$-elemanı denir. Böylece, $X$ üzerindeki bir $f$ $L$-bulanık esnek kümesi

$$(f, E) = \{(e, f_e) \mid e \in E, f_e := f(e) \in L^X\}$$

biçimindeki sıralı ikililerin ailesi olarak gösterilebilir. Görülmektedir ki, bir $L$-bulanık esnek küme evrensel parametre kümesi üzerinde tanımlandığından ötürü $f_A$ gösterimi yerine sadelik olması açısından kısaca $f$ gösterimi kullanılacaktır. Buna göre her $e \in E$ için $f(e)$ herhangi (boş veya boştan farklı) bir $L$-bulanık kümedir (Roy ve Maji, 2007), (Çağman ve diğ., 2011).

$X$ üzerindeki tüm $L$-bulanık (bulanık) esnek kümelerin ailesi $(L^X)^E$ ($(I^X)^E$) ile gösterilir.

Örnek 1.5.2: (1) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ klasik kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parameter kümesi verilsin. Buna gore, $f(e_1) = \{0.9/x_2, 0.5/x_4\}$, $f(e_2) = \underline{1}$,

$f(e_3) = \underline{0}, f(e_4) = \{0.2/x_1, 0.4/x_3, 0.8/x_5\}$ olarak tanımlanan bir $f: E \to I^X$ bulanık esnek kümesi

$f = \{(e_1, \{0.9/x_2, 0.5/x_4\}), (e_2, \underline{1}), (e_3, \underline{0}), (e_4, \{0.2/x_1, 0.4/x_3, 0.8/x_5\})\}$ şeklinde yazılabilir (Çağman ve diğ., 2011).

(2) $f$ bulanık esnek kümesi bir $A$ kişisinin satın almayı düşündüğü elbiselerin özelliklerini tanımlasın.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ elbiselerin kümesi ve elbiselerin özelliklerini tanımlayan parametre kümesi ise $E = \{uzun, pahalı, renkli, sade\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. Buna göre, her bir parametre için $f_{e_1} = \{1/x_1, 0.4/x_4\}, f_{e_2} = \{0.5/x_1, 0.7/x_2\}$, $f_{e_3} = \{0.2/x_1, 1/x_2, 0.7/x_3, 1/x_4\}$, $f_{e_4} = \{1/x_1, 0.6/x_3, 1/x_4\}$ bulanık kümeleri tanımlansın.

Böylece, $I^X$ in $\{f_{e_i}: i = 1,2,3,4\}$ alt ailesi $f$ bulanık esnek kümesidir (Roy ve Maji, 2007).

(3) $F$, $X$ kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Buna göre her $e \in E$ parametresi için $F(e)$ görüntü kümesinin karakteristik fonksiyonu yardımıyla

$$f_e(x) = \chi_{F(e)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in F(e) \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f$, $X$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Sonuç olarak, her esnek küme bir bulanık esnek küme olarak düşünülebilir.

(4) $f$, $X$ üzerinde bir bulanık esnek küme ve $r \in [0,1]$ olmak üzere, her $e \in E$ parametresi için $\sigma_r(f)(e) = \{x \in X \mid f_e(x) > r\}$ olarak tanımlanan $\sigma_r(f)$, $X$ üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 1.5.3: $f, g \in (L^X)^E$ iki $L$-bulanık esnek küme olsun. Bu durumda
(1) her $e \in E$ için $f_e \leq g_e$ sağlanıyorsa $f$ $L$-bulanık esnek kümesine $g$ $L$-bulanık esnek kümesinin bir alt kümesi denir ve $f \sqsubseteq g$ olarak gösterilir.

(2) her $e \in E$ için $f_e = g_e$ sağlanıyorsa $f$ $L$-bulanık esnek kümesi $g$ $L$-bulanık esnek kümesine eşittir denir ve $f = g$ olarak gösterilir.
(3) $f$ ve $g$ $L$-bulanık esnek kümelerinin birleşimi $h = f \sqcup g$ olarak gösterilir ve her $e \in E$ için $h_e = f_e \vee g_e$ şeklinde tanımlanır.
(4) $f$ ve $g$ $L$-bulanık esnek kümelerinin kesişimi $h = f \sqcap g$ olarak gösterilir ve her $e \in E$ için $h_e = f_e \wedge g_e$ şeklinde tanımlanır.
(5) her $e \in E$ için $f_e = \underline{0}$ ise $f$ $L$-bulanık esnek kümesine boş $L$-bulanık esnek küme denir ve $\Phi$ veya $\Phi_X$ ile gösterilir.
(6) her $e \in E$ için $f_e = \underline{1}$ ise $f$ $L$-bulanık esnek kümesine evrensel $L$-bulanık esnek küme denir ve $\tilde{E}$ veya $\tilde{E}_X$ ile gösterilir (Roy ve Maji, 2007).

Tanım 1.5.4: $L$ bir bulanık latis olsun. Bir $f \in (L^X)^E$ $L$-bulanık esnek kümesinin tümleyeni $X$ üzerindeki $f' : E \to L^X$ $L$-bulanık esnek kümesidir ve bu küme her $e \in E$ ve $x \in X$ için $f'_e(x) = \left(f_e(x)\right)'$ şeklinde tanımlanır.

$(f')' = f$ eşitliğinin sağlandığı tanımdan açıktır. Ayrıca, $\Phi' = \tilde{E}$ ve $\tilde{E}' = \Phi$ dir.

Tanım 1.5.5: $L$ bir bulanık latis, $f \in (L^X)^E$ bir $L$-bulanık esnek küme ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \underline{\alpha}$ ise $f$ $L$-bulanık esnek kümesine $\alpha$-evrensel $L$-bulanık esnek küme denir ve $\tilde{E}^\alpha$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre $\tilde{E} = \tilde{E}^1$, $\Phi = \tilde{E}^0$ ve $\left(\tilde{E}^\alpha\right)' = \tilde{E}^{\alpha'}$ olduğu açıktır (Aygünoğlu ve Aygün, 2009).

Önerme 1.5.6: J bir indeks kümesi ve $f, g, h, f_i, g_i \in (L)^E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.
(1) $f \sqcap f = f$ , $f \sqcup f = f$.
(2) $f \sqcap g = g \sqcap f$ , $f \sqcup g = g \sqcup f$.
(3) $f \sqcup (g \sqcup h) = (f \sqcup g) \sqcup h$ , $f \sqcap (g \sqcap h) = (f \sqcap g) \sqcap h$.
(4) $f \sqcap \left(\bigsqcup_{i \in J} g_i\right) = \bigsqcup_{i \in J} (f \sqcap g_i)$, $f \sqcup \left(\bigsqcap_{i \in J} g_i\right) = \bigsqcap_{i \in J} (f \sqcup g_i)$ .
(5) $\Phi \sqsubseteq f \sqsubseteq \tilde{E}$ , $\tilde{E}^\lambda \sqsubseteq \tilde{E}$.
(6) $\left(\bigsqcap_{i \in J} f_i\right)' = \bigsqcup_{i \in J} f_i'$ , $\left(\bigsqcup_{i \in J} f_i\right)' = \bigsqcap_{i \in J} f_i'$.
(7) $f \sqsubseteq g \Rightarrow g' \sqsubseteq f'$ (Ahmad ve Kharal, 2009).

Tanım 1.5.7: $x \in X$ ve $\alpha: E \to c(L)$ bir fonksiyon olmak üzere, bir $x^\alpha$ $L$-bulanık esnek noktası, $X$ üzerinde bir $L$-bulanık esnek kümedir ve bu küme her $e \in E$ ve $y \in X$ için

$$x_e^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha(e), & y = x \\ 0_L, & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer her $e \in E$ için $\alpha(e) \leq f_e(x)$ ise $x^\alpha$ bulanık esnek noktası $f$ bulanık esnek kümesine aittir denir ve bu durum $x^\alpha \in f$ şeklinde gösterilir.

Eğer her $e \in E$ için $\alpha(e) \not\leq f_e'(x)$ ise $x^\alpha$ bulanık esnek noktasına $f$ bulanık esnek kümesi ile yarı-çakışımsıdır (kısaca, q-çakışımsıdır) denir ve bu durum $x^\alpha q f$ gösterimi ile ifade edilir.

$X$ kümesi üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların ailesi $FSPt(X)$ ile gösterilir.

Lemma 1.5.8: $f, g \in (L^X)^E, \{f_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq (L^X)^E$ ve $x^\alpha \in FSPt(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) Eğer $f \sqsubseteq g$ ve $x^\alpha q f$ ise $x^\alpha q g$ dir.

(2) $x^\alpha q(f \sqcap g)$ olması için gerek ve yeter koşul $x^\alpha q f$ ve $x^\alpha q g$ olmasıdır.

(3) $x^\alpha q(\sqcup_{i\in\Gamma} f_i)$ olması için gerek ve yeter koşul bir $j \in \Gamma$ için $x^\alpha q f_j$ olmasıdır.

Tanım 1.5.9: $\varphi : X_1 \to X_2$ , $\psi : E_1 \to E_2$ iki fonksiyon, $E_1, E_2$ sırasıyla $X_1$ ve $X_2$ için parametre evrensel kümeleri olsun.

(1) $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ olsun. $f$ nin $\varphi_\psi$ bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(f)$, $X_2$ üzerinde bir $L$-bulanık esnek kümedir ve bu küme her $k \in E_2$ ve $y \in X_2$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\varphi_\psi(f)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\psi(e)=k} \bigvee_{\varphi(x)=y} f_e(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k) \neq \emptyset \\ 0, & diğer \end{cases}.$$

(2) $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ olsun. $g$ nin $\varphi_\psi$ bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü ${\varphi_\psi}^{-1}(g)$, $X_1$ üzerinde bir $L$-bulanık esnek kümedir ve bu küme her $e \in E_1, x \in X_1$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${\varphi_\psi}^{-1}(g)_e(x) = g_{\psi(e)}\big(\varphi(x)\big).$$

Eğer $\varphi$ ve $\psi$ bire-bir (örten) ise $\varphi_\psi$ bulanık esnek fonksiyonu da bire-bir (örten) dir.

$\varphi_\psi$, $X_1$ den $X_2$ ye ve $\gamma_\delta$, $X_2$ den $X_3$ e birer bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu durumda, $\varphi_\psi$ ve $\gamma_\delta$ nın bileşkesi $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi := (\gamma \circ \varphi)_{(\delta \circ \psi)}$ şeklinde tanımlanır (Aygünoğlu ve Aygün, 2009).

Önerme 1.5.10: $X_1$ ve $X_2$ klasik kümeler ve $f, f_1, f_2, f_i \in (L^{X_1})^{E_1}$ ve $g, g_1, g_2, g_i \in (L^{X_2})^{E_2}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $f_1 \sqsubseteq f_2 \Rightarrow \varphi_\psi(f_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$.

(2) $g_1 \sqsubseteq g_2 \Rightarrow {\varphi_\psi}^{-1}(g_1) \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}(g_2)$.

(3) $f \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}\left(\varphi_\psi(f)\right)$, $\varphi_\psi$ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_\psi\left({\varphi_\psi}^{-1}(g)\right) \sqsubseteq g$, $\varphi_\psi$ örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_\psi\left(\sqcap_{i\in J} f_i\right) \sqsubseteq \sqcap_{i\in J}\varphi_\psi(f_i)$, $\varphi_\psi$ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_\psi\left(\sqcup_{i\in J} f_i\right) = \sqcup_{i\in J}\varphi_\psi(f_i)$.

(7) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\sqcup_{i\in J} g_i\right) = \sqcup_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}(g_i)$, ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\sqcap_{i\in J} g_i\right) = \sqcap_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}(g_i)$.

(8) ${\varphi_\psi}^{-1}(g') = ({\varphi_\psi}^{-1}(g))'$, $(\varphi_\psi(f))' \sqsubseteq \varphi_\psi(f')$.

(9) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\tilde{E}_Y\right) = \tilde{E}_X$ , ${\varphi_\psi}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$.

(10) $\varphi_\psi$ örten ise $\varphi_\psi\left(\tilde{E}_X\right) = \tilde{E}_Y$ ve $\varphi_\psi(\Phi_X) = \Phi_Y$ (Ahmad ve Kharal, 2009).

Lemma 1.5.11: $\{f_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq (I^{X_1})^{E_1}, g \in (I^{X_2})^{E_2}, r \in [0,1]$ ve $\varphi_\psi: X_1 \to X_2$ bir bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $\sigma_r(f_1 \sqcap f_2) = \sigma_r(f_1) \,\tilde{\sqcap}\, \sigma_r(f_2)$.

(2) $\sigma_r(\sqcup_{i\in\Gamma} f_i) = \widetilde{\sqcup_{i\in\Gamma}}\sigma_r(f_i)$.

(3) $\varphi_\psi^{-1}\left(\sigma_r(g)\right) = \sigma_r\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)$.

(4) $f = \sqcup_{r\in[0,1]}\,(\tilde{E}^r \sqcap \chi_{\sigma_r(f)})$.

Tanım 1.5.12: Her $i \in \Delta$ için $f_i \in (L^{X_i})^{E_i}$ olsun. $f_i$ $L$-bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in\Delta} f_i$ sembolü ile gösterilir ve her $e = (e_i) \in \prod_{i\in\Delta} E_i$ için $(\prod_{i\in\Delta} f_i)_e(x) = \wedge_{i\in\Delta}(f_i)_{e_i}(x_i)$ (her $x = (x_i) \in \prod_{i\in\Delta} X_i$ $için$) olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre, $\prod_{i\in\Delta} f_i$ $L$-bulanık esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir $L$-bulanık esnek kümedir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 1.5.13: $p_i : \prod_{i\in\Delta} X_i \to X_i$ ve $q_i : \prod_{i\in\Delta} E_i \to E_i$ izdüşüm fonksiyonları olsun. Buna gore, bulanık esnek izdüşüm fonksiyonu $(p_q)_i := (p_i)_{q_i}, i \in \Delta$, ile gösterilir ve $\prod_{i\in\Delta} f_i \in (L^{\prod_{i\in\Delta} X_i})^{\prod_{i\in\Delta} E_i}$ çarpım bulanık esnek kümesi için $(p_q)_i(\prod_{i\in\Delta} f_i) = f_i$ olarak tanımlanır (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

## 1.6. Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 1.6.1: (a) $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)^E$ ailesine $X$ üzerinde bulanık esnek kümelerin topolojisi denir: $\Leftrightarrow$

(1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau$

(2) $F, G \in \tau \Rightarrow F \,\tilde{\sqcap}\, G \in \tau$

(3) $\forall\, i \in J \; için \; F_i \in \tau \Rightarrow \tilde{\sqcup}_{i\in J} F_i \in \tau$.

$(X, \tau)$ ikilisine de bir esnek topolojik uzay adı verilir. $\tau$ nun elemanlarına da açık esnek küme denir.

$G \in \mathcal{P}(X)^E$, $(X, \tau)$ da kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $G' \in \tau$ dir.

(b) $\tau_1$ esnek topolojisine $\tau_2$ esnek topolojisinden daha zayıftır (kabadır) (veya $\tau_2$ ye $\tau_1$ den daha güçlüdür (incedir)) denir : $\Leftrightarrow$ $\tau_1 \subset \tau_2$ sağlanır (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 1.6.2: (1) $\tau^0 = \{\Phi, \tilde{E}\}$ ve $\tau^1 = (2^X)^E$ aileleri $X$ üzerinde birer esnek topolojidir ve sırasıyla trivial esnek topoloji ve diskret esnek topoloji olarak adlandırılır.

(2) $X = \{h_1, h_2, h_3\}, E = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, F_4 \in (2^X)^E$ esnek kümeleri

$F_1(e_1) = \{h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_1\}, \quad F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\},$

$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_3(e_2) = X, \quad F_4(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $\tau = \{\Phi, \tilde{E}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$ ailesi $X$ üzerinde esnek kümelerin bir topolojisidir (Shabir ve Naz, 2011).

Örnek 1.6.3: $\tau = \{(F_A)_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ olmak üzere $(X, \tau)$ esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e_i \in E \; için \; \tau_{e_i} = \{(F_A)_\lambda(e_i) : \; F_\lambda \in \tau\}$ olarak tanımlanan $\tau_{e_i}$, $X$ üzerinde klasik anlamda bir topolojidir.

Bu topolojiye $X$ üzerindeki bir esnek topolojinin "$e_i$-parametre topolojisi" denir (Shabir ve Naz, 2011).

Teorem 1.6.4: $\{\tau_i : i \in J\}$ $X$ üzerinde esnek topolojilerin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\sqcap \{\tau_i : i \in J\}$ $X$ üzerinde bir esnek topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Teorem 1.6.5: $(X, \tau)$ esnek topolojik uzay ve $\tau'$ tüm kapalı esnek kümelerin ailesini göstersin. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\Phi, \tilde{E} \; \in \tau'$

(2) $F, G \; \in \tau' \; \Rightarrow F \; \tilde{\sqcup} \; G \in \tau'$

(3) $\forall \; i \in J \; için \; F_i \in \tau' \; \Rightarrow \widetilde{\prod_{\iota \in J}} F_i \in \tau'$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 1.6.6: $(X, \tau)$ bir esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesine $\tau$ için bir tabandır denir $:\Leftrightarrow \tau$' nun her elemanı $\mathcal{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılır (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 1.6.7: $(X, \tau)$ bir esnek topolojik uzay ve $F \in (2^X)^E$ olsun. $F$ kümesinin içi $int(F)$, kapanışı ise $cl(F)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$int(F) = \sqcup\{G \mid G \; açık \; ve \; G \sqsubseteq F\}$,

$cl(F) = \sqcap\{H \mid H \; kapalı \; ve \; F \sqsubseteq H\}$.

Açıktır ki,

(1) $F_A$ kapalıdır $\Leftrightarrow cl(F_A) = F_A$.

(2) $F_A$ açıktır $\Leftrightarrow \; int(F_A) = F_A$ (Çağman ve diğ., 2011).

Önerme 1.6.8: $(X, \tau)$ bir esnek topolojik uzay ve $F, G \in (2^X)^E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $int(F) \sqsubseteq F \sqsubseteq cl(F)$.

(2) Eğer $F \sqsubseteq G$ ise $int(F) \sqsubseteq int(G)$ ve $cl(F) \sqsubseteq cl(G)$.

(3) $int\big(int(F)\big) = int(F)$ ve $cl\big(cl(F)\big) = cl(F)$.

(4) $int(F \tilde{\sqcap} G) = int(F) \tilde{\sqcap} int(G)$.

(5) $cl(F \tilde{\sqcup} G) = cl(F) \tilde{\sqcup} cl(G)$.

(6) $int(\tilde{E}) = \tilde{E}$ *ve* $cl(\Phi) = \Phi$ (Çağman ve diğ., 2011).

Tanım 1.6.9: $(X, \tau)$ ve $(Y, \tau^*)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $\varphi_\psi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ esnek fonksiyonu süreklidir denir: $\Leftrightarrow \forall\, g \in \tau^*$ için ${\varphi_\psi}^{-1}(g) \in \tau$ (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Eğer $\varphi_\psi : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ ve $\gamma_\delta : (Y, \tau_2) \to (Y, \tau_3)$ sürekli ise $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Tanım 1.6.10: $(X, \tau)$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer bir $\mathcal{S} \subseteq (2^X)^E$ ailesinin tüm elemanlarının sonlu arakesitleri $\tau$ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$' ye $\tau$ için bir alt tabandır denir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Teorem 1.6.11: $\mathcal{S} \subseteq (2^X)^E$ ve $\Phi, \tilde{E} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$\tau = \{\sqcup_{i \in \Delta} (\sqcap_{j \in J_i} (F_A)_{i,j}) \mid (F_A)_{i,j} \in \mathcal{S}, \Delta - keyfi,\ J_i - sonlu\ index\ k\ddot{u}mesi\}$

olarak tanımlanan $\tau$ ailesi $X$ üzerinde bir esnek topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 1.6.12: $X$ boştan farklı kümesi, her $i \in \Delta$ için $(Y_i, \tau_i)$ topolojik uzayları ve $(\varphi_\psi)_i : X \to (Y_i, \tau_i)$ esnek fonksiyonları verilsin. $X$ üzerinde $\mathcal{S} = \{(\varphi_\psi)_i^{-1}(F_A) :\ F_A \in \tau_i, i \in \Delta\}$ alttabanı yardımıyla üretilen $\tau$ esnek topolojisine $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç topolojisi denir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Teorem 1.6.13: $X$ üzerinde $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisi $\tau$, her $i \in \Delta$ için $(\varphi_\psi)_i$ esnek fonksiyonlarını sürekli yapan en kaba topolojidir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

Tanım 1.6.14: $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ topolojik uzayları verilsin. $X(=\prod_{i\in\Delta} X_i)$ üzerindeki $\left\{(p_q)_i\right\}_{i\in\Delta}$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan başlangıç esnek topolojisine $X$ üzerindeki esnek çarpım topolojisi denir. Esnek çarpım topolojisi $\prod \tau_i$ olarak gösterilir (Aygünoğlu ve Aygün, 2012).

## 1.7. Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 1.7.1: $X$ boştan farklı klasik bir küme ve $L$ bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ $L$-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\tau$ ya $X$ üzerinde bir (Chang-Goguen) $L$ -topoloji veya bulanık kümelerin bir topolojisi adı verilir.

(CT1) $\underline{0}, \underline{1} \in \tau$,

(CT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau \implies \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$,

(CT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \in \tau$ .

$(X, \tau)$ ikilisine bir (Chang-Goguen) $L$-topolojik uzay adı verilir. $\tau$ nun elemanlarına ise açık $L$ -bulanık alt kümeler adı verilir.

Eğer, $\lambda' \in \tau$ ise $\lambda$ ya $(X, \tau)$ da kapalı $L$ -bulanık alt küme denir (Chang, 1968), (Goguen, 1967).

Örnek 1.7.2: $T$ $X$ kümesi üzerinde bir klasik topoloji ise, $\tau = \chi_T := \{\, \chi_G : G \in T \,\}$ ailesi $X$ üzerinde bir $L$-topolojidir. O halde, klasik anlamdaki her topoloji bir ( Chang-Goguen ) $L$ -topolojidir.

Tanım 1.7.3: $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki $L$-topolojik uzay ve $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $\varphi$ $L$-süreklidir : $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu \in \tau_2$ için $\varphi^{\leftarrow}(\mu) \in \tau_1$ (Chang, 1968).

Chang-Goguen anlamında $L$-topolojik uzaylar ile bunlar arasında tanımlı $L$-sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategori **CL-TOP** ile gösterilir.

Uyarı 1.7.4: Açıkça görülebilir ki, klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde (Chang-Goguen) $L$-topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların $L$-sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği $L$-topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen (1976),

$L$-topolojik uzay tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir. Ancak bu seferde $L$-topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeği kaybedilmiştir.

Tanım 1.7.5: $L$ bir bulanık latis olmak üzere, $\tau \subset L^X$ $L$-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\tau$ ya $X$ üzerinde bir (Lowen) $L$-topoloji denir.
(LT1) $\forall\, \alpha \in L$ için $\underline{\alpha} \in \tau$,
(LT2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \tau \implies \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \tau$,
(LT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i \in \tau$ .

$(X, \tau)$ ikilisine de bir ( Lowen ) $L$-topolojik uzay adı verilir (Lowen, 1976).

Lowen anlamındaki $L$-topolojik uzaylar ve bunlar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlar kategorisi $L$-**TOP** ile gösterilir. Ayrıca, Lowen anlamındaki her $L$-topolojik uzay Chang-Goguen anlamında bir $L$-topolojik uzaydır. Buna göre, $L$-**TOP**$\subset$*CL*-**TOP** ifadesi sağlanır.

$X$ üzerindeki bir $\tau$ $L$-topolojisi aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir $\tau: L^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak da göz önüne alınabilir.
(1) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$, ( $\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\underline{\alpha}) = 1$ ),
(2) Eğer $\tau(\lambda_1) = \tau(\lambda_2) = 1$ ise $\tau(\lambda_1 \wedge \lambda_2) = 1$,
(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\tau(\lambda_i) = 1$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) = 1$.

Yukarıda verilen her iki $L$-topolojinin tanımında da kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasiktir. Bu eksikliği gidermek ve bulanık kümelerin açıklığını derecelendirmek için Shostak (1985) aşağıdaki bulanık topoloji tanımı vermiştir.

Tanım 1.7.6: $X$ boştan farklı klasik bir küme ve $L$ bir bulanık latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau: L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir (Shostak) $L$-bulanık topoloji veya açıklığın bir derecelendirmesi veya smooth (pürüzsüz) topoloji denir.
(BT1) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$,
(BT2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \wedge \tau(\lambda_2)$,

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(\lambda_i)$.

$(X, \tau)$ ikilisine de bir $L$-bulanık topolojik uzay veya smooth topolojik uzay denir. $\lambda \in L^X$ olmak üzere $\tau(\lambda)$ değerine de $\lambda$ $L$-bulanık alt kümesinin açıklık derecesi denir (Shostak, 1985).

Uyarı 1.7.7: (1) Tanımlar karşılaştırıldığında; bir $L$-topoloji $L$-bulanık kümelerin klasik bir ailesi $(\tau \subseteq L^X)$ iken bir $L$-bulanık topoloji ise $L$-bulanık kümeler ailesinin bir $L$-bulanık alt kümesi $(\tau \in L^{(L^X)})$ dir.

(2) Aslında $L$ ve $M$ farklı bulanık latisler olmak üzere, bulanık topoloji $\tau: L^X \longrightarrow M$ biçiminde de tanımlanabilir. Ayrıca, Tanım 1.7.6 daki (BT1) aksiyomu yerine

(BT1)′ $\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\underline{\alpha}) = 1$ aksiyomu alınırsa, $(X, \tau)$ ikilisine bir tabakalaşmış (stratified, laminated, enriched) $L$ -bulanık topolojik uzay denir.

(3) Her klasik topoloji bir $L$-bulanık topolojidir. Gerçekten de $T$, $X$ üzerinde klasik bir topoloji olmak üzere $T: 2^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa $T = \chi_T$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $L$-bulanık topoloji olur.

(4) Her $L$-topoloji bir $L$-bulanık topolojidir.

Önerme 1.7.8: $\{\, \tau_k : k \in \Lambda \,\}$ ailesi $X$ üzerinde $L$-bulanık topolojilerin bir ailesi ise $\tau := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k$, $\tau(\lambda) := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k(\lambda)$ ile tanımlanan $\tau$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $L$-bulanık topolojidir (Ramadan, 1992).

Tanım 1.7.9: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau': L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $L$ -bulanık kotopoloji (eş topoloji) veya kapalılığın bir derecelendirmesi denir.
(1) $\tau'(\underline{0}) = \tau'(\underline{1}) = 1$,
(2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in L^X$ için $\tau'(\lambda_1 \vee \lambda_2) \geq \tau'(\lambda_1) \wedge \tau'(\lambda_2)$,
(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\lambda_i \in L^X$ ise $\tau'(\bigwedge_{i\in\Gamma} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'(\lambda_i)$.

$(X. \tau')$ ikilisine de bir $L$-bulanık kotopolojik uzay adı verilir (Shostak, 1985).

Önerme 1.7.10: $\tau$ ve $\tau'$, $X$ üzerinde sırasıyla bir $L$-bulanık topoloji ve bir L-bulanık kotopoloji olmak üzere, ${\tau'}_{\tau}, \tau_{\tau'}: L^X \longrightarrow L$ dönüşümleri sırasıyla ${\tau'}_{\tau}(\lambda) \coloneqq \tau(\lambda')$ ve $\tau_{\tau'}(\lambda) \coloneqq \tau'(\lambda')$ olarak tanımlansın. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) ${\tau'}_{\tau}$ $X$ üzerinde bir $L$-bulanık kotopolojidir.

(b) $\tau_{\tau'}$ $X$ üzerinde bir $L$-bulanık topolojidir.

(c) $\tau_{{\tau'}_{\tau}} = \tau$ ve ${\tau'}_{\tau_{\tau'}} = \tau'$ (Ramadan, 1992).

Önerme 1.7.11: $(X, \tau)$ bir $L$-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere,

$\tau_A : L^A \longrightarrow L,\ \tau_A(\nu) \coloneqq \bigvee\{\, \tau(\lambda) \mid \lambda \in L^X, \lambda|_A = \nu \,\}$

olarak tanımlanan $\tau_A$ dönüşümü $A$ üzerinde bir $L$-bulanık topolojidir.

$(X, \tau)$ bir $L$-bulanık topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, bir önceki önermede tanımlanan $(A, \tau_A)$ L-bulanık topolojik uzayına $(X, \tau)$ nun bir $L$-bulanık alt uzayı denir (Peeters, 1999).

Tanım 1.7.12: $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki $L$-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\varphi$ fonksiyonuna $L$-bulanık sürekli (veya kısaca, $LB$-sürekli) denir $:\Leftrightarrow\ \forall\, \mu \in L^Y$ için $\tau_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq \tau_2(\mu)$ sağlanır (Sostak, 1985).

Önerme 1.7.13: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ ve $(Z, \tau_3)$ $L$-bulanık topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ ve $\psi: (Y, \tau_2) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ fonksiyonları $LB$-sürekli ise $\psi \circ \varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ bileşkesi $LB$-süreklidir (Sostak, 1985).

Objeleri $L$-bulanık topolojik uzaylar ve morfizmleri $LB$-sürekli fonksiyonlar olan kategori $L$-**BTOP** ile gösterilir.

Önerme 1.7.14: $(X, {\tau'}_1)$ ve $(Y, {\tau'}_2)$ iki $L$-bulanık kotopolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$\varphi$ $LB$-süreklidir $\Leftrightarrow\ \forall\, \mu \in L^Y$ için ${\tau'}_1(\varphi^{\leftarrow}(\mu)) \geq {\tau'}_2(\mu)$ sağlanır (Sostak, 1985).

Önerme 1.7.15: $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ iki $L$-bulanık topolojik uzay, $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\varphi$ $LB$-sürekli ise, $\varphi|_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ kısıtlanış fonksiyonu da $LB$-süreklidir (Peeters, 1999).

Tanım 1.7.16: $(X,\tau_1)$ ve $(Y,\tau_2)$ iki $L$-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(1) $\varphi$ *LB*-açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\tau_1(\lambda) \leq \tau_2(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(2) $\varphi$ *LB*-kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, \lambda \in L^X$ için $\tau^*_{\tau_1}(\lambda) \leq \tau^*_{\tau_2}(\varphi^{\rightarrow}(\lambda))$.

(3) $\varphi$ *LB*-homeomorfizmdir : $\Leftrightarrow$ $\varphi$ bijektif, *LB*-sürekli ve $\varphi^{-1}$ *LB*-süreklidir (Ramadan, 1992).

# 2. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümün amacı Sostak (1985) tarafından verilen bulanık topoloji tanımı baz alınarak parametrelerinde göz önüne alınmasıyla (esnekleştirilmesiyle) bulanık esnek kümeler için en genel yaklaşım olabilecek bulanık esnek topoloji kavramını literatüre kazandırmaktır. Bu nedenle, öncelikle (Sostak anlamında) bulanık esnek topoloji tanımlanarak önemli özellikleri incelenecek, Ying (1991) in yaklaşımından yola çıkarak bulandırılmış esnek topoloji tanımlanacak ve bu iki kavram arasındaki ilişkiler kurulacak olan Lowen funktorları ile incelenecektir. Buna ek olarak, Chang (1968) anlamında esnek topoloji oluşturularak, bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisine izomorf olan bir alternatif kategori oluşturulacaktır.

## 2.1. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

Chang (1968) klasik topolojik uzayların bir genellemesi olarak bulanık kümelerin klasik anlamdaki topolojisini tanımlamıştır. Bunun üzerine Sostak (1985), hem klasik hem de Chang topolojinin bir genellemesi olan, sadece kümelerin değil aynı zamanda topoloji aksiyomlarının da bulanık olduğu bulanık topolojinin yeni tanımını vermiştir. Bu kısımda, benzer düşünceden yola çıkılarak, sadece kümelerin değil aynı zamanda topoloji aksiyomlarının da bulanık esnek olduğu topoloji tanımı verilerek birtakım önemli özellikleri incelenecektir. Böylece tüm topoloji (genel topoloji, bulanık topoloji, esnek topoloji ve bulanık esnek topoloji) tanımlarının en genel hali elde edilecektir.

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau \subseteq (I^X)^E$ bulanık esnek kümelerin ailesine, $X$ üzerinde bir bulanık esnek topoloji denir: $\Leftrightarrow$

(T1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau$.
(T2) $f, g \in \tau \implies f \sqcap g \in \tau$.
(T3) $\forall\, i \in J$ için $f_i \in \tau$ ise $\bigsqcup_{i \in J} f_i \in \tau$.

$(X,\tau)$ ikilisine de (Chang anlamında) bulanık esnek topolojik uzay denir (Tanay ve Kandemir, 2011).

Örnek 2.1.2: (1) $\tau^0 = \{\Phi, \tilde{E}\}$ ve $\tau^1 = (I^X)^E$, $X$ üzerinde birer bulanık esnek topolojidir ve bunlar sırasıyla trivial ve diskret esnek topolojiler olarak adlandırılır.

(2) $\tau = \{ f_i \mid i \in \Delta \}$ olmak üzere $(X,\tau)$ bir bulanık esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e \in E$ parametresi için oluşturulan $\tau_e = \{ f_i(e) \mid f_i \in \tau \}$ ailesi de $X$ üzerinde Chang anlamında bir bulanık topolojidir.

(3) $\tau = \{F : F \in (2^X)^E\}$, $X$ üzerinde bir esnek topoloji ise, $\tau^* = \{ \chi_F : F \in \tau\}$ ailesi de $X$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

Tanım 2.1.3: (a) $\tau : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(O1) $\tau_k(\Phi) = \tau_k(\tilde{E}) = 1$.

(O2) Her $f, g \in (L^X)^E$ için $\tau_k(f \sqcap g) \geq \tau_k(f) \wedge \tau_k(g)$.

(O3) Her $f_i \in (L^X)^E, i \in J$ için $\tau_k(\bigsqcup_{i\in J} f_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \tau_k(f_i)$.

$(X,\tau)$ ikilisine de bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay (veya Sostak anlamında bulanık esnek topolojik uzay) adı verilir.

Burada $\tau_k(f)$ değeri ise $k \in K$ parametresine göre $f$ bulanık esnek kümesinin açıklık derecesini gösterir.

($L = M = I$ ise $(X,\tau)$ ya bulanık esnek topolojik uzay denir.)

(b) $X$ kümesi üzerinde $\tau^1$ ve $\tau^2$ bulanık esnek topolojileri verilsin. Eğer her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\tau_k^2(f) \leq \tau_k^1(f)$ sağlanıyor ise $\tau^1$ bulanık esnek topolojisine $\tau^2$ bulanık esnek topolojisinden daha incedir denir ve bu durum $\tau^2 \leq \tau^1$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.4: (1) $\delta$, $X$ üzerinde Shostak anlamında bir bulanık topoloji olsun. $E = I = [0,1]$ ve $\tau: E \to [0,1]^{(I^X)^E}$, $\tau_e := \{\mu : \delta(\mu) \geq e\}$, $\forall e \in E$ (her parametreye karşılık gelen Chang (1968) anlamında seviyesel bulanık topoloji) olarak tanımlansın. Öte yandan Chang anlamındaki her topoloji Sostak anlamında bir topoloji belirteceğinden $\mathcal{T}_E$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

(2) $E$ boştan farklı keyfi bir parametre kümesi, $X = \{x, y\}$ ve $K = \{k_1, k_2\}$ olsun. Her $e \in E$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan $\tau: K \to I^{(I^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık $(E, K)$-esnek topolojidir.

$$\tau_{k_1}(f) = \begin{cases} \frac{1}{4}, f_e(x) > f_e(y) \\ \frac{1}{5}, f_e(x) < f_e(y) \\ 1, f_e(x) = f_e(y) \end{cases}, \quad \tau_{k_2}(f) = \begin{cases} \frac{9}{10}, f_e(x) > f_e(y) \\ \frac{8}{10}, f_e(x) < f_e(y) \\ 1, f_e(x) = f_e(y) \end{cases}.$$

Uyarı 2.1.5: (1) $E, K$ parametre kümeleri tek noktalı kümeler ve $M = \{0,1\}$ olarak alındığında Tanım 2.1.3 ile Chang (1968) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) $E, K$ parametre kümeleri tek noktalı kümeler ve $L = M$ latis olarak alındığında Tanım 2.1.3 ile Shostak (1985) tarafından verilen tanım çakışır.

(3) $E, K$ parametre kümeleri tek noktalı kümeler ve $L, M$ çatı olarak alındığında Tanım 2.1.3 ile Kotze (2003) tarafından verilen tanım çakışır.

(4) $K$ tek noktalı bir küme ve $L = M = \{0,1\}$ olarak alındığında, Tanım 2.1.3 ile Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen tanım çakışır.

(5) $K$ tek noktalı bir küme ve $L = [0,1], M = \{0,1\}$ olarak alındığında Tanım 2.1.3 ile Tanay ve Kandemir (2011) tarafından verilen tanım çaıkşır.

Tanım 2.1.6: $(X_1, \tau^1)$ ve $(X_2, \tau^2)$ sırasıyla $(L, M)$-bulanık $(E_1, K_1)$-esnek ve $(L, M)$-bulanık $(E_2, K_2)$-esnek topolojik uzaylar olsun. $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \tau^1) \to (X_2, \tau^2)$ dönüşümüne süreklidir denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\tau_k^1\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) \geq \tau_{\eta(k)}^2(g)$ sağlanır.

Nesneleri $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzaylar ve morfizmleri sürekli bulanık esnek dönüşümler olan kategori $\boldsymbol{FSTOP}(L, M)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.7: $\{\tau^j\}_{j \in J}$, $X$ üzerindeki $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojilerin bir ailesi olsun. Bu takdirde, her $k \in K$ için $\tau_k(f) = \wedge_{j \in J} \tau_k^j(f)$ olarak tanımlanan $\tau := \wedge_{j \in J} \tau^j : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü de $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojidir.

Tanım 2.1.8: $\mathcal{C} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(C1) $\mathcal{C}_k(\Phi) = \mathcal{C}_k(\tilde{E}) = 1$.

(C2) Her $f, g \in (L^X)^E$ için $\mathcal{C}_k(f \sqcup g) \geq \mathcal{C}_k(f) \wedge \mathcal{C}_k(g)$.

(C3) Her $\{f_i\}_{i \in J} \subseteq (L^X)^E$ için $\mathcal{C}_k(\sqcap_{i \in J} f_i) \geq \wedge_{i \in J} \mathcal{C}_k(f_i)$.

$(X, \mathcal{C})$ ikilisine de bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojik uzay adı verilir.

$\tau$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $\mathcal{C}_k(f) \coloneqq \tau'_k(f)$ olarak tanımlanan $\mathcal{C} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir kotopolojidir. Benzer şekilde $\mathcal{C}$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji olmak üzere her $k \in K$ için $\tau_k(f) \coloneqq \mathcal{C}'_k(f)$ olarak tanımlanan $\tau : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojidir.

Örnek 2.1.9: $X = \{x, y\}, E = \{e_1, e_2\}, K = \{k_1, k_2\}$ ve $L = M = I$ olsun. $h \in (I^X)^E$ bulanık esnek kümesi $h_{e_1}(x) = 0.6, h_{e_1}(y) = 0.5, h_{e_2}(x) = 0.8, h_{e_2}(y) = 0.6$ olarak tanımlansın. Buna göre aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{C} : K \to I^{(I^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulanık esnek kotopolojidir.

$$\mathcal{C}_k(f) = \begin{cases} 1, f = \Phi_X, \tilde{E}_X, k \in K \\ 0.7, \quad f = h, k = k_1 \\ 0, \qquad\qquad di\check{g}er \end{cases}.$$

Tanım 2.1.10: $\beta : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek taban denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(B1) $\beta_k(\Phi) = \beta_k(\tilde{E}) = 1$.

(B2) Her $f, g \in (L^X)^E$ için $\beta_k(f \sqcap g) \geq \beta_k(f) \wedge \beta_k(g)$.

Teorem 2.1.11: $\beta$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek taban olsun. Bu durumda, her $k \in K, f \in (L^X)^E$ için

$$\tau^{\beta}{}_k(f) = \bigvee \left\{ \bigwedge_{j \in \Delta} \beta_k(f_j) : f = \bigsqcup_{j \in \Delta} f_j \right\}$$

olarak tanımlanan $\tau^{\beta} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümünü $\tau^{\beta} \geq \beta$ koşulunu sağlayan $X$ üzerindeki en dar $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojidir.

İspat: Tanım 2.1.3 (O1)-(O3) aksiyomlarının sağlandığını göstermek yeterlidir. (O1) tanımından açıktır.

(O2) Her $\{f_i : f = \sqcup_{i\in\Delta} f_i\}$ ve $\{g_j : g = \sqcup_{j\in\Gamma} g_j\}$ ailesi için en az bir $\{f_i \sqcap g_j\}$ ailesi vardır öyle ki

$f \sqcap g = (\sqcup_{i\in\Delta} f_i) \sqcap (\sqcup_{j\in\Gamma} g_j) = \sqcup_{i\in\Delta, j\in\Gamma} (f_i \sqcap g_j)$ sağlanır.

Buradan her $k \in K$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left(\tau^{\beta}\right)_k (f \sqcap g) &\geq \wedge_{i\in\Delta, j\in\Gamma} \beta_k (f_i \sqcap g_j) \\
&\geq \wedge_{i\in\Delta, j\in\Gamma} \beta_k (f_i) \wedge \beta_k (g_j) \\
&\geq \wedge_{i\in\Delta} \beta_k (f_i) \wedge \wedge_{j\in\Gamma} \beta_k (g_j) \\
&\geq \left(\tau^{\beta}\right)_k (f) \wedge \left(\tau^{\beta}\right)_k (g).
\end{aligned}$$

(O3) $k \in K$ ve $\left\{f_{i_j} : f_i = \sqcup_{j\in J_i} f_{i_j}\right\}$ koşulunu sağlayan $J_i$ indeks kümelerinin ailesi $P_i$ ve $f = \sqcup_{j\in\Gamma} f_i = \sqcup_{j\in\Gamma} \sqcup_{j\in J_i} f_{i_j}$ olsun. Her $i \in \Gamma$ ve $\Psi(i) = J_i$ olacak şekilde $\Psi \in \prod_{i\in\Gamma} P_i$ için ${\tau^{\beta}}_k (f) \geq \wedge_{i\in\Delta} \left(\wedge_{j\in J_i} \beta_k \left(f_{i_j}\right)\right)$ dir.

$a_{i,\Psi_i} = \wedge_{j\in J_i} \beta_k \left(f_{i_j}\right)$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir.

$$\begin{aligned}
{\tau^{\beta}}_k (f) &\geq \vee_{\Psi\in\prod_{i\in\Gamma} P_i} (\wedge_{i\in\Gamma} a_{i,\Psi_i}) \\
&= \wedge_{i\in\Gamma} (\vee_{M_i\in P_i} a_{i,M_i}) \\
&= \wedge_{i\in\Gamma} (\vee_{M_i\in P_i} (\wedge_{m\in M_i} \beta_k (F_{i_m}))) \geq \wedge_{i\in\Gamma} {\tau^{\beta}}_k (f_i).
\end{aligned}$$

Böylece $\tau^{\beta}$ nin $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olduğu görülür.

$\zeta$, $X$ üzerinde $\zeta \geq \beta$ koşulunu sağlayan başka bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji ve $f = \sqcup_{j\in\Delta} f_j$ olsun. Bu durumda, $\zeta_k(f) \geq \wedge_{j\in\Delta}\tau_k^{\beta}(f_j) \geq \wedge_{j\in\Delta}\beta_k(f_j)$ olacağından $\{f_j : f = \sqcup_{j\in\Delta} f_j\}$ ailesi üzerinden supremum alınırsa $\zeta \geq \tau^{\beta}$ olduğu görülür.

Lemma 2.1.12: $\tau$, $X_1$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek topoloji ve $\beta$, $X_2$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek taban olsun. Bu takdirde $\varphi_{\psi,\eta}: X \to Y$ bulanık esnek dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(g)\right) \geq \beta_{\eta(k)}(g)$ sağlanır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ ve $k \in K_1$ için $\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(g)\right) \geq \tau_{\eta(k)}^{\beta}(g) \geq \beta_{\eta(k)}(g)$ olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ Her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(g)\right) \geq \beta_{\eta(k)}(g)$ olsun. Bu durumda her $\{h_j : h = \sqcup_{j\in\Gamma} h_j\}$ ailesi için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\begin{aligned}\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(h)\right) &\geq \tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}\left(\sqcup_{j\in\Gamma} h_j\right)\right)\\ &= \tau_k\left(\sqcup_{j\in\Gamma}\varphi_{\psi}^{-1}(h_j)\right)\\ &= \wedge_{j\in\Gamma}\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(h_j)\right)\\ &\geq \wedge_{j\in\Gamma}\beta_{\eta(k)}(h_j).\end{aligned}$$

Burada, $\{h_j : h = \sqcup_{j\in\Gamma} h_j\}$ ailesi üzerinden supremum alınırsa istenilen

$\tau_k\left(\varphi_{\psi}^{-1}(h)\right) \geq \tau_{\eta(k)}^{\beta}(h)$ eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.13: $\{(X_i,\tau^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i,K_i)$-esnek topolojik uzayların bir ailesi $X$ bir küme ve $E,K$, $X$ için uygun parametre kümesi olsun. $\varphi_i : X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$ ve $\eta_i: K \to K_i$ fonksiyonlar olsun. $\vee$ ile $P = \{p_1,p_2,\dots,p_n\} \subset \Gamma$ sonlu indeks kümeleri üzerinden supremum alınmak üzere

$$\beta_k(f) = \vee\left\{\wedge_{j=1}^{n}\tau^{p_j}{}_{\eta_{p_j}(k)}\left(f_{p_j}\right) : f = \sqcap_{j=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{p_j}^{-1}\left(f_{p_j}\right)\right\}$$

olarak tanımlanan $\beta : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümünü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $\beta$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek tabandır.

(2) $\beta$ ile üretilen $\tau^{\beta}$ bulanık esnek topolojisi her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i$ dönüşümlerini sürekli yapan $X$ üzerindeki en dar bulanık esnek topolojidir ve bu topolojiye başlangıç bulanık esnek topoloji denir.

(3) $\varphi_{\psi,\eta}: (Y, \tau^*) \to (X, \tau^{\beta})$ fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y, \tau^*) \to \left(X_i, \tau^i\right)$ bileşkesi de süreklidir.

İspat: (1) Tanım 2.1.10 (B1), (B2) koşullarının sağlandığı göstermek yeterlidir.

(B1) $\left(\varphi_{\psi}\right)_i^{-1}(\Phi) = \Phi$ ve $\left(\varphi_{\psi}\right)_i^{-1}\left(\tilde{E}\right) = \tilde{E}$ olduğundan her $k \in K$ için $\beta_k(\Phi) = \beta_k\left(\tilde{E}\right) = 1$ dir.

(B2) $\Gamma$ nın $f = \sqcap_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{t_i}^{-1}\left(f_{t_i}\right)$ ve $g = \sqcap_{i=1}^{m}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{-1}\left(g_{j_i}\right)$ koşullarını sağlayan sonlu $P = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ ve $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ alt kümeleri göz önüne alınsın. Bu takdirde $f \sqcap g = \sqcap_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{t_i}^{-1}\left(f_{t_i}\right) \sqcap \sqcap_{i=1}^{m}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{-1}\left(g_{j_i}\right)$ olur.

Ayrıca her $t \in K \cap J$ için $\left(\varphi_{\psi}\right)_t^{-1}(f_t) \sqcap \left(\varphi_{\psi}\right)_t^{-1}(g_t) = \left(\varphi_{\psi}\right)_t^{-1}(f_t \sqcap g_t)$ dir.

Buna göre $f \sqcap g = \sqcap_{m_i \in K \cup J}\left(h_{m_i}\right)$ yazılabilir. Burada

$$h_{m_i} = \begin{cases} f_{m_i}, & m_i \in K \setminus (K \cap J) \\ g_{m_i}, & m_i \in J \setminus (K \cap J) \\ f_{m_i} \sqcap g_{m_i}, & m_i \in K \cap J \end{cases} \text{ dir.}$$

Böylece her $k \in K$ için

$$\begin{aligned} \beta_k(f \sqcap g) &\geq \wedge_{j \in K \cup J}\left(\tau^j\right)_{\eta_j(k)}\left(h_j\right) \\ &\geq \left(\wedge_{i=1}^{n} {\tau^{t_i}}_{\eta_{t_i}(k)}\left(f_{t_i}\right)\right) \wedge \left(\wedge_{i=1}^{m} {\tau^{j_i}}_{\eta_{j_i}(k)}\left(g_{j_i}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu özelliği sağlayan tüm sonlu $P$ ve $J$ kümeleri için supremum alınırsa, her $k \in K$ için

$\beta_k(f \sqcap g) \geq \beta_k(f) \sqcap \beta_k(g)$ elde edilir.

(2) Her $f_i \in (L^{X_i})^{E_i}$, $i \in \Gamma$ ve her $k \in K$ için

$$\tau^{\beta}{}_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(f_i)\right) \geq \beta_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(f_i)\right) \geq \tau^{i}{}_{\eta_i(k)}(f_i).$$

Böylece her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i : \left(X, \tau^{\beta}\right) \to \left(X_i, \tau^{i}\right)$ süreklidir.

$\zeta$, $X$ üzerinde başka bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olsun öyle ki her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i : (X, \zeta) \to \left(X_i, \tau^{i}\right)$ sürekli olsun. Bu takdirde her $i \in \Gamma$ ve $k \in K$ için

$\zeta_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(f_i)\right) \geq \tau^{i}{}_{\eta_i(k)}(f_i)$ sağlanır.

$\Gamma$ nın $f = \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\right)$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ alt kümeleri için

$\zeta_k(f) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \zeta_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\right)\right) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \tau^{j_i}{}_{\eta_{j_i}(k)}\left(f_{j_i}\right)$ dir.

Tüm sonlu $J$ altkümeleri için supremum alındığında her $k \in K$ için $\zeta_k(f) \geq \beta_k(f)$ elde edilir. Buna göre Teorem 2.1.11 den arzu edilen sonuç elde edilir.

(3) ($\Rightarrow$) $\varphi_{\psi,\eta}: (Y, \tau^*) \to (X, \tau^{\beta})$ sürekli olsun. Her $i \in \Gamma, d \in E'$ ve $f_i \in (L^{X_i})^{E_i}$ için

$$\begin{aligned}\tau_d^*\left((\varphi_i \circ \varphi)_{\psi_i \circ \psi}^{-1}(f_i)\right) &= \tau_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(f_i)\right)\right) \\ &\geq \tau^{\beta}{}_{\eta(d)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(f_i)\right) \\ &\geq \tau^{i}{}_{(\eta_i \circ \eta)(d)}(f_i)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i \circ \varphi_{\psi,\eta}$ bileşkesinin sürekli olduğu görülür.

($\Leftarrow$) $\Gamma$' nın $f = \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\right)$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ alt kümeleri için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_{j_i} \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y, \tau^*) \to \left(X_{j_i}, \tau^{j_i}\right)$ sürekli olduğundan her $d \in E'$ için $\tau_d^*\left(\left(\varphi_{j_i} \circ \varphi\right)_{\psi_{j_i} \circ \psi}^{-1}\left(f_{j_i}\right)\right) \geq \tau^{j_i}{}_{\left(\eta_{j_i} \circ \eta\right)(d)}\left(\tau_{j_i}\right)$ sağlanır.

Buradan aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\begin{aligned}\tau_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(f)\right) &= \tau_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\prod_{i=1}^n(\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(f_{j_i})\right)\right)\\ &= \tau_d^*\left(\prod_{i=1}^n\varphi_\psi^{-1}\left((\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(f_{j_i})\right)\right)\\ &\geq \bigwedge_{i=1}^n\tau_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left((\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(f_{j_i})\right)\right)\\ &\geq \bigwedge_{i=1}^n\tau^{j_i}{}_{\left(\eta_{j_i}\circ\eta\right)(d)}(f_{j_i}).\end{aligned}$$

Tüm sonlu $J$ altkümeleri için supremum alındığında her $d \in E'$ ve $F \in (L^X)^E$ için $\tau_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(f)\right) \geq \beta_{\eta(d)}(f)$ elde edilir. Lemma 2.1.12 den $\varphi_{\psi,\eta}: (Y,\tau^*) \to (X,\tau^\beta)$ fonksiyonun sürekli olduğu açıktır.

Teorem 2.1.14: Bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisi $\boldsymbol{FSTOP}(L,M)$ kümeler kategorisi $\boldsymbol{SET^3}$ üzerinde $V(X,\tau) = (X,E,K)$ ve $V\left(\varphi_{\psi,\eta}\right) = (\varphi,\psi,\eta)$ olarak tanımlanan $V : \boldsymbol{FSTOP}(L,M) \to \boldsymbol{SET^3}$ unutkan funktoruna göre bir topolojik kategoridir.

Tanım 2.1.15: $\left\{\left(X_i,\tau^i\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i,K_i)$-esnek topolojik uzayların bir ailesi $X \coloneqq \prod_{i\in\Gamma}X_i$, $E \coloneqq \prod_{i\in\Gamma}E_i$ ve $K \coloneqq \prod_{i\in\Gamma}K_i$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \to X_i$, $q_i: E \to E_i$ ve $r_i : K \to K_i$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Bu takdirde $X$ üzerinde $\left\{\left(p_{q,r}\right)_i\right\}_{i\in\Gamma}$ bulanık esnek izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan en dar topolojiye çarpım $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji denir.

## 2.2. ASTOP Kategorisi

Bu kısımda bulanık esnek topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi olan $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisinin bir karakterizasyonu verilecektir. Bu amaçla, uyumlu esnek topolojik uzaylar ve bunların sürekli fonksiyonlarının kategorisi olan $\boldsymbol{ASTOP}$ tanımlanacak ve $\boldsymbol{FSTOP}$ ile $\boldsymbol{ASTOP}$ un birbirine izomorf olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. Her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k \subseteq (I^X)^E$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_k\}_{k\in K}$ ailesine $X$ kümesi üzerinde bir $(E, K)$-esnek $I$-topoloji denir.

(S1) $\Phi_X, \tilde{E}_X \in \mathcal{T}_k$.

(S2) $f, g \in \mathcal{T}_k$ ise $f \sqcap g \in \mathcal{T}_k$.

(S3) $\{f_i\}_{i\in\Gamma} \sqsubseteq \mathcal{T}_k$ ise $\sqcup_{i\in\Gamma} f_i \in \mathcal{T}_k$.

$(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bir $(E, K)$-esnek $I$-topolojik uzay adı verilir.

$(X_1, \mathcal{T}^1)$ bir $(E_1, K_1)$-esnek $I$-topolojik uzay, $(X_2, \mathcal{T}^2)$ bir $(E_2, K_2)$-esnek $I$-topolojik uzay ve $\varphi: X_1 \to X_2, \psi: E_1 \to E_2$ ve $\eta: K_1 \to K_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $k \in K$ için $g \in \mathcal{T}^2_{\eta(k)}$ iken $\varphi^{-1}_{\psi}(g) \in \mathcal{T}^1_k$ sağlanıyor ise $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{T}^1) \to (X_2, \mathcal{T}^2)$ fonksiyonuna süreklidir denir.

Uyarı 2.2.2: (1) $K$ tek noktalı bir küme olarak alındığında, Tanım 2.2.1 ile Tanay ve Kandemir (2011) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) $K$ tek noktalı bir küme ve $I = 2$ olarak alındığında, Tanım 2.2.1 ile Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen tanım çakışır.

(3) $E$ ve $K$ tek noktalı kümeler olarak alındığında, Tanım 2.2.1 ile Chang (1968) tarafından verilen tanım çakışır.

Örnek 2.2.3: (1) Her $k \in K$ için $\mathcal{T}^t_k = \{\Phi_X, \tilde{E}_X\}$ olmak üzere $\mathcal{T}^t = \{\mathcal{T}^t_k\}_{k\in K}$ olarak tanımlanan aile $X$ kümesi üzerinde bir $(E, K)$-esnek $I$-topolojidir ve buna trivial topoloji adı verilir.

(2) Her $k \in K$ için $\mathcal{T}^D_k = (I^X)^E$ olmak üzere $\mathcal{T}^D = \{\mathcal{T}^D_k\}_{k\in K}$ olarak tanımlanan aile $X$ kümesi üzerinde bir $(E, K)$-esnek $I$-topolojidir ve buna ayrık (diskret) topoloji adı verilir.

Verilen bir $X$ kümesi için bu küme üzerindeki tüm $(E, K)$-esnek $I$-topolojilerin ailesi $\boldsymbol{STO}(X)$ ile gösterilsin. $\boldsymbol{STO}(X)$ kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısını göz önüne alalım:

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S} :\Leftrightarrow \mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{S}_k, \ \forall k \in K.$

Bu sıralama bağıntısına göre bir $X$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_k\}_{k\in K}$ ve $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_k\}_{k\in K}$ $(E,K)$-esnek $I$-topolojileri için birleşim ve arakesit aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$\mathcal{T} \cup \mathcal{S} = \{(\mathcal{T} \cup \mathcal{S})_k\}_{k\in K}$ ve $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{(\mathcal{T} \cap \mathcal{S})_k\}_{k\in K}$

burada $(\mathcal{T} \cup \mathcal{S})_k = \{\mathcal{T}_k \cup \mathcal{S}_k\}$ ve $(\mathcal{T} \cap \mathcal{S})_k = \{\mathcal{T}_k \cap \mathcal{S}_k\}$ dir.

Böylece, $\boldsymbol{STO}(X)$ kümesi yukarıda tanımlanan "$\subseteq$" bağıntısına göre en küçük elemanı $\mathcal{T}^t$ ve en büyük elemanı $\mathcal{T}^D$ olan bir tam latistir.

Tanım 2.2.4: $X$ boştan farklı klasik bir küme, $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{STO}(X)$ ise her $a \in I_1$ için $\gamma(a) = \bigcup_{b>a} \gamma(b)$ ve $\gamma(1) = \{\Phi_X, \tilde{E}_X\}$ olarak tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere objeleri $(X,\gamma)$ ikilileri olan kategori $\boldsymbol{ASTOP}$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisindeki bir $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\gamma^1) \to (X_2,\gamma^2)$ morfizmi her $a \in [0,1]$ için $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\gamma^1(a)) \to (X_2,\gamma^2(a))$ sürekli olacak şekildeki bir $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1,E_1,K_1) \to (X_2,E_2,K_2)$ dönüşümüdür.

$\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisindeki bir $(X,\gamma)$ objesi uyumlu anti-zincir $(E,K)$-esnek $I$-topolojik uzay ve $\gamma$ ise $X$ üzerinde bir uyumlu anti-zincir $(E,K)$-esnek $I$-topoloji olarak adlandırılır.

$X$ üzerinde verilen bir $\tau$ bulanık $(E,K)$-esnek topolojisi için $\tau_k^a = \{ f \in (I^X)^E \mid \tau_k(f) \geq a \}$ olmak üzere bu aile yardımıyla $X$ üzerinde $(E,K)$-esnek $I$-topolojilerin bir ailesi olan $\{\tau^a \mid a \in [0,1]\}$ kolleksiyonu elde edilir.

Ayrıca eğer $\gamma_k^\tau(a) = \bigcup_{b>a} \tau_k^b$ yazılırsa bu durumda $(X,\gamma^\tau)$ ikilisi $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisine ait bir obje olur.

Lemma 2.2.5: $\tau$, $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek topoloji olsun. Bu takdirde, her $f \in \gamma_k^\tau(a)$ için $\tau_k(f) \geq a$ sağlanır.

İspat: Açıktır.

Önerme 2.2.6: (1) Eğer $X$ kümesi üzerindeki iki bulanık $(E,K)$-esnek topoloji $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisindeki aynı objeyi belirliyorsa bu durumda bu iki topoloji eşittir.

(2) $(X,\mathcal{S})$ ve $(Y,\mathcal{T})$ sırasıyla bulanık $(E_1,K_1)$-esnek topolojik uzay ve bulanık $(E_2,K_2)$-esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta}:(X,\mathcal{S})\to(Y,\mathcal{T})$ sürekli ise $\varphi_{\psi,\eta}:(X,\gamma^{\mathcal{S}})\to(Y,\gamma^{\mathcal{T}})$ süreklidir.

İspat: (1) $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$, $X$ kümesi üzerinde $\gamma^{\mathcal{T}}=\gamma^{\mathcal{S}}$ koşulunu sağlayan iki bulanık $(E,K)$-esnek topoloji olsun. $\mathcal{T}=\mathcal{S}$ olduğunu yani her $k\in K$ ve $f\in(I^X)^E$ için $\mathcal{T}_k(f)=\mathcal{S}_k(f)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$k\in K$ ve bir $a\in I_1$ için $a<\mathcal{T}_k(f)$ olsun. $a<b\leq\mathcal{T}_k(f)$ olacak şekildeki bir $b\in I_1$ elemanını sabit tutalım. Buradan, $f\in\mathcal{T}_k^b\subseteq\gamma_k^{\mathcal{T}}(a)=\gamma_k^{\mathcal{S}}(a)$ dir. Lemma 2.2.5 den, $\mathcal{S}_k(f)\geq a$ sağlanır. Böylece, $a\in I_1$ keyfi olduğundan $\mathcal{T}_k(f)\leq\mathcal{S}_k(f)$ elde edilir. Diğer yandan benzer şekilde $\mathcal{T}_k(f)\geq\mathcal{S}_k(f)$ eşitsizliği de elde edilir. Böylece (1) ispatlanmış olur.

(2) $\varphi_{\psi,\eta}:(X,\mathcal{S})\to(Y,\mathcal{T})$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\varphi_{\psi,\eta}:(X,\gamma^{\mathcal{S}})\to(Y,\gamma^{\mathcal{T}})$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için her $k\in K,a\in I$ ve $g\in\gamma_{\eta(k)}^{\mathcal{T}}(a)$ için $\varphi_\psi^{-1}(g)\in\gamma_k^{\mathcal{S}}(a)$ olduğunu göstermek gerekmektedir.

$g\in\gamma_{\eta(k)}^{\mathcal{T}}(a)=\cup_{b>a}\gamma_{\eta(k)}^{\mathcal{T}}(b)$ olduğundan $M_j$ sonlu bir indis kümesi ve $g_{j_i}\in\gamma_{\eta(k)}^{\mathcal{T}}(b_{j_i})$ $(b_{j_i}>a)$ olmak üzere $g=\sqcup_{j\in J}\sqcap_{i\in M_j}g_{j_i}$ formunda yazılabilir. Lemma 2.2.5 den, $\mathcal{T}_{\eta(k)}(g_{j_i})\geq b_{j_i}>a$ dir. Böylece,

$\mathcal{S}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g_{j_i})\right)\geq\mathcal{T}_{\eta(k)}(g_{j_i})>a$ olduğu görülür. Ayrıca, $\varphi_\psi^{-1}(g_{j_i})\in\gamma_k^{\mathcal{S}}(a)$ dir. Buradan, $\varphi_\psi^{-1}(g)=\sqcup_{j\in J}\sqcap_{i\in M_j}\varphi_\psi^{-1}(g_{j_i})\in\gamma_k^{\mathcal{S}}(a)$ elde edilir.

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak; bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzaylar kategorisi olan $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisinden $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisine injektif bir funktor bulunduğu görülür.

$X$ kümesi üzerinde verilen bir $\gamma$ uyumlu anti-zincir $(E,K)$-esnek $I$-topoloji için bu $X$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{T}^\gamma$ bulanık $(E,K)$-esnek topolojisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\mathcal{T}_k^\gamma(f)=sup\{a\in I_1\mid f\in\gamma_k(a)\},\ f\in(I^X)^E$

Önerme 2.2.7: Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{T}^{\gamma}$, $X$ kümesi üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek topolojidir ve bu topoloji $\gamma$ yardımıyla üretilen bulanık $(E,K)$-esnek topoloji olarak adlandırılır.

İspat: Tanım 2.1.3 deki (O1)-(O3) koşullarının sağlandığını göstermek gerekmektedir.

(O1) Her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k^{\gamma}(\Phi_X) = \mathcal{T}_k^{\gamma}(\tilde{E}_X) = 1$ olduğu açıktır.

(O2) $k \in K$ ve bir $\mu \in I_1$ için $\mu < \mathcal{T}_k^{\gamma}(f) \wedge \mathcal{T}_k^{\gamma}(g)$ olsun. Buradan, $\mu < \mathcal{T}_k^{\gamma}(f)$ ve $\mu < \mathcal{T}_k^{\gamma}(g)$ dir. $\mu < \lambda < \mathcal{T}_k^{\gamma}(f)$ ve $\mu < \lambda < \mathcal{T}_k^{\gamma}(g)$ olacak biçimde bir $\lambda \in I$ alınırsa buradan $\lambda < a_f \wedge a_g$ olacak şekilde $a_f$ ve $a_g$ elemanları vardır ve hem $f \in \gamma_k(a_f)$ hem de $g \in \gamma_k(a_g)$ dir. Buradan, $f \in \gamma_k(\lambda)$ ve $g \in \gamma_k(\lambda)$ bulunur. $\gamma_k(\lambda)$ bir $(E,K)$-esnek $I$-topoloji olduğundan $f \sqcap g \in \gamma_k(\lambda)$ dir. Böylece, $\mathcal{T}_k^{\gamma}(f \sqcap g) \geq \lambda > \mu$ sağlanır. $\mu$ keyfi olduğundan her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k^{\gamma}(f \sqcap g) \geq \mathcal{T}_k^{\gamma}(f) \wedge \mathcal{T}_k^{\gamma}(g)$ elde edilir.

(O3) Bir $\{ f_j \mid j \in J \} \subseteq (I^X)^E$ ailesi ve bir $\mu \in I_1$ için $\mu < \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}_k^{\gamma}(f_j)$ olsun. Böylece, her $j \in J$ için $\mathcal{T}_k^{\gamma}(f_j) > \mu$ dir. $\mathcal{T}_k^{\gamma}$ nın tanımından, bir $a_j > \mu$ vardır öyle ki $f_j \in \gamma_k(a_j)$ dir. Böylece, $\sqcup_{j\in J} f_j \in \bigcup_{\beta>\mu} \gamma_k(\beta) = \gamma_k(\mu)$ elde edilir. Bu ise $\mu \leq \mathcal{T}_k^{\gamma}(\sqcup_{j\in J} f_j)$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, $\mu$ keyfi bir eleman olduğundan,

$\mathcal{T}_k^{\gamma}(\sqcup_{j\in J} f_j) \geq \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}_k^{\gamma}(f_j)$ elde edilir.

Önerme 2.2.8: (1) Eğer $(X,\gamma)$ ve $(X,\xi)$, $X$ üzerinde aynı bulanık $(E,K)$-esnek topolojiyi belirleyen $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisine ait iki obje ise bu durumda bu iki obje eşittir.

(2) $(X,\gamma)$ ve $(Y,\xi)$ sırasıyla $(E_1,K_1)$-esnek $I$-topolojik uzay ve $(E_2,K_2)$-esnek $I$-topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\gamma) \to (Y,\xi)$ sürekli ise, bu durumda $\varphi_{\psi,\eta}$ üretilmiş bulanık esnek topolojilere göre de süreklidir.

İspat: (1) $\gamma$ ve $\xi$ tarafından üretilen aynı bulanık $(E,K)$-esnek topoloji $\tau$ ile gösterilsin. $\gamma = \xi$ olduğunu, yani her $k \in K$ ve $a \in I_1$ için $\gamma_k(a) = \xi_k(a)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Buna alternatif olarak $a \in I_1$ olmak üzere her

$b > a$ için $f \in \gamma_k(b)$ iken $f \in \xi_k(a)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece, $\gamma_k(a) = \bigcup_{b>a} \gamma_k(b) \subseteq \xi_k(a)$ ve benzer şekilde tersi de görülür. Gerçekten, $f \in \gamma_k(b)$ olması $\tau_k(f) \geq b > a$ olmasını gerektirir. Buradan, bir $c > a$ elemanı vardır öyle ki, $f \in \xi_k(c)$, yani $f \in \xi_k(a)$ elde edilir.

(2) $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\gamma) \to (Y,\xi)$ sürekli olsun. Her $k \in K_1$ ve $f \in (I^Y)^{E_2}$ için $\tau_k^{\gamma}\left(\varphi_{\psi}^{-1}(f)\right) \geq \tau_{\eta(k)}^{\xi}(f)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

$a < \tau_{\eta(k)}^{\xi}(f)$ olacak şekilde bir $a \in I_1$ alınırsa $a < b$ ve $f \in \xi_{\eta(k)}(b)$ olacak şekilde bir $b \in I_1$ mevcuttur. $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\gamma(b)) \to (Y,\xi(b))$ sürekli olduğundan $\varphi_{\psi}^{-1}(f) \in \gamma_k(b)$ dir. O halde, $\tau_k^{\gamma}\left(\varphi_{\psi}^{-1}(f)\right) \geq b > a$ dir. $a$ keyfi olarak seçildiğinden, $\tau_k^{\gamma}\left(\varphi_{\psi}^{-1}(f)\right) \geq \tau_{\eta(k)}^{\xi}(f)$ elde edilir.

Yukarıdaki önermelerin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.2.9: $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisi $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisine izomorftur. Böylece, $\boldsymbol{ASTOP}$, $\boldsymbol{SET^3}$ üzerine topolojik bir kategoridir.

## 2.3. Bulandırılmış Esnek Topolojik Uzaylar

Bu kısımda Ying (1991) tarafından verilen bulandırılmış topolojik uzay tanımı baz alınarak, benzer yaklaşımla bulandırılmış esnek topoloji tanımlanacaktır. Ayrıca, verilen bir bulandırılmış esnek topoloji ailesi için başlangıç yapının varlığı kanıtlanarak, bulandırılmış esnek topolojik uzaylar kategorisinin $\boldsymbol{SET^3}$ üzerine topolojik bir kategori olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.3.1: (a) $\mathcal{T} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E,K)$-esnek topoloji denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(BO1) $\mathcal{T}_k(\Phi) = \mathcal{T}_k\left(\tilde{E}\right) = 1$.

(BO2) $\mathcal{T}_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \mathcal{T}_k(F) \wedge \mathcal{T}_k(G),\ \forall\, F,\ G \in (2^X)^E$ .

(BO3) $\mathcal{T}_k\left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} F_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \mathcal{T}_k(F_i)\,,\ \forall\, F_i \in (2^X)^E, i \in J$.

$(X,\mathcal{T})$ ikilisine bulandırılmış $(E,K)$-esnek topolojik uzay adı verilir. Burada, $\mathcal{T}_k(F)$ değeri ise $k \in K$ parametresine göre $F$ esnek kümesinin açıklık derecesini gösterir.

(b) $X$ kümesi üzerinde $\mathcal{T}^1$ ve $\mathcal{T}^2$ bulandırılmış esnek topolojileri verilsin. Eğer her $k \in K$ ve $F \in (2^X)^E$ için $\mathcal{T}_k^2(F) \leq \mathcal{T}_k^1(F)$ sağlanıyor ise $\mathcal{T}^1$ bulandırılmış esnek topolojisine $\mathcal{T}^2$ bulandırılmış esnek topolojisinden daha incedir denir ve bu durum $\mathcal{T}^2 \leq \mathcal{T}^1$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2: $(X_1, \mathcal{T}^1)$ ve $(X_2, \mathcal{T}^2)$ sırasıyla bulandırılmış $(E_1, K_1)$-esnek ve bulandırılmış $(E_2, K_2)$-esnek topolojik uzaylar ve $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{T}^1) \to (X_2, \mathcal{T}^2)$ esnek dönüşüm olsun. $\varphi_{\psi,\eta}$ dönüşümüne süreklidir denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $G \in (2^{X_2})^{E_2}$ için $\mathcal{T}^1{}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) \geq \mathcal{T}_{\eta(k)}^2(G)$ sağlanır.

Objeleri bulandırılmış esnek topolojik uzaylar ve morfizmleri de sürekli fonksiyonlar olan kategori $\boldsymbol{FYSSTOP}$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.3: $\{\mathcal{T}^j\}_{j\in J}$, $X$ üzerinde bulandırılmış esnek topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k(F) = \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}_k^j(F)$ olarak tanımlanan $\mathcal{T} \coloneqq \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}^j$ dönüşümü de $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek topolojidir.

Tanım 2.3.4: $\mathcal{C} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek kotopoloji denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(BC1) $\mathcal{C}_k(\Phi) = \mathcal{C}_k\left(\tilde{E}\right) = 1$.

(BC2) $\mathcal{C}_k(F \tilde{\sqcup} G) \geq \mathcal{C}_k(F) \wedge \mathcal{C}_k(G),\ \forall\ F, G \in (2^X)^E$.

(BC3) $\mathcal{C}_k\left(\widetilde{\bigsqcap_{i\in J}} F_i\right) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{C}_k(F_i),\ \forall\ F_i \in (2^X)^E, i \in J$.

$(X, \mathcal{C})$ ikilisine de bulandırılmış $(E, K)$-esnek kotopolojik (eştopolojik) uzay denir.

$\mathcal{T}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek topoloji olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $C_k(F) \coloneqq \mathcal{T}_k'(F)$ olarak tanımlanan $\mathcal{C} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir kotopolojidir. Tersine, $\mathcal{C}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek kotopoloji olmak üzere her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k(F) \coloneqq \mathcal{C}_k'(F)$ olarak tanımlanan $\mathcal{T} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.3.5: $\mathcal{B} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek taban denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(BB1) $\mathcal{B}_k(\Phi) = \mathcal{B}_k(\tilde{E}) = 1$.

(BB2) $\mathcal{B}_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \mathcal{B}_k(F) \wedge \mathcal{B}_k(G),\ \forall F,\ G \in (2^X)^E$.

Teorem 2.3.6: $\mathcal{B}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış esnek taban olmak üzere her $k \in K$ için

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F) = \bigvee \left\{ \bigwedge_{j \in \Delta} \mathcal{B}_k(F_j) : F = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in J}} F_j \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümü her $k \in K$ ve $F \in (2^X)^E$ için $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F) \geq \mathcal{B}_k(F)$ koşulunu sağlayan en dar bulandırılmış esnek topolojidir.

İspat: (BO1) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ nin tanımından açıktır.

(BO2) Her $\{F_i : F = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in \Delta}} F_i\}$ ve $\{G_j : G = \widetilde{\bigsqcup_{j \in \Gamma}} G_j\}$ ailesi için en az bir $\{F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j\}$ ailesi vardır öyle ki

$F \,\tilde{\sqcap}\, G = \left(\widetilde{\bigsqcup_{\iota \in \Delta}} F_i\right) \,\tilde{\sqcap}\, \left(\widetilde{\bigsqcup_{j \in \Gamma}} G_j\right) = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in \Delta, j \in \Gamma}} (F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j)$ sağlanır.

Buradan her $k \in K$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \bigwedge_{i \in \Delta, j \in \Gamma} \mathcal{B}_k(F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j)$$

$$\geq \bigwedge_{i \in \Delta, j \in \Gamma} \mathcal{B}_k(F_i) \wedge \mathcal{B}_k(G_j)$$

$$\geq \bigwedge_{i \in \Delta, j \in \Gamma} \mathcal{B}_k(F_i) \wedge \bigwedge_{i \in \Delta, k \in \Gamma} \mathcal{B}_k(G_j) \geq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F) \wedge (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(G).$$

(BO3) $k \in K$ ve $\left\{F_{i_j} :\ F_i = \widetilde{\bigsqcup_{J \in J_\iota}} F_{i_j}\right\}$ koşulunu sağlayan $J_i$ indeks kümelerinin ailesi $P_i$ ve $F = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in \Gamma}} F_i = \widetilde{\bigsqcup_{\iota \in \Gamma}} \widetilde{\bigsqcup_{J \in J_\iota}} F_{i_j}$ olsun. Her $i \in \Gamma$ ve $\Psi(i) = J_i$ olacak şekilde $\Psi \in \prod_{i \in \Gamma} P_i$ için $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F) \geq \bigwedge_{i \in \Delta} \left(\bigwedge_{j \in J_i} \mathcal{B}_k\left(F_{i_j}\right)\right)$ dir.

$a_{i,\Psi_i} = \bigwedge_{j \in J_i} \mathcal{B}_k\left(F_{i_j}\right)$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir.

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F) \geq \bigvee_{\Psi \in \prod_{i \in \Gamma} P_i} \left(\bigwedge_{i \in \Gamma} a_{i,\Psi_i}\right)$$

$$= \Lambda_{i\in\Gamma}\left(\mathrm{V}_{M_i\in P_i} a_{i,M_i}\right)$$

$$= \Lambda_{i\in\Gamma}\left(\mathrm{V}_{M_i\in P_i}\left(\Lambda_{m\in M_i}\mathcal{B}_k\left(F_{i_m}\right)\right)\right)$$

$$\geq \Lambda_{i\in\Gamma}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k(F_i).$$

Böylece $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ nin $X$ üzerinde bir bulandırılmış esnek topoloji olduğu görülür.

$\mathcal{T}$, $X$ üzerinde $\mathcal{T} \geq \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan başka bir bulandırılmış esnek topoloji ve $F = \widetilde{\bigsqcup_{j\in\Delta}} F_j$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{T}_k(F) \geq \Lambda_{j\in\Delta}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k\left(F_j\right) \geq \Lambda_{j\in\Delta}\mathcal{B}_k\left(F_j\right)$$

olduğu açıktır. Burada $\left\{F_j : F = \widetilde{\bigsqcup_{j\in\Delta}} F_j\right\}$ ailesi üzerinden supremum alınırsa $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ elde edilir.

Lemma 2.3.7: $\mathcal{T}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E,K)$-esnek topoloji ve $\mathcal{B}$ ise $Y$ üzerinde bir bulandırılmış $(E',K')$-esnek taban olsun. Bu takdirde, $\varphi_{\psi,\eta}: X \to Y$ esnek dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ ve $G \in (2^Y)^{E'}$ için $\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) \geq \mathcal{B}_{\eta(k)}(G)$ sağlanır.

İspat: ($\Rightarrow$) $\varphi_{\psi,\eta}$, $X$ den $Y$ ye sürekli bir esnek dönüşüm ve $G \in (2^Y)^{E'}$ olsun. Bu durumda her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) \geq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_{\eta(k)}(G) \geq \mathcal{B}_{\eta(k)}(G)$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) Her $k \in K$ ve $G \in (2^Y)^{E'}$ için $\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) \geq \mathcal{B}_{\eta(k)}(G)$ olsun. Bu durumda her $\left\{H_j : H = \widetilde{\bigsqcup_{j\in\Gamma}} H_j\right\}$ ailesi için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(H)\right) &\geq \mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\widetilde{\bigsqcup_{j\in\Gamma}} H_j\right)\right)\\ &= \mathcal{T}_k\left(\widetilde{\bigsqcup_{j\in\Gamma}}\varphi_\psi^{-1}\left(H_j\right)\right)\\ &= \Lambda_{j\in\Gamma}\,\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}\left(H_j\right)\right)\\ &\geq \Lambda_{j\in\Gamma}\,\mathcal{B}_{\eta(k)}\left(H_j\right).\end{aligned}$$

Burada, $\left\{H_j : H = \widetilde{\bigsqcup_{j\in\Gamma}} H_j\right\}$ ailesi üzerinden supremum alınırsa istenilen

$\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(H)\right) \geq (\mathcal{T}_\mathcal{B})_{\eta(k)}(H)$ eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3.8: $\left\{\left(X_i, \mathcal{T}^i\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ bulandırılmış $(E_i, K_i)$-esnek topolojik uzayların bir ailesi, $X$ bir küme, $E$ $ve$ $K$, $X$ için uygun parametre kümeleri ve $\varphi_i : X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$, $\eta_i : K \to K_i$ fonksiyonlar olsunlar. $\bigvee$ ile $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \Gamma$ sonlu indeks kümeleri üzerinden supremum alınmak üzere,

$$\mathcal{B}_k(F) = \bigvee\left\{ \bigwedge_{j=1}^{n} \mathcal{T}^{p_j}{}_{\eta_{p_j}(k)}\left(F_{p_j}\right) \;:\; F = \widetilde{\prod_{j=1}^{n}}\left(\varphi_\psi\right)_{p_j}^{-1}\left(F_{p_j}\right) \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{B} : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümünü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $\mathcal{B}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek tabandır.
(2) $\mathcal{B}$ ile üretilen $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ bulandırılmış $(E, K)$-esnek topolojisi her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i$ dönüşümlerini sürekli yapan $X$ üzerindeki en dar bulandırılmış $(E, K)$-esnek topolojidir ve bu topolojiye başlangıç bulandırılmış esnek topoloji denir.
(3) $\varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{T}^*) \to (X, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{T}^*) \to \left(X_i, \mathcal{T}^i\right)$ süreklidir.

İspat: (1) (BB1) $\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(\Phi) = \Phi$ ve $\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}\left(\tilde{E}\right) = \tilde{E}$ olduğundan her $k \in K$ için $\mathcal{B}_k(\Phi) = \mathcal{B}_k\left(\tilde{E}\right) = 1$ dir.

(BB2) $\Gamma$' nın $F = \widetilde{\prod_{i=1}^{n}}\left(\varphi_\psi\right)_{t_i}^{-1}\left(F_{t_i}\right)$ ve $G = \widetilde{\prod_{i=1}^{m}}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left(G_{j_i}\right)$ koşullarını sağlayan sonlu $P = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ve $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ alt kümeleri göz önüne alınsın. Bu takdirde $F \,\tilde{\sqcap}\, G = \widetilde{\prod_{i=1}^{n}}\left(\varphi_\psi\right)_{t_i}^{-1}\left(F_{t_i}\right) \,\tilde{\sqcap}\, \widetilde{\prod_{i=1}^{m}}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left(G_{j_i}\right)$ olur.

Ayrıca her $t \in K \cap J$ için $\left(\varphi_\psi\right)_t^{-1}(F_t) \,\tilde{\sqcap}\, \left(\varphi_\psi\right)_t^{-1}(G_t) = \left(\varphi_\psi\right)_t^{-1}(F_t \,\tilde{\sqcap}\, G_t)$ dir.

Buna göre $F \,\tilde{\sqcap}\, G = \sqcap\widetilde{_{m_i \in K\cup J}}\left(H_{m_i}\right)$ yazılabilir. Burada

$$H_{m_i} = \begin{cases} F_{m_i}, & m_i \in K \setminus (K \cap J) \\ G_{m_i}, & m_i \in J \setminus (K \cap J) \\ F_{m_i} \,\tilde{\sqcap}\, G_{m_i}, & m_i \in K \cap J \end{cases} \text{ dir.}$$

Böylece her $k \in K$ için

$$\mathcal{B}_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \bigwedge_{j\in K\cup J}\left(\mathcal{T}^j\right)_{\eta_j(k)}(H_j)$$
$$\geq \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{T}^{t_i}{}_{\eta_{t_i}(k)}(F_{t_i})\right)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\mathcal{T}^{j_i}{}_{\eta_{j_i}(k)}(G_{j_i})\right)$$

elde edilir. Eğer bu özelliği sağlayan tüm sonlu $P$ ve $J$ kümeleri için supremum alınırsa, her $k \in K$ için

$\mathcal{B}_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \mathcal{B}_k(F) \,\tilde{\sqcap}\, \mathcal{B}_k(G)$ elde edilir.

(2) Her $F_i \in (2^{X_i})^{E_i}$, $i \in \Gamma$ ve her $k \in K$ için

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(F_i)\right) \geq \mathcal{B}_k\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(F_i)\right) \geq \mathcal{T}^i{}_{\eta_i(k)}(F_i).$$

Böylece her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}) \to \left(X_i, \mathcal{T}^i\right)$ süreklidir.

$\mathcal{T}'$, $X$ üzerinde başka bir bulandırılmış esnek topoloji olsun öyle ki her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i : (X, \mathcal{T}') \to \left(X_i, \mathcal{T}^i\right)$ sürekli olsun. Bu takdirde her $i \in \Gamma$ ve $k \in K$ için

$$\mathcal{T}_k'\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(F_i)\right) \geq \mathcal{T}^i{}_{\eta_i(k)}(F_i)$$ sağlanır.

$\Gamma$ nın $F = \widetilde{\prod_{i=1}^{n}}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ alt kümeleri için

$$\mathcal{T}_k'(F) \geq \bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{T}_k'\left(\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})\right) \geq \bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{T}^{j_i}{}_{\eta_{j_i}(k)}(F_{j_i})$$ dir.

Tüm sonlu $J$ altkümeleri için supremum alındığında her $k \in K$ için $\mathcal{T}_k'(F) \geq \mathcal{B}_k(F)$ elde edilir. Buna göre Teorem 2.3.6 dan arzu edilen sonuç elde edilir.

(3) ($\Rightarrow$) $\varphi_{\psi,\eta}: (Y, \mathcal{T}^*) \to (X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ sürekli olsun. Her $i \in \Gamma, d \in E'$ ve $F_i \in (2^{X_i})^{E_i}$ için

$$\mathcal{T}_d^*\left((\varphi_i\circ\varphi)^{-1}_{\psi_i\circ\psi}(F_i)\right)=\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left((\varphi_\psi)_i^{-1}(F_i)\right)\right)$$
$$\geq(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_{\eta(d)}\left((\varphi_\psi)_i^{-1}(F_i)\right)$$
$$\geq\mathcal{T}^i{}_{(\eta_i\circ\eta)(d)}(F_i)$$

olur. Buradan $(\varphi_{\psi,\eta})_i\circ\varphi_{\psi,\eta}$ sürekli olur.

($\Leftarrow$) $\Gamma$ nın $F=\widetilde{\prod_{i=1}^n}(\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $J=\{j_1,j_2,\dots,j_n\}$ alt kümeleri için $(\varphi_{\psi,\eta})_{j_i}\circ\varphi_{\psi,\eta}:(Y,\mathcal{T}^*)\to(X_{j_i},\mathcal{T}^{j_i})$ sürekli olduğundan her $d\in E'$ için $\mathcal{T}_d^*\left((\varphi_{j_i}\circ\varphi)^{-1}_{\psi_{j_i}\circ\psi}(F_{j_i})\right)\geq\mathcal{T}^{j_i}{}_{(\eta_{j_i}\circ\eta)(d)}(F_{j_i})$ sağlanır.

Buradan aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(F)\right)=\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\widetilde{\prod_{i=1}^n}(\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})\right)\right)$$
$$=\mathcal{T}_d^*\left(\widetilde{\prod_{i=1}^n}\varphi_\psi^{-1}\left((\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})\right)\right)$$
$$\geq\wedge_{i=1}^n\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left((\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(F_{j_i})\right)\right)$$
$$\geq\wedge_{i=1}^n\mathcal{T}^{j_i}{}_{(\eta_{j_i}\circ\eta)(d)}(F_{j_i}).$$

Tüm sonlu $J$ altkümeleri için supremum alındığında her $d\in E'$ ve $F\in(2^X)^E$ için $\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(F)\right)\geq\mathcal{B}_{\eta(d)}(F)$ elde edilir. Lemma 2.3.7 den $\varphi_{\psi,\eta}:(Y,\mathcal{T}^*)\to(X,\mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ sürekli olur.

Teorem 2.3.9: Bulandırılmış esnek topolojik uzaylar kategorisi $\boldsymbol{FYSSTOP}$, kümeler kategorisi $\boldsymbol{SET^3}$ üzerinde $V(X,\mathcal{T})=(X,E,K)$ ve $V(\varphi_{\psi,\eta})=(\varphi,\psi,\eta)$ olarak tanımlanan $V:\boldsymbol{FSTOP}\to\boldsymbol{SET^3}$ unutkan funktoruna göre bir topolojik kategoridir.

Tanım 2.3.10: $\{(X_i,\mathcal{T}^i)\}_{i\in\Gamma}$ bulandırılmış $(E_i,K_i)$-esnek topolojik uzayların bir ailesi, $X:=\prod_{i\in\Gamma}X_i$, $E:=\prod_{i\in\Gamma}E_i$ ve $K:=\prod_{i\in\Gamma}K_i$ çarpım kümesi olsun. Her $i\in\Gamma$ için $p_i:X\to X_i$, $q_i:E\to E_i$ ve $r_i:K\to K_i$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Bu

takdirde, $X$ üzerinde $\left\{\left(p_{q,r}\right)_i\right\}_{i\in\Gamma}$ esnek izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan en dar topolojiye çarpım bulandırılmış esnek topolojisi denir.

## 2.4. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Lowen Funktorları

Lowen (1976), genel topolojik uzaylar ile Chang (1965) anlamındaki topolojik uzaylar arasındaki kategorik ilişkileri incelemek için Lowen funktorları olarak da bilinen $\omega$ ve $\iota$ funktorlarını tanımlamıştır. Daha sonra bu iki funktor birçok araştırmacı tarafından L-topolojik uzaylar ile genel topolojik uzaylar kategorileri arasındaki ilişikleri incelemek için genişletilmiştir. Yue ve Fang (2005), Lowen funktorlarını Sostak (1985) anlamındaki bulanık topolojik uzaylar kategorisi ile bulandırılmış topolojik uzaylar kategorisi arasında kurmuştur. Bu kısımda, Yue ve Fang tarafından ele alınan düşünceye benzer olarak bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisi ile bulandırılmış esnek topolojik uzaylar kategorisi arasındaki ilişkileri irdelemek için $\omega$ ve $\iota$, Lowen funktorları, bulanık esneklik ruhuna uygun olarak genişletilecektir.

Lemma 2.4.1: $(X,\mathcal{T})$ bir bulandırılmış $(E,K)$-esnek topolojik uzay olmak üzere, her $k\in K, f\in (I^X)^E$ için

$$\omega(\mathcal{T})_k(f)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k(\sigma_r(f))$$

olarak tanımlanan $\omega(\mathcal{T}): K\to I^{((I^X)^E)}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek topolojidir.

İspat: Tanım 2.1.3 (O1)- (O3) aksiyomlarının sağlandığını göstermek gerekmektedir.
(O1) $\omega(\mathcal{T})_k(\Phi)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\sigma_r(\Phi)\right)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k(\Phi)=1,$

$$\omega(\mathcal{T})_k\left(\tilde{E}\right)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\sigma_r\left(\tilde{E}\right)\right)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\tilde{E}\right)=1.$$

(O2) $f,g\in(I^X)^E$ ve $k\in K$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade gerçeklenir.

$$\omega(\mathcal{T})_k(f\sqcap g)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\sigma_r(f\sqcap g)\right)=inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\sigma_r(f)\,\tilde{\sqcap}\,\sigma_r(g)\right)$$

$$\geq\ inf_{r\in[0,1]}\left(\mathcal{T}_k\left(\sigma_r(f)\right)\wedge\mathcal{T}_k\left(\sigma_r(g)\right)\right)=\omega(\mathcal{T})_k(f)\wedge\omega(\mathcal{T})_k(g).$$

(O3) Her $\{f_i\}_{i\in\Delta} \subseteq (I^X)^E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\omega(\mathcal{T})_k\left(\sqcup_{i\in\Delta} f_i\right) = inf_{r\in[0,1]}\, \mathcal{T}_k\left(\sigma_r\left(\sqcup_{i\in\Delta} f_i\right)\right)$$

$$= inf_{r\in[0,1]}\, \mathcal{T}_k(\widetilde{\sqcup_{i\in\Delta}}\sigma_r(f_i)$$

$$= inf_{r\in[0,1]} inf_{i\in\Delta} \mathcal{T}_k\left(\sigma_r(f_i)\right)$$

$$= inf_{i\in\Delta} inf_{r\in[0,1]} \mathcal{T}_k\left(\sigma_r(f_i)\right) = inf_{i\in\Delta}\omega(\mathcal{T})_k(f_i).$$

Buradan, $\omega(\mathcal{T})$, $X$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

Lemma 2.4.2**:** $F \in (2^X)^E$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda, $\omega(\mathcal{T})(\lambda\, \chi_F) = \mathcal{T}(F)$ dir.

Teorem 2.4.3: $\varphi_{\psi,\eta}: \left(X, \omega(\mathcal{T})\right) \to (Y, \omega(\mathcal{T}^*))$ dönüşümü bulanık esnek süreklidir ancak ve ancak $\varphi_{\psi,\eta}: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ dönüşümü bulandırılmış esnek süreklidir.

İspat: ($\Rightarrow$) $G \in (2^Y)^{E\prime}$ olmak üzere, tanımdan

$\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) = \omega(\mathcal{T})_k\left(\chi_{\varphi_\psi^{-1}(G)}\right) = \omega(\mathcal{T})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(\chi_G)\right)$ eşitliği sağlanır.

$\varphi_{\psi,\eta}: \left(X, \omega(\mathcal{T})\right) \to (Y, \omega(\mathcal{T}^*))$ dönüşümü bulanık esnek sürekli olduğundan,

$\omega(\mathcal{T})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(\chi_G)\right) \geq \omega(\mathcal{T}^*)_{\eta(k)}(\chi_G) = \mathcal{T}^*_{\eta(k)}(G)$ dir.

Buradan, $\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right) \geq \mathcal{T}^*_{\eta(k)}(G)$ sağlanır. Sonuç olarak $\varphi_{\psi,\eta}: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ dönüşümü bulandırılmış esnek süreklidir.

($\Leftarrow$) $g \in (I^Y)^{E\prime}$ olmak üzere,

$$\omega(\mathcal{T})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) = inf_{r\in[0,1]}\, \mathcal{T}_k\left(\sigma_r\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)\right) = inf_{r\in[0,1]}\, \mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\sigma_r(g)\right)\right).$$

$\varphi_{\psi,\eta}: (X, \mathcal{T}_E) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ bulandırılmış esnek sürekli olduğundan, her $r \in [0,1]$ için $\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\sigma_r(g)\right)\right) \geq \mathcal{T}^*_{\eta(k)}\left(\sigma_r(g)\right)$ sağlanır. Bu durumda,

$\omega(\mathcal{T})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) = inf_{r\in[0,1]}\,\mathcal{T}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(\sigma_r(g))\right) \geq inf_{r\in[0,1]}\mathcal{T}^*_{\eta(k)}(\sigma_r(g)) = \omega(\mathcal{T})_{\eta(k)}(g).$

Lemma 2.4.2 ve Teorem 2.4.3 ün bir sonucu olarak biliyoruz ki, her bir bulandırılmış esnek topolojiden bir bulanık esnek topoloji oluşturulabilir, yani $\omega$, $\boldsymbol{FYSSTOP}$ kategorisinden $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisine tanımlı bir funktordur.

Teorem 2.4.4: $\omega$ funktoru keyfi arakesitleri korur.

İspat: $\{\mathcal{T}^i\}_{i\in\Gamma}$, $X$ üzerindeki bulandırılmış $(E_i, K_i)$-esnek topolojilerin bir ailesi olmak üzere, her $k \in K$ için $\omega\left(\wedge_{i\in\Gamma}\mathcal{T}^i\right)_k = \wedge_{i\in\Gamma}\,\omega\left(\mathcal{T}^i\right)_k$ eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. $f \in (I^X)^E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\omega\left(\wedge_{i\in\Gamma}\mathcal{T}^i\right)_k(f) = inf_{r\in[0,1]}\left(\wedge_{i\in\Gamma}\mathcal{T}^i\right)_k\left(\sigma_r(f)\right)$$

$$= inf_{i\in\Gamma} inf_{r\in[0,1]}\left(\mathcal{T}^i\right)_k\left(\sigma_r(f)\right)$$

$$= inf_{i\in\Gamma}\omega\left(\mathcal{T}^i\right)_k(f) = \left(\wedge_{i\in\Gamma}\,\omega\left(\mathcal{T}^i\right)\right)_k(f).$$

Teorem 2.4.5: $(X, \tau)$ bir bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzay olsun. Her $k \in K$ için

$$(B_\tau)_k(F) = \vee\left\{\wedge_{i=1}^m\left(\vee_{r\in[0,1]}\vee\{\tau_k(f) : f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F_i\}\right) :\ F = \widetilde{\sqcap_{i=1}^m} F_i\right\}$$

olarak tanımlanan $B_\tau : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $B_\tau$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek tabandır. Bu taban yardımıyla üretilen bulandırılmış esnek topoloji $\iota(\tau)$ şeklinde gösterilir.

(2) $\omega\left(\iota(\tau)\right) \geq \tau$.

İspat: (1) (BB1) tanımdan açıktır.

(BB2) Varsayalım ki, $F, G \in (2^X)^E$ ve $k \in K$ için,

$(B_\tau)_k(F \,\widetilde{\sqcap}\, G) \not\geq (B_\tau)_k(F) \wedge (B_\tau)_k(G)$ olsun. $B_\tau$ nun tanımından sonlu $\left\{F_i \,\middle|\, F = \widetilde{\sqcap_{i=1}^m} F_i\right\}$ ve $\left\{G_j \,\middle|\, G = \widetilde{\sqcap_{j=1}^n} G_j\right\}$ aileleri için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$(B_\tau)_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \not\geq \left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{r\in[0,1]}\bigvee\{\tau_k(f) : f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F_i\}\right)\right)$$
$$\wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n}\left(\bigvee_{s\in[0,1]}\bigvee\{\tau_k(g) : g \in (I^X)^E, \sigma_s(g) = G_j\}\right)\right)$$

Buradan en az bir $r, s \in [0,1]$ mevcuttur öyle ki, aşağıdaki ifade sağlanır.

$$(B_\tau)_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \not\geq \left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee\{\tau_k(f) : f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F_i\}\right)\right)$$
$$\wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n}\left(\bigvee\{\tau_k(g) : g \in (I^X)^E, \sigma_s(g) = G_j\}\right)\right)$$

Diğer yandan, $F \,\tilde{\sqcap}\, G = \left(\widetilde{\prod_{i=1}^{m}} F_i\right) \tilde{\sqcap} \left(\widetilde{\prod_{j=1}^{n}} G_j\right) = \widetilde{\prod_{i=1}^{m}}\widetilde{\prod_{j=1}^{n}}(F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j)$ sağlandığından her bir $k \in K$ için, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$(B_\tau)_k(F \,\tilde{\sqcap}\, G) \geq \bigvee\left\{\bigwedge_{i,j}\left(\bigvee_{r\in[0,1]}\bigvee\left\{\, \tau_k(f \sqcap g) \;\middle|\; \sigma_r(f \sqcap g) = F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j \,\right\}\right)\right\}$$

$$\geq \left\{\bigwedge_{i,j}\left(\bigvee_{r\in[0,1]}\bigvee\left\{\, \tau_k(f \sqcap g) \;\middle|\; \sigma_r(f \sqcap g) = F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j \,\right\}\right)\right\}$$

$$\geq \left\{\bigwedge_{i,j}\left(\bigvee_{r\in[0,1]}\bigvee\left\{\, \tau_k(f) \wedge \tau_k(g) \;\middle|\; \sigma_r(f \sqcap g) = F_i \,\tilde{\sqcap}\, G_j \,\right\}\right)\right\}$$

$$\geq \left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{r\in[0,1]}\bigvee\{\tau_k(f) : f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F_i\}\right)\right)$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n}\left(\bigvee_{s\in[0,1]}\bigvee\{\tau_k(g) : g \in (I^X)^E, \sigma_s(g) = G_j\}\right)\right)$$

$$\geq \left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee\{\tau_k(f) : f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F_i\}\right)\right)$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n}\left(\bigvee\{\tau_k(g) : g \in (I^X)^E, \sigma_s(g) = G_j\}\right)\right).$$

Elde edilen bu çelişki (BB2) koşulunun sağlandığını gösterir.

(2) $f \in (I^X)^E, \alpha \in [0,1]$ ve $k \in K$ için $\omega\left(\iota(\tau_E)\right)_k(f) < \alpha$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha > \bigwedge_{r\in[0,1]} \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \sigma_r(f)} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda} W_{\lambda_j} = V_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{s\in[0,1]} \bigvee \left\{ \tau_k(g) \;\middle|\; \sigma_s(g) = W_{\lambda_j} \right\}$$

$$\geq \bigwedge_{r\in[0,1]} \bigvee_{s\in[0,1]} \bigvee \{ \tau_k(g) \mid \sigma_s(g) = \sigma_r(f) \}$$

$$\geq \bigwedge_{r\in[0,1]} \tau_k(f) = \tau_k(f)$$

sağlanır, burada $(\sqcap)$ bulanık kümelerin "sonlu arakesiti" anlamında kullanılmaktadır. Sonuç olarak, $\omega\big(\iota(\tau)\big) \geq \tau$ elde edilir.

Tanım 2.4.6: $\tau, X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek topoloji olsun. Bu durumda, $\iota(\tau)$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir üretilmiş bulandırılmış $(E,K)$-esnek topoloji denir.

Teorem 2.4.7: $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ dönüşümü bulanık esnek sürekli ise, bu durumda $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\iota(\tau)) \to (Y,\iota(\tau^*))$ dönüşümü de bulandırılmış esnek süreklidir.

İspat: $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ dönüşümü bulanık esnek sürekli olduğundan, her $g \in (I^Y)^{E'}$ ve $k \in K$ için $\tau_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) \geq \tau^*_{\eta(k)}(g)$ sağlanır. $G \in (2^Y)^{E'}$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

$$\iota(\tau^*)_{\eta(e)}(G) = \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = G} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda} W_{\lambda_j} = V_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{r\in[0,1]} \bigvee \left\{ \tau^*_{\eta(e)}(h) \;\middle|\; \sigma_r(h) = W_{\lambda_j} \right\}$$

$$\leq \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = G} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda} W_{\lambda_j} = V_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{r\in[0,1]} \bigvee \left\{ \tau_k\left(\varphi_\psi^{-1}(h)\right) \;\middle|\; \sigma_r(h) = W_{\lambda_j} \right\}$$

$$\leq \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = \varphi_\psi^{-1}(G)} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda} M_{\lambda_j} = N_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{r\in[0,1]} \bigvee \left\{ \tau_k(d) \;\middle|\; \sigma_r(d) = M_{\lambda_j} \right\}$$

$$= \iota(\tau)_k\left(\varphi_\psi^{-1}(G)\right).$$

Teorem 2.4.5 ve Teorem 2.4.7 nin bir sonucu olarak, $\iota$ $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisinden $\boldsymbol{FYSSTOP}$ kategorisine tanımlı bir funktordur.

Teorem 2.4.8 : (1) Her $\mathcal{T} \in \boldsymbol{FYSSTOP}(X)$ için $\iota\big(\omega(\mathcal{T})\big) = \mathcal{T}$ dir.

(2) Eğer $\tau = \omega(\mathcal{T})$ ise $\omega(\iota(\tau)) = \tau$ dir.

İspat: (1) Her $k \in K$ ve her $F \in (2^X)^E$ için aşağıdaki ifade sağlandığı açıktır.

$$\iota(\omega(\mathcal{T}))_k(F) = \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=F} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda}W_{\lambda_j}=V_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{r\in[0,1]} \vee\left\{ \omega(\mathcal{T})_k(f) \,\middle|\, \sigma_r(f) = W_{\lambda_j}\right\}$$

$$\geq \bigvee_{r\in[0,1]} \vee\{\ \omega(\mathcal{T})_k(f)\ \mid f \in (I^X)^E, \sigma_r(f) = F\ \} \geq \mathcal{T}_k(F)$$

Buradan, $\iota(\omega(\mathcal{T})) \geq \mathcal{T}$ sağlanır.

Tersine, $F \in (2^X)^E$ ve $\alpha < \iota(\omega(\mathcal{T}))_k(F)$, yani

$$\alpha < \bigvee_{\sqcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=F} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \bigvee_{(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda}W_{\lambda_j}=V_\lambda} \bigwedge_{j\in\Lambda_\lambda} \bigvee_{r\in[0,1]} \vee\left\{ \omega(\mathcal{T})_k(f) \,\middle|\, \sigma_r(f) = W_{\lambda_j} \right\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayan en az bir $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi mevcuttur:

(i) $\widetilde{\sqcup_{\lambda\in\Lambda}} V_\lambda = F$,

(ii) her $\lambda \in \Lambda$ için en az bir $\{W_{\lambda_j}\}_{j\in\Lambda_\lambda}$ ailesi vardır öyle ki $(\sqcap)_{j\in\Lambda_\lambda} W_{\lambda_j} = V_\lambda$,

(iii) her $j \in \Lambda_\lambda$ için $\sigma_r(f) = W_{\lambda_j}$ ve $\alpha < \omega(\mathcal{T})_k(f) = inf_{r\in[0,1]}\, \mathcal{T}_k(\sigma_r(f))$ olacak şekilde bir $r \in [0,1]$ ve $f \in (I^X)^E$ mevcuttur. $\alpha < \mathcal{T}_k(W_{\lambda_j})$ sağlandığından $\alpha \leq inf_{j\in\Lambda_\lambda}\mathcal{T}_k\left(W_{\lambda_j}\right) \leq \mathcal{T}_k(V_\lambda)$ elde edilir. Buradan, $\alpha \leq inf_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_k(V_\lambda) \leq \mathcal{T}_k(F)$. O halde, $\iota(\omega(\mathcal{T})) \leq \mathcal{T}$ sağlanır. Sonuç olarak istenilen eşitlik elde edilir.

Sonuç 2.4.9: $\boldsymbol{FYSSTOP}$ kategorisi $\boldsymbol{FSTOP}$ kategorisinin bir bütünüyle alt kategorisidir Bunun yanı sıra, $.\omega$: $\boldsymbol{FYSSTOP}(X) \to \omega(\boldsymbol{FYSSTOP}(X))$ ve $\iota$: $\omega(\boldsymbol{FYSSTOP}(X)) \to \boldsymbol{FYSSTOP}(X)$ funktorlarının her ikisi de birer tam latis izomorfizmidir.

Örnek 2.4.10: (1) $X$ boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere her $k \in K$ için

$$\mathcal{T}_k(F) = \begin{cases} 1, & F = \Phi, \tilde{E}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{T} : K \to I^{(2^X)^E}$, $X$ üzerinde bir bulandırılmış esnek topoloji olduğu kolaylıkla görülebilir. $\omega(\mathcal{T})$ nin tanımından biliyoruz ki,

$$\left(\omega(\mathcal{T})\right)_k(f) = \begin{cases} 1, & f = \Phi, \widetilde{E},\ \tilde{E}^\lambda, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

(2) $E = K = \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, her $k \in K$ için

$$\tau_k(f) = \begin{cases} 1, & f = \Phi, \tilde{E}, \\ \dfrac{1}{k}, & diğer. \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau : K \to I^{(I^X)^E}$, $X$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir. Buradan, her $k \in K$ için

$$\left(\iota(\tau)\right)_k(F) = \begin{cases} 1, & F = \Phi, \tilde{E}, \tilde{E}^{\lambda}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\omega\left(\iota(\tau)\right)_k(f) = \begin{cases} 1, & f = \Phi, \tilde{E}, \tilde{E}^{\lambda}, \\ \dfrac{1}{k}, & diğer. \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.4.11: $(X, \tau)$ bir bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzay olmak üzere, her $F \in (2^X)^E$ için $[\tau]_k(F) = \tau_k(\chi_F)$ olarak tanımlanan $[\tau] : K \to I^{(2^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek topolojidir.

Tanım 2.4.12: $\tau, X$ üzerinde bir bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olsun. Bu durumda,
(1) $[\tau]$ ye $\tau$ nun bir bulandırılmış $(E, K)$-esnek altyapı topolojisi adı verilir.
(2) Eğer her $f \in (I^X)^E, k \in K$ için $\tau_k(f) = \bigwedge_{r\in[0,1]} \tau_k\left(\chi_{\sigma_r(f)}\right)$ eşitliği sağlanıyorsa $(X, \tau)$ ikilisine üretilmiş bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzay adı verilir.
(3) Eğer $\tau_k(f) \leq \bigwedge_{r\in[0,1]} \tau_k\left(\chi_{\sigma_r(f)}\right)$ sağlanıyorsa $(X, \tau)$ ikilisine zayıf üretilmiş bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzay adı verilir.

$\omega$ ve üretilmiş bulanık esnek topolojik uzay tanımından biliyoruz ki, $(X, \tau)$ üretilmiş bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzaydır ancak ve ancak $\tau = \omega([\tau])$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2.4.13: $(X, \tau)$ tabakalaşmış bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzaydır ancak ve ancak $\omega([\tau]) \leq \tau$ sağlanır.

İspat: ($\Rightarrow$) $(X, \tau)$ tabakalamış bulanık esnek topolojik uzay olsun. Her $f \in (I^X)^E, k \in K$ için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\tau_k(f) = \tau_k\left(\sqcup_{r\in[0,1]}\widetilde{E^r}\chi_{\sigma_{r(f)}}\right) \geq inf_{r\in[0,1]} min\left\{\tau_k\left(\widetilde{E^r}\right), \tau_k\left(\chi_{\sigma_{r(f)}}\right)\right\}$$

$$= inf_{r\in[0,1]}\tau_k\left(\chi_{\sigma_{r(f)}}\right) = inf_{r\in[0,1]}[\tau]_k\left(\sigma_r(f)\right) = \omega([\tau])_k(f).$$

($\Leftarrow$) $\tilde{E}^r$ sabit bir bulanık esnek küme olmak üzere,

$$\tau_k\left(\tilde{E}^r\right) \geq \omega([\tau])_k\left(\tilde{E}^r\right) = min\left\{inf_{r<\lambda}[\tau]_k\left(\widetilde{E}\right), inf_{r\geq\lambda}[\tau]_k(\Phi)\right\} = 1.$$

Buradan, $(X,\tau)$ tabakalamış bulanık esnek topolojik uzaydır.

Teorem 2.4.14: Eğer $(X,\tau)$ zayıf üretilmiş bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay ise $[\tau] = \iota(\tau)$ dir.

Teorem 2.4.15: $(X,\tau)$ zayıf üretilmiş bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzaydır ancak ve ancak $\omega([\tau]) \geq \tau$ sağlanır.

Teorem 2.4.16: $(X,\tau)$ üretilmiş bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzaydır ancak ve ancak $(X,\tau)$ hem zayıf üretilmiş bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzaydır ve hem de tabakalaşmış bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzaydır.

# 3. BULANIK ESNEK KAPANIŞ VE İÇ UZAYLARI

Bu bölümde, $L$ bir De-Morgan cebiri ve $M$ bir tam latis olmak üzere bulanık esnek kapanış operatörü ile bulanık esnek iç operatörü tanımlanacak ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Sonrasında ise bulanık esnek kapanış (iç) operatörü için başlangıç yapının varlığı araştırılacak ve bulanık esnek kapanış uzayları kategorisinin $\boldsymbol{SET^3}$ üzerine topolojik bir kategori olduğu gösterilecektir.

## 3.1. Bulanık Esnek Kapanış ve İç Operatörleri

Tanım 3.1.1: (a) $\mathcal{C} : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörü denir $:\Leftrightarrow$ Her $k \in K, \alpha \in M_0$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(C1) $\mathcal{C}(k, \Phi, \alpha) = \Phi$.

(C2) $\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsupseteq f$.

(C3) Eğer $f \sqsubseteq g$, ise $\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k, g, \alpha)$.

(C4) Eğer $\alpha \leq \beta$, ise $\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k, g, \beta)$.

(C5) $\mathcal{C}(k, f \sqcup g, \alpha) = \mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqcup \mathcal{C}(k, g, \alpha)$.

$(X, \mathcal{C})$ ikilisine de bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış uzayı adı verilir.

(b) Bir $(X, \mathcal{C})$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış uzayına topolojiktir denir $:\Leftrightarrow$

(C6) Her $k \in K, \alpha \in M_0$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\mathcal{C}(k, \mathcal{C}(k, f, \alpha), \alpha) = \mathcal{C}(k, f, \alpha)$.

Örnek 3.1.2: $\Phi, \tilde{E} \neq g \in (L^X)^E$ keyfi bir bulanık esnek küme olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{C} : \{k_1, k_2\} \times (L^X)^E \times (0,1] \to (L^X)^E$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörüdür. Buna göre

$$\mathcal{C}(k, f, \alpha) = \begin{cases} \phi, & eğer\ f = \Phi, k \in \{k_1, k_2\}, \alpha \in I_0, \\ g, & eğer\ \Phi \neq f \sqsubseteq g, k = k_1, 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \tilde{E}, & diğer. \end{cases}$$

Tanım 3.1.3: $(X_1, \mathcal{C}^1)$ bir $(L, M)$-bulanık $(E_1, K_1)$-esnek kapanış uzayı ve $(X_2, \mathcal{C}^2)$ bir $(L, M)$-bulanık $(E_2, K_2)$-esnek kapanış uzayı olsun. $\varphi : X_1 \to X_2$ , $\psi : E_1 \to E_2$ ve $\eta : K_1 \to K_2$ fonksiyonlar olmak üzere, $(X_1, \mathcal{C}^1)$ den $(X_2, \mathcal{C}^2)$ ye tanımlı $\varphi_{\psi,\eta}$ fonksiyonuna bir bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü denir $:\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1, f \in (L^{X_1})^{E_1}$ ve $\alpha \in M_0$ için $\varphi_\psi\big(\mathcal{C}^1(k, f, \alpha)\big) \sqsubseteq \mathcal{C}^2\big(\eta(k), \varphi_\psi(f), \alpha\big)$ sağlanır.

$(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış uzayları ve bu uzaylar arasında tanımlı $\mathcal{C}$-dönüşümlerin kategorisi $\boldsymbol{FSC}(L, M)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.4: $(X, \tau)$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojik uzay olsun. Her $k \in K, f \in (L^X)^E$ ve $\alpha \in M_0$

$$\mathcal{C}_\tau(k, f, \alpha) = \bigsqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq g, \tau_k(g') \geq \alpha \,\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}_\tau : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü $X$ üzerinde bir topolojik $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörüdür ve eğer $\alpha = \bigvee\{\, \beta \in M_0 \mid \mathcal{C}_\tau(k, f, \beta) = f \,\}$ ise $\mathcal{C}_\tau(k, f, \alpha) = f$ sağlanır.

İspat: Öncelikle, $\mathcal{C}_\tau$ nun $X$ üzerinde topolojik bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörü olduğunu gösterelim. $k \in K$ olsun.

(C1) $\mathcal{C}_\tau(k, \Phi, \alpha) = \bigsqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid \Phi \sqsubseteq g, \tau_k(g') \geq \alpha \,\} = \Phi$.

(C2) $\mathcal{C}_\tau(k, f, \alpha) = \bigsqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq g, \tau_k(g') \geq \alpha \,\} \sqsupseteq f$.

(C3) $f \sqsubseteq g$ olsun. Bu durumda,

$$\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\} \supseteq \{\, h \in (L^X)^E \mid g \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\}.$$

Buradan,

$$\bigsqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\} \sqsubseteq \bigsqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid g \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\}.$$

(C4) $\alpha \leq \beta$ olsun. Bu durumda,

$$\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\} \supseteq \{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \beta \,\}$$

sağlanır. Buradan,

$\sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\} \sqsubseteq \sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \beta \,\}$

sağlandığından, $\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}_\tau(k,f,\beta)$ elde edilir.

(C5) (C3) den her $k \in K$ için

$\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}_\tau(k,f \sqcup g,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}_\tau(k,f \sqcup g,\alpha)$

olduğu açıktır. Böylece,

$\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqcup \mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}_\tau(k,f \sqcup g,\alpha)$

elde edilir.

Tersine, $\mathcal{C}_\tau(k,f \sqcup g,\alpha) = \sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqcup g \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\}$.

$\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqsupseteq f$ ve $\mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha) \sqsupseteq g$ olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir.

$\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqcup \mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha) \sqsupseteq f \sqcup g$ olduğu görülür.

Diğer yandan,

$$\tau_k\left(\left(\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqcup \mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha)\right)'\right) = \tau_k(\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha)' \sqcap \mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha)')$$

$$\geq \tau_k(\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha)') \wedge \tau_k(\mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha)')$$

$$= \tau_k((\sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})')$$

$$\wedge\, \tau_k((\sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq g, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})')$$

$$= \tau_k(\sqcup\{\, h' \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})$$

$$\wedge\, \tau_k(\sqcup\{\, h' \in (L^X)^E \mid g \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})$$

$$\geq (\wedge\{\, \tau_k(h') \mid h \sqsupseteq f, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})$$

$$\wedge\, (\wedge\{\, \tau_k(h') \mid h \sqsupseteq g, \tau_k(h') \geq \alpha \,\}) \geq \alpha \wedge \alpha = \alpha.$$

O halde, $\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqcup \mathcal{C}_\tau(k,g,\alpha) \sqsupseteq \mathcal{C}_\tau(k,f \sqcup g,\alpha)$ elde edilir. Böylece istenilen eşitlik sağlanır.

(C6) (C2) den, $\mathcal{C}_\tau(k,\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha),\alpha) \sqsupseteq \mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha)$ olduğu bilinmektedir. Bunun yanı sıra,

$\mathcal{C}_\tau(k,\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha),\alpha) = \sqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid \mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) \sqsubseteq g, \tau_k(g') \geq \alpha \,\}$ ve

$\tau_k(\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha)') = \tau_k((\sqcap\{\, h \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})')$

$= \tau_k(\sqcup\{\, h' \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq h, \tau_k(h') \geq \alpha \,\})$

$\geq (\wedge\{\, \tau_k(h') \mid h \sqsupseteq f, \tau_k(h') \geq \alpha \,\}) \geq \alpha$

olduğundan, $\mathcal{C}_\tau(k,\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha),\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha)$ elde edilir.

Böylece yukarıdan istenilen eşitlik sağlanır. Sonuç olarak, $\mathcal{C}_\tau$ bulanık esnek kapanış operatörü topolojiktir.

İkinci olarak, teoremin diğer iddiasını ispatlayalım.

$\alpha = \vee\{\, \beta \in M_0 \mid \mathcal{C}_\tau(k,f,\beta) = f \,\}$ olduğunu kabul edelim. Buradan,

$\tau_k(f') = \tau_k(\mathcal{C}_\tau(k,f,\beta)') = \tau_k((\sqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid g \sqsupseteq f, \tau_k(g') \geq \beta \,\})')$

$= \tau_k(\sqcup\{\, g' \in (L^X)^E \mid g \sqsupseteq f, \tau_k(g') \geq \beta \,\})$

$\geq (\wedge\{\, \tau_k(g') \mid g \sqsupseteq f, \tau_k(g') \geq \beta \,\}) \geq \beta$

ise $\mathcal{C}_\tau(k,f,\beta) = f$ koşulunu sağlayan her $\beta \in M_0$ için $\tau_k(f') \geq \beta$ olduğundan $\tau_k(f') \geq \alpha$ sağlanır. O halde, aşağıdaki sonuca ulaşılır

$\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha) = \sqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid f \sqsubseteq g, \tau_k(g') \geq \alpha \,\} = f.$

Teorem 3.1.5: $\mathcal{C}$, $X$ üzerine bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörü olsun. $X$ üzerinde her $k \in K$ için

$(\tau_{\mathcal{C}})_k(f) = \vee\{\, \alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}(k,f',\alpha) = f' \,\}$

Olarak tanımlanan $\tau_{\mathcal{C}} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü içim aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\tau_{\mathcal{C}}$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojidir.

(2) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ eşitliği sağlanır ancak ve ancak $\mathcal{C}$ dönüşümü aşağıdaki iki koşulu sağlar:

(i) $\mathcal{C}$ operatörü topolojiktir.
(ii) Her $k \in K$ için, $\alpha = \bigvee\{ \beta \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f, \beta) = f \}$ ise $\mathcal{C}(k, f, \alpha) = f$ dir.

İspat: (1) (O1) Her $\alpha \in M_0$ için $\mathcal{C}(k, \Phi', \alpha) = \Phi'$ ve $\mathcal{C}\left(k, \tilde{E}', \alpha\right) = \tilde{E}'$ olduğundan $(\tau_{\mathcal{C}})_k(\Phi) = 1_M$ ve $(\tau_{\mathcal{C}})_k\left(\tilde{E}\right) = 1_M$ dir.

(O2) $(\tau_{\mathcal{C}})_k(f \sqcap g) \not\geq (\tau_{\mathcal{C}})_k(f) \wedge (\tau_{\mathcal{C}})_k(g)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $f, g \in (L^X)^E$ ve $k \in K$ olduğunu kabul edelim. $(\tau_{\mathcal{C}})_k(f)$ ve $(\tau_{\mathcal{C}})_k(g)$ nin tanımından $\mathcal{C}(k, f', \alpha) = f'$ ve $\mathcal{C}(k, g', \beta) = g'$ olacak şekilde en az bir $\alpha, \beta \in M_0$ vardır öyle ki $(\tau_{\mathcal{C}})_k(f \sqcap g) \not\geq \alpha \wedge \beta$ sağlanır. (C5) den,

$$\mathcal{C}(k, (f \sqcap g)', \alpha \wedge \beta) = \mathcal{C}(k, f' \sqcup g', \alpha \wedge \beta)$$

$$= \mathcal{C}(k, f', \alpha \wedge \beta) \sqcup \mathcal{C}(k, g', \alpha \wedge \beta)$$

$$\sqsubseteq \mathcal{C}(k, f', \alpha) \sqcup \mathcal{C}(k, g', \beta) = f' \sqcup g'$$

olduğu açıktır.

(C2) den, $\mathcal{C}(k, (f \sqcap g)', \alpha \wedge \beta) \sqsupseteq (f \sqcap g)' = f' \sqcup g'$ dir.

O halde, $\mathcal{C}(k, (f \sqcap g)', \alpha \wedge \beta) = f' \sqcup g'$ sağlanır.

Bu durumda, $(\tau_{\mathcal{C}})_k(f \sqcap g) = \bigvee\{ \alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, (f \sqcap g)', \alpha) = (f \sqcap g)' \} \geq \alpha \wedge \beta$.

Bu ise varsayım ile çelişir.

(O3) Her $k \in K$ için, $S_k \coloneqq \left\{\alpha \in M_0 \;\middle|\; \mathcal{C}\left(k, \left(\bigsqcup_{i \in \Delta} f_i\right)', \alpha\right) = \left(\bigsqcup_{i \in \Delta} f_i\right)'\right\}$ ve

$R_k \coloneqq \{\alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f_i', \alpha) = f_i', her\ i \in \Delta\}$ olarak tanımlansın.

$\bigwedge_{i \in \Delta} (\tau_{\mathcal{C}})_k(f_i) = \bigwedge_{i \in \Delta} \bigvee\{\alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f_i', \alpha) = f_i'\} = t$ olsun. Buradan,

$t \leq \bigvee_{m \in F} \bigwedge_{i \in \Delta} \{m(i) \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f_i', m(i)) = f_i'\} = t_1$ dir.

(Burada F ilgili seçme fonksiyonlarının kümesidir.) Buna göre,

$t_1 \leq \bigvee\{\alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f_i', \alpha) = f_i', her\ i \in \Delta\} = \bigvee R_k$

sağlanır.

Eğer, $\alpha \in R_k$ ise her $i \in \Delta$ ve $k \in K$ için, $\mathcal{C}(k, f_i', m(i)) = f_i'$ sağlanır.

Buradan, her $i \in \Delta$ için $\mathcal{C}\left(k, \left(\bigsqcup_{i\in\Delta} f_i\right)', \alpha\right) \sqsubseteq \mathcal{C}(k, f_i', \alpha) = f_i'$ dir. O halde,

$\mathcal{C}\left(k, \left(\bigsqcup_{i\in\Delta} f_i\right)', \alpha\right) \sqsubseteq \prod_{i\in\Delta} f_i'$

bulunur. Ayrıca (C2) den, $\mathcal{C}\left(k, \left(\bigsqcup_{i\in\Delta} f_i\right)', \alpha\right) = \left(\bigsqcup_{i\in\Delta} f_i\right)'$ dir. $R_k \subset S_k, \alpha \in S_k$ olduğundan, $(\tau_{\mathcal{C}})_k\left(\bigsqcup_{i\in\Delta} f_i\right) \geq \bigwedge_{i\in\Delta}(\tau_{\mathcal{C}})_k(f_i)$ elde edilir.

(2) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ olduğunu kabul edelim.

(i) $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(k, \mathcal{C}(k, f, \alpha), \alpha) = \prod\{g \mid g \sqsupseteq \mathcal{C}(k, f, \alpha), (\tau_{\mathcal{C}})_k(g') \geq \alpha\}$ dir.

$(\tau_{\mathcal{C}})_k(\mathcal{C}(k, f, \alpha)') = (\tau_{\mathcal{C}})_k((\prod\{h \mid h \sqsupseteq f, (\tau_{\mathcal{C}})_k(h') \geq \alpha\})')$

$= (\tau_{\mathcal{C}})_k(\bigsqcup\{h' \mid h \sqsupseteq f, (\tau_{\mathcal{C}})_k(h') \geq \alpha\})$

$\geq \bigwedge\{(\tau_{\mathcal{C}})_k(h') \mid h \sqsupseteq f, (\tau_{\mathcal{C}})_k(h') \geq \alpha\} \geq \alpha$

sağlanır. Buradan, her $k \in K, \alpha \in M_0$ için

$\mathcal{C}(k, f, \alpha) = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(k, \mathcal{C}(k, f, \alpha), \alpha) = \mathcal{C}(k, \mathcal{C}(k, f, \alpha), \alpha)$ elde edilir. Böylece $\mathcal{C}$ topolojiktir.

(ii) Her $k \in K$ için, $\alpha = \bigvee\{\beta \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f, \beta) = f\}$ olsun.

$(\tau_{\mathcal{C}})_k(f') = \bigvee\{\beta \in M_0 \mid \mathcal{C}(k, f, \beta) = f\}$

olduğundan hipotezden $\mathcal{C}(k, f, \alpha) = \mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(k, f, \alpha) = f$ sağlanır.

Tersine (i) ve (ii) sağlansın. (C2) den her $k \in K$ için $\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsupseteq f$ olduğu açıktır. $\mathcal{C}$ topolojik olduğundan, $(\tau_{\mathcal{C}})_k(\mathcal{C}(k, f, \alpha)') \geq \alpha$ dir. O halde, $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}$ nin tanımından $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(k, f, \alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k, f, \alpha)$ olduğu görülür.

Şimdi ise her $k \in K$ için $\mathcal{C}_{\tau_{\mathcal{C}}}(k,f,\alpha) \sqsupseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ olduğunu gösterelim. Bu eşitsizliğin ispatı için $g \sqsupseteq f$ ve $(\tau_{\mathcal{C}})_k(g') \geq \alpha$ koşullarını sağlayan her $k \in K$ ve $g \in (L^X)^E$ için $\mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq g$ olduğunu göstermek yeterlidir. (ii) koşulundan, $\mathcal{C}\big(k,g,(\tau_{\mathcal{C}})_k(g')\big) = g$ dir. (C4) den ve $(\tau_{\mathcal{C}})_k(g') \geq \alpha$ olduğundan

$$g = \mathcal{C}(k,g,(\tau_{\mathcal{C}})_k(g')) \sqsupseteq \mathcal{C}(k,g,\alpha) \sqsupseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.6: $\tau$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji ve $\mathcal{C}$ ise bu topoloji yardımıyla Teorem 3.1.4 deki şekilde oluşturulan $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörü olsun. Bu durumda, $X$ üzerindeki $\tau_{\mathcal{C}}$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojisi için $\tau = \tau_{\mathcal{C}}$ eşitliği sağlanır.

İspat: $k \in K$, $f \in (L^X)^E$ ve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\tau$ olsun.

$\big(\tau_{\mathcal{C}_\tau}\big)_k(f) = \bigvee\{\, \alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}_\tau(k,f',\alpha) = f' \,\}$ olduğundan,

$f' = \mathcal{C}_\tau(k,f',\alpha) = \bigsqcap\{\, g \in (L^X)^E \mid g \sqsupseteq f', \tau_k(g') \geq \alpha \,\}$ ancak ve ancak $\tau_k(f) \geq \alpha$ dir. Bu durumda,

$\big(\tau_{\mathcal{C}_\tau}\big)_k(f) = \bigvee\{\, \alpha \in M_0 \mid \tau_k(f) \geq \alpha \,\} = \tau_k(f)$ elde edilir.

Teorem 3.1.7: $(X,\tau)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay olmak üzere,

$$\mathcal{I}_\tau(k,f,\alpha) = \bigsqcup\{\, g \in (L^X)^E \mid g \sqsubseteq f \; ve \; \tau_k(g) \geq \alpha \,\}$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{I}_\tau : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\mathcal{I}_\tau(k,f',\alpha) = (\mathcal{C}_\tau(k,f,\alpha))'$.

(2) Her $k \in K, f,g \in (L^X)^E$ ve $\alpha,\beta \in M_0$ için $\mathcal{I}_\tau$ aşağıdaki özellikleri gerçekler:

(I1) $\mathcal{I}_\tau\big(k,\tilde{E},\alpha\big) = \tilde{E}$.

(I2) $\mathcal{I}_\tau(k,f,\alpha) \sqsubseteq f$.

(I3) Eğer $f \sqsubseteq g$ ve $\alpha \leq \beta$ ise $\mathcal{I}_\tau(k,f,\beta) \sqsubseteq \mathcal{I}_\tau(k,g,\alpha)$.

(I4) $\mathcal{I}_\tau(k,f \sqcap g,\alpha) = \mathcal{I}_\tau(k,f,\alpha) \sqcap \mathcal{I}_\tau(k,g,\alpha)$.

(I5) $\mathcal{I}_\tau(k,\mathcal{I}_\tau(k,f,\alpha),\alpha) = \mathcal{I}_\tau(k,f,\alpha)$.

Yukarıdaki (I1)-(I4) özelliklerini sağlayan $\mathcal{I}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek iç operatörü denir. $(X,\mathcal{I})$ ikilisine de bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek iç uzayı adı verilir. Ayrıca (I5) koşulunu da sağlayan bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek iç operatörüne topolojiktir denir.

Her $k \in K, \tilde{E}^{\lambda} \in (L^X)^E$ ve $\alpha \in M_0$ için

$\mathcal{I}(k,\tilde{E}^{\lambda},\alpha) \sqsupseteq \tilde{E}^{\lambda}$

özelliğini sağlayan bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek iç operatörüne zayıf tabakalaşmış denir.

Tanım 3.1.8: $(X_1,\mathcal{I}^1)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek iç uzayı ve $(X_2,\mathcal{I}^2)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek iç uzayı olsun. $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1,\mathcal{I}^1) \to (X_2,\mathcal{I}^2)$ fonksiyonuna bir bulanık esnek $\mathcal{I}$-dönüşümü denir $:\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1, g \in (L^{X_2})^{E_2}$ ve $\alpha \in M_0$ için $\varphi_{\psi}^{-1}\big(\mathcal{I}^2(\eta(k),g,\alpha)\big) \sqsubseteq \mathcal{I}^1(k,\varphi_{\psi}^{-1}(g),\alpha)$ sağlanır.

Teorem 3.1.9: (1) $(X_1,\tau^1)$ ve $(X_2,\tau^2)$, sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek topolojik uzay ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\tau^1) \to (X_2,\tau^2)$ bulanık esnek sürekli ise, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\mathcal{C}_{\tau^1}) \to (X_2,\mathcal{C}_{\tau^2})$ bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür.

(2) $(X_1,\tau^1)$ ve $(X_2,\tau^2)$, sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek topolojik uzay ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\tau^1) \to (X_2,\tau^2)$ bulanık esnek sürekli ise, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\mathcal{I}_{\tau^1}) \to (X_2,\mathcal{I}_{\tau^2})$ bir bulanık esnek $\mathcal{I}$-dönüşümüdür.

(3) $(X_1,\mathcal{C}^1)$ ve $(X_2,\mathcal{C}^2)$, sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek kapanış uzayı ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek kapanış uzayı olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\mathcal{C}^1) \to (X_2,\mathcal{C}^2)$ bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü ise, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\tau_{\mathcal{C}^1}) \to (X_2,\tau_{\mathcal{C}^2})$ bulanık esnek süreklidir.

İspat: (1) $\varphi_{\psi,\eta}$ bulanık esnek sürekli fonksiyon, $k \in K_1, \alpha \in M_0$ ve $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ olsun. Bu takdirde,

$$\varphi_\psi{}^{-1}\left(\left(\mathcal{C}_{\tau^2}(\eta(k),g',\alpha)\right)'\right)=\varphi_\psi{}^{-1}\left(\left(\sqcap\{h\in(L^{X_2})^{E_2}\mid h\sqsupseteq g',\tau^2_{\eta(k)}(h')\geq\alpha\ \}\right)'\right)$$

$$=\varphi_\psi{}^{-1}\left(\sqcup\{h'\in(L^{X_2})^{E_2}\mid h\sqsupseteq g',\tau^2_{\eta(k)}(h')\geq\alpha\}\right)$$

$$=\sqcup\{\varphi_\psi{}^{-1}(h')\mid h\sqsupseteq g',\tau^2_{\eta(k)}(h')\geq\alpha\}$$

$$\sqsubseteq\sqcup\left\{\varphi_\psi{}^{-1}(h')\middle|\varphi_\psi{}^{-1}(h)\sqsupseteq\varphi_\psi{}^{-1}(g'),\tau^1_k\left(\varphi_\psi{}^{-1}(h')\right)\geq\alpha\right\}$$

$$\sqsubseteq\sqcup\{f'\mid f\sqsupseteq\varphi_\psi{}^{-1}(g'),\tau^1_k(f')\geq\alpha\}$$

$$=\left(\sqcap\{f\mid f\sqsupseteq\varphi_\psi{}^{-1}(g'),\tau^1_k(f')\geq\alpha\}\right)'$$

ifadesinin sağlandığı açıktır. Buradan

$$\varphi_\psi{}^{-1}\left(\mathcal{C}_{\tau^2}\left(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\right)\right)=\varphi_\psi{}^{-1}\left(\left(\left(\mathcal{C}_{\tau^2}\left(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\right)^c\right)^c\right)\right.$$

$$\left.\sqsupseteq\left(\mathcal{C}_{\tau^1}\left(k,\varphi_\psi^{-1}\left(\varphi_\psi(f)\right),\alpha\right)^c\right)^c\ \sqsupseteq\ \mathcal{C}_{\tau^1}(k,f,\alpha)\right.$$

bulunur. Böylece, istenilen sonuç aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varphi_\psi\left(\mathcal{C}_{\tau^1}(k,f,\alpha)\right)\sqsubseteq\varphi_\psi\left(\varphi_\psi{}^{-1}\left(\mathcal{C}_{\tau^2}\left(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\right)\right)\right)\sqsubseteq\mathcal{C}_{\tau^2}\left(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\right).$$

(2) $\varphi_{\psi,\eta}$ bulanık esnek sürekli fonksiyon, $k\in K_1,\alpha\in M_0$ ve $g\in(L^{X_2})^{E_2}$ olsun. Tanımdan aşağıdaki ifadenin sağlandığı açıktır:

$$\varphi_\psi{}^{-1}\left(\mathcal{I}_{\tau^2}(\eta(k),g,\alpha)\right)=\varphi_\psi{}^{-1}\left(\sqcup\{h\in(L^{X_2})^{E_2}\mid h\sqsubseteq g,\tau^2_{\eta(k)}(h)\geq\alpha\ \}\right)$$

$$\sqsubseteq\varphi_\psi{}^{-1}\left(\sqcup\left\{\ h\in(L^{X_2})^{E_2}\ \middle|\ \varphi_\psi{}^{-1}(h)\sqsubseteq\varphi_\psi{}^{-1}(g),\tau^1_k\left(\varphi_\psi{}^{-1}(h)\right)\geq\alpha\ \right\}\right)$$

$$\sqsubseteq\sqcup\{\ f\mid f\sqsubseteq\varphi_\psi{}^{-1}(g),\tau^1_k(f)\geq\alpha\ \}=\mathcal{I}_{\tau^1}\left(k,\varphi_\psi{}^{-1}(g),\alpha\ \right).$$

(3) $\varphi_{\psi,\eta}$ bir bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü olduğundan,

$\varphi_\psi\left(\mathcal{C}^1(k,f,\alpha)\right)\sqsubseteq\mathcal{C}^2(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha)$ sağlanır. Bu durumda her $k\in K_1$ için

$$\mathcal{C}^1(k,f,\alpha)\sqsubseteq\varphi_\psi{}^{-1}\left(\varphi_\psi\left(\mathcal{C}^1(k,f,\alpha)\right)\right)\sqsubseteq\varphi_\psi{}^{-1}\left(\mathcal{C}^2\left(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\right)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Her $k \in K$ için $R_k$ ve $S_k$ gibi aşağıdaki şekilde iki küme tanımlayalım:

$R_k \coloneqq \{\, \alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}^2(\eta(k), g', \alpha) = g' \,\}$,
$S_k \coloneqq \{\alpha \in M_0 \mid \mathcal{C}^1\big(k, \varphi_\psi^{-1}(g)', \alpha\big) = \varphi_\psi^{-1}(g)' \,\}$.

$\alpha \in R_k$ için $\mathcal{C}^2(\eta(k), g', \alpha) = g'$ olduğundan

$\varphi_\psi^{-1}\big(\mathcal{C}^2(\eta(k), g', \alpha)\big) = \varphi_\psi^{-1}(g)'$ dir. O halde,

$$\varphi_\psi^{-1}(g)' = \varphi_\psi^{-1}\big(\mathcal{C}^2(\eta(k), g', \alpha)\big) \sqsupseteq \varphi_\psi^{-1}\big(\mathcal{C}^2\big(\eta(k), \varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g')), \alpha\big)\big)$$

$$\sqsupseteq \mathcal{C}^1\big(k, \varphi_\psi^{-1}(g)', \alpha\big)$$

sağlanır. Buradan ve (C2) den, $\varphi_\psi^{-1}(g)' = \mathcal{C}^1\big(k, \varphi_\psi^{-1}(g)', \alpha\big)$ eşitliği elde edilir. Böylece, $\alpha \in S_k$, yani $R_k \subset S_k$ elde edilir. O halde her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için, $(\tau_{\mathcal{C}^2})_{\eta(k)}(g) \leq (\tau_{\mathcal{C}^1})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)$ elde edilir. Sonuç olarak, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \tau_{\mathcal{C}^1}) \to (X_2, \tau_{\mathcal{C}^2})$ bulanık esnek süreklidir.

Sonuç 3.1.10: (1) $U\big((X,\tau)\big) = (X, \mathcal{C}_\tau)$ ve $U\big(\varphi_{\psi,\eta}\big) = \varphi_{\psi,\eta}$ olarak tanımlanan $U: \boldsymbol{FSTOP}(L,M) \to \boldsymbol{FSC}(L,M)$ dönüşümü bir gömme funktorudur, yani bulanık esnek kapanış operatörleri bulanık esnek topolojinin bir genişlemesidir.

(2) $V\big((X,\mathcal{C})\big) = (X, \tau_{\mathcal{C}})$ ve $U\big(\varphi_{\psi,\eta}\big) = \varphi_{\psi,\eta}$ olarak tanımlanan $V: \boldsymbol{FSC}(L,M) \to \boldsymbol{FSTOP}(L,M)$ dönüşümü bir funktorudur.

(3) $V \circ U = id_{\boldsymbol{FSTOP}(L,M)}$.

(4) $\boldsymbol{FSTC}(L,M)$ nesneleri Teorem 3.1.5 (i), (ii) koşullarını sağlayan $\boldsymbol{FSC}(L,M)$ kategorisinin bütünüyle alt kategorisini göstersin. Eğer sırasıyla $U$ ve $V$ funktorları kısıtlanırsa, $U \circ V = id_{\boldsymbol{FSTC}(L,M)}$ sağlandığı görülür.

## 3.2. Başlangıç Bulanık Esnek Kapanış ve İç Operatörleri

Bu kısımda, verilen bir bulanık esnek kapanış (iç) uzayı ailesi için başlangıç yapının varlığı araştırılarak bulanık esnek kapanış (iç) uzaylarının çarpımı tanımlanacaktır. Buna ek olarak, bulanık esnek kapanış uzaylar kategorisinin $\boldsymbol{SET^3}$ kategorisi üzerine unutkan funktora göre topolojik bir kategori olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.1: $X$ klasik bir küme, $\{(X_i, \mathcal{C}^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i,K_i)$-esnek kapanış uzaylarının bir ailesi, ve $E,K$ ise parametre kümeleri olsun. Her $i \in \Gamma$ $(\Gamma \neq \emptyset)$ için $\varphi_i : X \to X_i$ , $\psi_i : E \to E_i$ , $\eta_i : K \to K_i$ fonksiyonlar olsunlar. $\Gamma$ nın her sonlu $P = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ alt kümesi için $\mathcal{C} : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü,

$$\mathcal{C}(k,f,\alpha) = \bigsqcap \left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( \mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha\right)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\mathcal{C}$ operatörü her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i$ fonksiyonlarını bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü yapan $X$ üzerindeki en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörüdür.

(2) Eğer $\{(X_i, \mathcal{C}^i)\}_{i\in\Gamma}$ topolojik $(L,M)$-bulanık $(E_i,K_i)$-esnek kapanış uzaylarının bir ailesi ise $(X,\mathcal{C})$ de bir topolojik $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış uzayıdır.

(3) $\varphi_{\psi,\eta} : (Y,\mathcal{C}') \to (X,\mathcal{C})$ bulanık esnek fonksiyonu bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür ancak ve ancak her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y,\mathcal{C}') \to (X_i,\mathcal{C}^i)$ bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür.

İspat: (1) Öncelikle $\mathcal{C}$ nin $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörü olduğunu gösterelim.

(C1) $\mathcal{C}(k,\Phi_X,\alpha) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}\left(\mathcal{C}\hat{\imath}\,(\eta_i(k),\Phi_X,\alpha)\right) = \Phi_X$ olduğundan her $k \in K$ için $\mathcal{C}(k,\Phi_X,\alpha) = \Phi_X$ dir.

(C2) $\Gamma$ nın her sonlu $P = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ alt kümesi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\mathcal{C}(k,f,\alpha)=\sqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right)\right)\ \middle|\ f\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\sqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\ \middle|\ f\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}\sqsupseteq f.$$

(C3) ve (C4) koşullarının ispatı $\mathcal{C}$ nin tanımından açıktır.

(C5) $f\sqsubseteq\sqcup_{i=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{r_i}^{-1}\left(f_{r_i}\right)$ ve $g\sqsubseteq\sqcup_{i=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{-1}\left(g_{j_i}\right)$ olacak şekildeki $\Gamma$ nın sonlu her $P=\{r_1,\dots,r_p\}$ ve $J=\{j_1,\dots,j_q\}$ alt kümeleri için

$$f\sqcup g\sqsubseteq\left(\sqcup_{i=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{r_i}^{-1}\left(f_{r_i}\right)\right)\sqcup\left(\sqcup_{i=1}^{p}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{-1}\left(g_{j_i}\right)\right)\ \text{dir.}$$

Ayrıca, her $r\in P\cap J$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(f_r\right)\sqcup\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(g_r\right)=\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(f_r\sqcup g_r\right).$$

$$\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(\mathcal{C}^{r}(\eta_r(k),f_r\sqcup g_r,\alpha)\right)=\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(\mathcal{C}^{r}(\eta_r(k),f_r,\alpha)\right)\sqcup\left(\varphi_{\psi}\right)_{r}^{-1}\left(\mathcal{C}^{r}(\eta_r(k),g_r,\alpha)\right)$$

$R=P\cup J=\{n_1,\dots,n_s\}$ için $h_{n_i}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$h_{n_i}=\begin{cases}f_{n_i}\sqcup\Phi, n_i\in P-(P\cap J);\\ g_{n_i}\sqcup\Phi, n_i\in J-(P\cap J);\\ f_{n_i}\sqcup g_{n_i}, \qquad n_i\in P\cap J.\end{cases}$$

Eğer $n_i\in P-(P\cap J)$ ise,

$$\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),f_{n_i},\alpha\right)\right)=\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),f_{n_i},\alpha\right)\right)\sqcup\Phi$$

$$=\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),f_{n_i},\alpha\right)\right)$$

$$\sqcup\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),\Phi,\alpha\right)\right)$$

$$=\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),f_{n_i}\sqcup\Phi,\alpha\right)\right)$$

$$=\left(\varphi_{\psi}\right)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}\left(\eta_{n_i}(k),h_{n_i},\alpha\right)\right).$$

Benzer şekilde eğer $n_i \in J - (P \cap J)$ ise,

$(\varphi_\psi)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}(\eta_{n_i}(k), g_{n_i}, \alpha)\right) = (\varphi_\psi)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}(\eta_{n_i}(k), h_{n_i}, \alpha)\right)$ dir.

Buradan,

$$\left(\sqcap\left\{ \sqcup_{i=1}^{p} (\varphi_\psi)_{r_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{r_i}(\eta_{r_i}(k), f_{r_i}, \alpha)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^{p} (\varphi_\psi)_{r_i}^{-1}(f_{r_i}) \right\}\right)$$

$$\sqcup \left(\sqcap\left\{ \sqcup_{i=1}^{q} (\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{j_i}(\eta_{j_i}(k), g_{j_i}, \alpha)\right) \;\middle|\; g \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^{q} (\varphi_\psi)_{j_i}^{-1}(g_{j_i}) \right\}\right)$$

$$= \sqcap\left\{ \sqcup_{i=1}^{s} (\varphi_\psi)_{n_i}^{-1}\left(\mathcal{C}^{n_i}(\eta_{n_i}(k), h_{n_i}, \alpha)\right) \;\middle|\; f \sqcup g \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^{s} (\varphi_\psi)_{n_i}^{-1}(h_{n_i}) \right\}$$

$$= \mathcal{C}(k, f \sqcup g, \alpha).$$

Böylece, $\mathcal{C}(k, f \sqcup g, \alpha) = \mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqcup \mathcal{C}(k, g, \alpha)$ elde edilir.

Her $f \in (L^X)^E$ ve $i \in \Gamma$ için $f \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}\left((\varphi_\psi)_i(f)\right)$ sağlandığından,

$\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}\left(\mathcal{C}^i\left(\eta_i(k), (\varphi_\psi)_i(f), \alpha\right)\right)$ olduğu açıktır.

Buradan, her $i \in \Gamma$ için

$$(\varphi_\psi)_i(\mathcal{C}(k, f, \alpha)) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i\left((\varphi_\psi)_i^{-1}\left(\mathcal{C}^i\left(\eta_i(k), (\varphi_\psi)_i(f), \alpha\right)\right)\right)$$

$$\sqsubseteq \mathcal{C}^i\left(\eta_i(k), (\varphi_\psi)_i(f), \alpha\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak, her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i : (X, \mathcal{C}) \to (X_i, \mathcal{C}^i)$ bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür.

$\mathcal{C}'$, $X$ üzerinde başka bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörü olmak üzere,

$(\varphi_\psi)_i(\mathcal{C}'(k, f, \alpha)) \sqsubseteq \mathcal{C}^i\left(\eta_i(k), (\varphi_\psi)_i(f), \alpha\right)$ sağlansın. Bu durumda

$\mathcal{C}'(k,f,\alpha) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}((\varphi_\psi)_i(\mathcal{C}'(k,f,\alpha))) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}\left(\mathcal{C}^i\left(\eta_i(k),(\varphi_\psi)_i(f),\alpha\right)\right)$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak $\Gamma$ nın her sonlu $P=\{i_1,\dots,i_p\}$ alt kümesi için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\mathcal{C}(k,f,\alpha) = \sqcap\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

$$\sqsupseteq \sqcap\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),(\varphi_\psi)_{i_j}\left((\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right),\alpha\right)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

$$\sqsupseteq \sqcap\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} \mathcal{C}'\left(k,(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right),\alpha\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

$$\sqsupseteq \sqcap\left\{ \mathcal{C}'\left(k,\sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right),\alpha\right) \middle| f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\} \sqsupseteq \mathcal{C}'(k,f,\alpha).$$

(2) Her $f \in (L^X)^E, k \in K$ ve $\alpha \in M_0$ için $\mathcal{C}(k,\mathcal{C}(k,f,\alpha),\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ olduğunu gösterelim. $\Gamma$ nın sonlu her $P=\{i_1,\dots,i_p\}$ alt kümesi için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\mathcal{C}(k,f,\alpha) = \prod\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

$$= \prod\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right),\alpha\right)\right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

$$\sqsupseteq \prod\left\{ \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right),\alpha\right)\right) \;\middle|\; \mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right)\right) \right\}.$$

(Burada $\mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k),f_{i_j},\alpha\right)\right)$ ifadesi $f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{p} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)$ içermesinden açıktır.)

Sonuç olarak, $\mathcal{C}(k,\mathcal{C}(k,f,\alpha),\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ içermesi sağlanır.

(3) Bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümlerin bileşkesinin yine bir bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü olduğu açıktır.

Tersine, $(\varphi_{\psi,\eta})_i \circ \varphi_{\psi,\eta}$ bileşkesi bir bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşüm olsun. Bu durumda her $f \in (L^X)^E$ için

$$(\varphi_\psi)_i\left(\varphi_\psi\left(\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi^{-1}(f),\alpha\right)\right)\right) \sqsubseteq \mathcal{C}^i\left((\eta_i\circ\eta)(k'),(\varphi_\psi)_i\left(\varphi_\psi^{-1}(f)\right),\alpha\right)$$

$$\sqsubseteq \mathcal{C}^i\left((\eta_i\circ\eta)(k'),(\varphi_\psi)_i(f),\alpha\right)$$

sağlanır. Buradan her $i\in\Gamma$ için

$$\varphi_\psi\left(\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi^{-1}(f),\alpha\right)\right) \sqsubseteq (\varphi_\psi)_i^{-1}\left(\mathcal{C}^i\left((\eta_i\circ\eta)(k'),(\varphi_\psi)_i(f),\alpha\right)\right) \text{ dir.}$$

O halde, $\Gamma$ nın sonlu her $P=\{i_1,\dots,i_p\}$ alt kümesi için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$\mathcal{C}\left(\eta(k'),\varphi_\psi(g),\alpha\right)=\bigsqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(\eta(k')),f_{i_j},\alpha\right)\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\bigsqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(\eta(k')),(\varphi_\psi)_{i_j}\left((\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right),\alpha\right)\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\bigsqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}\varphi_\psi\left(\mathcal{C}'\left(k',(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}(f_{i_j}),\alpha\right)\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

Buradan,

$$\varphi_\psi^{-1}\left(\mathcal{C}\left(\eta(k'),\varphi_\psi(g),\alpha\right)\right)$$

$$\sqsupseteq\bigsqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}\varphi_\psi{}^{-1}\left(\varphi_\psi\left(\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi{}^{-1}\left((\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right),\alpha\right)\right)\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\bigsqcap\left\{\ \sqcup_{j=1}^{p}\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi{}^{-1}\left((\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right),\alpha\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\bigsqcap\left\{\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi{}^{-1}\left(\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right),\alpha\right)\ \middle|\ \varphi_\psi(g)\sqsubseteq\sqcup_{j=1}^{p}(\varphi_\psi)_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}\right)\right\}$$

$$\sqsupseteq\mathcal{C}'\left(k',\varphi_\psi{}^{-1}\left(\varphi_\psi(g)\right),\alpha\right)\sqsupseteq\mathcal{C}'(k',g,\alpha)$$

elde edilir. Sonuç olarak her $k'\in K', g\in(L^Y)^{E'}$ ve $\alpha\in M_0$ için,

$$\varphi_\psi\left(\mathcal{C}'(k',g,\alpha)\right)\sqsubseteq\varphi_\psi\left(\varphi_\psi{}^{-1}\left(\mathcal{C}\left(\eta(k'),\varphi_\psi(g),\alpha\right)\right)\right)\sqsubseteq\mathcal{C}\left(\eta(k'),\varphi_\psi(g),\alpha\right)$$

elde edilir. Böylece $\varphi_{\psi,\eta}$ bir bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür.

Sonuç 3.2.2: $\{(X_i, \mathcal{C}^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek kapanış uzaylarının bir ailesi, $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ , $E = \prod_{i\in\Gamma} E_i$ ve $K = \prod_{i\in\Gamma} K_i$ çarpım kümeleri olsun. Her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \to X_i$ , $q_i : E \to E_i$ ve $r_i : K \to K_i$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere, $\Gamma$ nın her sonlu $N = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ alt kümesi için

$$\mathcal{C}(k, f, \alpha) = \prod \left\{ \sqcup_{j=1}^{n} (p_q)_{i_j}^{-1} \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( r_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{n} (p_q)_{i_j}^{-1} \left( f_{i_j} \right) \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C} : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\mathcal{C}$ operatörü her $i \in \Gamma$ için $(p_{q,r})_i$ izdüşüm fonksiyonlarını bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümü yapan $X$ üzerindeki en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörüdür.

(2) $\varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{C}') \to (X, \mathcal{C})$ bulanık esnek fonksiyonu bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür ancak ve ancak her $i \in \Gamma$ için $(p_{q,r})_i \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{C}') \to (X_i, \mathcal{C}^i)$ bulanık esnek $\mathcal{C}$-dönüşümüdür.

Tanım 3.2.3: $X = \prod_{i\in\Gamma} X_i$ , $E = \prod_{i\in\Gamma} E_i$ ve $K = \prod_{i\in\Gamma} K_i$ kartezyen çarpım kümeleri, $\{(X_i, \mathcal{C}^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek kapanış uzaylarının bir ailesi ve her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \to X_i$ , $q_i : E \to E_i$ ve $r_i : K \to K_i$ izdüşüm fonksiyonları olsun. Sonuç 3.2.2. deki şekilde oluşturulan $\mathcal{C}$ dönüşümüne çarpım bulanık esnek kapanış operatörü ve $(X, \mathcal{C})$ ikilisine de $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek kapanış uzaylarının çarpımı adı verilir.

Teorem 3.2.4: $\boldsymbol{FSC}(L,M)$ kategorisi $W(X, \mathcal{C}) = (X, E, K)$ ve $W(\varphi_{\psi,\eta}) = (\varphi, \psi, \eta)$ olarak tanımlanan $W: \boldsymbol{FSC}(L,M) \to \boldsymbol{SET^3}$ unutkan funktoruna göre $\boldsymbol{SET^3}$ kategorisi üzerinde topolojik bir kategoridir.

İspat: Teorem 3.2.1, Tanım 1.2.18, Önerme 1.2.27 ve Tanım 1.2.28 den açıktır.

Teorem 3.2.5: $\{(X_i, \tau^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek topolojik uzayların bir ailesi, $X$ klasik bir küme, $E, K$ parametre kümeleri ve her $i \in \Gamma$ $(\Gamma \neq \emptyset)$ için $\varphi_i : X \to X_i$ , $\psi_i : E \to E_i$ , $\eta_i : K \to K_i$ fonksiyonlar olsunlar. $\mathcal{C}^i$ Teorem 3.1.4 deki

şekilde tanımlanan operatörler yani, $\mathcal{C}^i = \mathcal{C}_{\tau^i}$ olmak üzere, her sonlu $J = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Gamma$ için $\mathcal{C} : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü,

$$\mathcal{C}(k, f, \alpha) = \sqcap \left\{ \sqcup_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right) \;\middle|\; f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( f_{i_j} \right) \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, $\tau_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ yardımıyla üretilen $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji ve $\tau_{\mathcal{B}}$ ise Teorem 2.1.11 deki şekilde oluşturulan $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olmak üzere, $\tau_{\mathcal{C}} = \tau_{\mathcal{B}}$ eşitliği sağlanır. (Burada, $\mathcal{B}$ Teorem 2.1.13 deki şekilde elde edilen $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek tabandır.)

İspat: Varsayalım ki, $(\tau_{\mathcal{B}})_k(f) \not\geq (\tau_{\mathcal{C}})_k(f)$ olacak şekilde en az bir $f \in (L^X)^E$ ve $k \in K$ mevcut olsun. Teorem 3.1.5 deki $\tau_{\mathcal{C}}$ nin tanımından $\mathcal{C}(k, f', \alpha) = f'$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in M_0$ vardır öyle ki $(\tau_{\mathcal{B}})_k(f) \not\geq \alpha$ sağlanır.

$\mathcal{C}(k, f', \alpha) = f'$ eşitliğinden $\Gamma$ nın her sonlu $J = \{i_1, \dots, i_n\}$ alt kümesi için,

$$f = \left( \mathcal{C}(k, f', \alpha) \right)'$$

$$= \left( \sqcap \left\{ \sqcup_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right) \;\middle|\; f' \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( f_{i_j} \right) \right\} \right)'$$

$$= \sqcup \left\{ \sqcap_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right)' \right) \;\middle|\; f' \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( f_{i_j} \right) \right\}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.1.6 dan, $\tau^i = \tau_{\mathcal{C}^i}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) = \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right), \alpha \right)$$

eşitliği elde edileceğinden

$\tau_{\eta_{i_j}(k)}^{i_j} \left( \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right)' \right) \geq \alpha$ olduğu görülür.

$g_j = (\varphi_\psi)_{i_j}^{-1} \left( \left( \mathcal{C}^{i_j} \left( \eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha \right) \right)' \right)$ diyelim. Teorem 2.1.13 den,

$\mathcal{B}_k(g_j) \geq \tau^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)}\left(\left(\mathcal{C}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha\right)\right)'\right) \geq \alpha$ dir.

$f \sqsubseteq \sqcup_{j=1}^{n} \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_{i_j}\left(f_{i_j}\right)$ olacak şekildeki $\Gamma$ nın her sonlu $J$ alt kümesi için $g^J = \sqcap_{j=1}^{n} g_j$ olsun. Buna göre, Teorem 2.1.11 den aşağıdaki ifade elde edilir:

$(\tau_{\mathcal{B}})_k(f) = (\tau_{\mathcal{B}})_k(\sqcup\ g^J) \geq \wedge\, \mathcal{B}_k(g^J) \geq \alpha.$

$(\mathcal{B}_k(g^J) = \mathcal{B}_k(\sqcap_{j=1}^{n} g_j) \geq \wedge\, \mathcal{B}_k(g_j) \geq \alpha)$.

Buradan $(\tau_{\mathcal{B}})_k(f) \geq \alpha$ elde edilir ki, bu durum hipotez ile çelişir.

Şimdi ise her $f \in (L^X)^E$ ve $k \in K$ için $(\tau_{\mathcal{B}})_k(f) \leq (\tau_{\mathcal{C}})_k(f)$ olduğunu yada buna denk olarak $(id_X)_{id_E, id_K} : (X, \tau_{\mathcal{C}}) \to (X, \tau_{\mathcal{B}})$ özdeşlik bulanık esnek fonksiyonunun bulanık esnek sürekli olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.13 den, $\varphi_{\psi,\eta} \circ (id_X)_{id_E, id_K} : (X, \tau_{\mathcal{C}}) \to \left(X_i, \tau^i\right)$ bileşke fonksiyonunun bulanık esnek sürekli olduğu, yani her $g_i \in (L^{X_i})^{E_i}$ için

$(\tau_{\mathcal{C}})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g_i)\right) \geq \tau^i_{\eta_i(k)}(g_i)$ olduğu gösterilecektir.

Eğer bir $\alpha \in M_0$ için $\tau^i_{\eta_i(k)}(g_i) > \alpha$ ise, Teorem 3.1.4 den $\mathcal{C}^i(\eta_i(k), g_i', \alpha) = g_i'$ dir. Buradan $\mathcal{C}$ nin tanımı kullanılırsa,

$\mathcal{C}\left(k, \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_i(g_i'), \alpha\right) \sqsubseteq \left(\varphi_\psi\right)_i\left(\mathcal{C}^i(\eta_i(k), g_i', \alpha)\right) = \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_i(g_i') = \left(\left(\varphi_\psi\right)^{-1}_i(g_i)\right)'$ dir.

Böylece (C2) den, $\mathcal{C}\left(k, \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_i(g_i'), \alpha\right) = \left(\left(\varphi_\psi\right)^{-1}_i(g_i)\right)'$ elde edilir. Teorem 3.1.5 den, $(\tau_{\mathcal{C}})_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g_i')\right) \geq \alpha$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.6: $\left\{(X_i, \mathcal{I}^i)\right\}_{i \in \Gamma}$ $(L, M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek iç uzaylarının bir ailesi, $X$ klasik bir küme ve $E, K$ ise parametre kümeleri olsun. Her $i \in \Gamma$ $(\Gamma \neq \emptyset)$ için $\varphi_i : X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$, $\eta_i : K \to K_i$ fonksiyonlar olmak üzere, $\Gamma$ nın her sonlu $P = \{i_1, \ldots, i_p\}$ alt kümesi için

$$\mathcal{I}(k, f, \alpha) = \bigsqcup\left\{ \sqcap_{j=1}^{p} \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_{i_j}\left(\mathcal{I}^{i_j}\left(\eta_{i_j}(k), f_{i_j}, \alpha\right)\right) \,\middle|\, f \sqsupseteq \sqcap_{j=1}^{p} \left(\varphi_\psi\right)^{-1}_{i_j}\left(f_{i_j}\right) \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{I} : K \times (L^X)^E \times M_0 \to (L^X)^E$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\mathcal{I}$ operatörü her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i$ fonksiyonlarını bulanık esnek $\mathcal{I}$-dönüşümü yapan $X$ üzerindeki en kaba $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek iç operatörüdür.

(2) Eğer $\{(X_i, \mathcal{I}^i)\}_{i\in\Gamma}$ topolojik $(L, M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek iç uzaylarının bir ailesi ise $(X, \mathcal{I})$ ikilisi de bir topolojik $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek iç uzayıdır.

(3) Eğer bir $i \in \Gamma$ için $\mathcal{I}^i$ zayıf tabakalaşmış ise, $\mathcal{I}$ operatörü de zayıf tabakalaşmıştır.

(4) $\varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{I}') \to (X, \mathcal{I})$ bulanık esnek fonksiyonu bulanık esnek $\mathcal{I}$-dönüşümüdür ancak ve ancak her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i \circ \varphi_{\psi,\eta} : (Y, \mathcal{I}') \to (X_i, \mathcal{I}^i)$ bulanık esnek $\mathcal{I}$-dönüşümüdür.

İspat: Teorem 3.2.1'in ispatına benzer şekilde görülür.

# 4. BULANIK ESNEK YAKINIMSI (PROXIMITY) UZAYLAR

Bu bölümde, Markin ve Sostak (1992) tarafından tanımlanan bulanık yakınlık kavramının parametrik genişlemesi olan bulanık esnek yakınlık kavramı ile Katsaras anlamında bulanık esnek yakınlık kavramı tanıtılacak ve aralarındaki ilişkiler kategorik olarak incelenecektir. Ayrıca, bulanık esnek yakınlık ile bulanık esnek topoloji üretilecek, verilen bir bulanık esnek yakınlık ailesi için başlangıç yapının varlığı araştırılacak ve çarpım uzayı tanımlanacaktır.

## 4.1. Bulanık Esnek Yakınımsılık (Proximity) Kavramı

Tanım 4.1.1: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\delta: I^X \times I^X \to I$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulanık yakınlık (proximity) adı verilir.

(1) $\delta(\underline{0}, \underline{1}) = 0$.

(2) $\delta(\lambda, \mu) = \delta(\mu, \lambda)$.

(3) $\delta(\lambda, \mu \vee \nu) = \delta(\mu, \lambda) \vee \delta(\lambda, \nu)$.

(4) $\delta(\lambda, \mu) \geq \underset{x}{sup}(\lambda + \mu - 1)(x)$.

(5) $\delta(\lambda, \mu) \geq inf\{\delta(\lambda, \rho) \vee \delta(\mu, \rho') : \ \rho \in I^X\}$.

$\delta, X$ üzerinde bir bulanık yakınlık olmak üzere, $(X, \delta)$ ikilisine de bir bulanık yakınlık uzayı adı verilir (Markin ve Sostak, 1992).

Tanım 4.1.2: Her $k \in K$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $\delta : K \to I^{(I^X)^E \times (I^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bulanık $(E, K)$-esnek yakınlık (proximity) adı verilir.

(P1) $\delta_k(\Phi, \tilde{E}) = 0$.

(P2) $\delta_k(f, g) = \delta_k(g, f), \ f, g \in (I^X)^E$.

(P3) $\delta_k(f, g \sqcup h) = \delta_k(f, g) \vee \delta_k(f, h), \ f, g, h \in (I^X)^E$.

(P4) $\delta_k(f, g) \geq sup_{x \in X} sup_{e \in E} (f \sqcap g)_e(x)$.

(P5) $\delta_k(f, g) \geq inf\{ \delta_k(f, h) \vee \delta_k(g, h') : \ \ h \in (I^X)^E\}$.

$(X, \delta)$ ikilisine de bir bulanık $(E, K)$-esnek yakınımsı (proximity) uzay adı verilir.

Burada, her bir $k \in K$ için $\delta_k$, $(I^X)^E \times (I^X)^E$ den $I$ ya tanımlı bir dönüşümdür. $\delta_k(f,g)$ değeri ise $k$ parametresine göre $f$ ve $g$ bulanık esnek kümeleri arasındaki yakınlığın derecesini göstermektedir.

Uyarı 4.1.3: $\delta$, $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) Her $k \in K$ ve her $f \in (I^X)^E$ için $\delta_k(f,\Phi) = 0$.

(2) Her $k \in K$ ve her $f,g,h \in (I^X)^E$ için $g \sqsubseteq h$ ise $\delta_k(f,g) \leq \delta_k(f,h)$.

Uyarı 4.1.4: $E$ ve $K$ parametre kümelerinin her ikisi de tek noktalı kümeler ise Tanım 4.1.2 ile Tanım 4.1.1 çakışır.

Tanım 4.1.4: $(X_1,\delta^1)$ bir bulanık $(E_1,K_1)$-esnek yakınımsı uzay, $(X_2,\delta^2)$ bir bulanık $(E_2,K_2)$-esnek yakınımsı uzay, $\varphi: X_1 \to X_2$, $\psi: E_1 \to E_2$ ve $\eta: K_1 \to K_2$ fonksiyonlar olsunlar. $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ dönüşümüne esnek yakınımsı sürekli dönüşüm denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $f,g \in (I^{X_1})^{E_1}$ için

$\delta_k^1(f,g) \leq \delta_{\eta(k)}^2(\varphi_\psi(f),\varphi_\psi(g))$ eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.1.5: $(X_1,\delta^1)$ bir bulanık $(E_1,K_1)$-esnek yakınımsı uzayı ve $(X_2,\delta^2)$ bir bulanık $(E_2,K_2)$-esnek yakınımsı uzayı olsun. $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ fonksiyonu esnek yakınımsı süreklidir ancak ve ancak her $k \in K_1$ ve $u,v \in (I^{X_2})^{E_2}$ için $\delta_k^1\left(\varphi_\psi^{-1}(u),\varphi_\psi^{-1}(v)\right) \leq \delta_{\eta(k)}^2(u,v)$ sağlanır.

Nesneleri bulanık esnek yakınımsı uzaylar ve morfizmleri ise sürekli dönüşümler olan kategori **FSP** ile gösterilir.

Tanım 4.1.6: Her $k \in K$ ve her $f,g,h \in (I^X)^E$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\Delta : K \to 2^{(I^X)^E \times (I^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir Katsaras bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık (proximity**)** denir.

(K1) $f\Delta_k g \Leftrightarrow g\Delta_k f$.

(K2) $(f \sqcup g)\Delta_k h \Leftrightarrow f\Delta_k h$ veya $g\Delta_k h$ .

(K3) Eğer $f\Delta_k g$ ise $f \neq \Phi$ ve $g \neq \Phi$.

(K4) $f\overline{\Delta_k}g$ ise $f \sqsubseteq g'$.

(K5) $f\overline{\Delta_k}g$ ise $\exists\, d \in (I^X)^E$ öyle ki $f\overline{\Delta_k}d$ ve $g\overline{\Delta_k}d'$.

(Burada, $\overline{\Delta_k}$ ile $\Delta_k$ nın negatiyonu gösterilmektedir. Ayrıca $(f,g) \in \Delta_k$ yerine sadelik olması açısından $f\Delta_k g$ yazılmıştır.) $(X,\Delta)$ ikilisine bir Katsaras bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı (proximity) uzayı denir. Burada her $k \in K$ için $\Delta_k \subseteq (I^X)^E \times (I^X)^E$ dir.

$(X_1,\Delta^{X_1})$ ve $(X_2,\Delta^{X_2})$ iki Katsaras bulanık $(E_i,K_i)$-esnek yakınımsı uzayı olsun $(i \in \{1,2\})$. Eğer her $k \in K$ için $f\Delta_k^{X_1} g$ iken $\varphi_\psi(f)\Delta_{\eta(k)}^{X_2}\varphi_\psi(g)$ oluyorsa $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\Delta^{X_1}) \to (X_2,\Delta^{X_2})$ dönüşümüne esnek yakınımsı sürekli denir.

Katsaras bulanık esnek yakınımsı (proximity) uzayların ve bu uzaylar arasında tanımlı yakınımsı sürekli dönüşümlerin kategorisi **KFSP** ile gösterilir.

Açıktır ki, **KFSP** nesneleri aşağıdaki aksiyomu sağlayan **FSP** nin bir bütünüyle alt kategorisi olarak tanımlanabilir: her $k \in K$ için

(K) $\delta_k((I^X)^E \times (I^X)^E) \subseteq 2 := \{0,1\}$.

Tanım 4.1.7: (K1), (K2), (K3), (K5) aksiyomlarını ve (K4) aksiyomunun farklı bir versiyonu olan aşağıdaki (K4′) aksiyomunu sağlayan bir $\Delta : K \to 2^{(I^X)^E\times(I^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde Katsaras yarı-bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık denir:$\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için,

$(K4')$ $f\overline{\Delta_k}g$ ise $f \sqcap g = \Phi$.

**KFSP** nin ilgili bütünüyle alt kategorisi **KFSP(4′)** ile gösterilir. Açıktır ki, **KFSP(4′), KFSP** ve **FSP** nin "arakesiti" olarak tanımlanabilir.

Tanım 4.1.8: $\alpha \in I$ olmak üzere (K1), (K2), (K3), (K5) aksiyomlarını ve aşağıdaki aksiyomu sağlayan $\Delta^\alpha : K \to 2^{(I^X)^E\times(I^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $\alpha$-Katsaras bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık denir: $\Leftrightarrow$ her $k \in K$ için

$(K4_\alpha)$ $f\overline{\Delta_k}^{\alpha} g \implies f \sqcap g \sqsubset E^\alpha$.

Önerme 4.1.9: $(X,\delta)$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı uzayı ve $\alpha \in I$ olsun. $k \in K$ ve $f,g \in (I^X)^E$ için $f\Delta_k^\alpha g$ ancak ve ancak $\delta_k(f,g) \geq \alpha$ olsun. Bu takdirde, $\Delta^\alpha$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $\alpha$-Katsaras bulanık $(E,K)$-esnek yakınlıktır.

İspat: $\Delta_k^\alpha$ için (K1), (K2), (K3) ve (K5) aksiyomlarının sağlandığı açıktır. Eğer $f\overline{\Delta_k}^\alpha g$ ise $sup_{x\in X} sup_{e\in E}(f \sqcap g)_e(x) \leq \delta_k(f,g)$ olduğundan $\Delta_k^\alpha$ için $(K4_\alpha)$ aksiyomunun sağlandığı da görülür.

$(X,\delta)$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı uzayı olsun. Bir $k \in K$ için $X$ kümesi üzerindeki $\Delta_k^\alpha = \{(f,g) \in I^X \times I^X \mid \delta_k(f,g) \geq \alpha\}$ $\alpha$-Katsaras bulanık esnek yakınlıkların ailesi olan $D^k = \{\Delta_k^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ kümesini düşünelim. Kolaylıkla görülebilir ki, bu sistem artmayandır, yani $\alpha' < \alpha$ iken $\Delta_k^{\alpha'} \supset \Delta_k^\alpha$ dir. Ayrıca, $\alpha \in (0,1]$ için $\Delta_k^\alpha = \bigcap_{\alpha<\alpha'} \Delta_k^{\alpha'}$ sağlanır, yani yukarıdaki sistem alttan yarı-süreklidir.

Tersine her $k \in K$ için $D^k = \{\Delta_k^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ $X$ üzerindeki $\Delta^\alpha$ $\alpha$-Katsaras bulanık esnek yakınlıkların artmayan alttan yarı-sürekli bir ailesi olsun. Her $k \in K$ için $\delta_k: I^X \times I^X \to I$ dönüşümünü $\delta_k(f,g) = sup\{\Delta_k^\alpha \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\}$ olarak tanımlayalım. Buradan, (P1), (P2) ve (P3) aksiyomlarının sağlandığı açıktır.

(P4) aksiyomunu göstermek için $\delta_k(f,g) = \alpha$ olduğunu kabul edelim. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $(f,g) \notin \Delta_k^{\alpha+\varepsilon}$ sağlanır ve böylece her $e \in E$ için $(K4_\alpha)$ aksiyomundan $(f \sqcap g)_e(x) < \alpha + \varepsilon$ dir. Buradan, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$sup_{x\in X} sup_{e\in E}(f \sqcap g)_e(x) \leq \delta_k(f,g)$ sağlanır.

(P5) aksiyomunun sağlandığını göstermek için $f\overline{\Delta_k}^{\alpha+\varepsilon} d_\varepsilon$ ve $g\overline{\Delta_k}^{\alpha+\varepsilon} d'_\varepsilon$ olacak şekilde bir $d_\varepsilon \in (I^X)^E$ bulmak yeterlidir. Buradan, $\delta_k(f,d_\varepsilon), \delta_k(g,d'_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon$ olduğundan $\delta_k(f,g) > inf\{\delta_k(f,d_\varepsilon), \vee\, \delta_k(g,d'_\varepsilon) : d_\varepsilon \in (I^X)^E\} - \varepsilon$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan böylece (P5) aksiyomunun sağlandığı da görülür.

Dikkat edilirse, $\delta$ *bulanık* $(E,K)$-esnek yakınlık için $\Delta^\alpha$ tam olarak onun bir $\alpha$-Katsaras bulanık esnek yakınlığıdır öyle ki, her $k \in K$ için $\Delta_k^\alpha = \{(f,g) \mid \delta_k(f,g) \geq \alpha\}$ dir. Gerçekten $\{(f,g) \mid \delta_k(f,g) \geq \alpha\} \supseteq \Delta_k^\alpha$ içermesinin sağlandığı açıktır. Tersini elde etmek için ise $\delta_k(f,g) \geq \alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\alpha' < \alpha$ için $(f,g) \in \Delta_k^{\alpha'}$ sağlanır. Buradan ve $D^k$ nın alttan yarı-sürekliliğinden, $f,g \in \Delta_k^\alpha$ elde edilir.

Burada elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Teorem 4.1.10: $(X,\delta)$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı uzay ve her $k \in K$ için $\Delta_k^\alpha = \{\,(f,g) \in (I^X)^E \times (I^X)^E \mid \delta_k(f,g) \geq \alpha\,\}$ olsun. Bu durumda $D^k = \{\Delta_k^\alpha \mid \alpha \in (0,1]\}$ ailesi $\Delta^\alpha$ $\alpha$-Katsaras bulanık esnek yakınlıkların artmayan alttan yarı-sürekli bir sistemidir.

Tersine, her $k \in K$ için $\alpha$-Katsaras bulanık esnek yakınlıkların verilen bir artmayan $D^k = \{\Delta_k^\alpha \mid \alpha \in (0,1]\}$ ailesi için $\delta_k(f,g) = sup\{\Delta_k^\alpha(f,g) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\}$ formülü yardımıyla $X$ kümesi üzerinde bir $\delta$, bulanık$(E,K)$-esnek yakınımsı uzayı tanımlanabilir. Bunun yanı sıra, eğer $D^k$ alttan yarı-sürekli ise, $\Delta_k^\alpha = \{\,(f,g) \mid \delta_k(f,g) \geq \alpha\,\}$ dir.

Tanım 4.1.11: $\delta, \delta^*$, $X$ kümesi üzerinde iki bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı uzay olsun. Her $k \in K, f \in (I^X)^E$ için $\delta_k(f) \leq \delta_k^*(f)$ oluyorsa $\delta$' ya $\delta^*$' dan daha küçüktür (yada daha güçlüdür) denir ve $\delta \leq \delta^*$ notasyonu ile gösterilir. Yine bu durumda $\delta^*$' a $\delta$' dan daha zayıftır (yada daha geniştir) denir. $\Delta^\alpha$ ve $\Delta^{*\alpha}$ ilgili $\alpha$-Katsaras bulanık esnek seviye yakınlığı olmak üzere; açıktır ki, $\delta_k \leq \delta_k^*$ sağlanır ancak ve ancak $\Delta_k^\alpha \subseteq \Delta_k^{*\alpha}$ dır.

Aşağıdaki ifadede, esnek yakınımsı sürekli bir dönüşümün kusuru (hatası) tanımlanmaktadır.

Tanım 4.1.12: $(X_1,\delta^1)$ bir bulanık $(E_1,K_1)$-esnek yakınımsı uzay ve $(X_2,\delta^2)$ bir bulanık $(E_2,K_2)$-esnek yakınımsı uzay olsun. Bu takdirde,

$$pd(\varphi_{\psi,\eta}) = sup_{k \in K_!} sup_{f,g \in (I^X)^E} \left(\delta_k^1(f,g) - \delta_{\eta(k)}^2\left(\varphi_\psi(f), \varphi_\psi(g)\right)\right)$$

değerine $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ dönüşümünün kusuru (hatası) denir.

Açıktır ki, her $\varphi_{\psi,\eta}$ fonksiyonu için $0 \leq pd(\varphi_{\psi,\eta}) \leq 1$ dir. Eğer $\varphi_{\psi,\eta}$ bulanık yakınımsı sürekli ise $pd(\varphi_{\psi,\eta}) = 0$ dir. Eğer $(X_1,\delta^1)$ ve $(X_2,\delta^2)$ Katsaras bulanık esnek yakınımsı uzayı ve $\varphi_{\psi,\eta}$ yakınımsı sürekli değilse $pd(\varphi_{\psi,\eta}) = 1$ dir.

Önerme 4.1.13: Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ ve $\varphi^*_{\psi^*,\eta^*} : (X_2,\delta^2) \to (X_3,\delta^3)$ iki fonksiyon ise, bu durumda $pd\left(\varphi^*_{\psi^*,\eta^*} \circ \varphi_{\psi,\eta}\right) \leq pd(\varphi_{\psi,\eta}) + pd\left(\varphi^*_{\psi^*,\eta^*}\right)$ dir.

İspat: $pd\left(\varphi^*{}_{\psi^*,\eta^*} \circ \varphi_{\psi,\eta}\right)$

$= sup_{k\in K_1} sup_{f,g\in\left(I^{X_1}\right)^{E_1}} \left(\delta_k^1(f,g) - \delta^3_{\eta^*\circ\eta(k)} \left((\varphi^* \circ \varphi)_{\psi^*\circ\psi}(f), (\varphi^* \circ \varphi)_{\psi^*\circ\psi}(g)\right)\right)$

$= sup_{k\in K_1} sup_{f,g\in\left(I^{X_1}\right)^{E_1}} \left(\delta_k^1(f,g) - \delta^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f), \varphi_\psi(g)\right) + \delta^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f), \varphi_\psi(g)\right)\right)$

$- \delta^3_{\eta^*\circ\eta(k)} \left((\varphi^* \circ \varphi)_{\psi^*\circ\psi}(f), (\varphi^* \circ \varphi)_{\psi^*\circ\psi}(g)\right)$

$\leq sup_{k\in K_1} sup_{f,g\in\left(I^{X_1}\right)^{E_1}} \left(\delta_k^1(f,g) - \delta^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f), \varphi_\psi(g)\right)\right)$

$+ sup_{k\in K_1} sup_{h,d\in\left(I^{X_2}\right)^{E_2}} \left(\delta^2_{\eta(k)}(h,d) - \delta^3_{\eta^*(\eta(k))} \left(\varphi^*{}_{\psi^*}(h), \varphi^*{}_{\psi^*}(d)\right)\right)$

$\leq sup_{k\in K_1} sup_{f,g\in\left(I^{X_1}\right)^{E_1}} \left(\delta_k^1(f,g) - \delta^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f), \varphi_\psi(g)\right)\right)$

$+ sup_{l\in K_2} sup_{h,d\in\left(I^{X_2}\right)^{E_2}} \left(\delta^2_l(h,d) - \delta^3_{\eta^*(l)} \left(\varphi^*{}_{\psi^*}(h), \varphi^*{}_{\psi^*}(d)\right)\right)$

$= pd(\varphi_{\psi,\eta}) + pd\left(\varphi^*{}_{\psi^*,\eta^*}\right).$

## 4.2. Bulanık Esnek Yakınlık ile Üretilen Bulanık Esnek Topoloji

Bu kısımda kapanış operatörünü kullanarak verilen bir bulanık esnek yakınlık yapısından bir bulanık esnek topoloji üretilecektir.

$(X,\delta)$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık uzayı, $f \in (I^X)^E$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $k \in K$ parametresine göre bir $f$ bulanık esnek kümesinin $\alpha$-kapanışı (yada $f$ nin kapanışının $\alpha$-seviyesi ) aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır:

$\mathcal{C}(k,f,\alpha) = (\sqcup\{\, g \mid \delta_k(f,g) \leq \alpha' \,\})' \sqcup f = (\sqcap\{\, g' \mid \delta_k(f,g) \leq \alpha' \}) \sqcup f.$

Lemma 4.2.1: $\mathcal{C}(k,f,\alpha) = (\{\, P \mid \delta_k(P^*,f) > \alpha' \,\}) \sqcup f$ dir. Burada, $P(e) = x^\lambda$ ve $P^*(e) = x^{\lambda'}$ olarak tanımlıdır.

İspat: $\mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq (\{\, P \mid \delta_k(P^*,f) > \alpha' \,\}) \sqcup f$ olduğunu göstermek için, $e \in E, x^\mu \notin \bigvee\{x^\lambda : \delta_k(P^*,f) > \alpha'\}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$Q(e) = x^{\mu-\varepsilon} \notin \bigvee\{x^\lambda : \delta_k(P^*,f) > \alpha'\}$ olsun. Buradan $\delta_k(Q^*,f) \leq \alpha'$ ve böylece de $\left(x^{\mu'+\varepsilon}\right)' \geq \bigwedge\{g'(e): \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}$ dir.

$x^\mu \notin \left(x^{\mu'+\varepsilon}\right)'$ olduğundan, $x^\mu \notin \bigwedge\{g'(e): \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}$ sağlanır.

Tersini göstermek için, $e \in E$ ve $Q(e) = x^\mu \in \left(\bigvee\{x^\lambda : \delta_k(P^*,f) > \alpha'\}\right) \vee f_e$ olsun. Genelliği bozmaksızın her $e \in E$ ve $x \in X$ için,

$\left((\{\, P \mid \delta_k(P^*,f) > \alpha' \,\}) \sqcup f\right)_e(x) > \mu$ ve $x^\mu \notin f$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan, $\delta_k(Q^*,f) > \alpha'$ olur. Bu durumda eğer bir $g \in (I^X)^E$ için $\delta_k(g,f) \leq \alpha'$ ise $g'_e(x) > \mu$ olur. Böylece $\delta_k(g,f) \leq \alpha'$ eşitsizliğini sağlayan her $g$ için $x^\mu \in g'_e$ ve böylece de $x^\mu \in \bigwedge\{g'(e): \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}$ elde edilir.

Önerme 4.2.2: $(X,\delta)$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınımsı uzay olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{C}(k,f,\alpha) = (\bigsqcup\{\, g \mid \delta_k(f,g) \leq \alpha' \,\})' \sqcup f = (\bigsqcap\{\, g' \mid \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}) \sqcup f$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C} : K \times (I^X)^E \times (0,1] \to (I^X)^E$ dönüşümü $X$ üzerinde bir topolojik bulanık $(E,K)$-esnek kapanış operatörüdür.

İspat: (C1) $\mathcal{C}(k,\Phi,\alpha) = (\bigsqcap\{\, g' \mid \delta_k(\Phi,g) \leq \alpha'\}) \sqcup \Phi = \Phi \sqcup \Phi = \Phi$.

(C2) $f \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ olduğu açıktır.

(C3) $f,h \in (I^X)^E$ ve $f \sqsubseteq h$ olsun. $\mathcal{C}(k,f,\alpha) = (\bigsqcap\{\, g' \mid \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}) \sqcup f$, $\mathcal{C}(k,h,\alpha) = (\bigsqcap\{\, g' \mid \delta_k(h,g) \leq \alpha'\}) \sqcup h$ ve $\delta_k(f,g) \leq \delta_k(h,g)$ olduğundan $\mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,h,\alpha)$ dir.

(C4) $\alpha \leq \beta$ için $\delta_k(f,g) \leq \beta' \leq \alpha'$ olduğundan $\mathcal{C}(k,f,\alpha) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\beta)$ dir.

(C5) (P3) aksiyomunu uygulayarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\mathcal{C}(k, f \sqcup g, \alpha) = (\sqcup \{h : \delta_k(f \sqcup g, h) \leq \alpha' \})' \sqcup (f \sqcup g)$$
$$= (\sqcup \{h : \delta_k(f, h) \vee \delta_k(g, h) \leq \alpha' \})' \sqcup (f \sqcup g)$$
$$= \left((\sqcup \{h_1 : \delta_k(f, h_1) \leq \alpha' \}) \sqcap (\sqcup \{h_2 : \delta_k(g, h_2) \leq \alpha' \})\right)' \sqcup (f \sqcup g)$$
$$= ((\sqcup \{h_1 : \delta_k(f, h_1) \leq \alpha' \})' \sqcup f) \sqcup ((\sqcup \{h_2 : \delta_k(g, h_2) \leq \alpha' \})' \sqcup g)$$
$$= \mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqcup \mathcal{C}(k, g, \alpha).$$

Böylece, $\mathcal{C}(k, f, \alpha)$ bir bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörüdür.

$k \in K, f, g \in (I^X)^E$ ve $\delta_k(f, g) \leq \alpha'$ olsun.

(P5) den, $inf_{h \in (I^X)^E}\{\delta_k(f, h) \vee \delta_k(h', g)\} \leq \delta_k(f, g) \leq \alpha'$ dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $h_\varepsilon \in (I^X)^E$ öyle ki $\delta_k(f, h_\varepsilon) \vee \delta_k({h_\varepsilon}', g) < \alpha' + \varepsilon$ sağlanır. $\delta_k(f, h_\varepsilon) < \alpha' + \varepsilon$ ve $\delta_k({h_\varepsilon}', g) < \alpha' + \varepsilon$ olduğundan $\mathcal{C}(k, f, \alpha - \varepsilon) \sqsubseteq {h_\varepsilon}'$ sağlanır. Buradan, $\delta_k\big(g, \mathcal{C}(k, f, \alpha - \varepsilon)\big) \leq \delta_k({h_\varepsilon}', g) < \alpha' + \varepsilon$ dir. $\delta_k(f, g) \leq \alpha'$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\delta_k\big(g, \mathcal{C}(k, f, \alpha - \varepsilon)\big) < \alpha' + \varepsilon$ sağlanır. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\mathcal{C}(k, f, \alpha) = (\sqcap\{\, g' \mid \delta_k(f, g) \leq \alpha'\}) \sqcup f$$
$$= (\sqcap\{\, g' \mid \delta_k(f, g) \leq \alpha'\}) \sqcup \mathcal{C}(k, f, \alpha)$$
$$\sqsupseteq \left(\sqcap\{\, g' \mid \delta_k\big(g, \mathcal{C}(k, f, \alpha - \varepsilon)\big) < \alpha' + \varepsilon\}\right) \sqcup \mathcal{C}(k, f, \alpha)$$

Eğer eşitsizliğin son adımında $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse, $\mathcal{C}(k, f, \alpha) \sqsupseteq \mathcal{C}(k, \mathcal{C}(k, f, \alpha), \alpha)$ elde edilir.

Gösterim 4.2.3: $\sigma_\alpha^k = \{\, f \in (I^X)^E \mid \mathcal{C}(k, f, \alpha) = f \,\}$ ve $\mathcal{T}_\alpha^k = \{\, f \mid f' \in \sigma_\alpha^k \,\}$ olsun. Kolaylıkla gösterilebilir ki, her bir $k \in K$ parametresi için $\mathcal{T}_\alpha^k$ bulanık esnek kümelerin Tanay ve Kandemir (2011) anlamında bir topolojisidir.

Önerme 4.2.4: $\mathcal{C}$, bulanık $(E, K)$-esnek kapanış operatörü $I = [0,1]$ üzerinde aşağıdaki anlamda süreklidir: Eğer $\varepsilon_n \to 0$ ve $\varepsilon_n > 0$ ise, bu durumda her $k \in K$ için $\sqcup_n \mathcal{C}(k, f, \alpha - \varepsilon_n) = \mathcal{C}(k, f, \alpha)$ dir.

İspat: Her $k \in K$ için $\mathcal{C}(k,f,\alpha-\varepsilon_n) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ olduğundan

$\sqcup_n \mathcal{C}(k,f,\alpha-\varepsilon_n) \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ sağlanır.

İfadenin tersini ispat etmek için

$\sqcap_n (\sqcup \{g_n : \ \delta_k(f,g_n) \leq \alpha' + \varepsilon_n\}) \sqsubseteq \sqcup \{g : \ \delta_k(f,g) \leq \alpha'\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Varsayalım ki, en az bir $x \in X, e \in E$ ve $\gamma > 0$ için

$\left(\sqcap_n (\sqcup \{g_n : \ \delta_k(f,g_n) \leq \alpha' + \varepsilon_n\})\right)_e(x) > (\sqcup \{g : \ \delta_k(f,g) \leq \alpha'\})_e(x) + \gamma$

olsun. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için bir $g_n$ bulunabilir öyle ki $\delta_k(f,g_n) \leq \alpha' + \varepsilon_n$ ve $(g_n)_e(x) > (\sqcup \{g : \ \delta_k(f,g) \leq \alpha'\})_e(x) + \gamma$ sağlanır. $g^0 = \sqcap_n g_n$ biçiminde gösterilirse, $\delta_k(f,g^0) \leq \alpha'$ ve $g^0_e(x) \geq (\sqcup \{g : \ \delta_k(f,g) \leq \alpha'\})_e(x) + \gamma$ elde edilir ki, bu durum hipotezle çelişir.

Önerme 4.2.5: Her $k \in K$ ve $\alpha \in (0,1]$ için, $\sigma^k_\alpha = \bigcap_{\alpha'<\alpha} \sigma^k_{\alpha'}$ ve $\mathcal{T}^k_\alpha = \bigcap_{\alpha'<\alpha} \mathcal{T}^k_{\alpha'}$ dir.

İspat: Her $f \in (I^X)^E$ için $\alpha' < \alpha$ iken $\mathcal{C}(k,f,\alpha') \sqsubseteq \mathcal{C}(k,f,\alpha)$ ve buradan da $\sigma^k_\alpha \subseteq \sigma^k_{\alpha'}$ olduğu açıktır. Şimdi $f \in \bigcap_{\alpha'<\alpha} \sigma^k_{\alpha'}$ ve azalan $\varepsilon_n \to 0$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $f = \mathcal{C}(k,f,\alpha-\varepsilon_n)$ dir.

Yukarıdaki önerme gereği, $\mathcal{C}(k,f,\alpha) = \sqcup_n \mathcal{C}(k,f,\alpha-\varepsilon_n)$, yani $f \in \sigma^k_\alpha$ elde edilir.

Teorem 4.2.6: Her $k \in K$ için $\tau_k(f) = \bigvee_\alpha (\mathcal{T}^k_\alpha(f) \wedge \alpha)$ eşitliği ile tanımlanan $\tau : K \to I^{(I^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek topolojidir. Bunun yanı sıra,

$\mathcal{T}^k_\alpha = \{ f \mid \tau_k(f) \geq \alpha \}$ dir.

Yukarıda oluşturulan bulanık $(E,K)$-esnek topolojiye $\delta$ ile üretilen bulanık esnek topoloji denir ve bu topoloji aksi belirtilmediği sürece $\tau_\delta$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.7: Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ dönüşümü esnek yakınımsı sürekli ise, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\tau_{\delta^1}) \to (X_2,\tau_{\delta^2})$ dönüşümü bulanık esnek süreklidir.

İspat: B her $\alpha \in (0,1]$ için $\varphi_\psi\big(\mathcal{C}(k,f,\alpha)\big) \sqsubseteq \mathcal{C}\big(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\big)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Biliyoruz ki,

$$\varphi_\psi\big(\mathcal{C}(k,f,\alpha)\big)_{e_2} = \varphi_\psi(\sqcup\{P : \delta_k^1(P^*,f) > \alpha'\} \sqcup f)_{e_2}$$
$$= \big(\sqcup\{\varphi_\psi(x^\lambda) : \delta_k^1(P^*,f) > \alpha'\}\big) \sqcup \varphi_\psi(f)_{e_2}$$
$$= \big(\sqcup\{(\varphi(x))^\lambda : \delta_k^1(P^*,f) > \alpha'\}\big) \sqcup \varphi_\psi(f)_{e_2}$$

dir. $\varphi_{\psi,\eta}$ esnek yakınımsı sürekli yani $\delta_k^1(P^*,f) \le \delta_{\eta(k)}^2\big(\varphi_\psi(f),\varphi_\psi(P)^*\big)$ olduğundan buradan

$$\varphi_\psi\big(\mathcal{C}(k,f,\alpha)\big)_{e_2} \le \vee\{(\varphi(x)) : \delta_{\eta(k)}^2\big(\varphi_\psi(f),\varphi_\psi(P)^*\big) > \alpha'\} \sqcup \varphi_\psi(f)_{e_2}$$
$$\le \vee\{Q(e_2): \delta_{\eta(k)}^2\big(\varphi_\psi(f),Q^*\big) > \alpha'\} \sqcup \varphi_\psi(f)_{e_2}$$
$$= \mathcal{C}\big(\eta(k),\varphi_\psi(f),\alpha\big)_{e_2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.8: $(X,\delta)$ bir bulanık esnek yakınımsı uzay ve $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\delta^1) \to (X_2,\delta^2)$ ise esnek yakınımsı sürekli dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\Phi(X,\delta) = (X,\tau_\delta)$ ve $\Phi\big(\varphi_{\psi,\eta}\big) = \varphi_{\psi,\eta} : (X_1,\tau_{\delta^1}) \to (X_2,\tau_{\delta^2})$ olarak tanımlanan $\Phi$: $\boldsymbol{FSP} \to \boldsymbol{FSTOP}$ dönüşümü bir funktordur.

Önerme 4.2.9: $X$ üzerindeki $\delta,\delta^*$ bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık operatörleri için $\delta \le \delta^*$ ise $\tau_\delta \ge \tau_{\delta^*}$ dir.

### 4.3. Başlangıç Bulanık Esnek Yakınmsılık (Proximity)

Bu kısmın temel hedefi **FSP** bulanık esnek yakınımsı uzaylar kategorisinde çarpım tanımlamaktır. Bunun için öncelikle verilen bir bulanık esnek yakınımsı uzay ailesi için başlangıç bulanık esnek yakınımsı uzayının varlığı araştırılacaktır.

Tanım 4.3.1: $X$ boştan farklı klasik bir küme, $E,K$ parametre kümeleri, $\{(X_\gamma,\delta^\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ bulanık $(E_\gamma,K_\gamma)$-esnek yakınımsı uzayların bir ailesi ve her $\gamma \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : X \to (X_\gamma,\delta^\gamma)$ bir bulanık esnek fonksiyon olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için

$(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : (X,\delta) \to (X_\gamma,\delta^\gamma)$ fonksiyonlarını esnek yakınımsı sürekli yapan $X$ kümesi üzerindeki en zayıf $\delta$ yakınlığına verilen fonksiyonlar ailesi için başlangıç bulanık esnek yakınlık denir.

Başlangıç bulanık esnek yakınlık yapısının varlığı aşağıdaki teoremde gösterilmektedir.

Teorem 4.3.2: $X$ boştan farklı klasik bir küme, $E,K$ parametre kümeleri, $\{(X_\gamma,\delta^\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ bulanık $(E_\gamma,K_\gamma)$-esnek yakınımsı uzayların bir ailesi ve her $\gamma\in\Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : X \to (X_\gamma,\delta^\gamma)$ bir bulanık esnek fonksiyon olsun. $f,g\in(I^X)^E$ ve $k\in K$ olmak üzere,

$$\delta_k(f,g)=\wedge\left\{\vee_{i,j}\wedge_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f_i),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g_j)\right)\;\middle|\; f=\sqcup_{i=1}^n f_i, g=\sqcup_{i=1}^n g_i, n\in\mathbb{N}\right\}$$

olarak tanımlanan $\delta : K \to I^{(I^X)^E\times(I^X)^E}$ dönüşümü verilen fonksiyonlar ailesi için $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlıktır.

İspat: Öncelikle dikkat edilirse her $k\in K$ için $\delta_k(f,g)\geq\beta$ (burada $\beta\in I$) sağlanır ancak ve ancak sırasıyla $f$ ve $g$ nin $f=\sqcup_{i=1}^n f_i$, $g=\sqcup_{j=1}^l g_j$ sonlu örtümleri için en az bir $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ ve $j_0\in\{1,2,\dots,l\}$ vardır öyle ki her $\gamma\in\Gamma$ için $\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f_{i_0}),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma\left(g_{j_0}\right)\right)\geq\beta$ sağlanır.

Genelliği bozmaksızın $n=l$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle yukarıdaki şekilde oluşturulan $\delta$ dönüşümünün bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olduğunu gösterelim. Her $k\in K$ için $\delta_k(\Phi,\tilde{E})=0$ ve $\delta_k(f,g)=\delta_k(g,f)$ olduğu açıktır.

(P3) $\delta$ nın bu aksiyomu sağladığını göstermek için öncelikle,

$g\sqcup h\sqsupseteq g$ ve $g\sqcup h\sqsupseteq h$ iken $\delta_k(f,g\sqcup h)\geq\delta_k(f,g)\vee\delta_k(f,h)$ olduğuna dikkat edelim.

$$\delta_k(f,g\sqcup h)>\beta>\delta_k(f,g)\vee\delta_k(f,h)$$

eşitsizliğinin sağlandığı varsayılırsa, buradan $f = \sqcup_{i=1}^{n} f_i$, $f = \sqcup_{i=1}^{l} f^*{}_i$, $g = \sqcup_{i=1}^{n} g_i$, $h = \sqcup_{i=1}^{l} h_i$ örtümleri bulunabilir öyle ki,

$$sup_{i,j} inf_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(g_j)\right) \vee sup_{i,j} inf_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f^*{}_i),(\varphi_\psi)_\gamma(h_j)\right) < \beta$$

sağlanır. Genelliği bozmaksızın $f_i = f_i^*$ olarak kabul edilsin. (aksi halde $f_{i,j} = f_i \sqcap f_j$ olmak üzere $f = \sqcup_{i,j} f_{i,j}$ olarak alınabilir). Her $j \in \{1,2,\dots,n\}$ için $g_{n+1} = h_j$ olsun. Buradan, $g \sqcup h = \sqcup_{j=1}^{2n} g_j$ dir. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten aşağıdaki ifade elde edilir:

$$sup_{i,j\in\{1,\dots,n\}} inf_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(g_j)\right) \vee$$

$$sup_{i,j\in\{1,\dots,n\}} inf_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(h_j)\right) < \beta$$

$$< sup_{i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,2n\}} inf_\gamma \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(g_j)\right)$$

Eşitsizliğin sağ tarafından görülür ki en az bir $i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,2n\}$ vardır öyle ki her $\gamma \in \Gamma$ için $\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(g_j)\right) > \beta$ sağlanır.

$1 \le j \le n$ ve $n+1 \le j \le 2n$ olasılıklarından hangisi düşünülürse düşünülsün eşitsizliğin sol tarafıyla ilgili bir çelişki kolaylıkla elde edilir.

(P4) Bu aksiyomun sağlandığını göstermek için

$\delta_k(f,g) < sup_x sup_{e\in E}(f \sqcap g)_e(x)$ olacak şekilde bir $f,g \in (I^X)^E$ olduğunu ve her $\gamma \in \Gamma$ için de $\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_i),(\varphi_\psi)_\gamma(g_j)\right) < sup_x sup_{e\in E}(f \sqcap g)_e(x)$ olacak şekilde $f = \sqcup_{i=1}^{n} f_i$, $g = \sqcup_{i=1}^{n} g_i$ örtümlerinin bulunduğunu kabul edelim. Buradan, aşağıdaki çelişki elde edilir

$$\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f),(\varphi_\psi)_\gamma(g)\right) < sup_x sup_{e\in E}(f \sqcap g)_e(x).$$

(P5) Son aksiyomun sağlandığını göstermek için ise, $\beta > 0$ sabit sayısını ve $\delta_k(f,g) < \beta$ ve $inf\{\delta_k(f,h) \vee \delta_k(h',g) : h \in (I^X)^E\} \geq \beta$

koşullarını sağlayan $(f,g) \in (I^X)^E \times (I^X)^E$ ikililerinin kümesi olan $\Sigma_\beta^k$ kümesi ele alınsın. (P5) in geçerliliği aşağıda da gösterileceği gibi her $k \in K$ parametresi için $\Sigma_\beta^k$ kümesinin boş olması gerçeğinden elde edilecektir.

Varsayalım ki, $\Sigma_\beta^k$ kümesi boştan farklı, yani bir $(f,g) \in \Sigma_\beta^k$ mevcut olsun. Bu durumda, her bir $\gamma \in \Gamma$ için

$$\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g)\right) \geq \beta$$

eşitsizliğinin sağlandığı aşikardır. Gerçekten de, bir $d \in (I^{X_\gamma})^{E_\gamma}$ için $h = \left(\varphi_\psi\right)^{-1}{}_\gamma(d)$ olsun. Eğer $\delta_k(f,h) \geq \beta$ eşitsizliği sağlanırsa

$$\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(h)\right) \geq \beta$$

ve buradan da

$$\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f), d\right) \geq \beta$$

ifadelerinin sağlandığı görülür. Benzer şekilde, eğer $\delta_k(h',g) \geq \beta$ ise bu durumda $\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g), d'\right) \geq \beta$ sağlanır.

$\Sigma_\beta^k$ nın tanımlanışından ve $\delta^\gamma$, (P5) aksiyomunu sağladığından,

$$\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g)\right) \geq \beta$$

dir. Her $(f,g) \in \Sigma_\beta^k$ için bir $n,l \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$, $g = \sqcup_{j=1}^l g_j$ örtümü vardır öyle ki her $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,l\}$ için $\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f_i), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g_j)\right) < \beta$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Gamma$ bulunabilir. Ayrıca, $f,g$ bulanık esnek kümeleri ve bunların örtümleri öyle şekilde seçilebilir ki $n \geq 2$

için ilgili $n+l$ toplamı minimum olsun. $h = f_1 \sqcup \ldots \sqcup f_{n-1}$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki iki olası seçenekten birisi doğru olacaktır:

(a) her $d \in (I^X)^E$ için ya $\delta_k(h,d) > \beta$ ya da $\delta_k(g,d') > \beta$ dır.

(b) her $d \in (I^X)^E$ için ya $\delta_k(f_n,d) > \beta$ ya da $\delta_k(g,d') > \beta$ dır.

Gerçekten de, ne (a) ne de (b) sağlansın. Bu durumda,

$\delta_k(h,d_1) < \beta, \delta_k(f_n,d_2) < \beta, \delta_k(g,d_1') < \beta,\ \delta_k(g,d_2') < \beta$

olacak şekilde en az bir $d_1, d_2 \in (I^X)^E$ vardır.

$d = d_1 \sqcap d_2$ denirse, $\delta_k(f,d) \vee \delta_k(g,d') < \beta$ elde edilir ki; bu durum ise $(f,g) \in \Sigma_\beta^k$ olması ile çelişir.

(a) nın sağlandığını kabul edelim. Buradan, $h \sqsubseteq f$ ve $\delta_k(f,g) < \beta$ olduğundan $\delta_k(h,g) < \beta$ ve böylece de $(h,g) \in \Sigma_\beta^k$ sonucu elde edilir. Ancak bu durum $n+l$ toplamının minimum seçilmesiyle çelişir.

Benzer durum (b) içinde sağlanacaktır. Sonuç olarak, $\Sigma_\beta^k$ kümesi boştur.

Böylece, $\delta,\ X$ kümesi üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlıktır.

Ayrıca, tanımlanışı gereği her $\gamma \in \Gamma$ için $\delta_k(f,g) \le \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g)\right)$ sağlanır, yani tüm $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : (X,\delta) \to (X_\gamma, \delta^\gamma)$ dönüşümleri esnek yakınımsı süreklidir.

Son olarak, $\delta^*,\ X$ üzerinde $\delta$ dan daha ince olan ve tüm $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma$ dönüşümlerini esnek yakınımsı sürekli yapan başka bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olsun.

Bu durumda, en az bir $f, g \in (I^X)^E,\ f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{i=1}^n g_i$ örtümü vardır öyle ki her $\gamma \in \Gamma,\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ için

$\delta_k^*(f,g) > \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f_i), \left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g_j)\right)$

sağlanır. $\delta^*$ bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olduğundan, bir $i_0, j_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\delta_k^*(f_{i_0}, g_{j_0}) = \delta_k^*(f,g)$ dir. Böylece,

$$\delta_k^*(f_{i_0}, g_{j_0}) > \delta_{\eta_\gamma(k)}^{\gamma}\left((\varphi_\psi)_\gamma(f_{i_0}), (\varphi_\psi)_\gamma(g_{j_0})\right)$$

elde edilir ki, bu durum $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma$ dönüşümlerinin esnek yakınımsı sürekli olmasıyla çelişir.

Tanım 4.3.3: $\{(X_\gamma, \delta^\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ bulanık $(E_\gamma, K_\gamma)$-esnek yakınımsı uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $E = \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ ve $K = \prod_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$ kartezyen çarpım kümeleri olsun. Bu durumda, $p_\gamma : X \to X_\gamma, q_\gamma : E \to E_\gamma$ ve $r_\gamma : K \to K_\gamma$ izdüşüm fonksiyonları yardımıyla üretilen başlangıç bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık, çarpım bulanık esnek yakınlık olarak adlandırılır ve $(X,\delta) = \prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \delta^\gamma)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 4.3.2. gereğince $\delta : K \to I^{(I^X)^E \times (I^X)^E}$ çarpım bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\delta_k(f,g) = \bigwedge\left\{ \vee_{i,j} \wedge_\gamma \delta_{r_\gamma(k)}^{\gamma}\left((p_q)_\gamma(f_i), (p_q)_\gamma(g_j)\right) \;\middle|\; f = \sqcup_{i=1}^{n} f_i, g = \sqcup_{i=1}^{n} g_i, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dikkat edilirse bu $\delta$ operatörünün gerçekten **FSP** kategorisinde bir çarpım tanımladığı görülür.

Teorem 4.3.4: Her $\gamma \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : (X,\delta) \to (X_\gamma, \delta^\gamma)$ bir bulanık esnek fonksiyon ve $\varphi_{\psi,\eta} : (X,\delta) \to \prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \delta^\gamma)$ ise diyagonal fonksiyon olsun. Bu takdirde, $pd(\varphi_{\psi,\eta}) = \vee_\gamma pd\left((\varphi_{\psi,\eta})_\gamma\right)$ eşitliği sağlanır.

İspat: Her $\gamma \in \Gamma$ için $\varphi_{\psi,\eta}: (X,\delta) \to \Pi_\gamma(X_\gamma, \delta^\gamma)$, $(p_{q,r})_\gamma : \Pi_\gamma(X_\gamma, \delta^\gamma) \to (X_\gamma, \delta^\gamma)$ ve $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : (X,\delta) \to (X_\gamma, \delta^\gamma)$ dönüşümleri göz önüne alınsın.

Fonksiyonun hatası tanımından ve $pd\left((p_{q,r})_\gamma\right) = 0$ oluşundan,

$$pd\left((\varphi_{\psi,\eta})_\gamma\right) \le pd(\varphi_{\psi,\eta}) + pd\left((p_{q,r})_\gamma\right) = pd(\varphi_{\psi,\eta})$$

ve böylece de

$$\bigvee_\gamma pd\left(\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_\gamma\right) \le pd\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)$$

ifadeleri elde edilir. Eşitliğin tersini göstermek için $\bigvee_\gamma pd\left(\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_\gamma\right) < pd\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)$ olduğunu kabul edelim. Bir $\varepsilon > 0$ için

$$sup_\gamma sup_{k\in K} sup_{f,g\in\left(I^X\right)^E}\left(\delta_k(f,g) - \delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g)\right)\right)$$

$$< \left(sup_{k\in K} sup_{f,g\in\left(I^X\right)^E}\left(\delta_k(f,g) - \left(\Pi_\gamma\delta^\gamma\right)_{\eta(k)}\left(\varphi_\psi(f) - \varphi_\psi(g)\right)\right)\right) - \varepsilon \quad \text{dir.}$$

Eşitsizliğin sağ tarafına dikkat edilirse her $f^*, g^* \in (I^X)^E$ için

$$\delta_k(f^*,g^*) - inf_\gamma\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f^*),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g^*)\right)$$

$$< \delta_k(f,g) - \left(\Pi_\gamma\delta^\gamma\right)_{\eta(k)}\left(\varphi_\psi(f) - \varphi_\psi(g)\right) - \varepsilon$$

ve buradan da

$$\left(\Pi_\gamma\delta^\gamma\right)_{\eta(k)}\left(\varphi_\psi(f) - \varphi_\psi(g)\right) < \delta_k(f,g) - \delta_k(f^*,g^*) + inf_\gamma\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f^*),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g^*)\right) - \varepsilon$$

sağlanır. $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{i=1}^n g_i$ keyfi iki örtüm ve $\delta_k(f,g) = \delta_k(f_{i_0}, g_{j_0})$ olacak şekilde $f_{i_0}, g_{j_0}$ verilsin. Yukarıdaki eşitsizlikte $f^* = f_{i_0}, g^* = g_{j_0}$ yazılırsa

$$\beta := \left(\Pi_\gamma\delta^\gamma\right)_{\eta(k)}\left(\varphi_\psi(f) - \varphi_\psi(g)\right) + \varepsilon < inf_\gamma\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f^*),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g^*)\right)$$

elde edilir. Böylece, herhangi $f = \sqcup_{i=1}^n f_i$ ve $g = \sqcup_{i=1}^n g_i$ örtüleri için en az bir $i_0, j_0$ vardır öyle ki, her $\gamma \in \Gamma$ için

$$inf_\gamma\delta^\gamma_{\eta_\gamma(k)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(f_{i_0}),\left(\varphi_\psi\right)_\gamma(g_{j_0})\right) > \beta$$

sağlanır. $\varphi_\psi(f) = \sqcup_{i=1}^n \varphi_\psi(f_i)$ ve $\varphi_\psi(g) = \sqcup_{i=1}^n \varphi_\psi(g_i)$ olduğuna dikkat edilirse çarpım bulanık esnek yakınlık tanımından,

$$\left(\Pi_\gamma \delta^\gamma\right)_{\eta(k)}\left(\varphi_\psi(f)-\varphi_\psi(g)\right)\geq\beta$$

eşitsizliği bulunur. Elde edilen bu çelişki ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.5: $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma : (X,\delta)\to\left(X_\gamma,\delta^\gamma\right),\ \gamma\in\Gamma$ fonksiyonlar ailesinin diyagonali $\varphi_{\psi,\eta}:=\Delta_\gamma((\varphi_{\psi,\eta})_\gamma):(X,\delta)\to\prod_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma,\delta^\gamma)$ esnek yakınımsı süreklidir ancak ve ancak her bir $(\varphi_{\psi,\eta})_\gamma$ esnek yakınımsı süreklidir.

Teorem 4.3.6: $X$ kümesi üzerindeki tüm bulanık $(E,K)$-esnek yakınlıkların kümesi olan D, $\leq$ bağıntısına göre bir tam latisdir.

İspat: Her $k\in K$ için

$$\delta_k^*(f,g)=\begin{cases}0, f=\Phi\ \ yada\ g=\Phi\\ 1, \qquad\qquad di\check{g}er\end{cases}$$

olarak tanımlanan $\delta^*:K\to I^{(I^X)^E\times(I^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık esnek yakınlıktır. Ayrıca, $\delta^*$ ın $X$ üzerindeki en geniş (yani en zayıf) bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olduğu açıktır. $\delta^*$ antidiskret (trivial) yakınlık olarak adlandırılır. Diğer yandan her $k\in K$ için

$$\delta_k^0(f,g)=sup_x sup_{e\in E}(f\sqcap g)_e(x)$$

şeklinde tanımlanan $\delta^0:K\to I^{(I^X)^E\times(I^X)^E}$ dönüşümü de $X$ üzerinde bir bulanık $(E,K)$-esnek yakınlıktır.

(Gerçekten, açık olmayan tek aksiyom (P5) in sağlandığı da şu şekilde görülür: bir $f,g\in(I^X)^E$ için

$$\delta_k^0(f,g)<inf\{\delta_k^0(f,h)\vee\delta_k^0(h',g)\ :h\in(I^X)^E\}$$

olduğu kabul edilirse ve $h=g$ alınırsa $\delta_k^0(g',g)=0$ çelişkisi elde edilir.)

Ayrıca, diskret (ayrık) yakınlık olarak adlandırılan $\delta^0$ ın $X$ üzerindeki en güçlü (yani en küçük) bulanık $(E,K)$-esnek yakınlık olduğu da kolaylıkla görülür.

$D_0 \subseteq D$ ve $\delta \in D_0$ olmak üzere, $\sigma \coloneqq \Pi_\gamma \delta^\gamma$, $X$ üzerinde $\left(id_{X_{id_K, id_E}}\right) : X \to (X, \delta)$ fonksiyonları ile üretilen başlangıç bulanık $(E, K)$-esnek yakınlık olsun. Dikkat edilirse, $\sigma$, $D_0$ ın en büyük alt sınırıdır. Bu nedenle $inf\ D_0$ ile gösterilecektir. $\delta^*$, $D$ nin en büyük elemanı olduğundan, $D_0$ en küçük üst sınıra da sahiptir.

# 5. BULANIK ESNEK DÜZGÜN UZAYLAR VE BULANIK ESNEK TOPOGENOUS YAPISI

Bu bölümün amacı, Hutton (1977) anlamındaki bulanık düzgün yapının parametrik genişlemesi olan bulanık esnek düzgün yapıyı tanımlamaktır. Bunun için öncelikle bulanık esnek uzak komşuluk sistemi tanımlanacak ve bu komşuluk sistemi yardımıyla bulanık esnek kotopoloji ile bulanık esnek (yarı-)düzgün yapı arasındaki ilişkiler incelenecektir. Buna ek olarak, verilen bir bulanık esnek düzgün uzay ailesi için başlangıç yapının varlığı araştırılacak ve böylece bulanık esnek düzgün uzaylar kategorisi olan $\boldsymbol{HFSU}(L, M)$ nin $\boldsymbol{SET^3}$ üzerine topolojik bir kategori olduğu gösterilecektir.

Bu bölümde, $L$ bir tam dağılımlı tam latisi ve $M$ ise sıralamayı tersine koruyan bir "′" involüsyonu ile bir tam dağılımlı tam latisi gösterecektir.

$(L^X)^E$ kümesindeki tüm indirgenemez (coprime) elemanların kümesi $c((L^X)^E)$ ile gösterilir. $p \in c((L^X)^E)$ ve $f \in (L^X)^E$ olmak üzere $\{ g \in (L^X)^E \mid p \not\sqsubseteq g \sqsubseteq f \}$ kümesi $p \mid f$ ile gösterilir.

## 5.1. Bulanık Esnek Uzak Komşuluk Sistemi

Bu kısımda bulanık esnek uzak komşuluk sistemi tanımlanacak ve bulanık esnek uzak komşuluk sistemi ile bulanık esnek kotopolojik uzay arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Eğer $E$ ve $K$ parametre kümelerinin her ikisi de tek noktalı birer küme ise bu kısımdaki sonuçlar Yue ve Shi (2007) tarafından elde edilen sonuçlar ile çakışır.

Tanım 5.1.1: Her bir $k \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $R^p : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümlerinin $\mathcal{R} = \{ R^p \mid p \in c((L^X)^E) \}$ ailesine $X$ üzerinde bir topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemi denir:

(RN1) $R_k^p(\widetilde{E_X}) = 0_M,\ R_k^p(\Phi_X) = 1_M$.

(RN2) Eğer $R_k^p(f) \neq 0_M$ ise $p \not\sqsubseteq f$ dir.

(RN3) $R_k^p(f \sqcup g) = R_k^p(f) \wedge R_k^p(g)$.

(RN4) $R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(g)$.

Lemma 5.1.2: $\mathcal{T}: K \to M^{(L^X)^E}$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $\left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f) = \begin{cases} \bigvee_{g \in p \mid f} \mathcal{T}_k(g), & p \not\sqsubseteq f \\ 0_M, & p \sqsubseteq f \end{cases}$.

olarak tanımlanan $R_{\mathcal{T}}^p: K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümlerinin $\mathcal{R}_{\mathcal{T}} = \left\{ R_{\mathcal{T}}^p \mid p \in c((L^X)^E) \right\}$ ailesi bir bulanık esnek uzak komşuluk sistemidir.

(2) Eğer $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{S}$ aynı topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemini üreten iki $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji ise $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ dir.

İspat: (1) Tanım 5.1.1 (RN1)-(RN4) koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir. (RN1) ve (RN2) açıktır.

(RN3): $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ olsun. $R_{\mathcal{T}}^p$ nin tanımından $f \sqsubseteq g$ için $\left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f) \geq \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(g)$ olduğu açıktır. Bu ise

$$\left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f \sqcup g) \leq \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f) \wedge \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(g)$$

olduğu anlamına gelir. Bir $\alpha \in c(M)$ için

$$\alpha \lhd \left(\left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f) \wedge \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(g)\right)$$

olduğunu kabul edelim. Buradan, $\alpha \lhd \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f)$ ve $\alpha \lhd \left(R_{\mathcal{T}}^p\right)_k(f)$ dir. O halde tanım gereği, en az bir $u \in p \mid f$ ve $v \in p \mid g$ vardır öyle ki $\alpha \leq \mathcal{T}_k(u)$ ve $\alpha \leq \mathcal{T}_k(v)$ dir. Bu durumda,

$$\alpha \leq \mathcal{T}_k(u) \wedge \mathcal{T}_k(v) \leq \mathcal{T}_k(u \sqcup v)$$

elde edilir. Diğer yandan, $p \not\sqsubseteq u \sqcup v$ ve $f \sqcup g \sqsubseteq u \sqcup v$ olduğu açıktır. Böylece $R_{\mathcal{T}}^{p}$ nin tanımından, $\alpha \leq \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f \sqcup g)$

eşitsizliği bulunur. $\alpha$ keyfi olduğundan her $k \in K$ için

$\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f \sqcup g) \geq \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f) \wedge \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(g)$ elde edilir.

(RN4): Her $g \in p \mid f$ ve $k \in K$ için

$\mathcal{T}_{k}(g) \leq \wedge_{p \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(g) \leq \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(g) \leq \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f)$

olduğu açıktır. Bu durumda,

$$\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f) = \bigvee_{g \in p \mid f} \mathcal{T}_{k}(g) \leq \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} (R_{\mathcal{T}}^{r})_{k}(g) \leq \left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f)$$

elde edilir. Bu ise her $k \in K$ için aşağıdaki istenen ifadenin sağlandığını gösterir.

$\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f) = \vee_{g \in p \mid f} \wedge_{r \not\sqsubseteq g} (R_{\mathcal{T}}^{r})_{k}(g)$.

(2) Lemma 5.1.2 nin ikinci iddiasının ispatı için her $k \in K$ ve her $f \in (L^{X})^{E}$ için aşağıdaki eşitliğin sağlandığını göstermek yeterlidir:

$\mathcal{T}_{k}(f) = \wedge_{p \not\sqsubseteq f}\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f)$.

Her $k \in K$ ve her $f \in (L^{X})^{E}$ için $\mathcal{T}_{k}(f) \leq \wedge_{p \not\sqsubseteq f}\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f)$ eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla eşitliğin diğer yönünün sağlandığını göstermek yeterlidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \wedge_{p \not\sqsubseteq f}\left(R_{\mathcal{T}}^{p}\right)_{k}(f) &= \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{g \in p \mid f} \mathcal{T}_{k}(g) \\ &= \vee_{A \in \prod_{p \not\sqsubseteq f} p \mid f} \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \mathcal{T}_{k}\left(A(p)\right) \\ &\leq \vee_{A \in \prod_{p \not\sqsubseteq f} p \mid f} \mathcal{T}_{k}(\sqcap_{p \not\sqsubseteq f} A(p)) = \mathcal{T}_{k}(f) \end{aligned}$$

sağlanır. Buradaki son eşitlik her $A \in \prod_{p \not\sqsubseteq f} p \mid f$ için $\sqcap_{p \not\sqsubseteq f} A(p) = f$ ifadesinin sağlanmasından elde edilir.

Lemma 5.1.3: $\mathcal{R} = \{ R^p \mid p \in c((L^X)^E) \}$ bir topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemi olsun. Her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için

$$\mathcal{T}_k(f) = \bigwedge_{p \not\leq f} R_k^p(f)$$

olarak tanımlanan $\mathcal{T}: K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojdir. Ayrıca, eğer $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{P}$ aynı $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojiyi üreten iki topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemi ise bu iki sistem aynıdır, yani $\mathcal{R} = \mathcal{P}$ dir.

İspat: (C1) koşulu açıktır.

(C2) koşulu aşağıdaki eşitlikten elde edilir. Her $k \in K$ için,

$$\mathcal{T}_k(f \sqcup g) = \bigwedge_{p \not\leq (f \sqcup g)} R_k^p(f \sqcup g) \geq \left(\bigwedge_{p \not\leq f} R_k^p(f)\right) \wedge \left(\bigwedge_{p \not\leq g} R_k^p(g)\right) = \mathcal{T}_k(f) \wedge \mathcal{T}_k(g).$$

Son olarak ise (C3) koşulu her $k \in K$ için aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathcal{T}_k\left(\sqcap_{j \in J} f_j\right) = \bigwedge_{p \not\leq \sqcap_{j \in J} f_j} R_k^p\left(\sqcap_{j \in J} f_j\right)$$

$$= \bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{p \not\leq f_j} R_k^p\left(\sqcap_{j \in J} f_j\right)$$

$$\geq \bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{p \not\leq f_j} R_k^p(f_j) = \bigwedge_{j \in J} \mathcal{T}_k(f_j).$$

Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca, eğer $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{P}$ aynı $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojiyi belirleyen iki topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemi ise bu iki sistemin aynı olduğu açıktır.

Lemma 5.1.4: $\mathcal{R} = \{ R^p \mid p \in c((L^X)^E) \}$ ailesi Tanım 5.1.1 (RN1)-(RN3) koşullarını sağlayan bir küme ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:
(RN4) $R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p|f} \bigwedge_{r \not\leq g} R_k^r(g)$.
(RN4*) $R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p|f} (R_k^p(g) \wedge \bigwedge_{r \not\leq g} R_k^r(f))$.

İspat: (RN4*) özelliğinin sağlandığını yani $R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p|f} (R_k^p(g) \wedge \bigwedge_{r \not\leq g} R_k^r(f))$ olduğunu kabul edelim. $\alpha \in c(M)$ öyle ki

$\alpha \lhd R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p \mid f}(R_k^p(g) \wedge \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(f))$

olsun. Bu durumda en az bir $g \in p \mid f$ vardır öyle ki aşağıdaki sağlanır:

(1) $\alpha \lhd R_k^p(g)$,

(2) her $r \not\sqsubseteq g$ için $\alpha \lhd R_k^r(f)$.

(1) ve (2) koşullarını sağlayan ve $f$ yi içeren bulanık esnek kümelerin arakesiti yine bu tarzda bir kümedir. Böylece, (1) ve (2) koşullarını sağlayan ve $f$ yi içeren minimal bulanık esnek küme olarak $g^*$ kümesini tanımlayabiliriz, yani $\alpha \lhd R_k^p(g^*)$ ve her $r \not\sqsubseteq g^*$ için $\alpha \lhd R_k^r(f)$ dir. Böylece, her $r \not\sqsubseteq g^*$ için $\alpha \lhd R_k^r(f)$ olmasından bir $h^r \in r \mid f$ vardır öyle ki

(3) $R_k^r(h^r) \rhd \alpha$;

(4) Her $g \not\sqsubseteq h^r$ için $R_k^r(f) \rhd \alpha$.

Buradan $g^* \sqcap h^r$ kümesi (1) ve (2) koşullarını sağlar. Böylece, $g^*$ ın minimal oluşundan $g^* \sqsubseteq g^* \sqcap h^r$ dir. Böylece, $g^* \sqsubseteq h^r$ dir. Buradan her $r \not\sqsubseteq g^*$ için $\alpha \lhd R_k^r(h^r) \leq R_k^r(g^*)$ elde edilir. Böylece,

$\alpha \leq \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g^*} R_k^r(g^*)$ bulunur. O halde, $\alpha \leq \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(g)$ sağlanır.

$\alpha$ keyfi olduğundan her $k \in K$ için $R_k^p(f) \leq \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(g)$ bulunur. Her $k \in K$ için $R_k^p(f) \geq \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(g)$ eşitsizliği açık olduğundan sonuç olarak arzu edilen $R_k^p(f) = \bigvee_{g \in p \mid f} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} R_k^r(g)$ eşitliği elde edilir.

## 5.2. Bulanık Esnek Düzgün Uzaylar

Bu kısımda Hutton (1977) anlamındaki bulanık düzgün yapının esnekleştirilmesiyle Hutton anlamında bulanık esnek düzgün yapı tanımlanacaktır. Ayrıca, bulanık esnek düzgün uzay ile bulanık esnek uzak komşuluk sistemi arasındaki ilişkiler kategorik olarak incelenecektir.

Tanım 5.2.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\lambda: (L^X)^E \to (L^X)^E$ dönüşümlerinin ailesi $\mathcal{H}(X,E)$ ile gösterilir.

(1) Her $f \in (L^X)^E$ için $f \sqsubseteq \lambda(f)$,

(2) Her $\{f_j\}_{j\in J} \subseteq (L^X)^E$ için $\lambda\left(\sqcup_{j\in J} f_j\right) = \sqcup_{j\in J} \lambda(f_j)$.

$$\lambda^*(f) = \begin{cases} 0_X, & f = 0_X \\ 1_X, & f \neq 0_X \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\lambda^*: (L^X)^E \to (L^X)^E$ dönüşümü $\mathcal{H}(X,E)$ nin en büyük elemanıdır. Böylece $\mathcal{H}(X,E)$ nin bir tam latis olduğu kolaylıkla görülebilir. $\lambda, \mu \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\lambda \Delta \mu \in \mathcal{H}(X,E)$ ve $\lambda \circ \mu \in \mathcal{H}(X,E)$ dir, burada

$$\lambda \Delta \mu(f) = \sqcap \{ \lambda(g) \sqcup \mu(h) \mid f = g \sqcup h \} \text{ ve } \lambda \circ \mu(f) = \lambda(\mu(f))$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca her $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\lambda^{\triangleleft}: (L^X)^E \to (L^X)^E$ dönüşümü

$$\lambda^{\triangleleft}(g) = \sqcap \{ h \in (L^X)^E \mid \lambda(h') \sqsubseteq g' \}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.2.2: (1) $f \in (L^X)^E$ bir bulanık esnek küme olmak üzere $\lambda_f: (L^X)^E \to (L^X)^E$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\lambda_f(g) = \begin{cases} f, g \sqsubseteq f \\ \widetilde{E}, diğer \end{cases}$$

Bu takdirde, $\lambda_f \in \mathcal{H}(X,E)$ dir. Ayrıca dikkat edilirse, $\lambda_\Phi = \lambda^*$ olduğu görülür.

(2) $id_{(L^X)^E} \in \mathcal{H}(X,E)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Dikkat edilirse, $L$ bir tam dağılımlı latis iken $(L^X)^E$ de bir tam dağılımlı latistir. Dolayısıyla, aşağıdaki önermenin ispatı Önerme 10 (Hutton, 1977) benzer şekilde görülür.

Önerme 5.2.3: (1) $\lambda^{\triangleleft} \in \mathcal{H}(X,E)$.

(2) $(\lambda^{\triangleleft})^{\triangleleft} = \lambda$.

(3) $(\lambda \circ \mu)^{\triangleleft} = \mu^{\triangleleft} \circ \lambda^{\triangleleft}$.

(4) Eğer $\lambda \leq \mu$ ise $\lambda^{\triangleleft} \leq \mu^{\triangleleft}$.

(5) $(\lambda \Delta \mu)^{\lhd} = \lambda^{\lhd} \Delta \mu^{\lhd}$.

(6) $(\bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i)^{\lhd} = \bigvee_{i \in \Gamma} \lambda_i^{\lhd}$.

(7) Eğer $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\mu_1 \leq \mu_2$ ise $\lambda_1 \Delta \mu_1 \leq \lambda_2 \Delta \mu_2$.

$\varphi_\psi : (L^X)^E \to (L^Y)^F$ bir bulanık esnek fonksiyon ve $\lambda \in \mathcal{H}(Y, F)$ olsun. Her $f \in (L^X)^E$ için $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda) : (L^X)^E \to (L^X)^E$ dönüşümü $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda)(f) = \varphi_\psi^{-1} \circ \lambda \circ \varphi_\psi(f)$ olarak tanımlanır. Buna göre aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

Önerme 5.2.4: (1) $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda) \in \mathcal{H}(X, E)$.

(2) Eğer $\lambda \leq \mu$ ise $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda) \leq \varphi_\psi^{\Leftarrow}(\mu)$.

(3) $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda^{\lhd}) = (\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda))^{\lhd}$.

(4) $\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda \circ \mu) \leq \varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda) \circ \varphi_\psi^{\Leftarrow}(\mu)$.

Tanım 5.2.5: (a) Her $k \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{U} : K \to M^{\mathcal{H}(X,E)}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün yapı denir:$\Leftrightarrow$ (Burada, her $k \in K$ için $\mathcal{U}_k := \mathcal{U}(k) : \mathcal{H}(X, E) \to M$ dir.)

(U1) $\mathcal{U}_k(\lambda^*) = 1_M$.

(U2) $\lambda, \mu \in \mathcal{H}(X, E)$ için $\mathcal{U}_k(\lambda \Delta \mu) \geq \mathcal{U}_k(\lambda) \wedge \mathcal{U}_k(\mu)$.

(U3) Eğer $\lambda \geq \mu$ ise $\mathcal{U}_k(\lambda) \geq \mathcal{U}_k(\mu)$.

(U4) Her $\lambda \in \mathcal{H}(X, E)$ için $\mathcal{U}_k(\lambda) \leq \bigvee\{ \mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \circ \mu \leq \lambda \}$.

$(X, \mathcal{U})$ ikilisine de bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün uzay adı verilir.

(b) Aşağıdaki koşulu da sağlayan bir $(X, \mathcal{U})$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün uzayına bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek düzgün uzay denir.

(U5) Her $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X, E)$ için $\mathcal{U}_k(\lambda) \leq \bigvee\{ \mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \leq \lambda^{\lhd} \}$.

(c) $\mathcal{U}^1$ ve $\mathcal{U}^2$, $X$ üzerinde iki düzgün yapı olmak üzere $\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{U}^2$ den daha incedir (veya $\mathcal{U}^2$ ye $\mathcal{U}^1$ den daha kabadır) denir ve durum $\mathcal{U}^1 \geq \mathcal{U}^2$ biçiminde gösterilir ancak ve ancak her $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X, E)$ için $\mathcal{U}_k^1(\lambda) \geq \mathcal{U}_k^2(\lambda)$ sağlanır.

Uyarı 5.2.6. (1) Eğer $E, K$ tek noktalı kümeler ve $M = \{0,1\}$ ise, Tanım 5.2.5 ile Hutton (1977) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) Eğer $E, K$ tek noktalı kümeler ve $M = L$ tam latis ise, Tanım 5.2.5 ile Samanta (1995) tarafından verilen tanım çakışır.

Örnek 5.2.7: $X$ boştan farklı klasik bir küme, $L = M = I$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ olsun. $u, v \in (L^X)^E$ bulanık esnek kümeleri her $e \in E$ ve $x \in X$ için $u_e(x) = 0.5$ ve $v_e(x) = 0.7$ olarak verilsin. Buna göre aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{U} : K \to M^{\mathcal{H}(X,E)}$ operatörü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün yapıdır.

$$\mathcal{U}_{k_1}(\lambda) = \begin{cases} 1, \lambda = \lambda_\Phi \\ 0, diğer \end{cases}, \quad \mathcal{U}_{k_2}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = \lambda_\Phi \\ \frac{1}{3}, \lambda_u \leq \lambda < \lambda_\Phi \\ 0, & diğer \end{cases}, \quad \mathcal{U}_{k_3}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = \lambda_\Phi \\ \frac{1}{4}, \lambda_v \leq \lambda < \lambda_\Phi \\ 0, & diğer \end{cases}.$$

Tanım 5.2.8: $(X_1, \mathcal{U}^1)$ ve $(X_2, \mathcal{U}^2)$ sırasıyla bir $(L, M)$-bulanık $(E_1, K_1)$-esnek düzgün uzay ve $(L, M)$-bulanık $(E_2, K_2)$-esnek düzgün uzay olsun. Bu durumda, $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{U}^1) \to (X_2, \mathcal{U}^2)$ bulanık esnek dönüşümüne düzgün sürekli denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $\mu \in \mathcal{H}(X_2, E_2)$ için $\mathcal{U}^1\left(\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\mu)\right) \geq \mathcal{U}^2_{\eta(k)}(\mu)$ sağlanır.

Teorem 5.2.9: $(X_1, \mathcal{U}^1)$, $(X_2, \mathcal{U}^2)$ ve $(X_3, \mathcal{U}^3)$ bir $(L, M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek düzgün uzay olsun $(i = 1,2,3)$. Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{U}^1) \to (X_2, \mathcal{U}^2)$ ve $\varphi^*{}_{\psi^*,\eta^*} : (X_2, \mathcal{U}^2) \to (X_3, \mathcal{U}^3)$ düzgün sürekli ise bileşke fonksiyon da düzgün süreklidir.

$(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün uzaylar ve bu uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar kategorisi $\boldsymbol{HFSU}(L, M)$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.10: $(X, \mathcal{U})$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün uzay olsun. Her $f \in (L^X)^E$ ve $k \in K$ için

$$\left(R^p_{\mathcal{U}}\right)_k(f) = \bigvee_{p \not\sqsubseteq h} \bigvee_{\lambda(h') \sqsubseteq f'} \mathcal{U}_k(\lambda)$$

olarak tanımlanan $R^p_{\mathcal{U}} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümlerinin $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} = \left\{ R^p_{\mathcal{U}} \mid p \in c((L^X)^E) \right\}$ ailesi bir topolojik bulanık esnek uzak komşuluk sistemidir.

İspat: Teoremin ispatı için Tanım 5.1.1 (RN1)-(RN4) özelliklerinin sağlandığını göstermek gerekmektedir. (RN1), (RN2) ve (RN3) kolaylıkla görülebilir.

(RN4) Lemma 5.1.4 den bu koşulun (RN4*) koşuluna denk olduğu bilinmektedir. Her $k \in K$ için

$$\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) \geq \bigvee_{g \in p \mid f}\left(\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(g) \wedge \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{U}}^{r}\right)_{k}(f)\right)$$

Eşitsizliğinin sağlandığı açık olduğundan, eşitsizliğin diğer yönünü ispatlamak yeterlidir. $k \in K$ ve $\alpha \in c(M)$ öyle ki $\alpha \lhd \left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f)$, yani

$$\alpha \lhd \left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) = \bigvee_{p \not\sqsubseteq h} \bigvee_{\lambda(h') \sqsubseteq f'} \mathcal{U}_{k}(\lambda) \leq \bigvee_{p \not\sqsubseteq h} \bigvee_{\lambda(h') \sqsubseteq f'} \bigvee_{\mu \circ \mu \leq \lambda} \mathcal{U}_{k}(\mu)$$

olsun. Buradan en az bir $h \in (L^{X})^{E}$, $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ ve $\mu \in \mathcal{H}(X,E)$ vardır öyle ki

$$p \not\sqsubseteq h \sqsupseteq \left(\mu(h')\right)' \sqsupseteq \left(\mu \circ \mu(h')\right)' \sqsupseteq \left(\lambda(h')\right)' \sqsupseteq f \quad \text{ve} \quad \alpha \leq \mathcal{U}_{k}(\mu)$$ sağlanır.

$g = \left(\mu(h')\right)'$ olsun. Bu durumda $g \in p \mid f$ dir. Ayrıca,

$$\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(g) = \bigvee_{p \not\sqsubseteq d} \bigvee_{\nu(d') \sqsubseteq g'} \mathcal{U}_{k}(\nu) \geq \bigvee_{\nu(h') \sqsubseteq g'} \mathcal{U}_{k}(\nu) \geq \mathcal{U}_{k}(\mu) \geq \alpha$$

ve

$$\begin{aligned} \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{U}}^{r}\right)_{k}(f) &= \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} \bigvee_{r \not\sqsubseteq d} \bigvee_{\nu(d') \sqsubseteq f'} \mathcal{U}_{k}(\nu) \\ &\geq \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} \bigvee_{\nu(g') \sqsubseteq f'} \mathcal{U}_{k}(\nu) \\ &\geq \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g} \mathcal{U}_{k}(\mu) \geq \alpha \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\alpha \leq \left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(g) \wedge \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{U}}^{r}\right)_{k}(f)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\alpha \leq \bigvee_{g \in p \mid f}\left(\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(g) \wedge \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{U}}^{r}\right)_{k}(f)\right)$$

sağlanır. $\alpha$ keyfi olduğundan istenilen eşitsizlik

$$\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) \leq \bigvee_{g \in p \mid f}\left(\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(g) \wedge \bigwedge_{r \not\sqsubseteq g}\left(R_{\mathcal{U}}^{r}\right)_{k}(f)\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.11: $(X, \mathcal{U})$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün uzay olsun. Bu durumda $R_{\mathcal{U}}^{p}$ aşağıdaki şekillerde de ifade edilebilir:

(1) $\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) = \bigvee_{p \not\sqsubseteq h} \bigvee_{\lambda(h') \sqsubseteq f'} \mathcal{U}_{k}(\lambda)$.

(2) $\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) = \bigvee_{h \in (L^{X})^{E}} \bigvee_{p \not\sqsubseteq \lambda(h') \sqsupseteq \left(\lambda \circ \lambda(h')\right)' \sqsupseteq f} \mathcal{U}_{k}(\lambda)$.

(3) $\left(R_{\mathcal{U}}^{p}\right)_{k}(f) = \bigvee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\lhd}(f)} \mathcal{U}_{k}(\lambda)$.

İspat: (1) ve (2) açıktır. (3) ise $\lambda^{\lhd}$ tanımından kolaylıkla görülür.

Lemma 5.1.3 den, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ dönüşümünün $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji olduğu bilinmektedir. Bu topolojiye $\mathcal{U}$ tarafından üretilen $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji adı verilir.

Teorem 5.2.12: $(X, \mathcal{T})$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojik uzay olsun. Bu durumda $X$ üzerinde öyle bir $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün yapısı vardır ki, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ tarafından üretilen $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopoloji $\mathcal{T}$ nin kendisidir, yani $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}}$ dir. Bu ise her $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek kotopolojik uzayın yarı-düzgünleştirilebilir olduğu sonucunu verir.

İspat: $g \in (L^{X})^{E}$ için $\lambda_{g}: (L^{X})^{E} \to (L^{X})^{E}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\lambda_{g}(f) = \begin{cases} 1_{X}, & f \not\sqsubseteq g \\ g, & 0_{X} \neq f \sqsubseteq g \\ 0_{X}, & diğer \end{cases}$$

Buradan $\lambda_{g} \in \mathcal{H}(X, E)$ ve $\lambda_{g} \circ \lambda_{g} = \lambda_{g}$ dir. Buradan,

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{T}})_{k}(\lambda) = \bigvee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_{k}(g_{i}) \;\middle|\; \lambda \geq \Delta_{i=1}^{n} \lambda_{g_{i}'} \; ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}: K \to M^{\mathcal{H}(X,E)}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün yapıdır. Şimdi ise $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}}$ olduğunu ispatlayalım.

$\lambda_{g_i'}^{\triangleleft}(f) = f$ olduğuna dikkat edilirse, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}}$ nin tanımından her $k \in K$ için

$$\left(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}}\right)_k(f) = \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(f)} \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_k(g_i) \;\middle|\; \lambda \geq \Delta_{i=1}^{n} \lambda_{g_i'} \; ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\geq \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \mathcal{T}_k(f) = \mathcal{T}_k(f)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}} \geq \mathcal{T}$ olduğu anlamına gelir. Diğer yandan,

$$\left(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}}\right)_k(f) = \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(f)} \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_k(g_i) \;\middle|\; \lambda \geq \Delta_{i=1}^{n} \lambda_{g_i'} \; ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\leq \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(f)} \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_k(g_i) \;\middle|\; \lambda^{\triangleleft} \geq \Delta_{i=1}^{n} \lambda_{g_i'}^{\triangleleft} \; ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\leq \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(f)} \vee \left\{ \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_k(g_i) \;\middle|\; \lambda^{\triangleleft}(f) \geq \Delta_{i=1}^{n} \lambda_{g_i'}^{\triangleleft}(f) ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\leq \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee \left\{ \mathcal{T}_k\left(\sqcap_{j=1}^{m} g_j\right) \;\middle|\; p \not\sqsubseteq \sqcap_{j=1}^{m} g_j \sqsupseteq f, \; m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\leq \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee \{ \mathcal{T}_k(g) \mid p \not\sqsubseteq g \sqsupseteq f \} = \mathcal{T}_k(f)$$

olarak elde edilen ifade ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.13: Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{U}^1) \to (X_2, \mathcal{U}^2)$ düzgün sürekli ise, bu durumda $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^1}) \to (X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^2})$ bulanık esnek süreklidir.

İspat: $g \in (L^{X_2})^{E_2}$, $k \in K_1$ ve $\alpha \in c(M)$ için $\alpha \lhd (\mathcal{T}_{\mathcal{U}^2})_{\eta(k)}(g)$ olsun.

$\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{U}^1) \to (X_2, \mathcal{U}^2)$ düzgün sürekli olduğundan her $k \in K_1$ ve $\mu \in \mathcal{H}(X_2, E_2)$ için $\mathcal{U}_k^1\left(\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\mu)\right) \geq \mathcal{U}_{\eta(k)}^2(\mu)$ olduğu açıktır. Böylece,

$$\alpha \lhd (\mathcal{T}_{\mathcal{U}^2})_{\eta(k)}(g) = \wedge_{p \not\sqsubseteq f} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(g)} \mathcal{U}_{\eta(k)}^2(\lambda) \leq \wedge_{p \not\sqsubseteq g} \vee_{p \not\sqsubseteq \lambda^{\triangleleft}(g)} \mathcal{U}_k^1\left(\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda)\right)$$

elde edilir. $h \not\sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g)$ iken $\varphi_\psi(h) \not\sqsubseteq g$ olduğuna dikkat edilirse, $\varphi_\psi(h) \not\sqsubseteq \lambda_{(h)}(g)$ ve $\alpha \leq \mathcal{U}_k^1\left(\varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda_{(h)})\right)$ olacak şekilde bir $\lambda_{(h)} \in \mathcal{H}(X_2, E_2)$ mevcuttur. $\nu_{(h)} = \varphi_\psi^{\Leftarrow}(\lambda_{(h)})$ olsun. Bu durumda, $\nu_{(h)} \in \mathcal{H}(X_1, E_1)$ ve $h \not\sqsubseteq \nu_{(h)}^{\triangleleft}\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)$ dir. O halde,

$$\alpha \leq \Lambda_{h \not\subseteq \varphi_{\psi}^{-1}(g)} \mathcal{U}_k^1(\nu_{(h)}) \leq \Lambda_{h \not\subseteq \varphi_{\psi}^{-1}(g)} \vee_{h \not\subseteq \nu^{\lhd}(\varphi_{\psi}^{-1}(g))} \mathcal{U}_k^1(\nu) = (\mathcal{T}_{\mathcal{U}^1})_k \left(\varphi_{\psi}^{-1}(g)\right)$$

elde edilir. Bu durumda, $\alpha$ keyfi olduğundan $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}^2})_{\eta(k)}(g) \leq (\mathcal{T}_{\mathcal{U}^1})_k \left(\varphi_{\psi}^{-1}(g)\right)$ bulunur ki, bu ise $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^1}) \to (X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^2})$ fonksiyonun bulanık esnek sürekli olduğu sonucunu verir.

Teorem 5.2.14: Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{T}^1) \to (X_2, \mathcal{T}^2)$ bulanık esnek sürekli ise, bu durumda $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{U}_{\mathcal{T}^1}) \to (X_2, \mathcal{U}_{\mathcal{T}^2})$ yarı-düzgün süreklidir.

İspat: $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{T}^1) \to (X_2, \mathcal{T}^2)$ sürekli olsun. $\mathcal{U}_{\mathcal{T}^1}$ tanımından her $k \in K$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{T}^2})_{\eta(k)}(\lambda) = \vee \left\{ \Lambda_{i=1}^n \mathcal{T}_{\eta(k)}^2(g_i) \;\middle|\; \lambda \geq \Delta_{i=1}^n \lambda_{g_i'} \; ve \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ayrıca, eğer $\lambda \geq \Delta_{i=1}^n \lambda_{g_i'}$ ise,

$$\varphi_{\psi}^{\Leftarrow}(\lambda) \geq \varphi_{\psi}^{\Leftarrow}\left(\Delta_{i=1}^n \lambda_{g_i'}\right) = \Lambda_{i=1}^n \varphi_{\psi}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{g_i'}\right) = \Lambda_{i=1}^n \lambda_{\varphi_{\psi}^{-1}(g_i)'}$$

olduğu açıktır. $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{T}^1) \to (X_2, \mathcal{T}^2)$ sürekli olduğundan,

$$\Lambda_{i=1}^n \mathcal{T}_{\eta(k)}^2(g_i) \leq \Lambda_{i=1}^n \mathcal{T}_k^1(\varphi_{\psi}^{-1}(g_i))$$

sağlanır. Bu durumda, $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}^2})_{\eta(k)}(\lambda) \leq (\mathcal{U}_{\mathcal{T}^1})_k \left(\varphi_{\psi}^{\Leftarrow}(\lambda)\right)$ eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \mathcal{U}_{\mathcal{T}^1}) \to (X_2, \mathcal{U}_{\mathcal{T}^2})$ yarı-düzgün süreklidir.

Teorem 5.2.15: $(X, \mathcal{T})$ bir bulanık esnek kotopoloji olmak üzere, $G(X, \mathcal{T}) = (X, \mathcal{U}_{\mathcal{T}})$ olarak tanımlanan $G : \boldsymbol{FSCTOP}(L, M) \to \boldsymbol{HFSU}(L, M)$ dönüşümü $\boldsymbol{FSCTOP}(L, M)$ kategorisinden $\boldsymbol{HFSU}(L, M)$ kategorisine bir gömme funktorudur.

## 5.3. Bulanık Esnek Düzgün Uzaylar Kategorisi

Bu kısımda, başlangıç bulanık esnek düzgün yapı inşa edilerek, bulanık esnek düzgün uzayların çarpımı tanımlanacaktır. Buna ek olarak, $\boldsymbol{HFSU}(L, M)$ ile gösterilen $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek düzgün uzaylar ve onların düzgün sürekli

fonksiyonları kategorisinin $\boldsymbol{SET^3}$ kategorisi üzerine unutkan funktora göre topolojik bir kategori olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.3.1: $\{(X_i, \mathcal{U}^i)\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek düzgün uzayların bir ailesi, $X$ bir küme, $E$ ile $K$ parametre kümeleri ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$ ve $\eta_i: K \to K_i$ fonksiyonlar olsunlar. Her $k \in K$ için

$$\mathcal{U}_k(\lambda) = \bigvee \left\{ \wedge_{j=1}^{n} \mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)}\left(\lambda_{i_j}\right) \;\middle|\; \lambda \geq \Delta_{j=1}^{n}(\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right) \right\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{U} : K \to M^{\mathcal{H}(X,E)}$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır. (Burada supremum sonlu $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Gamma$ sonlu indis kümesi üzerinden alınmaktadır.)

(1) $\mathcal{U}$ her bir $(\varphi_{\psi,\eta})_i$ dönüşümünü düzgün sürekli yapan $X$ üzerindeki en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapıdır.

(2) $\varphi_{\psi,\eta} : (Z,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{U})$ düzgün süreklidir ancak ve ancak her $i \in \Gamma$ için $(\varphi_{\psi,\eta})_i \circ \varphi_{\eta,\eta} : (Z,\mathcal{V}) \to (X_i, \mathcal{U}^i)$ bileşkesi düzgün süreklidir.

İspat: (1) Öncelikle $\mathcal{U}$ nun $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapı olduğu gösterilecektir. (U1) ve (U3) tanımdan açıktır.

(U2): Bir $k \in K$ ve $\lambda, \mu \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\mathcal{U}_k(\lambda\Delta\mu) \not\geq \mathcal{U}_k(\lambda) \wedge \mathcal{U}_k(\mu)$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{U}$ nun tanımı gereği en az bir sonlu $\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \Gamma$ indis kümesi vardır öyle ki, $\Delta_{r=1}^{n}(\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_r}(\lambda_{i_r}) \leq \lambda$ ve $\Delta_{s=1}^{m}(\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{j_s}(\mu_{j_s}) \leq \mu$ olmak üzere

$$\mathcal{U}_k(\lambda\Delta\mu) \not\geq \left(\bigwedge_{r=1}^{n} \mathcal{U}^{i_r}_{\eta_{i_r}(k)}\left(\lambda_{i_r}\right)\right) \wedge \left(\bigwedge_{s=1}^{m} \mathcal{U}^{j_s}_{\eta_{j_s}(k)}\left(\mu_{j_s}\right)\right)$$

ifadesi sağlanır. Buradan,

$$\Delta_{r=1}^{n}(\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_r}(\lambda_{i_r})\Delta\Delta_{s=1}^{m}(\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{j_s}(\mu_{j_s}) \leq \lambda\Delta\mu$$

olduğu açıktır. Böylece, Önerme 5.2.3 den,

$$\mathcal{U}_k(\lambda \Delta \mu) \geq \left( \bigwedge_{r=1}^{n} \mathcal{U}^{i_r}_{\eta_{i_r}(k)} (\lambda_{i_r}) \right) \wedge \left( \bigwedge_{s=1}^{m} \mathcal{U}^{j_s}_{\eta_{j_s}(k)} (\mu_{j_s}) \right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla her $k \in K$ ve $\lambda, \mu \in \mathcal{H}(X,E)$ için

$\mathcal{U}_k(\lambda \Delta \mu) \geq \mathcal{U}_k(\lambda) \wedge \mathcal{U}_k(\mu)$ sağlanır.

(U4): Bir $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\mathcal{U}_k(\lambda) \not\leq \bigvee \{ \mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \circ \mu \leq \lambda \}$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{U}$ nun tanımı gereği en az bir sonlu $J = \{i_1, \dots, i_n\}, \subseteq \Gamma$ indis kümesi vardır öyle ki, $\Delta_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\lambda_{i_j}) \leq \lambda$ için

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)} (\lambda_{i_j}) \not\leq \bigvee \{ \mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \circ \mu \leq \lambda \}$$

ifadesi sağlanır. Her $i_j \in \{i_1, \dots, i_n\}$ için $(X_{i_j}, \mathcal{U}^{i_j})$ bir $(L,M)$-bulanık $(E_{i_j}, K_{i_j})$-esnek düzgün yapı olduğundan, tanım gereği,

$$\mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)} (\lambda_{i_j}) \leq \bigvee \left\{ \mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)} (\nu) \;\middle|\; \nu \circ \nu \leq \lambda_{i_j} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, her $i_j \in \{i_1, \dots, i_n\}$ için $\nu_{i_j} \circ \nu_{i_j} \leq \lambda_{i_j}$ olacak şekilde bir $\nu_{i_j} \in \mathcal{H}(X_{i_j}, \mathcal{U}^{i_j})$ bulanık esnek kümesi vardır öyle ki

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j}(k)} (\nu_{i_j}) \not\leq \bigvee \{ \mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \circ \mu \leq \lambda \}$$

ifadesi bulunur. Burada, $\nu^* = \Delta_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\nu_{i_j})$ denirse, aşağıdaki eşitliğin sağlandığı görülür.

$\nu^* \circ \nu^* = \left( \Delta_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\nu_{i_j}) \right) \circ \left( \Delta_{j=1}^{n} (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\nu_{i_j}) \right)$. Buradan,

$$\nu^* \circ \nu^* \leq \Delta_{j=1}^{n} \left( (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\nu_{i_j}) \circ (\varphi_\psi)^{\Leftarrow}_{i_j} (\nu_{i_j}) \right)$$

$$\leq \Delta_{j=1}^{n}\left(\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{\Leftarrow}\left(\nu_{i_j}\circ\nu_{i_j}\right)\right)\leq \Delta_{j=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{i_j}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{i_j}\right)\leq\lambda \quad \text{dir.}$$

O halde, $\nu^{*}\circ\nu^{*}\leq\lambda$ oluşundan $\mathcal{U}_k(\nu^{*})\geq\wedge_{j=1}^{n}\mathcal{U}_{\eta_{i_j}(k)}^{i_j}\left(\nu_{i_j}\right)$ çelişkisi elde edilir.

(U5): $\left\{\left(X_i,\mathcal{U}^{i}\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ kümesi $(L,M)$-bulanık $(E_i,K_i)$-esnek düzgün uzayların bir ailesi olsun. Bir $k\in K$ ve $\lambda\in\mathcal{H}(X,E)$ için

$$\mathcal{U}_k(\lambda)\not\leq\bigvee\{\,\mathcal{U}_k(\mu)\mid\mu\leq\lambda^{\triangleleft}\,\}$$

olduğunu varsayalım. $\mathcal{U}_k(\lambda)$ nın tanımı gereği $\Gamma$ nın sonlu bir $J=\{j_1,\ldots,j_n\}$ alt kümesi vardır ki $\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{j_i}\right)\leq\lambda$ için

$$\bigvee\{\,\mathcal{U}_k(\mu)\mid\mu\leq\lambda^{\triangleleft}\,\}\not\geq\bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{\eta_{j_i}(k)}^{j_i}\left(\lambda_{j_i}\right)$$

ifadesi sağlanır. $\mathcal{U}^{j_i}$, $X_{j_i}$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_{j_i},K_{j_i})$-esnek düzgün yapı olduğundan

$$\bigvee\left\{\mathcal{U}_{\eta_{j_i}(k)}^{j_i}(\nu)\,\middle|\,\nu\leq\lambda_{j_i}^{\triangleleft}\right\}\geq\mathcal{U}_{\eta_{j_i}(k)}^{j_i}\left(\lambda_{j_i}\right)$$

dir. Her $j_i\in J$ için $\nu_{j_i}^{*}\leq\lambda_{j_i}^{\triangleleft}$ olacak şekilde bir $\nu_{j_i}^{*}\in\mathcal{H}(X_{j_i},E_{j_i})$ bulanık esnek kümesi vardır öyle ki

$$\bigvee\{\,\mathcal{U}_k(\mu)\mid\mu\leq\lambda^{\triangleleft}\,\}\not\geq\bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{\eta_{j_i}(k)}^{j_i}\left(\nu_{j_i}^{*}\right)$$

sağlanır. Diğer yandan,

$$\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\nu_{j_i}^{*}\right)\leq\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{j_i}^{\triangleleft}\right)=\Delta_{i=1}^{n}\left(\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{j_i}\right)\right)^{\triangleleft}=\left(\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\lambda_{j_i}\right)\right)^{\triangleleft}\leq\lambda^{\triangleleft}$$

dir. $\nu^{*}=\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)_{j_i}^{\Leftarrow}\left(\nu_{j_i}^{*}\right)$ denirse, $\nu^{*}\leq\lambda^{\triangleleft}$ ve $\mathcal{U}_k(\nu^{*})\geq\wedge_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{\eta_{j_i}(k)}^{j_i}\left(\nu_{j_i}^{*}\right)$ olacak şekilde bir $\nu^{*}\in\mathcal{H}(X,E)$ mevcuttur. Buradan,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{U}^{j_i}_{\eta_{j_i}(k)}\left(v^*_{j_i}\right) \le \mathcal{U}_k(v^*) \le \bigvee\{\,\mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \le \lambda^{\lhd}\,\}$$

çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, her $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için

$\mathcal{U}_k(\lambda) \le \bigvee\{\,\mathcal{U}_k(\mu) \mid \mu \le \lambda^{\lhd}\,\}$ sağlanır.

İkinci olarak, $\mathcal{U}$ nun tanımından her $k \in K, i \in \Gamma$ ve $\lambda_i \in \mathcal{H}(X_i,E_i)$ için

$$\mathcal{U}_k\left(\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_i(\lambda_i)\right) \ge \mathcal{U}^i_{\eta_i(k)}(\lambda_i)$$

eşitsizliği sağlandığından her bir $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i$ düzgün sürekli fonksiyondur.

Son olarak, $\mathcal{V}$, $X$ üzerinde başka bir bulanık esnek düzgün yapı olmak üzere her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i : (X,\mathcal{V}) \to (X_i,\mathcal{U}^i)$ düzgün sürekli; yani her $k \in K, i \in \Gamma$ ve $\lambda_i \in \mathcal{H}(X_i,E_i)$ için $\mathcal{V}_k\left(\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_i(\lambda_i)\right) \ge \mathcal{U}^i_{\eta_i(k)}(\lambda_i)$ olsun. Bu durumda her $k \in K$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\mathcal{U}_k(\lambda) = \bigvee\left\{ \bigwedge_{j=1}^{n} \mathcal{U}^{i_j}_{\eta_{i_j(k)}}\left(\lambda_{i_j}\right) \;\middle|\; \lambda \ge \Delta_{j=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right) \right\}$$

$$\le \bigvee\left\{ \bigwedge_{j=1}^{n} \mathcal{V}_k\left(\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right)\right) \;\middle|\; \lambda \ge \Delta_{j=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right) \right\}$$

$$\le \bigvee\left\{ \mathcal{V}_k\left(\Delta_{j=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right)\right) \;\middle|\; \lambda \ge \Delta_{j=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{i_j}\left(\lambda_{i_j}\right) \right\} \le \mathcal{V}_k(\lambda).$$

(2) Düzgün sürekli fonksiyonların bileşkesinin düzgün sürekli olduğu açıktır. $(Z,\mathcal{V})$ $(L,M)$-bulanık $(E^*,K^*)$-esnek düzgün uzayı için $\varphi_{\psi,\eta} : (Z,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{U})$ fonksiyonu düzgün sürekli olmasın. Bu durumda, $\mathcal{V}_{k^*}\left(\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}(\lambda)\right) \not\ge \mathcal{U}_{\eta(k^*)}(\lambda)$ olacak şekilde en az bir $k^* \in K^*$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ mevcuttur. Buradan, $\mathcal{U}$ nun tamını gereği $\Gamma$ nın sonlu bir $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ alt kümesi vardır öyle ki $\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}_{j_i}\left(\lambda_{j_i}\right) \le \lambda$ için

$$\mathcal{V}_{k^*}\left(\left(\varphi_\psi\right)^{\Leftarrow}(\lambda)\right) \not\ge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{U}^{j_i}_{\eta_{j_i}(\eta(k^*))}\left(\lambda_{j_i}\right)$$

sağlanır. Diğer yandan, $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_{j_i} \circ \varphi_{\psi,\eta}$ bileşkesi düzgün sürekli olduğundan aşağıdaki çelişki elde edilir:

$$\Lambda_{i=1}^{n} \mathcal{U}^{j_i}_{\eta_{j_i}(\eta(k^*))}(\lambda_{j_i}) \leq \Lambda_{i=1}^{n} \mathcal{V}_{k^*}\left(\varphi_{\psi}^{\Leftarrow} \circ \left(\varphi_{\psi}\right)^{\Leftarrow}_{j_i}(\lambda_{j_i})\right)$$

$$\leq \mathcal{V}_{k^*}\left(\Delta_{i=1}^{n} \varphi_{\psi}^{\Leftarrow}\left(\left(\varphi_{\psi}\right)^{\Leftarrow}_{j_i}(\lambda_{j_i})\right)\right)$$

$$= \mathcal{V}_{k^*}\left(\varphi_{\psi}^{\Leftarrow}\left(\Delta_{i=1}^{n}\left(\varphi_{\psi}\right)^{\Leftarrow}_{j_i}(\lambda_{j_i})\right)\right) \leq \mathcal{V}_{k^*}\left(\varphi_{\psi}^{\Leftarrow}(\lambda)\right).$$

Tanım 5.3.2: $X$ bir küme, $E$ ile $K$ parametre kümeleri, $\left\{\left(X_i, \mathcal{U}^i\right)\right\}_{i\in\Gamma}$, $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek düzgün uzayların bir ailesi ve her $i \in \Gamma$ için $\varphi_i: X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$ ve $\eta_i: K \to K_i$ fonksiyonlar olsunlar. Her bir $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_{\psi,\eta}\right)_i$ fonksiyonlarını düzgün sürekli yapan $X$ üzerindeki en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapıya $X$ üzerindeki başlangıç $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapı denir.

Yukarıdaki Teorem 5.3.1 ve Tanım 5.3.2 den aşağıdaki ifade elde edilir:

Teorem 5.3.3: $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün uzaylar ve bunlar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar kategorisi olan $\boldsymbol{HFSU}(L,M)$ kategorisi $V(X,\mathcal{U}) = (X,E,K)$ ve $V\left(\varphi_{\psi,\eta}\right) = (\varphi,\psi,\eta)$ olarak tanımlanan $V: \boldsymbol{HFSU}(L,M) \to \boldsymbol{SET^3}$ unutkan funktoruna göre $\boldsymbol{SET^3}$ kategorisi üzerine topolojik bir kategoridir.

Tanım 5.3.4: $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ , $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ ile $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$ kartezyen çarpım kümeleri ve her $i \in \Gamma$ için $\left\{\left(X_i, \mathcal{U}^i\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ ise $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek düzgün uzayların bir ailesi olsun. $\left\{\left(p_{q,r}\right)_i : X \to \left(X_i, \mathcal{U}^i\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ izdüşüm fonksiyonları ailesine göre oluşturulan $X$ üzerindeki $\mathcal{U}$ başlangıç $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapısına $\left\{\mathcal{U}^i\right\}_{i\in\Gamma}$ $(L,M)$-bulanık $(E_i, K_i)$-esnek düzgün yapılarının çarpımı adı verilir.

## 5.4. Bulanık Esnek Topogenous Yapısı

Bulanık kümeler arasındaki yakınlığı belirlemek için tanımlanan bulanık komşuluk sistemi (Lowen, 1982), bulanık yakınımsılık (Artico ve Moresco, 1987) ve bulanık düzgün yapı (Lowen, 1981) kavramlarını genellemek için Chang (1968) anlamındaki uzaylarda Katsaras (1990) tarafından tanımlanan bulanık syntopogenous kavramı, Sostak (1985) anlamındaki bulanık topolojik uzaylara Kim ve diğ., (2012) ve Abdel-Sattar (2011) tarafından genelleştirilmiştir. Bu kısımda ise bulanık esnek kümeler arasındaki yakınlığı parametrelere bağlı olarak derecelendirmek için bulanık esnek topogenous yapısı tanımlanacak ve bu yapının bulanık esnek düzgün yapı ile arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 5.4.1: (a) Her $k \in K, f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in (L^X)^E$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $T: K \to M^{(L^X)^E \times (L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek T-yakınımsılık yapısı (topogenous) denir.

(Burada, her $k \in K$ için $T_k := T(k): (L^X)^E \times (L^X)^E \to M$ bir dönüşümdür. )

(T1) $T_k(\tilde{E}_X, \tilde{E}_X) = T_k(\Phi_X, \Phi_X) = 1_M$.

(T2) Eğer $T_k(f, g) \neq 0_M$ ise $f \sqsubseteq g$.

(T3) Eğer $f \sqsubseteq f_1$ ve $g_1 \sqsubseteq g$ ise $T_k(f_1, g_1) \leq T_k(f, g)$.

(T4) $T_k(f_1 \sqcup f_2, g) \geq T_k(f_1, g) \wedge T_k(f_2, g)$.

(T5) $T_k(f, g_1 \sqcap g_2) \geq T_k(f, g_1) \wedge T_k(f, g_2)$.

(T6) $T_k \leq T_k \circ T_k$, burada $f, g \in (L^X)^E$ için

$T_k \circ T_k(f, g) = \bigvee_{h \in (L^X)^E} \{T_k(f, h) \wedge T_k(h, g)\}$.

$(X, T)$ ikilisine de bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek T-yakınımsı (topogenous) uzay denir.

(b) Her $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için $T_k^s(f, g) = T_k(g', f')$ olmak üzere $T = T^s$ sağlanıyorsa $T$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek T-yakınlık yapısına simetrik denir.

(c) $T^1$ ve $T^2, X$ üzerinde iki $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek T-yakınlık olmak üzere, her $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için $T_k^2(f, g) \leq T_k^1(f, g)$ oluyorsa $T^1$, $T^2$ den daha incedir (ya da $T^2$, $T^1$ den daha kabadır) denir ve bu durum $T^2 \leq T^1$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 5.4.2: $(X,T)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay olmak üzere, tanımdaki (T3), (T4) ve (T5) özelliklerinden aşağıdaki koşullar elde edilir:

(T4)′ $T_k(f_1 \sqcup f_2, g) = T_k(f_1, g) \wedge T_k(f_2, g)$.

(T5)′ $T_k(f, g_1 \sqcap g_2) = T_k(f, g_1) \wedge T_k(f, g_2)$.

Uyarı 5.4.3: (1) Parametre kümeleri $E, K$ tek noktalı ve $L = M$ olarak alınırsa, Tanım 5.4.1 ile Kim ve diğ. (2012) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) Parametre kümeleri $E, K$ tek noktalı ve $L = M$ kesin iki yanlı değişmeli q-latis olarak alınırsa, Tanım 5.4.1 ile Abdel-Sattar (2011) tarafından verilen tanım çakışır.

Örnek 5.4.4: $X = \{x, y\}, L = M = I$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ olsun. $u, v \in (I^X)^E$ bulanık esnek kümeleri her $e \in E$ parametresi için $u_e(x) = u_e(y) = 0.5$ ve $v_e(x) = 0.3, v_e(y) = 0.7$ olarak verilsin. Buna göre aşağıdaki şekilde tanımlanan $T: K \to M^{(L^X)^E \times (L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir bulanık esnek T-yakınımsılık (topogenous) yapısıdır.

$$T_{k_1}(f,g) = \begin{cases} 1, & f = \Phi_X \; veya \; g = \tilde{E}_X \\ 0, & diğer \end{cases}, \quad T_{k_2}(f,g) = \begin{cases} 1, & f = \Phi_X \; veya \; g = \tilde{E}_X \\ \frac{1}{3}, & \Phi_X \neq f \sqsubseteq u \sqsubseteq g \neq \tilde{E}_X, \\ 0, & diğer \end{cases}$$

$$T_{k_3}(f,g) = \begin{cases} 1, & f = \Phi_X \; veya \; g = \tilde{E}_X \\ \frac{2}{3}, & \Phi_X \neq f \sqsubseteq g \neq \tilde{E}_X \\ 0, & diğer \end{cases}, \quad T_{k_4}(f,g) = \begin{cases} 1, & f = \Phi_X \; veya \; g = \tilde{E}_X \\ 0.3, & f \sqsubseteq u \sqsubseteq g, v \not\sqsubseteq g \\ 0.5, & f \sqsubseteq v \sqsubseteq g, f \not\sqsubseteq u \\ 0.7, & f \sqsubseteq u \sqcup v \sqsubseteq g \\ 0.6, & f \sqsubseteq u \sqcap v \sqsubseteq g \\ 0, & diğer \end{cases}$$

Teorem 5.4.5: $(X, \mathcal{U})$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek yarı-düzgün uzay olmak üzere

$$T_k^{\mathcal{U}}(f,g) = \vee\{\, \mathcal{U}_k(\lambda) |\, \lambda(f) \sqsubseteq g \,\}$$

olarak tanımlanan $T^{\mathcal{U}}: K \to M^{(L^X)^E} \times M^{(L^X)^E}$ dönüşümü için $(X, T^{\mathcal{U}})$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzaydır. Eğer $(X, \mathcal{U})$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün uzay ise, $(X, T^{\mathcal{U}})$ simetriktir.

İspat: (T1) Her $k \in K$ için $\mathcal{U}_k(\lambda^*) = 1_M$ ve $\lambda^*(\tilde{E}_X) = \tilde{E}_X, \lambda^*(\Phi_X) = \Phi_X$ olduğundan $T_k^{\mathcal{U}}(\tilde{E}_X, \tilde{E}_X) = T_k^{\mathcal{U}}(\Phi_X, \Phi_X) = 1_M$ sağlanır.

(T2) Eğer $T_k^{\mathcal{U}}(f,g) \neq 0_M$ ise en az bir $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ vardır öyle ki, $\mathcal{U}_k(\lambda) \neq 0_M$ ve buradan da $f \sqsubseteq \lambda(f) \sqsubseteq g$ dir.

(T3) Eğer $f \sqsubseteq f_1$ ve $g_1 \sqsubseteq g$ ise, $\lambda(f_1) \sqsubseteq g_1$ olacak şekildeki her $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\lambda(f) \sqsubseteq \lambda(f_1) \sqsubseteq g_1 \sqsubseteq g$ sağlanır. Böylece, her $k \in K$ için $T_k(f_1,g_1) \leq T_k(f,g)$ elde edilir.

(T4) Bir $k \in K$ ve $f_1, f_2, g \in (L^X)^E$ için

$T_k^{\mathcal{U}}(f_1 \sqcup f_2, g) \not\geq T_k^{\mathcal{U}}(f_1,g) \wedge T_k^{\mathcal{U}}(f_2,g)$

olduğunu kabul edelim. $i \in \{1,2\}$ için $T_k^{\mathcal{U}}(f_i,g)$ nin tanımından

$$T_k^{\mathcal{U}}(f_1 \sqcup f_2, g) \not\geq (\vee\{\mathcal{U}_k(\lambda) |\ \lambda(f_1) \sqsubseteq g\}) \wedge (\vee\{\mathcal{U}_k(\mu) |\ \mu(f_2) \sqsubseteq g\})$$

$$= \vee\{\mathcal{U}_k(\lambda) \wedge \mathcal{U}_k(\mu) \mid \lambda(f_1) \sqsubseteq g, \mu(f_2) \sqsubseteq g\}$$

bulunur. Buradan, $\lambda_i(f_i) \sqsubseteq g$ olacak şekilde bir $\lambda_i \in \mathcal{H}(X,E)$ vardır öyle ki

$T_k^{\mathcal{U}}(f_1 \sqcup f_2, g) \not\geq \mathcal{U}_k(\lambda_1) \wedge \mathcal{U}_k(\lambda_2)$

sağlanır. Diğer yandan, $(\lambda_1 \Delta \lambda_2)(f_1 \sqcup f_2, g) \sqsubseteq g$ olduğundan

$T_k^{\mathcal{U}}(f_1 \sqcup f_2, g) \geq \mathcal{U}_k(\lambda_1 \Delta \lambda_2)$ çelişkisi elde edilir.

(T5) Bir $k \in K$ ve $f, g_1, g_2 \in (L^X)^E$ için

$T_k^{\mathcal{U}}(f, g_1 \sqcap g_2) \not\geq T_k^{\mathcal{U}}(f,g_1) \wedge T_k^{\mathcal{U}}(f,g_2)$

olduğunu varsayalım. $i \in \{1,2\}$ için $T_k^{\mathcal{U}}(f,g_i)$ nin tanımından $\lambda_i(f) \sqsubseteq g_i$ olacak şekilde bir $\lambda_i \in \mathcal{H}(X,E)$ mevcuttur öyle ki

$T_k^{\mathcal{U}}(f, g_1 \sqcap g_2) \not\geq \mathcal{U}_k(\lambda_1) \wedge \mathcal{U}_k(\lambda_2)$

sağlanır.

$(\lambda_1 \Delta \lambda_2)(f) \sqsubseteq \lambda_1(f) \sqcap \lambda_2(f) \sqsubseteq g_1 \sqcap g_2$

olduğundan, $T_k^{\mathcal{U}}(f, g_1 \sqcap g_2) \geq \mathcal{U}_k(\lambda_1 \Delta \lambda_2)$ çelişkisi elde edilir.

(T6) Bir $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için $T_k^{\mathcal{U}} \circ T_k^{\mathcal{U}}(f,g) \not\geq T_k^{\mathcal{U}}(f,g)$ olduğunu varsayalım. $T_k^{\mathcal{U}}(f,g)$ nin tanımlanışından $\lambda(f) \sqsubseteq g$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ vardır öyle ki, $T_k^{\mathcal{U}} \circ T_k^{\mathcal{U}}(f,g) \not\geq \mathcal{U}_k(\lambda)$ dır. Tanım 5.2.5 (U4) den, $\mu \circ \mu(f) \sqsubseteq \lambda(f) \sqsubseteq g$ olacak şekilde bir $\mu \in \mathcal{H}(X,E)$ için $T_k^{\mathcal{U}} \circ T_k^{\mathcal{U}}(f,g) \not\geq \mathcal{U}_k(\mu)$ sağlanır.

Diğer yandan, $\mu(f) = \mu(f)$ ve $\mu \circ \mu(f) \sqsubseteq g$ olduğundan, $T_k^{\mathcal{U}}\big(f, \mu(f)\big) \geq \mathcal{U}_k(\mu)$ ve $T_k^{\mathcal{U}}(\mu(f), g) \geq \mathcal{U}_k(\mu)$ sağlanır. Böylece, $T_k^{\mathcal{U}} \circ T_k^{\mathcal{U}}(f,g) \geq \mathcal{U}_k(\mu)$ çelişkisi elde edilir.

$(X, \mathcal{U})$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün uzay olsun. Önerme 5.2.3 gereği $\lambda(f) \sqsubseteq g$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda^{\lhd}(g') \sqsubseteq f'$ ve $\mathcal{U}_k(\lambda) = \mathcal{U}_k(\lambda^{\lhd})$ olmasıdır. Böylece, $(X, T^{\mathcal{U}})$ simetrik bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzaydır.

Lemma 5.4.6: $(X,T)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay olsun ve

$T^0 = \{ (f,g) \in (L^X)^E \times (L^X)^E \mid T_k(f,g) \neq 0_M, k \in K \}$ olsun.

$(f,g) \in T^0$ olmak üzere,

$$\lambda_{f,g}(h) = \begin{cases} \Phi_X, & h = \Phi_X \\ g, & 0_X \neq h \sqsubseteq f \\ 1_X, & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda_{f,g} : (L^X)^E \to (L^X)^E$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\lambda_{f,g} \in \mathcal{H}(X,E)$.

(2) Eğer $f \sqsubseteq g, u \sqsubseteq v$ ve $\lambda_{g,u} \in \mathcal{H}(X,E)$ ise $\lambda_{g,u} \leq \lambda_{f,v}$.

(3) Her $\lambda_{f,g}$ için $\lambda_{h,g} \circ \lambda_{f,h} = \lambda_{f,g}$ olacak şekilde bir $h \in (L^X)^E$ mevcuttur.

(4) Eğer $(X,T)$ simetrik $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay ve $\lambda_{f,g} \in \mathcal{H}(X,E)$ ise $\lambda_{f,g}^{\lhd} = \lambda_{g',f'}$ dir.

(5) $i = 1,2,\dots,n$ için $(f_i, g_i) \in T^0$ olmak üzere $\Gamma = \{ J \subseteq \{1,\dots,n\} \mid h \sqsubseteq \sqcup_{j \in J} f_j \}$ ve $\tau_J = \sqcup_{j \in J} g_j$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) = \begin{cases} \Phi_X, & h = \Phi_X \\ \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J, \Gamma \neq \emptyset \\ 1_X, & \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

İspat: (1) $\lambda_{f,g}$ nin tanımı gereği $\lambda_{f,g}(\Phi_X) = \Phi_X$ olduğu açıktır. Eğer $\Phi_X \neq h \sqsubseteq f$ ise $\lambda_{f,g}(h) = g$ dir. $(f,g) \in T^0$, yani her $k \in K$ için $T_k(f,g) \neq 0_M$ ise (T2) den, $f \sqsubseteq g$ dir. Buradan $h \sqsubseteq \lambda_{f,g}(h)$ sağlanır. Eğer $h \not\sqsubseteq f$ ise buradan $h \sqsubseteq \lambda_{f,g}(h) = \tilde{E}_X$ dir. Böylece, $h \sqsubseteq \lambda_{f,g}(h)$ elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki iki koşul yardımı ile $\lambda_{f,g}(\sqcup_{i\in\Gamma} \nu_i) = \sqcup_{i\in\Gamma} \lambda_{f,g}(\nu_i)$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir:

(i) $\sqcup_{i\in\Gamma} \nu_i \sqsubseteq f$ olması için gerek ve yeter şart her $i \in \Gamma$ için $\nu_i \sqsubseteq f$ olmasıdır.

(ii) $\sqcup_{i\in\Gamma} \nu_i \not\sqsubseteq f$ olması için gerek ve yeter şart en az bir $i \in \Gamma$ için $\nu_i \not\sqsubseteq f$ olmasıdır.

Böylece, $\lambda_{f,g} \in \mathcal{H}(X,E)$ dir.

(2) $\lambda_{g,u}$ ve $\lambda_{f,v}$ nin tanımlarından açıktır.

(3) Tanım 5.4.1 (T6) dan,

$$T_k \circ T_k(f,g) = \bigvee_{h\in(L^X)^E}(T_k(f,h) \wedge T_k(h,g)) \geq T_k(f,g) \neq 0_M$$

olduğundan $T_k(f,h) \neq 0_M$ ve $T_k(h,g) \neq 0_M$ olacak şekilde bir $h \in (L^X)^E$ bulanık esnek kümesi mevcuttur. Böylece, $\lambda_{f,h}, \lambda_{h,g} \in \mathcal{H}(X,E)$ dir. Ayrıca, herhangi bir $\nu \in (L^X)^E$ için $\lambda_{h,g} \circ \lambda_{f,h}(\nu) = \lambda_{f,g}(\nu)$ olduğu da kolaylıkla görülür.

(4) $(X,T)$ simetrik bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay ve $\lambda_{f,g} \in \mathcal{H}(X,E)$ ise $T_k(f,g) = T_k(g',f') \neq 0_M$ dir. Buna göre $\lambda_{g',f'} \in \mathcal{H}(X,E)$ dir. Aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) ifadelerinden her $h \in (L^X)^E$ için $\lambda_{f,g}^{\triangleleft}(h) = \lambda_{g',f'}(h)$ olduğu gösterilir.

(i) Eğer $h = \Phi_X$ ise buradan,

$$\lambda_{f,g}^{\triangleleft}(\Phi_X) = \sqcap \{ \nu \mid \lambda_{f,g}(\nu') \sqsubseteq 1_X \} = \Phi_X = \lambda_{g',f'}(\Phi_X)$$ dir.

(ii) Eğer $\Phi_X \neq h \sqsubseteq g$ ise, $\lambda_{f,g}$ nin tanımından, $\lambda_{f,g}(\nu') \sqsubseteq h'$ ancak ve ancak $\lambda_{f,g}(\nu') \sqsubseteq g$ ancak ve ancak $\nu' \sqsubseteq f$ sağlanır. Böylece,

$\lambda_{f,g}^{\triangleleft}(h) = \sqcap \{ \nu \in (L^X)^E \mid \lambda_{f,g}(\nu') \sqsubseteq 1_X \} = \sqcap \{ \nu \in (L^X)^E \mid \nu \sqsupseteq f' \} = f' = \lambda_{g',f'}(h)$ dir.

(iii) Eğer $h \not\sqsubseteq g'$ ve $\lambda_{f,g}(\nu') \sqsubseteq h'$ ise, $\lambda_{f,g}$ nin tanımından $\lambda_{f,g}(\nu') = \Phi_X$ dir. Bu ise $\nu = \tilde{E}_X$ olduğu anlamına gelir. Böylece, $\lambda_{f,g}^{\triangleleft}(h) = \lambda_{g',f'}(h) = \tilde{E}_X$ dir.

(5) Eğer $h = \Phi_X$ yada $\Gamma = \emptyset$ ise ispat açıktır. Bu durumda, sadece $\Gamma \neq \emptyset$ için $\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) = \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Varsayalım ki, $\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) \not\sqsubseteq \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J$ olsun. $\Gamma \neq \emptyset$ olduğundan $h \sqsubseteq \sqcup_{j\in J} f_j$ olacak şekilde bir $J \in \Gamma$ mevcuttur öyle ki, $\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) \not\sqsubseteq \tau_J$ dir. $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için

$$h_i = \begin{cases} f \sqcap g_i, i \in J \\ 0_X, \quad diğer \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $h = \sqcup_{i\in J} h_i$ ve her $i \in J$ için $h_i \sqsubseteq f_i$ olduğundan

$$\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h_i) \sqsubseteq \sqcup_{i\in J} g_i = \tau_J$$

bulunur. Tersine, $\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) \not\sqsupseteq \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $h = \sqcup_{i=1}^{n} h_i$ olacak şekilde bir $h_i \in (L^X)^E$ vardır öyle ki $(\sqcup_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h_i)) \not\sqsupseteq \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J$ sağlanır. $\nu = \sqcup_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h_i)$ ve $P = \{ p \in \{1,\dots,n\} \mid g_p \sqsubseteq \nu \}$ olsun. Buradan, $\tau_P \sqsubseteq \nu$ bulunur. Eğer $i \notin P$ ise $g_i \not\sqsubseteq \nu$ dir. Böylece, $\lambda_{f_i,g_i}(h_i) = \Phi_X$ dir ki bu ise $h_i = \Phi_X$ olmasını gerektirir. Eğer $p \in P$ ise bu durumda $\lambda_{f_p,g_p}(h_p) \neq \tilde{E}_X$ olduğundan $h_p \sqsubseteq f_p$ dir. Buradan aşağıdaki ifade elde edilir:

$h = \sqcup_{i=1}^{n} h_i = \sqcup_{p\in P} h_p \sqsubseteq \sqcup_{p\in P} f_p$.

Buradan bir $P \in \Gamma$ mevcuttur öyle ki $\sqcup_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h_i) = \nu \sqsupseteq \tau_P \sqsupseteq \sqcap_{P\in\Gamma} \tau_P$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak,

$\sqcap_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i}(h) \sqsupseteq \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J$ elde edilir.

Teorem 5.4.7: $M$ bir tam dağılımlı latis ve $(X,T)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay olmak üzere

$$\mathcal{U}_k^T(\lambda) = \bigvee\{\wedge_{i=1}^n T_k(f_i, g_i) \mid \wedge_{i=1}^n \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{U}^T : K \to M^{\mathcal{H}(X,E)}$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(Burada supremum sonlu $\{\lambda_{f_i,g_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ kümesi üzerinden alınmaktadır.)

(1) $\mathcal{U}^T$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek yarı-düzgün yapıdır.

(2) Eğer $(X, T)$ bir simetrik $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek T-yakınımsı uzay ise $\mathcal{U}^T$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek düzgün yapıdır.

İspat: (U1) ve (U3) koşullarının ispatı açıktır. Bu nedenle yalnızca (U2) ve (U4) koşullarının ispatları verilecektir.

(U2) Bir $k \in K$ ve $\lambda, \mu \in \mathcal{H}(X, E)$ için $\mathcal{U}_k^T(\lambda\Delta\mu) \not\geq \mathcal{U}_k^T(\lambda) \wedge \mathcal{U}_k^T(\mu)$ olduğunu varsayalım. Buradan,

$$\mathcal{U}_k^T(\lambda\Delta\mu) \not\geq \left(\bigwedge_{i=1}^m T_k(f_i, g_i)\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^n T_k(v_j, w_j)\right)$$

olacak şekilde sonlu birer $\{\lambda_{f_i,g_i} \mid \wedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda\}$ ve $\left\{\lambda_{v_j,w_j} \middle| \wedge_{j=1}^n \lambda_{v_j,w_j} \leq \mu\right\}$ aileleri mevcuttur. Diğer yandan $\lambda\Delta\mu \geq (\wedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i}) \wedge (\wedge_{j=1}^n \lambda_{v_j,w_j})$ olduğundan,

$$\mathcal{U}_k^T(\lambda\Delta\mu) \geq (\wedge_{i=1}^m T_k(f_i, g_i)) \wedge (\wedge_{j=1}^n T_k(v_j, w_j))$$

çelişkisi elde edilir.

(U4) Bir $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X, E)$ için

$$\mathcal{U}_k^T(\lambda) \not\leq \bigvee\{\mathcal{U}_k^T(\lambda_1) \mid \lambda_1 \circ \lambda_1 \leq \lambda\}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Burada, $\alpha = \vee\{\mathcal{U}_k^T(\lambda_1) \mid \lambda_1 \circ \lambda_1 \leq \lambda\}$ denirse $\mathcal{U}^T$ nın tanımından, $\alpha \not\geq \wedge_{i=1}^m T_k(f_i, g_i)$ olacak şekilde bir $\{\lambda_{f_i,g_i} \mid \wedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda\}$ ailesi mevcuttur. $T \circ T \geq T$ olduğundan,

$$\alpha \not\geq \bigwedge_{i=1}^{m} T_k \circ T_k(f_i, g_i) = \bigwedge_{i=1}^{m} \left\{ \bigvee_{h \in (L^X)^E} \left( T_k(f_i, h) \wedge T_k(h, g_i) \right) \right\}$$

sağlanır. $M$ tam dağılımlı bir latis olduğundan, bir $h_i \in (L^X)^E$ bulanık esnek kümesi vardır öyle ki

$$\alpha \not\geq \bigwedge_{i=1}^{m} (T_k(f_i, h_i) \wedge T_k(h_i, g_i))$$

dir. Diğer yandan, her $i \in \{1,2,\dots,m\}$ için $\alpha \not\geq T_k(f_i, h_i) \wedge T_k(h_i, g_i)$ olduğundan Önerme 5.2.3 ve Lemma 5.4.6 gereğince $\lambda_{h_i,g_i}, \lambda_{f_i,h_i} \in \mathcal{H}(X,E)$ dir.

$\mu_i = \lambda_{h_i,g_i} \wedge \lambda_{f_i,h_i}$ diyelim. Yukarıdaki Önerme 5.2.3 den,

$\mu_i \circ \mu_i \leq \lambda_{h_i,g_i} \circ \lambda_{f_i,h_i} = \lambda_{f_i,g_i}$ ve $\mathcal{U}_k^T(\mu_i) \geq T_k(h_i, g_i) \wedge T_k(f_i, h_i)$

bulunur. $\mu = \wedge_{i=1}^{m} \mu_i$ olarak verilsin. Her bir $i \in \{1,2,\dots,m\}$ için $\mu_i \circ \mu_i \leq \lambda_{f_i,g_i}$ olduğundan

$$\mu \circ \mu = (\wedge_{i=1}^{m} \mu_i) \circ (\wedge_{i=1}^{m} \mu_i) \leq \mu_i \circ \mu_i \leq \lambda_{f_i,g_i}$$

elde edilir. Böylece Önerme 5.2.3 den,

$$\mu \circ \mu = (\wedge_{i=1}^{m} \mu_i) \circ (\wedge_{i=1}^{m} \mu_i) \leq \wedge_{i=1}^{m} \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda$$

ve böylece de $\mathcal{U}_k^T(\mu) \geq \wedge_{i=1}^{m} \mathcal{U}_k^T(\mu_i)$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\alpha = \bigvee \{ \mathcal{U}_k^T(\lambda_1) \mid \lambda_1 \circ \lambda_1 \leq \lambda \} \geq \mathcal{U}_k^T(\mu) \geq \bigwedge_{i=1}^{m} (T_k(f_i, h_i) \wedge T_k(h_i, g_i))$$

çelişkisi elde edilir.

(2) $(X,T)$ simetrik bir $(L,M)$-bulamık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay olsun. Bir $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için

$$\mathcal{U}_k^T(\lambda) \not\leq \bigvee \{ \mathcal{U}_k^T(\mu) \mid \mu \leq \lambda^{\lhd} \}$$

olduğunu varsayalım. Burada, $\alpha = \bigvee\{\mathcal{U}_k^T(\mu) \mid \mu \leq \lambda^{\triangleleft}\}$ olsun. $\mathcal{U}_k^T(\lambda) \not\leq \alpha$ olacağından, $\bigwedge_{i=1}^n T_k(f_i, g_i) \not\leq \alpha$ olacak biçimde sonlu bir $\left\{ \lambda_{f_i,g_i} \,\middle|\, \bigwedge_{i=1}^n \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda \right\}$ ailesi mevcuttur. Her bir $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $T_k(f_i, g_i) \not\leq \alpha$ ve ayrıca $(X,T)$ simetrik bir T-yakınımsı uzay olduğundan, $T_k(f_i, g_i) = T_k(g_i', f_i')$ dir. $\lambda_{f_i,g_i}^{\triangleleft} = \lambda_{g_i',f_i'}$ eşitliğinden ve Önerme 5.2.3 den aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\lambda^{\triangleleft} \geq (\bigwedge_{i=1}^n \lambda_{f_i,g_i})^{\triangleleft} = \bigwedge_{i=1}^n \lambda_{f_i,g_i}^{\triangleleft} = \bigwedge_{i=1}^n \lambda_{g_i',f_i'}.$$

Böylece, $\mathcal{U}_k^T(\lambda^{\triangleleft}) \geq \bigwedge_{i=1}^n T_k(g_i', f_i') = \bigwedge_{i=1}^n T_k(f_i, g_i)$

dir. Bu ise

$$\alpha = \bigvee\{\mathcal{U}_k^T(\mu) \mid \mu \leq \lambda^{\triangleleft}\} \geq \mathcal{U}_k^T(\lambda^{\triangleleft}) \geq \bigwedge_{i=1}^n T_k(f_i, g_i)$$

çelişkisini doğurur.

$(X,\mathcal{U})$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün uzay ve $(X,T)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay olmak üzere, eğer $T^{\mathcal{U}} = T$ eşitliği sağlanıyorsa $(X,\mathcal{U})$ ya $(X,T)$ ile uyumludur denir. Verilen bir $T$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı yapısı ile uyumlu olan tüm $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek düzgün yapıların ailesi $\coprod T$ sınıfı ile gösterilir.

Teorem 5.4.8: $(X,T)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı uzay ve $T^{\mathcal{U}^T}$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek T-yakınımsı yapısı ise $\mathcal{U}^T$ tarafından üretilmiş olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $T^{\mathcal{U}^T} = T$ yani, $\mathcal{U}^T \in \coprod T$ dir.

(2) $\mathcal{U}^T$, $\coprod T$ sınıfının en kaba elemanıdır.

İspat: (1) Öncelikle $T^{\mathcal{U}^T} \geq T$ olduğu gösterilecektir. Eğer her $k \in K$ için $T_k(f,g) \neq 0_M$ ve $T_k(f,g) \neq 1_M$ ise Lemma 5.4.6 dan, öyle bir $\lambda_{f,g} \in \mathcal{H}(X,E)$ bulunabilir ki Teorem 5.4.7 den, $\mathcal{U}_k^T(\lambda_{f,g}) \geq T_k(f,g)$ sağlanır. $\lambda_{f,g}(f) = g$ oluşundan ve Teorem 5.4.5 den, $T_k^{\mathcal{U}^T}(f,g) \geq \mathcal{U}_k^T(\lambda_{f,g})$ dir. Böylece, $T^{\mathcal{U}^T} \geq T$ bulunur.

$T^{\mathcal{U}^T} \not\leq T$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $T_k^{\mathcal{U}^T}(f,g) \not\leq T_k(f,g)$ olacak şekilde en az bir $k \in K$ ve $f,g \in (L^X)^E$ mevcuttur. Buradan, $T^{\mathcal{U}^T}$ tanımı gereği $\lambda(f) \sqsubseteq g$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ mevcuttur öyle ki $\mathcal{U}_k^T(\lambda) \not\leq T_k(f,g)$ dir. O halde, $\mathcal{U}^T$ nın tanımı gereği $\bigwedge_{i=1}^m T_k(f_i,g_i) \not\leq T_k(f,g)$ olacak biçimde sonlu bir $\{\lambda_{f_i,g_i} \mid \bigwedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda\}$ ailesi mevcuttur. Diğer yandan, $\Gamma = \{J \subseteq \{1,2,\dots,m\} \mid f \sqsubseteq \sqcup_{j\in J} f_j\}$ olsun.

Eğer $\Gamma = \emptyset$ ise, $\bigwedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i}(f) = \tilde{E}_X \sqsubseteq g$ dir. Böylece, $g = \tilde{E}_X$ bulunur ve bu ise $T_k(f,g) \geq T_k(1_X,1_X) = 1_M$ çelişkisine neden olur.

Eğer $g = \Phi_X$ ise $T_k^{\mathcal{U}^T}(f,g) \neq \Phi_X$ ve Tanım 5.4.1 gereğince, $f = \Phi_X$ dir. Böylece, $T_k(\Phi_X,\Phi_X) = 1_M$ çelişkisi bulunur.

Eğer $\Gamma \neq \emptyset$ ve $g \neq \Phi_X$ ise, Lemma 5.4.6 dan, $\sqcap_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i}(f) = \sqcap_{J\in\Gamma} \tau_J \sqsubseteq g$ olacak biçimde bir $\Gamma = \{J \subseteq \{1,2,\dots,m\} \mid f \sqsubseteq \sqcup_{j\in J} f_j\}$ mevcuttur. Böylece, $g \sqsupseteq \sqcap_{J\in\Gamma} (\sqcup_{j\in J} g_j)$ dir. Ayrıca $f \sqsubseteq \sqcap_{J\in\Gamma} (\sqcup_{j\in J} f_j)$ dir.

$T_k(\sqcup_{j\in J} f_j, \sqcup_{j\in J} g_j) \geq \bigwedge_{i=1}^m T_k(f_i,g_i)$ olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$T_k(f,g) \geq T_k\left(\bigwedge_{J\in\Gamma}\left(\bigvee_j f_j\right), \bigwedge_{J\in\Gamma}\left(\bigvee_j g_j\right)\right)$$

$$\geq T_k\left(\bigvee_j f_j, \bigwedge_{J\in\Gamma}\left(\bigvee_j g_j\right)\right)$$

$$\geq \bigwedge_{J\in\Gamma} T_k\left(\bigvee_j f_j, \bigvee_j g_j\right) \geq \bigwedge_{i=1}^m T_k(f_i,g_i).$$

(2) (1) nolu özellikten $\mathcal{U}^T$ yapısı $T$ ile uyumludur. $\mathcal{U}, \coprod T$ sınıfına ait keyfi bir eleman olmak üzere her $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\mathcal{U}_k^T(\lambda) \leq \mathcal{U}_k(\lambda)$ olduğu gösterilecektir. Bir $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X,E)$ için $\mathcal{U}_k^T(\lambda) \not\leq \mathcal{U}_k(\lambda)$ olduğunu varsayalım. Buradan $\bigwedge_{i=1}^m T_k(f_i,g_i) \not\leq \mathcal{U}_k(\lambda)$ olacak şekilde sonlu bir $\{\lambda_{f_i,g_i} \mid \bigwedge_{i=1}^m \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda\}$ ailesi vardır.

$\mathcal{U} \in \coprod T$, yani $i = 1,2,\dots,m$ için $T_k(f_i,g_i) = T_k^{\mathcal{U}}(f_i,g_i)$ sağlandığından $\mu_i(f_i) \sqsubseteq g_i$ olacak şekilde bir $\mu_i \in \mathcal{H}(X,E)$ vardır öyle ki $\bigwedge_{i=1}^m \mathcal{U}_k(\mu_i) \not\leq \mathcal{U}_k(\lambda)$ sağlanır.

Diğer yandan, $\mu = \bigwedge_{i=1}^{m} \mu_i$ diyelim. $\mu_i(f_i) \sqsubseteq g_i$ olduğundan, $\lambda_{f_i,g_i}$ tanımından $\mu_i \leq \lambda_{f_i,g_i}$ dir. Bu ise $\mu \leq \bigwedge_{i=1}^{m} \mu_i \leq \bigwedge_{i=1}^{m} \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{U}_k(\lambda) \geq \mathcal{U}_k(\mu) \geq \bigwedge_{i=1}^{m} \mathcal{U}_k(\mu_i)$$

çelişkisi elde edilir.

Teorem 5.4.9: $(X, \mathcal{U})$ bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek düzgün uzay olsun. $T^{\mathcal{U}}$ tarafından üretilen $\mathcal{U}^{T^{\mathcal{U}}}$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek düzgün yapısı $\mathcal{U}$ dan daha kabadır.

İspat: $\mathcal{U}^{T^{\mathcal{U}}} \not\leq \mathcal{U}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\mathcal{U}_k^{T^{\mathcal{U}}}(\lambda) \not\leq \mathcal{U}_k(\lambda)$ olacak şekilde en az bir $k \in K$ ve $\lambda \in \mathcal{H}(X, E)$ mevcuttur. $\mathcal{U}^{T^{\mathcal{U}}}$ tanımından,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} T_k^{\mathcal{U}}(f_i, g_i) \leq \mathcal{U}_k(\lambda)$$

olacak biçimde sonlu bir $\left\{ \lambda_{f_i,g_i} \,\middle|\, \bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_{f_i,g_i} \leq \lambda \right\}$ ailesi mevcuttur. $T^{\mathcal{U}}$ nun tanımından her bir $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $\mu_i(f_i) \sqsubseteq g_i$ olacak şekilde bir $\mu_i \in \mathcal{H}(X, E)$ vardır öyle ki

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{U}_k(\mu_i) \not\leq \mathcal{U}_k(\lambda)$$

sağlanır. $\mu = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i$ olarak verilsin. $\mu_i(f_i) \sqsubseteq g_i$ olduğundan, $\lambda_{f_i,g_i}$ tanımından $\mu_i \leq \lambda_{f_i,g_i}$ dir. Böylece, $\mu \leq \lambda$ ve dolayısıyla da

$\mathcal{U}_k(\lambda) \geq \mathcal{U}_k(\mu) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{U}_k(\mu_i)$çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, $\mathcal{U}^{T^{\mathcal{U}}} \leq \mathcal{U}$ bulunur.

# 6. BULANIK ESNEK FİLTRE YAKINSAKLIĞI

Bu bölümün amacı bulanık esnek filtre kavramını tanımlamak ve bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek filtre yakınsaklığını incelemektir. Bu nedenle, öncelikle bulanık esnek noktanın yarı-çakışımsı (quasi-coincident) komşuluk sistemi tanımlanacak ve bu sistem ile bulanık esnek topoloji arasındaki özellikler kategorik açıdan araştırılacaktır. İkinci olarak, bulanık esnek filtre kavramı tanımlanacak ve bir takım önemli özellikleri incelenecektir. Son olarak, bulanık esnek topolojik uzaylarda filtre yakınsaklığı tanımlanacak ve önemli sonuçlar elde edilecektir. Böylece genel (bulanık) topolojik uzaylarda önemli bir rol oynayan filtreler ve filtre yakınsaklığı bulanık esnek topolojik uzaylara genişletilmiş olacaktır.

## 6.1. Bulanık Esnek Komşuluk Sistemi

Bu kısımda, bulanık esnek nokta için q-çakışımsı komşuluk sistemi tanımlanacak ve bulanık esnek q-çakışımsı komşuluk sistemi ile bulanık esnek topoloji arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 6.1.1: (a) Aşağıdaki koşulları sağlayan $Q_{x^\alpha} : K \times (L^X)^E \to M$ dönüşümlerinin $Q = \{Q_{x^\alpha} \mid x^\alpha \in FSPt(X)\}$ ailesine $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek q-komşuluk sistemi denir.

(FSQ1) $Q_{x^\alpha}(k, \tilde{E}_X) = 1_M$, $Q_{x^\alpha}(k, \Phi_X) = 0_M$.

(FSQ2) Eğer $Q_{x^\alpha}(k, f) \neq 0_M$ ise $x^\alpha q f$ dir.

(FSQ3) $Q_{x^\alpha}(k, f \sqcap g) = Q_{x^\alpha}(k, f) \wedge Q_{x^\alpha}(k, g)$.

$(X, Q)$ ikilisine de bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek q-komşuluk uzayı denir.

(b) Bir $(X, Q)$ $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek q-komşuluk uzayına topolojiktir denir $:\Leftrightarrow$ Her $x^\alpha \in FSPt(X)$ ve $f \in (L^X)^E$ için aşağıdaki aksiyom sağalanır.

(FSQ4) $Q_{x^\alpha}(k, f) = \bigvee_{x^\alpha q g \sqsubseteq f} \bigwedge_{y^\gamma q g} Q_{y^\gamma}(k, g)$.

Uyarı 6.1.2: (1) $E, K$ parametre kümelerinin her ikisi de tek noktalı kümeler ve $L = M$ olarak alınırsa, Tanım 6.1.1 ile Jinming (2006) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) $E$ ve $K$ tek noktalı kümeler olarak alınırsa, Tanım 6.1.1 ile Kim ve diğ. (2007) tarafından verilen tanım çakışır.

Tanım 6.1.3: $(X_1, Q^1)$ ve $(X_2, Q^2)$ sırasıyla $(L, M)$-bulanık $(E_1, K_1)$-esnek q-komşuluk uzayı ve $(L, M)$-bulanık $(E_2, K_2)$-esnek q-komşuluk uzayı olsun. Bu durumda, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, Q^1) \to (X_2, Q^2)$ dönüşümüne süreklidir denir $:\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1, g \in (L^{X_2})^{E_2}$ ve $x^\alpha \in FSPt(X_1)$ için

$Q^2_{\varphi_\psi(x^\alpha)}(\eta(k), g) \leq Q^1_{x^\alpha}\left(k, \varphi_\psi^{-1}(g)\right)$ sağlanır.

Önerme 6.1.4: $\tau, X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topoloji olsun. Her bir $k \in K, f \in (L^X)^E$ ve $x^\alpha \in FSPt(X)$ için

$$Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) = \begin{cases} \bigvee_{x^\alpha q g \sqsubseteq f} \tau_k(g), & x^\alpha q f \; ise \\ 0_M, & diğer \end{cases}$$

olarak tanımlanan $Q^\tau_{x^\alpha}: K \times (L^X)^E \to M$ dönüşümlerin $Q^\tau = \{ Q^\tau_{x^\alpha} \mid x^\alpha \in FSPt(X)\}$ ailesi $X$ üzerinde bir topolojik $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek q-komşuluk sistemidir ve buna $\tau$ ile üretilen topolojik $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek q-komşuluk sistemi denir. Ayrıca, her $e \in E$ için $\alpha(e) \leq \beta(e)$ ise $Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \leq Q^\tau_{x^\beta}(k, f)$ dir.

İspat: Tanım 6.1.1 deki (FSQ1)-(FSQ4) koşullarının sağlandığını göstermek gerekmektedir.

(FSQ1) ve (FSQ2) tanımdan açıktır.

(FSQ3): Öncelikle eğer $f \sqsubseteq h$ ise $Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \leq Q^\tau_{x^\alpha}(k, h)$ olduğu açıktır. Buradan,

$Q^\tau_{x^\alpha}(k, f \sqcap g) \leq Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \wedge Q^\tau_{x^\alpha}(k, g)$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Bir $\mu \in c(M)$ için $\mu \lhd \left(Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \wedge Q^\tau_{x^\alpha}(k, g)\right)$ olduğunu kabul edelim. Böylece, $\mu \lhd Q^\tau_{x^\alpha}(k, f)$ ve $\mu \lhd Q^\tau_{x^\alpha}(k, g)$ sağlanır. Buradan, $x^\alpha q u \sqsubseteq f$, $\mu \leq \tau_k(u)$ ve

$x^{\alpha}qv \sqsubseteq g,\ \mu \leq \tau_k(v)$ olacak şekilde en az bir $u, v \in (L^X)^E$ mevcuttur. O halde, $\mu \leq \tau_k(u) \wedge \tau_k(v) \leq \tau_k(u \sqcap v)$ dir. $\alpha(e)$ bir indirgenemez eleman olduğundan $x^{\alpha}q(u \sqcap v) \sqsubseteq f \sqcap g$ olduğu açıktır. Böylece, $Q^{\tau}$ nun tanımından

$$Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f \sqcap g) \geq \tau_k(u \sqcap v) \geq \mu$$

sağlanır. $\mu$ keyfi olduğundan istenilen eşitsizlik aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f \sqcap g) \geq Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f) \wedge Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, g).$$

(FSQ4): $k \in K$ ve bir $g \in (L^X)^E$ için $x^{\alpha}qg \sqsubseteq f$ olsun. Buradan,

$$\tau_k(g) \leq \bigwedge_{y^{\gamma}qg} Q^{\tau}_{y^{\gamma}}(k, g) \leq Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, g) \leq Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f)$$

olduğu açıktır. Böylece,

$$Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f) = \bigvee_{x^{\alpha}qg \sqsubseteq f} \tau_k(g) \leq \bigvee_{x^{\alpha}qg \sqsubseteq f} \bigwedge_{y^{\gamma}qg} Q^{\tau}_{y^{\gamma}}(k, g) \leq Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f)$$

bulunur. Sonuç olarak arzu edilen,

$$Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f) = \bigvee_{x^{\alpha}qg \sqsubseteq f} \bigwedge_{y^{\gamma}qg} Q^{\tau}_{y^{\gamma}}(k, g)$$

eşitliği elde edilir.

Her $e \in E$ için $\alpha(e) \leq \beta(e)$ olsun. Buradan, her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\{\, g \in (L^X)^E \mid x^{\alpha}qg \sqsubseteq f \,\} \subseteq \left\{\, h \in (L^X)^E \;\middle|\; x^{\beta}qh \sqsubseteq f \,\right\}.$$

Bu ise $Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f) \leq Q^{\tau}_{x^{\beta}}(k, f)$ sonucunu verir.

Lemma 6.1.5: Her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için,

$\tau_k(f) = \bigwedge_{x^{\alpha}qf} Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f)$ dir.

İspat: Her bir $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için, $\tau_k(f) \leq \bigwedge_{x^{\alpha}qf} Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k, f)$ açık olduğundan eşitsizliğin diğer yönünü göstermek yeterlidir. $\mathcal{B}(x^{\alpha}) =$

$\{g \in (L^X)^E \mid x^\alpha qg \sqsubseteq f\}$ olmak üzere her $\mathfrak{S} \in \prod_{x^\alpha qf} \mathcal{B}(x^\alpha)$ için $\sqcup_{x^\alpha qf} \mathfrak{S}(g) = f$ olacağından aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\bigwedge_{x^\alpha qf} Q^\tau_{x^\alpha}(k,f) = \bigwedge_{x^\alpha qf} \bigvee_{x^\alpha qg \sqsubseteq f} \tau_k(g)$$

$$= \bigvee_{\mathfrak{S} \in \prod_{x^\alpha qf} \mathcal{B}(x^\alpha)} \bigwedge_{x^\alpha qf} \tau_k(\mathfrak{S}(g))$$

$$\leq \bigvee_{\mathfrak{S} \in \prod_{x^\alpha qf} \mathcal{B}(x^\alpha)} \tau_k(\sqcup_{x^\alpha qf} \mathfrak{S}(g)) = \tau_k(f).$$

Sonuç 6.1.6: Eğer $\tau^1$ ve $\tau^2$, $X$ kümesi üzerinde aynı topolojik $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek q-komşuluk sistemini belirleyen iki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji ise $\tau^1 = \tau^2$ dir.

İspat: Lemma 6.1.5 den açıktır.

Önerme 6.1.7: $Q = \{Q_{x^\alpha} \mid x^\alpha \in FSPt(X)\}$ ailesi $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek q-komşuluk sistemi olsun. $X$ üzerinde her bir $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için

$$\tau^Q_k(f) = \bigwedge_{x^\alpha qf} Q_{x^\alpha}(k,f)$$

olarak tanımlanan $\tau^Q : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\tau^Q$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojidir ve buna $Q$ tarafından üretilen $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji denir.

(2) Eğer $Q^1$ ve $Q^2$, $X$ üzerinde aynı $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojiyi üreten iki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek q-komşuluk sistemi ise, $Q^1 = Q^2$ dir.

(3) Eğer $Q = \{Q_{x^\alpha} \mid x^\alpha \in FSPt(X)\}$ ailesi $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek q-komşuluk sistemi ise her $x^\alpha \in FSPt(X)$ için $Q^{\tau^Q}_{x^\alpha} = Q_{x^\alpha}$ dir.

İspat: (1) $\tau^Q$ dönüşümünün Tanım 2.1.3 (O1)-(O3) özelliklerini sağladığını göstermek yeterlidir. (O1) tanımdan açıktır.

(O2): $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\tau_k^Q(f \sqcap g) = \bigwedge_{x^\alpha q(f \sqcap g)} Q_{x^\alpha}(k, f \sqcap g)$$

$$= \bigwedge_{x^\alpha q(f \sqcap g)} \left(Q_{x^\alpha}(k,f) \wedge Q_{x^\alpha}(k,g)\right)$$

$$\geq \left(\bigwedge_{x^\alpha qf} Q_{x^\alpha}(k,f)\right) \wedge \left(\bigwedge_{x^\alpha qg} Q_{x^\alpha}(k,g)\right) = \tau_k^Q(f) \wedge \tau_k^Q(g).$$

Böylece, $\tau_k^Q(f \sqcap g) \geq \tau_k^Q(f) \wedge \tau_k^Q(g)$ elde edilir.

(O3): $k \in K$ ve $\{f_i\}_{i \in \Gamma} \subseteq (L^X)^E$ olmak üzere aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\tau_k^Q(\sqcup_{i \in \Gamma} f_i) = \bigwedge_{x^\alpha q(\sqcup_{i \in \Gamma} f_i)} Q_{x^\alpha}(k, \sqcup_{i \in \Gamma} f_i)$$

$$= \bigwedge_{i \in \Gamma} \bigwedge_{x^\alpha q f_i} Q_{x^\alpha}(k, \sqcup_{i \in \Gamma} f_i)$$

$$\geq \bigwedge_{i \in \Gamma} \bigwedge_{x^\alpha q f_i} Q_{x^\alpha}(k, f_i) = \bigwedge_{i \in \Gamma} \tau_k^Q(f_i).$$

(2) $Q^1$ ve $Q^2$ tarafından $X$ üzerinde üretilen aynı $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topoloji $\tau$ ile gösterilsin. $k \in K, x^\alpha \in FSPt(X)$ ve $f \in (L^X)^E$ olmak üzere,

$$Q^1_{x^\alpha}(k,f) = \bigvee_{x^\alpha qg \subseteq f} \bigwedge_{y^\gamma qg} Q^1_{y^\gamma}(k,g) = \bigvee_{x^\alpha qg \subseteq f} \tau_k(g) = \bigvee_{x^\alpha qg \subseteq f} \bigwedge_{y^\gamma qg} Q^2_{y^\gamma}(k,g) = Q^2_{x^\alpha}(k,f)$$

bulunur. Buradan arzu edilen $Q^1 = Q^2$ eşitliğine ulaşılır.

(3) $Q = \{ Q_{x^\alpha} \mid x^\alpha \in FSPt(X) \}$ ailesi $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek q-komşuluk sistemi olmak üzere aşağıdaki ifade sağlanır.

$$Q^{\tau^Q}_{x^\alpha}(k,f) = \bigvee_{x^\alpha qg \subseteq f} \tau_k^Q(g) = \bigvee_{x^\alpha qg \subseteq f} \bigwedge_{y^\gamma qg} Q_{y^\gamma}(k,g) = Q_{x^\alpha}(k,f).$$

Önerme 6.1.8: $(X_1, Q^1)$ ve $(X_2, Q^2)$ sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek q-komşuluk uzayı ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek q-komşuluk uzayı olsun. Eğer $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, Q^1) \to (X_2, Q^2)$ sürekli ise $\varphi_{\psi,\eta} : \left(X_1, \tau^{Q^1}\right) \to \left(X_2, \tau^{Q^2}\right)$ süreklidir.

İspat: Dikkat edilirse, her $f \in (L^{X_2})^{E_2}$ ve $x^\alpha \in FSPt(X_1)$ için $x^\alpha q \varphi_\psi^{-1}(f)$ olması $\varphi_\psi(x^\alpha) = \varphi(x)^{\alpha^*} qf$ olmasını gerektirir (Burada, $\alpha^*(k) = \bigvee_{k=\psi(e)} \alpha(e)$ olarak tanımlıdır). Ayrıca,

$$\{y^\gamma \in FSPt(X_2) \mid y^\gamma qf\} \supseteq \left\{\varphi_\psi(x^\alpha) \,\middle|\, x^\alpha \in FSPt(X_1) \ ve \ \varphi_\psi(x^\alpha) qf\right\}$$

içermesi sağlanır. Buradan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tau_k^{Q^1}\left(\varphi_\psi^{-1}(f)\right) = \bigwedge_{x^\alpha q \varphi_\psi^{-1}(f)} Q^1_{x^\alpha}\left(k, \varphi_\psi^{-1}(f)\right)$$

$$\geq \bigwedge_{x^\alpha q \varphi_\psi^{-1}(f)} Q^2_{\varphi_\psi(x^\alpha)}(\eta(k), f)$$

$$\geq \bigwedge_{\varphi_\psi(x^\alpha) qf} Q^2_{\varphi_\psi(x^\alpha)}(\eta(k), f)$$

$$\geq \bigwedge_{y^\gamma qf} Q^2_{y^\gamma}(\eta(k), f) = \tau^{Q^2}_{\eta(k)}(f).$$

O halde, her $k \in K_1$ ve $f \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\tau_k^{Q^1}\left(\varphi_\psi^{-1}(f)\right) \geq \tau^{Q^2}_{\eta(k)}(f)$ sağlanır. Sonuç olarak, $\varphi_{\psi,\eta}$ fonksiyonu üretilmiş bulanık esnek topolojik uzaylar arasında süreklidir.

Sonuç 6.1.9: $V(X, Q) = (X, \tau^Q)$ ve $V(\varphi_{\psi,\eta}) = \varphi_{\psi,\eta}$ olarak tanımlanan $V$: $\boldsymbol{FSQN}(L, M) \to \boldsymbol{FSTOP}(L, M)$ bir gömme funktorudur.

## 6.2. Bulanık Esnek Filtreler

Bu kısımda bulanık esnek filtre ve bulanık esnek filtre tabanı tanımları verilerek aralarındaki bağlantılar önemli özellikleri de göz önüne alınarak irdelenecektir.

Tanım 6.2.1: (a) $\mathcal{F} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre denir : $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(F1) $\mathcal{F}_k(\phi_X) = 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(\tilde{E}_X) = 1_M$.

(F2) Her $f, g \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F}_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g)$ dir.

(F3) Eğer $f \sqsubseteq g$ ise $\mathcal{F}_k(f) \leq \mathcal{F}_k(g)$ dir.

$(X, \mathcal{F})$ ikilisine bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre uzayı denir.

(b) $\mathcal{F}^1$ ve $\mathcal{F}^2$, $X$ üzerinde iki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olmak üzere, her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F}_k^2(f) \leq \mathcal{F}_k^1(f)$ oluyorsa $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$ den daha incedir (veya $\mathcal{F}^2, \mathcal{F}^1$ den daha kabadır) denir ve bu durum $\mathcal{F}^2 \leq \mathcal{F}^1$ notasyonu ile gösterilir.

Uyarı 6.2.2: (1) $E,K$ parametre kümeleri tek noktalı kümeler, $L = \{0,1\}$ ve $M = [0,1]$ olarak alındığında, Tanım 6.2.1 ile Burton ve diğ. (1999) tarafından verilen tanım çakışır.

(2) $E,K$ parametre kümeleri tek noktalı kümeler olarak alındığında Tanım 6.2.1 ile Kim ve diğ. (2007) tarafından verilen tanım çakışır.

(3) $K$ tek noktalı küme ve $L = M = \{0,1\}$ olarak alındığında Tanım 6.2.1 ile Şahin ve Küçük (2013) tarafından verilen tanım çakışır.

Tanım 6.2.3: $(X_1, \mathcal{F}^1)$ ve $(X_2, \mathcal{F}^2)$ sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek filtre uzayı ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek filtre uzayı olsun. Bu durumda, $\varphi_{\psi,\eta} : (X_1, \mathcal{F}^1) \to (X_2, \mathcal{F}^2)$ dönüşümüne süreklidir denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\mathcal{F}_k^1\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) \geq \mathcal{F}_{\eta(k)}^2(g)$ sağlanır.

Önerme 6.2.4: $\{\mathcal{F}^i\}_{i\in\Gamma}$, $X$ üzerindeki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtrelerin bir ailesi olsun. Her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F}_k(f) = \wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(f)$ olarak tanımlanan $\mathcal{F}: K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtredir.

İspat: Tanım 6.2.1 deki (F1)-(F3) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. $k \in K$ keyfi olarak verilsin. (F1) tanımdan açık olduğundan diğer özelliklerin sağlandığını gösterelim.

(F2) $\mathcal{F}_k(f \sqcap g) = \wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(f \sqcap g) \geq \left(\wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(f)\right) \wedge \left(\wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(g)\right) = \mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g)$.

(F3) $f, g \in (L^X)^E$ için $f \sqsubseteq g$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}_k^i(f) \leq \mathcal{F}_k^i(g)$ olduğundan $\wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(f) \leq \wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k^i(g)$ sağlanır. Buradan, $\mathcal{F}_k(f) \leq \mathcal{F}_k(g)$ sonucu elde edilir.

Önerme 6.2.5: $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre ve $\varphi: X \to Y, \psi: E \to E^*$ ve $\eta: K \to K^*$ fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda,

$$\mathcal{F}^*{}_{k^*}(g) = \begin{cases} \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right), g \neq \Phi_Y \; ise \\ 0_M, \qquad\qquad\qquad\qquad diğer \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{F}^*: K^* \to M^{(L^Y)^{E^*}}$ dönüşümü $Y$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E^*, K^*)$-esnek filtredir.

İspat: (F1) koşulu açık olduğundan diğer koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir.

(F2) $k^* \in K^*$ ve $u, v \in (L^Y)^{E^*}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\mathcal{F}^*{}_{k^*}(u \sqcap v) = \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(u \sqcap v)\right)$$

$$= \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(u) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(v)\right)$$

$$\geq \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} (\mathcal{F}_k(\varphi_\psi^{-1}(u)) \wedge \mathcal{F}_k(\varphi_\psi^{-1}(v)))$$

$$\geq \left(\bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(u)\right)\right) \wedge \left(\bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(v)\right)\right)$$

$$= \mathcal{F}^*{}_{k^*}(u) \wedge \mathcal{F}^*{}_{k^*}(v).$$

(F3) $u, v \in (L^Y)^{E^*}$ için $u \sqsubseteq v$ ise $\varphi_\psi^{-1}(u) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(v)$ dir. Bu ise her $k \in K$ için $\mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(u)\right) \leq \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(v)\right)$ olmasını gerektirir. Böylece, her $k^* \in K^*$ için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\mathcal{F}^*{}_{k^*}(u) = \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(u)\right) \leq \bigwedge_{k=\eta^{-1}(k^*)} \mathcal{F}_k\left(\varphi_\psi^{-1}(v)\right) = \mathcal{F}^*{}_{k^*}(v).$$

Önerme 6.2.6: $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre olsun. Her $k \in K$ için

$$\tau_k^{\mathcal{F}}(f) = \begin{cases} \mathcal{F}_k(f), \; f \neq \Phi_X \\ 1_M, \qquad diğer \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tau^{\mathcal{F}}: K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek topolojidir.

İspat: (O1)-(O3) koşullarının sağlandığını göstermek gerekmektedir. (O1) açık olduğundan diğer koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir.

(O2) $f, g \in (L^X)^E$ verilsin. Eğer $f = \Phi_X$ veya $g = \Phi_X$ ise açıktır. Bu nedenle, $f, g \neq \Phi_X$ olsun.

1. Durum: Eğer $f \sqcap g = \Phi_X$ ise açıktır.

2. Durum: $f \sqcap g \neq \Phi_X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir.

$\tau_k^{\mathcal{F}}(f \sqcap g) = \mathcal{F}_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g) = \tau_k^{\mathcal{F}}(f) \wedge \tau_k^{\mathcal{F}}(g)$.

(O3) $\{f_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq (L^X)^E$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $f_i \sqsubseteq \sqcup_{i\in\Gamma} f_i$ olduğundan Tanım 6.2.1 (F3) koşulundan, her $i \in \Gamma$ ve $k \in K$ için $\mathcal{F}_k(f_i) \leq \mathcal{F}_k(\sqcup_{i\in\Gamma} f_i)$ sağlanır. Bu ise her $k \in K$ için $\wedge_{i\in\Gamma} \mathcal{F}_k(f_i) \leq \mathcal{F}_k(\sqcup_{i\in\Gamma} f_i)$ olmasını gerektirir. Böylece, her $k \in K$ için

$\wedge_{i\in\Gamma} \tau_k^{\mathcal{F}}(f_i) \leq \tau_k^{\mathcal{F}}(\sqcup_{i\in\Gamma} f_i)$ sağlanır.

Gösterim 6.2.7: $\mathcal{B} : K \to M^{(L^X)^E}$ bir dönüşüm, $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ olsun. $\langle\mathcal{B}\rangle : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\langle\mathcal{B}\rangle_k(f) = \bigvee_{g\sqsubseteq f} \mathcal{B}_k(g)$.

Tanım 6.2.8: (a) $\mathcal{B} : K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre tabanı adı verilir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanır.
(FB1) $\mathcal{B}_k(\phi_X) = 0_M$ ve $\mathcal{B}_k(\tilde{E}_X) = 1_M$.
(FB2) Her $f, g \in (L^X)^E$ için $\langle\mathcal{B}\rangle_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{B}_k(f) \wedge \mathcal{B}_k(g)$ dir.

(b) $\mathcal{B}^1$ ve $\mathcal{B}^2$, $X$ üzerinde iki $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre tabanı olmak üzere her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\langle\mathcal{B}^2\rangle_k(f) \leq \langle\mathcal{B}^1\rangle_k(f)$ sağlanıyorsa $\mathcal{B}^1$, $\mathcal{B}^2$ den daha incedir denir.

Uyarı 6.2.9: (1) Eğer $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre ise aynı zamanda $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre tabanıdır ve $\langle\mathcal{F}\rangle = \mathcal{F}$ dir.

(2) Eğer $\mathcal{B}: K \to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre tabanı ise Tanım 6.2.8 (FB2) den, $f \sqcap g = \Phi_X$ olması her bir $k \in K$ için $\mathcal{B}_k(f) \wedge \mathcal{B}_k(g) = 0_M$ olduğu sonucunu verir.

Teorem 6.2.10: Eğer $\mathcal{B}$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre tabanı ise, bu durumda $\langle\mathcal{B}\rangle$, $X$ üzerinde $\mathcal{B} \leq \langle\mathcal{B}\rangle$ koşulunu sağlayan en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtredir.

İspat: Öncelikle Tanım 6.2.1 deki koşulların sağlandığını göstermek gerekmektedir. (F1) açık olduğundan diğer koşulları gösterelim.

(F2) $k \in K$ ve $f,g \in (L^X)^E$ olsun. Her $u \sqsubseteq f$ ve $v \sqsubseteq g$ için, $u \sqcap v \sqsubseteq f \sqcap g$ olacağından (FB2) den $\langle\mathcal{B}\rangle_k(u \sqcap v) \geq \mathcal{B}_k(u) \wedge \mathcal{B}_k(v)$ sağlanır. Buradan, $u \sqsubseteq f$ ve $v \sqsubseteq g$ için supremuma geçilirse,

$\langle\mathcal{B}\rangle_k(f \sqcap g) \geq \langle\mathcal{B}\rangle_k(f) \wedge \langle\mathcal{B}\rangle_k(g)$ elde edilir.

(F3) koşulunun sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Böylece, $\langle\mathcal{B}\rangle$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtredir. $\mathcal{B} \leq \mathcal{F}$ olacak şekilde $X$ üzerinde başka bir $\mathcal{F}$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtresini göz önüne alalım. Buradan, her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$\langle\mathcal{B}\rangle_k(f) = \bigvee_{g \sqsubseteq f} \mathcal{B}_k(g) \leq \bigvee_{g \sqsubseteq f} \mathcal{F}_k(g) \leq \mathcal{F}_k(f)$.

Böylece, istenildiği üzere $\langle\mathcal{B}\rangle \leq \mathcal{F}$ sağlanır.

Tanım 6.2.11: $(X_1,\mathcal{F}^1)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek filtre uzayı ve $(X_2,\mathcal{F}^2)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek filtre uzayı olsun. Bu durumda $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1,\mathcal{F}^1) \to (X_2,\mathcal{F}^2)$ fonksiyonuna bir filtre koruyan dönüşüm denir: $\Leftrightarrow$ Her $k \in K_1$ ve $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ için $\mathcal{F}_k^1(f) \leq \mathcal{F}_{\eta(k)}^2(\varphi_\psi(f))$ sağlanır.

Teorem 6.2.12: $\mathcal{B}^1$ ve $\mathcal{B}^2$ sırasıyla $X_1$ ve $X_2$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek filtre tabanı ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek filtre tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \langle \mathcal{B}^1 \rangle) \to (X_2, \langle \mathcal{B}^2 \rangle)$ süreklidir ancak ve ancak her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\mathcal{B}^2_{\eta(k)}(g) \leq \langle \mathcal{B}^1 \rangle_k (\varphi_\psi^{-1}(g))$ sağlanır.

(2) $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \langle \mathcal{B}^1 \rangle) \to (X_2, \langle \mathcal{B}^2 \rangle)$ filtre koruyan dönüşümdür ancak ve ancak her $k \in K_1$ ve $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ için $\mathcal{B}^1_k(f) \leq \langle \mathcal{B}^2 \rangle_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f)\right)$ sağlanır.

(3) Eğer her $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $\mathcal{B}^2_{\eta(k)}(g) \leq \mathcal{B}^1{}_k(\varphi_\psi^{-1}(g))$ ise $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \langle \mathcal{B}^1 \rangle) \to (X_2, \langle \mathcal{B}^2 \rangle)$ süreklidir.

(4) Eğer her $k \in K_1$ ve $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ için $\mathcal{B}^1_k(f) \leq \mathcal{B}^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(f)\right)$ ise $\varphi_{\psi,\eta}: (X_1, \langle \mathcal{B}^1 \rangle) \to (X_2, \langle \mathcal{B}^2 \rangle)$ filtre koruyan dönüşümdür.

İspat: (1) $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ verilsin. Buradan aşağıdaki eşitsizlik açıktır.

$$\langle \mathcal{B}^1 \rangle_k \left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right) \geq \langle \mathcal{B}^2 \rangle_{\eta(k)}(g) \geq \mathcal{B}^2_{\eta(k)}(g).$$

Tersine, $k \in K_1$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ olmak üzere,

$$\langle \mathcal{B}^2 \rangle_{\eta(k)}(g) = \bigvee_{h \sqsubseteq g} \mathcal{B}^2_{\eta(k)}(h) \leq \bigvee_{h \sqsubseteq g} \langle \mathcal{B}^1 \rangle_k (\varphi_\psi^{-1}(h)) \leq \langle \mathcal{B}^1 \rangle_k (\varphi_\psi^{-1}(g))$$

elde edilir.

(4) $k \in K_1$ ve $f \in (L^{X_1})^{E_1}$ verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadenin sağlandığı açıktır.

$$\langle \mathcal{B}^1 \rangle_k (f) = \bigvee_{h \sqsubseteq f} \mathcal{B}^1_k(h) \leq \bigvee_{h \sqsubseteq f} \mathcal{B}^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(h)\right)$$

$$\leq \bigvee_{\varphi_\psi(h) \sqsubseteq \varphi_\psi(f)} \mathcal{B}^2_{\eta(k)} \left(\varphi_\psi(h)\right) \leq \bigvee_{u \sqsubseteq \varphi_\psi(f)} \mathcal{B}^2_{\eta(k)}(u) = \langle \mathcal{B}^2 \rangle_{\eta(k)} (\varphi_\psi(f)).$$

(2) ve (3) benzer şekilde görülür.

Gösterim 6.2.13: $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E, K)$-esnek filtre olmak üzere,

$$\mathcal{F}^0 := \{ f \in (L^X)^E \mid \mathcal{F}_k(f) \neq 0_M, \forall\, k \in K \}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 6.2.14: $\{\mathcal{F}^i\}_{i\in\Gamma}$ aşağıdaki (C) koşulunu sağlayan $X$ üzerindeki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtrelerin bir ailesi olsun.

(C) Her $i\in\Gamma$ için $f_i\in(\mathcal{F}^i)^0$ ise $\Gamma$ nın her sonlu $J$ alt kümesi için $\sqcap_{i\in J} f_i \neq \Phi_X$ dir.

Bu takdirde, $X$ üzerinde

$$\mathcal{H}_k(f)=\begin{cases}\bigvee\{\bigwedge_{i\in J}\mathcal{F}_k^i(f_i)\}, f=\sqcap_{i\in J} f_i, f_i\in(\mathcal{F}^i)^0\\ 0_M, \qquad\qquad diğer\end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{H}: K\to M^{(L^X)^E}$ dönüşümü her bir $i\in\Gamma$ için $\mathcal{F}^i$ filtrelerinden daha ince olan en kaba $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtredir. (Burada supremum $\Gamma$ nın her sonlu $J$ alt kümesi için $f=\sqcap_{i\in J} f_i$ üzerinden alınmaktadır.)

İspat: Öncelikle yukarıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{H}$ dönüşümünün $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olduğu gösterilecektir.

(F1) $\mathcal{H}_k(\Phi_X)=0_M$ olduğu tanımdan açıktır. $\tilde{E}_X=\tilde{E}_X\sqcap\tilde{E}_X$ olduğundan her $k\in K$ için $\mathcal{H}_k(\tilde{E}_X)=1_M$ olduğu açıktır.

(F2) $k\in K$ ve $f,g\in(L^X)^E$ olsun. $f=\sqcap_{t\in T} f_t$ ve $g=\sqcap_{j\in J} g_j$ olacak biçimdeki $\Gamma$ nın her sonlu $T$ ve $J$ alt kümeleri için $f\sqcap g=(\sqcap_{t\in T} f_t)\sqcap(\sqcap_{j\in J} g_j)$ dir.

$$h_m=\begin{cases}f_m,\ m\in T\setminus(T\cap J)\\ g_m,\ m\in J\setminus(T\cap J)\\ f_m\cap g_m,\ m\in T\cap J\end{cases}$$

olarak tanımlanmak üzere, $f\sqcap g=\sqcap_{m\in(T\cup J)} h_m$ diyelim. Buradan,

$$\mathcal{H}_k(f\sqcap g)\geq\bigwedge_{m\in T\cup J}\mathcal{F}_k^m(h_m)\geq(\bigwedge_{t\in T}\mathcal{F}_k^t(f_t))\wedge\left(\bigwedge_{j\in J}\mathcal{F}_k^j(g_j)\right)$$

sağlanır. Son eşitsizlikte her iki yanın $f=\sqcap_{t\in T} f_t$ ve $g=\sqcap_{j\in J} g_j$ üzerinden supremumu alınırsa

$\mathcal{H}_k(f\sqcap g)\geq\mathcal{H}_k(f)\wedge\mathcal{H}_k(g)$ elde edilir.

(F3) $f,g \in (L^X)^E$ için $f \sqsubseteq g$ olsun. Eğer $f = \Phi_X$ ise her $k \in K$ için $\mathcal{H}_k(f) \leq \mathcal{H}_k(g)$ dir.

$f \neq \Phi_X$ olsun. Bu durumda $f = \sqcap_{i\in J} f_i$ olacak şekildeki $\Gamma$ nın her sonlu $J$ alt kümesi için $\mathcal{H}_k(f) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{F}_k^i(f_i)$ dir. O halde, $g = f \sqcup g = \sqcap_{i\in J} (f_i \sqcup g)$ olduğundan

$$\mathcal{H}_k(g) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{F}_k^i(f_i \sqcup g) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{F}_k^i(f_i)$$

bulunur. Bu ise her $k \in K$ için $\mathcal{H}_k(g) \geq \mathcal{H}_k(f)$ olmasını gerektirir. Böylece, $\mathcal{H}$ dönüşümünün $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olduğu görülür.

Şimdi de her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}^i \leq \mathcal{H}$ olduğunu gösterelim. Her $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F}_k^i(f) = 0_M$ ise ispat açıktır. Bir $k \in K$ ve $f \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F}_k^i(f) \neq 0_M$ olsun. $f = f \sqcap \tilde{E}_X$ olarak yazılabileceğinden $\mathcal{H}_k(f) \geq \mathcal{F}_k^i(f) \wedge \mathcal{F}_k^i(\tilde{E}_X) = \mathcal{F}_k^i(f)$ sağlanır. Böylece, her $i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}^i \leq \mathcal{H}$ olduğu görülür.

$\mathcal{G}$, $X$ üzerinde her bir $i \in \Gamma$ için $\mathcal{F}^i$ filtrelerinden daha ince olan başka bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olsun. $\mathcal{H}_k(f) \neq 0_M$ olsun. Bu durumda, $f = \sqcap_{i\in J} f_i$ olacak şekildeki $\Gamma$ nın her sonlu $J$ alt kümesi için

$\mathcal{H}_k(f) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{F}_k^i(f_i)$ ve

$\mathcal{G}_k(f) = \mathcal{G}_k(\sqcap_{i\in J} f_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{G}_k(f_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{F}_k^i(f_i)$ ifadeleri sağlanır.

$J, \Gamma$ nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere son eşitsizlikte her iki yanın $f = \sqcap_{i\in J} f_i$ üzerinden supremumu alınırsa, her $k \in K$ için $\mathcal{G}_k(f) \geq \mathcal{H}_k(f)$ bulunur.

Teorem 6.2.15: $\mathcal{G}$, $X_2$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek filtre ve $\varphi: X_1 \to X_2$ ile $\psi: E_1 \to E_2$ injektif iki fonksiyon olsun. Bu durumda, $k \in K_1$ için

$$\mathcal{F}_k(f) = \begin{cases} \bigvee_{f=\varphi_\psi^{-1}(g)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(g), & f \neq \Phi_{X_1} \; ise \\ 0_M, & f = \Phi_{X_1} \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{F}: K_1 \to M^{(L^{X_1})^{E_1}}$ dönüşümü $X_1$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek filtredir.

İspat: Tanım 6.2.1 deki koşulların sağlandığını göstermek gerekmektedir. (F1) koşulu tanımdan açık olduğundan diğer koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir.

(F2) $k \in K_1$ ve $f, g \in (L^{X_1})^{E_1}$ verilsin. Eğer $f = \Phi_{X_1}$ veya $g = \Phi_{X_1}$ ise ispat açıktır. Aksi halde, $f, g \neq \Phi_{X_1}$ için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g) = \left(\bigvee_{f=\varphi_\psi^{-1}(u)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(u)\right) \wedge \left(\bigvee_{g=\varphi_\psi^{-1}(v)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(v)\right)$$

$$= \bigvee_{f=\varphi_\psi^{-1}(u), g=\varphi_\psi^{-1}(v)} \left(\mathcal{G}_{\eta(k)}(u) \wedge \mathcal{G}_{\eta(k)}(v)\right)$$

$$\leq \bigvee_{f=\varphi_\psi^{-1}(u), g=\varphi_\psi^{-1}(v)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(u \sqcap v)$$

$$\leq \bigvee_{f \sqcap g=\varphi_\psi^{-1}(u \sqcap v)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(u \sqcap v)$$

$$\leq \bigvee_{f \sqcap g=\varphi_\psi^{-1}(h)} \mathcal{G}_{\eta(k)}(h) = \mathcal{F}_k(f \sqcap g).$$

Böylece her $k \in K_1$ ve $f, g \in (L^{X_1})^{E_1}$ için $\mathcal{F}_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g)$ elde edilir.

(F3) $k \in K_1$ ve $f, g \in (L^{X_1})^{E_1}$ için $f \sqsubseteq g$ olsun. Eğer $f = \Phi_{X_1}$ ise ispat açıktır. $f \neq \Phi_{X_1}$ ve bir $\alpha \in c(M)$ için $\alpha \lhd \mathcal{F}_k(f)$ olsun. Buradan $f = \varphi_\psi^{-1}(h)$ olacak şekilde bir $h \in (L^{X_2})^{E_2}$ vardır öyle ki $\alpha \leq \mathcal{G}_{\eta(k)}(h)$ sağlanır. $\varphi_\psi$ injektif ve $f \sqsubseteq g$ olduğundan

$$g = f \sqcup g = \varphi_\psi^{-1}(h) \sqcup g = \varphi_\psi^{-1}(h) \sqcup \varphi_\psi^{-1}\left(\varphi_\psi(g)\right) = \varphi_\psi^{-1}\left(h \sqcup \varphi_\psi(g)\right)$$

sağlanır. Böylece $g = \varphi_\psi^{-1}\left(h \sqcup \varphi_\psi(g)\right)$ dir. Buradan,

$$\alpha \leq \mathcal{G}_{\eta(k)}(h) \leq \mathcal{G}_{\eta(k)}\left(h \sqcup \varphi_\psi(g)\right) \leq \mathcal{F}_k(g)$$

yani, $\alpha \leq \mathcal{F}_k(g)$ elde edilir. $\alpha$ keyfi olduğundan her $k \in K_1$ için $\mathcal{F}_k(f) \leq \mathcal{F}_k(g)$ olarak bulunur. Sonuç olarak; $\mathcal{F}$, $X_1$ üzerinde bir $(L, M)$-bulanık $(E_1, K_1)$-esnek filtredir.

## 6.3. Bulanık Esnek Filtre Yakınsaklığı

Bu kısımda bulanık esnek filtre yakınsaklığı tanımlanacak ve bazı önemli sonuçlar irdelenecektir.

Tanım 6.3.1: $(X,\tau)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olsun. $x^\alpha \in FSPt(X)$ olmak üzere,

(1) Eğer $Q^\tau_{x^\alpha} \leq \mathcal{F}$ ise $x^\alpha$ bulanık esnek noktasına $\mathcal{F}$ nin bir limit noktası denir ve bu durum $\mathcal{F} \to x^\alpha$ notasyonu ile gösterilir.

(2) Eğer her $f \in (Q^\tau_{x^\alpha})^0$ ve her $g \in \mathcal{F}^0$ için $f \sqcap g \neq \Phi_X$ ise $x^\alpha$ bulanık esnek noktasına $\mathcal{F}$ nin bir yığılma noktası denir ve bu durum $\mathcal{F}\infty x^\alpha$ ile gösterilir. Buna göre

$lim_\tau(\mathcal{F}) = \bigsqcup\{\, x^\alpha \in FSPt(X) \mid \mathcal{F} \to x^\alpha \,\}$

$clu_\tau(\mathcal{F}) = \bigsqcup\{\, x^\alpha \in FSPt(X) \mid \mathcal{F}\infty x^\alpha \,\}$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 6.3.2: $(X,\tau)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ ile $\mathcal{G}$, $X$ üzerinde iki $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre öyle ki $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ den daha kaba olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) Eğer $\mathcal{F} \to x^\alpha$ ise $\mathcal{F}\infty x^\alpha$ dır.

(2) $lim_\tau(\mathcal{F}) \sqsubseteq clu_\tau(\mathcal{F})$ dir.

(3) $\mathcal{F}\infty x^\alpha \sqsupseteq x^\beta$ ise $\mathcal{F}\infty x^\beta$ dır.

(4) $\mathcal{F} \to x^\alpha \sqsupseteq x^\beta$ ise $\mathcal{F} \to x^\beta$ dır.

(5) $\mathcal{F}\infty x^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $x^\alpha \sqsubseteq clu_\tau(\mathcal{F})$ olmasıdır.

(6) $\mathcal{F} \to x^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $x^\alpha \sqsubseteq lim_\tau(\mathcal{F})$ olmasıdır.

(7) $\mathcal{F} \to x^\alpha$ ise $\mathcal{G} \to x^\alpha$ dır.

(8) $lim_\tau(\mathcal{F}) \sqsubseteq lim_\tau(\mathcal{G})$ dır.

(9) $\mathcal{G} \infty x^\alpha$ ise $\mathcal{F} \infty x^\alpha$ dır.

(10) $clu_\tau(\mathcal{G}) \sqsubseteq clu_\tau(\mathcal{F})$ dır.

İspat: (1) $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için $Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \neq 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ olsun. $\mathcal{F} \to x^\alpha$ olduğundan $0_M < Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \leq \mathcal{F}_k(f)$ dir. Buradan,

$\mathcal{F}_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{F}_k(f) \wedge \mathcal{F}_k(g) > 0_M$ oluşu $f \sqcap g \neq \Phi_X$ ifadesini gerektirir. Dolayısıyla, $\mathcal{F} \infty x^\alpha$ dır.

(2) Özellik (1) den açıktır.

(3) $\mathcal{F} \infty x^\alpha$ ve $x^\alpha \sqsupseteq x^\beta$ verilsin. $\mathcal{F} \infty x^\beta$ olduğunu gösterelim. $k \in K$ ve $f, g \in (L^X)^E$ için $Q^\tau_{x^\beta}(k, f) \neq 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ olsun. $x^\alpha \sqsupseteq x^\beta$ olduğundan Önerme 6.1.4 den, $Q^\tau_{x^\beta}(k, f) \leq Q^\tau_{x^\alpha}(k, f)$ dır. Buradan, $Q^\tau_{x^\alpha}(k, f) \neq 0_M$ dır. $\mathcal{F} \infty x^\alpha$ olduğundan $f \sqcap g \neq \Phi_X$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{F} \infty x^\beta$ dır.

(4) $\mathcal{F} \to x^\alpha$ ve $x^\alpha \sqsupseteq x^\beta$ verilsin. $\mathcal{F} \to x^\alpha$ olduğundan $Q^\tau_{x^\alpha} \leq \mathcal{F}$ dır. Önerme 6.1.4 den, $Q^\tau_{x^\beta} \leq Q^\tau_{x^\alpha} \leq \mathcal{F}$ dır. Sonuç olarak $\mathcal{F} \to x^\beta$ bulunur.

(5) Gerek koşul açık olduğu için yeter koşulu ispatlamak yeterlidir. $x^\alpha \sqsubseteq clu_\tau(\mathcal{F})$ ve $g \in (L^X)^E$ için $Q^\tau_{x^\alpha}(k, g) \neq 0_M$ olsun. Bu durumda, $x^\alpha q h \sqsubseteq g$ ve $Q^\tau_{x^\alpha}(k, g) \geq \tau_k(h) > 0_M$ olacak şekilde bir $h \in (L^X)^E$ mevcuttur. Buradan, $hq clu_\tau(\mathcal{F})$ dir. $clu_\tau(\mathcal{F})$ tanımından $\mathcal{F} \infty x^\beta$ olacak şekilde bir $x^\beta \in FSPt(X)$ mevcuttur öyle ki $x^\beta q h \sqsubseteq g$ $Q^\tau_{x^\beta}(k, g) \geq \tau_k(h) \neq 0_M$ dır. Böylece, $Q^\tau_{x^\beta}(k, g) \neq 0_M$ dır. $\mathcal{F} \infty x^\beta$ olduğundan her $f \in \mathcal{F}^0$ için $f \sqcap g \neq \Phi_X$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{F} \infty x^\alpha$ bulunur.

(6) Özellik (5) in ispatına benzer şekilde görülür.

(7) $\mathcal{F} \to x^\alpha$ ve $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olsun. Buradan $Q^\tau_{x^\alpha} \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olacağından $\mathcal{G} \to x^\alpha$ elde edilir.

(8) Özellik (7) den açıktır.

(9) $\mathcal{G}\infty x^{\alpha}$ ve $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olsun. $\mathcal{F}\infty x^{\alpha}$ olduğunu gösterelim. $Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k,f) \neq 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ olacak şekildeki her $f,g \in (L^X)^E$ için $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ olduğundan $\mathcal{G}_k(g) \geq \mathcal{F}_k(g) > 0_M$ dır. $\mathcal{G}\infty x^{\alpha}$ olduğundan dolayı da $f \sqcap g \neq \Phi_X$ elde edilir.

(10) Özellik (9) dan açıktır.

Teorem 6.3.3: $(X,\tau)$ bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ ise $X$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olsun. $x^{\alpha} \in FSPt(X)$ olmak üzere $\mathcal{F}\infty x^{\alpha}$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{G} \to x^{\alpha}$ olacak biçimde $\mathcal{F}$ den daha ince olan bir $\mathcal{G}$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtresinin mevcut olmasıdır.

İspat: $\mathcal{F}\infty x^{\alpha}$ olduğundan $Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k,f) \neq 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ olacak şekildeki her $f,g \in (L^X)^E$ için $f \sqcap g \neq \Phi_X$ dır. $\mathcal{G} = Q^{\tau}_{x^{\alpha}} \vee \mathcal{F}$ olarak tanımlanırsa Teorem 6.2.14 gereğince, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ den daha ince bir filtredir ve $Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k,f) \leq \mathcal{G}_k(f)$ olduğundan $\mathcal{G} \to x^{\alpha}$ dır.

Tersine, $Q^{\tau}_{x^{\alpha}} \leq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ verilsin. $k \in K$ ve $f,g \in (L^X)^E$ için $Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k,f) \neq 0_M$ ve $\mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ olsun. $\mathcal{G}_k(g) \geq \mathcal{F}_k(g) \neq 0_M$ ve $\mathcal{G}_k(f) \geq Q^{\tau}_{x^{\alpha}}(k,f) \neq 0_M$ olduğundan $\mathcal{G}_k(g) \neq 0_M$ ve $\mathcal{G}_k(f) \neq 0_M$ dır. $\mathcal{G}$ $(L,M)$-bulanık $(E,K)$-esnek filtre olduğundan her $k \in K$ için $\mathcal{G}_k(f \sqcap g) \geq \mathcal{G}_k(f) \wedge \mathcal{G}_k(g)$ dır. O halde $f \sqcap g \neq \Phi_X$ yani $\mathcal{F}\infty x^{\alpha}$ elde edilir.

Teorem 6.3.4: $(X_1,\tau^1)$ ve $(X_2,\tau^2)$ sırasıyla $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek ve $(L,M)$-bulanık $(E_2,K_2)$-esnek topolojik uzaylar, $\mathcal{F}$ $X_1$ üzerinde bir $(L,M)$-bulanık $(E_1,K_1)$-esnek filtre ve $\eta: K_1 \to K_2$ örten bir fonkisyon olsun. Eğer her $k \in K_1$, $x^{\alpha} \in FSPt(X_1)$ ve $g \in (L^{X_2})^{E_2}$ için $Q^{\tau^2}_{\varphi_{\psi}(x^{\alpha})}(\eta(k),g) \leq Q^{\tau^1}_{x^{\alpha}}(k,\varphi^{-1}_{\psi}(g))$ eşitsizliği sağlanıyorsa aşağıdaki ifadeler doğrulanır.

(1) $\mathcal{F} \to x^{\alpha}$ ise $\mathcal{F}^* \to \varphi_{\psi}(x^{\alpha})$.

(2) $\mathcal{F}\infty x^{\alpha}$ ise $\mathcal{F}^*\infty\varphi_{\psi}(x^{\alpha})$.

# 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Matematikteki birçok oluşumun limit (dual olarak, eşlimit) vasıtasıyla karakterize edildiği (veya tanımlandığı) kategori teorisinden bilinmektedir. Ayrıca, eğer topolojik bir kategorinin dayandığı altyapı kategorisi limit ve eşlimitlere sahip ise, bu özelliğin topolojik funktor yardımıyla başlangıçtaki kategoriye de yansıtıldığı Adamek ve diğ. (2004) den görülmektedir. Bu nedenle somut bir kategorinin unutkan funktora göre limitlere (aynı zamanda eşlimitlere) ve de kategorik açıdan önemli özelliklere sahip olan $\boldsymbol{SET}$ (benzer şekilde $\boldsymbol{SET^3}$) kümeler kategorisi üzerine topolojik bir kategori olup olmadığının araştırılması ayrı bir öneme sahiptir.

Bu çalışmada, çeşitli yazarlar tarafından tanımlanan ve özellikleri incelenen bulanık topolojik yapıların esnekleştirilmesiyle, bugüne kadar tanımlanan yapılardan daha genel ve de birbirleriyle uyumlu olan bulanık esnek topolojik yapılar tanımlanmış ve bu yapılar arasındaki kategorik ilişkiler irdelenerek $\boldsymbol{SET^3}$ üzerine topolojik birer kategori olup olmadıkları incelenmiş ve aşağıdaki şekilde sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.

1. Bulandırılmış esnek topolojik uzay tanımlanmış ve bulanık esnek topolojik uzay ile aralarındaki kategorik ilişkiler kurulan Lowen funktorları yardımıyla incelenmiştir.

2. Bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisinin bir karakterizasyonu olan $\boldsymbol{ASTOP}$ kategorisi incelenmiştir.

3. Bulanık esnek kapanış (iç) operatörü tanımlanarak bulanık esnek kapanış uzayı kategorisinde başlangıç yapının varlığı araştırılmıştır.

4. Bulanık esnek yakınımsı uzaylar tanımlanmış ve bulanık esnek yakınımsı uzaylar kategorisinde başlangıç yapının varlığı araştırılmıştır.

5. Hutton anlamında bulanık esnek düzgün yapı ve bulanık esnek topogenous yapısı tanımlanmış ve aralarındaki ilşkiler incelenmiştir.

6. Bulanık esnek nokta için bulanık esnek komşuluk sistemi ve bulanık esnek filtre kavramı tanımlanmış ve bulanık esnek filtre yakınsaklığı incelenmiştir.

Bu tezde değinilmemiş olan diğer topolojik yapılarda benzer şekilde bulanık esnek topolojik uzaylarla uyumlu olacak şekilde genelleştirilebilir. Örneğin, filtre kavramının duali olan ideal kavramı bulanık esnek yapıya genişletilebilir

## KAYNAKLAR


Abdel-Sattar M. A., $(L,\odot)$-smooth topogenous spaces and $(L,\odot)$-smooth quasi-uniform spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* 2011, **2**(2) 207-217.

Adamek J., Herrlich H., Strecker G. E., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Publiction, New York, 18-360, 1990.

Ahmad B., Kharal A., On fuzzy soft sets, *Advances in Fuzzy Systems*, DOI:10.1155/2009/586507.

Aktaş H., Çağman N., Soft sets and soft groups, *Information Sciences,* 2007, **177**(13), 2726-2735.

Artico G., Moresco R., Fuzzy proximities compatible with Lowen fuzzy uniformities, *Fuzzy Sets and Systems,* 1987, **21**, 85-98.

Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems,* 1986, **64**(2), 87-96.

Aygün H., Warner M. W., Kudri S. R., On smooth L-topological spaces, *Journal of Fuzzy Mathematics,* 1997, **5**(2), 321-338.

Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygünoğlu A., Aygün H., Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 2012, **21**(1), 113-119.

Babitha K. V., Sunil J. J., Soft set relations and functions, *Computers and Mathematics with Applications,* 2010, **60**, 1840-1849.

Birkhoff G., *Lattice Theory*, Third Edition, American Mathematical Soc. Colloquium Publications, New York, 1-12, 1967.

Burton M. H., Muraleetharan M., Gutierrez-Garcia J., Generalized filters I, *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **106**, 275-284.

Chang C. L., Fuzzy topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **24**(1), 182-190.

Chattopadhyay K. C., Samanta S. K., Fuzzy topology: Fuzzy closure operator, fuzzy compactness and fuzzy connectedness, *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **54**, 207-212.

Csaszar A., *Foundations of general topology*, Pergamon Press, United Kingdom, 1963.

Çağman N., Enginoğlu S., Çıtak F., Fuzzy soft set theory and its applications, *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* 2011, **8**(3), 137-147.

Çağman N., Enginoğlu S., Soft set theory and uni-int decision making, *European Journal Operational Reserarch*, 2010, **207**, 848-855.

Dongsheng Z., The N-compactness in L-fuzzy topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1987, **128**, 64-79.

El-Dardery M., On L-fuzzy topogenous orders, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2013, **24**, 601-609.

El-Dardery M., Ramadan A. A., Kim Y. C., L-fuzzy topogenous orders and L-fuzzy topologies, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2013, **24**, 605-691.

Feng F., Jun Y. B., Zhao X., Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications,* 2008, **56**(10), 2621-2628.

Gehrke M., Walker C., Walker E., Fuzzy logics arising from strict De Morgan systems, Editors: Rodabaugh S. E., Klement E. P., *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Nethertland, 257-276, 2003.

Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S., *A Compendium of Continuous Lattices,* Springer-Verlag, New York, 8-84, 1980.

Goguen J. A., L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967, **18**, 145-174.

Gorzalzany M. B., A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **21**, 1-17.

Höhle U., Probabilistic topologies induced by L-fuzzy uniformities, *Manuscripta Mathematica,* 1982, **38**(3), 289-323.

Höhle U., Sostak A. P., Axiomatic foundations of fixed-basis fuzzy topology, Editors: Höhle U., Rodabaugh S. E., *Mathematics of Fuzy Sets, Logic, Topology and Measure Theory*, *The Handbook of Fuzzy Set Series*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherland, 123-237, 1999.

Hutton B., Uniformities on fuzzy topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1977, **58**, 559-571.

İrfan Ali M., Feng F., Liu X., Keun Min W., Shabir M., On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **57**, 1547-1553.

Jinming F., Categories Isomorphic to L-FTOP, *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, **157**, 820-830.

Johnstone P. T., *Stone Spaces,* Cambridge University Press, Cambridge, 1-35, 1992.

Jun Y. B., Soft BCK/BCI algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**(5), 1408-1413.

Jun Y. B., Park C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI algebras, *Information Sciences*, 2008, **178**(11), 2466-2475.

Katsaras A. K., On fuzzy proximity spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1980, **75**, 571-583.

Katsaras A. K., On fuzzy syntopogenous structures, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 1983, **99**, 219-236.

Katsaras A. K., Petalas C. G., A unified theory of fuzzy topologies, fuzzy proximities and fuzzy unifromities, *Rev. Roumaine. Math. Pures Appl*., 1983, **28**, 845-856.

Katsaras A. K., Fuzzy syntopogenous structures compatible with Lowen fuzzy uniformities and Artico-Moresco fuzzy proximities, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, **36**, 375-393.

Kharal A., Ahmad B., Mappings on fuzzy soft classes, *Advances in Fuzzy Systems*, DOI: 10.1155/2009D/407890.

Kim E. S., Ahn S. H., Park D. H., The relationship between L-fuzzy proximities and L-fuzzy quasi-uniformities, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2012, **9**(6), 101-111.

Kim Y. C., Initial L-fuzzy closure spaces, *Fuzzy Sets and Systems,* 2003, **133**, 277-297.

Kim Y. C., Ramadan A. A., Usama M. A., (L,M)-neighborhood spaces, *Kangweon-Kyungki Mathematical Journal*, 2007, **15**(2), 121-133.

Kong Z., Gao L., Wong L., Li S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *J. Comp. Appl. Math*., 2008, **56**, 3029-3037.

Kotze W., Lifting of sobriety concepts with particular reference to (L,M)-topological spaces, Editors: Rodabaugh S. E., Klement E. P., *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers, Netherland, 415-426, 2003.

Lowen R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1976, **56**, 621-633.

Lowen R., Fuzzy neighborhood spaces, *Fuzzy Sets and Systems,* 1982, **7**, 165-189.

Lowen R., Fuzzy uniform spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **82**(2), 370-385.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Fuzzy sot sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Maji P. K., Roy A. R., Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, **44**(8-9), 1077-1083.

Majumdar P., Samanta S. K., Similarity measure of soft set, *New Mathematics and Natural Computation*, 2008, **4**, 1-12.

Markin S. A., Shostak A. P., Another approach to the concept of a fuzzy proximity, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1992, **2**(29), 529-550.

Mitchell B., *Theory of Categories*, Academic Press, London, 1-7, 1965.

Molodtsov D., Soft sets theory-First results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**(4-5), 19-31.

Nazmul S. K., Samanta S. K., Neighborhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **6**(1), 1-15.

Pao-Ming P., Ying-Ming L., Fuzzy topology I. Neigborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 1980, **76**, 571-599.

Pawlak Z., Rough sets, *International Journal of Information and Computer Science*, 1982, **11**, 341-356.

Pazar Varol B., Aygün H., On soft Hausdorff axiom, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **5**(1), 15-24.

Pazar Varol B., Aygün H., Fuzzy soft topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012, **41**(3), 407-419.

Pazar Varol B., Shostak A. P., Aygün H., A new approach to soft topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012, **41**(5), 731-741.

Peeters W., Subspaces of smooth fuzzy topologies and initial smooth fuzzy structures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **104**, 423-433.

Pei D., Miao D., From soft sets to information systems, *Granular Computing*, *IEEE International Conference,* Florida, 11-15 July 2005.

Ramadan A. A., On smooth topological spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **48**, 371-375.

Ramadan A. A., Smooth pretopogenous structures, *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, **86**, 381-389.

Ramadan A. A., Abdel-Sattar M. A., El-Dardery M., Kim Y. C., L-fuzzy topogenous spaces and L-fuzzy quasi-uniform spaces, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2003, **11**, 125-138.

Ramadan A. A., Abdel-Sattar M. A., Kim Y. C., Fuzzy interior spaces, *Bull. Korean Math. Soc*., 2002, **39**(4), 617-633.

Roy A. R., Maji P. K., A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **203**, 412-418.

Shabir M., Naz M., On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786-1799.

Shao Y., Qin K., Fuzzy soft sets and fuzzy soft lattices, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2012, **5**(6), 1135-1147.

Shi F. G., Pointwise uniformities in fuzzy set theory, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, **98**(1), 141-146.

Shi F. G., Zhang J., Zheng C. Y., L-proximities and totally bounded pointwise L-uniformities, *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, **133**(3), 321-331.

Shostak A. P., Fuzzy syntopogenous structures, *Quaestiones Mathematicae,* 1997, **20**, 431-461.

Shostak A. P., On a fuzzy topological structure, *Suppl. Rend.Circ. Math. Palermo,* 1985, **2**(11), 89-103.

Shostak A. P., Basic structures of fuzzy topology, *Journal of Mathematical Sciences*, 1996, **78**(6), 662-701.

Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., Soft sets and soft modules, Editors: Wang G., Li T., Grzymala-Busse J. W., Miao D., Skowron A., Yao Y., *Proceedings of theThird International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology*, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, New York, 403-409, 2008.

Şahin R., Küçük A., Soft filters and their convergence properties, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013 (accepted).

Tanay B., Kandemir M. B., Topological structures of fuzzy soft sets*, Computers and Mathematics with Applications,* 2011, **61**, 412-418.

Terziler M., Öner T., *Kafes Teorisi*, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Ders Kitapları Serisi, İzmir, 159-166, 2002.

Wang G. J., *Theory of L-fuzzy topological spaces*, Xi'an Shaanxi Normal University Press, China, 1988.

Xu W., Ma J., Wang S., Hao G., Vague soft sets and their properties, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **58**, 787-794.

Ying-Ming L., Mao-Kang L., *Fuzzy Topology*, World Scientific Publishing, Singapore, 32-65, 1997.

Ying M., A new approach to fuzzy topology (I), *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, **39**(3), 303-321.

Yue Y., Jinming F., *Generated I-fuzzy topological spaces*, 2005, **154**, 103-117.

Yue Y., Shi F. G., L-fuzzy uniform spaces, *Journal of Korean Mathematical Society*, 2007, **44**(6), 1383-1396.

Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, **8**(3), 338-353.

Zorlutuna I., Akdağ M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

## KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER


[1] **Çetkin V.**, Pazar B., Aygün H., (L,M)-sezgisel fuzzy idealler, *XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu*, İstanbul, Türkiye, 1-4 Eylül 2008.

[2] **Çetkin V.**, Pazar B., Aygün H., (L,M)-intuitionistic fuzzy filters, *The 20th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society*, Bursa, Turkey, 21-23 August 2008.

[3] Pazar B., **Çetkin V.**, Aygünoğlu A., Aygün H., Interval-valued L-fuzzy topological groups, *The 20th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society*, Bursa, Turkey, 21-23 August 2008.

[4] **Çetkin V.**, Aygün H., On compactness in L-fuzzy bitopological spaces, *International Conference on Topology and Its Applications*, Ankara, Turkey, 6-11 July 2009.

[5] Aygünoğlu A., **Çetkin V.**, Aygün H., On embedding problem of fuzzy number valued continuous functions, *1st International Fuzzy Systems Symposium*, Ankara, Turkey, 1-4 October 2009.

[6] **Çetkin V.**, Aygün H., Lattice valued double fuzzy preproximity spaces, *2010 International Conference on Topology and Its Applications,* Nafpaktos, Greece, 26-30 June 2010.

[7] **Çetkin V.**, Aygün H., An introduction to multi-fuzzy groups, *International Conference on Mathematical Sciences*, Bolu, Turkey, 23-27 November 2010.

[8] **Çetkin V.**, Aygün H., On compactness in L-fuzzy bitopological spaces, *Advances in Fuzzy Mathematics*, 2010, **5**(1), 81-89.

[9] **Çetkin V.**, Aygün H., On (L,M)-fuzzy interior spaces, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 2010, **5**(2), 177-195.

[10] **Çetkin V.**, Aygün H., Lattice valued double fuzzy preproximity spaces, *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, **60**, 849-864.

[11] **Çetkin V.**, Aygün H., Extension of Shi's quasi-uniformity to the fuzzy soft sets, *1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Phrishtine, Kosova, 3-7 September 2012.

[12] **Çetkin V.**, Aygün H., On (L,M)-double fuzzy ideals, *International Journal of Fuzzy Systems,* 2012, **14**(1), 166-174.

[13] Aygünoğlu A., Varol B. P., **Çetkin V.**, Aygün H., Interval-valued intuitionistic fuzzy subgroups based on interval-valued double t-norm, *Neural Computing and Applications,* 2012, **21**(1), 207-214.

[14] Aygün H., **Çetkin V.**, Abbas S. E., On (L,M)-fuzzy closure spaces, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2012, **9**(5), 41-62.

[15] Abbas S. E., Aygün H., **Çetkin V.**, On stratified L-filter structure, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, **78**(8), 1221-1239.

[16] **Çetkin V.**, Aygün H., Uniformity structure in the context of soft set, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,* 2013, **6**(1), 69-76.

[17] **Çetkin V.**, Aygün H., On double fuzzy preuniformity spaces, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2013, **6**(4), 263-278.

[18] Aygünoğlu A., **Çetkin V.**, Aygün H., On embedding problem of fuzzy number valued continuous functions, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2013, **25**(1), 243-246.

[19] **Çetkin V.**, Aygün H., A note on fuzzy soft topological spaces, *8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT 2013*, Milan, Italy, 11-13 September 2013.

[20] **Çetkin V.**, Shostak A., Aygün H., On some categories of proximity and strong inclusion spaces in the context of fuzzy sets, *The 3rd International Fuzzy Systems Symposium*, İstanbul, Turkey, 24-25 October 2013.

[21] **Çetkin V.**, Shostak A., Aygün H., An approach to the concept of soft fuzzy proximity, *Abstract and Applied Analysis*, DOI: 10.1155/2014/782583.

[22] **Çetkin V.**, Aygün H., On fuzzy soft topogenous structure, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, DOI: 3233/IFS-130993.

[23] **Çetkin V.**, Aygün H., Extension of Shi's quasi-uniformity to the fuzzy soft sets, *Mathematical Sciences and Application E-Notes*, 2013, **1**(2), 42-50.

[24] Aygünoğlu A., **Çetkin V.**, Aygün H., An introduction to fuzzy soft topological spaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (accepted for publication).

[25] **Çetkin V.**, Aygün H., On soft fuzzy closure and interior operators, Utilitas Mathematica, (accepted for publication).

[26] **Çetkin V.**, Aygün H., Fuzzy soft semiregularization spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2014, **7**(4), 687-697.

## ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İzmit' te doğdu. İlk ve ortaokulu Leyla Atakan İ.Ö. okulunda liseyi ise İzmit Lisesinde tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında TÜBİTAK burslusu olarak Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı enstitüde Doktora programına başladı. 2011-2012 akademik yılı güz döneminde Letonya Üniversitesi'nde Erasmus öğrencisi olarak öğrenim gördü. Şubat 2009 dan beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.