T. C.

MALTEPE ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

FELSEFE ANABİLİM DALI

KANT'TA ARİTMETİĞİN SENTETİK *A PRIORI* OLARAK OLANAKLILIĞININ MATEMATİK FELSEFESİ AÇISINDAN ÖNEMİ VE MATEMATİK EĞİTİMİNE YAPABİLECEĞİ KATKILAR

DOKTORA TEZİ

MEHMET ÖZDEMİR

071150201

Danışman Öğretim Üyesi:

Prof. Dr. ZEKİYE KUTLUSOY

İstanbul, Ocak 2014

ÖNSÖZ

Orta Doğu Teknik Üniversitesinde Matematik Bölümü öğrencisiyken kafamı en çok meşgul eden sorulardan biri de "Matematik nedir?" sorusu olmuştur. Hocalarımızın alçak gönüllü kişiliklerinden cesaret alarak, bu gibi soruları onlara sorar ve yanıtlarını almaya çalışırdım. O dönemlerde ders aralarında yaptığımız sohbetler sayesinde, felsefi temelden yoksun olsa da zihnimde matematiğin neliğine ilişkin kimi görüşler oluşmuştu. Bana özgüven, bilimsel bakış açısı ve öğrenme merakı kazandıran değerli hocalarım Prof. Dr. Tosun Terzioğlu'yu, Prof. Dr. Gündüz İkeda'yı, Prof. Dr. Alev Topuzoğlu'yu, Prof. Dr. Albert Erkip'i, Prof. Dr. Turgut Önder'i ve diğerlerini saygı ile anıyorum. ODTÜ'den mezun olup İstanbul'da çalışma hayatına başladıktan sonra da bu türden sorular beni bırakmadı, ben de onları hiç bırakamadım. Meslek hayatımda aynı ya da benzer soruları öğrencilerim de bana soruyordu, "Matematik neydi?", "Matematik ne işe yarardı?". Mesleğimde, bu soruların devamı niteliğinde bir soru daha edinmiştim, "Matematik eğitimi nasıl olmalıydı?"

Düzensiz okumalarla matematik hakkında az çok bir birikimim oluşmuştu. Fakat, bu sorulara sağlam ve doyurucu yanıtlar bulabilmek için bilimsel bir çalışma yapmak gerekiyordu. Maltepe Üniversitesinin felsefe doktora programı açtığını öğrenince şansımı denemek istedim. Değerli hocalarım Prof. Dr. İoanna Kuçuradi ve Prof. Dr. Betül Çotuksöken bu programı açarak bana ve benim gibi felsefe sevdalısı kimi öğrencilere doktora yapma imkânı sağladılar. Kendilerine sonsuz teşekkürlerimi ve minnet duygularımı ifade etmek istiyorum. Ayrıca Prof. Dr. Betül Çotuksöken yapıcı eleştirileri, tavsiyeleri ve filozofça tutumuyla tezin bu aşamaya gelmesinde çok değerli katkılarda bulundu, değerli hocama içtenlikle teşekkür ederim. Değerli hocam Prof. Dr. Zekiye Kutlusoy'un tez danışmanım olması benim için büyük bir şanstı ve bende büyük bir motivasyon oluşturdu. Değerli hocam her aşamada sabırla eksiklerimi gösterdi, yapıcı yaklaşımıyla beni yönlendirdi ve cesaretlendirdi. Bu süreçte kendisinden çok şey öğrendim. Hocama sonsuz minnet duygularımı ve içten teşekkürlerimi sunarım. Doktora derslerini tamamlarken tez konusu kafamda olgunlaşmaya başlamıştı. Kant'la başlayan bir matematik felsefesinin matematik eğitimiyle ilişkisi kurulabilirdi. Böyle bir çalışma aynı zamanda mesleğimle ilgili olacağı için daha da anlamlıydı. Değerli hocam Doç. Dr. Bülent Gözkân, daha teze başlamadan yardım elini uzattı. Kant'ın genelde bilgi felsefesini özelde de matematik felsefesini kavramak kolay değildi. Benim azmimi ve kararlılığımı görünce daha çok destek oldu, tezin her aşamasında yapıcı yaklaşımı ve sağlam görüş açısı bana rehberlik etti, yol gösterdi. Değerli hocam Doç. Dr. Bülent Gözkân sayesinde Kant'ın matematik felsefesini anlamaya çalıştım ve böylece tezin kavramsal zeminini oluşturdum. Kendisine sonsuz minnet duygularımı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez konusuna karar verme aşamasında Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Karatay'ı tanıma şansım oldu ve kendisinin görüşleri bana ışık tuttu. Bu vesileyle değerli hocama yürekten teşekkür ederim. Savunma jürime katılan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sevgi İyi eleştirileriyle teze katkıda bulundu. Kendisine çok teşekkür ederim. Savunma jürime katılan Sayın Doç. Dr. Ayhan Çitil, titiz ve yapıcı yaklaşımıyla teze farklı bir açından bakmamı sağladı. Savunma sonrasında Doç. Dr. Ayhan Çitil tezin genelini ayrıntılı bir biçimde tartışma

ve gözden geçirme imkânı yarattı. Bu süreçte değerli hocamın görüşlerinden çok faydalandım. Kendisine gönülden teşekkürlerimi ve minnet duygularımı ifade etmek isterim.

Doktora programının her aşamasında değerli arkadaşım Dr. Meriç Bilgiç bana çok destek oldu, kendisine içtenlikle teşekkür ederim. Hem yoğun bir şekilde çalışıp hem de doktora yapmanın zorlukları çoktu. Bu dönemde tezim zorunlu olarak ailemin önüne geçti. Sevgili eşim Ayfer Özdemir, oğlum Cem ellerinden gelen desteği ve anlayışı hiçbir zaman esirgemediler, ikisine de ayrı ayrı çok teşekkür ediyorum.

Tezimi, Cumhuriyeti kuran Mustafa Kemal Atatürk ve arkadaşlarına, ayrıca bana okuma sevgisi, insanca değerler aşılayan annem ve babama ithaf ediyorum.

Ocak 2014 Mehmet Özdemir

ÖZET

Bu tez, Kant'ın aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu belirlemesi doğrultusunda, matematik eğitimine ilişkin olarak taslak niteliğinde bir yaklaşım geliştirmeyi amaç edinmektedir. Araştırmada öncelikle, Kant'ın bilme yetimizin her parçasının tek tek analizini yapıp genelde bilginin özelde de aritmetiksel bilginin oluşumunda her birinin rolünü ve kendi aralarında yaptıkları işbirliğini açıklayarak aritmetiğin sentetik bir *a priori* yargılar alanı olduğunu nasıl temellendirdiği ortaya konmuştur. Başka bir ifadeyle söylenecek olursa; Kant'ın aritmetik özelinde "sayı"yı merkeze alarak matematiğin; evrensel, zorunlu, kesin, bilgimizi genişleten ve öğretici yargılar alanı olduğunu felsefi zeminde nasıl açıkladığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, transandantal felsefede matematik; bilme yetimizin saf görü temelli bir tür ürünü olması bakımından, evrensel zorunluluğa ve nesnel geçerliliğe sahip bilgiler alanı olarak görülmek durumundadır.

Çalışmanın hedefine ulaşması açısından daha sonra, Kant'ın aritmetik görüşüne karşı itiraz niteliğinde olan kuramsal görüşler ayrı ayrı ele alınmış, her biri kapsamlı bir biçimde incelenerek Kant'ın görüşleriyle karşılaştırılması yapılmıştır. Dahası, Kant sonrasında matematiğe felsefi temeller bulma iddiasıyla ortaya çıkan üç kuramsal görüş (mantıkçı, biçimci ve sezgici görüş) ve günümüzün kimi özgün yönelimlerinin ayrıntılı bir biçimde çözümlendiklerinde, sayıyı ve inşasını temele almadan görüş geliştirdikleri saptanmıştır. Mantıkçı görüşün iddia ettiği gibi, aritmetiğin tümünün mantığın bir dalı olamayacağı, biçimci görüşün ileri sürdüğü gibi matematiğin anlamı olmayan simgeler bütünü olmadığı, ayrıca matematiğin tamamının "tam" ve "tutarlı" dizgelerden oluştuğu savının imkansız olduğu, bir diğer yaklaşım olan sezgiciliğin ortaya koymaya çalıştığı gibi, matematiğin tümünün, inşa yöntemiyle, doğal sayılar üzerinde sonlu adımda ispatlanan önermelerden kurulduğu tezinin olanaksız olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada üç temelci yaklaşımın, matematiği ontolojisinden kopardığı, dolayısıyla onu geniş kapsamlı ve kavramsal bir düzeyde temellendiremediği ortaya konmuştur. Matematik felsefesinin geneline bakıldığında Kant'ın, transandantal *apperception* saf düşünme edimi, saf ben, hissetme yetisi (duyusallık), üretici hayal gücü ve düşünme yetileri arasındaki bağlantısal ilişki temelinde sayının ontolojik mekânını araştırarak aritmetik görüşünü ortaya koyduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda, çağdaş matematik felsefesi eleştirel bir bakışla ele alınırken, günümüz matematik felsefesinin sorumluluk alanında yer alması gereken görevlere dair önerilere yer verilmiştir. Ardından felsefi temellerinin Kant'ın bilgi kuramına dayandığı ileri sürülen yapılandırmacı öğrenme kuramının bilgiye ilişkin görüşleri ayrıca sorgulanmıştır.

Bu öğrenme kuramının öncülerinin genelde bilgiyi, özelde de matematiksel bilgiyi felsefi bir düzlemde ele almadıklarının ortaya konmasıyla birlikte, sağlam bir felsefi zemine dayanan yetkin bir matematik eğitimi yaklaşımı geliştirme gerekliliğinin ortaya çıktığı belirlenmiştir. Buradan hareket edilerek, Kant'ın insan, eğitim ve aritmetik anlayışı çerçevesinde matematiğin sentetik *a priori* karakterine uygun olarak, matematik eğitiminin nasıl olması gerektiğine ilişkin görüşler geliştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Kant, aritmetik, sentetik *a priori* yargı, bilme yetisi, matematik felsefesi, matematiğin temelleri sorunu, sayının ontolojik mekân, matematik eğitimi.

ABSTRACT

This dissertation aims to develop a draft approach to mathematics education based on Kant's definition of arithmetic as a field of synthetic *a priori* judgments. The research primarily describes how Kant grounded arithmetic as a field of synthetic *a priori* judgments after analyzing each individual segment of our cognition and explaining their roles and collaborations in creation of knowledge, in particular, of arithmetical knowledge. In other words; this research has demonstrated how Kant by focusing on "number" specific to arithmetic explained on philosophical grounds the fact that mathematics is a field of universal, necessary, absolute, knowledge-expanding and didactic judgments. Accordingly, mathematics should be considered in transcendental philosophy as a field of universally necessary and objectively valid knowledge, as it is a pure intuition-based product of our cognition.

In the following section, for the purpose of this dissertation, each theoretical argument against Kant's arithmetical concepts is dealt with separately, and elaborated on and compared with Kant's views. Moreover, those three theoretical arguments (logical, formalist and intuitionist), driven by the cause of finding philosophical grounds for post-Kant mathematics, and several specific trends of today are deeply analyzed, which, in conclusion, reveals that they developed their view without basis on the number and the construction thereof. It is shown herein that arithmetic may not wholly be a branch of logic as claimed by the logicist view, mathematics is not a body of meaningless symbols as claimed by the formalist view, the argument that mathematics consists entirely of "complete" and "consistent" systems is impossible; and the thesis that mathematics as a whole is founded via the construction method from the propositions proven in finite ladder on natural numbers is impossible.

In this study, it is suggested that these three foundationalist approaches severs mathematics from its ontology, hence failing to found mathematics at a comprehensive and conceptual level. An overall evaluation of the philosophy of mathematics has resulted in the conclusion that Kant put forth his view on arithmetic by exploring ontological basis of the number on the basis of association relations between transcendental *apperception*, pure self, sensibility, productive imagination and cognition. In this context, this dissertation provides a critique of modern mathematical philosophy as well as suggestions as to the tasks that fall within the responsibility of modern mathematical philosophy. After that, the paper also questions the views on knowledge by the constructivist learning theory, which is claimed to be based on Kant's theory of knowledge.

Following the demonstration that precursors of this learning theory could not treat knowledge, in general, and mathematical knowledge, in particular, on a philosophical basis, it has been found out that the requirement to develop a competent mathematics education on a sound philosophical foundation have arisen. Based on these assessments, views have been developed as to how mathematics education should be, within the context of Kant's understanding of

human, education and arithmetic, and in accordance with the synthetic *a priori* character of mathematics.

Keywords: Kant, arithmetic, synthetic *a priori* judgment, cognition, philosophy of mathematics, the problem of foundations of mathematics, ontological basis of number, mathematics education.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ iii

ÖZET v

ABSTRACT vii

İÇİNDEKİLER ix

TABLOLAR LİSTESİ xii

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM: KANT'IN ARİTMETİĞİN SENTETİK *A PRIORI* YARGILAR ALANI OLARAK OLANAKLILIĞI GÖRÜŞÜ 9

1.1. Kant'ın Epistemolojisinde Temel Kavramsal Çerçeve 9

1.1.1. Kant'ın Transandantal Felsefesi 9

1.1.2. Transandantal Felsefede Temel Kavramlar 15

1.1.2.1. *A Priori* Bilgi ve *A Posteriori* Bilgi 17

1.1.2.2. Analitik Yargılar 22

1.1.2.3. Sentetik Yargılar 27

1.1.2.4. Bilginin Ön Koşulu Olarak *A Priori* Görü Formları: Uzay ve Zaman 29

1.1.2.5. Anlama Yetisinin *A Priori* Kavramları Olarak Kategoriler 33

1.2. Kant'ta Bilim Olarak Metafiziğin Sağlam Dayanakları 36

1.2.1. Bilim Olarak Metafiziğin Olanaklılığının Temel Dayanağı Durumundaki Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Aritmetik 37

1.2.2. Nesnenin Tesisini Sağlayan Üç Asıl Yeti: Hissetme Yetisi (Duyusallık), Hayal Gücü ve Düşünme Yetisi 44

1.2.3. Sentetik Yargının Oluşumunda Sentezin Üç Aşaması 47

1.2.4. Düşünmenin Üç Ayrı Yetisi 52

1.2.4.1. Anlama Yetisi (Kavrama Yetisi) 53

1.2.4.2.Yargı Gücü (Yargı Yetisi) 54

1.2.4.3. Mantıksal Çıkarımlarda Teorik Aklın İşlevi 58

1.2.5. Sentetik *A Priori* Yargıların Oluşumunda Genel Mantık ve Transandantal Mantık Ayırımı 63

1.2.6. Sentetik *A Priori* Yargılarda Nesne, Kavram ve Yargı İlişkisi 65

1.2.7. Aritmetiğin Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Olanaklılığı 68

1.2.7.1. "Sentez-Şema", "Şema-İmge" Ayrımları ve Aritmetiksel Bilgi 71

1.2.7.2. Sayının İnşasındaki Rolleriyle "Transandantal *Apperception*" Saf Düşünme Edimi", "Saf Ben" ve "Transandantal Şema" 77

1.2.7.3. Akıl Bilgisi Alanları Olarak Felsefe-Matematik Farklılığı ve Sayının İnşası 87

1.2.7.4. Kant'ın Aritmetik Görüşünde Kuruluşunun Eksik Kaldığı Düşünülen "Sıfır", "Bir" ve "Birim" 109

2. BÖLÜM: KANT'IN ARİTMETİK GÖRÜŞÜNÜN ÖNCESİNDEKİ VE SONRASINDAKİ BELLİ BAŞLI GÖRÜŞLERLE KARŞILAŞTIRILMASI VE GÜNÜMÜZ MATEMATİK FELSEFESİNE ELEŞTİREL BİR BAKIŞ 113

2.1. Pythagoras'tan Hume'a Kadar Kimi Düşünürlerin Matematik Görüşlerinin Kant'ın Yaklaşımıyla Karşılaştırılması 113

2.2. Kant'ın Aritmetiğin Yargılarına İlişkin Görüşüne Karşı Çıkışlar ve Yeni Arayışlar 129

2.2.1. Kant'ın Aritmetik Görüşüne Karşı Bir Duruşun Öncüsü Olarak Gottlob Frege 135

2.2.1.1. Frege'nin Sayı ve Sayal Sayı Tanımı 136

2.2.1.2. Frege'nin Aritmetiğin Yargılarına İlişkin Görüşünün Dayanakları 147

2.2.1.3. Russell Paradoksu ve Frege'nin Görüşünün Sarsılması 149

2.2.2. Matematiğin Temellerine İlişkin Üç Ana Felsefi Görüş ve Bu Görüşlerin Kant'ınkiyle Karşılaştırılması 158

2.2.2.1. Mantıkçılık (*Logicism*) 159

2.2.2.2. Biçimcilik (*Formalism*) 167

2.2.2.3. Sezgicilik (*Intuitionism*) 178

2.3. Çağdaş Matematik Felsefesi Tartışmalarına Eleştirel Bir Bakış 185

2.3.1. Ontolojik Bakış Açısından Matematiksel Bilgi 186

2.3.2. Matematiksel Nesnelerin Neliği Sorunu 193

2.3.3. Biçimci Görüşe Bir Karşı Duruş Olarak Matematiğin Sanat Yanı 198

2.3.4. Yirminci Yüzyılda Matematiğin Neliğine İlişkin Özgün Yönelimler 203

2.3.5. Matematiğin Temellerine İlişkin Üç Temelci Yaklaşımın Değerlendirilmesi Bağlamında Günümüz Matematik Felsefesinin Belirlenen Görevi 206

3. BÖLÜM: KANT'IN BİLGİ YAKLAŞIMI, İNSAN VE EĞİTİM ANLAYIŞI ÇERÇEVESİNDE ARİTMETİK GÖRÜŞÜNÜN GÜNÜMÜZ MATEMATİK EĞİTİMİ AÇISINDAN İRDELENMESİ 217

3.1. Kant'ın İnsan ve Eğitim Anlayışı 218

3.2. Kant'ın Görüşlerinin Eğitimde Bir Yansıması Olarak Görülen Yapılandırmacı Öğrenme Kuramı 227

3.2.1. Yapılandırmacılığın Belli Başlı Öncülerinin Bilgi, Öğrenme ve Gerçekliğe İlişkin Görüşleri 228

3.2.2. Kant'ın Bilgi Felsefesi ve Matematik Görüşü Bağlamında Yapılandırmacılığın Felsefi Temellerine İlişkin Bir Soruşturma 238

3.3.Yetkin Bir Yaklaşım Geliştirmeye Doğru: Günümüzün Matematik Eğitiminin Temel Sorunlarına Çözüm Arayışları Bağlamında Eleştirel Değerlendirmeler 254

3.3.1. Günümüz Matematik Eğitimindeki Temel Sorunlar 254

3.3.2. Belli Başlı Öğrenme Kuramlarına Genel Bir Bakış 259

3.3.3. Davranışçı ve Yapılandırmacı Öğrenme Kuramlarının Karşılaştırılmasından Kantçı Bir Matematik Eğitimi Yaklaşımına Doğru 262

3.4. Kant'ın Matematik Görüşü Temelinde Yetkin Bir Matematik Eğitimi Yaklaşımı Geliştirme Denemesi 266

3.4.1. Matematik Eğitiminde Kant'taki *Universitas* Saf Kategorisinin İşlevselliği 267

3.4.2. Matematik Eğitiminde Bilgiden Daha Çok Dedüktif-Indüktif Düşünme Süreçleri ve Yargı Gücünün Kullanımı 274

3.4.3. Matematik Öğretiminin Öğrencinin İlgi, Yetenek ve Öğrenme Tarzları Temelinde Farklılaştırılması 281

3.4.4. Matematik Eğitiminde Matematiğin Felsefi Temellerine İlişkin Biçimci Görüşün Olumsuz Etkilerinin Aşılması ve Öğretmenin Rolü 284

3.4.5. Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Temellendirilen Matematik ve Öğretimi 289

SONUÇ 294

KAYNAKLAR 306

EKLER 315

ÖZGEÇMİŞ 319

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. Kant'ta Kategorilerin Listesi 34

Tablo 1.2. Kant'ta Yargıların Mantıksal Çizelgesi 57

Tablo 1.3. Kant'ta Bilme Yetisi 60

Tablo 2. 4. Platon'da "Görülenler" ve " Düşünülenler" Ayrımı 115

Tablo 2.5. Hartmann'da Bilgi Kategorileri (B.K.) ve Varlık Kategorileri (V.K.) İlişkisi 187

Tablo 3.6. Kant'ın Yetiler Tablosu 219

Tablo 3.7. PISA 2009'a Göre Türkiye ile Diğer Ülkelerin Matematik Okuryazarlığı Ortalama Puanlarına Göre Karşılaştırılması 315

Tablo 3. 8. Dördüncü Sınıf Düzeyinde TIMSS 2011 Matematik Sonuçları 316

Tablo 3. 9. Sekizinci Sınıf Düzeyinde TIMSS 2011 Matematik Sonuçları 317

Tablo 3.10. PISA 2012'ye Göre, Türkiye ile Diğer Ülkelerin Matematik Okuryazarlığı Ortalama Puanlarına Göre Karşılaştırılması 318

GİRİŞ

Bir bilim dalının öğretimi ya da öğrenimi, onun "neliği" hakkındaki sorularla ve bu sorulara verilebilecek yanıtlarla doğrudan ilişkilidir. Söz konusu matematik ve eğitimi olunca, matematiğin ne olduğu araştırılmadan, dahası onun doğasını açık kılmadan eğitimi hakkında bilimsel bir görüş geliştirilmesi olanaklı görünmemektedir. Bu bakımdan bu tezde, önce Kant'ın aritmetik anlayışını nasıl temellendirdiği ortaya konmaya çalışılmıştır. Daha sonra Kant'ın yaklaşımına yönelik karşı çıkışların çözümlenerek eleştirel bir değerlendirmesinin yapılabilmesi için çaba sarf edilmiş, araştırmanın sonunda da yine Kant'ın görüşleri temelinde matematik eğitimine ilişkin yetkin bir yaklaşımın taslağı olabilecek önerilere yer verilmiştir. Çalışmada, Kant öncesindeki matematikle ilgili söylemlerin genelinin onun doğasına doyurucu bir biçimde ışık tutmaktan yoksun olması ve sonrasında da matematiğin ontolojik temeline dayalı aydınlatıcı bir çalışmanın yapılmaması Kant'ın aritmetik görüşlerinin ele alınmasına öncelik tanımıştır. Bu doğrultuda, çalışma boyunca şu iki temel soru üzerinde durulmaktadır: Bunlardan ilki "Kant'ın aritmetiği sentetik *a priori* yargılar alanı olarak temellendirdiği nasıl gösterilebilir?"; başka bir deyişle, "Kant'ta özelde aritmetiğin, genelde de matematiğin önermelerinin kesin, evrensel, zorunlu, bilgimizi genişleten ve öğretici yargılar alanı olarak olanaklılığı nasıl açıklanabilir?" sorusu olurken ikincisi ise, "Matematik sentetik *a*

priori yargılar alanı olarak olanaklı olduğuna göre, matematik eğitimi nasıl yapılandırılabilir?" sorusu olmaktadır.

İlk soruya yanıt aramak amacıyla birinci bölümde, Kant'ın aritmetiğin yargılarının sentetik *a priori* yargılar olduğu görüşünü nasıl gerekçelendirdiği ayrıntılarıyla ele alınmaya çalışılmıştır. Sentetik *a priori* yargıların *a priori* bileşeni, bu yargıların kesin, zorunlu ve evrensel olduğunu, sentetik yapısı da onun empirik yargılar gibi öğretici ve bilgimizi genişletme özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. Kant, matematiğin en temel nesnesi olan sayının, hissetme yetisi (duyusallık), üretici hayal gücü ve anlama yetisinin saf kategorilerinin kendiliğinden yaptığı işbirliği sonucunda inşa edildiğini açıklamaktadır. Transandantal felsefede bilginin görü ve kavram ayağı olmak üzere iki tür bileşeni vardır. Bir başka ifadeyle söyleyecek olursak bilgi, görü ve kavramın işbirliği sonucunda oluşmaktadır. Buradan da bilginin, duyu verilerinin anlama yetisinin *a priori* kavramlarına veya yasalarına göre anlam kazanması sonucunda ortaya çıktığını belirtelim. Kant, hissetme yetisi (duyusallık), üretici hayal gücü ve düşünme yetilerinin (anlama yetisi, yargı gücü ve akıl) her birinin rollerini tek tek açıklığa kavuşturması ve aralarındaki bağlantısal ilişkileri ortaya koyması sonucunda aritmetiğin kavramlardan inşa edilen bir akıl bilgisi alanı olduğunu göstermektedir. Matematiğin kavramsal karakteri; matematiğe önemli bir kimlik kazandırarak ona bir anlam ve işlevsellik yüklediği gibi, onu kavramsal olanın dışında sayan ve insan kültürüyle ilişkisiz bir simgeler yığını olarak gören yaklaşımlara karşı da bir yanıt niteliğindedir.

Kant'ın bilgi felsefesinde düşünmenin kendiliğinden faal yanı olan transandantal *apperception*[1] saf düşünme edimi, üretici hayal gücü aracılığıyla hissetme yetisinin (duyusallığın) saf malzemesine yönelmektedir. Böyle bir yöneliş sonucunda, transandantal *apperception* ediminin hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formlarına bir birlik vermesiyle ve üretici hayal gücünün transandantal sentezlemesi aracılığıyla sayının da mekânı olan "saf ben" tesis edilmektedir. "Saf ben" bir saf temsildir. Saf temsiller ise tekil temsildir. Buradan da matematiğin saf görüdeki malzemelerinin tekil temsiller olduğu anlaşılmaktadır. "Saf ben"in tesis edilmesiyle birlikte üretici hayal gücü sayının malzemesi olan tekil saf temsilleri "saf ben" mekânında canlandırma imkânına kavuşmuş olur. Üretici hayal gücü, transandantal şemalar aracılığıyla hissetme yetisi (duyusallık) ile anlama yetisinin saf kategorileri arasındaki bağlantıyı kurarken, aynı zamanda sayının inşasında gövde görevi yapan transandantal sentezi de gerçekleştirmektedir. Matematikte en temel bir nesne olan sayı, zaman görüsünde bulunan *a priori manifold*un sentetik birliği sonucunda ortaya çıkmaktadır. İşte burada saf görü formu, saf kavram ve üç aşamalı saf sentezin sentetik *a priori* yargılar alanı olarak aritmetiği olanaklı hale getirdiği görülmektedir.

Kant, geliştirmiş olduğu aritmetik görüşünün, transandantal *apperception* saf düşünme ediminin *a priori* inşa edilen bir nesne ve bir kavram olan sayının ve her türlü yargının mekânı olan "saf ben"i tesis etmesiyle olanaklı olduğunu açıklamaktadır. "Saf ben"in kategorilerin ve aklın idelerinin asli mekânı olması, uzay ve zamana tâbi olmaması, dahası her türlü düşünme etkinliğinin zemininde yer alması bakımından bütün bilgilerin oluşmasını olanaklı kılmaktadır. Transandantal

[1] Bu terimin anlamı tez içerisinde açıklanacaktır. Bkz. "1.2.7. 2"

felsefede nesneden bağımsız kavram olmadığı gibi, yargıdan bağımsız tek başına nesne de olamaz. Hem nesne, hem de kavram ikisi birlikte yargıda ortaya çıkar. Yargıyla birlikte de nesnenin bilgisi oluşur. Dolayısıyla nesnenin ve yargının mekânı "saf ben"dir. Görüldüğü gibi Kant, sayının ontolojik mekânını göstermeyi hedefleyerek aritmetik görüşünü temellendirmektedir. Kant'ta matematiğin saf görü temelinde türetilen kavramlar alanı olması bakımından, sayı saf görü formu olan zaman temelinde inşa edilmektedir, fakat zamana tâbi olmadığı gibi zamana tâbi olarak da değişmemektedir. Sayının sadece deneyimden tümüyle bağımsız olan *apperception* aracılığıyla inşa edilmesi, onun deneyimi aşan bir nesne olduğunu göstermektedir. Buradan da sayının malzemesi olan *a priori manifold*un *apperception* zemininde saf görüde üretici hayal gücü aracılığıyla canlandırıldığı, kendisinin ise sentetik yargıda ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Göstermeye çalıştığımız gibi, kimi düşünürler sayının zamanla ilişkisini doğru kuramadıkları için Kant'ın aritmetik görüşünü yanlış yorumlamaktadırlar. Bu bakımdan, araştırmada Kant'tan geniş alıntılara yer verilerek onun görüşleri yeniden ortaya konmaya çalışılmıştır.

Matematik felsefesinin önemli sorunlarının tanıtıldığı çalışmanın ikinci bölümünde, ağırlıklı olarak matematiğin felsefi temellerine ilişkin üç temel yaklaşım (mantıkçı, biçimci ve sezgici yaklaşım) ve kimi özgün yönelimler üzerinde durulmaktadır. Kant'ın sayıyı saf görü formu olan zaman zemininde ele alması ve temellendirmesi, başta Frege olmak üzere dönemin kimi düşünürlerinin itirazlarına yol açmıştır. Mantıkçı yaklaşımın öncüsü olan Frege, geometrinin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu kabul etmekle birlikte, Kant'ın aritmetik görüşüne karşı bir görüş olarak aritmetiğin analitik *a priori* yargılar alanı olduğunu ileri sürmektedir. Başka bir

deyişle Frege'de aritmetik, mantığın bir dalı olduğu için kesinliği ve doğruluğu tamdır, fakat içerikten yoksun bir önermeler alanı olduğu için bilgimizi genişletemez. Günümüzde, sayının her alana girdiği, dahası birçok bilgi alanının sayı ile ifade edildiği gerçeği göz önüne alındığında, Frege'nin aritmetik görüşünün yeterince desteklenmediği söylenebilir. Frege'nin görüşleri çalışmanın bütünü açısından dönüm noktası olmaktadır. Bu bağlamda, çalışmada Frege'nin aritmetiğe ilişkin iddiaları ve bu iddiaları sarsan "Russell Paradoksu" etraflıca tartışılmaya çalışılmıştır. Mantıkçılığa karşı bir tepki olarak ortaya çıkan ikinci temelci görüş biçimci yaklaşımdır. Biçimci yaklaşımın öncüsü Hilbert matematiğin simgelerden oluşmuş, anlamı olmayan, tümü doğrulanmış, tam, tutarlı ve kendi içinde kapalı bir sistem olduğu görüşünü ortaya atmıştır. Böyle bir sav şu anlama gelmektedir; matematiğin tümü hiç kuşkuya yer bırakmaksızın doğru, tam ve tutarlı yapılardan oluşmaktadır. Ancak bu görüş, matematiğin doğasıyla ne kadar uyumlu olabilirdi? Belli sayıdaki formüllerin sağladığı çıkarımlara dayanarak matematiğin tümünde kesinliğin ve tamlığın olduğunu iddia etmek matematiksel düşünmenin engin doğasına uygun olamazdı. Gödel'in matematiğin tümünde tamlığın ve tutarlılığın olanaklı olmadığını göstermesi üzerine, Brouwer ve öncülük ettiği sezgici yaklaşımı benimseyen düşünürler ise matematiğin tümünün sonlu adımda doğal sayılar üzerine inşa edilebileceğini, sonlu adımda inşa edilemeyen önermelerin doğruluk değerlerininse "belirsiz" olduğunu savunmuşlardır. Diğer taraftan Kant'ta ardışık olan zaman, Brouwer'da iki parçalı zaman dilimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Sezgiciliğin matematik görüşü ile Kant'ınkinin kimi açılardan benzer görünmesi sezgici görüşün üzerinde ayrıca durulmasını gerekli kılmıştır.

Formel mantık, düşünmenin içeriği ile değil de şekli ile ilgilenmesi bakımından, var olandan bağımsız olarak dilsel ifade biçimlerinin bir öğretisi olmuştur. Bu açıdan, bilginin görü temelinde oluştuğu düşünüldüğü sürece, felsefenin üzerinde yükseleceği bir zemin olarak dili ve dilin formel mantığını görmek olanaksız görünmektedir. Kant sonrasında saf görünün eleştirisi üzerinden sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı eleştirilmektedir. Kant'ta saf görü; matematiksel nesnelerin inşa edilmesini mümkün kılan bir mekân olarak, "dilsel-mantıksal" olanın dışındaki bir nesnellik alanına gönderme yapmaktadır. Başka bir deyişle, transandantal felsefede saf görü, matematiksel nesnelerin nesnel gerçekliğini olanaklı hale getiren bir zemindir. Bu bakımdan matematik eğitiminde, matematiksel nesnelerin böyle bir zeminde tanımlarının yapılması öncelikli olmalıdır. Nesnel gerçeklik dikkate alınmaksızın, salt dilin imkânlarıyla ad tanımı yapılarak matematik eğitimi gerçekleştirilemez.

Matematiğe sağlam temeller bulma iddiasındaki üç felsefi yaklaşımın ardından, günümüzdeki özgün yönelimlerin genelde kuramcı yaklaşımlar dışında görüş geliştirdiği görülmektedir. Bu bağlamda, kimi matematikçi-filozoflar biçimci yaklaşıma karşı görüş geliştirirken, kimileri de matematikte mutlak kesinlik arayışının matematiğin ve matematikçinin gerçekleriyle uyuşmadığını, böyle anlayışların önyargılı yaklaşımlar olarak sadece felsefi bir dogma olduğunu ileri sürmektedirler. En özgün olanlarından biri de, matematiğe felsefi temel arayışının gereksiz olduğunu, matematiğin felsefi bir temelinin olmadığı gibi, böyle bir temele ihtiyacının da olamayacağını iddia etmektedir. Her ne söylenirse söylensin, matematikçilerin, matematikçi-filozofların üzerinde hemfikir olduğu bir matematik tanımının, matematiğin temel nesnesi olan sayının inşasından kopuk bir şekilde

yapılabilmesi mümkün görünmemektedir. Kuramsal yaklaşımların Kant'ın aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklı olduğu görüşüne karşı çıkışlarını temellendirememesi, çalışmaya katkısı olabilecek ikinci sorunun oluşmasına olanak sağlamıştır.

İkinci soruya cevap bulmak amacıyla üçüncü bölümde, günümüz matematik eğitiminin matematiğin sentetik *a priori* karakterine uygun şekilde nasıl olması gerektiği üzerinde durulmuştur. Birçok ülkede olduğu gibi, Türkiye'de de, genelde eğitim, özelde de matematik eğitimi kimi sıkıntı ve sorunlarla doludur. Bu sorunların kaynağındaki nedenlerden en merkezde olanı, matematiğin doğasına ilişkin tanımların sorgulanmamasından kaynaklanan uygun öğrenme yaklaşımlarının ve yöntemlerinin geliştirilememiş olmasıdır. Çalışmadan anlaşılacağı gibi Kant'ın aritmetiğe ilişkin görüşlerini temellendirmesi, matematik eğitimi hakkında öneriler geliştirmeye felsefi olarak güçlü bir altyapı hazırlamıştır. Eğer matematik eğitimi, aritmetiğin yargılarının sentetik *a priori* yargılar olarak olanaklılığı zemininde ele alınmasaydı, bu çalışmanın önemli bir boyutu eksik kalırdı. Bu bakımdan tezde, matematik eğitimine ilişkin Kant temelli önerilere yer verilmeden önce, yapılandırmacılığın post-pozitivist ve daha çok pragmatist temelli bilgi görüşlerinin irdelenmesi gerekli görülmüştür. Kant'ın epistemolojisi esas alınarak yapılandırmacı öğrenme kuramının özellikle bilgi, gerçeklik ve öğrenme anlayışları sorgulanmaktadır. Dahası Kant'ın bilgi felsefesinden etkilendiği ileri sürülen ve günümüzde popüler bir öğrenme kuramı olarak bilinen yapılandırmacılığın felsefi temelleri, bu kuramın öncülerinin görüşlerine gidilerek yoklanmıştır. Yapılandırmacı yaklaşım, bilginin oluşumunda özneye etkin rol vermesinden ötürü Kant'ın bilgi

anlayışıyla benzerlik göstermekle birlikte, nesnel bilginin olanaksızlığına vurgu yapmasıyla felsefi temellerinin dayanaksız olduğunu ortaya koymaktadır.

Kant'ın matematiği ontolojik zeminini göstererek temellendirmesi, dahası bilginin nesnelliğinin nasıl olanaklı olduğunu açıklaması, onun görüşleri bağlamında bir matematik eğitimi yaklaşımının geliştirilebilmesine güçlü dayanaklar sağladığını bir kez daha ifade edelim. Böylece Kant'ın insan, bilgi, eğitim ve aritmetik görüşleri temel alınarak, sentetik *a priori* bilginin saf görüde öğrenci için yeniden inşa edilebilmesinin olanağının araştırıldığı bir çerçevede, matematik öğretimine ilişkin yetkin olarak değerlendirilebilecek bir öneri taslağı geliştirilmeye çalışılmaktadır.

1. BÖLÜM: KANT'IN ARİTMETİĞİN SENTETİK *A PRIORI* YARGILAR ALANI OLARAK OLANAKLILIĞI GÖRÜŞÜ

1.1. Kant'ın Epistemolojisinde Temel Kavramsal Çerçeve

Kant'ın transandantal felsefesinde sayı görü temelli bir kavramdır. Böyle bir kavramın inşası yine kavramlarla açıklanabilir. Çalışmanın bu bölümdeki amacı, Kant'ta aritmetiksel yargıların sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklılığını araştırmaktır. Bu bakımdan, temel kavramları tek tek ele alarak kavramsal çerçeveyi oluşturmaya çalışacağız.

1.1.1. Kant'ın Transandantal Felsefesi

Matematikçi ve gökbilimci olan Copernicus, yaşadığı dönemde, yani 16. yüzyılda "yer merkezli" egemen evren anlayışının aksine "güneş merkezli" evren anlayışını savunur. Başka bir anlatımla Copernicus'un yaşadığı dönemde yerkürenin, evrenin tam ortasında sabit durduğuna, yıldızların ve gezegenlerin dünya etrafında döndüğüne inanılmaktaydı. Copernicus yaptığı gözlemler sonucunda yerkürenin değil, güneşin evrenin merkezinde sabit olarak durduğunu, yıldızların ve dünyanın güneşin etrafında döndüğünü ileri sürer.

Kant, "transandantal felsefe"yi Copernicus'un astronomide geliştirdiği bu devrimci çalışmasına benzetir. Kant'ın "Copernicusçu devrim" olarak adlandırdığı bu değişimin, Antikçağdan süregelen "özne-nesne" uyumlu bilgi anlayışının yerine, nesnenin özneye zorunlu uyumu ilkesini getirdiğini görmekteyiz. Aristotelesçi bilgi kuramına göre bilgi, nesnelerin formlarının zihnimizdeki yansımalarıdır. Bu görüşe göre bilme konusu yaptığımız nesneler zihnimizin dışında, bizden bağımsız kendi başına varlıklardır. Kant, nesneler zihnimizin dışındaki şeyler değil, aksine insan zihninde, bir yargı içinde kavramla beraber ortaya çıkanlar anlamına geldiğini iddia ederek Aristotelesçi bilgi görüşüne karşı çıkar. Eğer nesne insan zihninden ayrı bir mekânda olsaydı, Kant'ın epistemolojisine göre, kavramlarla ilişkisi olanaksız olacaktı. Yalçın Koç, "(...) aksi takdirde kavram ile nesne farklı mekânlarda olacakları için birbirlerinin altına düşmezler" (Koç, 1997: s. 53) sözüyle Aristoteles'in bilgi görüşünün olanaksızlığını ifade eder. Buradan da, Kant'ın epistemolojisinde nesnenin tesisini ruhun bilme yetisinin mümkün kıldığı anlaşılmaktadır.

Transandantal felsefede en temel ontolojik unsurun yargı olması bakımından, yargıdan bağımsız nesne ve kavramın olması olanaksızdır. Aristoteles ve Kant'ın ikisi de tümeller konusunda kavram realisti olmalarına rağmen, kavram ve nesne arasındaki ilişkiyi kurma biçimleri birbirinden çok farklıdır. Kant'ta kavramların nesnel gerçekliği verme becerisi kategorilerin aracılığından, bağlayıcılığından gelir. Kant bu bağlayıcılığı "Kategoriler görünüşlere, böylece bütün görünüşlerin özet toplamı olarak doğaya *a priori* yasalarını buyuran kavramlardır" (Kant, 1998: B164) şeklinde ifade eder. Aristoteles'te ise kategoriler varlıklara yüklenir, varlıklar kategorilerin taşıyıcılarıdır (Aristoteles, 2002: s. 9; *Kategoriler*, 1b 10). Düşüncenin

kategorilerinin aynı zamanda, varlığın kategorileri de olmasından ötürü varlık ile mantık (dil/düşünce) arasında bir özdeşliğin kurulduğu Aristoteles felsefesinde kavram ile nesne özdeşleşir. Ne var ki Kant için kategoriler Aristoteles'teki gibi doğanın kendisine değil, "bütün görünüşlerin özet toplamı" olan "doğa"ya yüklenir. Yani Aristoteles'in *Kategoriler*'de (1b 25) "töz, nicelik, nitelik, görelik, uzam, zaman, durum, iyelik, etkinlik ve edilginlik" (Aristoteles, 2002: s. 11) biçiminde sıraladığı on kategori doğanın kendisine aittir. Fakat Kant için nicelik, nitelik, ilişki ve kiplik başlıkları altında yargı türlerine göre biçimlenen on iki kategori (Kant, 1998: A80/B106) anlama yetisine, düşünen özneye aittir. Kant'ın "Copernicusçu devrim" kavramı ile ifade ettiği gibi, algıladığımız "doğa fenomeni" anlama yetimizin doğası gereği, gözlemci konumundaki bizim anlama koşullarımıza tâbi olarak bize böyle görünmektedir. Kavramlar doğrudan fiziksel nesnelerin kendilerine değil de, dolaylı olarak, anlama yetisinin soyutlanmış nesnelerine yüklenirken, aralarında doğrudan bir ilişkinin bulunmadığı nesnenin kendisi veya "kendinde şey" ile kavram, birbirinden uzak konumdadırlar.

Kant'ın bilgi felsefesinin Aristotelesçi bilgi anlayışından farklı olduğu gibi, rasyonalist ve empirist bilgi felsefelerinden de farklıdır. Rasyonalistler, duyu ile akıl arasında kesin bir ayrım yaparlar ve duyuların nesnelere ilişkin bilgi sağladığını ileri sürerler. Empiristler ise, tüm kavramların deneyden çıktığını iddia ederler (Yalçın, 2010: s. 82). Çalışmanın izleyen bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alacağımız gibi, Kant'ta bilgi, hissetme yetimizin (duyusallığımızın) ve anlama yetimizin birlikte çalışması sonucunda ortaya çıkmaktadır. Kant bu işbirliğini, "Duyuların işi görmek, anlama yetisininki düşünmektir" sözüyle açık kılmaktadır (Kant, 2002: §22). Kant'a göre bu yetilerden biri, diğerinin işini yapabilme işlevselliğine sahip değildir.

"Görüsüz kavramlar boş, kavramsız görüler kördür" (Kant, 1998: A51/B75) sözüyle Kant, bilgide saf kategorilerin ve hissetme yetisinin (duyusallığın) birbirini tamamlayan iki farklı ve temel unsur olduğuna vurgu yapmaktadır.

Kant'ın *CPR*'de (*Critique of Pure Reason*'da)[2] amacının, sentetik *a priori* yargıların nasıl mümkün olduğunu araştırmak ve temellendirmek olduğunu anlıyoruz. Çünkü sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı görüşü Kant'ın transandantal felsefesinde özgün bir görüştür. Şimdi burada "transandantal" kavramını açarak Kant'ın "transandantal felsefesi"nin ne anlama geldiğini açıklamaya çalışalım. "Transandantal" kavramı "tecrübenin olanağının *a priori* koşullarıdır" (Kant, 1998: A94/B126). Daha yalın bir dille, transandantal kavramı deneyimin *a priori* zemini anlamındadır. Bu zemin deneyimi mümkün kılan fakat, deneyim kökenli olmayan, yani deneyimden türemeyen bir zemindir. Transandantal felsefe de bir anlamda bilginin olanağının *a priori* koşullarını araştırır; "Sentetik *a priori* yargılar nasıl mümkündür?" ve "Nasıl biliyoruz?" gibi sorulara yanıt arar. Gözkân'a göre, "'transandantal' sözcüğü, şeyleri idrâkimizle ilgili olarak değil, bilgimizin (*Erkenntnis*) nasıl *a priori* mümkün olduğu, yani bilme yetimizin kendisine yönelik

[2] Bu çalışma boyunca Kant'tan yapılan alıntılar, Kant'ın özgün kitabının (*Kritik der reinen Vernunft*'un) Paul Guyer ve Allen W. Wood tarafından yapılan çevirisi *Critique of Pure Reason*'dan *(CPR)* alınmış ve Türkçeye çevrilmiş olan alıntılardır. Çalışma sürecinde zaman zaman *CPR*'nin yanı sıra Aziz Yardımlı'nın çevirisi *Arı Usun Eleştirisi*'nden de yararlanılmıştır. Değerli hocam, Aziz Yardımlı'nın çevirdiği Kant'ın kitabını, "1.1.1"de bu şekilde belirtme gereği duydum. Bkz. "Kaynaklar".

olması, başka bir deyişle deneyime zemin sağlayan öğelerle ilgili olması anlamında kullanılmaktadır" (Gözkân, 2002: s. 29).

Kant'ın transandantal felsefesinin zeminini transandantal kavramlar oluşturmaktadır. Aynı zamanda bu kavramlar *a priori* ilkeler olarak deneyimi düzenlerler. "(...) pek çok şekilde gösterdiğim transsendental sözcüğü, tüm deneyin ötesine giden bir şey değil, deneyden önce (*a priori*) olan ama tek işlevi deneyi olanaklı kılmak olan bir şey anlamına gelir" (Kant, 2002: III. Bölüme ek s. 129 "Dipnot"). Kant'ın hedefinin bilginin oluşumunu açıklamak değil, bilginin oluşumunu mümkün kılan *a priori* unsurların yapısını belirlemektir. Bundan dolayı o, felsefesinde ilkelerden hareket ederek bir yapı kurar. Bu yapıyı oluşturan bütün parçaları tek tek titiz bir biçimde oluşturur. Transandantal felsefe oluşturulurken sentetik *a priori* unsurların belirlenmesi en temel husustur. Çünkü bilim olmak demek, sentetik *a priori* yargılara dayanmak demektir. Sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını göstererek felsefesinin temellerini oluşturan Kant, felsefesinde "transandantal" ve "eleştirel idealizm" kavramlarını eş anlamda kullanır (Kant, 2002: §13). Transandantal felsefenin kendisinden önce ortaya hiç konmadığını iddia eden Kant, "(...) her Metafizikten zorunlu olarak önce gelen tüm transsendental felsefenin kendisi, burada sorulmakta olan sorunun, ancak sistematik bir düzen içinde ve ayrıntılı bir şekilde yapılan tam bir çözümlemesinden başka bir şey değildir" (Kant, 2002: §5) sözüyle transandantal felsefenin işlevselliğini ortaya koyar. Böylece de felsefesinde sınır çizmenin, eleştirinin tamlığının önemine vurguda bulunur. Çünkü saf aklın bütün parçalarına dokunmadan, her parçanın yeri ve diğerleriyle olan ilişkisi aydınlatılmadan hiçbir şey başarılamaz. Böyle bir çalışma tamamlanmadıkça yapılan iş güvenilir değildir; o halde ya hiçbir şey yapılmamalı ya da bilme yetisinin alanına

ilişkin her şey belirlenmelidir (Kant, 2002: s. 11). Kant'ın amacının bir sistem olarak gördüğü transandantal felsefeyi aklın bütün unsurlarını eleştirerek gerçekleştirmek olduğunu anlamaktayız. "Saf aklın eleştirisi transandantal felsefeyi oluşturan her şeyi kapsamına alır; ve kendisi transandantal felsefenin tam ideasıdır" (Kant, 1998: A14/B28).

Kant'ın bilgi felsefesinin temel hedefi, "nesnenin ne olduğu ve nasıl tesis edildiği"ne yanıt aramaktır. Bundan dolayı Kant nesnenin ontolojik zeminini araştırır. Bir başka anlatımla, "transandantal" kavramı aşkın olan anlamında değildir, "aklı eleştirme yöntemi" olarak nesnelerle değil de, genel olarak nesneleri *a priori* olarak tesis etmeyle ilgili bilişimizle uğraşan bilgiye ilişkindir. Kant, "Nesnelerle olmaktan çok *a priori* olanaklı olduğu ölçüde nesnelere ilişkin bilgi türümüzle ilgilenen tüm bilgiyi transandantal olarak adlandırıyorum. Böyle kavramların sistemi transandantal felsefe olarak adlandırılabilir" (Kant, 1998: A12/B25) biçimindeki ifadesiyle transandantal felsefeyi nesnelerin *a priori* olarak tesis edilişini inceleyen, araştıran ve açıklayan kavramlar bütünü olarak tanımlar.

Transandantal felsefede, aritmetiği analitik *a priori* yargılar alanı olarak görmek demek, matematiğin en temel nesnesi olan sayı ve inşasını gözardı etmek demektir. Çünkü Kant'ın felsefesinde, analitik yargılar nesne tesis etmez. Tezimizin izleyen başlıklarında, sayının inşasını açıklamaya çalışırken transandantal felsefede hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formları uzay ve zamanın, anlama yetisinin *a priori* kavramları olan kategorilerin ayrı ayrı rollerini ele alacağız. Kant'ın bilme

yetilerinin her birinin işlevini ayrı ayrı açıklayarak ve sayının ontolojik zeminini araştırarak aritmetik görüşünü nasıl temellendirdiğini tartışacağız.

1.1.2. Transandantal Felsefede Temel Kavramlar

Kant'ın 18. yüzyılda bilginin oluşumunu açıklamak için "*a priori*" kavramı üzerine getirdiği yeni yorumuyla çağdaş felsefenin temellerini attığı görülmektedir. Kant öncesi rasyonalist felsefe, insan bilgisinin sınırlarını tanımayarak Ortaçağ filozoflarının düştüğü hataya bir başka biçimde düşmektedir. On yedinci yüzyılda Descartes, mantık önermeleriyle Tanrı'nın varlığını ispatlamaya kalkışmıştır. Bu bakımdan Kant, bilgi felsefesinde bir dönüm noktasıdır. Varolana yönelme yerine zihne, anlama yetisine yönelmektedir**.** Kant, Ortaçağın problemlerini ve rasyonalist felsefenin "bilme yetisinin sınır tanımaz anlayışı"nı eleştirmiş ve dört temel soru ile problem alanlarını ayırarak ilişkilendirmiştir. Bunlar: 1) "Ne bilebiliriz?" 2) "Ne yapmam gerekir?" 3) "Ne ummalıyım?" ve 4) "İnsan nedir?" sorularıdır. Bu sorulardan birincisine "metafizik", ikincisine "ahlâk felsefesi", üçüncüsüne "din", dördüncüsüne de "antropoloji" yanıt verebilir (Mengüşoğlu, 1969: s. 76). "Ne bilebiliriz?" sorusu teorik aklın alanıyla ilgilidir. Fakat, insan aklı sadece anlama yetisini nesne edinerek kavrayan ve bilinen hakkında kuramlar geliştiren teorik bir akıl değildir. Bir de aklın pratik yanı vardır. Pratik akıl, bize insanın ne yapması gerektiğini gösterir (Heimsoeth, 2007: s. 68). Kant eleştirel bir yol izleyerek insanın her şeyi bilemeyeceğini ve ispat edemeyeceğini ileri sürerek bilme yetimizin sınırlarını titiz bir biçimde çizer. "Ruhun ölümsüzlüğü", "özgürlük" ve "Tanrı'nın varlığı" gibi ideler bilinemez ve ispat edilemez, bunlar pratik aklın ideleridir.

Kantçı felsefede bilgi, duyularla verilmiş olan şeylerin düşünme ile işlenmesidir. Kant, "hiçbir bilgi zaman bakımından deneyimden önce gelmez, bütün bilgiler deneyimle başlar" sözüyle "doğuştan içerikli bilgi yoktur" demek ister. Yani bilgiye ilişkin yetilerin "kişi"de olduğunu, deneyimin iki oluşturucusundan birinin "saf görü formları (uzay ve zaman)" diğerinin de "anlama yetisi" olduğunu anlatmak ister. Bu bakımdan Kant'ta bilgi iki kaynaklıdır. Bunlardan biri anlama yetimiz, diğeri de hissetme yetimiz, yani duyusallığımızdır. Zaman bakımından deneyimden önce gelen hiçbir bilginin olmaması demek, bütün bilgimizin deneyimden çıktığı anlamına gelmez. Bilginin oluşumunda "anlama yetisi" etkindir, belirleyicidir ve bilginin oluşumunu mümkün kılar. O halde, bu durumda aklın deneyimden almadığı, deneyimden bağımsız olarak oluşturduğu bilgiler de vardır. Bu bilgilere Kant, *a priori* bilgi demektedir.

Çalışmamızda, Kant'ın epistemolojisi çerçevesinde açıklanması gereken temel kavramları tek tek açıklamaya çalışacağız. Önce *a priori* kavramından başlayacağız, sonra da ilgili diğer kavramları ele alacağız.

1.1.2.1. *A Priori* Bilgi ve *A Posteriori* Bilgi

Bir bilgi alanını sağlam bilim olma yolunda ilerleten, onda, *a priori* olanın bulunmasıdır (Kant, 1998: "B-Önsöz"). Kant, felsefesinde bilginin oluşumunu açıklamak için "*a priori*" ve "*a posteriori*" ayırımı yapar. Bu ayırımın anlamı bilginin "*a priori*" ve "*a posteriori*" olmak üzere iki temel kaynağının olduğudur.

Yeri gelmişken, Kant'ta *a priori-a posteriori* ayırımının yargılara ilişkin olduğunu, Kant'ın yargıları ruhun indirgenemez bir yetisinin edimleri olarak gördüğünü, Kant'tan sonraki literatürde ise aynı ayırımın önermeler için yapıldığını, dolayısıyla burada bir düzlem kayması olduğunu belirtelim. Kant'ın amacı, bilginin kaynağındaki bu iki temel öğeyi aydınlatarak "sentetik *a priori*" yargıları belirlemek ve dolayısıyla da transandantal felsefesini oluşturmaktır. Çünkü Kant'a göre felsefe "bilimler bilimi"dir, başka bir deyişle "insan aklının sınırları üstüne bir bilim"dir (Cassirer, 2007: s. 159) ve görevi de kavramlardan "akıl bilgisi"ni elde etmektir. Kant, bilginin iki kaynağını *CPR*'de şöyle ifade eder:

> Dolayısıyla zamana göre, deneyimi önceleyen hiçbir bilgi yoktur ve bütün bilgimiz deneyimle başlar. Fakat bütün bilgimiz, deneyimle başlamasına rağmen, bundan bütün bilginin deneyimden doğduğu sonucu çıkmaz. (…) Şu halde, bu daha yakından bir incelemeyi gerektiren bir sorudur ve herhangi bir kaba yanıta izin vermez: Öyleyse deneyimden bağımsız olan ve hatta duyunun bütün izlenimlerinden bağımsız olan herhangi bir bilgi var mıdır? Yok mudur? Böyle bilgiye *a priori* bilgi adı verilir ve kaynakları *a posteriori* olan, yani deneyimde olan empirik bilgiden ayrılır (Kant, 1998: B1-B2).

Kant'ın ileri sürdüğü gibi "*a priori* bilgi", bütün deneyimlerden mutlak olarak bağımsız gerçekleşen bilgidir. Kant, burada koşulsuz, şartsız bütün deneyimlerden bağımsız gerçekleşen bilgiyi işaret etmektedir: "*A priori* bilgiden anlayacağımız şey, şu veya bu deneyimden bağımsız gerçekleşmesi değil, daha çok bütün deneyimlerden mutlak olarak bağımsız gerçekleşmesidir. Sadece deneyimden *a posteriori* olarak elde edilen empirik bilgilerin tersidir" (Kant, 1998: B2). Kant devamında *a priori* bilginin özelliklerini şu şekilde ifade eder: "*A priori* bilginin ayırıcı iki özelliği vardır. Bunlar; zorunluluk ve genelliktir. Zorunluluk, kesin genellik [*strict universality*] empirik bilgiyi saf bilgiden ayıran yanılmaz ölçütlerdir" (Kant, 1998: B4). Kant'ın bu ifadesinden *a priori* bilginin güvenilir üç ölçütü olduğu anlaşılmaktadır. İşte, "zorunluluk", "kesinlik" ve "evrensellik" *a priori* bilgiyi empirik bilgiden ayırır. İzleyen bölümlerde de göreceğimiz gibi Kant, matematiğin yargılarının *a priori* görü formları temelinde oluştuğunu ve bu ölçütlere uyduğunu ileri sürmektedir.

Kant, "(...) deney hiçbir zaman akla yetmez (...)" (Kant, 2002: §57) sözüyle deneyimden gelen bilginin zorunluluğu ve evrenselliği olmadığı için, bu bilgilerin güvenilirliğinin de olamayacağına işaret etmektedir. Çünkü "(...) deney gerçi bana neyin varolduğunu ve nasıl olduğunu öğretir, ama hiçbir zaman onun zorunlu olarak öyle olması gerektiğini ve başka türlü olamayacağını öğretmez. Demek ki, o bana kendi başına şeylerin yapısını hiçbir zaman öğretemez" (Kant, 2002 : §14). Öyleyse deneyim nedir ve nasıl oluşur? Kant'a göre "Tecrübe/deneyim (*experience*), deneysel (*empirical*) bir bilgidir, yani bir nesneyi algılar yoluyla belirleyen bir bilgidir" (Kant, 1998: A176/B218). Deneyimin yargıları, duyuların ve anlama yetisinin bir ürünüdür. Deneyimin yargılarının nasıl olanaklı olduğunu anlamak için, deneyim öğelerine

ayrılırsa temelinde iki şey bulunur: Birincisi sırf duyulara ait olan "algı (*perceptio*)", ikincisi de bu yargılarda "yargıda bulunma" vardır (bu sırf anlama yetisinin işidir) (Kant, 2002: §20). Kant, yargıda bulunmanın iki şekilde olabileceğini, "(...) ilk olarak, ben sırf algıları karşılaştırarak ve onları benim durumumun bir bilinci halinde birbirine bağlayarak; ya da ikinci olarak, onları genel olarak bir bilinç halinde bağladığımda" (Kant, 2002: §20) ifadesiyle açıklamaktadır. Kant, birinci şekildeki yargının sadece bir "algı yargı"sı olduğuna işaret eder. Kant'a göre algı yargıları "(...) sırf öznel geçerliğe sahiptir: o sırf, nesneyle ilgi kurulmadan, algıların benim ruhsal durumum haline bağlanmasıdır. Bu nedenle, genellikle sanıldığı gibi, algıları karşılaştırmak ve yargıda bulunma aracılığıyla bir bilinç halinde bağlamak, deney için yeterli değildir: buradan yargının genel geçerliği ve zorunluluğu çıkmaz, oysa ancak bunların sayesinde yargı nesnel geçerlik kazanabilir ve deney olabilir" (Kant, 2002: §20). Kant, "şekerin tatlılığı", "vermutun acılığı" gibi yargıları sırf öznel geçerli olmalarından dolayı "algı yargıları" olarak adlandırmaktadır:

> Hiç çekinmeden itiraf edeyim ki: bu örnekler, bir anlama yetisi kavramı kendilerine eklenecek olsa bile, herhangi bir zamanda deney yargısı olabilecek türden algı yargıları sunmazlar; çünkü bunlar herkesin sırf öznel olarak bildiği ve hiçbir zaman nesneye bağlanmayacak olan duyguyla ilgilidirler, dolayısıyla hiçbir şekilde nesnel olamazlar. Ben sadece akla ilk gelen, sırf öznel geçerli olan ve kendi içinde onu zorunlu genel geçer kılacak ve bu sayede bir nesneyle ilgi içine sokacak bir temel içermeyen bir yargı örneği vermek istedim (Kant, 2002: §19, 20 "Dipnot").

Kant'a göre deneyim yargılarının geçerliliği özneyle ve öznenin o anki durumuyla sınırlandırılamaz, dolayısıyla bu tür yargılar "nesnel yargılar" olarak adlandırılır. Çünkü deneyim belirli koşullarda bana öğrettiğini, her zaman herkese de

öğretebilmelidir. Kant, bir örnekle algı yargıları ve deneyim yargıları arasındaki ilişkisel bağlantıyı şöyle açıklar:

> (...) örneğin "hava elâstikîdir" dediğimde, bu yargı önce bir algı yargısıdır, yalnızca duyularımda iki duyumu ilgi içine sokuyorum. Eğer buna deney yargısı denmesini istiyorsam, bu bağlantılılığın, onu genel geçer yapan bir koşula bağlı olmasını talep ederim. Yani, benim de herkesin de aynı algıları aynı durumlarda her zaman zorunlu olarak birbirine bağlamasını istiyorum (Kant, 2002: §19).

Kant için deneyim, duyusallık ve anlama yetisiyle sınırlıdır: "Deney, duyusallığa ait görülerden ve yalnız anlama yetisinin işi olan yargılardan oluşur" (Kant, 2002: §21a). Buradan da anlaşıldığı gibi Kant, felsefesinde deneyimi iki anlamda kullanmaktadır. Bunlardan birincisi "duyunun izlenimleri olarak", ikincisi de "duyusallığın ve anlama yetisinin birlikte çalışmasının bir ürünü olarak". "Deneyimden bağımsız" derken, Kant deneyim kavramını birinci anlamda, yani "duyu izlenimlerinden bağımsız" anlamında kullanmaktadır. Yeri gelmişken Kant'ın *a priori* ve "saf" kavramları arasında yaptığı ayrıma burada değinmek istiyoruz. Bir *a priori* bilgiye ancak ve ancak empirik olarak hiçbir şey karışmamışsa bu bilgi "saf" tır. Bu bakımdan her *a priori* bilgi saf değildir. Kant, *a priori* ve "saf" kavramları arasındaki farka ilişkin şu örneği verir. "Her değişimin bir nedeni vardır" önermesi *a priori* bir önerme olmasına karşın saf bir önerme değildir. Çünkü "değişim" kavramı empirik kökene dayanmaktadır (Kant, 1998: B2/B3).

Kant'a göre uzay ve zamanın hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* görü formları olması bakımından geometri uzay temelinde, aritmetik de zaman temelinde inşa edilir. Hissetme yetimizin (duyusallığımızın) bu iki *a priori* formu matematiksel bilginin olmazsa olmaz koşuludur. Kant, transandantal felsefesinde bilginin oluşumunda bir taraftan anlama yetisinin saf kavramları ile hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formlarının bağlantısal ilişkisini ve işlevsel farkını ortaya koyarken, diğer taraftan da aynı işlemi akıl ve anlama yetisi için yapmaktadır. Bütün bunlardan amaç, bilginin olanaklılığının *a priori* koşullarını araştırmaktır.

> Transandantal estetik bölümünde; dolayısıyla önce, anlama yetisinin kavramları yoluyla düşündüğü her şeyi duyusallıktan uzaklaştırmayla onu ayıracağız; böylece empirik görü haricinde hiçbir şey kalmayacaktır. İkinci olarak, ondan duyuma ait olan her şeyi çıkaracağız, böylece saf görü ve görünüşlerin salt biçimi haricinde hiçbir şey kalmayacaktır, ki bunlar duyusallığın *a priori* olarak sağlayabildiği şeylerdir (Kant, 1998: A22/B36).

Duyusallığımızın *a priori* formları olan uzay ve zamandan elde ettiğimiz empirik görü sentetik *a posteriori* yargıların malzemesi olurken, yine bu formlardan elde edilen *a priori* görü de, sentetik *a priori* yargıların malzemesi olmaktadır. Matematiksel yargıların sentetik *a priori* yargılar alanı olmasının temelinde bu tür yargıların *a priori* görü temelli olması yatar. "Matematiksel yargılar ne tür yargılar olabilir?" sorusuna, Kant şöyle cevap vermektedir: "Matematiksel yargılar her zaman *a priori* yargılardır, çünkü deneyimden türetilmeyecek zorunluluğu kendilerinde taşırlar" (Kant, 1998: B15). Kant'a göre insan bilgisinde zorunlu ve evrensel *a priori* yargılar olduğunu göstermek kolaydır, bilimlerden örnek vermek gerekirse yalnızca matematiğin tüm önermelerine bakmak yeterlidir. Matematik bize deneyimden

bağımsız olarak *a priori* bilgide ne denli ilerleyeceğimizin mükemmel bir örneğini vermektedir. Kısaca, *a priori* bilgiyi deneyimden bağımsız, "zorunlu", "kesin" ve "evrensel" bilgi olarak toparlayabiliriz. *A priori* bilginin karşıtı *a posteriori* bilgidir, başka bir deyişle *a posteriori* bilgi, "yalnızca deneyimden [*experience*] ödünç alınmış bilgidir" (Kant, 1998: A2). Kant'ın transandantal felsefesini oluştururken deneyime güvenmediği, bu bakımdan "*a priori*" dayanakları titizlikle araştırdığı ve ortaya çıkardığı görülmektedir. Çünkü onun evrensel ve zorunlu olabilecek bilgiye güveni vardır. Deneyim, tanım icabı özel ve tesadüfi olanın dışında hiçbir şey vermez.

1.1.2.2. Analitik Yargılar

Kant'ın transandantal felsefesindeki *a priori* ve *a posteriori* ayırımının yanı sıra, analitik ve sentetik yargı ayırımı da epistemolojisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu ayırım Kant'tan beri tartışmaların odağı haline gelmiştir. Bir şeyi bilmek ya da bir konuda bir inanca sahip olmak yargıda bulunmakla mümkündür. Kant, yargı kavramını kullanarak analitik ve sentetik bilgi arasındaki farkı açıklama çabasındadır (Barker, 2003: s. 22). Çünkü bilinçli ya da bilinçsiz olarak yargıda bulunmak demek, varolan bir şey hakkında bir şeyler söylemektir. Analitik ve sentetik yargılar arasında önemli farklar vardır. Bu farkın ortaya çıkartılarak matematiksel önermelerin aydınlatılması matematik felsefesi açısından önem taşımaktadır. Aritmetiğin yargılarının analitik *a priori* olduğunu iddia eden görüşler bu çalışmanın içerisinde yer alacaktır. Dolayısıyla, analitik-sentetik ayırımını açıklıkla ortaya koyabilmek için

analitik yargıları a) "içerme" b) "düşünülme" ve c) "çelişki ilkesi" olarak üç ana başlık altında incelemeye çalışacağız.

a) İçerme İlkesi: Kant, analitik-sentetik yargı farkını içerme ilkesine göre, yüklemin kavramı, öznenin kavramında gizli olarak içerilmesi olarak ifade eder. Bu farkı şu şekilde açıklar: "Ya B yüklemi özne A'ya, bu A kavramında gizli olarak kapsanan bir şey olarak aittir; ya da B yüklemi bütünüyle A kavramının dışında yatar, gerçi hiç kuşkusuz onunla bir bağlantı içinde duruyor olsa da. İlk durumda yargıyı analitik, ikincisinde sentetik olarak adlandırıyorum" (Kant, 1998: A6/B10). Analitik yargılar her zaman doğru ve olumlu yargılardır. Bir yargının analitik olup olmadığının bir ölçütü olarak "çözümleme" yöntemini kullanabiliriz (Dursun, 2004: s. 33). Örneğin, "altın sarı bir metaldir" önermesini incelediğimizde, "sarı" ve "metal" kavramları özne olan "altın" kavramının içerisindedir (Kant, 2002: §2). Başka bir anlatımla bu kavramlar altın kavramını oluşturmaktadırlar, yani yüklemin kavramı öznenin kavramı içerisindedir, dolayısıyla böyle bir yargı analitik yargıdır.

b) Düşünülme İlkesi: Kant, analitik yargıları tanımlarken üzerinde durduğu kavramlardan biri de "düşünme" kavramıdır. Biz burada "düşünme" kavramından, kavramda içerilenin düşünülmesini anlıyoruz. Bu bakımdan, "düşünme" kavramı "varolan"ın düşünülmesidir. Kant'ın *Prolegomena*'da işaret ettiği gibi "Analitik yargılar yüklemde, öznenin kavramında zaten varolan, ama pek o kadar açık ve bilinçli düşünülmemiş olandan başka hiçbir şey söylemezler" (Kant, 2002: §2). Buradan da, Kant'ın analitik-sentetik yargı ayırımında koyduğu ilkelerden bir diğerinin de "düşünülme ilkesi" olduğunu görüyoruz. Bir yargı içerisinde yüklemin

kavramı açık olarak söylenmese de öznenin kavramında zaten düşünülmüştür. Kant bunu *Prolegomena*'da şöyle açık kılmaktadır:

> "Bütün nesneler yer kaplar" dediğimde, nesne kavramımı hiçbir şekilde genişletmiş olmam, sadece çözmüş olurum; çünkü yer kaplama o yargıdan önce, açıkça söylenmezse bile, gerçekte o kavramda zaten düşünülmüştü; o halde bu yargı analitiktir (Kant, 2002: §2).

Kant'a göre analitik yargılarda "öznenin kavramına yüklem yoluyla hiçbir şey katılmaz, fakat yalnızca kurucu kavramlarına [*component concepts*] parçalanır" (Kant, 1998: A7/B11). Düşünülme ilkesiyle analitik yargılar tanımlanırken ileride göreceğimiz gibi sentetik yargılarda, yargıdaki yüklem hiçbir zaman öznenin kavramında düşünülmemiştir. Bir başka deyişle, yüklem hiçbir biçimde öznenin çözümlenmesiyle elde edilemez. Çünkü sentetik yargılar, analitik yargıların aksine bilgimizi genişleten yargılardır.

c) Çelişme İlkesi: Kant, bütün analitik yargıların tamamının "çelişme ilkesi"ne dayandığını, bu tür yargıların içerdikleri kavramların deneyimle ilişkisine bakmaksızın doğal yapıları gereği "*a priori*" bilgiler olduğunu iddia eder:

> Çünkü evetleyici analitik bir yargının yüklemi zaten önceden öznenin kavramında düşünüldüğünden ötürü, o özne hakkında çelişmeye düşmeden değillenemez. Aynı şekilde, çelişme ilkesinden dolayı, onun tersi de, analitik fakat değilleyici bir yargıda özne hakkında değillenmek zorundadır. "Her cisim yer kaplar" ve " yer kaplamayan cisim yoktur" gibi (yalın) önermelerde bu böyledir (Kant, 2002: §2).

Bir yargının analitik olup olmadığına karar vermek için "çelişme ilkesi"ne başvurmak güvenilir bir yöntemdir. Bildiğimiz gibi "Mantıkta çelişme ilkesi; bir şey hem kendisi hem de başka bir şey olamaz, ya da bir şeyin hem kendisi hem de değillemesi doğru olamaz diye tanımlanır" (Dursun, 2004: s. 36). Öyleyse aynı zamanda bir şeyin hem kendisi hem de olumsuzu doğru olmaz. Kant'ın diliyle "bir şeyin aynı zamanda olması ve olmaması olanaksızdır" (Kant, 1998: A152/191). Kant, buna şöyle bir örnek verir; "Genç olan bir insan aynı zamanda yaşlı olmaz; ama pekala bir zamanlar genç olan başka bir zamanda yaşlı olabilir" (Kant, 1998: A152/192). Buna göre bir "p" önermesi doğru ise onun olumsuzu olan "$\bar{p}$" önermesinin yanlış olması gerekir. Bu iki önerme, aynı zamanda ikisi birlikte doğru olamaz. Bu durum "çelişme ilkesi"ne göre olanaksızdır. Örneğin, "p: Cisimler yer kaplar" önermesi analitik ve doğru bir önermedir; bu önermeyi çelişme ilkesine göre test edelim: Bu önermenin değilleyeni (olumsuzu) olan önerme "$\bar{p}$", "$\bar{p}$: Cisimler yer kaplamaz" doğru olmadığı için "p" önermesinin analitik bir önerme olduğunu görüyoruz. Her iki önermenin aynı zamanda doğru ya da yanlış olması mümkün görünmemektedir.

Kant'ın da işaret ettiği gibi "çelişme ilkesi, bütün analitik bilginin evrensel ve bütünüyle yeterli ilkesidir" (Kant, 1998: A151/191). Analitik olarak doğru önermeler çürütülemezler, fakat daima doğru olan yargılar her zaman analitik olmayabilir. Analitik yargıların doğruluğu ise çelişki ilkesine göre bilinir. "Eğer yargı, negatif veya olumlu olsun ya da olmasın analitik ise doğruluğu çelişki ilkesine göre daima bilinebilir" (Kant, 1998: A151/191). Analitik yargılar, çözümleyici yargılardır; nesne kavramını hiçbir biçimde genişletmeyen, sadece çözen, başka bir

deyişle bilgimizi genişletmeyen fakat yalnızca ayrıştıran yargılardır. Dahası, analitik yargılar, açıklayıcı yargılar olarak yüklem yoluyla öznenin kavramına hiçbir şey eklemezler. Tersine yüklemi onda bulabilmek için yalnızca kavramı ayrıştırmak gerekir. Kant, deneyimin yargılarının sentetik yargılar alanı olduğuna ve dahası analitik yargıların deneyime dayandırılamayacağına işaret etmektedir.

> Deneyim yargılarının aslında tümü sentetiktir. Çünkü analitik yargıyı deneyime dayandırmak saçma olacaktır, çünkü yargıyı oluşturmak için kavramımın ötesine gitmem gerekmez ve bunun için deneyimden hiçbir kanıt zorunlu değildir. "Bir nesne yer kaplar" önermesi bir deneyim yargısı olarak değil *a priori* olarak kurulur. Çünkü deneyime başvurmadan önce kavramda benim yargım için bütün koşullara sahibimdir. Yapmam gereken tek şey çelişme ilkesine göre kavramdan yüklemi çekmektir (Kant, 1998: A7/B11-B12).

Kant'ın ileri sürdüğü gibi, bütün analitik yargıların kavramları deneyimsel olsa bile, *a priori* yargılardır. Kısaca, analitik yargılar yoluyla bilgimizin hiçbir zaman genişlemediğini fakat kavramların ayrıştırılarak anlaşılır kılındığını, bu tür yargıların yükleminin öznenin kavramında zaten var olduğunu ve ortak ilkelerinin de "çelişme ilkesi" olduğunu belirtelim. Kant, aritmetiğin analitik değil sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu iddia etmektedir ve bunu transandantal kavramlarla temellendirmektedir. Bizim tezimizin ana temasının Kant'ın aritmetik görüşü olması bakımından, çalışmamızın izleyen alt başlıklarında aritmetiğin yargılarının sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklı olup olmadığını araştırmaya çalışacağız.

1.1.2.3. Sentetik Yargılar

Kant'ın, *CPR'*de transandantal felsefesini oluştururken yaptığı en önemli çalışmasından biri de "matematiksel yargıların da" içinde bulunduğu sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını göstermek olmuştur. Kant'tan önce hiçbir filozof *a priori,* fakat empirik bilgimizin de dayanağı olan üstelik bilgimizi genişleten, "evrensel", "kesin", "zorunlu" yargıların olanaklılığını ortaya koyamamıştır. Bu bakımdan sentetik *a priori* yargılar Kant'ın özgün görüşüdür. Bu görüş, Batı felsefesinde devrim niteliğindedir. Sentetik *a priori* yargıların doğruluğunu veya yanlışlığını tespit edebilmek için, Kant'ın "üçüncü şey" dediği şeye ihtiyaç duymaktayız. İhtiyaç duyulan şey ise, hissetme yetimizin (duyusallığımızın) saf formları uzay ve zamanın içerdiği "saf görüdür (Alm. *Anschauung*)" (Yalçın, 2003a: s. 135). Sentetik yargılar, düşünülmeyen bir şeyleri yükleminde içererek bilgimizi genişleten yargılardır. Örneğin, "Bazı cisimler ağırdır" önermesinde yüklemin kavramı, öznenin kavramının ötesine geçmesi bakımından bilgimizi genişletmektedir. Görüldüğü gibi entetik yargılarda yüklemin kavramı öznenin kavramının ötesine geçer. Analitik yargılarda olduğu gibi kavramlardan biri diğerinin analiziyle uğraşmaz, aksine öznenin kavramıyla yüklemin kavramı sentetik birlik içerisindedirler. Böyle özelliklerinden dolayı sentetik *a priori* yargılar bilgimizi genişletmektedir. Kant sentetik yargıları, "deneyimsel olan" ve "saf anlama yetisinden ve akıldan kaynaklanan" biçimiyle ele alarak sınıflandırır. Deneyim yargıları her zaman sentetiktir ve *a posteriori* bilgilerdir. Oysa saf anlama yetisi ve akıl kaynaklı sentetik yargılar *a priori*dir. Başka bir deyişle, empirik temelli sentetik yargılar olabildiği gibi empirik temele dayanmayan (*a priori* olan) sentetik yargılar da mevcuttur.

Mantıkça, tüm empirik yargılar sentetik *a posteriori* yargılar olmakla birlikte tüm sentetik yargılar *a posteriori* değildir.

Daha önce işaret edildiği gibi, Kant'ın da *CPR*'de yoğunlaştığı konu sentetik *a priori* yargıların varlığıdır ve bunların olanaklılığının temellendirilmesidir. Sentetik *a priori* yargıları mümkün kılacak etmenlerden biri de saf görü formları olan uzay ve zamandır (Kant, 1998: B73). Kant'a göre matematiksel yargılar zorunlu, kesin ve evrensel yargılar olmakla birlikte, bilgimizi genişleten yargılardır. Dolayısıyla "Matematiksel yargıların tümü sentetiktir" (Kant, 1998: A10/B14). Ayrıca, bu tür yargılar *a priori* yargılardır. Başka bir deyişle saf matematik yargıları deneyime dayalı bilgi değil, sadece *a priori* bilgi içerir. Örneğin, "5 + 7 = 12" önermesi başlangıçta analitik bir önerme olarak düşünülebilir. "12" sayısı bir kavram olarak ne kadar öğelerine ayrılırsa ayrılsın, onun içinde yine "5" ve "7"nin toplamı olan "12" sayısı bulunamaz. Çünkü, "5" ve "7" sayılarının birbirine eklenmesi sonucunda, başka bir kavram ve başka bir sayı olan "12" sayısı elde edilmiştir. Dolayısıyla bu işlemle, yani birimin birime eklenmesi sonucunda bilgimiz genişlemiştir.

> Demek ki 7 + 5 = 12 önermesiyle insan kendi kavramını genişletir ve birincisine, onda düşünülmeyen bir kavram ekler, yani aritmetik önerme her zaman sentetiktir. Bunun farkına, büyük sayılar örnek alındığında daha iyi varılır; çünkü burada açıkça ortaya çıkar ki, biz kavramımızı istediğimiz kadar evirip çevirelim, görünün yardımı olmadan, sırf kendi kavramlarımızı öğelerine ayırmamızla toplamı hiçbir zaman bulamayız (Kant, 2002: §2).

Aritmetiksel bilgi, aritmetiksel yargıların çözümlenmesiyle değil, bu tür yargılardaki kavramın ötesine, yani onu karşılayan görünün içerdiğine gidilerek elde edilir. Başka bir deyişle aritmetiksel yargıların temellendirilmesi saf görü temelinde olanaklıdır. Analitik yargılarda olduğu gibi, aritmetiksel kavramları öğelerine ayırarak önermelerin, doğruluğunu ya da yanlışlığını test etmek mümkün değildir. Kant burada matematiğin önermelerinin analitik değil sentetik ve *a priori* olduğunu vurgular ve matematik bilgisinin özelliğini şöyle ifade eder: "Saf matematik bilgiyi diğer tüm *a priori* bilgilerden ayıran en önemli özellik, onun kavramlardan değil, hep sadece kavramların oluşturulmasından hareket etmesi gerekliliğidir" (Kant, 2002: §2). Çalışmamızın izleyen bölümlerinde görüleceği gibi, Gottlob Frege ve diğer mantıkçı filozofların, aritmetiğin yargılarının analitik *a priori* olduğunu iddia etmeleri, transandantal felsefede matematiksel nesnelerin olmadığı anlamına gelmektedir. Aritmetiğin yargılarının analitik *a priori* ya da sentetik *a priori* olup olmadığı matematik felsefesinde merkezi bir konudur, bu konuyu tartışmaya devam edeceğiz.

1.1.2.4. Bilginin Ön Koşulu Olarak *A Priori* Görü Formları: Uzay ve Zaman

Kant'ın düşünme biçiminin en özgün yanlarından biri, uzay ve zamanı görünün *a priori* formları olarak saptamasıdır. Hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* görü formları olan uzay ve zaman öznenin dışında kendi başına varolan, yani nesnede bulunan şeyler değildir, bu saf formların kaynağı insan zihnidir. Kant'ın epistemolojisinde görü, bilme yetisinin dışarıdan gelen malzemeye açıldığı ilk kapısıdır âdeta. Kant'ta tezahürlerin (belirişlerin) kaynağı "kendinde şey"dir. Bu

tezahürler (belirişler), hissetme yetisinin (duyusallığın) malzemesini oluştururlar. Duyusallık aracılığıyla bu malzemeler bize verilirler, sonra da anlama yetisi yoluyla düşünülürler. "Tüm düşünce ister dolaylı ister doğrudan olsun eninde sonunda görüye bağlanır" (Kant, 1998: A19/B33). Hissetme yoluyla edinilen malzeme, öncelikle uzay ve zaman *a priori* formlarının ilişkilerinde anlama yetisinin malzemesi haline gelir. Sonra bu malzemeler anlama yetisinin kategorilerinin altına alınır. Bilgi, görüden gelen malzemenin kategorilerle birleşmesiyle oluşur. Deleuze, Kant'taki uzay ve zamanı "*a priori* bir sunum" olarak adlandırır. "Bize kendisini sunan şey, sadece mekân ve zamandaki ampirik fenomenal çeşitlilik değil, fakat bizzat mekân ve zamanın salt *a priori* çeşitliliğidir" (Deleuze, 1995: s. 44). Dahası, uzay ve zaman *a priori* görü formları sentetik *a priori* bilginin kaynağını oluştururlar. Daha önce de işaret edildiği gibi, Kant uzay ve zamanın *a priori* görü formu olarak kendi başına şeyler ya da bunların özellikleri olmadığını iddia eder.

> (...) ben ilkin: bütün belirlenimleriyle birlikte uzamın (ve aynı şekilde zamanın, ki BERKELEY buna dikkat etmemişti) bizce *a priori* olarak bilinebileceğini gösterdim; çünkü uzam olduğu kadar zaman da, bütün algılama ya da deneyden önce, duyusallığımın saf biçimi olarak bizde bulunuyor ve duyusallığımızın bütün görülerini, dolayısıyla bütün görünüşlerini olanaklı kılıyor (Kant, 2002: III. Bölüme ek s.130).

Hissetme yetisinin (duyusallığın) dışsal formu uzay, içsel formu da zamandır. Uzayda nesnelerin görünüşleri "kendi başına şeyler" değildir, sadece bizim duyusal görümüzün tasarımlarıdır. Tasarımları mümkün kılan da duyusallıktır; bir başka deyişle hissetme yetisidir. "(...) şeyler, bizim dışımızda bulunan duyu nesneleri olarak bize verilir; ne var ki, onların kendi başlarına ne oldukları konusunda bilgi

sahibi değiliz, sadece görünüşlerini, yani duyularımızı uyararak bizde etkide bulunan tasarımları biliyoruz" (Kant, 2002: §13). Daha önce de belirttiğimiz gibi, görünün dışsal bir formu olan uzayın deneyimle ilgisi yoktur. Kant'a göre "uzay, deneyimden türetilen deneyimsel bir kavram değildir" (Kant, 1998: A23/B38). Uzay şeylerin ilişkilerini diskursif bir biçimde açıklayan evrensel bir kavram değil, bir saf görüdür ve verili sonsuz bir büyüklük olarak tasarımlanır. Dahası "uzay tüm dış görülerin temelinde yatan zorunlu bir tasarımdır" (Kant, 1998: A24/B38). Uzay bitişik bir yapı oluştururken zaman ardışıktır. Öncelik-sonralık ilişkileri ancak zaman formu içerisinde geçerlidir. Aynı şekilde zaman da deneyimden türetilmiş deneyimsel bir kavram değildir. Çünkü deneyim, evrensellik ve apodiktik kesinlik vermez. Zaman tüm görülerin temelinde yatan zorunlu bir tasarım olarak evrensel bir kavram değil, duyusal görünün saf bir biçimidir. Kant, "Sentetik *a priori* yargılar nasıl mümkündür?" sorusuna, bu tür yargılar için gerekli olan şey "*a priori* görü formları uzay ve zamandır" (Kant, 1998: B73) sözüyle *a priori* ve *a posteriori* bilgi ayırımında görünün yapısal özelliklerinin etkin olduğuna işaret etmektedir.

A priori bilgiyi mümkün kılan *a priori* görüdür. Peki, matematiksel yargıların kaynağı olan *a priori* görü nasıl olanaklıdır? "(...) *a priori* görü tek şekilde olanaklıdır: Zihnin, düşünme yetisi dışında (kavram ve mantıkla ilgili olan yeti dışında), ondan farklı, kendi *a priori* formları olan hissetme yetisinin (duyusallığın) olmasıyla" (Gözkân, 2006: s. 52-53). Başka bir deyişle görünün kavramdan farklı olması, dahası kavrama indirgenememesi bakımından görünün düşünme yetisine değil, hissetme yetisine (duyusallığa) ait olduğunu gösterir. *A priori* görü ise ancak hissetme yetisinin (duyusallığın) olmasıyla olanaklıdır. Yalçın Koç, "Doğal Sayıların

Ontolojisi Bakımından Transandental Mantığın Önemi ve Matematiksel Mantığın Bir Eleştirisi" adlı makalesinde uzay, zaman ve *manifold* ilişkisini şöyle açıklar:

> Mümkün tezahürlerin mekandaki formları ile zamandaki formları dürülü bükülü olarak mekanda ve zamanda bulunur ve, mekan ile zamandaki *a priori manifold*ları oluştururlar. Mekan (zaman) *manifold*unun unsurları ile mekan (zaman) arasındaki ilişki, parça-bütün ilişkisi olarak düşünülemez. Mekanın (zamanın) her parçası, mekandaki (zamandaki) *manifold*un her unsuru bizzat mekanın (zamanın) kendisidir. Parçanın bütüne önceliği vardır; oysa mekandaki (zamandaki) *a priori manifold*un bir unsuru, mekanın (zamanın) kendisine bir öncelik taşımaz (Koç, 1995: s. 54).

Kısacası, biz "kendinde şey"in temsillerini hissetme yetisi (duyusallık) yoluyla ediniyoruz. Bu anlamıyla duyusallık alıcılıktır (*receptivity*), bu alıcılık nesnelere ilişkin temsilleri alma yetisidir. Temsiller, Kant'ın transandantal felsefesinin başlangıç noktasından biri olarak ve kendi başına hiçbir şey ifade etmeyen duyusal tasarımlardır. Bilginin oluşumunda duyusallığın *a priori* formları olan uzay ve zaman görü *manifold*larını belli ilişkiler altında düzenleyerek onların görülenmesini sağlamaktadır. Dolayısıyla, Kant'ın felsefesinde uzay ve zaman sentetik *a priori* yargıların olanaklı kılınmasında önemli bir işleve sahiptir. Saf görü formu zaman ise, Kant'ın transandantal felsefesinde aritmetiğin yargılarının sentetik *a priori* yargılar alanı olmasını mümkün kılmaktadır.

1.1.2.5. Anlama Yetisinin *A Priori* Kavramları Olarak Kategoriler

Kant'ın transandantal felsefesinde bilgiyi oluşturan iki temel öğe vardır: Bunlardan biri "hissetme yetisi (duyusallık)", diğeri de anlama yetisi ve onun saf kavramları olan "kategoriler"dir. Kategoriler yalnızca anlama yetisinin düşünme formlarıdır. Bu *a priori* kavramların hissetme yetisi (duyusallık) olmadan tezahürlerle (belirişlerle) ve temsillerle bağlantı kurmaları olanaksız olması bakımından, kendi başına hiçbir şeyin bilgisini veremezler. Kant'ın "Bir kavram, empirik ya da saf kavram olabilir" (Kant, 1998: A320/B377*)* sözüyle kavramı "saf" ve "empirik" olmak üzere ikiye ayırdığı görülmektedir. Yeri gelmişken Kant'ta, matematiğin kavramlarının saf görü temelinde anlama yetisinin temel durumundaki saf kategorileri tarafından inşa edilen kavramlar olduğunu, ayrıca matematiğin de bir akıl bilgisi alanı olarak tanımlandığını belirtelim. Kant'a göre verilen kavramlar *a priori* ya da *a posteriori* olabilir. *A posteriori* kavramlar içerik bakımından özellikle deneyimden türetilmiş kavramlardır. Kant'ta *a priori* kavramlar olan kategoriler yalnızca düşünmenin özellikleri olarak, anlama yetisinin saf kavramlarıdır ve kesin çizgiyle saf görü formlarından ayrılırlar:

> İnsan bilgisinin saf (içinde deneysel hiçbir şey taşımayan) öğelerini araştırırken, ancak uzun süre tekrar tekrar düşündükten sonra, duyusallığın saf temel kavramlarını (uzam ve zaman) anlama yetisinin saf kavramlarından güvenilir bir şekilde ayırd etmeyi ve birbirinden ayırmayı başardım (Kant, 2002: §39).

Bizim için zorunlu kavramlar olan kategoriler duyusallığa dayanmazlar, düşünme formlarıdırlar, görüden gelen malzemeleri bir kavram altında toplarlar. Kant'ın

diliyle "kategoriler genel olarak bir nesnenin kavramlarıdır. Onlar aracılığıyla bir nesnenin görüsüne, yargının mantıksal işlevlerinden birisi bakımından belirlenmiş olarak bakılır" (Kant, 1998: A95/B128). Kant'ta "on iki yargı" biçimine denk gelen, duyu gereçlerini bağlayıp birleştiren anlama yetisinin on iki saf kavramı ya da kategorisi vardır. Bu kategoriler şunlardır:

Tablo 1.1. Kant'ta Kategorilerin Listesi

Kategoriler			
Nicelik (*Quantity*)	Nitelik (*Quality*)	İlişki (*Relation*)	Kiplik (*Modality*)
Birlik (*Unity*) Çokluk (*Plurality*) Tümlük (*Totality*)	Gerçeklik (*Reality*) Olumsuzlama (*Negation*) Sınırlama (*Limitation*)	Tözsellik-ilineksellik (*Substantia et accidens*) Nedensellik (*Cause-Effect*) Ortaklık (*Community*)	Olanak-Olanaksızlık (*Possibility-Impossibility*) Varlık-Hiçlik (*Existence-Non Existence*) Zorunlu-Olumsal (*Necessity-Contingence*)

Kaynak: Kant, I. (1998). *Critique of Pure Reason (CPR)*.(A80/B106).

Kategoriler, bilginin oluşması için, yani epistemolojik bir görevi yerine getirmek için işlevciler olarak düşünülebilir. Kategoriler, ne bilgimizin kendiliğinden düşünülen ilk *a priori* ilkeleridirler ne de deneyimden türetilirler. Anlama yetisinin bu *a priori* kavramlarının mantıksal bir işlevi olmasına rağmen kendi başlarına bir yargı içinde nesneyi ve kavramı oluşturamazlar. Duyusal görülere ihtiyaç duyarlar ve ancak bu görülerle birlikte yargıda bulunma işlevleri vardır.

> Kategoriler olmadan hiçbir nesneyi düşünemeyiz. Bu kavramlara karşılık gelen görüler olmaksızın düşünülen hiçbir nesneyi bilemeyiz. Tüm görülerimiz duyusaldır, ve bu bilgi, nesnesi verili olduğu sürece deneyseldir (*empirical*). Fakat deneysel bilgi deneyimdir. Sonuç olarak, bizim için yalnızca olanaklı deneyimin nesnelerine ilişkin olandan başka hiçbir *a priori* bilgi olanaklı değildir (Kant, 1998: B165/B166).

Transandantal felsefede bilginin, hissetme yetisi (duyusallık) ile edinilen malzemelerin kategoriler altına alınmasıyla oluştuğunu belirtmiştik. Bu bakımdan anlama yetisi kurallar yetisidir. Anlama yetisinin nesnesi hissetme yetisinin (duyusallığın) malzemeleri olurken, aklın nesnesi ise anlama yetisinin malzemeleridir. Anlama yetisi yargı verirken, akıl anlama yetisinin kavramlarıyla ilişkili olarak akıl yürütür. Kant'ın transandantal idealar olarak tanımladığı saf akıl kavramlarının görüsel karşılıklara bağlanması olanaklı değildir. Aklın anlama yetisini aşarak işte bu idealara gerçeklik atfetmesi durumunda "paralojizmler" ve "antinomiler" oluşmaktadır. Öyleyse aklın mümkün olan tüm teorik bilgisi deneyimdeki görüsel karşılık ile sınırlıdır.

> (...) kategorilere duyusal hiçbir belirlenimin karışmaması, aklı yanlış yola, bu kategorilerin kullanılışını deneyin büsbütün dışına, yani kendi başına şeylere kadar götürmeye sürükleyebilir; bu kategoriler ise, onlara somut olarak önem ve anlam sağlayabilecek görüleri olmadığından, mantıksal işlevler olarak gerçi genellikle bir şeyi tasarımlarlar ama kendileri hiçbir şeyin belirli bir kavramını vermezler. Şimdi bu tür aşırı nesneler, noumenon'lar ya da saf anlama yetisi varlıkları (daha doğrusu düşünce varlıkları) denen şeylerdir (Kant, 2002: §45).

Kant'ın söyleyiş biçimiyle "Copernicusçu devrim"in, transandantal felsefeye kattığı en önemli şeylerden biri de kategoriler öğretisidir. Bu öğreti, kategorilerin görünüşlere uygulanması anlamına gelmektedir. İleride görüleceği gibi hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen *a posteriori* malzemeler "şema"lar aracılığıyla saf kavramlar altına alınıp deneyim olanaklı hale gelirken, "saf ben" mekânında canlandırılan saf temsiller ise "transandantal şema"lar aracılığıyla nicelik kategorisi altına alınacak ve böylelikle *a priori* olarak inşa edilen sayı da yargı içinde ortaya çıkacaktır.

1.2. Kant'ta Bilim Olarak Metafiziğin Sağlam Dayanakları

Kant'ın *CPR*'deki asıl amacı matematiğin yargılarının sentetik *a priori* olup olmadığını temellendirmek değildir. Bilgisine sahip olamayacağımız; ruh, Tanrı ve evren gibi şeylere yüzyıllarca gerçeklik atfedilerek aklın kullanımı deneyim dışına çıkmış, dolayısıyla metafizik boş, hayali bir yola sürüklenmiştir. Temel amaç, metafiziği sağlam bir bilim haline getirmektir. Bilim olmanın ölçütü de sentetik *a priori* yargılar alanı olmaktır. Dolayısıyla Kant'ın saf akıl bilgisi olarak adlandırdığı matematiğin, sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklılığının ispat edilmesi, saf akıl bilgisi dediği metafiziğin bilim olarak olanaklılığına sağlam dayanaklar oluşturacaktır. Bu niyetle Kant'ın matematiğe el attığını ve böyle bir çaba içerisine girdiğini söylemek mümkündür.

1.2.1. Bilim Olarak Metafiziğin Olanaklılığının Temel Dayanağı Durumundaki Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Aritmetik

Kant'ın hedefinin, Antikçağın ve dogmatik rasyonalizmin "nesne uyumlu" bilgi anlayışlarının eleştirisinden yola çıkarak ve sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını temellendirerek transandantal felsefesini oluşturmak olduğunu söylemek mümkündür. "Benim 'transandantal' dediğim bütün bilgiler [*cognition*] nesneler tarafından değil, daha çok *a priori* olabildikleri kadarıyla, nesneleri bilme tarzımız tarafından belirlenen kavrayıştır. Böyle kavramların sistemi 'transandantal felsefe' olarak adlandırılır" (Kant, 1998: A11/B25).

Copernicus'un yaşadığı dönemlerde yerküre, çevresinde yıldızların ve gezegenlerin döndüğü, evrenin tam ortasında sabit bir yerde duran bir küre olarak düşünülürdü. Bu da şu anlama geliyordu, yıldızlar dünya merkezli olarak gözlemcinin etrafında dönüyordu. O dönemlerde yerkürenin sabit durduğu, "yer merkezli" anlayış herkesçe kabul görüyordu.

> (...) O dönemde yerkürenin sabit durduğu o denli açık bir gerçekti ki, tersini savunmak aptallığının da ötesinde gülünç olmak demekti. (...) ilk bakışta Kopernik, astronomik sistemi temelden sarsacak bir şey yapmış değildi. Gerçi yerküreyi değil, Güneş'i evrenin ortasına yerleştirmişti: ama, gezegen ve yıldızlara egemen olan göksel küreler ve onların oluşturduğu esas düzen yerli yerinde duruyor, değişmez, düzenli hareketlerini sürdürüyordu. Kaldı ki, Kopernik sisteminin daha basit yapısıyla, tüm evreni Tanrı'ya özgü bilgeliğin bir anlatımı sayan bir felsefeyi

içermekle dinsel görüşe ters düşmediği söylenebilir. Ne var ki, sonuç hiç de öyle olmadı: Ortaçağ inanç ve düşünce sistemi tümüyle çöktü.[3]

Güneş merkezli evren anlayışında, yıldızların gözlemci etrafında değil, gözlemcinin yıldızlar etrafında dönmesi anlamına geliyordu. Bunun Kant'ın felsefesine yansıması "(...) özne ile nesne arasındaki uyum düşüncesinin (nihai uyum) yerine, nesnenin özneye zorunlu tâbiyeti ilkesini koymak" olarak düşünülebilir (Deleuze, 1995: s. 52). Antik dönemde, bilge kısmen doğaya boyun eğer, kısmen de doğa ile nihai uyum içerisinde olmaya çalışırdı. "Copernicusçu devrim"in bize öğrettiği şey, bu anlayışın tersine, bizlerin buyruk veren ve doğanın yasa koyucuları olduğumuzdur. Kant öncesi dogmatik rasyonalizmin bilgi kuramı da özne ile nesne arasında karşılıklı bir uyum düşüncesinde temellenmektedir. Kant, bu görüşün tersini iddia eder: "Bu güne kadar tüm bilgimizin kendini nesnelere uydurması gerektiği varsayılmıştır; ama onlara ilişkin herhangi bir şeyi kavramlar yoluyla *a priori* saptama ve bilgimizi bu yolla genişletme girişimleri bu varsayım altında boşa çıkmıştır. Öyleyse, bir kez de nesnelerin kendilerini bilgimize uydurmaları gerektiği varsayımı altında metafiziğin görevinde daha iyi sonuç alıp alamayacağımızı sınayabiliriz" (Kant, 1998: Bxvi). "Copernicusçu devrim"den etkilenen bu görüş nesnelerin *a priori* bilgisinin olanağının araştırılmasına yol açmıştır. Çünkü deneyimi mümkün kılan transandantal öğeler, yani deneyime zemin teşkil eden *a priori* unsurlar hissetme yetisi (duyusallık) dışında akla aracısız verilemez. Öyleyse geleneksel metafiziğe dayanak sağlayan "özne-nesne" ilişkisi tersine çevrilmelidir. "Copernicus gözlemcinin kendisini döndürüp, buna karşın yıldızları dinginlikte tuttuğu zaman daha başarılı olacağını

[3] Bu alıntı, Cemal Yıldırım'ın *Bilim Tarihi* adlı kitabından çevirisini yaptığı Londra Üniversitesi, Bilim Tarihi ve Felsefesi Profesörü Herbert Dingle'ın "Kopernik ve Gezegenler" adlı yazısından alınmıştır (Yıldırım, 1994: s. 178-180).

araştırmıştı. Metafizikte de nesnelerin görüsü açısından benzer yol denenebilir" (Kant, 1998: Bxvi). Antikçağdan Kant'a kadar metafiziğe ilişkin süregelen tartışmalar gözden geçirildiğinde, "Kant'la birlikte metafiziğin, bir 'konu alanı' olmaktan çıktığı ve bilgikuramsal bir sorun durumuna geldiği görülür" (İyi, 1999: s. 17-18). Kant'ın amacının belli bir türden bilgiyi içeren metafiziğin bir bilim olarak olanaklı olup olmadığını araştırmak ve "(...)'acaba böyle bir bilim gerçekten olanaklı mı ve olanaklıysa nasıl?'" (Kant, 2002: s. 4) sorusuna yanıt aramaktır.

Kant, 8 Nisan 1766 tarihinde Moses Mendelssohn'a yazdığı mektubunda geleneksel metafizik ya da dogmatik metafizik olarak adlandırdığı metafiziğe olan eleştirisini yaparken aynı zamanda metafiziğin değerine ilişkin görüşlerine de yer verir. "Nesnel açıdan baktığımda, metafiziğin kendisini önemsiz veya vazgeçilebilir olarak görmüyorum; üstelik, bir süredir metafiziğin doğasını ve insan bilgisi nezdinde hakkı olan yerini anladığımda insan ırkının gerçek ve kalıcı refahının metafiziğe bağlı olduğuna inanıyorum" (Kant, 1967: s. 55) demektedir. Kant, metafiziğe bu açıdan baktığı için, ona göre metafizik bilim olmalıdır. İşte, böyle bir bilimin olanaklılığı için sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını göstermek gerekir. Böylece Kant, transandantal felsefesini oluşturmak için *CPR*'de sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını temellendirmeye yönelir. Bu yönelmenin, Antikçağdan kendisine kadar uzanan metafiziğe ilişkin görüşleri yıkma çabasının da hareket noktası olduğunu anlıyoruz. Antik Yunan felsefesinden Kant'a kadar;

> Metafizik, duyusal algıların konusu olan nesneleri, yani hissedilir dünyayı ele almaz; metafizik, algılar üzerinden elde edilen bir bilgi değildir; metafizik duyulara ve algıya bağımlı bir bilgi olmadığı için zamana tâbi olanın bilgisi değildir; metafizik,

> zamana tâbi olmayanı, yani değişmeyeni, bâki kalanı, düşünülür veya akledilir dünyayı nesne edinir ve onun bilgisine (*episteme)* yönelir, bu yolla değişime tâbi olanların temelindeki ilkelere de, ilk ilkeleri (*arche*) görme aracılığıyla yönelmiş olur (Gözkân, 2008a: s. 25-26).

Antikçağdan Kant'a gelinceye kadar metafizik "aracısız görme" ile ulaşılan "düşünülür dünya"nın bilgisi olmuştur. Kant, 21 Şubat 1772 tarihinde Marcus Herz'e yazdığı mektupta "düşünülür dünya"nın bilgisine ilişkin kuşkularının olduğunu ileri sürer. Mektubunun devamında, "Duyulur (Hissedilir) Dünya ile Düşünülür Dünyanın Form ve İlkeleri" başlıklı 1770'te yayımlanan yazısında Kant,"(...) 'duyusal temsillerin, şeyleri tezahür ettikleri haliyle [yani hissetme yetisinin *a priori* formları olan uzay ve zaman formlarına tâbi olarak] bize verdiğini, düşünülür temsillerin ise şeyleri oldukları haliyle verdiği' ifadesinin yer aldığını; ama burada, bu düşünülür şeylerin bize ne aracılığıyla verildiği sorusunun yanıtsız kaldığını yazmaktadır" (Gözkân, 2008a: s. 26-27).

Geleneksel metafiziğin bilgisinden Kant'ın ciddi kuşkularının olduğunu görmekteyiz. Çünkü, şimdiye kadar metafiziğin problemleri görülememiştir; görülse bile bu konu verimsiz bir biçimde işlenmiştir. Dolayısıyla metafizik dogmatik bir yapı kazanmış ve bu nedenle de çöküş zamanı gelmiştir. Fakat metafizik gerçektir, dünyada her zaman olacaktır ve ondan vazgeçmek mümkün de değildir. Artık "iyi kafalar"ın bu iş üzerine aldatmacasız bir şekilde eğilmesi gerekir. Metafiziğin yoluna sokulması için öncelikle *a priori* bilgiye ihtiyaç vardır. *A priori* bilgi için; görünün kendini nesnelerin yapılarına uydurmak yerine, nesnelerin kendilerini görünün yapısına uydurmak gerekir. Sonra da bu tasarımların saf kavramlar altına

yerleşmesiyle sentetik *a priori* yargıların oluşması olanaklıdır. Kant'ın amacının matematiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu göstererek, "(...) *a priori* bilgi veya saf anlama yetisi ve saf akıl bilgisidir" (Kant, 2002: §1) biçiminde tanımladığı metafiziğin, bir bilim olarak olanaklılığına sağlam dayanaklar hazırlamaktır. Dahası Kant, saf akıl bilgisi olarak gördüğü metafizikle saf matematiği bu özellikleri bakımından eşdeğer görür: "Çünkü Metafizik, ana çizgileri bakımından doğa tarafından, diğer bilimlerden daha çok içimize konmuştur; rastgele bir seçimin ya da (ondan büsbütün ayrılan) deneylerin gelişmesi sırasında rastlantısal bir genişlemenin ürünü olamaz" (Kant, 2002: §57).

Kant, felsefesi için empirik yargıları sağlam dayanak olarak görmez. Eğer matematiği sentetik *a priori* yargılar olarak temellendirebilirse metafizik için *a priori* dayanak bulunmuş olacaktır. *Kant'ın Yaşamı ve Öğretisi* adlı yapıtında Cassirer bunu şöyle ifade eder: "Çünkü o, tek bir nesnenin 'rastlantısal', olgusal varoluşundan veya bizim 'evren' adıyla göstermeye çalıştığımız tekil empirik nesnelerin tüm dizisinden hareket etmemekte; tersine, geometri ve aritmetiğin kavramlarına eş kavramların bir bağlamından hareketle, değişmez, her türlü keyfilikten bağımsız, sistematik bir bütün kurmak istemektedir" (Cassirer, 2007: s. 89). Kant'ın bilim anlayışında Newton'un etkisinin görüldüğünü ve Kant'ın ilk kez Newton'un yapıtlarıyla birlikte düşünce dünyasında ayağını sağlam bir şekilde basacağı bir yer bulduğunu söyleyelim. Friedman da *Kant and the Exact Sciences* adlı kitabında, "Newton fiziğinin dayanaklarını araştırmak, Kant metafiziğinin tamamını anlayabilmek için vazgeçilmezdir" (Friedman, 1994: s. 137) demektedir. Newton'un keşfettiği yerçekimi yasası; Kant'ın evreni, cisimler ve cisimlerin hareketlerinin uzay, zaman içerisindeki bütünü olarak kavramasına yardımcı olduğunu, ayrıca "uzay" ve

“zaman”ın Newton’la birlikte onun terminolojisine girdiğini anlıyoruz. Newton nasıl ki onun evren fenomenini anlamasına yardımcı olmuşsa, Copernicus da onun bilginin oluşumunu kavramasına yardımcı olmuştur (Cassirer, 2007: s. 45-46). Kant’ın dogmatik metafiziğe karşı çıkışında “matematiksel bilimler” görüşü ona bir bakıma sıçrama tahtası sağlamaktadır. Friedman bunu şöyle dile getirir: “Kant’ın matematiksel bilimler görüşü, Leibnizci ve Wolffçu dogmatik metafiziğe karşı çıkışında ona, mantıksal ve tarihsel olarak başlangıç noktası sağlamıştır” (Friedman, 1994: s. 98).

Yeri gelmişken, burada kimi filozoflar tarafından “metafizik” sözcüğüne yüklenilen anlamları da kısaca ele almaya çalışalım. “Metafizik” sözcüğü, Aristoteles’in yapıtlarının düzenlenmesi sırasında bir gereksinim olarak felsefeye girmiştir. Bu sözcüğün, ilk defa Aristoteles’in kitaplarından birini adlandırmak amacıyla “fizik konularından sonra gelenler” anlamında kullanıldığı ve felsefe tarihinin farklı dönemlerinde değişik anlamlar içererek doğa ötesi konulara ilişkin olanı imleyen bir yapı kazandığı görülmektedir (İyi, 1999: s. 9-10).

Yeniçağ’da Descartes’ın, “Tanrı idesi”ni, bilginin ve bilmenin nedeni olarak görmesinin bir sonucu olarak metafiziğe teolojik bir anlam kazandırdığı söylenebilir. Descartes’tan sonra Leibniz, metafiziği mantığa yaklaştırma girişimiyle ona yeni bir yön ve bir boyut kazandırmıştır. Bununla birlikte Leibniz’e göre metafizik “teoloji”dir. Hume’a göre metafizik bilgi sorunuyla beraber incelenerek bilgikuramsal bir çerçevede ele alınması gerekir. Bu bakımdan, metafiziğe ilişkin verimsiz tartışmalara son verilmeli ve insanı boş yere oyalayan “(...) metafizik

bozukluk doğru akıl yürütmeler yoluyla yıkılmalıdır" (İyi, 1999: s. 17). Christian Wolff, metafiziği bir disiplin haline getirerek ona ilişkin tartışmaları sona erdirmeyi amaç edinmektedir. Cassirer'e göre "Kant için Wolff, ilkeleri kurala uygun biçimde saptamakla, kavramları açıkça belirlemekle ve çıkarım yolu üzerinde pervasız sıçramalara set çekmekle, metafiziği ilk kez bir bilimin güvenilir yoluna taşımayı denemiş kişidir" (Cassirer, 2007: s. 102). Wolff metafiziğe ilişkin anlamsız tartışmaları sona erdirmek bakımından onu "Ontoloji", "Genel Kozmoloji" ve "Pneumatica" gibi üç bilimin ortak adı olarak görse de, Kant'a göre "sonu gelmeyen çatışmaların savaş alanı" (Kant, 1998: Aviii) olarak, "(…) onu saf matematikten ayıran hiçbir özelliği yoktur; bu nedenle ona saf felsefi bilgi denilmesi gerekir" (Kant, 2002: §1). Metafizik sağlam bir bilim değilse bile saf matematik ve doğa bilimleri gerçektir, verilmiştir ve metafiziğin bilim olarak kurulması için önemli dayanaklardır.

> (…) çünkü her ikisi de, kısmen sırf akıl aracılığıyla zorunluklu bir şekilde kesin oldukları, kısmen de deneyden gelen genel anlaşma aracılığıyla ama buna rağmen deneyden bağımsız oldukları her yerde bilinen önermeler içerirler. Demek oluyor ki, hiç olmazsa itiraza uğramayan bazı sentetik *a priori* bilgilerimiz vardır ve bu bilgilerin olanaklı olup olmadıklarını sormamız gerekmez (çünkü gerçektirler); verilmiş olanların olanağının ilkesinden bütün diğerlerinin de olanağını türetebilmek için, nasıl olanaklı olduklarını sormamız yeter (Kant, 2002: §4).

Özetle, Kant'ın metafiziği bir bilim haline getirme çabasının arkasındaki temel fikrin, metafizik gibi saf akıl bilgisi dediği matematiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklılığını ortaya koyarak, kendi deyiş biçimiyle Antik Yunan'dan beri düşüncenin boş, hayali, çıkmaz yollara yönelmesinin önüne geçmek olduğunu

görüyoruz. Çünkü, geleneksel metafiziğin anlamsız tartışmalarında düşünmenin ana malzemesini oluşturan uzay, zaman, ruh, evren ve Tanrı gibi ideler ya da formlar gerçeklik atfedilerek ele alınmıştır. Bu hatalı yaklaşımlarla metafizik sonu olmayan çıkmaz yollara sürüklenmiştir. Halbuki metafizik insan aklının sınırlarının bilimidir, düşüncenin yanlış yollara süreklenmesini önlemek için sağlam temeller üzerine kurulması gerekir. Kant'ın bu temel düşüncesini Gözkân şöyle ifade eder: "(...) metafiziği artık kendi ayakları üzerinde duran bir bilim haline getirmek suretiyle, matematikle büyük bir buluşmayı gerçekleştirerek dizgesel bir bütünlüğe ulaşmış olan doğa bilimlerinin başarısını, bir anlamda felsefede tekrar etmektir. Bu bakımdan metafiziğin asıl doğasının ortaya konulması doğa bilimlerinin de önünü açacaktır" (Gözkân, 2002: s. 22). Metafiziğin kendi yolunda emin adımlarla ilerleyebilmesi için de, aklın sözü edilen bu ideler ya da formlarla bağlantısı araştırılmalı ve ortaya çıkarılmalıdır.

1.2.2. Nesnenin Tesisini Sağlayan Üç Asıl Yeti: Hissetme Yetisi (Duyusallık), Hayal Gücü ve Düşünme Yetisi

Kant'ın bilgi felsefesinde nesnenin tesisini sağlayan üç temel yeti vardır. Bu yetiler; **"**hissetme yetisi (duyusallık)", "hayal gücü" ve "düşünme yetisi"dir. Daha önceki bölümlerde de belirtmeye çalıştığımız gibi hissetme yetisinin *a priori* formları olan uzay ve zaman sayesinde kendinde şeylerin temsillerini ediniyoruz. "Bu temsiller zihnimizin değişik biçimleri olarak iç duyuya [*inner sense*] aittir" (Kant, 1998: A98/A99). Bu temsiller nesne değildir, fakat nesnenin bir yargı içinde kavramla ortaya çıkmasında malzeme görevi yaparlar. Duyusal görünün, *a priori* formları

(uzay ve zaman) ve "malzeme" olmak üzere iki temel öğesi bulunduğunu, duyusal bir unsur olan duyumun (*sensation*), kendinde şeylerden etkilenmenin bir sonucu olarak duyular aracılığıyla edinildiğini belirtelim. Duyu, iç ve dış duyu olarak bilginin ham verisini edinmektedir. Dış duyu, beş duyuyla fiziksel objelerin görüsünü sağlarken, iç duyu zihinsel durumların görüsünü sağlamaktadır (Yalçın, 2010: s. 114-120). Temsiller (*representation*) duyuyla ilgili, yani duyusal temsil ya da içinde duyusal hiçbir şeyin olmadığı saf temsil olabilir. Dolayısıyla Kant'ın epistemolojisinde temsiller tanımlanamaz, temsilin tanımlanması için yeni bir temsile ihtiyaç duyulur. Buradan da, temsillerin bilgi olmadığını sadece bilginin malzemesi olduklarını anlıyoruz. Matematik açısından düşündüğümüzde sayı bir temsildir ve malzemesi ise *a priori manifold*tur. Zamanın sadece iç görü formu olması ötesinde, dahası *manifold* içeren bir görü olması bakımından zaman *a priori* olarak temsil edilmiştir. "İçsel belirlenimlere ait her şey zamansal ilişkiler içerisinde temsil edilir" (Kant, 1998: A23/B37).

Anlama yetisi gören bir yeti değildir, düşünen bir yetidir. Dolayısıyla hissetme yetisinin (duyusallığın) işini yapamaz. Kant'ın "(…) duyular bize hiçbir zaman ve hiçbir durumda kendi başına şeylerin bilgisini sağlamaz, sadece onların görünüşlerini bilgimize sunar" (Kant, 2002: §13) sözüyle duyusallığın bilgideki işlevine vurgu yaptığını, dahası bilginin oluşumunda hissetme yetisinin (duyusallığın) sınırlarını net bir biçimde çizdiğini görmekteyiz. Hissetme yetimiz (duyusallığımız) olmasaydı hiçbir biçimde duyusal görüler anlama yetimize ulaşamazdı, dolayısıyla da bilgi oluşamazdı. Hissetme yetimizle (duyusallığımızla) düşünme yetilerimiz arasındaki bağlantıyı kuran bir yeti olarak hayal gücü, duyusallıkla edinilen temsillerin düşünme yetilerimize bağlanmasını mümkün kılmaktadır. Kant, hayal gücünü "ruhumuzun

derinliklerinde yatan, hemen hemen hiç farkında olmadığımız, ruhumuzun kör ama vazgeçilmez bir yetisi" (Kant, 1998: A78/B103) biçiminde tanımlar. İzleyen başlıklarda ayrıntılarıyla göreceğimiz gibi, hayal gücü sentetik yargının oluşmasında bir düşünme faaliyeti olan üç aşamalı sentezin ikinci aşamasını gerçekleştirmektedir. Kavrama ve yeniden üretme olarak sentezin ikinci aşaması hayal gücünün bir edimidir. Ayhan Çitil, "(...) muhayyile aslen muhafaza edici bir yeti olmayıp, tutulanı, muhafaza edileni canlandırma faaliyeti icra eden bir yetidir" (Çitil, 2000: s. 72 "Dipnot") demektedir. Yine Çitil, çalışmasının izleyen sayfasında "Muhayyile, görünün bütününü, farklı bileşenleri bir kurala tâbi olarak terkip ederek canlandırmaktadır" (Çitil, 2000: s. 74) biçimindeki ifadesiyle hayal gücünün canlandırma işlevine vurgu yapar. Hayal gücü görüsel karşılıkları şemalar aracılığıyla görüde canlandırmaktadır. Deleuze'e göre hayal gücü sentez ile "şematize etmektedir" (Deleuze, 1995: s. 56). Hayal gücünün, nesnenin tesisinden önce muhafaza edileni resmetme işlevi gördüğünü, ayrıca sentezin birinci aşamasında zaman formunda tutulan şeylerin hayal gücünde yeniden üretildiğini anlıyoruz. Böylelikle, uzay formundaki tezahürlerin (belirişlerin) zaman formunda bıraktığı izler muhafaza edilerek zamanda kaybolmasının önüne geçilmiş olmaktadır. Kant, hayal gücü için "mevcut olmayan bir nesneyi görüde temsil etme yetisi" (Kant, 1998: B152) sözüyle hayal gücünün canlandırma, resmetme işlevine işaret etmektedir.

Nesnenin tesisinde rol oynayan diğer bir yeti de "düşünme yetisi"dir. Düşünme yetisi; "kavrama (anlama) yetisi", "yargı gücü" ve "akıl" olmak üzere üç alt başlıkta bir sonraki bölümde ele alınacaktır. Şimdi, bilginin oluşumunda gövde görevi yapan sentezin aşamalarını açıklamaya çalışalım.

1.2.3. Sentetik Yargının Oluşumunda Sentezin Üç Aşaması

Kant'ın bilgi felsefesine göre, görü formlarının etkilenmesi sonucunda temsiller oluşmaktadır. Bu temsiller nesne özelliği göstermezler. Nesnenin mekânı insan ruhunun düşünme kapasitesinin edimleridir, yani nesnenin oluşması için düşünme kapasitesinin edimlerine ihtiyaç vardır. Sentez, bir düşünme faaliyeti olarak sentetik yargının oluşmasına olanak sağlar ve üç aşamalı sentez sonunda da nesne kavramla birlikte bir sentetik yargı içinde ortaya çıkar. Kant'ın transandantal felsefesinde sentetik yargı yoksa ne nesnenin, ne de kavramın olması olanaklı değildir (Koç, 1995: s. 54-55). Sentez, bilginin oluşması için görülerle kavramların bir araya getirilerek bağlanması işidir, bu işi anlama yetisi "kendiliğinden" yapar. En genel tanımıyla Kant'a göre sentez, değişik tasarımların birbirine eklenmesi ve onlarda bulunan *manifold*ların bir bilgide kavranmasıdır (Kant, 1998: A77/B103). Buradan, sentez olmadan hiçbir bilginin olanaklı olamayacağını, bilginin oluşmasında sentezin doğru öğeleri toplama ve birleştirme işlevinin olduğunu anlamaktayız.

Sentez, empirik ya da saf olabilir. Uzay ve zamandaki *manifold*ta olduğu gibi, *manifold a priori* olarak verilirse böyle sentezler saf sentezler olarak adlandırılır. "Eğer *manifold* empirik olarak değil de *a priori* olarak verilirse (tıpkı uzay ve zamandaki *manifold* gibi) böyle sentez saf sentezdir" (Kant, 1998: A77/B103). Saf sentez sentetik *a priori* bilginin temelini oluşturur. İzleyen bölümlerde Kant sayıyı, "bir homojen görü *manifold*unun sentezlenmesinin birliği" olarak tanımlayacaktır. Buradan da anlaşılacağı gibi sentezin aşamaları gerçekleşmeden, görüdeki saf temsillerin tutulması, yeniden üretilmesi ve birlik verilmesi olanaklı değildir.

Böylelikle, matematiğin de içerisinde olduğu sentetik *a priori* yargıların oluşması mümkün olamayacaktır.

Kant'a göre yargının ortaya çıkabilmesi için üç aşamalı sentezin gerçekleşmesi gerekir. Başka bir deyişle, bir nesnenin bilgisi üç aşamalı sentezin sonucunda ortaya çıkmaktadır. Bu aşamalar şunlardır: 1) Birinci Aşama: "Görüde Kavrayışın Sentezi", 2) İkinci Aşama: "Hayal Gücünde Yeniden Üretimin Sentezi", 3) Üçüncü Aşama: "Bir Kavramda Tanımanın Sentezi". Sentezin birinci aşaması, temsillerin içsel formda yakalanması ve kendisine bir bütünlük verilmesiyle ilgilidir. Sentezin bu aşamasında "düzenleme", "bağlama" ve "taşıma" işlemleri gerçekleştirilir. Sentezin birinci aşaması, *manifold* sunan görüye yönelmektedir ve *a priori* bir aşamadır. Kant, "Saf sentez olmaksızın asla uzay ve zamanın *a priori* temsillerine [*representations*] sahip olamayız" (Kant, 1998: A100) demektedir. Görüldüğü gibi, sentezin birinci aşamasıyla uzay ve zaman görülerinin birliği edinilmektedir. Bu aşamayı Koç şöyle ifade eder:

> Bu sentezin birinci aşamasında, zaman formunda yakalananların sentezlenmesi yer alır. Zaman formunda yakalanarak sentezleneni iki şekilde düşünmek mümkündür: empirik ve *a priori*. Mekan ve zaman, kendi içlerinde formel ve sentetik birliğe tabidirler; üstelik, hissetme kapasitesinin içsel ve dışsal formları olmaları sebebiyle de, kendi aralarında bir sentetik birlik oluştururlar. Bu sentetik birliğe göre de, mekanda tezahür etmek ancak içsel histe değişikliklere yolaçmak ve zaman formunda izler (tablar) bırakmak yoluyla mümkündür. Böylece mekanda tezahür eden, zaman formunda bıraktığı izler vasıtasıyla yakalanır. Zaman formunun esasını, bu form içinde tezahür edenin akması oluşturur. Zaman formunda akanlara başlangıç ve son tayin edilerek bu formdaki empirik izler sentezlenir ve üçlü sentezin birinci aşaması neticelenir. (...) Üçlü sentezin birinci aşamasında, mekandaki *a priori*

> *manifold*un zaman formunda yakalanması ve sentezlenmesi neticesinde 'zamanın transendental belirlenimi'nin ortaya çıkabilmesi gerekir; aksi takdirde, birinci aşamada, empirik olanın yakalanması ve sentezlenmesi mümkün olamayacaktır (Koç, 1995: s. 54-55).

Sentezde ilk aşama, yalnızca deneyimsel (*empirical*) değil, *a priori* bilgilerin de olanağının transandantal zeminini oluşturmaktadır. Sentezin birinci aşaması ikinci aşamasına ayrılmamacasına bağlıdır. Sentezin ikinci aşaması: Koç'a göre bu aşama "(...) içsel (zaman) formda yakalanan ve kendisine bütünlük verilen unsurların (muhayyilede) [hayal gücünde] yeniden üretilmesi, resmedilmesi ve yeniden bir bütünlük verilmesi" işidir (Koç, 1997: s. 50). Sentezin bu aşaması, birbirini izleyen ya da birbirine eşlik eden tasarımların bir araya toplanması ve bu yolla bağlantı içerisine getirilme işlemidir. Bu işlem, "yeniden üretim yasası" olarak adlandırılan empirik bir kuralla gerçekleşir. Yeniden üretim sentezi hayal gücünde oluşur. Hayal gücünün bu yanı, empirik hayal gücü olarak tanımlanmaktadır. Yeniden üretim yasası, tezahürlerin/belirişlerin (*appearances*) kendilerinin böyle bir kuralın altında durduklarını, tasarımların *manifold*larında belli kurallara bir eşlik etme ya da izleme durumunun yer aldığını varsayar. Eğer böyle olmasaydı deneyimsel hayal gücümüz (*empirical imagination*) hiçbir zaman yetilerine uygun bir şey bulamayacak ve böylece zihnin iç doğasında ölü ve bizim için bilinmeyen bir yeti olarak gizli kalacaktı. Kant'a göre görünüşlerin zorunlu bir sentetik birliğinin *a priori* zemini olarak, onların bu yeniden üretimini olanaklı kılan hayal gücüdür (Kant, 1998: A101). Böylelikle hayal gücünün sentez sürecindeki rolü ve önemi ortaya çıkmaktadır.

> Düşüncede bir çizgi çizmeyi, ya da öğleden bir başkasına geçen zamanı düşünmeyi, ya da giderek belli bir sayıyı tasarlamayı istediğim zaman ilkin zorunlu olarak bu *manifold* tasarımlarını birbiri ardına tutmam [*grasp*] gerekir. Eğer, önceki tasarım düşüncesini yani çizginin ilk bölümlerini, önceki zaman bölümlerini ya da birbiri ardına tasarlanan birimleri her zaman düşünecek ve onları bir sonrakine ilerlerken yeniden üretmeyecek olursam hiçbir zaman bir tasarım, o sözü edilen düşüncelerin tümü, giderek uzay ve zamanın en arı ve en ilk tasarımları bile ortaya çıkmazdı (Kant, 1998: A102).

Hayal gücünde yeniden üretim sentezinin olanaklı olması, ancak transandantal sentezin mümkün olmasına, yani bu sentezin zemininin insanda bulunmasına bağlıdır. Hayal gücündeki bu sentez deneyimi mümkün kılar. *A priori* nesnenin oluşması zaman formunda *a priori* olarak yakalanan ve sentezlenenin, transandantal sentez yoluyla hayal gücünde üretilip resmedilmesine bağlıdır. Sentezin üçüncü aşaması, zaman formunda yakalanarak hayal gücünde resmedilen şeylerin yine zaman formunda akıp kaybolmaması için bir kavramda tanınması işlemidir (Koç, 1995: s. 55). Kavramda tanınma işlemi, bir anlamda görülerden biçim değiştirerek gelen temsillerin bilince taşınmasıdır. Bilince taşıma işlemiyle birlikte yargılar oluşur. Böylece yargıyla birlikte nesnenin bilgisine de sahip olmuş oluyoruz. Bu işlemleri sayı için düşündüğümüzde; art arda gelen zamansal birimler yakalanamasaydı, tutulamasaydı, tekrar yeniden üretilemeseydi ve bilincine varılamasaydı, zihnimizde birimlerin birbirine eklenmesi imkânsızlaşacaktı, dolayısıyla da bir nesne olarak sayının inşası mümkün olamayacaktı.

İzleyen başlık altında bilginin oluşumunda çok önemli bir işleve sahip olan "transandantal *apperception*" ediminin bütün yargıların mekânı olan "saf ben" ile

bağlantısal ilişkisini ayrıntılı olarak ele almaya çalışacağız. Konu ile ilgisi bakımından burada, Kant'ta transandantal *apperception* saf düşünme ediminin bütün akli ve kavrama yetilerinin mekânı olan "saf ben"i tesis ettiğini belirtelim. Zaman akıp giderken, zaman içinde kaybolmayan, değişmeyen ve bütün edimlerin mekânı olan "saf ben" yargının oluşumunu mümkün kılmaktadır. Yargı, çokluğa birlik vererek nesnenin kurulumunu sağlamaktadır. İşte sentez aşamasında resmedilene kalıcılığını ve sentetik birliğini "saf ben" vermektedir. "Saf ben", aynı şeyi sayının inşasında da yapar. Birimlerin zaman formunda akıp kaybolmaması için bu birimleri tutarak kalıcılığını sağlamaktadır. Eğer "saf ben"in, kendisi zaman formunda akıp kaybolsaydı, tutulan birimlerin kalıcılığı, sentetik birliği imkânsız olurdu. Böylelikle yargı ortaya çıkamayacak, dolayısıyla sayı da oluşamayacaktı. Kant, "Bilinç, adım adım görü edinileni [*intuited*], *manifold*u ve bundan sonra yeniden üretileni tek bir tasarımla birleştirendir" (Kant, 1998: A102) demektedir. Kısaca, bilincinde olalım ya da olmayalım, tüm birleşme ister görünün *manifold*unun, isterse değişik kavramların birleşmesi olsun anlama yetisinin bir edimidir. Bu edim evrensel bir adlandırma ile "sentez" olarak belirlenir.

1.2.4. Düşünmenin Üç Ayrı Yetisi

Kant'ın bilgi felsefesinde ruhun düşünme yetisinin üç ayrı yetisi olan; anlama yetisi, yargı gücü ve akıl, aklın teorik kullanımında hissetme yetisi (duyusallık) ve hayal gücüyle birlikte hem deneyimi hem de *a priori* bilgiyi mümkün kılmaktadır. Kant, nesnenin bilgisinin olanağının; bilginin üç öznel kaynağına, yani hissetme yetisine (duyusallığa), hayal gücüne ve *apperception*'a bağlı olduğunu ileri sürmektedir (Kant, 1998: A115). Transandantal felsefede düşünme yetisini faal hale getirmesi bakımından, tüm düşünme faaliyetine ve deneyime kaynaklık eden transandantal *apperception* saf düşünme ediminin zeminsel bakımından önceliğini ve önemini belirtelim. Diğer yetilerden elde edilemeyen, bilme yetisinin tümüne kaynaklık eden, dahası temel bir yeti olması bakımından, birliğin ve birleştirmenin zemininde yer alan *apperception*'ın kategorilere tâbi olmadığını anlıyoruz. İzleyen başlıklar altında, bu saf düşünme edimini ayrıntılı olarak ele almaya çalışacağız. Şimdilik, *apperception*'ın aslen bir birlik verme edimi olması bakımından düşünmeye ait olduğuna işaret etmekle yetinelim. Düşünme yetileri olmadan kendi başına hissetme yetisi (duyusallık) ve hayal gücü ne *a priori* ne de *a posteriori* nesnenin oluşumunu tamamlayabilir. Matematiğin en temel nesnesi olan sayının inşasının farklı aşamalarında, farklı roller üstlenen bu yetilerin bağlantısal ilişkilerini ve işlevlerini tek tek ele almaya çalışalım.

.

1.2.4.1. Anlama Yetisi (Kavrama Yetisi)

Transandantal felsefede anlama yetisi tek tek görüsel karşılığı kurmaya yönelik bir yeti olarak kurallar yetisidir. Başka bir anlatımla, anlama yetisi tikel nesne ve görüsel karşılığı kumaya yönelik, yani sentetik birliğe yönelik edimler icra eden bir yetidir. Bu yönüyle anlama yetisi tikel olanın kuruluşunu gerçekleştirir. Kant'ta bir nesne, ancak anlama yetisinin saf kavramları aracılığıyla düşünülebilir (Kant, 1998: B166). Bu yönüyle "Düşünmek ise, tasarımları bir bilinçte birleştirmektir" (Kant, 2002: §22). Kant'ın epistemolojisinde malzeme olmadan anlama yetisinin düşünmeyi gerçekleştirmesinin olanaklı olamayacağı görülmektedir. Gözkân, bilginin oluşumunda anlama yetisinin, hissetme yetisi (duyusallık) ve hayal gücü arasındaki bağlantısal ilişkiyi şu şekilde ifade eder:

> Kavrama yetisi, hissetme yetisi aracılığıyla edinilen ve hayal gücü tarafından bir araya getirilerek canlandırılan temsilleri, kayıt ve koşullar altına alan, onlara birlik veren, bu yolla da nesneyi ve görüsel karşılığı kuran yetidir. Kavrama yetisi görüsel karşılıkları tek tek terkip etmeye yönelik bir yetidir. Tezahürler, uzay ve zamanın düzenleyici koşullarına tabidir. Kavrama yetisinin yargılarıyla, "edinilen temsillere bir bilinçte birlik verilmesi" sonucunda, idrâkin koşullarına tâbi olarak nesne ve görüsel karşılığı kurulmaktadır. Hissetme ve kavrama yetileri, deneyimi mümkün kılarak nesne ve görüsel karşılığının kuruluşunun koşullarını oluşturur (Gözkân, 2002: s. 34).

Anlaşılacağı gibi anlama yetisi hep tikelin birliğine yönelik bir yeti olarak akla malzeme sağlamaktadır. Anlama yetisi kategorilerinden biri olan nicelik

kategorisinin altında bulunan "birlik" ve "çokluk" saf kavramları, çoklukta birliğin düşünülmesini olanaklı hale getirir. Böyle bir düşünme etkinliği de "bütünlük (*universitas*)" kavramının oluşmasına olanak sağlar. Söz konusu sayının inşası olunca, nicelik kategorisinin rolünü ve işlevini tezimizde açmaya çalışacağız. İzleyen bölümlerde göreceğimiz gibi akıl da, anlama yetisinden gelen tikellerin birliğinin bir araya getirilmesi, aralarında bağlantı kurulması ve mantıksal sonuç çıkarılması gibi faaliyetleri gerçekleştirecektir.

1.2.4.2. Yargı Gücü (Yargı Yetisi)

Kant'ın felsefesinde anlama yetisinin saf kavramlarının işi, görü temelinde nesnel bir "yargı" oluşturmaktır. Yargının oluşması için önceki başlık altında işaret edildiği gibi sentezin üç aşamasının tamamlanması gerekir. Kant, anlama yetisini genel anlamda kurallar koyma yetisi olarak tanımlarken, yargı gücünü kurallar altına alma, bir şeyin verili bir kural altında durup durmadığını ayırt etme yetisi olarak tanımlar (Kant, 1998: A133/B172). Bu bakımdan yargı gücü, aklın mantıksal çıkarımlarında "orta terim"in oluşmasına imkân sağlar. Yargı gücü için genel mantığın hiçbir kural verememesi durumunda, transandantal mantığın, yargı gücünü saf anlama yetisi kullanımında belirli kurallar yoluyla "düzeltme (*correction*)" ve "güvenilir kılma (*secure*)" gibi kendine özgü görevleri vardır (Kant, 1998: A135/B174).

Kant'a göre yargının oluşması için tasarımların bir bilinçte birleştirilmesi gerekir. "Demek ki düşünmek, yargıda bulunmaktan veya genel olarak tasarımları yargılarla ilgi içine sokmaktan başka bir şey değildir" (Kant, 2002: §22). Buradan da yargının

daima bileşik bir önerme olduğu, hem olgusal hem de yorumlayıcı öğeleri, yani sentetik bağıntısal etmenleri içerdiği anlaşılmaktadır. "Düşünme yetisinin kavrama yetisi olarak adlandırılan yanı açısından yargı, deneyimin tekil nesnesini, başka bir deyişle uzay ve zaman koşullarına ve kategorilere tâbi olarak tekilleştirilmiş nesneyi kurmaya yönelik bir düşünme fiilidir; (...) " (Gözkân, 2008a: s.30). Örneğin "metal" nesne olarak cisim kavramıyla anlam kazanır. Yargı gücü, "metal" tümel kavramının daha genel bir kavram olan "cisim" kavramının altında içerilmiş olarak düşünme faaliyetinde bulunarak, yani tikel ve tümel arasındaki bağlantıyı kurarak "Bütün metaller cisimdir" tümel yargısının elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Böylelikle bir nesne olan metal, cisim kavramıyla bir yargı halinde tasarım olmayı tamamlar. Dolaysıyla, bir tekil nesnenin bir tümel altına konularak algılanması, bilinmesi bütün bilmenin ve bilme olanaklarının temeli olmaktadır.

Kant'ın ileri sürdüğü gibi, "Yargı, o halde, bir nesnenin ara bilgisidir, sonuç olarak onun tasarımının tasarımıdır. Her yargıda diğer kavramlarla ilgili bir kavram vardır, diğerleri arasında bu kavram verili tasarımı kavramaya yarar, bu sonuncusu (bu kavram) bir nesneyle doğrudan bağlantılıdır" (Kant, 1998: A68/B93). Kant'ta tezahür (beliriş) ve temsilin duyulara, yargının ise anlama yetisine dayandığı görülmektedir. Kant, *Prolegomena*'da "deneyim yargıları" ve "algı yargıları" olmak üzere iki tür yargıdan söz etmektedir. Algı yargıları, sadece düşünen bir öznede algıların mantıksal bağlantılılığını gerektirir. Algı yargılarında sentezin aşamaları gerçekleşmediği ve dolayısıyla tasarımlar kategoriler altına alınmadığı için nesnel bir geçerlilik söz konusu değildir.

> Deneysel yargılar, nesnel geçerliğe sahip oldukları zaman deney yargılarıdır; sadece öznel geçerli olanlarını ise sırf algı yargıları diye adlandırıyorum, (...) Bütün yargılarımız önce sırf algı yargılarıdır: sadece bizim için, yani öznemiz için, geçerlidirler; onları biz sonradan yeni bir ilgi içine, yani bir nesne ile ilgi içine sokarız ve onların her zaman bizim için ve aynı şekilde herkes için geçerli olmalarını isteriz (Kant, 2002: §18).

Aschenbrenner'e göre algı yargıları gerçek yargılar değildir, sadece yargı formlarını kullanırlar. Bu tür yargılar şöyle başlayabilir; "hissediyorum...", "bana öyle gözüküyor ki..." (Aschenbrenner, 1983: s. 178). Örneğin, "güneş ışınları taşa vurursa, o taş ısınır" gibi bir yargı hiçbir zorunluluk içermediği için bir algı yargısıdır. Bu tür yargılar öznel bir gözlemi ifade ederler.

Sentetik yargılar ise zorunlu olarak genel geçer ve nesnel yargılardır. Örneğin, "güneş taşı ısıtır" gibi bir yargıda, anlama yetisinin algıya "neden" kavramını eklemesi bakımından bu yargı, sentetik zorunlu olarak genel geçer bir yargı olur. Bundan dolayı sentetik yargılar bilgimizi genişletirler (Kant, 2002: §20 "Dipnot"). Kant'a göre deneyimsel yargılar nesnel geçerliliğe sahip olan yargılardır. Sadece öznel geçerli olanlar ise algı yargılarıdır. Deneyim yargıları anlama yetisinin saf kavramlarının faaliyetinin sonucunda oluşurken, algı yargıları algıların mantıksal birlikteliğidir. Bu tür yargılarda kategorilerin bir işlevi yoktur, sadece algılar birleştirilir ya da yan yana getirilir. Gözkân'ın yorumuyla "Kant'a göre nesnenin mekânı yargıdır ve kavram, nesnenin bir yanından kavranmasıdır. Örneğin, tekil bir nesne, diyelim elimizde tuttuğumuz taş, 'cisim', 'sertlik', 'ağırlık' vb. deneysel kavramlarla olduğu kadar, birlik, gerçeklik, bağıntılı olmak, varolmak gibi

deneyimin kurucusu olan *a priori* kavramlarla da (kategorilerle) çeşitli yönlerinden kavranmış bir nesnedir" (Gözkân, 2008a: s. 30). Kant'ta yargılar; niceliğe, niteliğe, ilişkiye ve kipliğe göre dört ana gruba ayrılmaktadır. Aşağıdaki tablo, yargıların mantıksal çizelgesini göstermektedir.

Tablo 1. 2. Kant'ta Yargıların Mantıksal Çizelgesi

Yargıların Mantıksal Çizelgesi			
Niceliğe Göre	Niteliğe Göre	İlişkiye Göre	Kipliğe Göre
• Tümel • Tikel • Tekil	• Evetleyici • Değilleyici • Sonsuz olan	• Kesin • Koşullu • Ayırıcı	• Sorunlu • Onaylayıcı • Zorunluklu

Kaynak: Kant, I. (2002). *Gelecekte Bilim Olarak Ortaya Çıkabilecek Her Metafiziğe Prolegomena (PR).* §21.

Aritmetiğin yargıları, nicel olarak tümel yargılardır. Sentetik *a priori* yargılar alanı olarak aritmetiksel yargıların, bir düşünme faaliyeti olan üç aşamalı sentez sonucunda ortaya çıktığını belirtmiştik. Transandantal felsefede sentetik yargı yoksa *a priori* bir nesne olan sayının varlığı da olanaklı değildir. Burada, analitik yargıların sentez sürecinden geçmemeleri bakımından, nesne ve kavramını oluşturamadıklarını anlıyoruz. Sayıyı bir nesne olarak kabul ettiğimizde, böyle bir *a priori* nesnenin analitik yargılar içinde oluşması mümkün görünmemektedir. Dolayısıyla, transandantal felsefede analitik yargının sentetik yargıya tâbi olduğunu söylemek mümkündür. Aritmetiğin analitik *a priori* yargılar alanı olduğunu iddia eden görüşün, sayının ontolojik zeminini dikkate alıp almadığını ikinci bölümde ayrıntılarıyla tartışmaya çalışacağız.

1.2.4.3. Mantıksal Çıkarımlarda Teorik Aklın İşlevi

Kant'ta insan akıl sahibi fakat eksikli bir varlıktır. İnsanın temel görevi eksikliğini gidererek kendini tamamlamaktır. Akıl ise bilme yetisinin deneyle ilgisi olmayan bir yetisidir. Aklın, "mantıksal kullanımı", "ilkeleri daha genel ilkeler altında toplama" ve "ideleri üretme" gibi işlevleri olmakla birlikte, teorik ve pratik kullanımı olmak üzere iki farklı kullanımı vardır. Teorik akıl varolanı bilme yetisidir, yani bilen yetidir. Pratik akıl ise isteme ve eylemlerle ilgili işlevleri görmekte, ideleri üretmektedir. Heimsoeth'e göre Kant'ta salt aklın "ruh", "evren" ve "tanrı" olmak üzere üç temel idesi vardır. Aklın anlama yetisini aşarak bu ideleri nesne edinmesi durumunda "paralogizm"ler ortaya çıkmaktadır. "Eğer akıl kendisindeki idelerle güvenli ve gerçek bir bilgiye varmak isterse, hataya düşer" (Heimsoeth, 2007: s. 101-103).

Akıl teorik alanda kullanıldığında *a priori* bilgiyi elde etmede rol alır. Teorik aklın en önemli nesneleri mantık, matematik ve teorik fizik olması bakımından bu alanlar aklın teorik kullanımının teorik bilgileridir. "Aklın teorik kullanılışının sağladığı yarar, nesnenin en yüksek *a priori* ilkelere kadar uzanan bilgisidir; aklın pratik kullanılışının sağladığı yarar ise, en son ve yetkin amaçla ilgili olarak istemeyi belirlemesidir" (Kant, 1999: s. 130). Teorik akıl anlama yetisinin işleyişini düzenleyen bir düşünme yetisi olması bakımından, akıl teorik bilgi elde etmede anlama yetisine, dolayısıyla da hissetme yetisine (duyusallığa) bağlı kalmak zorundadır. Mengüşoğlu'ya göre anlama yetisi "koşullar"a bağlı çalışırken, akıl ise koşullara bağlı olmayanı kavramaya çalışmaktadır. Anlama yetisine bağlanmadığı

sürece kendi başına akıl, teorik alanda (teorik akıl) hiçbir biçimde kesin ve genel geçer bilgi elde edemez (Mengüşoğlu, 1969: s. 23).

> Aklın teorik kullanılışı sırf bilme yetisinin nesneleriyle uğraşıyordu ve aklın, bu kullanılışı bakımından bir eleştirisi, aslında yalnız saf bilme yetisiyle ilgiliydi. (...) Aklın pratik kullanılışında durum farklıdır. Bu kullanılışta akıl, tasarımların karşılığı olan nesneleri meydana getiren ya da kendini (doğal yeti buna yeterli olsa da, olmasa da) bu nesneleri meydana getirmek üzere belirleyen-yani kendi nedenselliğini belirleyen-bir yeti olan istemenin belirlenme nedenleriyle uğraşır (Kant, 1999: s. 16).

Dahası pratik akıl; vicdan, özgürlük, isteme, kişilik ve ahlâk yasasının kaynağı olarak karşımıza çıkmaktadır. Pratik akıl istemedir. Pratik aklın yasalarına göre isteme, yani sentetik *a priori* bir yasa olan ahlâk yasasının buyurduğu biçimde isteme ise insanın özgür olmasını mümkün kılmaktadır. Kant'ta özgürlük ahlâk yasasının varlık nedeni iken, ahlâk yasası da özgürlüğü bilme nedenidir. Pratik aklın nesnesi iyi ve kötü olması bakımından, iyi ve kötü ahlâk yasası sayesinde bilinir. İyi = iyi istemedir. Yani iyi, ahlâk yasasının buyurduğu biçimde bir istemedir.

Anlama yetisi tikelin birliğine yönelik bir yeti görevi yaparken akıl tikelleri bütünlüğe ulaştıran bir yetidir. Bu bakımdan akıl anlama yetisinin malzemelerini nesne edinir. "Aklın bir nesneyle ilgili her kullanılışı için, anlama yetisinin saf kavramları (kategoriler) gereklidir; onlarsız hiçbir nesne düşünülemez" (Kant, 1999: s.147). Buradan, aklın anlama yetisinin yargılarını birbirine bağlayarak mantıksal çıkarımları gerçekleştirdiği anlaşılmaktadır. Ayrıca aklın teorik kullanımında, anlama yetisinin işleyişini düzenlediğini ve kategoriler ürettiğini görüyoruz. Kant'a göre

teorik aklın işlevi yalnızca, nesneleri kategoriler aracılığıyla düşünmektir. Kategoriler olmadan aklın teorik bilgisi olanaksızdır. Kant, "aklın, olanaklı tüm teorik bilgisi, görüsel karşılıkla sınırlıdır" (Kant, 1998: Bxxvi) sözüyle aklın teorik bilgisinin kaynağında görü ve kavramın olduğuna vurgu yapmaktadır. Aşağıdaki tablo, bilginin oluşumunda üç ayrı role sahip olan bilme yetisininin üç ayrı yanını (hissetme yetisi (duyusallık), anlama yetisi ve akıl) göstermektedir.

Tablo 1.3. Kant'ta Bilme Yetisi

<table>
<tr><td colspan="3">BİLME YETİSİ</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Görü Formları
• Uzay
• Zaman</td><td rowspan="2">Kategoriler
1) Nicelik (Quantity)
• Birlik (Unity)
• Çokluk (Plurality)
• Tümlük (Totality)
2) Nitelik (Quality)
• Gerçeklik (Reality)
• Olumsuzlama (Negation)
• Sınırlama (Limitation)
3) İlişki (Relation)
• Tözsellik-İlineksellik (Substantia et accidens)
• Nedensellik (Cause-Effect)
• Ortaklık (Community)
4) Kiplik (Modality)
• Olanaksızlık (Possibility-Impossibility)
• Varlık-Hiçlik (Existence-Non Existence)
• Zorunlu-Olumsal (Necessity-Contingence)</td><td rowspan="2">Aklın İşlevleri
• İdeleri üretiyor.
Bu ideler;
a) Özgürlük/Kozmos
b) Tanrı
c) Ruhun ölümsüzlüğü/Ruh
• Mantıksal kullanımı var.
• İlkeleri daha genel ilkeler altında topluyor.</td></tr>
<tr><td>GÖRÜ</td></tr>
<tr><td>HİSSETME YETİSİ (DUYUSALLIK)</td><td>ANLAMA YETİSİ</td><td>AKIL</td></tr>
</table>

Kaynak: Kant, I. (1998). *Critique of Pure Reason (CPR)*. A80/B106.

Kant'ta bilgimizin kökeni hissetme yetisine (duyusallığa) dayanması bakımından salt kategorilere dayanan düşünme, "boş düşünme"dir ve bir şey ifade etmez. Görünün yerinin olmadığı böyle bir düşünmede sentetik yargılar yer alamaz. Bu bakımdan metafizik, salt anlama yetisinin kavramlarına dayandığı sürece güvenilir

bilgi olamaz. "(…) kategorilere duyusal hiçbir belirlenimin karışmaması, aklı yanlış yola, bu kategorilerin kullanılışını deneyin büsbütün dışına, yani kendi başına şeylere kadar götürmeye sürükleyebilir" (Kant, 2002: §45).

Akıl, anlama yetisi ilişkisine baktığımız zaman; anlama yetisi koşullar yetisi olduğu halde, akıl anlama yetisinin koşullarını aşarak koşulsuz olana ulaşmak ve bütünü kavramak için çaba gösterir. Koşulların dışında, bütünü kavrayarak bir bilgi edinme çabası Kant'ın deyiş biçimiyle insan aklının dogmatik metafiziğe sapmasına neden olmuştur (Heimsoeth, 2007: s. 94, s. 95, s.104). Transandantal felsefede, anlama yetisi yargı yetisi olurken, akıl ise ilkeler ve yasalar koyma yetisidir. İşte akıl teorik kullanımında anlama yetisinin sentetik yargılarını mantıksal çıkarımlar yoluyla birbirine bağlayarak genel ilkelere ulaşır. Başka bir anlatımla, anlama yetisinden gelen sentetik yargıların akıl tarafından tek bir ilke altında birbirine bağlanması sağlanır. Çünkü "tikelin tümel içinde idrâk edilmesi ilkelerden edinilen bilgiyi oluşturur" (Kant,1998: A300/B357). Buradan da aklın doğrudan görüyle ilgisinin olmadığını, nesnesinin anlama yetisi olduğunu anlamaktayız.

> Aklın hiçbir zaman doğrudan deneyime ya da bir görüsel karşılığa yönelik kullanımı yoktur, aklın ancak kavrama yetisinin idrâk manifolduna kavramlar vasıtasıyla *a priori* bir birlik veren bir kullanımı vardır; bu birliğe aklın birliği adı verilir ve kavrama yetisinin kuruluşunu gerçekleştirdiği birlikten tür olarak çok farklı bir birliktir (Kant, 1998: A302/B359).[4]

[4] Bu alıntı, Bülent Gözkân'ın "Kant'ın Metafizik ve Akıl Eleştirisi Üzerine Bir Eleştiri" başlıklı yazısından alınmıştır (Gözkân, 2002: s. 36).

Kant'ın felsefesinde aklın tümel nesneyi kurarak mantıksal çıkarımlarda bulunması olanaklıdır. Bu konuya başka bir açıdan bakıldığında, Kant'ın, epistemolojisinde aklın nesneyi nasıl kurduğunu ve ayrıca akıl tarafından kurulduğu ileri sürülen tümel nesnenin mekânını ortaya koyamadığı düşünülmektedir. Gözkân'a göre, "Bu durumda, aklın mantıksal kullanımının dayandığı transandantal zemin belirlenmeden, yani aklın kendisinin, akılçıkarımlarının yapılmasına olanak veren kendi nesnelerini nasıl kurduğu ortaya konmadan, sadece aklın mantıksal kullanımının incelenmesiyle sınırlı kalmış olması, transandantal düşüncenin bu açıdan eksik bırakıldığını bize göstermektedir" (Gözkân, 2002: s. 41-42). Gözkân, çalışmasının izleyen sayfalarında Kant'ta eksik görülen aklın bu faaliyetini; yine aklın, kategorilerin tikel nesneyi kurmaya yönelik faaliyetinden farklı olarak, "(...) *a priori manifold*un (görünün bütününün) canlandırılmasının şemasıdır ki, aklın tümel nesneyi, '*şeylerin bütünlüğü*'nü kurabilmesinin açıklanması bu şekilde verilebilir" (Gözkân, 2002: s. 65-66) biçiminde ifade etmektedir. Çitil, benzer bir yorumuyla nesnenin tesisinde Kant'ın aklın etkinliğini dışarıda tuttuğunu düşünmektedir. Çitil'e göre nesnenin kurulumunda aklın kurucu etkinliği gereklidir. Çünkü, ancak aklın tesis ettiği tümel nesne aracılığıyla tikel nesnenin bireysel bütünlüğü olanaklı hale gelebilir. Kant, aklın hayal gücü ile olan bağıntısını ortaya çıkarmak için bir girişimde bulunmamış ve dahası ontolojisinde aklın transandantal faaliyetlerini göz ardı ettiği için de *a priori* ya da *a posteriori* nesnenin kurulumunu açıklayamamıştır. "Aklın etkinliğini dışarıda tutarak ruhun yetilerinin etkinliği içerisinde nesnenin bireysel bütünlüğü kurulamaz. (...) Kant'ın belkide en büyük yanılgısı, aklın, tümel nesne ile tikel nesne arasında mevcut içsel bütün-parça bağıntısının kurulmasında ve kavramasındaki işlevini göz ardı etmesidir" (Çitil, 2012a: s. 21, 46).

Anlama yetisinin sentetik yargılarının birbirine bağlanması aklın mantıksal kullanımıyla ilgilidir. Matematiğin cebir ve diğer dallarının oluşumunda aklın mantıksal kullanımını görebiliriz. Matematiksel bilgi görü temelli olmakla birlikte, matematikte önermelerin ispatının yapılması ve indüktif çıkarımlarla genellemelere gitme gibi düşünme etkinliklerinin teorik aklın işlevleriyle olanaklı olduğunu düşünmekteyiz.

1.2.5. Sentetik *A Priori* Yargıların Oluşumunda Genel Mantık ve Transandantal Mantık Ayırımı

Transandantal felsefe, metafiziğin bilim olma koşulunu sentetik *a priori* yargılar alanı olması koşuluna bağlar. Bu şu demektir: Metafiziğin yargıları hem bilgimizi genişleten yargılar olsun, hem de bu yargıların doğrulanması ve yanlışlanması empirik işlemlere dayanmasın, yani zorunlu ve evrensel olsun. "Peki, matematiğin yargılarının da aralarında yer aldığı söz konusu yargılar nasıl olanaklıdır?", "Nasıl olur da bir yargı hem *a priori*, hem evrensel ve zorunlu, hem de bilgimizi genişletebilir?" İşte Kant, *CPR*'de matematik felsefesini epistemolojisinden ayrı tutmayarak, üstelik onu epistemolojisinin ayrılmaz bir parçası olarak ele alıp sentetik *a priori* yargıların olanağının koşullarını araştırdığı görülmektedir.

Konumuz, Kant'ın sentetik *a priori* yargılar alanı olarak gördüğü aritmetiğin nesnelerinin nasıl inşa edildiğini anlamak ve açıklamak olduğuna göre öncelikle Kant'ın genel mantığa ilişkin görüşüne yer verelim. "Genel mantık bilginin tüm içeriğini, başka bir deyişle nesne ile tüm bağıntısını soyutlar ve yalnızca bilgilerin

birbiri ile ilişkilerindeki mantıksal biçimini, yani genel olarak düşüncenin biçimini irdeler" (Kant, 1998: A55/B79). Genel mantık ve transandantal mantık ayırımının aritmetiğin yargılarına ilişkin tartışmanın zemininde yer aldığını görüyoruz. Kant, transandantal mantık çerçevesinde önce sayının mekânını inceler, sonra da onun nasıl inşa edildiğini açıklar. Genel mantığın yalnızca tasarımları irdelemesi bakımından bilginin nesnelere ilişkin kökeniyle hiçbir ilgisi yoktur. Bunu yaparken de anlama yetisinde, bunları birbiri ile ilişkilendirirken ölçüt aldığı yasalara göre yapar. Genel mantık bir araç olarak görüldüğünde her zaman yanılsama mantığıdır. Çünkü bize bilginin içeriği üzerine hiçbir şey öğretmez, tersine yalnızca anlama yetisi ile bağdaşmanın biçimsel koşullarını ortaya koyar. Bilginin oluşumunu açıklamak için genel mantık yetersizdir, Friedman'ın deyişiyle "(...) matematiğin sentetik karakteri olduğu görüşü Kant'ın genel mantığın yetersizliğini göstermek için bir girişimdir. (...) yalnız genel mantık, matematiksel önermelerin ve kavramların doğru tasarımları için tamamen yetersizdir. Bu durum, saf görü ve transandantal mantığın kendisine olan yönelimini harekete geçirmektedir" (Friedman, 1994: s. 129).

Transandantal mantık matematiğin nesnelerinin kendisini değil, bunların inşasının *a priori* öğelerini araştırmak amacıyla bunlara ilişkin bilgimizin kökenini ele alır. Friedman'a göre "özellikle aritmetiğin sentetik karakteri Kant'ın transandantal mantık görüşünde bir hareket noktası olmuştur" (Friedman, 1994: s. 104). Kant "bilginin tüm içeriğini soyutlamayan bir mantık olacaktır" (Kant, 1998: A56/B80) sözüyle transandantal mantığı işaret etmektedir. Bu mantık, deneyim içerikli bilgiyi dışlayan, *a priori* ilkelere dayanan, bilginin bütününün içeriğinden soyutlanmayan ve bilginin nesnesiyle ilişkisini koparmayan transandantal mantıktır. Friedman'ın ileri sürdüğü gibi "Transandantal mantık idesi Kant'ın saf görü fikriyle yakından

bağlantılı olarak düşünce ve nesne arasındaki saf veya saf olmayanın irdeleme olanağıdır" (Friedman, 1994: s. 97). Kant'ın transandantal mantık aracılığıyla sayının zeminini incelediğini ve onun nasıl inşa edildiğini temellendirmeye giriştiği görülmektedir. Çünkü, transandantal mantık, doğal sayıların ontolojisi bakımından önemlidir. Kant sonrasında, özellikle Frege'nin aritmetik görüşünü oluştururken, transandantal mantığın göz ardı edilip edilmediğini tartışmaya çalışacağız.

1.2.6. Sentetik *A Priori* Yargılarda Nesne, Kavram ve Yargı İlişkisi

Kant'ın felsefesinde "kendinde şey"in doğrudan deneyimine hiçbir zaman ulaşılamaz, sadece bunların temsilleri edinilebilir. "Kendinde şey" nesne değildir. Ancak "kendinde şey", tesis edilecek nesnenin sadece malzemesini sağlar. "(...) Kendinde-şey, kendi olduğu haliyle bilinemez; ancak duyusallığın *a priori* formu aracılığıyla uzay tasarımının içine dahil edilmesiyle düşünme yetisi tarafından bir nesne olarak öznede tesis edilebilir ve bu yolla bilinebilir olur" (Gözkân, 2006: s. 54). Kant'ın bilgi felsefesinde nesnenin kurulumunu "hissetme yetisi (duyusallık)", "hayal gücü" ve "düşünme yetileri" olanaklı hale getirir. Hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formları olan "uzay" ve "zaman" sayesinde "kendinde şey"lerin "temsiller"i edinilirken, hayal gücü ise hissetme yetisi (duyusallık) ile düşünme yetilerinin arasındaki bağlantıyı kurar. Nesneyi kuran bilme etkinliği şeylerin kendilerinin bilinmesi değil, onların temsilleri üzerinde düşünme etkinliğidir. Hissetme yetisiyle (duyusallıkla) edinilen temsiller, hayal gücü ve düşünme yetisinin devreye girmesiyle birbirlerine bağlanıp birleştirilirlerek, yargı

içinde nesne ve kavramın ortaya çıkmasını mümkün kılar. Dahası, düşünme ediminin bir biçimi olarak sentez, hem kavramın hem de nesnenin var olma koşuludur.

Kant, "Bir kavramı inşa etmek demek o kavrama karşılık gelen görünün *a priori* olarak gösterilmesi demektir" (Kant, 1998: A713/B741) sözüyle türetilen ve oluşturulan kavramların görü temelli olduğuna işaret eder. Kant'ta inşa edilen bütün kavramlar nesneleriyle birlikte ortaya çıkarlar. Nesnenin oluşması sentetik yargının oluşmasına bağlıdır, yani sentetik yargı yoksa nesne de yoktur. Örneğin, "bütün cisimler ağırdır" önermesinde "cisim", "ağır" kavramıyla birlikte böyle bir sentetik yargı içerisinde ortaya çıkmaktadır. Transandantal felsefeye göre, nesne, düşünme edimiyle birlikte bir sentetik yargı içinde kavramla beraber birlik oluşturur. Başka bir deyişle, hafızaya sakladığımız her şeyde ya da bütün kitaplarda sentetik yargılar oluşmadığı sürece nesneden söz edemeyiz (Koç, 1995: s. 56).

Daha önceki başlık altında da, hissetme yetimizin (duyusallığımızın) etkilenmesi sonucunda "temsil"lerin ortaya çıktığına, bu yetimiz olmadan hiçbir temsil oluşmadığına, anlama yetisi olmadan da hiçbir şeyin düşünülemediğine işaret edildi. Transandantal felsefede bu iki yetiden her biri farklı işlevlere sahiptir ve bunlardan biri olmazsa bilgi de oluşmaz. Burada bilginin, her iki yetinin birlikte çalışması sonucunda oluşan "yargılar"la birlikte ortaya çıktığını tekrar vurgulayalım.

> Tüm bilgi ile nesnesi arasındaki bağıntıya ilişkin düşüncemizin kendisinde bir zorunluluk öğesi taşıdığını buluruz, çünkü nesne bilgilerimizin rastgele ya da keyfi olmalarına karşı duran ve onları *a priori* belli bir yolda belirleyen bir şey olarak

> görülür. Çünkü bir nesne ile ilişkili olmaları gerektiği için, bununla ilişkisi içinde zorunlu olarak birbirleri ile anlaşmaları, yani bir nesnenin kavramını oluşturan birliği taşımaları gerekir (Kant, 1998: A104).

Kant'ta nesne, sadece empirik şeylerden ibaret değildir. Sayılar, geometrik şekiller, nokta, çizgi gibi geometri ve aritmetiğin terminolojisini oluşturan terimler de matematiğin nesneleridir. Bu nesnelerin inşasının *a priori* koşulu ise Kant'ın transandantal mantığıdır. Transandantal mantık; nesnenin kendisini değil, nesnenin kurulumunun *a priori* öğelerini araştırması bakımından nesnelere ilişkin bilgimizin kökenini ele alır, bilginin içeriğini soyutlamaz, düşünmenin mümkün olması için transandantal formlara yönelir ve onları ortaya koyar. Kant'a göre matematiksel bilgilerin inşasında zorunlu olarak *a priori* görü formları yer alır. Bir başka deyişle, a *priori* saf görü formları sentetik *a priori* yargıları olanaklı kılar. Aynı zamanda *a priori* görü mekânı matematiğin transandantal zeminini oluşturmaktadır. Bu mekânın yakalanması, genel mantıkla değil transandantal mantık aracılığıyla olanaklıdır.

Tezin ikinci bölümünde, matematiğin felsefi temellerine ilişkin yaklaşımların; transandantal mantığı göz ardı etmeleri sonucunda, sayının ontolojik zemininin kaymasına neden olan etkenleri tartışmaya çalışacağız. Kant'ın transandantal felsefesinde, nesnenin ontolojik zemini gösterilmeden nesnenin bilgisi edinilemez, dahası mekânsız nesne olamaz. Koç, "Her nesne, ait olduğu mekânın şartları ve imkânlarına tabî olarak 'meydana gelmiştir'. Bu bakımdan, bir nesnenin mâhiyyetinin ne olduğu sorusu, bu nesnenin mekânının mahiyyetinin ne olduğu sorusu ile iç içedir. (...) Her nesnenin bir 'mekân'ı bulunması gerekmektedir.

‘Mekânsız nesne’ mümkün değildir” (Koç, 1994: s. 13, 15) sözleriyle nesne ve mekân ilişkisini kendine özgün bir biçimde ortaya koymaktadır.

1.2.7. Aritmetiğin Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Olanaklılığı

Sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı düşüncesi modern felsefede en güçlü ifadesini Kant’ta bulur. Kant’ın analitik/sentetik yargı ayrımını çok geniş çaplı bir biçimde incelediğini ve transandantal felsefesinde sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını temellendirdiğini anlıyoruz. Kant, *Prolegomena*’da sentetik yargıları “deneyim yargıları” ve “matematik yargıları” biçiminde sınıflayarak kökeni deneyimsel olan yargılara “sentetik *a posteriori*”, saf anlama yetisinden ve akıldan kaynaklanan yargılara da “sentetik *a priori*” yargılar olarak tanımlamaktadır (Kant, 2002: §2). Sentetik *a priori* yargılarda görünün *manifold*u *a priori*dir ve oluşumunda iki temel öğe bulunmaktadır. Bunlar, *a priori* görüler ve *a priori* kavramlardır. Bu *a priori* görüler uzay ve zamandır. Kant’a göre “Uzay ve zaman kendilerinden *a priori* bilginin türetilebildiği bilginin iki kaynağıdır, özellikle ‘zaman’ saf matematik bilgisinin türetilebildiği bir kaynaktır” (Kant, 1998: A38/B55). Sentetik *a priori* yargıların diğer bir öğesi olan *a priori* kavramlar ise kategorilerdir. Sentetik *a priori* yargıların oluşması için kategorilerin de devreye girmesi gerekir. Kant, “kategorisiz hiçbir sentetik yargı yapılamaz” (Kant, 1998: B289) sözüyle bilgide kategorilerin önemli işlevini belirtir. Sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı, saf kategoriler ve *a priori* görünün işbirliği ile mümkündür. “Sentetik *a priori* yargılar, böylece, *a priori* görünün biçimsel koşullarını, hayal gücünün sentezini bir ‘*trancendental apperception’* içinde ve bu sentezin zorunlu bir birliğini, genel olarak olanaklı

empirik bir bilgi ile ilişkiye soktuğumuzda olanaklı olur" (Kant, 1998: A158/B197). Kant burada, sentetik *a priori* yargılar için öncelikle; "*a priori* görünün biçimsel koşulları"nın oluşması gerektiğine, sonra da bu tasarımların sentezlenmesinde önemli işlevleri olan üretici hayal gücünün ve anlama yetisinin faaliyetlerine işaret etmektedir.

Bu faaliyetler şu şekilde açılabilir: Daha önce ayrıntıları üzerinde durulduğu gibi, hayal gücü kendisinde mevcut olmayan bir nesneyi görüde temsil etme yetisidir. Hayal gücünün faaliyetlerinden biri "sentezin aşamaları"nı gerçekleştirmek, diğeri ise hissetme yetisi (duyusallık) ile anlama yetisi kavramları arasındaki köprü işlevi gören "şemalar"ı üretmektir. Sentezin birinci aşamasında, tezahürler (belirişler) zaman formunda yakalanmakta ve bütünlük verilmektedir. Sentezin birinci aşamasında iş gören hayal gücü, sentezin ikinci aşamasında da devrededir. Bu aşamada, hayal gücü içsel formda yakalanan ve bütünlük verilen unsurları yeniden üretir, resmeder ve tekrar bütünlük verir. Yine, bu aşamada şemalar hayal gücü tarafından üretilmekte ve imgeler de şemalara sunulmaktadır. Bir başka anlatımla, uzay ve zamanın *a priori* imgeleri şemalara sunulur, bunu da hayal gücü yapmaktadır. Hayal gücünde oluşan *a priori* resim, kategorinin şemasına göre oluşmuş bir *a priori* resim olması bakımından şema, görülerle kavramların ortaklığını kategorilerle görünün *a priori* formları arasındaki bağlantıyı kurarak gerçekleştirir. Bir başka deyişle, şemanın bir tasarım olarak işlevi, görüde oluşan malzemeyi anlama yetisinin saf kavramları altına almaktır. Sentezin ikinci aşamasında oluşan unsurların zaman formunda yok olmaması için, sentezin üçüncü aşamasında bu unsurların bilincine varılır, yani bir kavramda tanınır. Böylece, görüler kavramlara tanıtılmış ve bilgimiz de genişlemiş olur. Sentetik *a priori*

yargıların, analitik yargıların aksine bilgimizi bu şekilde genişlettiği ve öğretici olduğu ileri sürülebilir.

Kant, "iki nokta arasında en kısa yol düz bir çizgidir" önermesini örnek vererek geometrinin analitik değil sentetik *a priori* yargılar alanı olduğuna vurgu yapmaktadır (Kant, 1998: B16). Bu önermede yer alan "nokta", "iki", "düz çizgi" gibi kavramlar görü temelli saf matematiğin kavramları olarak bilgimizi genişletmektedir. Kant'a göre sayı, zaman formunda akan zamansal anların transandantal olarak belirlenmesi ve birlik verilmesiyle elde edilmektedir. Bu işlem için; hissetme yetisi (duyusallık), üretici hayal gücü ve düşünme yetilerinin devreye girmesi gerekir. Burada önemli bir ayrıntının altını çizme gereği duymaktayız; bir kavram olarak sayı, görüden elde edilmemektedir, görüde bulunan, sayının malzemesi olan *a priori manilfold*tur. Transandantal felsefede, sayının inşası için bu homojen *manifold*a birlik verilmesi ve sonra da birlik verilen unsurların resmedilmesi gerekmektedir. Resmetme işlemini hayal gücü transandantal şemalar aracılığıyla yaptığını, yani hayal gücü aracılığıyla transandantal şemalar canlandırma ve resmetme işini kavrama imge sağlayarak gerçekleştirdiğini belirtelim.

Yeri gelmişken burada, sentetik *a priori* yargıların olanaklılığına ilişkin karşı bir görüşe de yer verelim. Çağımızın tanınmış filozof ve mantıkçılarından olan Hans Reichenbach, geometriden hareket ederek sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı görüşünün geçerliliğini yitirdiğine işaret etmektedir. Reichenbach, *Bilimsel Felsefenin Doğuşu* adlı kitabında Kant'tan sonra Eukleidesçi olmayan geometrilerin ortaya çıkmasıyla birlikte "matematiksel geometri" ve "fiziksel geometri" gibi yeni

geometri sistemleri oluştuğunu ve bu sistemlerden hangisinin fiziksel dünyanın geometrisi olduğu sorusunun yanıtsız kaldığını ileri sürmektedir. Reichenbach'a göre salt aklın bu soruyu yanıtlayamaması, dahası sorunun yanıtı için gözleme gidilmesi gerekliliği geometrinin empirik içerikli bir bilim olduğunu ortaya koymaktadır. Matematikçinin geometrisi analitik nitelikte bir sistem olmasına rağmen, mantıksal ilişkiler parçalanıp, aksiyomlarla teoremler ayrıldıktan sonra geometri sentetik önermelere dönüşmektedir (Reichenbach, 2000: s.100-109). Geometrinin tarihsel gelişimine bakıldığında onun uygulamadan çıktığına, bu bakımdan geometrinin doğruluğunun *a priori* olan bir sistem olamayacağına vurgu yapan Reichenbach, "Geometrik ilkeleri sentetik *a priori* türden sayamayız. Geometri ya *a priori'*dir, o zaman matematiksel geometridir ve analitik niteliktedir; ya da sentetik niteliktedir, o zaman fiziksel geometridir ve empirik içeriklidir. Geometrinin gelişmesi, sentetik *a priori*'nin çöküşü ile doruk noktasına ulaşmıştır" (Reichenbach, 2000: s. 109) biçimindeki ifadesiyle Kant'ın sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı görüşünün çöktüğünü iddia etmektedir.

1.2.7.1. "Sentez-Şema", "Şema-İmge" Ayrımları ve Aritmetiksel Bilgi

Daha önce değindiğimiz gibi sentez hayal gücünün bir etkinliğidir. Hayal gücü olmadan sentezin olması olanaksızdır. Deleuze'ün Kant'taki hayal gücünün işlevlerini açıklaması aydınlatıcı görünmektedir. Ona göre sentez, uzay ve zaman görü formlarından çıkıp kavrama ulaşmaktadır ve "tanıma kuralı"na göre işlemektedir. Sentezin ilk iki aşaması hayal gücüne bağlıdır, üçüncü aşama ise hayal gücünün sentezi değildir. Yeniden üretilen şeylerin zaman formunda kaybolmaması

için, sentezin üçüncü aşamasında anlama yetisinin kavrayış gücüyle "tutulma" ve "tanıma" işlemleri gerçekleştirilir. Bir başka anlatımla sentezin üçüncü aşaması "tanıma" demektir. Şema, hayal gücünün diğer bir faaliyetidir. Hem sentez hem de şema, bunların her ikisi de bir taraftan kavramsal belirlenimlerin, diğer taraftan uzaysal-zamansal belirlenimlerin üst üste çakıştırıldıkları işlemler olarak tanımlanabilir. Sentez, uzay-zaman görü formlarından çıkıp kavrama dönüştükten sonra tanıma kuralına göre işlerken, şema ise bir "üretim kuralı"na göre işlemektedir. Deleuze'e göre şemanın işi elimizde olan bir kavrama uyan bir nesneyi uzay ve zaman formunda üretmektir (Deleuze, 2007: s.106-109). Yine Deleuze, sentezin ilkesinin tanıma olduğunu, sentezde uzaysal ve zamansal belirlemeden kavramsal belirlemeye varıldığını, şemanın işlevinin ise elimizdeki kavrama tekabül eden uzaysal-zamansal ilişkiyi belirlemek olduğunu söyler ve bunu bir örnekle şöyle açıklar:

> Verili olanın bir sentezini, hakkında 'bu bir evdir' dediğiniz herhangi bir nesneyle ilişkilendirdiğiniz bir sentez yapıyorsunuz. Evin şeması ise bundan çok farklıdır-herhangi bir çeşitlilik kuralı içinde işleyen bir tanıma kuralı değildir. Evin şeması bir üretim kuralıdır-yani onunla kendinize bir ev kavramı imal edebilirsiniz. Örnek olarak işlevsel bir tanımı ele alacağım: Ev = insanları barındırmak için yapılmış bir şey. (...) Bu bize henüz üretim ilkesi vermez. Evin şeması bize deneyimde, yaşamda, mekânda ve zamanda bir şeyi, kavrama uygun nesneleri üretme olanağı sağlayan şeydir. (...) Eğer üretim kuralınız varsa o zaman elinizde bir şema var demektir (Deleuze, 2007: s. 109).

Görüldüğü gibi sentezin kuralı "tanıma" kuralıyken, şema ise "üretim kuralı"na göre işlemektedir. Sentez ise bunun tam tersidir, uzaysal-zamansal işlem yapıldıktan sonra

kavram bu belirlemeden yola çıkarak oluşur. Kant, "şema"yı "kategori ile uyum içinde bir nesnenin yalnızca fenomeni ya da duyusal kavramı" (Kant, 1998: A146/B186) olarak tanımlar. Yine Kant, "Şema olmaksızın kategoriler yalnızca anlama yetisinin işlevleridirler ve hiçbir nesneyi temsil etmezler" (Kant, 1998: A147/B187) sözüyle bilginin oluşmasında şemanın bağlantı kurma işlevine vurgu yapmaktadır. Bilginin oluşması için hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen malzemenin saf kavramlar altına alınmaları nasıl olanaklıdır? Kant'a göre bir nesnenin bir kavram altına alındığı tüm durumlarda nesnenin temsili ile kavram "türdeş (*homogeneous*)" olmalıdır, ve kavram altına alınan nesnede tasarımlanan şeyi kapsaması gerekir. "Çünkü 'bir nesne bir kavram tarafından kapsanır' anlatımının imlemi budur. Böylece bir tabağın deneysel kavramı bir dairenin saf geometrik kavramı ile türdeştir. Çünkü ikinci durumda düşünülen yuvarlaklık ilk durumda sezilebilir" (Kant, 1998: A137/B176). Bilindiği gibi anlama yetisinin saf kavramları ile empirik görüler (*empirical intuitions*) "türdeş" değildir, heterojendir (*unhomogeneous*). Oysa kategorilerin görünüşlere uygulanabilmesi için; kavram kapsadığı nesnede tasarımlanan bir şeyi içermelidir. Bu şey, daha önce Kant'ın sentetik yargılara açıklık getirirken ortaya koyduğu "üçüncü şey"dir.[5] Bu üçüncü şey, bir yönüyle kategoriler açısından türdeş, diğer yönüyle görüler açısından türdeş olan şeydir. Aksi halde kategorilerin temsillere uygulanması mümkün olamayacaktır.

> Bir yanda kategori ile diğer yanda görü ile türdeşlik içinde olması gereken ve birincinin ikinci üzerine uygulanmasını olanaklı kılan üçüncü bir şey olmalıdır. Bu aracı tasarım saf (deneyselliğin dışında) ve gene de bir yandan anlama yetisine ait diğer yandan duyusal olmalıdır. Böyle bir tasarım "transandantal şemadır" (Kant, 1998: A138/B177).

[5] Kant, burada "transandantal şema"yı "üçüncü şey" olarak adlandırmaktadır (Kant, 1998: A138/B177).

"Şema"nın hayal gücünün bir faaliyeti olarak bir tür aracı tasarım olduğuna işaret etmeye çalıştık. Kavramların görünüşlere uygulanmasında zihin bu tür şemalara ihtiyaç duymaktadır. Kant, "anlama yetisinin bu şemalarla işlem görme yöntemine saf anlama yetisinin şematizmi" (Kant, 1998: A140/B179) diyerek şematizmin, transandantal düşüncedeki önemine işaret eder. Kant'a göre şematizm, insan ruhunun derinliklerinde gizlenmiş bir sanattır. Fakat "şemanın kendisi hayal gücünün sadece bir ürünü"dür (Kant, 1998: A140/B179). Burada, şema ile imgenin aynı şey olmadığına tekrar vurgu yapma gereğini duymaktayız. Kant'a göre imge, yeniden üretici hayal gücünün empirik yetisinin bir ürünü olarak şema yoluyla olanaklı olur. "İmge, üretici hayal gücünün empirik yetisinin bir ürünüdür ve duyusal kavramların [*sensible concepts*] şeması *a priori* hayal gücünün bir ürünü ve deyim yerindeyse bir monogramıdır ki imgeler, ilkin onun yoluyla ve ona göre olanaklı olurlar. Ama bu imgeler kavram ile her zaman imledikleri şema aracılığıyla bağlanmalıdırlar ve kendilerinde onunla tam bir çakışma durumunda değildirler" (Kant, 1998: A141-142/B181). İmge bir kavramın evrenselliğini açıklamak için yeterli bir unsur değildir. "Hiçbir imge, genel olarak bir üçgenin kavramını karşılamak için yeterli değildir. Çünkü o, hiçbir zaman, ister dar açılı, ister dik açılı, ister geniş açılı bütün üçgenlerin geçerliliğini sunan, kavramın evrenselliğine ulaşamayacaktır. O, daima bu alanın yalnızca bir parçasıyla sınırlı kalacaktır" (Kant, 1998: A141/B180). Şema ise kavrama imge sağlar, başka bir deyişle kavramın evrenselliğini karşılar. Şema-imge farkını Deleuze'ün şu örneği ile açıklayabiliriz: Aslan imgeleri küçük aslan, büyük aslan, dağ aslanı gibi örnekler oluşturabilir. Yani aslanın imgeleri bütün bu türün bireyleridir. Aslanın şeması ise bu hayvan türünü cinslerle, özgül farklılıklarla ve ayrımlarla belirlemektir. Aslanın imgesi bu türün bireyleri olurken, aslanın şeması bu türün bireyleri değildir. Aslanın şemasında zamansal ve mekânsal ritimler, tavırlar

ve jestler vardır. Bir başka deyişle aslanın şeması onun mekânsal-zamansal dinamizmidir. Bu hayvanın mekânsal-zamansal dinamizmi ise onun yaşadığı bölgeyi, yaşadığı yeri, izlediği yolları, bu yollarda bıraktığı izleri ve buna benzer şeyleri ifade eder. Ayrıca Deleuze, imge-şema farkını anlatmak için örümcek örneğini de verir. Örümceğin imgesini örümceğin bütün türleri olarak tanımlarken, örümceğin şemasını da örümceğin ağı biçiminde tanımlar. Çünkü örümceğin ağı, onun mekân ve zamanı işgal etme tarzıdır. Bu bakımdan imgeler bir kavramı açıklamak için yeterli olmaz ve bundan dolayı şemanın gerekliliği devreye girer (Deleuze, 2007: s. 114-115).

Deleuze, başka bir kitabında Kant'ta şemanın bir imgeden oluşmadığını, varolan kavramsal bağıntıları cisimleştiren ya da gerçekleştiren uzaysal ve zamansal bağıntılardan oluştuğunu ileri sürer (Deleuze, 1995: s. 56).

> Eğer, birbiri ardına beş nokta ….. koyarsam, beş sayısının imgesine sahip olurum. Buna karşı, genel olarak yalnızca bir sayıyı düşünecek olursam, bu sayı beş ya da yüz olsun, bu düşünme, imgenin kendisinden çok, belirli bir kavrama göre bir çokluğu (küme) temsil etmektir. Örneğin bin sayısı imgenin kendisinden daha çok, belli bir kavramla uygunluğunda bir imgede tasarımlanabilir. Çünkü böyle bir sayı için imgeyi ancak güçlükle göz önüne getirebilir ve kavram ile karşılaştırabilirim (Kant, 1998: A140/B179).

Friedman da, aritmetik şemanın geometrik şemadan farkını aritmetik şemanın soyut olmasına vurgu yaparak açıklar. "Özellikle aritmetiksel yapılar geometrik yapılara benzemezler, aritmetik için uzayın tasarımının önceden farzedilmesi gibi bir yol

yoktur. Tıpkı geometride olduğu gibi, her durumda böyle şemalar imgelerden keskince ayırt edilmelidir" (Friedman, 1994: s. 124). Şemaların kavrama imge sağlamak gibi bir işlevinden dolayı, imgeler şemalar aracılığıyla kavramlara bağlanırlar. "Hayal gücü görünün *manifold*unu bir imgenin içine taşımak zorundadır" (Kant, 1998: A120). Kant'ın ileri sürdüğü gibi *manifold*lar imgenin biçimi içerisine taşınmakta ve şemalara sunulmaktadır. Şemalar yoluyla kavramlara imgelerin sağlanması, kavramların temsillere uygulanmasını olanaklı kılmaktadır. Friedman'a göre "şema, saf görü ile matematiksel kavramlar arasında özel bağlantıdır. Şemaların kendileri matematiksel kavramlar için nesneler değildir. Böyle nesneler şemada değil, sadece empirik görüde ve imgede bulunur, yani nesneler empirik görüye aittir" (Friedman, 1994: s.125). Yine Friedman saf görünün matematiksel şemalarının iki tür işlevi olduğuna işaret eder. Bunlardan biri "saf matematiğin kavramlarının oluşması için hizmet etmektir, diğeri de oluşan bu kavramlara imgeler üretmektir" (Friedman, 1994: s. 129). Şemanın işlevi Kant'ın diliyle söylenecek olursa, "eğer hayal gücünün bu faaliyeti eksik kalırsa, tüm altına alma ortadan kalkar, çünkü kavram altına alınabilecek hiçbir şey verili değildir" (Kant, 1998: A247/B304). Hiçbir şey verili değilse böylelikle bilginin oluşumu da tamamlanamaz. Çünkü anlama yetisinin işi yalnızca verili olanın sentezi ile ilgilenmektir. Tezimizin konusu, aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olarak olanaklılığını araştırmak olduğu için, bu bilgilerle bağlantılı olarak hayal gücünün üretici yanını, transandantal şema ve düşünme edimlerinin işlevlerini izleyen başlıklar altında açıklamaya çalışacağız.

1.2.7.2. Sayının İnşasındaki Rolleriyle "Transandantal *Apperception*" Saf Düşünme Edimi, "Saf Ben" ve "Transandantal Şema"

Çalışmamızın önceki bölümlerinde de değindiğimiz gibi, hayal gücü, hissetme yetisiyle (duyusallıkla) düşünme edimleri arasındaki bağlantıyı kurma gibi bir aracı görevi yerine getirmektedir. Görülebilir olanın idrâk edilebilmesi için hayal gücünün böyle bir işlevine ihtiyaç vardır. "Hayal gücü görüde mevcut olmayan nesnenin görüsel karşılığını görüde temsil eden bir yetidir" (Kant, 1998: B151). Bir başka deyişle, hayal gücü hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen malzemeyi (artık bu malzeme duyumun malzemesi değildir) kendi kalıplarına (şemalara) dökmesiyle görülebilir olanın idrâk edilmesini olanaklı kılar. Şemanın, hissetmenin empirik unsurları ile kategorileri bağlayan bir form olduğu, transandantal şemanın ise hissetmenin (duyusallığın) *a priori* unsurları ile kategorileri birbirine bağladığı daha önce belirtildi. Buradan da anlaşıldığı gibi, herhangi bir nesnenin tesis edilebilmesi için Kant'ın "şema" olarak adlandırdığı düzenleyici formlara ihtiyaç duyulmaktadır. Matematiğin en temel nesnesi olan sayının inşası için de, "saf ben" mekânında birlik verilen saf temsillerin, anlama yetisinin *a priori* kavramlarının altına gelmesini sağlayan transandantal şemalardır. Bu yanıyla üretici hayal gücü transandantal şemalar aracılığıyla *a priori* bir nesne olan sayının formunu bilince taşıyarak temsil edilmesine olanak sağlamaktadır.

Şimdi, hayal gücünün iki farklı faaliyetinden biri olan "üretici hayal gücü"nün "saf ben"in tesisinde aldığı rolü burada açmaya çalışalım. Hayal gücünün "yeniden-üretici" ya da "yeniden-üretici sentezlemesi" olarak adlandırılan faaliyetiyle tekil

görünün bir araya getirilmesi sağlanır. Burada "yeniden üretim"i Gözkân, "(...) zaman *manifold*unda iz bırakanların canlandırılması ve kavramla sabitlenmesi" (Gözkân, 2013: s. 326) biçiminde tanımlamaktadır. Başka bir ifadeyle, "yeniden-üretici hayal gücü", hissetme yetisiyle (duyusallıkla) anlama yetisi arasındaki bağlantıyı sağlayarak görüsel karşılığı olan temsillerin bir araya getirilmesini mümkün kılar. Gözkân'ın deyişiyle, "(...) hayal gücünün yeniden-üretici faaliyeti, duyusal temsilleri görü mekânında canlandırır" (Gözkân, 2013: s. 332). Yani hayal gücünün bu faaliyetiyle; hissetme yetisiyle (duyusallıkla) edinilen temsiller kalıplara dökülerek canlandırılır, birbirine bağlanır ve anlama yetisinin saf kavramlarının altına alınarak nesnenin tesis edilmesine olanak sağlanır. Böyle bir faaliyet, yukarıda sözünü ettiğimiz "şema"lar yoluyla gerçekleşmektedir. Şemalar olmadan anlama yetisinin kategorileri görüsel karşılıkları temsil edemezler. Hayal gücünün bu faaliyetiyle kategorilerin, hissetmenin malzemesine yönelik bir işleyişi gerçekleştirerek deneyimi tesis ettiğini görüyoruz.

Hayal gücünün "üretici-faaliyeti" ya da "üretici-sentezlemesi" olarak adlandırılan yanının saf görü olarak saf temsillerin canlandırılmasına, sentezlenmesine yönelik bir faaliyet olduğunu anlıyoruz. Hayal gücünün bu faaliyetinde hissetme yetisinden (duyusallıktan) herhangi bir malzeme gelmediği için, yeniden üretimden farklı olduğunu ve bu faaliyetin işlevinin "saf ben" mekânında saf temsilleri canlandırmak olduğunu anlamaktayız. Bir başka deyişle, hayal gücünün üretici faaliyeti hissetmenin bu *a pirori manifold*unun bütününü canlandırmaktadır. Hayal gücünün üretici faaliyetini Gözkân şöyle ifade eder:

> Hayagücünün üretici faaliyeti ise, asli düşünme fiilinin hissetmenin saf temsillerine yönelmesinin aracısı olarak, bu yönelmeyi canlandırmak suretiyle "saf ben"i canlandırmakta, dolayısıyla da saf temsilleri "saf ben" mekânında canlandırmaktadır. "Hayalgücünün canlandırma faaliyetini akledilebilir kılmak için, *Apperzeption*'un zemine alınması gerekir" (A124). Saf temsiller de saf görü olarak tekil temsillerdir, ama bunların canlandırılması, duyusal temsillerin tek bir ortak temsilde (kavram olarak) tutulmalarından, yani parçadan bütüne gidilmesinden farklı olarak, bütünün parçaya önceliği olduğu tekil saf temsillerin canlandırılmasıdır. Hayal gücü, saf temsilleri kendiliğinden canlandıramayacağından, bu saf temsilleri, onları birlik içinde tutan bir düşünme fiili dolayımıyla canlandırabilir. Saf temsillerin canlandırıldığı bu mekân "saf ben"dir (Gözkân, 2013: s. 332).

Kant'a göre hayal gücü bir idrâk yetisi değildir. Dolayısıyla *a priori* görü formları olan uzay ve zamanın birliğinin canlandırılabilmesi, idrâk edilebilmesi için bir düşünme edimine ihtiyacı vardır. Hayal gücünün, düşünmeyi, hissetme yetisine (duyusallığa) yöneltmesi sonucunda tüm deneyimin mekânı olan "saf ben" tesis edilmiş olmaktadır. Buradan, "saf ben"in tesisinde hayal gücüyle birlikte bir düşünme ediminin katkısının olduğunu görmekteyiz. Bu düşünme edimini açmadan önce Kant'ın düşünmeyi nasıl tanımladığına bakalım.

Kant, düşünmeyi *Prolegomena'*da ve *CPR*'de şu şekilde tanımlar: "Düşünmek ise, tasarımları bir bilinçte birleştirmektir. Bu birleştirme ya sırf özneyle ilgili olarak ortaya çıkar, o zaman da raslantısal ve özneldir, ya da nasıl oluyorsa olup biter, o zaman da zorunlu veya nesneldir. Tasarımların bir bilinçte birleştirilmesi yargı olur. Demek ki düşünmek, yargıda bulunmaktan veya genel olarak tasarımları yargılarla ilgi içine sokmaktan başka bir şey değildir" (Kant, 2002: §22), "Verilen görüyü bir görüsel karşılığa bağlayan edimdir" (Kant, 1998: A247/B304), "Düşünme, kavramlar

aracılığıyla bilgidir" (Kant, 1998: A69/B94). Kant'ın düşünmeye ilişkin yaptığı bu tanımların görüsel karşılığın tesisiyle ilgili olduğu ve Kant'ta görüsel bir karşılığı düşünmenin ise, sadece kategorilerle olanaklı olduğu söylenebilir. Bu tanımlardan da anladığımız gibi Kant, malzeme olmadan hiçbir şeyin düşünülemeyeceğine işaret etmektedir. Fakat, Kant'ta düşünmenin her türlü deneyimi aşan bir boyutu da bulunmaktadır. Düşünmenin bu boyutu deneyimi olanaklı kılan mekânın oluşturulmasıyla ilgilidir. Gözkân düşünmenin bu yanını şu şekilde ifade etmektedir:

> (...) bu sözü edilen yanı itibariyle düşünme, hiçbir deneyim nesnesinin tesisine yönelik olmamakla birlikte, deneyimin olanağını sağlayan mekânı tesis eden ve o mekânda icra edilen fiillere esas olan unsurları birlik içinde tutan bir fiildir. Düşünmek, temsilleri bir bilinçte birleştirme faaliyeti olduğuna göre (§22) temsillerin verilmiş olması gerekir; ancak temsillerin birliği, temsillerin kendilerinden gelmez. İşte, (...) asli bir fiil olan transandantal *Apperzeption* fiili, bu birliğin ve birleştirmenin kaynağı olan böyle bir düşünme fiilidir (Gözkân, 2013: s. 326).

Hissetme yetisinden (duyusallıktan) hiçbir malzeme gelmeden düşünmenin idrâk etmek üzere bir şeye yönelmesi, Gözkân'ın deyişiyle düşünmenin "kendiliğinden faal yanı"dır. Düşünmenin bu faaliyeti, saf temsillerin birleştirme işlemine kaynak oluşturan bir düşünme edimi aracılığıyla mümkündür. İşte bu düşünme edimi, içinde hiçbir *a posteriori* malzemenin bulunmadığı saf bir edim olan, transandantal *apperception* edimidir. Kant, 26 Mayıs 1789'da Marcus Herz'e yazdığı mektubunda anlama yetisi ve transandantal *apperception* edimi arasındaki ilişkiye değinir. Bu mektubunda anlama yetisinin özel bir yeti olduğunu ileri sürer ve "(...) anlama yetisini genel olarak (görümüzün en berrak bilincinin bile tamamen açığa

kavuşturamayacağı) bir nesne kavramına atfediyorum. Yani anlama yetisine *"apperception"*nın [özbilincin] sentetik birliğini atfediyorum" (Kant, 1967: s. 152) demektedir. Kant, burada transandantal *apperception* edimini bir sentetik birlik olarak tanımlar ve bu sentetik birlik sayesinde görü (*intuition*) katmanının bileşik bir bilinç içerisinde genel olarak bir nesnenin temsili olarak sunulduğuna işaret eder. Kant, yine *apperception'*ı; *Prolegomena'*da "(...) anlama yetimizin ve onunla bütün düşünmenin temelinde bulunan zorunlu bilinç yeteneği (...)" (Kant, 2002: §36), *CPR'*de ise "insan bilgisinin tüm alanı içindeki en yüksek ilke" (Kant, 1998: B135), "tüm bilgimizin temelindeki yeti" (Kant, 1998: A114) biçiminde tanımlar. İdrak edenin kendini idrâk etmesi anlamına gelen transandantal *apperception*, "özbilinç" ya da "kendinin bilinci" terimleriyle ifade edilebilir. Buradan *apperception* ediminin bir görü edimi olmadığını, zemin bakımından uzay ve zamandan öncelikli olduğunu, uzay ve zamanın koşullarına tâbi olmadığını ayrıca uzay ve zamanı birlik içinde tutarak hissetme yetisini (duyusallığı) etkin hale getirdiğini anlıyoruz. Böyle bir işlevinden dolayı Kant, *apperception* ediminin "bilincin sentetik birliğini sağlamasından dolayı tüm bilgiler için nesnel bir koşul olduğunu" (Kant, 1998: B137-B138) ileri sürmektedir.

Saf bir düşünme edimi olan *apperception*'nın anlama yetisi gibi ortak temsillerin birliğini sağlayarak nesnenin tesisini mümkün kılan bir düşünme edimi olmadığını, tersine bütünün idrakini olanaklı hale getirdiğini söyleyebiliriz. Daha önce de işaret etmeye çalıştığımız gibi üretici hayal gücü saf kavramla saf görü arasında faaliyet göstererek saf temsilleri canlandırıyordu. "Üretici hayal gücünün bu canlandırma işlemini yapması için *apperception* edimini zemine alması gerekiyor" (Kant, 1998: A124). Transandantal *apperception* düşünme ediminin hissetmenin *a priori* formları

olan uzay ve zamanı bir arada tutmasında, bu *a priori* formlara birlik verme işleminde üretici hayal gücünün aracı olduğunu anlamaktayız. Görüldüğü gibi hayal gücünün üretici faaliyetinin saf temsillere yönelmesinin temelinde *apperception* edimi olduğu ortaya çıkmaktadır.

Apperception bir görü değildir, uzay ve zamanın koşullarına tâbi olmayan, aynı zamanda uzay ve zamanın koşullarına zeminsel olarak da öncelikli bir edimdir. Ancak *apperception* sayesinde hissetme yetisinin (duyusallığın) birliği ve etkinliği mümkün olabilir. Bu edimin temsillere birlik verilebilmesi için öncelikle kendi birliğini idrâk etmesi gerekir. "İdrâk edilenlerin bir birlik olarak idrâk edilmeleri, ancak onları bir birlik olarak idrâk edenin kendisinin, kendi birliğini onlara öncelikli olarak idrâk edebilmesiyle mümkün. Başka bir deyişle, idrâk eden kendi birliğini idrâk etmeden, idrâk edilenlere birlik veremez; ya da idrâk edilenlerin birliğinin koşulu, idrâk edenin kendi birliğini idrâkından geçer" (Gözkân, 2013: s. 334). Sentetik bir edim olan *apperception* ediminin, bir bütün olan "saf ben"i tesis edebilmesi için, parçalarından önce bir bütün olarak kendini idrâk etmesi gerekmektedir. Anlaşılacağı gibi transandantal *apperception* düşünme edimi uzay ve zamanın birliğini olanaklı kılan bir edimdir. Bu birliğin sonucunda da bir mekân olarak "saf ben" tesis edilmektedir. Bu yönüyle "saf ben", transandantal *apperception* ediminin birlik verme sonucunda oluştuğu bir mekân olarak, "birliğin bilinci" olmaktadır. "Saf ben" hissetmenin *a priori* formları olan uzay ve zamanın sentetik birliğini sağlamaktadır. Deneyimi oluşturan bütün edimlerin mekânı olması özelliği ile "saf ben", hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen temsillere birlik vererek görüsel karşılığı tesis eder. Ayrıca "saf ben", tikelin tümel altına konmasına ve aklın mantıksal çıkarımlar yapmasına imkân sağlaması bakımından bütün

düşünme yetilerinin mekânıdır. Bu bakımından "saf ben" deneyimi ortaya çıkardığı gibi *a priori* tümel nesnenin tesisini de olanaklı kılar. Tezimizin izleyen sayfalarında transandantal *apperception* edimiyle, "saf ben" ve "yargı" ilişkisini açıklamaya çalışacağız.

Transandantal felsefede insanda "entelektüel görü" yoktur, "duyusal görü" vardır. Bu şu anlama gelir; hissetme yetisi (duyusallık) olmaksızın bilginin oluşumu imkânsızdır. "Saf ben", *a priori* veya empirik her türlü bilginin transandantal koşuludur. Kant'ta "saf ben", zamana tâbi değildir. Akan zaman içinde "ben"in değişmesine rağmen, "saf ben" değişmemektedir. "Saf ben", transandantal *apperception* ediminin uzay ve zaman saf görülerinde bulunan *a priori manifold*lara bir birlik vermesiyle ve üretici hayal gücünün transandantal sentezlemesi yoluyla tesis edilmektedir. "Saf ben" akli bir mekândır, "düşünüyorum*"* edimi de "saf ben"in bir edimidir. Deneyimin oluşması bakımından hissetme yetisinden (duyusallıktan) malzeme gelmesi gerekirken, "saf ben"in oluşması için düşünmenin hissetme yetisine (duyusallığa) yönelmesi gerekir. "Saf ben" bütün yargıların, bilmenin ve bilginin ön koşuludur. "Saf ben"in oluşmaması halinde yargının ortaya çıkamayacağı için bilginin oluşması da olanaksızdır.

> Kendisi dışındaki diğer her şeyi salt duyularıyla bilen insan, kendisini de saf ben bilinciyle bilir; bu bilinçse duyuların izlenimlerinden gelen bir bilinç değil, onun eylemlerinden ve içsel belirlenimlerinden kaynaklanan bir bilinçtir. Dolayısıyla insan, bir yandan kendisine fenomen olarak diğer yandan da hissetme kapasitesine

> ait olmayan bazı yetileri nedeniyle kendisine salt düşünülür *(entelektüel)* bir nesne olarak görünür (Kant, 1998: A546-7/B574-5)[6].

Görüldüğü gibi, transandantal felsefede "saf ben bilinci" biçiminde de tanımlanan "transandantal ben bilinci/transandantal *apperception* (algılayanın kendini idrâk etmesi)" daha çok epistemolojik yönüyle ön plana çıkmaktadır. Başka bir deyişle "saf ben bilinci" görüden gelen malzemenin sentetik birliğinin kaynağı olarak bilginin oluşmasında çok önemli bir rol üstlenmektedir.

> Tüm görü verilerini önceleyen ve tüm nesnelerin temsillerinin ancak onunla ilişki içerisinde bulunmasıyla mümkün olduğu bu bilincin birliği olmasaydı hiçbir bilgi, bilgiler arasında hiçbir bağlantı ya dairlik mümkün olmazdı. İşte ben bu değişmez, saf, orijinal bilince transandantal ben bilinci [*transcendental apperception*] adını veriyorum (Kant, 1998: A107).[7]

Kant'ta transandantal *apperception* edimi tüm deneyimi önceler ve deneyimin mümkün olması için mekân hazırlar. Bu bakımdan *apperception a priori* ya da *a posteriori* bilginin ön koşuludur. Hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen temsillerin bir yargı içinde nesneye dönüşebilmesi için birleştirilmesi ve birlik verilmesi gerekmektedir. Çünkü yargı, çokluğa birlik vermektir. Birlik verme işlemi olmadığı sürece bilginin oluşması da imkânsızdır. Kant'ın diliyle söyleyecek olursak:

[6] Bu alıntının çevirisi ve vurgusu, Şahabettin Yalçın'a aittir (Yalçın, 2010: s. 94). İngilizce metin ile karşılaştırılarak alınmıştır.
[7] Bu çeviri, İngilizce metin ile karşılaştırılarak Şahabettin Yalçın' dan alınmıştır (Yalçın, 2010: s. 98).

> Bir görüde verilen farklı temsiller, eğer tek bir ben bilincine ait olmazlarsa o zaman bunların birlik kazanabilmeleri ve *benim* olabilmeleri mümkün değildir. *Benim* temsillerim olarak bunlar, ancak tek bir evrensel ben bilinci altında birliğe sahip *olabilirler,* zira aksi takdirde bunların istisnasız bana ait olmaları imkânsızdır (Kant, 1998: B132/B133).[8]

Transandantal *apperception* edimi anlama yetisinin zemininde olması bakımından bütün yargıların oluşmasını mümkün kılar. Aksi takdirde yargıların oluşması imkânsız olacaktır. Bilginin malzemesi olan temsillere birlik verilmesi için, bu temsillerin tek ve kalıcı bir bilinçte birleştirilmesi gerekmektedir. İşte bu edim "saf ben"i kurarak temsillerin (*representation*) birliğini sağlar. Temsillere birlik verilmesiyle nesnenin kurulacağı mekân da hazırlanmış olur. Buradan da anlaşıldığı gibi "saf ben" transandantal düşüncenin başlangıç noktasıdır.

> *Apperzeption* fiili, koşulların zemini olan ve koşullar itibarıyla temsillerin birbirine bağlanıp, birleştirildiği ve birlik verildiği mekânı kuran fiildir. Bu mekân "düşünen öznenin" bağlayıp, birleştirme, terkip etme faaliyetini icra ettiği "saf ben" mekânıdır, "saf ben"in deneyime öncelikli olan birliği, her deneyime ait görüsel karşılığın terkip ve kuruluşunun öncelikli koşuludur. Uzay ve zaman koşullarına tâbi olmayan, ancak kendisi bu koşulları kuşatan ve onlara birlik veren "saf ben" ise koşulsuzdur (ne uzay içindedir, ne de zamana tâbidir) (Gözkân, 2002: s. 60).

İşte bütün bunlardan *apperception* edimiyle hiçbir koşula tâbi olmayan "saf ben" mekânının kurulmuş olduğunu anlamaktayız. Ayrıca bu edimin, aklın bir edimi olmadığını, üstelik aklın da kuruluşunda rol oynadığını fark ediyoruz. Sentetik bir

[8] Bu çeviri, İngilizce metin ile karşılaştırılarak Şahabettin Yalçın'dan alınmıştır (Yalçın, 2010: s . 99).

edim olan transandantal *apperception* edimi hissetme yetisiyle (duyusallıkla) edinilen temsillerin bir birlik içerisinde tutulmasını ve bu temsillerin "saf ben"e ait olmasını mümkün kılmaktadır. Transandantal *apperception* ediminin bu birliği, nesnenin sentetik birliğinin kaynağıdır. "Saf ben" *a priori manifold*un mekânıdır ve aynı zamanda birlik kategorisinin de zeminidir. Transandantal felsefede mekân olmadan temsil olamayacağı gibi, temsil faaliyeti olmadan da mekân olamaz. Dolayısıyla mekân, nesnenin tesis edilmesine imkân sağlar. Koç'un deyiş biçimiyle "'Mekân'ı, 'nesne'nin meydana gelmesine imkân veren bir 'zemin' olarak düşünebiliriz" (Koç, 1994: s. 14).

Özetle, "saf ben"in anlama yetisinin zemininde olması bakımından her türlü yargı ediminin ortaya çıkmasına olanak sağladığı açıktır. Yargı birliği de dahil, bütün sentezlerin kaynağı ise transandantal *apperception* edimidir. İşte bu edim "saf ben"i kurmaktadır. Transandantal düşüncede "saf ben"; "hissetme yetisi (duyusallık)", "hayal gücü" ve "düşünme yetisi" olmak üzere üç temel yeti aracılığıyla deneyim de dahil her türlü bilginin oluşmasına olanak sağlayan mekândır. Dolayısıyla "saf ben" deneyimden elde edilemez. Gözkân "saf ben" ile deneyim arasındaki ilişkiyi şöyle ifade eder:

> Transandantal düşüncede, hem deneyimin, hem de her türlü kavrama ve akıl faaliyetinin zemininde olan "saf ben"dir; "saf ben" ise hissetme yetisinin formlarının, yani uzay ve zamanın sentetik birliğinin idrâkidir. Bu bakımdan "saf ben", hissetmenin saf formlarını, yani transandantal ideal olanları kuşatmaktadır. "Saf Ben"in idrâki, dışsal deneyimin edinilmesine yöneliktir ve her türlü deneyimin zemininde olduğundan kendisi deneyimden gelen bir idrâk değildir. "Saf ben",

deneyime birliğini ve bütünlüğünü vermesi itibariyle kategorilerin ve aklın idealarının da asli mekânıdır (Gözkân, 2002: s. 72-73).

Kant'ta her türlü bilginin oluşumunda bilinç etkendir. Bilinç olmadan kavramlar, yargılar ve onlarla birlikte nesnelerin bilgisi de bütünüyle olanaksız olacaktır. Matematiğin yargılarının da içinde olduğu bütün yargıların birliğinin kaynağı da "özbilinç"tir, yani transandantal *apperception* düşünme edimidir.

1.2.7.3. Akıl Bilgisi Alanları Olarak Felsefe-Matematik Farklılığı ve Sayının İnşası

Sayı, Antikçağdan beri filozof matematikçilerin ya da matematikçi filozofların ilgi odağı olmuştur. Pythagorasçıların, her şeyi tamsayılarla ilişkilendirdiklerini ve varolanların başlangıcını, yani "*arkhe*"sini tamsayı olarak gördüklerini biliyoruz. Platon, diyaloglarında insanın gerçek varlığa ulaşmasında aritmetiğin öneminden söz ederek devletin işini yapan kimselerin bu bilimi öğrenmesinin gerekliliğini ileri sürer. Antik Yunan'da matematiksel bilgi kesinliği olan bir bilgi türüdür. O dönemde, özellikle geometrinin, entelektüel düşüncenin merkezinde yer aldığını söylemek mümkündür. Eukleides, ünlü kitabı *Öğeler*'de (*Elements*'de) temel geometrik aksiyomları sistematik bir biçimde bir araya getirmiştir. Eukleides'in bu önemli kitabı batı [Batı] düşüncesinin literatüründe önemli bir yer alarak bilimsel düşüncenin gelişmesine büyük hizmet etmiştir.

Antikçağdan günümüze kadar matematik ve felsefe birçok konuyu ortaklaşa nesne edinmiştir. Filozof matematikçiler ya da matematikçi filozoflar matematiğin bilgisini insanoğlunun sahip olduğu en kesin ve en doğru bilgi olarak gördüler. Filozoflar, "Matematiksel bilgi nereden geliyor?", "Matematik ne şekilde, nasıl ve ne derecede dünyaya uyum gösteriyor?", "Matematiğin en temel nesnesi olan sayı nasıl ortaya çıkıyor?" gibi sorularla, matematiğin temel kavramlarını ve neliğini soruşturarak onu felsefelerinde bir yere oturtmaya çalışmışlardır. Galileo, "Evren matematiğin dili ile yazılmıştır; harfleri üçgen, çember ve diğer geometrik nesnelerdir. Bunları bilmedikçe onun bir sözcüğünü bile anlayamayız. Matematiğin dilini bilmeyen için evren içinden çıkılmaz karanlık bir labirent gibidir" (Yıldırım, 2005: s. 45) demektedir. Bilim dallarının Rönesansla başlayıp günümüze kadar devam eden gelişiminde matematiğin çok önemli bir katkısı vardır. Matematik, bir yandan insanın ihtiyaç duyduğu kimi bilgileri edinmek için bir araç olarak kullanılırken, diğer taraftan da özellikle bilimlerin en önemli ve sağlam dayanağı olmuştur. Matematik olmadan bilimsel alanda bir şey yapmak imkânsız hale gelmiştir. Bu tür işlevi bakımından matematik bilim çevrelerine göre doğanın ya da doğa bilimlerinin dilidir. Günümüzde başta teknoloji olmak üzere hemen hemen her bilim ya da disiplin matematiğin işlevsel ve sağlam bilgisinden faydalanır. Başka bir deyişle matematik; evrensel, zorunlu, kesinliği olan yargılar alanı olarak ve insanın bilgisini genişletmesi gibi bir görevi üstlenerek insan yaşamına yeni olanaklar kazandırmaktadır. Matematik, bilimlerin gelişmesine çok büyük katkı sağlaması bakımından aynı zamanda insana da yeni olanaklar kazandırmaktadır. İnsanın yaşamında vazgeçilmez bir yeri olan matematiğin, bilimsel bulguları ifade etmede de "ideal bir dil" ve "bir çıkarım aracı" olarak çok büyük iki işlevinden söz edilebilir. Bu önemli işlev iki biçimde kendini göstermektedir: "(1) Matematik, bilimsel bulgu

ve yasaları açık, kesin ve kısa ifade etmek için ideal bir dil işlevi görür; (2) Matematik bilimsel hipotez veya teorilerin doğrulanma işlemi için gerekli gözlenebilir sonuçları ortaya çıkarmada vazgeçilmez bir araçtır" (Yıldırım, 2005: s. 43).

Matematik, bilim ve insan için çok önemli ve vazgeçilmez bir disiplin olduğuna göre matematiğin neliğine ilişkin sorulara yanıt aramak, bu soruların yanıtlarını bulmakta felsefenin, dolayısıyla da matematik felsefesinin görevleri arasındadır. Başka bir anlatımla, matematik felsefesinin başlıca görevi "Matematiğin temelini oluşturan sayılar nasıl oluşur?" ya da "Matematiğin önermeleri ne tür yargılardır?" gibi soruların cevabını araştırmak, matematiğin ne olduğunu felsefi dilde açıklamak ve aydınlatmaktır. Tezimizin bu başlığı altında Kant'ın görüşlerini temel alarak, önce iki akıl bilgisi alanı olan matematik ve felsefe arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları bilgi kuramsal açıdan ortaya koymaya çalışacağız, sonra da matematiğin en basit, en temel nesnesi olarak kabul edilen "sayma sayıları"nın (*counting numbers*) oluşumunu açıklamaya girişeceğiz. Bu doğrultuda ilerlemeye çaba gösterirken genelde matematiğe, özelde de aritmetiğe ilişkin temel tanımların açık kılınması için gayret göstereceğiz.

Kant'ın ileri sürdüğü gibi, matematiksel yargılar deneyimi temel almayan, evrensel, zorunlu, kesin ve bilgimizi genişleten yargılardır. "Matematik deneyimin desteği olmaksızın başarılı olarak kendiliğinden genişleyen saf aklın en parlak örneğini verir" (Kant, 1998: A712/B740) der Kant. Kant, hem matematiği hem de felsefeyi akıl bilgisi alanları olarak tanımlamaktadır. Buradaki "akıl bilgisi"nin, teorik aklın

kullanımında yer alan üç temel yetinin yani, hissetme yetisi (duyusallık), hayal gücü ve düşünme yetilerinin ayrı ayrı rolü sonucunda oluşan *a priori* bilgi olduğunu biliyoruz. Çalışmamızın ilerleyen sayfalarında, sayının inşasında yer alan bu yetilerin rollerini aydınlatmaya çalışacağız. Her ikisi de akıl bilgisi olmakla birlikte "felsefi bilgi kavramların akıl bilgisi iken, matematiksel bilgi kavramların inşasından [*construction*] akılla elde edilen bilgidir" (Kant, 1998: A713/B741).

Hem felsefenin hem de matematiğin akıl bilgisi olmalarına karşın, matematiksel bilgi ile felsefi bilgi arasındaki "özsel ayrım"ı Kant şu şekilde ortaya koymaktadır: "Felsefi bilgi tikeli [*particular*] yalnızca tümelde, matematiksel bilgi ise tümeli tikelde ya da giderek bireysel olanda [*individual*] ve gene de *a priori* akıl aracılığı ile irdeler" (Kant, 1998: A714/B742). Matematikte önermelerin, teoremlerin doğruluğu tek tek durumların doğruluğunun gösterilmesiyle mümkündür. Örneğin sayılar kuramında "Gauss Metodu" olarak bilinen "1"den "n"ye kadar ardışık sayma sayılarının toplamı; "n" sayısının bir fazlasıyla çarpımının yarısına eşittir. Bu metodun güvenilirliği, ardışık olarak verilen her sayı dizisi için doğrulandığı ölçüde mümkündür. Aksi takdirde "Gauss Metodu" genel bir önerme olarak kabul edilemez. Felsefe ve matematik arasında farklılıklar olsa da "(...) felsefi bilgi tıpkı matematik gibi büyüklükleri irdeler. Örneğin; bütünlük, sonsuzluk vb. gibi. Matematik, ayrıca değişik niteliklerdeki uzaylar olarak çizgilerin ve yüzeylerin ayrımıyla ve niteliklerinden biri olarak uzayın sürekliliğiyle de ilgilenir" (Kant, 1998: A715/B743). Bu tür ortak özelliklerinin bulunmasına rağmen, her ikisini de aklın alış yolu bütünüyle başka türlüdür. "Felsefe kendini yalnızca evrensel kavramlarla sınırlarken, matematik ise salt kavramlar yoluyla hiçbir şeye ulaşamaz" (Kant, 1998: A715/B743). Kant, matematik-felsefe ayrımını ortaya koyduğu gibi, filozof-

geometrici farkına da değinir. O, filozofu kendi yolunda kavramlara göre ilerleyen, geometriciyi ise kavramlar ile uyum içinde düşünme yetileriyle birlik kazandırdığı *a priori* görüye göre ilerleyen iki akıl sanatçısı olarak görür. Kant'a göre bu iki akıl sanatçısından biri olan filozof, matematiksel kavramlar üzerinde düşünse bile yeni kavramlar üretemez, diğeri olan geometrici ise görüden çıkarsamalar zinciriyle geometrik ispatları yapar (Kant, 1998: A716/B744). Kant *Logic'*te matematiğin felsefeye göre avantajının olduğuna işaret etmektedir. Bu avantajı da, sayının görüde *a priori* olarak kurulduğuna işaret ederek açıklar.

> Matematikçi yalnızca kavramlar üzerine düşünen akıldan faydalanamaz. Felsefeci de kavramların inşası üzerine düşünmekten fayda sağlayamaz. Burada görülüyor ki matematiğin felsefeye göre bir avantajı vardır. Matematiğin bilgileri görüsel iken felsefenin bilgileri mantıksal olarak çıkarımsaldır (*discursive*). Matematiğin niceliklerle ilgilenmesinin sebebinin kaynağı da budur. Çünkü nicelikler ancak görüde *a priori* olarak oluşturulabilirler (Kant, 1974: s. 27).

Kant, her ne kadar matematiğin sağlamlılığına, avantajlı ve akıl bilgisi olmasına işaret etse de, felsefe için, "kendini matematiğin unvan [*title*] ve nişanlarıyla [*ribbons*] süslemek felsefenin doğasına yakışır bir şey değildir. Çünkü onun düzenine ait değildir, üstelik onunla kardeşçe bir birleşmeyi umabilmek için her türlü gerekçesi olsa bile" (Kant, 1998: A735/B763) demektedir. Kant, satır aralarında aklın matematik aracılığıyla büyük başarı gösterdiğini ileri sürer, fakat matematikçilere olan sitemini de esirgemez. Kant'a göre matematikçiler, uzay ve zamanın matematiksel nesnelerin inşasındaki rolünü düşünmezler, dolayısıyla saf aklın kavramlarının kökenlerini araştırmak onlara yararsız görünür. Buna karşın matematikçiler, matematiğin eriştiği bilgi düzeyi içerisinde güvenli bir şekilde

ilerlemeye devam ederler. Kant, burada matematikçilerin, matematiksel bilginin oluşumuna ilişkin ilgisizliği üzerinde dururken matematiğin sağlamlığına da işaret ederek "Matematiğin sağlamlığı tanımlar, aksiyomlar ve ispatlar [*demonstrations*] üzerine dayanır" (Kant, 1998: A726/B754) demektedir.

Kant'a göre kavramların tanımları yalnızca matematikte söz konusu olabilir. Çünkü matematiksel nesnelerin malzemesini oluşturan saf *manifold* görüde *a priori* olarak sergilenirler. Kant, matematikteki tanımlarının sentetik olarak üretildiğini ve matematiksel tanımların kavramları türettiğini, buna karşın felsefedeki tanımların ise verili kavramların açımlamaları olduğunu ileri sürmektedir (Kant, 1998: A730/B758). Kant, felsefe ve matematik arasındaki temel farkı anlatırken felsefede olmayan, fakat matematiğin sağlamlığını, kesinliğini ve evrenselliğini gösteren "*demonstrations*" dediği ispatlara (*proof*'a) vurgu yapmaktadır. Kant'a göre felsefe, yalnızca kavramların uyumundan oluşan akıl bilgisi olmasından dolayı felsefede aksiyom gibi hiçbir ilke yoktur. Matematik aksiyomatik bir sistem üzerine kurulmuştur. Aksiyomlar, ispatlanmaksızın doğru kabul edilen temel önermelerdir. Teoremler ise ispat edilen önermelerdir. Teoremlerin doğru olabilmesi için aksiyomların doğru olması gerekir. Matematikte teoremlerin sağlam bir mantıkla ispatlanmış ve doğruluğunun kabul edilmiş olması sonucunda, bu bilgi alanının teoremler üzerine kurulu sağlam bir disiplin olduğunu söyleyebiliyoruz. Kant'a göre "yalnızca apodiktik bir ispat [*proof*] görüye dayandığı sürece ispat olarak adlandırılabilir" (Kant, 1998: A734/B762). Matematikteki ispatların felsefede olmaması felsefeyi bu üstünlükten yoksun bırakmaktadır. Üstelik matematik, ispatlar üzerine kurulduğu için sağlam bir zemin üzerindedir. "(...) matematik ispatlar [*demonstrations*] içerir. Çünkü bilgisini kavramlardan değil ama kavramların

inşasından, yani kavramlar ile uyum içinde *a priori* verilebilen görüden türetir" (Kant, 1998: A734/B762).

Matematik felsefesi; teoremler, ispatlar ya da matematik problemleriyle uğraşmaz, matematiksel nesnelerin nasıl inşa edildiğini konu edinir. Transandantal felsefede nesnenin bağlı bulunduğu ontolojik mekânın gösterilmesi, onun bilgisinin ortaya konmasında belirleyicidir. Kant'a göre matematiksel nesneler, kavramlar ya da önermeler insanla birlikte doğuştan gelmez, insanlar tarafından "diskursif" ve *a priori* olarak inşa edilirler. Kant'ta nesne ve bağlı bulunduğu ontolojik zeminin önemine kısaca değindikten sonra, şimdi "Matematiğin en basit ve temel nesnesi olan sayı nasıl oluşur?" sorusuna, Kant'ın aritmetik felsefesi temelinde yanıt aramaya çalışalım.

Daha önce Kant'ın epistemolojisinde "entelektüel görü"nün yerinin olmadığını, "duyusal görü"nün ise bilginin oluşum aşamasında ilk adım olduğunu belirtmiştik. Konu ile ilgisi açısından, burada bunu tekrar etmeyi gerekli görmekteyiz. Duyusal görü (*intuition*) *a priori* olabildiği gibi *a posteriori* de olabilir; uzay ve zaman ise görünün *a priori* formlarıdır. Bu görü formlarının *a priori* olmasının nedeni de öznede olmasındandır. Görünün kaynağı ise ruhtur, bir anlamda transandantal felsefeyi olanaklı kılan da insan ruhudur.[9] Zaman, görünün içsel, uzay ise görünün dışsal *a priori* formudur. Burada, yeri gelmişken görü (*intuition*), tezahür/beliriş (*appearence*), temsil (*representation*) arasındaki farkı ve ilişkiyi kısaca açalım. Görü, *a priori* olduğu gibi *a posteriori* de olabilir. Tezahür (beliriş) her zaman *a*

[9] "Ruh", daha önceki metafizikçilerin anladığı gibi Kant'ta bağımsız bir töz değildir.

*posteriori*dir. Temsil ise duyusal (*sensitive*) ya da zihinsel/entelektüel (*intellectual*) olabilir. Her tezahür (beliriş) aynı zamanda görüdür. Tezahür (beliriş) sadece *a posteriori* olduğu için bunun tersi doğru değildir. Her görü ise aynı zamanda temsildir, görü kökenli olmayan, zihinsel temsiller de olduğu için bunun tersi de doğru olamaz. Şimdi bu iki önermeden mantıksal çıkarım yaptığımızda, her tezahürün (belirişin) aynı zamanda temsil olduğunu söyleyebiliriz, fakat bunun tersi de doğru değildir. Çünkü temsil entelektüel olduğunda görü olması olanaklı değildir.

Kant'ın, sayının inşasında sayı-saf görü ilişkisini açıklaması, daha önce de işaret etmeye çalıştığımız gibi dogmatik metafiziğe karşı çıkışında kendisine güçlü bir zemin ve sağlam dayanak hazırlamıştır. Friedman, "Kant'ın Leibnizci ve Wolffçu felsefenin dogmatik metafiziğine karşı çıkışında, önemli etken olan onun geliştirdiği saf görü ve matematik ilişkisi görüşünü daha çok takdir edebilecek durumdayız" (Friedman, 1994: s. 128) demektedir. Bu noktada şunu söylemek mümkündür: Matematiksel bilgi saf görü temellidir. Sayının, tezahür (beliriş) dediğimiz deneyimin malzemesi olan empirik görüyle ilişkisi yoktur. Başka bir anlatımla saf görü ya da *a priori manifold* sentetik *a priori* yargılar alanı olarak aritmetiğin yargılarının kurulumu için gerekli olan malzemedir. Kant, "Demek ki gerçekten Matematiğin temelinde, onun sentetik ve zorunluluklu olarak geçerli önermelerini olanaklı kılan saf *a priori* görüler bulunur" (Kant, 2002: §12) demektedir.

Kant, "Düşünce, kendi içinde duyuların bir ürünü değildir. Bu bakımdan onlar tarafından sınırlandırılmış değildir" (Kant, 1998: A287/B343) sözüyle "düşünmenin kendiliğinden faal yanı"nın deneyimin malzemesini oluşturan hissetmenin *a*

posteriori unsurlarına yönelik olmadığına işaret etmektedir. Kant'ın transandantal *apperception* olarak tanımladığı saf düşünme edimi, düşünmenin kendiliğinden faal yanını mümkün kılarak"saf ben"in tesisini gerçekleştirmiş olmakla sayının inşa edileceği mekânı hazırlamaktadır. Buradan, "Ben" akan zaman içinde değişmekle birlikte "saf ben"in zaman içinde değişmeyerek *a priori* nesnenin inşasını mümkün kıldığını anlıyoruz. İşte değişmeyen, zamana birlik veren, birlik verdiği saf temsillerin akan zaman içinde kaybolmaması için onları bir arada tutan "saf ben", her türlü akli ve kavrama yetilerinin zemininde olması bakımından sayının inşasında, dolayısıyla da sentetik *a priori* yargılar alanı olarak aritmetiğin bütününün kurulumunda asli bir role sahiptir. Bir başka deyişle, düşünmenin kendiliğinden faal yanı sayının malzemesi olan *a priori manifold*ları "saf ben" mekânında canlandırmakta ve üretici hayal gücü aracılığıyla da bunların saf sentezlemesi yapılmaktadır. İşte sayı, *a priori manifold*un bu üç aşamalı sentezinin birliği sonucunda yargı içinde ortaya çıkmaktadır.

Sayının inşasını ele almadan önce, sayının ne olduğunu bilmek gerekir. "Sayı nedir?", "Kant, sayıyı nasıl tanımlar?" Şimdi Kant'ın *Prolegomena* ve *CPR*'de sayıyı nasıl tanımladığına bakalım, sonra da sayının nasıl inşa edildiğini açıklamaya çalışalım. "Aritmetik kendi sayı kavramlarını, zaman içinde birbirini izleyen birimlerin birbirine eklenmesiyle meydana getirir" (Kant, 2002: §10).

> Anlama yetisinin bir kavramı olarak, büyüklüğün (quantity) saf şeması sayıdır. Sayı bir temsildir. Bu temsil homojen bir birimin başka bir birime sürekli eklenmesini birarada tutar. Öyleyse sayı, bir homojen görü *manifold*unun sentezlenmesinin birliğinden başka bir şey değildir; çünkü zamanın kendisini görüyü ayrımsarken

> üretmekteyim. Sayı ile ilgili birimler nicelikleri bir araya gelişleri itibariyle farklı olsa da, zamanla ilgileri bakımından homojen birimler olma açısından nitelik itibariyle aynı kökenden çıkarlar (Kant, 1998: A142-A143/B182).

Sayının inşa edilebilmesi için akan zamanda zamansal anların tutulması, birlik ve bütünlük verilmesi gerekir. Böyle bir faaliyet, zamansal anların transandantal sentezlemesi anlamına gelir. Üçlü sentezi tezimizin önceki alt başlıkları altında ayrıntılı bir biçimde açıklamaya çalıştık. Burada yeri gelmişken, sayının inşasında önemli bir aşama olan üçlü sentezin rolünü sayı için kısaca tekrar ele alalım. Sayı açısından düşünüldüğünde sentezin birinci aşamasında, sayının malzemesi olan *a priori manifold* içsel *a priori* bir form olan zamanda yakalanır ve bütünlük verilir. Sentezin bu aşaması *a priori* bir aşamadır, bu aşamada uzay ve zamanın birliğinin sağlandığını görüyoruz. Sentezin birinci aşaması ikinci aşamasına sıkı sıkıya bağlıdır. Sentezin ikinci aşamasını üretici hayal gücünün edimleri oluşturur. Üretici hayal gücü zaman formunda yakalanan, kendisine bütünlük verilen malzemeyi yeniden üretir, canlandırır ve onlara tekrar bütünlük verir. Söz konusu olan sayının inşası olduğunda, Koç'a göre bu aşamada "*a priori* nesnenin oluşması, zaman formunda *a priori* olarak yakalanan ve sentezlenenin, transandental sentez yoluyla muhayyilede üretilip resmedilmesine bağlıdır" (Koç, 1995: s. 55). Sentezin üçüncü aşaması, zaman formunda *a priori* olarak yakalanarak hayal gücünde resmedilen şeylerin, yine zaman formunda akıp kaybolmaması için bir kavramda tanınması işlemidir (Koç, 1995: s. 55). Burada, *manifold*un *a priori* olması dolayısıyla böyle bir düşünme ediminin saf sentez olduğunu, bu bakımdan da sentetik yargının oluşumunu olanaklı kıldığını düşünüyoruz. Matematiğin en temel nesnesi olarak sayının inşası için üretici hayal gücünün iki ayrı işlevi olan saf senteze ve transandantal şemaya

ihtiyaç vardır. Transandantal şemanın sayının inşasındaki rölünü açmadan önce, saf sentez gibi bir faaliyetle sayının inşasında rol alan bütün düşünme ve akli yetilerin kaynağında olan transandantal *apperception* saf düşünme ediminin, bu edim aracılığıyla kurulan, nesnenin sentetik birliğini olanaklı kılan, dahası bu birliğin bilinci olan "saf ben"in rolünü daha açık görebiliyoruz.

Kant, "Bilincin tüm görü verilerini önceleyen ve nesnelerin tüm temsilleri ile onları olanaklı kılacak biricik yolda bağıntıya giren birliği olmaksızın bizde hiçbir bilgi olamaz" demektedir (Kant, 1998: A107). İşte sentetik bir mekân olarak "saf ben", *a priori* bir form ve bir bütün olarak zamanı tutması gibi bir işleviyle akan zaman içinde zamansal anların sentezlenerek tanınmasına, bilincine varılmasına imkân sağlamaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi, zamana tâbi olmayan "saf ben" sayının inşasının zemininde yer alması bakımından, zaman içinde akan zamansal anları tutarak, birleştirerek ve birlik vererek bu birliğin bilinci olmaktadır. Bütün düşünme yetilerinin zemininde olan "saf ben"in bu rolü sayesinde *a priori,* evrensel, kesin ve bilgimizi genişleten aritmetiğin yargıları oluşmaktadır. Başka bir anlatımla "saf ben" sentetik *a priori* yargılar alanı olarak aritmetiğin yargılarını olanaklı hale getirmektedir. Sentetik *a priori y*argıların malzemesinin saf görü temelli olması, matematiksel bilginin görüsel olduğunu göstermektedir. Kant, "(...) saf görü eksik olduğu sürece, Matematiğin bir adım bile atması olanaksızdır" (Kant, 2002: §10) demektedir. Bütün bunlardan, matematiğin bütün kavramlarının saf görü temelinde kurulduğunu anlıyoruz. "(...) uzam ve zaman, Saf Matematiğin, aynı zamanda zorunluklu ve zorunlu olan tüm bilgilerinin ve yargılarının temeline koyduğu görülerdir" (Kant, 2002: §10). Kant'a göre matematik sentetik *a priori* bilgidir ve bu bilginin oluşması "(...) ancak ve ancak sırf duyuların nesneleriyle ilişki kurmakla

olanaklıdır" (Kant, 2002: §11). Dahası matematiğin kavramları öğelerine ayrılarak, yani analitik olarak değil, sadece sentetik yoldan ilerleyerek bilgimizi genişletmektedir. Kant, matematik için, "(...) şimdi bile alanının genişliğiyle hayranlık uyandıran ve ilerisi için sınırsız genişleme vaad eden, beraberinde baştan sona dek zorunluklu kesinlik, yani mutlak zorunluluk getiren, dolayısıyla deneysel temellere dayanmayan ve saf aklın ürünü olan, üstelik baştan sona dek sentetik olan, geniş ve denenmiş bir bilgi" diyerek (Kant, 2002: §6), matematiksel bilginin karakterini ortaya koymaktadır.

Şimdi de sayının inşasında canlandırıcı, resmedici ve taşıyıcı rolüyle yer alan "transandantal şema"yı açmaya çalışalım. Bilindiği gibi kategoriler anlama yetisinin saf kavramlarıdır ve bu bakımdan temsillerle doğrudan bağlantı kurmaları olanaklı değildir. Kategoriler ile hissetme yetisi (duyusallık) arasındaki bağlantıyı, hayal gücünün bir diğer ürünü olan "şemalar" kurmaktadır. Şema, düzenleyici, tertipleyici bir tasarım olarak zamanın belirleniminin hayal gücündeki resminin formudur. Koç şemayı şöyle açıklar:

> Şema, hissetmenin empirik unsurları ile düşünmenin formlarını, yani kategorileri bağlayan vasıtadır. Transandantal şema ise, hissetmenin *a priori* unsurları ile kategorileri bağlar. Muhayyiledeki resim, yargı açısından ele alındığında, kategorinin şemasına göre oluşmuş bir resimdir; yani, empirik nesnenin resmi ya da hayalidir. Muhayyiledeki *a priori* resim ise, yargı açısından ele alındığında, kategorinin şemasına göre oluşmuş bir *a priori* resimdir; yani, *a priori* nesnenin resmi ya da hayalidir. Şema, düzenleyen ve tertib eden bir formdur; aynı zamanda da, hayalin kendisinin oluşmasının bir kuralıdır. Bu, şema bir kavram olarak müdrikenin fiili olan yargıda ortaya çıktığında görülür (Koç, 1995: s. 58).

Bir kavramın şeması, o kavramın altına düşen nesneyi hayal etmemizi sağlayan kalıplardır. Transandantal şema, saf temsilleri nicelik kategorisi altına alarak sayı gibi bir *a priori* nesnenin inşası için köprü vazifesi görmektedir. Başka bir deyişle, sayının inşası için, "düşünmenin kendiliğinden faal yanı"nı harekete geçiren üretici hayal gücü, aynı zamanda "transandantal şema" aracılığıyla saf temsilleri nicelik kategorisinin altına alarak *a priori* unsurların birliğinin sağlanmasına katkıda bulunmaktadır. İşte sözü edilen bu birlik, kavram ile yargıda ortaya çıktığı zaman sayı oluşur. Koç'un sözleriyle "Bir transandental şema zaman formundaki transandental belirlenimdir. Bir transandental belirlenimi muhayyilemde yeniden ürettiğimde ve buna bir birlik verdiğimde sayıyı elde etmiş olurum" (Koç, 1997: s. 51).

Kant'ın ileri sürdüğü gibi sayı, zaman içinde birbirini izleyen birimlerin eklenmesiyle meydana gelir. Bu tanıma göre, sayının saf sentez sürecinden geçerek bir nesne bir kavram olarak yargıda ortaya çıktığı anlaşılmaktadır. Yalçın'a göre "Aritmetik nesnelerin oluşması için öncelikle hissetme kapasitemizin saf formu olan zamanın transandantal olarak belirlenmesi ve zamanda akan anlara bir birlik verilmesi gerekir. (...) Örneğin 5 sayısının oluşması için zamanda arka arkaya giden beş ayrı zamansal anın transandantal olarak belirlenip onlara bir birlik verilmesi gerekir. Zamandaki bu ayrı ayrı anlara verilen birliğin kaynağı ise nicelik kategorisindeki birlik kavramıdır. Bu işlemi her sayının oluşması için tekrarlayabiliriz (Yalçın, 2003a: s. 138). Burada "5" sayısı için gerçekleşen işlem biçimi her sayma sayısı için geçerlidir. Fakat, "5+7 = 12" örneğinde "5" sayısı için yapılan işlem ile "7" sayısı için yapılan işlem birbirinden farklıdır. Bu iki farklı sayının ve iki farklı kavramın birbirine eklenmesiyle başka bir sayı ve başka bir

kavram olan "12" sayısı elde edilmiştir. Bu bakımdan "5+7 = 12" sentetik bir yargıdır.

> 7 sayısı nedir? Zaman formundaki o akan şeylere bir birlik verip bunu resmediyoruz, bir şey oluşturuyoruz. (...) 7'yi yapmak ile 5'i yapmak arasında fark vardır. Bir takım şeylere birlik verirsek 5 sayısını ve diğer bir takım şeylerle de 7 sayısını oluştururuz. Şimdi 5 ve 7'yi toplamak demek ne demektir? "5", "7" ve "+" bunların işaretlerinden ibarettir. Toplamadan kastedilen 5'i yaptığımız malzeme ile 7'yi yaptığımız malzemenin tamamına bir birlik atfedilmesidir. Bu bakımdan 5+ 7= 12 yargısının analitik olması mümkün değildir (Koç, 1997: s. 51).

Görüldüğü gibi bir kavrama, o kavramı aşan başka bir kavram eklendiğinde yeni bir kavram elde edilerek bilgimiz genişlemektedir. Bu bakımdan matematiksel yargılar, öğretici yargılar olarak dünya hakkında bir şeyler söylerler. Dolayısıyla, böyle yargılardan oluşan aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu söylemek olanaklıdır. Kant, büyük sayılarla yapılan işlemlerle aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunun daha da iyi anlaşılabileceğini ileri sürmektedir.

> Aritmetiksel önerme her zaman sentetiktir. Bu özellik, daha büyük sayılarla toplama işlemi yaptığımızda daha da kolay görünür. Çünkü bütünüyle açıktır ki kavramlarımızı ne denli evirip çevirsek de toplam, görüden yardım almaksızın yalnızca kavramlarımızın ayrıştırılması yoluyla hiçbir zaman bulunmaz (Kant, 1998: B16).

Friedman geometride "*quanta/magnitude* (büyüklük)" kavramı ile aritmetikteki "*quantity* (nicelik)" kavramları arasındaki farkı vurgulayarak aritmetiksel işlemlerin

aksiyomatik olmadığını ileri sürmektedir. Friedman'a göre geometri büyüklüklerle "*quanta/magnitude*" ilgilidir, bundan dolayı aksiyomatik bir yapı üzerine kurulmuştur. Aritmetiksel işlemlerin büyüklüklerle değil de sadece niceliklerle (*quantity*) ilgili olması bakımından, aritmetiğin geometri gibi aksiyomatik bir yapısının olmadığını gösterir. Dolayısıyla, "5 + 7 = 12" gibi işlemler aksiyomlar üzerine kurulmadığı için aksiyomların özelliğini göstermezler (Friedman, 1994: s. 107).

Şimdi de Kant'ın aritmetiğe ilişkin görüşünü temellendirdiği mektuplarına bakalım. Kant, 25 Kasım 1788'de Johann Schultz'a yazdığı bir mektupta aritmetiğe ilişkin konularda önemli ayrıntılara girmiştir. Bu mektubunda Kant'a göre cebir, evrensel aritmetiktir. Aritmetik kendi kendisini genişleten bir bilimdir ve bu anlamda aritmetiğe denk herhangi bir bilimden söz edilemez. Dahası, diğer bilimler aritmetik sayesinde gelişmektedir. Kant, mektubunun ilerleyen satırlarında, kendince zor ve önemli bir soru olan "Bilgimizi salt analitik yargılarla genişletmek nasıl mümkündür?" sorusuna cevap arar. Farklı yöntemlerle toplama, çıkarma yapılarak aynı nicelikte tek bir kavramın inşa edilebileceğini, toplama ve çıkarma işleminin bir tür sentez olduğunu, objektif olarak inşa edilen kavramların özdeş olduğunu, fakat sübjektif olarak tek bir kavrama ulaşmak için düşünülen birleşimin türüne göre büyük farklılıklar gösterdiğini ileri sürmektedir (Kant, 1967: s. 129). Yargı düşündüğüm şeyin daha açık bir şekilde bilincinde olmamı sağlar. Dolayısıyla aritmetiksel işlemlerde yargı, her durumda farklı işlemlerle aynı sayıyı belirlese de, her şekilde sentezden elde edilen sayının ya da işlemin ötesine geçmektedir. Bu görüşünü Kant şöyle bir örnekle açıklar: "(...) '3+5' veya '12-4' veya '2x4' veya '2^3' yoluyla bir rakamın tek sonucuna, yani '8'e ulaşabilirim. Fakat benim '3+5' ile

düşündüğüm, ‘2x4’ düşüncesini içermiyordu; tıpkı, değer olarak bunların tümüne eşit olan ‘8’ kavramını da içermediği gibi” (Kant, 1967: s. 129). Buradan, her aritmetiksel işlemde objektif olarak inşa edilen sayılar özdeş olsa bile, sentez sürecinde düşünmenin doğası gereği sübjektif (keyfi olmayan) farklılıkların olduğunu anlıyoruz. Her sayı bir yargı içinde oluşur. Her farklı bir işlemde, yargının çıkan sayının ötesine geçmesi demek, bir düşünme faaliyeti olan yargının sübjektif olarak zaman temelinde farklı biçimlerde sürekli ilerleyerek bilgimizi genişletmesi demektir. Buradan da şöyle bir sonuca varmak mümkün olabilir: Eğer aritmetiksel işlemler sayıların analizi yoluyla gerçekleşseydi, hem düşünme hem de işlemsel olarak aritmetik kendi içerisinde bir bütün olarak büyüyemez, gelişemez ve genişleyemezdi. Böyle bir gerekçe ile Kant, Schultz’un aritmetiğin yargılarının analitik *a priori* yargılar olduğu görüşüne karşılık, aritmetiğin sentez yoluyla elde edilen *a priori* bilgilerin alanı olduğunu ileri sürmektedir.

Daha önce Friedman’ın, geometrinin aksiyomatik bir yapı üzerine kurulduğunu, fakat aritmetiğin aksiyomlar üzerine kurulmadığı görüşüne yer verilmişti. Kant bu görüşü daha önce doğrulamıştır. Aynı mektubunda Kant, aritmetiğin kesinlikle aksiyomlarının olmamasını, görüde büyüklük “quantum (*magnitude*)” olarak karşılığı olacak bir nesnesinin olmamasıyla ilişkilendirir. Buna karşılık aritmetiğin niceliği (*quantity*) vardır, yani aritmetik genel bir şeyin kavramını niceliksel olarak belirleme yoluyla hesaba katar. Dahası Kant, “(...) aritmetikte kesinliği hemen ispatlanabilen ve pratik yargılar olarak tanımlanan postulatlar vardır” (Kant, 1967: s. 129) sözüyle ve verdiği bir örnekle postulat kavramını açık kılmaktadır.

> (...) "7"yi bulmak için "3+4"ü, bir sayının, tamamlayanı [*complementum ad totum*] olarak görüleceği bir problem olarak yapılandırırsam, sonuca, özel bir kural gerektirmeyen en basit işlemle yani, "3" sayısının üzerine "4"ün kolayca sayılmasıyla erişilir. "3+4 = 7'' yargısı, gerçekten de saf teorik bir yargı olarak görünür ve objektif olarak böyle kabul edilir. Ancak sübjektif olarak "+'' işareti, diğer iki sayıdan üçüncü bir sayıyı elde etmek için işleme dahil olan sentezi belirtir. Dahası, hiçbir talimat ya da kanıt gerektirmeksizin yapılacak bir işlemi belirtir. Nihayetinde, bu yargı bir postulattır (Kant, 1967: s. 130).

Aritmetikte "+" işareti toplama, birleştirme anlamına gelen sentezi ifade etmektedir. Bütün aritmetiksel işlemlerde bir tür sentez yapılmaktadır. Toplama işleminde, birimleri birbirine ekleyerek bulduğumuz sonucu, çarpma işlemiyle daha kısa yoldan buluyoruz. Çıkarma işlemi toplama işleminin tersi olduğu için, toplayarak bulduğumuz sayıyı çıkarma işlemiyle de elde ediyoruz. Aynı şekilde bölme işleminin çarpma işleminin tersi olması bakımından, iki sayının çarpımından oluşan bir sayı, çarpanlarından birine bölündüğünde o sayının diğer çarpanını buluyoruz. Fakat bütün işlemler aynı sonucu verse de, aritmetiksel işlemlerin her biri sübjektif farklılıklara dayalı farklı sentez biçimiyle elde edilmektedir. Kant'a göre "3+4" ve "7"nin analitik yargı olduğunu varsayarsak, "3+4" işlemi ile "7" sayısının tam olarak aynı düşünme biçimiyle elde edildiğini kabul etmeniz gerekir. "Fakat, '12-5' sonuç olarak, '3' ile '4'ü toplarken düşündüğüm '7'sayısına eşit olduğu için, 'aynı şeye eşit olanlar, birbirine de eşittir' prensibine göre '3' ve '4'ü düşündüğümde aslında aynı zamanda '12' ve '5'i de düşünüyor olmalıyım. Ve bu durum kendi farkındalığım ile örtüşmez" (Kant, 1967: s. 130).

Aritmetiğin bütün postulatları, teoremleri ve ispatları diskursif düşünme faaliyeti üzerine inşa edilmektedir. Biz, zaman temelinde düşünerek birimleri birleştiriyoruz ve işlem yapıyoruz. Düşünmediğimiz zaman çok basit dört işlemi bile yapamıyoruz. Kant'a göre bir aritmetiksel yargıda, yani eşitlikte, kesinlikle çift taraflı ve objektif olarak özdeş kavramlar olmalıdır. Fakat "3+4" ve "7" kavramları "3" ile "4" ün birleştirildiği problemlerde "7" sayısı kavramların analiziyle değil sentez yoluyla ortaya çıkmaktadır. *A priori* görüden hareketle basit bir sayma biçimindeki bu inşa etme işlemi, iki sayının birleştirilmesi kavramını temsil eder. Böyle bir işlemde büyüklüğün (*quantum/magnitude)* değil, nicelik (*quantity*) kavramının inşası söz konusudur. Çünkü "3" ile "4"ün farklı nicel kavramlar olarak birleştirilerek, yalnızca bir büyüklük kavramının meydana gelmesi sadece bir düşüncedir (Kant, 1967: s. 130). Kant'ın aritmetik görüşünün merkezinde; zaman görüsünün sayıların özelliklerini etkilemediğini, dahası kavrama işleminin zaman temelinde olanaklı olduğunu görmekteyiz. Bu bakımdan, aritmetik yargılarının bir saf sentez ürünü olduğunu söylemek mümkündür. Böylelikle sayının zamana tâbi olmadığını fakat zaman temelinde inşa edildiğini bir kez daha söylemiş olalım.

> Rakamların bilimi, her bir niceliğin inşa edilmesi için gerekli olan ardışıklığı gerektirse de, kendi kendimize düşüncede temsil ettiğimiz saf bir entelektüel sentezdir. Fakat spesifik nicelikler [*quanta*] bu bilim türüne göre belirlenmek zorundaysa, bu nicelikler aynı zamanda görülerini sırasıyla kavrayabileceğimiz şekilde bize verilmelidir: Öyleyse kavrama, zaman koşuluna bağlıdır. Öyleyse, en nihayetinde, olası makul bir görünün objesinden başka hiçbir objeyi nicel ve sayısal bir değerlendirmeye sokamayız. Bu nedenle matematiğin görü temelinde oluşacağı prensibi istisnasız bir şekilde geçerliliğini korur (Kant, 1967: s. 131).

Kant, 25 Eylül 1790 öncesinde A. W. Rehberg'e yazdığı mektupta da, hem belirli bir değeri hem de karekök kavramını keşfetmemizi sağlayan bir salt içgörüye ihtiyaç duyulduğunu ve tam sayı-irrasyonel sayı farkının zaman sayesinde anlaşıldığını iddia etmektedir. Dahası Kant anlama yetisinin genel olarak sayma sayısını, özel olarak da "$\sqrt{2}$" gibi bir irrasyonel sayıyı düşünebildiğine göre, aynı zamanda bu gibi sayıları da üretebildiğini ileri sürer. Bu görüşünü; anlama yetisinin deneyime aşkın yanının rolünü kendiliğinden yaptığını, sayıların başka bir şeye bağlı olmaksızın anlama yetisinden geldiğini ve cebirin de bu kendiliğinden gelme durumunu uzay ve zaman saf görüleriyle kısıtlayamayacağını ifade ederek destekler. Mektubunun ilerleyen satırlarında Kant, aşkın bir hayal etme yetisinin özel bir cebir sistemi oluşturulabileceğine ve yine bu sistem üzerinden de denklemleri en genel haliyle çözme yönteminin elde edilebileceğine vurgu yapmaktadır (Kant, 1967: s. 166-167).

Sayının inşasında anlama yetisinin çok önemli bir rolü olduğuna göre, anlama yetisi ile görü arasındaki ilişki nedir? Kant, 21 Şubat 1772'de Marcus Herz'e yazmış olduğu mektubunda, anlama yetisinin rolünü hissetme yetisiyle (duyusallıkla) ilişkilendirmiştir. "(...) anlama yetisinin saf kavramları, duyusallıktan soyutlanmamalı ve temsillerin algılanışı da duyular yoluyla açıklanmamalıdır" (Kant, 1967: s. 72) demektedir.

Rehberg'e yazdığı mektubunda "evrensel matematik" dediği cebirin de anlama yetisinin bir ürünü olduğuna vurgu yapar (Kant, 1967: s. 166). Aynı mektubunda Kant, "(...) tüm sayma işleminin ve sayısal değerlerin ardışık ilerleyişi zamanla ilişkilidir. Çünkü zaman tüm sayısal değerlerin üretiminin temel şartıdır" (Kant,

1967: s. 167) demektedir. Kant, ayrıca, saf görünün (*pure intuition*) aritmetikte hem sayma sayısını hem de irrasyonel sayıyı keşfetmemize kaynaklık ettiğini, ayrıca bunlar arasındaki farkı anlamamızı sağladığını ileri sürmektedir (Kant, 1967: s. 168).

Herz'e yazdığı mektupta Kant, entelektüel temsillerin nesne yoluyla ruhun nitelemeleri olmadığını belirterek bu temsillerin doğasını olumsuz bir şekilde açıklar. Mektubunda yine, duyusal ve entelektüel temsiller arasındaki farkı; duyusal temsillerin şeyleri göründükleri gibi, entelektüel temsillerin ise şeyleri oldukları gibi gösterdiklerini ileri sürer. "Entelektüel temsiller iç dünyamıza bağlıysa, bu temsillerin kesinlikle kendilerinin üretmediği nesnelerle uzlaşması gerektiği kanısı nereden geliyor?", "Aynı zamanda saf akıl deneyim yoluyla bu nesnelere ulaşmadığına göre, bu nesnelerle nasıl uzlaşabiliyor?" gibi sorulara da, bunların matematikte mümkün olduğunu belirterek, gerekçesini şu şekilde ortaya koyar: "Çünkü matematikteki nesneler önümüzde yalnızca niceliklerden oluşur ve matematiksel temsillerini üretmemiz mümkün olduğu için yalnızca nicelikler olarak temsil edilebilirler (sayısal birimler belirli defalarca kullanılarak). Bu yüzden, niceliklerin kavramları spontan olabilir: ilkeleri de *a priori* olarak belirlenebilir" (Kant, 1967: s. 72). Fakat Kant anlama yetisinin niceliklerle ilişkisini açıklasa da, nitelikleri içeren bağıntılarda bu yetinin işlevselliğinin muğlak kaldığını ileri sürmektedir. Görüldüğü gibi Kant, her durumda sayının inşasını saf görü ve anlama yetisiyle ilişkilendirmektedir. İrrasyonel sayının inşası çalışmamız dahilinde olmadığı için bu konuyu daha fazla ele alma gereğini duymadık.

Özetle; sayının malzemesi olan *a priori manifold*un tekil bir bütünlük olarak iç duyunun bir ürünü olması, sayının *a priori* inşa edilebilen bir nesne ve bir kavram olarak tanımlanmasında önemli bir unsurdur. Kavram ise, nesnenin oluşmasının koşullarını belirleyen, kural niteliği taşıyan ve aynı zamanda tümel bir forma sahip olan bir bilinç birimidir. Bilinç, hayal gücündeki resme kalıcılığını ve sentetik birliğini verir. İşte bu sentetik birliğin kaynağında olan transandantal *apperception* düşünme edimidir ve bu edimin anlamı, zaman içinde değişmeyen benliğin idrak edilmesi demektir (Koç, 1995: s. 55). Transandantal *apperception* saf düşünme edimi; hayal gücü aracılığıyla oluşan sentezin, tüm düşünme ve akli faaliyetlerinin, dahası nesnenin sentetik birliğinin kaynağıdır (Kant, 1998: A118). Bu saf düşünme edimi transandantal özne = x'in icra ettiği bir edimdir. "Transandantal özne = x" ise bir kendinde şeydir.[10] Dolayısıyla transandantal *apperception* edimi "transandantal özne = x" olarak adlandırılan bir kendinde şeyin edimi olmuş olmaktadır.

Transandantal felsefede "saf ben", transandantal *apperception* düşünme ediminin tesis ettiği akli bir mekândır. "Saf ben"in tesis edilmesiyle birlikte sayının inşa edileceği mekân da kurulmuş olur. Kant'ın bilgi felsefesinde sayının yargı içinde ortaya çıktığını burada da belirtelim. Koç, "Sayı, genel olarak, aynı cinsten bir görü *manifold*unun sentezlenmesinin birliğidir; (...)"(Koç, 1995: s. 58) demektedir. Bütün bu birliğin zemininde yukarıda işaret ettiğimiz transandantal *apperception* saf düşünme edimi ve bu edimin tesis ettiği ve aritmetiksel yargıları olanaklı kılan, zamana tâbi olmayan ve uzay-zaman saf görü formlarını kuşatan bir mekân olarak

[10] Buradaki "transandantal özne = x"olarak tanımlanan "bir kendinde şey", tezahürlerin kaynağı olan "kendinde şey" değildir, Gözkan'ın diliyle "transandantal özne = x" biçiminde tanımlanan "bir kendinde şey", "(...) mevcut olmayan bir mekânın zemini olmakta ve fiili yoluyla bir mekân, yani bir tümel nesne, kuruluşu gerçekleştirmektedir; (...)" (Gözkân, 2002: s. 77, "Dipnot").

"saf ben" vardır. Transandantal felsefede nesnenin mekânda tesis edilmesi bakımından, sayının inşası "saf ben" mekânında gerçekleşir. "Saf ben" mekânı tesis edilmeden sayı inşa edilemez. "Ben" değişirken, aritmetiksel yargıların değişmemesi, kesin ve evrensel olması, transandantal *apperception* ve onun kurduğu bir mekân olan "saf ben"in işlevlerinden kaynaklandığını da tekrar belirtelim.

Düşünmenin ayrı bir yetisi olarak akıl (teorik akıl), aritmetiğin yargılarını birbirine bağlayarak, bu yargılardan mantıksal sonuçlar çıkarmak suretiyle bütünlük sağlayarak, sağlam ve bütün bir yapı olan matematiği inşa etme işinde önemli bir rol almaktadır. Kant'ın bilgi felsefesinde anlama yetisi tek başına bilme yetisi değildir. Daha önce de işaret ettiğimiz gibi, anlama yetisinin malzemelerini kendine nesne edinen teorik akıl matematiğin tümünü kurmada asli bir göreve sahiptir.

Kısacası, çalışmamız boyunca Kant'ın sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını geniş çaplı araştırdığını saptadık. Kant, sayının inşasının *a priori* koşullarını *a priori* bir form olan zaman, transandantal şema, transandantal *apperception* saf düşünme edimi, "saf ben" ve anlama yetisinin *a priori* kavramları arasında bağlantısal ilişki kurarak açıklamaktadır. Transandantal felsefede düşünmenin zaman temelinde yapılan bir zihinsel etkinlik olması gerçeği, sayının zaman temelinde inşa edilmesini olanaklı kılmaktadır. Sayılar arasındaki ardışıklık ilişkisi, yani sayıların art arda gelmesi, zamanın ardışıklığı ile ilişkilidir. Sayının ardışıklığı zamanın ardışıklığı üzerine kurulmaktadır. İşte, zaman bu yönüyle düşünmeyi mümkün kılarak aritmetiğin yargılarının oluşmasını olanaklı hale getirmektedir.

Bütün bunlara ek olarak, matematiksel nesnelerin inşasında transandantal mantığın işlevini ve önemini bir kez daha vurgulama gereği duymaktayız. Kant epistemolojisinde sayının inşasını, sayının ontolojik zeminini araştırarak açıklamaktadır. Bir başka anlatımla söyleyecek olursak; Kant'ta sayının ontolojik mekânı ve tâbi olduğu *a priori* koşullar araştırılarak, nasıl inşa edildiği transandantal mantık yoluyla açıklanmaktadır. Kant, matematiğin en temel nesnesi olan sayıyı merkeze alıp, onu derinliğine ve geniş çaplı bir biçimde netleştirerek aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu temellendirmiştir. Kant sonrası, bu boyutta özgün bir ontolojik çalışmanın matematik felsefesinde yapılıp yapılmadığını izleyen bölümde araştırarak ilgili sorunları ele almaya çalışacağız.

1.2.7.4. Kant'ın Aritmetik Görüşünde Kuruluşunun Eksik Kaldığı Düşünülen "Sıfır", "Bir" ve "Birim"

Çalışmada nesnelliğin ön planda olması bakımdan; Kant'ın aritmetik görüşünü temellendirdiğini açıklamaya çalışırken, ikinci bölüme geçmeden önce Kant'ın aritmetik görüşünü eleştirel bir yaklaşımla ele alan bir görüşe de burada yer vermeyi gerekli gördük. Kant'ın aritmetik görüşünü eleştirel bir bakış açısıyla ele alan Çitil, Kant'ın *CPR*'de sunduğu çerçevenin genelde nesnenin tesisini temellendiremediği için özelde de matematiği olanaklı kılan zemini açıklamakta yetersiz kaldığını iddia etmektedir. Çitil'e göre Kant, görünün "birim"lerin art arda yeniden üretimini mümkün kıldığını ve "birim"lerin yeniden üretiminin zamanın yeniden üretimiyle olanaklı olduğunu göstermiştir. Fakat, Kant burada "birim"lerin kuruluşunu belirsiz bırakmıştır. Oysaki aritmetiğin nesnelerinin inşasında kullanılan malzeme "birim"dir. "Birim" aynı zamanda saf bir nicelik olarak düşünülen bireysel şeydir. Bu bakımdan

"birim"in açıklanması bireysel olmanın açıklanmasıyla olanaklıdır. Dahası, Kant'ta aritmetiğin nesnelerinin "birim"lerin art arda birliğinden oluşması bakımından, "birim" fikrinin kaynağının ne olduğunun araştırılması gerekir. *A priori* görü formlarından hareket edilerek "birim" fikrine ulaşılamaz. Çünkü ne uzayda ne de zamanda "tane (lilik)" vardır. Saf görüde de "birim"in kaynağı bulunamadığına göre, bu durumda dönüp bakılması gereken yer hayal gücüdür (Çitil, 2012a: s. 102, 118). Burada aritmetiğin inşasında kullanılan malzemenin "birim" olması bakımından sayının inşası ontolojinin temel problemlerinden biri olarak görülmektedir. Çitil'in iddiasına göre zamanın anları "tanesellik"i içermemektedir. Dolayısıyla sayının inşasının, zamanın yeniden üretimi yoluyla ilişkisinin iyi açıklanması ve temellendirilmesi gerekir.

> Kant'ın dizgesi içerisinde görüsel karşılıkların bireysel bütünlüğünün kurulmasına ilişkin bir eksiklik bulunmaktadır. (...) Kant, matematiğin görüsel karşılığını büyüklük kavramına göre düşünerek, nesnenin kuruluşuna ilişkin tüm unsurlardan soyutladığını ifade etmektedir. Öte yandan, böyle bir soyutlamanın nasıl mümkün olduğunu yeterince açıklamamaktadır. Esasında, böyle bir soyutlamanın mahiyeti açıklanabilirse, yukarıda ifade ettiğimiz gibi "birim"in kuruluşu kuşatılmış olur. Birimin imkânının ortaya konulması aritmetiğin ve cebrin de imkânının zemininde yer alır (Çitil, 2012a: s. 119-120).

Çitil'in yaklaşımına göre "birim" kavramının kökenine inmek için nesnenin kuruluşunun ele alınması gerekmektedir. Buradan da bir "birim"in herhangi bir *a posteriori* nesne olduğu ve *a priori* nesne olan "Bir"in görüdeki izinin taşıyıcısı olarak inşa edildiği anlaşılmaktadır. Bu bakımdan *a priori* bir nesne olarak doğal sayı *a posteriori* nesnenin kuruluşunda belirleyici bir role sahip olmak zorundadır.

Başka bir deyişle, "Bir"in ve aşağıda kısaca açıklanacağı üzere "Sıfır"ın görüsel izleri olmaksızın *a posteriori* olarak nesnenin kuruluşu ve kuşatılması olanaksızdır. Her bir tikel *a posteriori* nesnenin inşası *a priori* nesnenin kurulumuyla olanaklı olmaktadır.

> Bizim görüşümüze göre, tikel *a posteriori* nesne sonsuzdan/belirsizden uzaysal olmayan bir boşlukla ayrılır. Dolayısıyla bir, bir-olmayanın belirsizliğinden ayrılarak kurulur. Boşluk ve belirsizlik düşüncede bir'in kuruluşunun zemininde yer alır. Bu belirsizlik bir başka bir'in kurulmuşluğunu gerektirmez. Bu itibarla, bir şeyin düşünülmesi çokluğu gerektirmez. Düşünce her bir ânında tek bir şeyi bu şekilde düşünür (Çitil, 2012a: s.104).

Çitil, *a priori* nesneler olarak "Sıfır" ve "Bir" olmadan tikel nesnelerin, yani bireyin, bireysel olanın kurulması ve kavranmasının mümkün olamayacağını ileri sürmektedir. Bir "birim" ise herhangi bir tikel nesne olarak, *a priori* bir nesne olan "Bir"in görüdeki izidir. Tikel nesnelerin kurulması "Sıfır" ve "Bir"in görüdeki izlerine bağlıdır. Çitil'e göre "Sıfır" ve "Bir"in kurulumu şu şekilde açıklanabilir:

> Bir şey diğerinden, o diğer şey de bu şeyden ayrıldığı için, sayı olarak Bir'in görüdeki izi, "çokluk" içerisinde kurucu bir unsur olarak mevcuttur. Bir'in görüdeki izi ise boşluğun birliği olarak Sıfır'ı varsayar. Görüldüğü üzere Sıfır kurucu olarak temeldir ve kendisiyle aynı olması bakımından da bir birliğe sahiptir. Sıfır'ın çokluğun kuruluşundaki birliği çokluğu kurar. Sıfır ve bir diğer tüm nesnelerin görüdeki izlerinin kuruluşunda önceliğe sahiptir (Çitil, 2012a: s. 141).

Çitil tikel nesnenin kuruluşunun, *a priori* nesneler olan "Sıfır" ve "Bir"in görüsel izine dayandığına vurgu yapmaktadır. Çitil'in bakış açısına göre, Kant'ın *CPR*'de tikel-tümel nesne arasındaki ilişkide aklın faaliyeti göz ardı etmesi sonucunda sunulan ontolojik çerçeve hem *a posteriori* hem de *a priori* nesnelerin kurulumunu açıklamakta yetersiz kalmıştır.

Çitil'in bu yaklaşımını ayrıntılı olarak ele almak tezin sınırlarının dışında kalmaktadır. Öte yandan, Çitil, her ne kadar Kant'ın nesne kuramına bir eleştiri getirse de, matematiksel etkinliğinin nesne ile bağını korumaya gayret etmektedir. Biz matematiğin nesnel ve kavramsal bilgi ile ve *a priori* saf görü zemini bağının korunmasının önemli olduğunu, matematik eğitiminin de böyle bir matematik felsefesine dayandırılması gerektiğini ve bunun tersine yönelimlerin matematik eğitiminde etkili sonuçlar üretmediğini iddia ediyoruz. Bu itibarla Çitil'in söz konusu görüşleri tezimizin genel amacı ile uyumludur.

Öte yandan ikinci bölümde üzerinde duracağımız görüşler sadece Kant'ın nesne kuramının gözardı edilmesi ve reddedilmesine değil, genel anlamda matematiğin kavramsal-nesnel yanının ve saf görü ile iptal edilmesine dayanmaktadır. Bu görüşleri eleştirel bir gözle ele almaya çalışacağız.

2. BÖLÜM: KANT'IN ARİTMETİK GÖRÜŞÜNÜN ÖNCESİNDEKİ VE SONRASINDAKİ BELLİ BAŞLI GÖRÜŞLERLE KARŞILAŞTIRILMASI VE GÜNÜMÜZ MATEMATİK FELSEFESİNE ELEŞTİREL BİR BAKIŞ

Tezin bu bölümünde, Kant sonrası yeni arayışlara geçmeden önce Kant öncesi dönemde genelde matematik, özelde de sayı ya da aritmetiğe ilişkin kimi filozofların, matematikçi-filozofların görüşlerine yer verilecektir. Çalışmada, Kant öncesi ve sonrasının birlikte ele alınmasının, Kant'ın aritmetik görüşünün matematik felsefesindeki yerinin ve günümüz matematik felsefesinin sorunlarının daha iyi anlaşılmasına ışık tutacağı düşünülmektedir.

2.1. Pythagoras'tan Hume'a Kadar Kimi Düşünürlerin Matematik Görüşlerinin Kant'ın Yaklaşımıyla Karşılaştırılması

Kant'tan önce matematiğin doğasına ilişkin söylemler, genelde, matematiksel bilginin yapısını ve özelliğini ön plana alarak, bu bilginin güvenilirliği üzerinde yoğunlaşmışlardır. Ancak, yapılan araştırmalar Kant öncesinde matematiğin ayrıntılı bir biçimde temellendirilemediğini göstermektedir. Antikçağdan beri kimi matematikçiler ve filozoflar "Matematik nedir?" sorusunu sordular ve bu soruya

yanıt aramaya giriştiler. Antik Yunan'da filozoflar, genelde matematiğin, özelde de aritmetiğin, yani sayının neliğine ilişkin soruşturmalara felsefelerinde önemli bir yer ayırdılar. Bu matematikçi-filozoflardan en çok bilinen ve günümüzde de geometrideki ünlü teoremiyle anılan MÖ 6. yüzyılda yaşamış olan Pythagoras'dır. Sisam Adasında doğan Pythagoras daha sonra İtalya'nın güneyindeki Kroton'a giderek orada dinsel, ahlâksal ve siyasal görüşleri doğrultusunda bir topluluk oluşturmuştur. Pythagorasçılar denen bu topluluğun üyeleri, varolanların başlangıcının, yani "*arkhe*"sinin tamsayı olduğuna inandıklarını, bu bakımdan sayıların özelliklerine ve aralarındaki ilişkilere ilgi duyduklarını anlıyoruz. Matematik eğitimcisi William L. Schaaf'a göre Pythagoras, tüm matematiğin, 1, 2, 3, ... gibi bildiğimiz sayılardan oluştuğu inancındaydı (Schaaf, 2008: s. 167). Pythagorasçılara göre evrenin özünün tamsayı olması bakımından, evrendeki çokluk ve karmaşada matematiksel bir düzen vardır, yani evrenin düzeni tamsayılara dayanır. Müzikte seslerin uyumu ve harmonisini de tamsayı ile açıklamaya çalışan Pythagorasçılar, telli çalgılarda tellerin uzunluklarıyla ses tonları arasında tamsayı olabilecek bir oran olduğuna inanırlar. Yani, belli bir gerilimde tutulan telin frekansıyla telin uzunluğu orantılıdır. Bu bakımdan, Pythagorasçı görüşe göre matematiksel bilgi güvenilir ve değişmeyen tek bilgidir.

Platon *Politeia*'nın altıncı kitabında "bilinen şeyler"den söz ederken, "görülenler" ve "düşünülenler" ayrımı yapar. Platon'a göre görülenlerin bilgisi genel geçer ve kesin bilgi değildir. Kesin bilgi ise yalnızca felsefi bilgi, yani nesnesi idealar olan bilgidir. Platon, düşünülenleri "hipotezler" ve "idealar" olmak üzere iki bölüme ayırır. Bunlardan ilki, *diskursif* düşünme (*dianoia*) ile edinilebilen bilgi olan "bilimlerin bilgisi (*teleute*)", diğeri de düşünceyle görülebilen bilgi olan "felsefi bilgi", yani

*epistemed*ir (Platon, 2007: 507a-511e). Platon'un felsefesinde aritmetik, "görülenler" ve "düşünülenler" arasındaki bir halka gibidir. Platon, ideaların bilgisi olan felsefi bilgiyi aritmetik bilgisinden üstün görse de; ona göre, matematiğin nesneleri idealar gibi öncesiz-sonrasızdırlar, meydana gelmemişlerdir, yok olamazlar, bunun için de akıl bilgisinin konusudurlar.

Tablo 2.4. Platon'da "Görülenler" ve " Düşünülenler" Ayrımı

	Görülenler		Düşünülenler	
Bilinenler	İmgeler (*eikasia*)	Canlılar + Yapılmış Nesneler (*zoa*) (*skeuata*)	Hipotezler (*hypotheseis*)	İdealar (*eide*)
Bilme türü	•Tahmin-tasarım (*eikasia*)	•İnanç (*pistis*)	•Diskursif düşünme (*dianoia*)	•Düşünceyle görme (*noesis*)
Bilgi türü	•Tasarım (*aisthesis-doksa*)	• Çeşitli türleriyle kanılar (*gnosis, alethes, doksa, alethes doksa meta logou*)	•Bilimlerin bilgisi (*teleute*)	•Felsefe bilgisi (*episteme*)

Kaynak: Kuçuradi, İ. (2009). *Çağın Olayları Arasında*, Ankara: Şiir-Tiyatro Yayınları, s. 100.

Burada *dianoia* akılsal ve matematiksel bilme, *logismos* ise hesaplamadır. Platon düşünülenler kısmında ele aldığı bu iki bilme yetisinden idealar ve düşünme yetisini (*noesis*) matematiksel bilme yetisinden (*dianoia*) üstün tutmasına rağmen, ideal devletin eğitim sisteminde, matematiği felsefenin en yüksek ön basamağı olarak görmektedir. Platon'a göre hesap ve aritmetik sayılar üzerinde temellenen bir bilim olarak insanı gerçek varlığa götürür. Savaş adamı da ordusunu düzenlemek için hesap ve aritmetiğe başvurur.

> (...) filozof da türeyip çoğalmalar dünyasından sıyrılıp öz varlığa ulaşabilmek için onlara başvurur. (…) Yoksa hiçbir zaman düşüncelerine bir düzen veremez. (...) Devletin en yüksek işlerini görecek kimselere, bu bilimi niçin edinmeleri gerektiğini anlatacağız. Edinecekleri bilgi üstünkörü de olmayacaktır. (…) Salt bir kavrayışla sayıların özüne varacaktır. Ama sayıları, tüccarların, satıcıların, alım satım işlerindeki gibi kullanmayacaklar. (...) Sayıları, savaş işlerinde uygulayacaklar. Ruh onlarla görülen dünyanın, gerçeğin özüne daha kolay geçecek (Platon, 2007: 525b-525c).

Platon, aritmetiği "öğrenimimizde ilk kullanacağımız bilim" olarak görür ve doğuştan sayı bilgisine yatkın olanların diğer bilimleri çabuk kavrayabileceğinden söz eder. Sayılar kadar insan kafasını çalıştıran az bilim olduğunu, dolayısıyla sayı biliminden vazgeçmenin mümkün olmadığını, tersine iyi kafaların sayı bilimiyle beslenmesi gerektiğini belirterek şöyle devam eder:

> Dediğim gibi, insana yükseklere atılma gücünü kazandıracak ve düşüncelerine görülür, elle tutulur nesneleri katmadan, sayıların kendileri üzerine düşünmesini öğretecek. Bu bilimlerle uğraşanların davranışlarını bilirsin. Kendileriyle tartışırken tam bir bütün olan birimi bölmeye kalktınız mı, sizinle alay eder, böyle olmaz derler. Siz ne kadar bölerseniz, onlar bölüneni çarpma yoluyla bütünlerler. Çünkü birimin artık birim olmaktan çıkıp parçaların birleşimi gibi görülmesinden korkarlar. (...) Peki, onlara şunu sorsak ne dersin, Glaukon: "Ey yüce bilginler, sizin üstünde tartıştığınız hangi sayılardır? Sizin anlattığınız gibi birbirine tam eş ve parçalara ayrılmaz birimler nerede bulunur?" Buna verecekleri karşılık ne olabilir, sence? Bunlar, yalnız düşünceyle kavranan ve başka hiçbir türlü ele alınmayan sayılardır, derler, sanırım (Platon, 2007: 525d-526a).

Platon burada, aritmetiği yalnızca düşünme ile kavranan bir sayı bilimi olarak görmektedir. Özellikle onun bu görüşünün altını çizmenin gerekli olduğunu

düşünüyoruz. Kant'ın, sayının inşasını temellendirirken, sayıyı, saf görü formu olan zaman temelinde açıkladığını gördük. Böylelikle iki büyük düşünürün aritmetik görüşündeki en derin farkın şu şekilde ortaya çıktığını anlıyoruz: Platon sayının yalnızca düşünmeyle kavrandığını iddia etmektedir. Kant ise, hissetme yetisi (duyusallık), *a priori* görü formları olan uzay ve zaman, üretici hayal gücü ve düşünme yetileri arasında bağlantısal bir ilişki kurarak ve bu yetilerin rollerini tek tek açıklayarak sayının inşasını ayrıntılı bir biçimde temellendirmiştir. Platon, diyaloğunun devam eden satırlarında, sayı bilimine bağlı olan, öğrenimimizde ikinci olarak kullanacağımız bir bilimin daha bulunduğunu belirtmektedir.

> Geometri her zaman için var olanı bilmeye yarar; doğup öleni bilmeye değil. (...) çünkü geometri, değişmeyenin bilgisidir. (...) o da ruhumuzu öz gerçeğe yükseltmeye, bizde bilim sevgisini doğurmaya yarar. Gözlerimizi aşağılara değil, yukarılara çevirir. (...) Öyleyse, bizim güzel devletimizin yurttaşlarına geometriyi yabana atmamalarını, var gücümüzle öğütleyeceğiz. Hem sonra, geometrinin hiç de küçümsenmeyecek başka yararları da var. (...) Savaşla ilgili yararlar. Üstelik öteki bilimleri anlamaya da yarar. Bu bakımdan geometri bilenle bilmeyen arasında uçurumlar vardır (Platon, 2007: 527b-527c).

Platon, diğer bir diyaloğu olan *Theaitetos*'ta, "bilgi" ile "sanı" arasında bağlantısal bir ilişki kurarak, "bilgi-doğru sanı ayırımı"nı ortaya koyar. Kuş kafesine (güvercinliğe) benzettiği ruhta (buradaki bilgiler kuşlar gibidir) Platon, "(...) bir bilgiye sahip çıkan, bunu kafese kapayan kimsenin, bilginin ait olduğu şeyi öğrendiğini veya bulduğunu (...)" (Platon, 1997: 197c-e) iddia eder. Daha sonra Platon, aritmetik denen bir sanat olduğunu, bu sanat sayesinde sayılar hakkında bilgiye sahip olunduğunu ileri sürer. İşin ehli olanların bu bilgiyi başkasına da

devredebileceğini iddia eden Platon; bu bilgiyi devredeni "öğretiyor", devralanı da "öğreniyor" olarak tanımlar. Platon bu diyaloğunda sayı ve aritmetikçi ilişkisi üzerinde de durur. Ona göre mükemmel bir aritmetikçinin ruhunda bütün sayıların bilgisi vardır. Böyle bir aritmetikçi bütün sayıları bilir. "Saymak ise, hangi sayının meydana çıkacağını araştırmaktan başka bir şey değildir" (Platon, 1997: 198a-c).

Matematikçi Alfréd Rényi, *Matematik Üzerine Sokratik Bir Diyalog* adlı kitabında Platon'un matematik görüşünü ustaca ele alır. Rényi bu kitabında, matematiksel kavramların, matematikçilerin kendileri tarafından yaratıldığını iddia etmektedir. Başka bir deyişle matematikçi, gerçeklikte var olmayan fakat kendi düşüncesinde varolan nesnelerle ilgilenir; yani fiziksel nesnelerin sayılarını değil, sayının kendisini araştırır. Dolayısıyla matematik, var olmayan şeyler üzerine bir çalışmadır ve onlara ilişkin doğruları tümüyle ortaya koyar. Rényi'ye göre matematikçi, ressam gibi bir mucit değil daha çok denizci gibi bir kâşiftir. Çünkü matematikçi, matematiksel nesneleri icat etmekten çok onları keşfetmektedir (Rényi, 1999: s. 14-23).

Diyaloğun izleyen sayfalarında Rényi, Platon'un söylemiyle insanın "düşünce dünyası" ve "gerçek dünyası" olmak üzere iki dünyasının olduğunu, insanın düşünce dünyası içerisinde yer alan matematiğin; gerçek dünyanın bir yansıması olması nedeniyle, gerçek dünya hakkında doğru bilgi verdiğini ileri sürer. "(...) matematiğin dünyası, gerçek dünyanın zihnimizdeki yansımasından başka bir şey değildir. Bu da, matematiğin dünyası hakkında her keşfin bize gerçek dünya hakkında bilgi verdiğini açıkça ortaya koymaktadır" (Rényi, 1999: s. 27).

Ünlü İngiliz matematikçi G. H. Hardy'nin, matematiğin neliğine ilişkin olarak geliştirdiği görüş çerçevesinde Platoncu bir yaklaşımı benimsediğini görmekteyiz. *Bir Matematikçinin Savunması*'nda da açık kıldığı üzere Hardy'ye göre, çoğu matematikçi için fiziksel gerçek(lik)ten ayrı "matematiksel gerçek(lik)" diye tanımlanabilecek başka bir gerçek(lik) vardır: "Benim inancıma göre, matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlevimiz onu bulup çıkarmak ya da *gözlemektir;* ispatladığımız veya tumturaklı sözlerle *yarattığımızı* söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir. Bu görüş Platon'dan bu yana birçok ünlü filozof tarafından da benimsenmiştir" (Hardy, 1994: s. 95). Hardy, matematiksel nesnelerin daha çok göründükleri gibi olduğunu söyler. Fakat fiziksel bir şey, örneğin bir sandalye ya da bir yıldız göründüğü gibi olmayabilir. Fiziksel nesnelerin görüntüleri duyularımıza tâbidir. Dolayısıyla fiziksel nesnelere ilişkin ne kadar çok düşünürsek düşünelim, bu tür nesnelerin görüntüleri duyularımıza bağlı olarak değiştiği için, niteliği de berrak değildir. Fakat sayı denen nesnenin örneğin; "2" veya "317"nin duyularla ilişkisi yoktur. Sayıların özellikleri, yakından incelendiği oranda daha çok netleşir, berraklaşır. Herhangi bir sayı, örneğin "317" asal sayısı, biz bu sayıyı asal sayı olarak düşündüğümüz için değil, bu sayı metematiksel gerçekliğin yapısı gereği asal sayı olduğu içindir (Hardy, 1994: s. 100). Hardy çok açık bir biçimde, matematiksel bir nesne olarak sayının gerçekliğinin bizim düşüncemizin dışında var olduğunu ileri sürmektedir. Biz, var olan şeyi yani sayıyı, var olduğu için keşfediyoruz. Platon gibi Hardy de Kant'ın epistemolojisinin aksi yönünde, yani sayının insan zihni dışında var olduğunu iddia etmektedir. Daha önce birçok kez değindiğimiz gibi, Kant'ta nesne yargı içinde kavramla birlikte oluşur. Nesnenin, kavram ve yargının dışında, yani insan zihni dışında var olması görüşü, nesne ile kavramın ayrılması anlamına geldiği için, nesnenin kavram altına

düşmesini imkânsızlaştırır, dahası yargı oluşamaz. Kant'ta sayı, Platon ve Hardy'nin aksine insan zihni dışında kendi başına var olan bir nesne değil, tam tersine insan zihninde *a priori* olarak inşa edilen bir nesnedir. Böylece bu önemli farka bir kez daha dikkat çekilmiş oldu.

René Descartes 17. yüzyılda modern felsefenin kurucusudur. Matematikçi-filozof Descartes, aynı zamanda cebir ile geometriyi birleştirerek matematiğin bir dalı olan analitik geometrinin kurulmasına büyük katkı sağlamıştır. Descartes'ın *Felsefenin İlkeleri*'nde belirttiği üzere insanda üç tür ide vardır. Deneyimden edinilmemiş, ruhumuzda önceden yerleşik olarak bulunan "Tanrı idesi" gibi idelere Descartes "doğuştan ideler (*innatae ideae*)" adını verir. Buna karşılık duyular aracılığı ile bize "dışarıdan gelen ideler *(ideae adventitiae*)" ve hayal gücümüzle "bizim kendimizin yapmış olduğu ideler (*idea a me ipso factae*)" de vardır. Son iki grupta yer alan ideleri duyularımızla bildiğimiz için bulanıktırlar. "Doğuştan gelen ideler" ise her zaman açık-seçiktir. Descartes, matematiğin kavramlarını da "doğuştan kavramlar, ideler" arasında sayar. Formel mantıkla metafiziğin ideleri de doğuştandır ve bunların hepsi açık-seçiktir. Dolayısıyla bunlara dayanarak apaçık, şüphe götürmez bilgiler geliştirilebilir (Descartes, 1963: s. 46-48).

Descartes'ın düşüncesinde matematiğin merkezi konumda olduğu ileri sürülebilir. Bir tür akıl bilgisi olan matematiksel bilgi; yapısı gereği açık, seçik ve kesin bir bilgidir. Matematiğin dalları olan aritmetik de, geometri de deneyimin neden olabileceği yanlışlara maruz kalmayan, saf bir akıl bilgisi alanıdır. Bu bakımdan matematik, diğer bilimlerden daha sağlam ve kesindir. *Aklın İdaresi İçin Kurallar*'da

Descartes, bu bağlamda matematiğin diğer bilimlere olan üstünlüğünü şu şekilde ifade eder:

> (...) çünkü onda öteki bilimlere fayda ve kolaylık bakımdan ne kadar üstün olduğunu gösteren şey, onların uğraştığı bütün şeylerle uğraştığı gibi, fazla olarak başka birçok şeylerle de uğraşır; sonra onda bulunan bütün güçlükler öteki bilimlerde de bulunur, bundan başka bu bilimlerde kendi özel konularından gelen birtakım güçlükler de vardır ki onda bulunmaz (Descartes, 1945: s. 22-23).

Descartes aritmetik ve geometri gibi iki disiplini saf akıl bilgisi olarak görür. Bu disiplinlerde sezginin önemine vurgu yaparak aritmetik ve geometriyi över. Descartes'a göre kesin bilgiye aklın iki gücüyle varılır: "sezgi" ve "dedüksiyon (tümdengelim)". Biz sezgiyle apaçık doğruları, tartışmasız ilkeleri, açık ve seçik olan düşünceleri hiçbir şüpheye yer bırakmadan biliriz. Sezgi yoluyla bilinen apaçık doğrulardan, başka doğruların çıkarılması dedüksiyon aracılığıyla olanaklıdır. Dahası dedüksiyonla, apaçık doğrulara yeni doğrular ekleyerek bilgimizi artırırız. Descartes, 1637'de yazdığı *Yöntem Üzerine Konuşma* adlı kitabında en basit geometrik ispatlarda bile hata yapan insanlarla karşılaştığını, dolayısıyla kendisinin de hata yapma ihtimalinin bulunduğunu belirterek, bundan dolayı önceden kesin doğru olarak kabul ettiği her şeyin doğruluğundan şüphe eder. Descartes'ta "şüphe" kesin ve doğru bilgiye ulaşmak için bir yöntemdir. Duyularla edinilen bilgi açık-seçik olmadığı için kesin ve güvenilir bir bilgi değildir. Dolayısıyla açık ve seçik olmayan her şeyin doğruluğundan şüphe etmek gerekir, hatta matematik akıl bilgisi olduğu halde matematiğin önermelerine de şüphe ile bakılmalıdır. Descartes'ın, "Ve gene, bize eskiden pek doğru görünen bütün şeylerden, hattâ, kendiliklerinden oldukça

aşikâr olmalarına rağmen, matematiğin ispat ve ilkelerinden dahi, birçok kimseler bu konular üzerinde muhakeme yürütürken aldanmış oldukları için, şüphe edeceğiz; (...)" (Descartes, 1963: s. 27) biçimindeki ifadesiyle, soruşturmasını başlatmak için bir yöntem olarak şüpheci tutumunu kullandığı anlaşılmaktadır. Descartes, benzer şeyleri geometri için de ileri sürer. "Çünkü geometrinin en basit konularıyla ilgili olarak bile usavurmalar yaparken yanılan ve matematik yanlışları yapan insanlar olduğu için, benim de başkaları kadar yanılabileceğim yargısına vararak, daha önce göstermeler için aldığım tüm nedenleri yanlış diye atıyorum" (Descartes, 1998: s. 61).

Descartes'a göre insan edindiği bilgilerin doğruluğundan şüphe etmelidir. Bu bilgiler önyargılarla edinilmiş olabilir. Çünkü "önyargılar" önce çocukluk döneminde edinilir, sonra çocuklukta edinilen bu önyargılar yeni önyargıları türetir. Şüphe, Descartes'ta her doğruyu yadsımak değildir; şüphe doğruyu bulana kadar doğru diye kabul edilen şeylerin yanlış olabileceğini düşünmek, bir başka deyişle doğrunun temelini bulana kadar bütün bilgileri yok saymaktır. Her şeyden şüphe eden Descartes, düşünerek en sonunda kendi varlığından şüphe edemez hale gelir ve "düşünüyorum öyleyse varım" önermesine, yani "Cogito, ergo sum"un sezgisel bilgisine varır. Bu bilgi onda açık ve seçik bilgidir. *Cogito*'dan daha yetkin olan "Tanrı idesi" vardır Descartes'ta. "Ben idesi" "Tanrı idesi"nden önce gibi görünse de, "Tanrı idesi" "ben idesi"nden öncedir; "Tanrı idesi" olmadan "ben idesi", yani *cogito* oluşamaz. Buradan da Descartes'ın "Tanrı idesi"ni her bilginin ve her varoluşun temeline koyduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, doğru bilgilerin güvencesi Tanrı'nın kendisidir. Tanrı aldatıcı değildir. Tanrı idesine sahip olamazsak

hiçbir şeyin kesin bilgisine ulaşamayız. Descartes bunu *Meditasyonlar*'da şöyle dile getirir:

> (...) gayet açıkça görüp kabul ediyorum ki, her türlü bilginin doğruluk ve kesinliği sadece doğru Tanrı'nın bilinmesine bağlıdır, öyle ki, onu tanımadan önce hiçbir şeyi tam olarak bilemezdim. Şimdiyse onu bildiğimden ötürü, pek çok şeyin yetkin bilgisini edinme olanağım var; yalnız onda bulunan şeylerin değil-kendisinin varlığına hiç kulak asmayan-geometricilerin kanıtlamalarına konu olabildiği kadarıyla cisimli doğaya ait olanların bilgisini de (...) (Descartes, 2007: s. 65-66).

Özetle; Descartes'ın, matematiği akıl bilgisi olarak görse bile genelde matematiğin özelde de aritmetiğin yargılarına ilişkin Kantçı anlamda bir söylemden ve böyle bir temellendirmeden uzak olduğunu görmekteyiz. Descartes'ın her türlü bilginin doğruluğunu ve kesinliğini, hatta matematiksel doğruları "Tanrı idesi" üzerine kurduğunu anlıyoruz.

Sayı ve matematiğe ilişkin felsefi yaklaşımları olan diğer bir matematikçi- filozof da Leibniz'dir. "Matematiksel analiz"in kurucusu olarak Leibniz, Newton'la aynı yüzyılı paylaşmıştır. Sayı sistemleri üzerine yaptığı çalışmalarla tanınan Leibniz, aynı zamanda iki tabanlı sayı sistemi hakkında ilk temel fikirleri ortaya koymuştur. Kendi döneminde, matematikte yaptığı çok önemli çalışmalarla modern çağın matematiğinin temellerini atmıştır (Aksoy, 2000: s. 167). Rasyonalist bir filozof olan Leibniz'e göre matematik, deneyimden bağımsız akıl bilgisidir. Matematik analitik yargılardan oluşmuştur, evrensel ve zorunlu hakikatlara yalnızca matematikle

ulaşılabilir (Yalçın, 2003a: s. 130). Leibniz'e göre "Aritmetiğin tamamı doğuştandır ve bizde olanak olarak [*virtuelle*] bulunur" (Leibniz'den akt. Frege, 2008: §11 s. 103). Leibniz'in sayıya eğildiğini, tanımladığını görmekteyiz. Leibniz'e göre bölünebilen bir sayı, örneğin "$\frac{1}{2}$" kesiri tekrar "4"e, "8"e, vb. bölünebilir, biz hiçbir zaman en küçük kesire (*smallest fraction*) ulaşamayız. Dolayısıyla sayıyı, ulaşamadığımız en küçük kesirlerin bir araya getirilmesiyle biçimlenen bir toplam olarak düşünebiliriz (Leibniz, 1998: s. 184).

Pythagorasçı öğretinin devamında yer alan Leibniz, her şeyin özünün sayı olduğunu iddia eder. İkili sayı sisteminin yapısı gereği bütün sayılar "0" ve "1" kullanılarak tanımlanır. "0"ı yokluk, "1"i de Tanrı olarak tanımlayan Leibniz, her şeyin "0" ve "1"in karışımından ibaret olduğunu ileri sürer. Matematik ve teoloji Tanrı'ya ulaşmak için merdivenin birer basamağıdır. Tanrı ise kusursuz bir matematikçidir. Çünkü Tanrı her şeyi bir sayıya ve ölçüye göre yaratmıştır (Gür, 2005: s. 91-96). Frege'ye göre, Leibniz herhangi bir sayma sayısını "1" ve "1" ve "1" veya birlikler biçiminde tanımlamaktadır (Frege, 2008: §37 s. 132). Leibniz'de sayı bir idedir ve Leibniz, "Bir çift sayı iki eşit parçaya bölünebilir, ama bir tek sayı bölünemez; (...)" (Leibniz'den akt. Frege, 2008: §10 s. 100) biçimindeki bir ifadeyle, tek ve çift sayı farkını bölünebilme işlemine göre tanımlamaktadır.

Matematikçi bir filozof olan Leibniz'in, matematiksel bilginin doğruluğu ve kesinliğine olan güveni oldukça yüksektir. Dahası, Leibniz fikir kavgalarının son bulması için düşüncelerin matematik diliyle ifade edilmesi gerektiğini savunur.

Çünkü düşüncelere doğruluktan ziyade, daha çok hisler (duygular) karışmaktadır. Eğer düşünceler matematikselleşirse, farklı düşüncelere sahip olan filozoflar matematiksel bilginin kesinliğiyle fikirsel doğrulara ulaşabilirler (Gür, 2005: s. 91-92). Matematikçilerin filozof, filozofların da matematikçi olması gerektiğini söyleyen Leibniz, matematiği mantığa daha yakın bulur. Kant'ta analitik *a priori* ve sentetik *a priori* yargıların farkı, çalışmanın önceki bölümünde ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştı. Burada, yeri gelmişken Leibniz'in tüm matematiksel doğruları analitik önermeler olarak kabul ettiğini özellikle belirtelim. Görüldüğü gibi Leibniz, Kant'ın aritmetik görüşünün tersine, matematiği bütünüyle bir analitik önermeler alanı olarak tanımlamaktadır.

Empirist bir filozof olan John Locke'un Kant'tan hemen önce *İnsan Anlığı Üzerine Bir Deneme*'sinde sayı kavramına eğildiğini görmekteyiz. Locke'a göre sayı "en basit ve en evrensel ide"dir. Çünkü ideler arasında "bir" ya da "birim" idesinden başka insan zihnine sunulan daha yalın bir ide yoktur. Bu idede hiçbir biçimde bileşiklik izi bulunmaz ve zihnimizdeki her düşünce bu ideyle birlikte oluşur. Sayı, var olan ya da düşünülen her nesneye uygulanabildiği için ideler arasında en evrensel, düşüncemize en yakın idedir. Bileşik ideler ise birimin birime eklenmesiyle elde edilir. Bir başka deyişle, birim idesi yinelenip, bir başka birimle birleştirilerek diğer sayıların ideleri elde edilmektedir (Locke, 1992: s. 150-151).

Bir başka anlatımla Locke, "1"i birim idesi olarak tanımlar. Birime, birim kadar eklenerek bileşik ve ortak bir ide olan "2" sayısı elde edilir. Bir çift sayı olan bu

ortak ideye tekrar birimler eklenerek yeni ideler, yeni sayılar bulunur. Sayıları zihinde tutabilmek ve izlemek için onlara adlar verilir. Her bileşik ide, farklı birimlerden oluştuğu için farklı adlar alır. Locke'un bu sözlerinden, sayı adlarının, sayıların niceliksel özelliklerini gösteren kavramlar olduğunu anlıyoruz. Bu adlar, farklı zihinsel çerçeveler olarak, bize sayının niceliği hakkında bilgi vermektedir. Sayı adları, sayıların ardışıklığını ifade ettiği için sayma işleminin yapılmasını mümkün kılmaktadır. Biz sayıları, bu adlar altında düşünüyoruz. "Bir birim idesinin yinelenmesiyle ve onu başka bir birime eklemekle, iki sözcüğüyle gösterilen bileşik bir ide yapmış oluyoruz. Ve kim bunu yapabilir ve böyle devam edebilirse, herhangi bir sayı hakkındaki son bileşik ideye bir tane daha ekler ve ona da bir ad verirse, sayabilir" (Locke'tan akt. Frege, 2008: §37 s. 132). İnsan bu adları sayılarıyla birlikte zihninde tutabileceği bir belleğe sahip olduğu ölçüde, bu sayı dizileri zihinde seçik kalır. Locke, sayı sayarken bir sonraki sayının söylenebilmesi için bir öncekinin bilinmesi gerektiğini ileri sürer. Eğer art arda sayarken sayılardan biri unutulacak olursa boşluk oluşur ve ileriye doğru sayma işlemi aksar. Locke'a göre sayma işleminin olması için iki koşul gereklidir: "(1) zihin birbirinden yalnızca bir birimin eklenmesi ya da çıkarılmasıyla ayrılan iki ideyi dikkatle ayırt edebilmeli; (2) yine zihin ilk birimden o sayıya dek birçok bileşimlerin adlarını ya da imlerini, karışık ya da rastgele değil de, sayıların birbirini izlediği sağın düzen içinde, belleğinde tutabilmelidir" (Locke, 1992: s. 152).

Bu iki koşuldan biri aksarsa doğru bir sayma işlemi yapılamaz. Sayma işlemi yapılamadığı için de, daha önce adlandırılan sayı ideleri bulanık bir nicelik olarak insan zihninde yer alır. Locke, sayma işlemi için belleğin önemine işaret etmektedir. Çünkü bellek, bir önceki sayıyı tutarak bir sonraki sayının bulunmasına yardımcı

olur. Bizdeki uzay ve zaman ideleri bir bakıma sonsuz sayı idelerinin toplamına karşılık gelen sonsuz çokluğa benzer. Dahası, sonsuz sayıların birbirine eklenmesiyle hiçbir zaman sayıların sonuna yaklaşılmaz. İşte, sayıların birbirine eklenmesiyle elde edilen sonsuz çokluklar insana sonsuzluğun en açık ve seçik idesini vermektedir. Locke'ta sayıya ad verme, belleğin sayıyı tutma-bağlama gibi işlevlerini, Kant'ta transandantal *apperception* saf düşünme edimi "saf ben"i tesis ederek gerçekleştirmektedir. Locke, "1"den büyük ve bileşik ide olarak adlandırdığı sayıların oluşumunu birim idesiyle ve birimin eklenmesi işlemiyle açıklamaktadır. Fakat, "birim idesi"nin nasıl oluştuğunu aydınlatmaya girişmemektedir. Buradan, Locke'un sayının inşasını açıklama gibi bir çabasının olmadığını görmekteyiz. Başka bir deyişle Locke, sayıyı Kant gibi *a priori* görü formu olan zaman temelinde, bilme yetilerinin bir faaliyeti olarak ele almaktan uzaktır.

David Hume, matematiği, geometri ve aritmetik olarak ikiye ayırır. Hume'a göre cebir ve aritmetik eksiksiz sağınlığı ve kesinliği olan biricik bilimlerdir. Geometri ise aritmetik ve cebire özgü sağınlığa ve kesinliğe erişemez. Empirist bir filozof olan Hume, önemli eseri *An Enquiry Concerning Human Understanding*'te matematiksel bilginin sahip olduğu kesinlik ölçütünün onu deneyimsel bilgiden farklı kıldığını ileri sürer. Dahası, idelerarası ilişkileri ifade etmesi nedeniyle matematiksel yargılar analitiktir (Hume, 1993: s. 15). Kant, *Pratik Aklın Eleştirisi* adlı yapıtında, Hume'un matematiği analitik önermeler olarak kabul ettiğine vurgu yapmaktadır. "Fakat HUME bile deneyciliği, matematiği de kapsayacak kadar genelleştiremedi. O, matematiğin önermelerini analitik saydı. Bu doğru olsaydı, bu önermeler gerçekten de zorunluklu olurdu. Ama bundan, aklın felsefede de zorunluklu, yani (nedensellik önermesi gibi) sentetik yargılarda bulunma yetisine sahip olduğu konusunda bir

sonuç çıkarılamazdı" (Kant, 1999: s. 14). Hume'un matematiği analitik olarak görmesi, Kant'ın diliyle Hume'un saf matematiğin analitik *a priori*, metafiziğin ise sentetik *a priori* yargılar alanı gördüğü yönünde bir söylemi vardır. Hume'un bu söylemi Kant'ın eleştirisine hedef olur; Kant bu eleştirisini *Prolegomena*'da şu şekilde dile getirir:

> "Saf Matematik sırf analitik, oysa Metafizik sentetik *a priori* önermeler içerir" demiş kadar oldu. Ama burada büyük bir yanılgıya düştü ve bu yanılgı, onun tüm anlayışı için önemli, sakıncalı sonuçlar yarattı. Eğer böyle yapmamış olsaydı, sentetik yargılarımızın kökenine ilişkin sorusunu nedenselliğin metafizik kavramının çok ötesine götürmüş ve onu *a priori* matematiğin olanağına kadar genişletmiş olacaktı; çünkü bunu da aynı şekilde sentetik kabul etmesi gerekirdi. Bu böyle olunca, Metafizik önermelerini hiçbir şekilde sırf deney üzerine temellendiremeyecekti, çünkü aksi takdirde aynı şekilde Saf Matematiğin aksiyomlarını da deneye bağımlı kılacaktı ki, bunu yapamayacak kadar kavrayış sahibiydi (Kant, 2002: §2).

Kant'a göre, metafiziğin bir bilim alanı olarak gerçek olduğu kabul edilmemiş olsa da, saf matematik ve doğa bilimlerinin sentetik *a priori* bilgiler alanı olduğu bir gerçektir. Bu bilgilerin sentetik *a priori* oldukları güvenle söylenebilir (Kant, 2002: §2). Hume ve Kant'ın aritmetik görüşleri karşılaştırıldığında, Hume'un Kant gibi aritmetiği sentetik *a priori* yargılar alanı olarak değil, analitik *a priori* yargılar alanı olarak gördüğü anlaşılmaktadır.

2.2. Kant'ın Aritmetiğin Yargılarına İlişkin Görüşüne Karşı Çıkışlar ve Yeni Arayışlar

Kant'ın aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğu savı, matematik felsefesinde matematiğin temellerine ilişkin farklı felsefi söylemlerin, yaklaşımların ve sonuçların doğmasında etkin bir rol oynamıştır. Bir başka anlatımla, Kant sonrası matematik felsefesinde iki farklı yaklaşımın olduğunu görmekteyiz. Bunlardan biri, felsefelerinde matematiği düşüncenin temeli sayan ve bu doğrultuda felsefi söylem geliştiren yaklaşım, diğeri de, matematiği ya da matematiksel düşünmeyi düşünmenin temeli olarak görmeyen, dolayısıyla da matematiği felsefi söylemlerinin dışında tutan yaklaşımdır.

Çitil de, Kant sonrası matematiğe ilişkin genel olarak iki farklı yaklaşımın olduğunu ileri sürmektedir. Bu yaklaşımlardan biri, matematiksel nesnenin tesisini düşüncenin temel bir problemi olarak gören ve bu doğrultuda temellendirme çabasına girişen yaklaşım olurken diğeri de, matematiksel nesnenin tesisi problemini ontolojik bir meselenin dışında tutmaya çalışan yaklaşımdır. Örneğin, Friedrich Hegel'in matematiksel ve felsefi hakikat arasında temel farklılıkların olduğunu ileri sürmesi ve matematiksel hakikati temel alan yaklaşımların dogmatik görüş olduğu iddiası, matematiğin *a priori* nesnesinin tesisini ontolojinin esas sorunlarından biri olarak görmeyen yaklaşım dahilinde kaldığını göstermektedir (Çitil, 2000: s. 26-27). Dahası, Kant sonrası Eukleides dışı geometrilerin ortaya çıkmasının, sayının inşası sorununu ontolojik bir problem olarak görmeyen kimii düşünürlerin görüşlerinin kabul görmesine zemin hazırladığını anlıyoruz. Bütün bu gelişmeler, 20.yüzyılda

Eukleides geometrisinin aksiyomlarının evrensel ve zorunlu olamayacağı yönündeki iddiaları güçlendirmiştir. Eukleidesçi olmayan geometrilerin, Eukleides'in "bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir" biçimindeki beşinci aksiyomu dikkate alındığında, Eukleides'inkiyle tutarlı olmayan önermeler içerdiği görülmektedir. Tanınmış bir matematikçi olan Nikolai Lobachevsky, "bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan o çizgiye iki paralel çizilebilir" önermesiyle Eukleides'in paralel aksiyomunu değiştirdiğini iddia ederken, diğer bir ünlü matematikçi Bernhard Riemann ise küresel geometride "bir doğruya kendi dışındaki bir noktadan hiçbir paralelin çizilemeyeceğini savunmaktadır (Çitil, 2012b: s. 31).

Daha önceki başlıklar altında belirtildiği gibi Kant, matematiksel bilginin saf görü temelinde oluştuğunu, yani matematiğin tümünün saf görüye dayandığını savunmaktadır. Eukleides dışı geometrilerin kurulmasıyla birlikte, Kant'ın, Eukleides geometrisinin hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formu olan uzay görüsünü temel aldığı görüşünün sarsılmasına neden olduğunu söylemek mümkündür. Geometride yaşanan bu gelişmelerden, özelde aritmetiğin genelde matematiğin mantıksal olana indirgenmesine yönelik bir eğilimin ortaya çıktığını, dolayısıyla görüsel bilgiye gönderme yapılmadığını görmek mümkündür. Çitil'e göre *a priori* olanın salt dilin sınırları içerisinde temellendirilebileceğini savunan bu yaklaşım, mantıksal olanın bilgisinin nereden kaynaklandığı sorusunu yanıtsız bırakmıştır.

> Mantıksal biçimler (mantıksal doğru önermelerin ve geçerli çıkarımların biçimleri), eğer olgular olarak görülürse kendileri hakkında kavramsal bir bilgiye sahip olduğumuzdan söz edebiliriz. Lakin bu takdirde, mantıksal olan *a posteriori* bir

> statüye sahip olacaktır ki bu, çok kolaylıkla savunulabilir bir görüş değildir. Eğer, mantıksal olan hakkındaki bilgimiz kavramsal değilse, geriye kalan bir seçenek, söz konusu bilginin görüsel olduğudur. Ancak bu suretle, Kant'ın eleştirdiği ve aşılmasına katkıda bulunduğu bir bilgi türü olarak entelektüel görü, tekrar devreye sokulmaktadır. Bu da eşit ölçüde kabul edilemez bir durumdur (Çitil, 2012b: s. 33).

Burada, söz konusu geometri tartışmalarının "dil-nesne" bağıntısına ilişkin Kantçı olmayan bir yaklaşıma yol açtığına özellikle işaret edelim. İzleyen başlıklar altında da ele alacağımız "mantıkçı", "biçimci" ve "sezgici" gibi kuramsal yaklaşımların; bu tartışmalardan ilham aldığını, fakat matematiği sorunsuz bir biçimde temellendirilmesi bakımından arzu edilen sonuçlara ulaşamadıklarını belirtelim.

Piaget'nin sayının inşası problemine yaklaşımı Kant'ın görüşlerine paralellik sağlasa da, onun çalışmaları ve yaklaşımı matematiksel nesnenin inşasını ontolojiye temel teşkil eden bir problem olmaktan çıkarmaya yöneliktir (Çitil, 2000: s. 30-31). Çitil'e göre Jean Piaget, bebekler ve çocuklarda matematiksel, mantıksal ve fiziksel kavramların oluşumunu inceleyerek "genetik epistemoloji" olarak adlandırılan yeni bir disiplini kurmuştur. Piaget, çocuklarda bu kavramların; bebeklikten itibaren, nesnelerin itilmesi, çekilmesi, bir araya toplanması, ayrılması gibi etkinliklerin içselleştirilmesi sonucunda oluşturulduğunu iddia etmektedir. Yeri gelmişken Piaget'nin, sayının inşası konusundaki Kant'ın görüşüyle kesişen dikkate değer yaklaşımını Çitil'in yaptığı çeviri ile vermek uygun olacaktır.

> Bizim varsayımımız, sayının inşasının, mantığın gelişimi ile el ele yürüdüğü ve sayı-öncesi dönemin mantık-öncesi döneme karşılık geldiğidir. Ulaştığımız sonuçlar,

> sayının, aşama aşama, içerme sistemlerinin (mantıksal sınıfların hiyerarşisinin) ve asimetrik bağıntı sistemlerinin (niceliksel sıralamaların) kademeli olarak işlenmesi ile ilişkili olarak düzenlendiğini ve sonuçta işlemsel bir sınıflandırma ve ardarda dizme terkibi ile sayıların sırasının ortaya çıkarıldığını göstermektedir. (...) aynı sistem, niceliksel özelliklerini dışlayarak kümelere uygulandığında, unsurların, tek bir işlemsel bütünlükte içerilmesi ve sıralanması ortaya çıkmaktadır ve bu bütünlük, ayrılmaz bir biçimde hem sayal (kardinal) hem de sıral (ordinal) olan tam sayıların sırasını tesis etmektedir.[11]

Hegel ve Piaget'nin yaklaşımlarının tersine, Frege ve Edmund Husserl'in matematiksel nesnenin kurulumu problemini, düşüncenin temel problemlerinden biri olarak gördükleri ve bu doğrultuda teorik temellendirme girişiminde bulundukları söylenebilir. Husserl'in, Kant'ın aritmetiği temellendiremediği düşüncesiyle yola çıktığını ve hayatı boyunca çalışmalarının merkezinde aritmetiğin ve formel mantığın temellendirilmesine yer verdiğini, tüm bilgiyi ve mantığı transandantal fenomenoloji yöntemiyle temellendirmeye çalıştığını söylemek mümkündür. Husserl'in bu alanda geliştirdiği görüşler bu çalışmanın konusu olmadığı için ele alınmayacak, odak noktası durumundaki Frege'nin yaklaşımı ayrıntılarıyla incelenmeye çalışılacaktır.

Kant'ın aritmetik görüşüne karşı bir duruş olarak Frege'nin aritmetiğin yargılarına ilişkin görüşü, matematiğin felsefi temelleri hakkındaki görüşlerden biri olan "mantıkçılık" görüşüne karşılık gelmektedir. Mantıkçılık anlayışı çerçevesinde Frege, aritmetiğin temel yasalarının mantığın yasalarıyla aynı olduğunu, dolayısıyla aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini ileri sürmektedir. Frege, bu iddialarıyla ilgili

[11] Bu alıntının çevirisi ve vurgusu Ayhan Çitil'e aittir (Çitil, 2000: s. 31-32).

çalışmalarını tamamlama aşamasındayken yaklaşımında Bertrand Russell tarafından ortaya çıkarılan paradoks, aritmetiği mantığa indirgeme çabalarını sarsmıştır. Daha sonra Russell ile Alfred Whitehead'in Frege'nin çalışmalarını tamir etmek, matematiğin tamamını saf mantıkta temellendirmek amacıyla yazdıkları *Principia Mathematica* adlı üç ciltlik kitabın matematik dünyasında çığır açtığı ve bu amaca kısa süre de olsa hizmet ettiği görülmektedir. Frege'den sonra "biçimciliğin (formalizmin)" öncüsü olarak kabul edilen matematikçi David Hilbert, sonlu sayıdaki aksiyomlar üzerinde matematiğin tümünün "tam" ve "tutarlı" olabileceğini ispat etmeye çalışır. Hilbert'in bu tezinin ardından matematikçi Kurt Gödel, iki eksiklik teoremiyle principia mathematica ve benzeri formel sistemlerin "tam" olmadığını, yani ispatı verilemeyen doğru önermeler barındırdığını ve bu tür sistemlerin tutarlılığının aynı formel sistem içinde ispatlanabilmesinin olanaksız olduğunu göstermiştir. Russell'ın, Frege'nin çalışmalarında bulduğu paradoksla mantıkçılığın ve Gödel'in çalışmalarıyla da Hilbert'in öncülüğündeki biçimci yaklaşımın sarsılması matematiğin temellerine ilişkin diğer bir görüş olan sezgiciliğin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır.

Mantıkçılık ve biçimciliğe karşı bir tepki olarak ortaya çıkan "sezgicilik", matematiksel nesne ve kuruluşların varlık sorununu ön plana alır; matematiğin inşa yöntemiyle doğal sayılar üzerine kurulabileceğini iddia eder. Luitzen Egbertus Jan Brouwer ve Arend Heyting gibi matematik felsefecileri öncülüğünde geliştirilen sezgiciliğe göre, matematiğin ne mantığa indirgenmesine ne de tutarlılık adına içerikten yoksun simgesel bir dizgeye dönüştürülmesine gerek vardır. Brouwer'a göre matematik insan zekâsının bir etkinliği, evrim sürecinin bir ürünü, diğer bilimlerde olduğu gibi sınama ve yanılmaya açık, değişen, büyüyen bir çalışma

alanıdır. Matematikte simgesel form ya da dizgenin bir önemi yoktur, önemli olan düşünme etkinliğidir. Sezgiciler, matematikte tutarlılıktan daha çok sezgisel verileri, zihinsel inşaların oluşturduğu kanıtları önemserler. Onlara göre matematiğin en sağlam temeli sezgisel olarak oluşan doğal sayılarda ve onlara ilişkin işlemlerde aranmalıdır. Bir başka deyişle, matematikte oluşan her nesne ve kavram doğal sayılardan kalkarak kurulabilir. Matematiksel nesnenin inşasını bilme konusu yapması bakımından sezgici düşüncenin kökenlerinin Kant'a kadar uzandığı ileri sürülmektedir. Bu savı, daha ilerideki bir başlık altında Kant ve Brouwer'ın matematik görüşlerini karşılaştırarak aydınlatmaya çalışacağız.

Toparlayacak olursak; Frege'nin temsil ettiği mantıkçı görüşün sarsılmasından sonra, matematiğin temellerine ilişkin farklı felsefi görüşler olan, "biçimci (formalist)" ve "sezgici" yaklaşımlar ortaya çıkmıştır. Matematiğe sağlam bir felsefi temel bulma arayışında olan bu yaklaşımların başlangıç dönemlerindeki canlılıkları kalmamış olsa da, neden oldukları tartışmalar günümüzde de devam etmektedir. Bu bölümün içeriğini kısaca özetledikten sonra, şimdi Frege'den başlayarak bu görüşleri tek tek ele almaya çalışalım.

2.2.1. Kant'ın Aritmetik Görüşüne Karşı Bir Duruşun Öncüsü Olarak Gottlob Frege

Kant sonrası özellikle 20. yüzyılda, yargılara ilişkin olarak yürütülen analitik-sentetik ayrımı tartışmalarının odak noktası, bu tür yargıların oluşumunu değil, daha çok varlığını ya da yokluğunu sorunsallaştırmıştır. Bu bakımdan, Kant'ın transandantal felsefesinde aritmetiğin yargılarının sentetik *a priori* yargılar olarak olanaklılığının matematik felsefesinde doğurduğu sonuçları araştırmak, matematik felsefesi açısından önem kazanmaktadır. Çünkü sayı aritmetiğin temelidir; sayı kavramı aydınlatılmadan da aritmetik ve onun diğer bir dalı olan cebir (genel aritmetik) aydınlatılamaz. Bu bakımdan bu çalışma, Kant'ın görüşünün aksi yönünde bir görüş geliştiren yaklaşımların matematik felsefesi açısından bugün bulunduğu noktayı aydınlatacak olması bakımından da önem taşımaktadır. Kant'ın aritmetiksel yargılara ilişkin kuramının neden olduğu tartışmalar kapsamında bakıldığında felsefenin üzerine düşen bir görevi olmalıdır; Kant'ın deyişiyle bu "(...) görev de yanlış yorumlamadan doğan suretleri [*semblance*] ortadan kaldırmaktır" (Kant, 1998: Axiii).

Frege ve Kant'ın düşüncelerinin birçoğunun birbirinden farklı olmasına rağmen matematik felsefesi açısından sorun ve söylem zeminlerinin birbirine benzediği söylenebilir. Dahası, Frege'nin aritmetiğin yargılarına ilişkin iddialarını doğru anlamak için onun çalışmalarını Kant'la bağlantılı olarak değerlendirmek gerekmektedir.

2.2.1.1. Frege'nin Sayı ve Sayal Sayı Tanımı

Matematik felsefesi tarihinde Kant'ın aritmetiğin yargılarına ilişkin görüşlerine karşı çıkan pek çok düşünürle karşılaşmak olanaklıdır. Bunlardan örneğin Aschenbrenner ve Friedman'ın görüşlerine burada kısaca yer verilebilir. Aschenbrenner, "104.787.223 + 888.926.415 + 688.923.147 = 1.682.636.785" gibi bir toplama işlemini özel yeteneği olan kimselerin yapabileceğini belirtir ve Kant'ın aksine, sayıların daha büyük ve işlemin daha karmaşık olması durumunda doğru sonuca ulaşmak için "zaman görüsü"nün gerekliliği görüşünü sorunlu bulur (Aschenbrenner, 1983: s. 11). Friedman da aritmetiğin *a priori* zaman görüsünün, geometrininse *a priori* uzay görüsünün bilimi olduğu gibi iddiaların başa çıkılmaz zorlukları beraberinde getirdiğini ileri sürer. Dahası Friedman'a göre:

> Bu konuya yönelen dikkatli yazarların gözlemlerinden de anlaşılacağı gibi, Kant'ta aritmetiğin zaman görü formunu temel alması düşüncesinin geometrinin uzay görü formunu temel alması düşüncesi kadar güçlü olduğu söylenemez. Yani, geometrinin sentetik saf bilgisi uzayın saf görüsü açısından açıklanabilir, fakat aynı şey aritmetik için söylenemez. Nitekim Kant, aritmetiğin zaman görüsünün bilimi olduğunu düşünmez, yani zaman saf görüsünün aritmetik için bir model inşa etmediği açıktır. Aritmetik için bir model, ardışık fonksiyon [*successor function*] içermelidir ve bu şekilde ayırt edilmiş birimin [*distinguished unit*], zamanın kendisinde olmadığı açıktır (Friedman, 1994: s. 105).

Matematik felsefesinde hem Aschenbrenner'ın hem Friedman'ın, hem de kimi diğer düşünürlerin Kant'ın aritmetik görüşünü sorun edinmeleri bu alanda bir başlangıç noktası değildir. Kant'tan kırk dört yıl sonra, modern sembolik mantığın

kuruculuğunu yapmış, çağdaş dil felsefesinin yolunu açmış ve de analitik felsefe geleneğini başlatmış mantıkçı, matematikçi bir filozof olan Frege'nin sayı kavramını Kant'tan farklı tanımladığını görüyoruz. Frege, geometrinin "sentetik *a priori*" yargılar alanı olduğu konusunda Kant'la aynı doğrultuda düşünürken, aritmetiğin sadece *a priori* görüyü temel almadığını, sayının yalnızca *"a priori"* bir nesne olmayıp aynı zamanda "mantıksal bir nesne" de olduğunu, bundan dolayı da aritmetiğin bir "analitik *a priori* yargılar" alanı olduğunu iddia etmektedir.

Şimdi, Frege'nin aritmetiğin yargılarına ilişkin görüşünün ayrıntılarına geçmeden önce sayı kavramına ilişkin iddialarına yer verilim. Frege sayı kavramının aydınlatılmasını kendisine bir görev bilir ve şöyle der: "(...) birçok matematikçinin kabul edebileceğinden daha fazla felsefi uslamlamaya yöneldiğimi fark etttim; ancak sayı kavramını çok ayrıntılı bir şekilde ele alan her inceleme her zaman felsefi olmak durumundadır. Böyle bir inceleme hem matematikçiler hem de felsefeciler için ortak bir ödevdir" (Frege, 2008: s. 81 "Giriş"). Frege sayıyı uzaysal, fiziksel, öznel bir tasarım olarak ya da duyusal bir şey olarak görmez, ona göre sayı nesnel bir şeydir. Nesnellik ise tümüyle duyu izlenimlerinin dışında akli bir etkinliğe dayandırılabilir. Frege'ye göre sayı şeylerin bir yığını da değildir, yani sayı şeylerin birbirine eklenmesiyle meydana gelmez. "Eğer sayıyı çeşitli farklı nesneleri yan yana getirerek oluşturmak istersek, elde ettiğimiz sonuç, içindeki nesnelerin, onları birbirlerinden ayırmaya yarayan özellikleriyle içerildikleri bir yığılmadır ve bu da sayı değildir" (Frege, 2008: §39 s. 134).

Sayılar, niteliksel durumları ifade etmek için, yani sert, ağır ya da mavi gibi dışsal özellikleri anlatmak için dilde sıfat biçiminde görünürler. "Sayal sayı"[12] ve renk arasında ise bir benzerlik kurulabilir. Bu benzerlik, her ikisinin de duyular yoluyla nesnenin dışsal özelliğini anlatmasından değil, ikisinin de nesnel olmasından kaynaklanır. Frege burada "sayı"yı bir kavram olarak, "sayal sayı"yı ise bir kümenin toplam eleman sayısını veren bir tamsayı olarak düşünür. Frege, "Yeryüzünün ekseni, Güneş Sisteminin kütle merkezi nesneldir, ancak bunlara Yeryüzünün kendisi gibi fiili gerçek diyemem" (Frege, 2008: §26 s. 119) sözüyle "nesnel" olan ile "fiili gerçek" ya da "dokunulabilir" olan arasındaki ayrımı somutlaştırır.

Frege'de sayı aynı zamanda zihinsel süreçlerin öznel bir ürünü de değildir. Zihinsel süreçler, sayı tümcesinin oluşmasını önceleyen bir etkinlik olarak doğruluk barındırsa bile "(...) gerçek bir kavramsal belirlenimin yerini hiçbir zaman alamaz" (Frege, 2008: §26 s. 118). Frege, zihinsel süreçlerin aritmetiksel önermelerin kanıtlanmasında etken olamayacağını ve sayıların özellikleriyle ilgili bize hiçbir şey kazandırmayacağını ileri sürer. Frege'nin "zihinsel süreçler" deyiminden aklın etkinliği dışındaki duyusal ve psikolojik süreçleri işaret ettiğini anlamaktayız. Frege, "Eğer 'Kuzey Denizi'nin alanı yaklaşık 10000 mil karedir' diyorsam, ne 'Kuzey Denizi' ile ne de '10000' ile bendeki içsel (zihinsel) bir sürece başvuruyorumdur; aksine bizim tasarımlarımızdan ve benzer her şeyden bağımsız olan, son derece nesnel bir şey ileri sürüyorumdur" (Frege, 2008: §26 s. 118) sözüyle sayının nesnel olduğuna vurgu yapmaktadır. Frege'nin nesnellikten; akıldan bağımsız olmayı değil,

[12] Frege, "sayı" sözcüğü için *Zahl* ve *Anzahl* terimlerini kullanıyor. *Zahl* genel anlamda sayı kavramıdır. *Anzahl* ise, sayal (kardinal) sayı anlamındadır; sayal sayı, bir kümenin öğelerinin toplam sayısını veren, yani "kaç tane" sorusuna yanıt veren tamsayıdır. Frege'nin bu çalışmada konu aldığı *Anzahl*'dır (Ayr. bkz. 7. dipnot). Çeviride *Zahl* için "sayı", *Anzahl* için ise "sayal sayı" sözcükleri kullanılmıştır (Frege, 2008: s. 87 çevirenin dipnotu).

belleğimizde daha önceki duyumlarımızdan oluşmuş olan içsel imgelerden bağımsız olmayı anladığını görüyoruz. Eğer, sayı öznel bir tasarım olursa aritmetikte psikolojik bir boyut olacaktır. Çünkü öznel anlamda bir tasarım, duyusal yapısından dolayı içinde psikolojik çağrışımları barındırır. Oysa, nesnel tasarımlar duyusallığın dışındadır, dolayısıyla tüm insanlarda aynıdır ve mantığa aittir. Öznel tasarımlar farklı insanlarda farklı biçimlerde ortaya çıkabilir. Eğer sayı öznel tasarım olsaydı farklı insanlar, aynı aritmetiksel işlemlerden farklı sonuçlar bulacaktı.

> Eğer iki sayısı bir öznel tasarım olsaydı, yalnızca bana özel bir şey olurdu. Başka bir insanın öznel tasarımı da, işte bundan dolayı, başka bir tasarım olacaktır. Eğer böyle olsaydı, elimizde milyonlarca iki olması gerekirdi. Böylece benim ikim, senin ikin, diye konuşabilirdik; bir ikiden ve tüm ikilerden söz edebilirdik (Frege, 2008: §27 s. 121).

Görüldüğü gibi Frege'ye göre sayılar ne uzaysal, ne fiziksel ne de öznel tasarımlardır. Sayılar nesnel şeylerdir. Nesnellik de tümüyle öznel olan duyu izlenimlerine dayandırılamaz, yalnızca akla dayandırılabilir. Frege sayıların sadece kavramlara yüklenebileceğini ifade etmektedir. Başka bir deyişle Frege, bir sayı tümcesinin bir kavram hakkında bir bildirim içerdiğini (Frege, 2008: s. 142) ileri sürmektedir. Frege, bu iddiasının en çok "0" sayısında belli olduğuna işaret eder.

> Eğer "Venüs'ün 0 uydusu var" dersem, demek ki, hakkında bir şey öne sürülecek herhangi bir uydu ya da uydular grubu var olmamaktadır; ama burada "Venüs'ün uydusu" kavramına bir özellik, yani o kavramın altına hiçbir şey düşmeme özelliği atfedilmiş [*beilegen*] olmaktadır. Eğer "Kralın arabası dört at tarafından çekiliyor"

> dersem, “Kralın arabasını çeken at” kavramına dört sayısını atfetmiş olurum (Frege, 2008: §46 s. 142).

Kavram, altına düşen nesneyi belirlenmiş olarak sınırlar. Bir başka deyişle kavram, altına düşen nesnenin ayrışmasına, parçalanmasına izin vermez. Bu bakımdan kavram, sonlu bir sayal sayı hakkında bir birimdir. Örneğin, “evin üç odası vardır” tümcesinde “evin odası” kavramı aynı zamanda birimdir. Burada, “evin odası” kavramının altına, “x” odası düştüğü gibi “y” ve “z” odaları da düşmektedir. Yani, “x”in bağlı olduğu birimle “y” ve “z”nin bağlı olduğu birim aynıdır. Kavram ve altına düştüğü nesne ilişkisine baktığımızda, nesneler aynı birimin, yani aynı kavramın altına düşmektedir. Bu da, bize “aynılık” kavramını vermektedir. Burada, Frege’nin sözlerinden saymanın temel biriminin bir anlamda kavram olduğu anlaşılmaktadır.

“Aynılık” kavramı harflerin, nesnelerin kendi arasında değil, nesnelerin isimleri ya da bu nesnelerin sayı cinsinden değerleri arasında kurulan bir tür bağıntıdır. Örneğin, “m = m” ile “m = n” gibi iki cebirsel ifade arasındaki ayrımın zemininde, sayal sayının tanımında önemli bir işlevi olan “aynılık” kavramı vardır. “Aynılık” kavramı nesnelerin kendi arasında olsaydı, “m = m” ile “m = n” arasında bir fark olmayacaktı, yani bunların ikisi de aynı bilgi değerine sahip olacaktı. Halbuki “m = n” cebirsel ifadesinin doğru olabilmesi için “m” ve “n”nin aynı sayısal değere sahip olması gerekir.

Sayma işlemi ise, kavramlar arasında birebir eşleme oluşturmak anlamına gelir. Sayı-nesne ilişkisine baktığımızda, Frege'de sayının kendi başına var olan nesnelerin yerine duran bir tür sözcük olduğu ileri sürülebilir. Bir başka deyişle, sayı bir nesnenin özel adıdır. Örneğin, "Bir otomobilin dört tekeri vardır" dediğimiz zaman burada "dört" sayısı bir nesnenin özel adı olarak kullanılmaktadır. Paketlerin ağırlığından söz ettiğimizde, "ağırlık" bir sıfat olarak "paket" kavramını nitelerken, "yedi kırmızı koli" ifadesinde "kırmızı" bir sıfat olarak "koli" kavramını nitelemektedir. "Yedi" sözcüğünün "kırmızı koli" kavramını nitelediği düşünülmemelidir. Burada, "yedi" sözcüğü "koli" kavramı hakkında bir bilgi vermektedir. Öyleyse bir tümcede sayı, kavram hakkında bize bilgi verir.

Yeri gelmişken, Frege'nin, yargının kavrama öncelikli olduğu ve nesnenin yargıdan bağımsız olmadığı görüşüyle Kantçı bir çizgi izlediği söylenebilir. Frege'nin asıl amacı sayal sayının bir nesne olduğunu göstermektir. Fakat Frege, nesnenin ait olduğu mekânı gösterme gibi bir girişimi olmadığı için, burada Kantçı görüşten uzaklaşır. Dahası Frege yargı, kavram ve nesne gibi terimlere Kant'tan farklı anlamlar yükler. Gözkân'ın söyleyiş biçimiyle "(...) sayı gibi bir mantıksal nesnenin mekânının yargıdan başkası olamayacağı anlayışıyla yargının çözümlemesine girişmiş, (...) Bu yüzden, Frege'nin hedefinin dilsel bir çözümleme olmadığı, ama mantıksal nesnelerin mekânının belirlenmesi dolayımıyla bu nesnelerin asli doğalarının açıklığa kavuşturulması girişimi olduğunun altı çizilmelidir" (Gözkân, 2008a: s. 39). Frege'nin asıl amacının aritmetiğin yargılarına ilişkin söylemini oluşturmak olduğunu ve bundan dolayı sayıyı saf mantıksal açıdan ele alarak tanımlama girişiminde bulunduğunu anlıyoruz. Çünkü aritmetiğin yargılarının analitik ya da sentetik *a priori* olması sayal sayının tanımlanmasına bağlıdır.

Frege, *Aritmetiğin Temelleri'*nin girişinde sayal sayının tanımlanmasının önemine işaret eder. "(...) sayal sayının tanımlanması mı gerektiği, yoksa tanımlanmamış olarak mı kabul edileceği sorunu her şeyin üstündedir. Bu kitabın ortaya koymak istediği nokta tam da budur. Aritmetiğin yasalarının doğası hakkındaki karar, bu çalışmanın sonucuna bağlı olacaktır" (Frege, 2008: §4 s. 90). Frege'nin, sayal sayıyı tanımlarken, sayal sayının ontolojik mekânını araştırmadan tanımlama girişiminde bulunduğunu belirtmek istiyoruz. Frege, aritmetiğin temel yasalarını mantıksal kavram ve işlemlere indirgeyebilirse, bu yasalarının mantığın temel yasalarından türediğini gösterecek, dolayısıyla da aritmetiğin temel yasaların analitik doğruluklar üzerinde kurulduğunu ispat edip aritmetiğe ilişkin görüşünü ortaya koyacaktır.

Matematiğin mantıkla yakınlığının kabul edilmesi gerekir fakat psikoloji ile arasında bir yakınlık kurulamaz, yani matematik psikolojiden destek alamaz. Bir kanıtlamanın sağlamlığı ya da bir tanımın gerekçelendirilmesi mantığa dayanmalıdır. Matematiğin öğelerini araştıran her inceleme mantıkla sağlam bir zemine oturur. Dolayısıyla matematikçi ya da filozof, bilimin genel mantıksal temellerine yönelmek zorunda (Frege, 2008: s. 84-85 "Giriş") olduğunu ifade eden Frege, sayal sayının tanımında üç temel ilkeye bağlı kaldığını ileri sürmektedir.

> 1) Psikolojik olanı mantıksal olandan, öznel olanı nesnel olandan kesin bir biçimde ayırmak;
> 2) Sözcüklerin anlamını/gönderimini [*Bedeutung*] tek başına değil, ancak bir tümce bağlamında [*Satzzusammenhange*] ele almak;
> 3) Kavramla nesne [*Gegenstand*] arasındaki ayrımı asla gözden kaçırmamak (Frege, 2008: s. 85 "Giriş").

Birinci ilkeden, Frege'nin psikolojik öğeleri kavramlardan ve nesnelerden ayırma çabasında olduğunu anlamaktayız. Gözkân'a göre "Frege, öznel tasarım terimini psikolojik anlamda, yani bir sözcüğü duyduğumuzda veya okuduğumuzda zihnimizde oluşan öznel imgeler veya öznel çağrışımlar anlamında kullandığını ifade ediyor" (Gözkân, 2008a: s. 21). İkinci ilkede, Frege'de Kantçı bir yargı anlayışını görmekteyiz. Bu anlayışa göre, nesne ve kavramın mekânı yargıdır. Daha önce de değindiğimiz gibi, yargı kavrama önceliklidir; yargıdan bağımsız nesne ve kavram olamaz. Bu bakımdan sözcüklerin anlamı tümce içinde ve tümceyle birlikte ortaya çıkar. Üçüncü ilke, tümce içinde nesne ve kavram arasındaki ayrımın ortaya konmasını öngörmektedir. Bu farkın ortaya konması, sayal sayının tanımının yapılmasını mümkün kılacaktır. Frege'nin sayal sayı tanımını "aynılık (özdeşlik)" bağıntısını temel alarak yaptığını, analitik önermelere başvurarak aritmetiğin yasalarının analitik yargılar olduğunu göstermeye giriştiğini ve bunun sonucunda da aritmetiğe ilişkin iddiasını ortaya koyduğunu görüyoruz. Öyleyse aritmetiğin nesnelerinin, yani sayal sayının, saf görüye hiç ihtiyaç olmadan akla doğrudan verildiğinin gösterilmesi gerekir. Frege, "*Aritmetiğin Temelleri* kitabımda, aritmetiğin mantığın bir dalı olduğunu ve kanıtlamalarının zemini için deneyimden veya görüden destek almaya hiçbir şekilde ihtiyacı olmadığını göstermeye çalıştım. Şimdi bu mevcut kitapla, sayal sayının en yalın yasalarının sadece mantık yoluyla türetilmesiyle, bu teyit edilecektir. [*Aritmetiğin Temel Yasaları*. § 0]" (Gözkân, 2008a: s. 53) demektedir.

Kavram nesnel olandır ve mantıkla ilgilidir. Özel bir isim hiçbir zaman kavram değildir. Sayal sayının tanımında nesne ile kavram arasındaki ayrımın yapılması gerekir. Çünkü sayı bir kavram hakkında bir bildirim içermektedir ve sayma

işleminin tanımlanması için de kavram-nesne ilişkisinin çözümlenmesi gerekir. "Türkiye'nin il sayısı seksen birdir" tümcesinde kavram, "Türkiye'nin il sayısı"dır. Bu kavramın kaplamı "seksen bir" sayısıdır, yani "seksen bir" nesnesidir. Çünkü, bu tümcede "seksen bir" sözcüğü bir nesnenin özel adı olarak kullanılmaktadır. Daha önce işaret ettiğimiz gibi Frege'ye göre sayma işlemi, kavramlar arasında bir tür birebir eşleme yapmaktır. "Sayı kavramını elde edebilmek için, bir sayısal eşitliğin [*Zahlengleichung*] anlamını saptamamız gerekir" (Frege, 2008: §62 s. 155) der Frege.

Önceki sayfalarda değindiğimiz gibi, sayı bir kavramın bir özelliğini bildirmektedir. Bu da ikinci-düzey kavram olarak adlandırılan kavramla yapılmaktadır. İkinci-düzey kavramlar, birinci-düzey kavramlardan daha güçlüdür ve bu kavramların özelliği hakkında bilgi verir. Nesneleri içeren kavramlar ise birinci-düzey kavramlar olarak adlandırılır. Örneğin, "Antalya bir sahil kentidir" tümcesinde "Antalya" özel ismi bir nesnedir ve "sahil kenti olma" kavramının altına düşmektedir. Burada "sahil kenti olma" kavramı birinci-düzey kavramdır. Sayal sayının genel kavramı, birinci-düzey kavramların altına düşen ikinci-düzey bir kavramdır.

Dolayısıyla sayal sayı kavramı şöyle bir bağıntı aracılığıyla açıklanabilir. "F" ve "G" iki kavram olsun, "'F' kavramına ait olan sayal sayı ile 'G' kavramına ait olan sayal sayı aynıdır" ifadesinden; "F" kavramı ile "G" kavramının birebir eşlenebildiğini anlamaktayız. "F" kavramının altına düşen nesnelerle "G" kavramının altına düşen nesneler birebir eşlenebiliyorsa, "F" kavramının sayısal değerini bilmeden "F" kavramıyla "G" kavramının aynı sayıda olduğunu kabul edebiliriz.

Buradan da Frege, "aynılık(özdeşlik)" bağıntısını kullanarak, kavramlararası bağıntıdan nesnelerarası bağıntıya geçmektedir. Nesneler arasındaki birebir eşleme işleminin dayanağı ise mantığın özdeşlik yasasıdır. Burada özdeşlik yasasını (ilkesini) biraz açalım: "p" gibi bir önerme alındığında, "p→p" ifadesi geleneksel mantığın "özdeşlik ilkesi" olarak adlandırılan üç temel ilkesinden biridir. Yeri gelmişken temel sembolik mantığın; "özdeşlik ilkesi", "çelişmezlik ilkesi" ve "üçüncü durumun olanaksızlığı ilkesi" ile temellendirilen, bundan ötürü de 2-değerli bir mantık dizgesi olduğunu belirtelim. Bir başka deyişle temel mantık, "(...) Aristoteles mantığı kökenli geleneksel mantığın, formelleştirilmiş ve yetersizlikleri giderilerek yetkinleştirilmesi ile sürdürülen devamından başka bir şey değildir (Kutlusoy, 2003: s. 15).

Özdeşlik (aynılık) ilkesi üzerinden de Frege "0" ve "1" gibi tekil sayıları tanımlamaya geçecektir. "'Kendisiyle aynı olmayan' kavramının altına hiçbir şey düşmediğinden, sıfır sayısını şöyle tanımlıyorum: 0, 'kendisiyle aynı olmayan' kavramına ait olan sayal sayıdır" (Frege, 2008: §74 s. 168). "Kendisiyle aynı olmayan" kavramının altına hiçbir nesne düşmediği için, bu kavrama ait sayı "0"dır. "0", "1" ve "2" sayılarının tanımlanmasından sonra doğal sayılar kümesinde "n" gibi bir sayının "m"yi izlediğini, yani "n"nin "m"den sonra geldiği, başka bir deyişle "ardışık"lık kavramı tanımlanır. "F" kavramının altına düşen bir "x" nesnesi vardır ve bu kavrama ait olan sayal sayı "n"dir. "F"nin altına düşen, fakat "x"le "aynı olmayan" kavramının sayal sayısı "m"dir. Bu tümceden, "n"nin "m"den sonra geldiği sonucuna varıyoruz (Frege, 2008: §76 s. 171). Frege'nin temel amacı, aritmetiğin analitik *a priori* yargılar alanı olduğunu göstermektir. Bunun için sayal sayıyı tamamıyla psikolojik ya da fiziksel olanın dışında, sadece saf mantığın

“aynılık(özdeşlik)” kavramı aracılığıyla tanımlar. Böyle bir tanımlama girişimindeki amaç, aritmetiğin yasalarının saf mantık yasaları tarafından temellendirilebileceğini ortaya koymaktır. “1” sayısına ulaşmak için, doğal sayılar kümesinde “0”ı izleyen sayıyı göstermek gerekir. “‘0’la aynı olan” kavramının altına “0” sayısı düşmektedir. Fakat, “‘0’la aynı, ama ‘0’la aynı değil” kavramının altına hiçbir nesne düşmemektedir. Dolayısıyla, “0” bu kavrama ait sayal sayıdır. Buradan da, doğal sayılar kümesinde “‘0’la aynı olan” kavramına ait sayal sayının “0”ı izlediği sonucuna varılabilir. Başka bir deyişle “1” doğal sayısı, “‘0’la aynı olan” kavramına ait olan sayal sayıdır ve “0”ı izlemektedir (Frege, 2008: §76-78 s. 171-173). Aynı şekilde “2” sayısı da benzer biçimde, “‘0’ veya ‘1’ sayısıyla aynı olma” olarak tanımlanır. Bu tanımlama biçimi bütün diğer doğal sayılar için de geçerlidir.

Görüldüğü gibi Frege burada, “aynılık (özdeşlik)” kavramıyla “0”, “1”, “2” ve diğer doğal sayıları tanımlamaktadır. Ayrıca, doğal sayılar kümesinde her sayının bir başka sayıyı doğrudan izlediğini, bir başka deyişle doğal sayılar kümesinde “ardışık olma” tanımı yaptığını görmekteyiz. Böyle bir tanım, bize doğal sayılar kümesinin (serisinin), sonsuz sayıda elemanı olan bir küme olduğunu göstermektedir.

2.2.1.2. Frege'nin Aritmetiğin Yargılarına İlişkin Görüşünün Dayanakları

Frege, aritmetiğin yargılarına ilişkin iddialarını ortaya koyarken temel aldığı dayanakları da ileri sürer. Kant'ın epistemolojisinde hissetme yetisi (duyusallık), alan yani gören bir yetidir. Sayı, bu yetinin içsel *a priori* görü formu olan zaman temelinde inşa edilir. Frege zamanın sayı kavramıyla ilişkisinin olmadığını iddia eder. "Zaman, sayı verme ya da sayma için psikolojik bir gerekliliktir yalnızca, sayı kavramıyla hiçbir ilgisi yoktur" (Frege, 2008: §40 s. 136). Buradan da anlaşıldığı gibi, Frege zamanı sayı kavramının dışında tutar. "Gerçi zaman içinde sayarız; ama bu bize sayının kendisini vermez, sadece sayılan sayıyı belirlemiş oluruz" (Frege, 2008: §44 s. 139). Frege sayal sayı dışında "gerçek sayı" kavramına da eğilir ve zamanın bu sayı kümesi ile ilişkisinin olmadığına işaret eder. "Saniyenin, gerçek sayılarla hiçbir içsel bağıntısı yoktur" (Frege, 2008: §103 s. 193) demektedir. Frege Kant'ın "duyusallık (hissetme yetisi) olmadan hiçbir nesne bize verilmez*"* görüşüne karşı çıkar ve "Sıfır ve bir, bize duyular aracılığıyla verilebilecek nesneler değildir" (Frege, 2008: §89 s. 182) sözüyle itirazını ortaya koyar. Çok büyük sayılarla ilgili örneğin, $100^{100^{100}}$ hakkında bir bilgiye sahip olsak bile, böyle sayılar görüde verilemez. Böyle bir sayının görüde verilmesi demek, bu kadar nesnenin görülenmesi demektir, buna da insan ömrü yetmez. Frege'ye göre küçük sayılarla ilgili sayısal ifadeler görü aracılığıyla apaçık olsa bile, bu yaklaşım, büyük sayılar ya da işlemler için geçerli olamaz. Kant, büyük sayılarla yapılan toplama işlemleri için parmakların ya da noktaların görüsünden yararlanılabileceğini düşünmektedir. Böyle bir yaklaşım bizi, aritmetiğin önermelerinin deneyim kökenli olduğu düşüncesine götürür. Çünkü "37863" gibi bir sayının görüsü ne olursa olsun, bu görü kesinlikle saf değildir.

Frege, Kant'ın *Logic* adlı kitabında görüyü tekil bir temsil, kavramı ise genel bir temsil olarak tanımladığını, bu kitabında görünün hissetme yetisiyle (duyusallıkla) bağlantısından hiç söz etmediğini, ancak bu bağlantıyı *Saf Aklın Eleştirisi* adlı kitabının "Transandantal Estetik" bölümünde ele aldığını ileri sürer. Bu bağlantı olmadan, görünün, sentetik *a priori* yargılar için bir bilgi ilkesi olamayacağını belirtir. Frege'ye göre Kant, "Transandantal Estetik"te nesnelerin bize duyusallık aracılığıyla verildiğini ve bize görüleri sağlayan şeyin yalnızca duyusallık olduğunu iddia etmektedir. Frege, Kant'ın iki farklı kitabında görü sözcüğünün farklı anlamlar içerdiğini, *Logic*'teki anlamının *Saf Aklın Eleştirisi'*ndeki anlamından daha geniş olduğunu ifade eder. Frege'ye göre görünün, *Logic*'teki anlamı genel bir kavram değildir. Bundan dolayı "100000" gibi bir sayıyı bir görü olarak adlandırma imkânımız vardır; ancak, bu anlamıyla görü aritmetiğin temellendirilmesinde kullanılamaz (Frege, 2008: § 12, s. 104-105). Bu değerlendirmelerin ışığı altında, Frege'nin görüyü daha çok fiziksel objelerin görünebilirliği olarak anladığını düşünmekteyiz. Frege'ye göre herhangi bir sayı yani rasyonel, irrasyonel ya da karmaşık sayı görü aracılığıyla bize verilemez. Sayılar görü aracılığıyla verilirse aritmetiğe yabancı şeyler sokulmuş olur.

> Bu durumda kesirler, irrasyonel sayılar ve karmaşık sayılar bize nasıl verilebilir? Eğer görüden yararlanacak olursak, aritmetiğe yabancı bir şeyi sokmuş oluruz; ama böyle bir sayının kavramını yalnızca onun vasıflarını vererek tanımlarsak, yani sayının yalnızca belli özelliklere sahip olmasını istersek, bu durumda kavramın altına bir şey düşecek olmasının ve bizim taleplerimizi sağlayacağının herhangi bir güvencesi yoktur; ama kanıtlamalarda temellendirilmesi gereken yer tam da budur (Frege, 2008: §104 s. 194).

Frege, aritmetiğin *a priori* görüye dayanmadığı, aritmetiksel yargıların duyular aracılığıyla dışarıdan gelen nesnelerle değil, aklın doğrudan doğruya kendisine aracısız olarak verilen nesneleri nesne edinerek oluştuğu, dolayısıyla aklın nesnesinin yine aklın kendisi olduğu görüşündedir. Frege, sayal sayıyı "aynılık (özdeşlik)" ilkesine göre, başka bir deyişle sadece genel mantığın özdeşlik yasasına dayanarak tanımlamıştır. Frege'ye göre aritmetiğin temel kavramlarında, aritmetiksel işlemlerde ve cebirde sadece aritmetiğin öğeleri bulunmamaktadır. Bütün aritmetik önermeleri mantıksal işlemlere ve kavramlara indirgenebildiği için, aritmetiğin temel yasaları mantığın temel yasalarından türetilmiştir. Frege bu görüşünü şöyle ifade eder: "Böylelikle aritmetik, sadece, daha da geliştirilmiş bir mantıktır ve her aritmetik önermesi, türetilmiş de olsa bir mantık yasasıdır" (Frege, 2008: §87 s. 180).

Kısacası Frege, Kant'ın aritmetiği "sentetik *a priori* bir bilim" olarak tanımlamasının aksine aritmetiğin yasalarının "analitik" olduğunu ve sayının sadece *"a priori"* bir nesne değil aynı zamanda "mantıksal bir nesne" olduğunu, dolayısıyla da aritmetiğin "analitik *a priori*" yargılardan oluştuğunu iddia etmektedir.

2.2.1.3. Russell Paradoksu ve Frege'nin Görüşünün Sarsılması

Frege'ye göre sayı, kimi filozoflar için fiziksel bir şey iken, kimileri için sadece bir idea olarak vardır. Sayal sayıya ilişkin bu ve benzeri görüşler, sayal sayının tanımlanma girişimlerini başarısız kılmıştır. Aynı ya da farklı cinsten çokluğu eden ifade eden terimlerinin bulanık olmaları sayının tanımlanmasına engel oluşturmaktadır. "Bazı yazarlar sayal sayıyı, aynı türden çokluk olarak [*Vielheit*]

veya farklı türden çokluk [*Mehrheit*] olan bir küme olarak tanımlıyorlar. Tüm bu görüşlerin önündeki engel, bu şekilde tanımlanan sayal sayı kavramının 0 ve 1 sayılarını kapsamamasıdır. Ayrıca bu dile getirişler son derece belirsizdir" (Frege, 2008: §28 s. 122).

Sayı uzunluklar ya da yüzeyler arasında oranlar biçiminde değil, dilde sıfat biçiminde görülürler. Sayma işlemi ise kavramla ilgili bir etkinliktir. Biz, fiziksel nesneleri belirli bir kavram altında düşünerek sayıyoruz. Örneğin, masanın üzerinde "20" farklı kalem olsun. Sayısını öğrenmek istediğimiz kalemlerin; kurşun kalem mi, mürekkepli kalem mi ya da digital kalem mi olduğunu belirtmemiz gerekir. "Hangi kalemlerin sayısı?" sorusuna cevap vermemiz için kalem türünü ifade etmeliyiz; başka bir deyişle bu sorunun cevabı olarak, bir kavramı işaret etmek gerekecektir. Nesne-tekil sayı ilişkisine baktığımızda, Frege'nin "her tekil sayı kendi başına var olan bir nesnedir" biçimindeki tanımını görüyoruz (Frege, 2008: §55 s. 150). Buradan tekil sayılar dizisini, "0", "1", "2" ve ardışık olarak devam eden sayıların oluşturduğu sayı kümesi olarak adlandırmak mümkündür. "Sayal sayı", "tekil sayı" arasındaki bağlantıyı incelediğimizde, Frege'nin bu iki sayı kavramlarını birbirinden ayırdığını, aritmetiğin genel yasalarını tekil sayıların tanımlarından değil, sayal sayıların tanımlarından ya da sayal sayının genel kavramından çıkarma girişiminde olduğunu anlıyoruz. Öyleyse "1" sayısı, tanımlanmaya muhtaçtır, dolayısıyla tekil sayı "1"le artırılarak oluşmaz, sadece kavramdan çıkar. "(...) 'bir sayısı'nın ve 'birle arttırma'nın kendileri açıklanmadığı sürece bu açıklamaların da tamamlanmadan kalacaklarını kabul etmiştik. Böylelikle, sayısal ifadeleri bu tanımlardan çıkarmak istiyorsak, genel önermelere gereksinmemiz olduğunu görmüştük. Böyle yasalar tam da genelliklerinden dolayı tekil sayıların tanımlarından değil, ancak sayal sayının

genel kavramından çıkabilirler" (Frege, 2008: §18 s. 110).

"Bir" sözcüğü bir çokluk değildir, nesnesinin özel adıdır. Dahası "(...) sayıları birlerin yan yana konulmasıyla elde etmenin bir anlamı yoktur. '1+1 = 2' sayısal ifadesinde artı simgesi böyle biraraya getirmeye göndermemektedir" (Frege, 2008: §45 s. 142). Bizim için dünya dışsal olmasına rağmen, "9" gibi bir sayı ne içimizde ne de dışımızdadır. Sayının uzamsal yerini araştırmanın bir anlamı da yoktur. "9" sayısı nesnel bir şeydir, uzamda bir yeri yoktur. Frege'de sayının uzamsal bir nesne olmadığına, sayının kendi başına var olan nesnelerin yerine duran sözcükler olduğuna önceki sayfalarda değinmiştik.

> Sonlu sayal sayılar da, kesirli, negatif, irrasyonel ya da karmaşık sayılar gibi ne duyularla algılanabilirler ne de uzaysaldırlar; eğer fiili gerçek olanı, duyularımız üzerinde etkide bulunanlarla veya yakın ya da uzak sonuçları olarak duyu algılarına neden olan etkileri yaratanlarla sınırlarsak, bu durumda elbette ki hiçbir sayı fiili gerçek olmaz. Ancak bizim, teoremlerimizi kanıtlamak için herhangi bir duyu algısına hiçbir şekilde ihtiyacımız yoktur. Mantıksal açıdan kusursuz bir şekilde ortaya konan herhangi bir adı veya göstergeyi, hiç duraksamadan kendi araştırmalarımızda kullanırız (Frege, 2008: §85 s. 178).

Frege'nin sayal sayı kavramını elde edebilmek için bir sayısal eşitliğin anlamını belirlediğini gördük. Çünkü sayal sayı, fiziksel şeylerin özellikleri olmadığı gibi, fiziksel nesnelerin oluşturduğu bir topluluk da değildir. Sayal sayı öznel zihinsel şeyler de değildir. Ayrıca sayal sayı göstergeleriyle (rakamlarla) özdeşleştirilemez. Sayal sayının saf görüyle ilişkisi yoktur, kavramsaldır ve akla doğrudan verilir.

Frege, Kantçı anlamda bir metafizikçi olmasına rağmen, sayal sayının tanımını kavramdan ve yargıdan hareket ederek yaptığı görülmektedir.

İzleyen sayfalarda "Russell Paradoksu"nu ele alacağız. Bu paradoksa yol açan nedenlere burada kısaca değinmeyi gerekli görmekteyiz. Sayı, hem Kant'ta hem de Frege'de nesnedir. Kant, sayının inşasının zaman formundaki *a priori manifold*a sentetik birlik verilmesinin sonucunda gerçekleştiğini açıklarken, Frege analitik önermedeki kavramın içeriğine bakarak sayal sayıyı tanımlamaktadır. Kant, nesnenin kurulumunun *a priori* koşullarını transandantal mantık yoluyla ve transandantal kavramlarla açıklarken, Frege her şeyi genel mantığın yasalarıyla analitik olarak açıklama girişiminde bulunmuştur. Koç'a göre, Frege'nin çalışmalarında transandantal mantığın olmaması söz konusu paradoksa yol açmıştır. "Transendental mantık ortadan kalkmamış olsaydı Russell da bir paradoks bulma mutluluğuna herhalde erişemeyecekti" (Koç, 1997: s. 54). Tezimizin birinci bölümünde de değindiğimiz gibi transandantal mantık sayının ontolojik zeminini, bağlı olduğu *a priori* koşulları araştırır. Bu nedenle transandantal mantığın, matematiksel nesnelerin ontolojisi bakımından büyük önem taşıdığını düşünüyoruz. Koç, Frege'nin sayıyı tanımlama biçimini transandantal mantık üzerinden eleştirmektedir. Koç'a göre, Frege'nin sayı kavramını tanımladığı yargı içinde kavramın nesnesi oluşmamıştır. Nesnesi oluşmayan kavram ise boş ve anlamsızdır.

> Kavramın içeriksiz ve dolayısıyla da anlamsız olmaması için kavramın altına düşen nesnelerin yargı içinde oluşmuş olması gerekir; aksi takdirde kavram sadece bir formdan ibarettir. Benzer olarak, "F kavramı, G kavramı ile aynı sayılıdır" yargısı, transendental mantık itibariyle, nesne oluşturmaz; bu yargı sadece bir bağıntı bildirir.

> Bu sebeple de, “F kavramı, G kavramı ile aynı sayılıdır” yargısından analitik olarak elde edilen ve ‘sayı’ kavramını tanımlayan yargıda nesne oluşmamıştır; ‘sayı’ kavramının nesnesi, yani bizzat sayının kendisi ‘sayı’ kavramını tanımlayan yargıda mevcut değildir (Koç, 1997: s. 61).

Frege’nin, sayının mekânını araştırmadan sadece analitik önermelere bakarak sayıyı tanımlamaya giriştiği söylenebilir. Dahası, sayı kavramının ontolojik zemini gösterilmeden, küme kuramıyla ve genel mantığın ilkeleriyle sayıyı tanımlamaya kalkışmak, matematik felsefesinde sonu gelmez tartışmalara neden olmuştur. Frege’nin yaptığı ontolojik hata ya da hataların “Russell Paradoksu” olarak bilinen paradoksa yol açtığını görüyoruz. Şimdi bu paradokstan söz edelim: “Russell Paradoksu” olarak adlandırılan paradoks bir matematikçi filozof Russell tarafından 1901’de yirmi sekiz yaşındayken bulunmuştur. Ali Nesin’e göre bu paradoks, matematikte çelişki olabileceğini göstererek, o günün matematiğini ve matematikçilerini sarsmış ve onları matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye yöneltmiştir. Üstelik, “Russell Paradoksu” matematiği ciddi çelişkiye düşüren ilk paradoks da değildir. Daha önce 1897’de Burali-Forti adında bir matematikçi “Russell Paradoksu”na benzer bir paradoks bulmuştur. Russell’ın Burali-Forti paradoksunu gidermek için önemli çalışmalar yaptığı bilinmektedir (Nesin, 2010: s. 99).

Bu paradoksa yol açan küme kavramı Antik Yunan’dan beri bilinmektedir. 19. yüzyılda matematikçi George Cantor küme kuramını matematiğin teknik bir konusu haline getirmiştir. Matematikçiler 19. yüzyılın sonuna kadar, küme oluşturma koşullarını kısıtlamayı gerek görmemişlerdir. Bu yüzden gördükleri, düşündükleri

her nesne topluluğunu küme kavramıyla ifade ettiklerini anlıyoruz. Rasyonel sayılar kümesi, karmaşık sayılar kümesi, "P" düzleminde bulunan noktalar kümesi, asal sayılar kümesi, vb. gibi. Frege de, *Aritmetiğin Temelleri* kitabında "(...) aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir" (Nesin, 2010: s.100). İşte, küme kuramındaki kısıtlayıcı olmayan bu anlayış, bize göre "Russell Paradoksu"nun ortaya çıkarmasına zemin hazırlamıştır.

Şimdi bu paradoksu Nesin'in matematik diliyle ifade edelim; "X" kümesini tüm kümelerin kümesi olarak tanımlayalım. Bu "X" kümesi içinde, "X"in elemanı olabilecek bir "X" kümesinin olduğunu düşünüyoruz. Matematik diliyle ifade edersek $X \in X$ 'tir. Fakat, "X"in bazı kümeleri, kendi kendisinin elemanı olmayabilir. Bu kümeyi de "Y" kümesi olarak adlandıralım. "Y" kümesi de, $Y = \{x : x \notin x\}$ kümesi olarak bu şekilde yazılabilir. Bu anlatım bize, bir "x" kümesinin "Y"nin elemanı olması için kendi kendisinin elemanı olmaması gerektiğini belirtir. Bunu, matematiksel olarak her "X" kümesi için $x \in Y \Leftrightarrow x \notin x$ biçiminde yazabiliriz. Eğer bu önerme her "x" kümesi için doğruysa, özel olarak yazacağımız bir "Y" kümesi için de doğru olmalıdır. Öyleyse, $\forall_x \ (x \in Y \Leftrightarrow x \notin x)$ işleminde "x" in yerine "Y" yazılabilir. Şimdi "x" yerine "Y" yazarsak, $Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y$ önermesini elde ederiz. Bu önermeye sol taraftan baktığımızda; "Y" kümesi "Y" kümesinin bir elemanı olduğunda, "Y" kümesi "Y" kümesinin bir elemanı olamayacağını, sağ taraftan baktığımızda da "Y" kümesi "Y" kümesinin bir elemanı olmaması halinde, "Y" kümesi "Y" kümesinin bir elemanı olacağını anlıyoruz. Açıkça görüldüğü gibi bu önermede, her iki durumda bir paradoks elde edilmektedir (Nesin, 2009: s. 233-234).

Russell, bulduğu bu paradoksu bir mektupla Frege'ye açıkladığında Frege'nin "Bir bilim insanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç birşey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni işte bu duruma soktu" (Nesin, 2010: s. 101) sözüyle düşkırıklığını gizlemediği anlaşılmaktadır. Frege sonrası bu paradoksu giderecek çalışmalar yapılmış olsa da tatmin edici sonuçlara ulaşılamadığını öğreniyoruz.

Son olarak Kant ve Frege arasındaki aritmetiğe ilişkin görüş farkını temel alarak paradoksun nedenini bir kez daha açıklamaya çalışalım. Daha önce işaret ettiğimiz gibi Kant matematiğin en temel nesnesi olan sayının, ontolojik zemin üzerinde transandantal mantıkla yakalanabileceğini iddia etmektedir. "(...) *a priori* görü, bu zeminin açığa çıkmasının hem aracı, hem de sonucu idi" (Gözkân, 2008a: s. 68). Bir başka deyişle Kant'a göre *a priori* görü mekânı sayının transandantal zeminidir, bu mekânın yakalanması transandantal mantıkla mümkündür. Birinci bölümde de ifade ettiğimiz gibi Kant açısından sayı; anlama yetisi, üretici hayal gücü ve aklın teorik kullanımıyla *a priori* görü mekânında, *a priori* görü ile bağlantılı olarak inşa edilmektedir. Teorik aklın işlevlerine baktığımızda; "mantıksal çıkarımlar yapmak" ve "ilkeleri daha genel ilkeler altında toplamak" gibi iki işlevinin olduğunu belirtmiştik. Matematiğin tümünde, matematiksel önermelerin kendi aralarındaki ilişkiler genel mantığın yasalarıyla açıklanmaktadır. Aklın teorik kullanımı bunu mümkün kılmaktadır. Fakat, genel mantığın çıkarımsal ilkeleri sayının inşasını mümkün kılamaz. Frege ise sadece genel mantığın ilkeleriyle, sayı gibi bir matematiksel nesnenin yakalanabileceğini ve tanımının yapılabileceğini ileri sürmektedir. Frege'nin, sayının, *a priori* görüyle bağlantısını hiçbir şekilde kurmadan, onu sadece yargıya bakarak tanımlamaya çalıştığı ortadadır.

Dahası Frege, aritmetiksel önermelerin kendi aralarındaki ilişkilerin kurulmasını mümkün kılan ontolojik zemin ile sayının bağını kopartarak, bu ilişkileri salt genel mantığın çıkarımsal ilkeleriyle açıklamaktadır. İki düşünür arasındaki aritmetiğin yargılarına ilişkin görüş farkını bir kez daha vurguladıktan sonra, bu söylenenlerin ışığı altında Çitil'in deyişiyle Frege, Kant'ın *a priori, a posteriori,* analitik, sentetik görü gibi temel kavramlarını yanlış yorumladığına (Çitil, 2000: s. 37 "Dipnot") işaret edelim. İşte bu yanlış yorumlamanın sonucunda Frege'nin ontolojik bir hata yaptığını söyleyebiliriz.

Frege, geometrinin sentetik *a priori* bir bilim olduğu konusunda Kant'la aynı görüştedir. Fakat sayıyı, görü zemininden kopartarak sadece mantık temelinde, kavramsal olarak tanımlaması başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Bir başka deyişle, Frege'nin saf görüye itiraz ederek, aritmetiğin mantığın bir dalı olduğu savını temellendirememesinin sonucunda matematiğin felsefi temellerine ilişkin üç ana görüşten biri olan "mantıkçı" görüş de sarsılmıştır. Buna rağmen Frege Aristoteles'ten günümüze kadar gelmiş geçmiş en büyük mantıkçılardan biridir. New York Üniversitesi felsefecilerinden Michael Beaney, "Russell Paradoksu"na rağmen Frege'nin tüm zamanların en büyük matematik felsefecilerinden biri olarak anıldığını ileri sürmektedir:

> Matematik felsefesinde Frege, geçmişten kendi zamanına kadar psikolojizme, empirizme ve formalizme yönelik eleştirilerini bir yöntem içinde geliştirmiştir. Açıkça fark edildiği gibi kendisinin, yıpratıcı bir biçimde Platonculuk ve mantıkçılıkla yorumlanması girişimlerinde şüphesiz problemler olmasına rağmen bugün Platonizm, matematikçiler ve matematik felsefesinde etkili bir güç olarak

> durmaktadır ve felsefenin gündemine mantıkçılık yeniden girmiştir (Beaney, 1997: s. 13).

Görüldüğü gibi, o dönemde mantıkçılık sarsılsa bile Beaney Frege'yi başarılı bulur. Frege, "(...) matematikçiler, tıpkı coğrafyacılar gibi kendi isteklerine göre şeyler yaratamazlar; matematikçiler de yalnızca olanı keşfeder ve ona ad verirler" (Frege, 2008: §96 s. 188) sözüyle "matematiksel nesnelerin keşfedildiği" görüşünü savunarak Plantoncu anlayışın devamında yer aldığını göstermektedir. Reuben Hersh'e göre "Bugün, küme kuramı içinde Frege'nin görüşü Platonisttir" (Hersh, 1999: s. 12). Frege'nin belirtik bir dille matematiğin kavramlarının keşfedildiğini iddia etmesi ve Frege yorumcularının onu Platon'un çizgisinde görmeleri, onun Kant'la olan görüş ayrılığını daha açık bir biçimde ortaya koymaktadır.

Çalışmamızda matematiğin felsefi temellerine ilişkin olarak ileri sürülmüş üç ana görüşten biri olan "mantıkçılığa" Frege ile birlikte kısaca değindik. İleriki sayfalarda "mantıkçılığı", "biçimciliği" ve "sezgiciliği" tek tek ele alırken Frege ve mantıkçılığa yönelik eleştirilere geri döneceğiz.

2.2.2. Matematiğin Temellerine İlişkin Üç Ana Felsefi Görüş ve Bu Görüşlerin Kant'ınkiyle Karşılaştırılması

19. yüzyılın ikinci yarısında matematikte ortaya çıkan kimi gelişmeler matematiğin felsefi temellerinin sorgulanmasını gündeme getirmiştir. Bu dönemin sonunda, matematiğin felsefi temellerine yönelişe neden olan gelişmeler iki temel başlık altında toparlanabilir:

> (1) Euclides-dışı geometrilerin ortaya çıkışı. Bu olay matematiğin doğruluğu zorunlu ya da apaçık aksiyomlara dayandığı görüşünü çökertir.
> (2) Kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar ve bunlara doyurucu bir çözümün bulunamaması. Matematiğin tutarlılığına ilişkin genel bir ispatın yokluğuyla birleşen bu olay, matematiğe duyulan geleneksel güveni temelinden sarsar (Yıldırım, 2008: s. 87).

İşte bu gelişmeler, matematikçi filozofları matematiğe sağlam bir temel oluşturma çabasına yöneltir. Böyle bir amaçla yapılan bu girişimler, çalışmalar daha önceki başlıklarda değinildiği gibi, matematiğin temelleri hakkındaki üç ana felsefi görüş olan "mantıkçılık (*logicism*)", "biçimcilik (*formalism*)" ve "sezgicilik (*intuitionism*)" olarak adlandırılan yaklaşımlar biçiminde ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşımların ışığı altında matematik felsefesinin bütünü hakkındaki bir düşünceye sahip olabilmek ve daha sonra da bu görüşlerin Kant'la kesişen noktalarını ortaya çıkarabilmek amacıyla üç temel felsefi görüşü tek tek ele alacağız. Matematik felsefesinin kendi sorunlarının ortaya çıkmasında ve bu sorunların epistemolojik bir boyutta gündeme gelmesinde Frege'nin çalışmalarının önemi bir etkiye sahip olduğunu düşünüyoruz.

Bu bakımdan, "mantıkçılık" alt başlığı altında G. Peano ile Frege'nin çalışmalarını birlikte, bu çalışmaların bir devamı olan Russell'ın çalışmalarını da ayrıca ele alacağız. Sonra da sırasıyla "biçimcilik ve "sezgicilik" yaklaşımlarını açmaya çalışacağız.

2.2.2.1. Mantıkçılık (*Logicism*)

Aritmetiği mantığa indirgeme çalışmalarının adı olan mantıkçılığın ilk aşamasını Peano ve Frege'nin çalışmaları oluşturur, ikincisi ise Russell'ın yaptığı çalışmalardır. Şimdi birinci aşamayı ele alalım. Frege'nin sayal sayıyı tanımlama girişimi ışığında, Peano'nun beş postulatının, aritmetiğin mantığın bir dalı olduğunu göstermek için olanaklı olduğu düşünülmektedir. Bilim felsefecisi Carl Gustav Hempel, Peano postulatlarını şu şekilde ifade etmektedir:

> "P_1: 0 bir sayıdır.
> P_2: Bir sayıyı izleyen şey de bir sayıdır.
> P_3: Aynı sayı iki değişik sayının izleyeni olamaz.
> P_4: 0 hiçbir sayının izleyeni değildir.
> P_5: x gibi bir özellik (a) 0'a aitse, (b) n gibi bir sayıya ait olduğundan n'(yani n' yi izleyen sayı) ye de aitse, tüm sayılara aittir" (Hempel, 2008: s. 182).

Beş postulatın oluşturduğu sisteme baktığımızda, bu sistemde "0", "sayı" ve "izleyen" gibi üç farklı terimin olduğunu görmekteyiz. "0" sayısı bildiğimiz doğal sayı olan "0"dır. "Sayı" terimi de "0" hariç diğer doğal sayıları, yani "1, 2, 3,..." sayı dizisini göstermektedir. "İzleyen" terimi ise "n" gibi bir doğal sayıdan hemen sonra

gelen, bir başka deyişle "n"nin ardışığı olan sayıyı belirtmektedir. "P_1"de "0" bir sayı olarak belirlenmiştir. "P_2" de "0"ı izleyenin "1", "1"i izleyenin "2", "2"yi izleyenin "3", "3"ü izleyenin "4", ... ve bunun sonsuza kadar devam edebileceğini göstermektedir. "P_3"de hiçbir iki sayının aynı izleyeni paylaşamayacağı belirtiliyor. "P_5"te ise "0"a ait bir özellik, herhangi bir sayıya ait olduğu zaman, onun ardışığı olan, yani izleyeni olan sayıya da aitse tüm doğal sayılara aittir. Burada "P_5"in bir matematiksel indüksiyon olduğunu görülmektedir. Barker, "P_5" postulatının matematiksel tümevarımın altında yatan varsayımı ifade etmesi bakımından, özellikle bu postulatın önemli olduğunu belirtir (Barker, 2003: s. 99).

Bu postulatların doğruluğu mantıkçılık için merkezi konumdadır. Hempel'e göre "P_1", "P_2", "P_4" ve "P_5" postulatlarının mantık kurallarıyla ispatlandığı doğrudur. Fakat, "P_3" postulatının ispatında güçlükler bulunmaktadır. Çünkü küme kuramıyla; "n" sayısının izleyeninin tanımı, eleman sayısı "n" olan ve bir kümeye, o kümede olmayan bir elemanın eklenmesiyle elde edilir. Eğer, var olan elemanlar sınırlı sayıda ise her küme için böyle bir ekleme yapılamayacağı için, bu işlem sonsuza kadar devam edemez. Dolayısıyla, "P_1" ve "P_2"nin birleşmesiyle doğal sayıların sonsuz bir küme olduğunu belirten "P_3"ün doğru olması sorunludur. Böyle bir güçlüğün "sonsuzluk aksiyomu" olan bir aksiyoma başvurularak giderilebileceğini ileri süren Hempel, bu aksiyomun "P_3"ün doğruluğunu sağlayacak olan "sonsuz sayılar vardır" aksiyomu olması gerektiğini ileri sürerek şöyle devam eder: "Sonsuzluk aksiyomu mantığın bilinen yasaları arasında yer almaz; ama salt mantık terimleriyle dile getirilme olanağı vardır ve modern mantık teorisinin bir ek postulatı olarak düşünülebilir" (Hempel, 2008: s. 187).

Frege, çalışmalarında Peano postulatlarını mantık ilkeleriyle temellendirme girişiminde bulunur. Daha önce de işaret ettiğimiz gibi amaç, "sayı" ve "sayal sayı" kavramlarını mantık terimleriyle tanımlayarak sayıya ilişkin mantıksal olarak yeterli bir tanıma ulaşmaktır. Çünkü Frege'ye göre aritmetiği mantığa indirgeme girişiminde Peano postulatları olanaklı görülmektedir. "Peano postulatlarını oluşturan üç ilkel terimden biri, '...ni izleyen', zaten mantıksal bir terimdi. Diğer iki terimin, 'sıfır' ile 'sayı'nın mantık terimleriyle tanımlanmaları sorunu çözmeye yetecekti. Üstelik, 'sıfır'ın bir sayı olarak belirlenmiş olması, sorunu daha da basitleştirmekte, yalnızca 'sayı'nın tanımıyla yetinmeye olanak vermekteydi" (Yıldırım, 2008: s. 90).

Peano postulatları, aritmetiğin mantığa indirgenmesinde önemli bir dayanak olsa da, sadece bu postulatlarla sınırlı kalarak "toplama", "çıkarma", "çarpma" ve "bölme" gibi işlemleri tanımlamanın olanaksız olduğu görülmektedir. Barker'a göre Peano postulatları, doğal sayılara ilişkin temel ilkeleri çok açık bir biçimde ifade etmesine rağmen, doğal sayıları kapsayan diğer sayı türlerinin temel ilkelerini ifade etmekte yetersizdir. Bu tür sayı türlerinin ilkelerini ifade etmek için, Peano postulatlarında olmayan "küme" ve "sıralı çift" terimlerini çalışmak gerekir. Bunlar da temel mantığa ait değildir (Barker, 2003: s. 100).

Hempel'ın "P_3" postulatını sorunlu bulmasının ve ayrıca Barker'ın Peano postulatlarının doğal sayılar kümesi dışındaki sayı kümelerinin ilkelerini açıklamaktan uzak olduğu görüşünün bir sonucu olarak, Frege'nin aritmetiği "gerçek sayılar" ya da "karmaşık sayılar" kümesinde mantığa indirgemesinin

olanaklı olup olamayacağı sorusunu gündemde tutmaktadır.Seçkin matematikçilerden H. Poincaré matematiğin mantığa indirgenmesine ve analitik önermeler alanı olarak görülmesine karşı görüşünü şöyle ifade eder:

> Matematiğin bir bilim olma olasılığı bile çözülemez bir çelişki gibi görünmektedir. Bu bilim sadece görünürde dedüktif ise, o zaman hiç kimsenin yadsımadığı kesinliği nereden kaynaklanmaktadır? Yok, tam tersine, ortaya koyduğu teoremlerin tümü formel mantık kuralları aracılığıyla tek tek çıkarsanmış önermelerden ibaretse, o zaman neden devasa bir totolojiye indirgenmiş değildir? Tanımsal çıkarım bize hiçbir yeni şey öğretmez; üstelik eğer her şeyin özdeşlik ilkesinden çıkarsanması gerekiyorsa, o zaman her şeyin o ilkeye indirgenmesine olanak olmalıdır. Peki bu durumda, pek çok kitap ciltlerini dolduran matematiksel teoremlerin, dolaylı da olsa, A, A'dır biçiminde içerikten yoksun önermelerden başka bir şey olmadığını mı söyleyeceğiz? (Poincaré'den akt. Yıldırım, 2008: s. 71).

Frege'nin sayı yasalarını mantığa indirgeme girişiminin ardından Whitehead ve Russell tüm matematiği mantığa indirgemek için girişimde bulunurlar. Russell çalışmalarını önce *Principles of Mathematics* daha sonra da Whitehead'le birlikte yazdığı *Principia Mathematica* adlı kitaplarda ortaya koymuştur. Frege gibi Russell'ın da hareket noktası Peano postulatlarıdır. Russell'a göre "Sayı nedir?" sorusunun cevabını 1884'de Frege *Aritmetiğin Temelleri* adlı kitabında vermiştir. "Bir sayı, belli seçmeleri, yani o sayıya sahip olanları niteleyen bir şeydir" (Russell, 2004a: s. 83). Frege'nin yaptığı gibi Russell da, sayıya "niteleme" gibi bir özellik yüklemektedir. Russell'a göre "(...) sayı, belli seçmeleri yani belli sayıda terimi olanları, bir araya getirme yoludur" (Russell, 2004a: s. 86). Russell'ın sayı tanımından, nesneleri ya da terimleri sayılarına göre gruplama işlemi olarak anlamaktayız. Şöyle ki; çift olanlar bir grupta, üçlü olanlar başka bir grupta, dörtlü

olanlar diğer bir grupta toplanmaktadır. Böylelikle, her biri farklı sayıda nesne ya da terim içeren desteler veya kümeler elde etmiş oluyoruz. Örneğin, bütün çiftlerden oluşan küme, bir kümeler kümesidir. Bir başka deyişle, her iki elemanlı bir gruplama bir küme belirtir ve bütün iki elemanlı kümelerin kümesi, sonsuz sayıda iki elemanlı kümelerin kümesidir. Burada sayı daha genel bir kavramdır ve her tikel sayı 0, 1, 2, 3, ... gibi sayılardır. Genel bir kavram olarak sayı ise, bütün tikel sayıları kapsayan bir kümedir. Bu tikel sayıların her biri de bir küme oluşturur. Söz gelimi, "2" sayısı bütün iki elemanlı (örneğin, bir çift ayakkabı, bir çift eldiven, bir çift turna,... gibi) kümelerin kümesidir. İki elemanlı her küme "2" sayısı için somut bir örnektir; "2" tikel sayısı ise bütün iki elemanlı kümeleri kapsayan kümedir. Frege, sayıyı belli bir kümenin bütün eşlerinin ya da bütün denk kümelerinin kümesi, "sıfır"ı ise bütün boş kümelerin kümesi olarak tanımlamıştı. Görüldüğü gibi Frege ve Russell sayıyı aynı biçimde tanımlamaktadırlar.

Russell sayıyı tanımladıktan sonra, sıra sayma işleminin tanımlanmasına gelir. Russell'a göre "Sayma eylemi, sayılacak nesneler kümesi ve işleme girmiş doğal sayılar (0-hariç) arasında bire-bir bağıntı kurulmasıyla meydana gelir" (Russell, 2004a: s. 88). Burada, sayma işleminde kullanılacak sonlu sayı kadar nesnenin ya da terimin var olduğu kabul edilmektedir. Dolayısıyla sayma işleminin sonlu sayıdaki nesneler için yapılan bir işlem türü olduğunu anlamaktayız. Aynı şey sayının tanımı için de geçerlidir, yani sayının tanımı sonlu sayıdaki nesneler ya da terimler için geçerli olan bir tanımdır. Russell'ın deyiş biçimiyle "Şimdi elimizde sonlu seçmelerde uygulanabilecek bir sayı tanımımız var. Geriye bunun sonsuz seçmelerde nasıl uygulanabileceğini görmek kalıyor. Fakat öncelikle 'sonlu' ve 'sonsuz' ile ne kastettiğimizi kararlaştırmalıyız ki, bu da (buradaki) sınırlar dahilinde yapılamaz"

(Russell, 2004a: s. 91). Aynı yazısında Russell sonsuzluğun mantıksal terimlerle ifade edilebileceğini fakat, doğruluğun ise mantık aracılığıyla ifade edilemeyeceğini belirtir. Öyleyse, matematiğin bütün önermeleri mantığın dili ile ifade edilebilir. Bu da bize matematik ve mantığın aynı disiplin olduğunu gösterir.

> Tarihsel anlamda, matematik ve mantık tamamen farklı çalışmalar olmuşlardır. Matematik bilimle, mantık Yunanlılarla ilişkilendirilmiştir. Fakat ikisi de son zamanlarda gelişmiştir; mantık daha çok matematikselleşmiş ve matematik daha çok mantıksal hâle gelmiştir. Sonuçta, ikisi arasında bir çizgi çizmek tamamen imkânsız hâle gelmiştir; aslında ikisi de bir olmuştur. (...) Mantık matematiğin gençliği ve matematik mantığın yetişkin hâlidir. (...) Günümüzde matematik çalışmalarının çoğu açıkça mantığın sınırları üzerindedir; yine günümüz mantığının çoğu sembolik ve formeldir; ki matematik ve mantığın bu çok yakın ilişkisi her eğitimli öğrenciye aşikâr olmaktadır. (...) Eğer hâlâ matematik ve mantığın özdeşliğini kabul etmeyen varsa, onları *Principia Mathematica'*daki tanımlar ve tümdengelimler silsilesinin hangi noktasında mantığın bittiğini ve matematiğin başladığını düşündüklerini belirtmeye davet edebiliriz. O zaman herhangi bir cevabın tamamen keyfi olduğu açıktır (Russell, 2004a: s. 91-92).

Russell'ın ileri sürdüğü gibi, matematik ve mantık gibi iki disiplinin özdeş olduğu *Principia Mathematica'*da ayrıntılı bir çalışma ile ispat edilmeye çalışılmıştır. Daha önce de işaret ettiğimiz gibi 1910 yılında Russell, Whitehead ile birlikte tüm matematiğin mantıksal temellere dayanarak biçimselleştirilebileceğini göstermek için *Principia Mathematica'*yı yazmıştır. Russell'ın bu çalışmasında, Frege'de ortaya çıkan parodoksu gidermek için "Tipler Teorisi"ni geliştirdiğini öğreniyoruz. Ancak, bu teorinin küme kuramının yol açtığı paradoksu önlese bile, bu kuramında, oluşabilecek başka türden paradoksları giderebilecek bir çözüm içermediği görülmektedir. Yıldırım'ın deyişiyle, "(...) teorinin kümeler teorisinde başka türden

paradoksların ortaya çıkamayacağını güvence altına aldığı kolayca söylenemez (Yıldırım, 2008: s. 91). Çünkü "Russell Paradoksu", Frege'nin "tüm kümelerin kümesi" kuramının bir sonucudur. Böylece küme kuramının, sayının tanımında matematiğe bir kesinlik ve kolaylık sağlamaktan uzak olduğu görülmektedir. Dahası mantıkçı görüşün matematiği mantığa indirgeme girişimi, beraberinde bir dizi sorunu ve zorlukları getirmektedir.

Frege, aritmetiğin yasalarının tümevarımsal olmadığını iddia etmektedir (Frege, 2008: §9 s. 99). Russell açısından, matematiksel tümevarımla yapılan her işlem her zaman tümdengelimdir. Başka bir deyişle, tümevarım belli bir öncülü kullanan bir tümdengelimdir. Pür (*pure*) matematik bize sadece mantıksal doğruların bilgisini verir. Bu mantıksal doğrular pür matematiğin öncülleridir; ayrıca bütün işlemler ve bütün ispatlar tümdengelimin elemanlarıdır (Russell, 2004b: s.108, 113, 114). Russell'ın sözlerinden; matematiksel ispatlarda tümevarımla elde edilen bilginin *a priori* ve evrensel mantık ilkelerine dayanmasının sonucunda, tüm matematiğin tamamıyla mantıksal önermelerden oluşan bir disiplin olduğu düşüncesine varılmaktadır.

Mantıkçılık yaklaşımı çerçevesinde, Russell'ın, Kant'ın genelde bilgi özelde de aritmetik görüşüne yönelik eleştirisine yer vermenin gerekli olduğunu düşünüyoruz. Russell da, Frege gibi bilginin görü ayağını yok saymaktadır. Russell, "Tecrübî teorilere karşılık olarak ilk sırada belirtilebilecek olan, matematiksel bilginin duyulardan elde edilebilen verilere dayanmayan öncüllere ihtiyaç duymasıdır. Her genel önerme duyular yoluyla elde edilen bilginin sınırlarının ötesine geçer ki,

duyular tamamıyla bireyle sınırlıdır" (Russell, 2004b: s.113) sözüyle "duyu" kavramıyla "öznelliği" işaret etmektedir. Bir başka deyişle burada, üstü örtülü olarak, Kant'ın epistemolojisinin zemininde "öznel olanı"nın yer aldığı ileri sürülmektedir. Dahası Russell, "Kant'ın hipotezinin sonuçlarını dikkate aldığımız zaman, fiziksel dünyanın tikel olgularının sahip olduğu aynı zihnî bağımsızlık ve aynı nesnelliğe, genel ve *a priori* doğruların da sahip olması gerektiği açığa çıkar" (Russell, 2004b: s. 114-115) demektedir. Her bireyde duyusallık öznel olsa da, Kant'ta hissetme yetisinin (duyusallığın) bilgideki işlevi açıklıkla tanımlanmıştır. Dahası nesnel bilgi, transandantal *apperception* saf düşünme edimi temelinde işlevsel bir yapı kazanan ve herkeste bulunan saf kategoriler tarafından sağlanmaktadır. Burada kategorilerin bilişsel işlevleri göz ardı edilmiş durumdadır.

Özetle; Russell'ın *a priori* bilginin öznel ya da psikolojik anlamda hiçbir şekilde ifade edilemeyeceği düşüncesi elbette kabul edilir. Fakat Russell, bu görüşünü ifade ederken, Kant'ın transandantal felsefesinin amacının, öznel etkinliğin zemini olan nesnel unsurları ortaya çıkarmak olduğunu gözden kaçırmaktadır. Bir kez daha işaret edelim, burada nesnelliği sağlayan unsurlar, düşünme yetisinin bir yanı olan anlama yetisinin *a priori* kavramlarıdır. Mantıkçılığa yönelik eleştiriler izleyen bölümlerde tekrar ele alınacaktır. Yeri gelmişken, matematikçi Friedrich Waismann'ın eleştirel görüşüne yer verelim.

> Kanımca matematiği totolojilerden ibaret görmek yanlıştır. Matematik, mantığın bir kolu değildir; tümüyle bağımsız, kendi kurallarına dayanan bir çalışmadır. Matematiğin mantığa indirgenmesiyle daha sağlam bir temel kazanacağı inancı, bütünüyle bakıldığında, sadece bir yanılgıdır. (...) Bugün artık matematiğin

> bütünüyle Peano postulatları türünden birkaç önermenin zorunlu sonucu olduğu; öyle ki, bu postulatlar doğrulandığında tüm sistemin doğrulanmış olacağı söylenemez. Matematiği bir tek değil birçok sistem oluşturmaktadır. Bu nedenle, Peano aksiyomlarını salt mantıksal önermelere indirgeme girişimi değerini büyük ölçüde yitirmiştir. (...) Biz aritmetiği kurallarını bularak betimleyebiliriz; ama bu kuralları temellendiremeyiz. Bulunacak bir temel başka bir temeli gerektireceğinden işin içinden çıkamayız (Waismann'dan akt. Yıldırım, 2008: s. 92).

Kimi matematikçilerin ya da matematikçi filozofların mantıkçılığa karşı çıkışlarının temelinde, mantıkçı görüşün matematiği totolojik bir dizgeler bütünü olarak belirlemesi yatmaktadır. Matematiği salt totoloji sayan görüşün; matematiğin kendi tarihsel sürecinde, onun yaşamla ve diğer disiplinlerle olan bağını kopartarak herhangi bir konusu olmayan bir alan olarak değerlendirdiğini düşünmekteyiz.

2.2.2.2. Biçimcilik (*Formalism*)

Mantıkçı görüşün temel amacı matematiği mantığa giderek temellendirmektir. David Hilbert öncülüğünde oluşan biçimci görüş ise matematiğin kendi içinde "tutarlılığı"nı ve "tamlığı"nı ispat etme girişiminde bulunur. Çalışmalarını *Matematiğin Temelleri (Grundlagen der Mathematik)* adlı iki ciltten oluşan bir kitapta toparlayan Hilbert, küme kuramının neden olduğu paradokslarla sarsılan matematiği, simgesel ve aksiyomatik bir yapıya dönüştürerek tutarlılığını güvence altına almaya çalışır. Bu amaçla Hilbert, yedi ana grupta topladığı 17 formülle matematik teoremlerini ispat etmeyi başarır. Hilbert, matematiğin formüllerden oluşan kapalı bir sistem olduğu görüşünü şöyle ifade ediyordu: "Matematik önyargısızdır. Onu bulmak için Kronecker'in yaptığı gibi Tanrı'ya, Poincaré'nin

yaptığı gibi yeteneklerimize hitaben varsayımlara, Brouwer'ın yaptığı gibi temel sezgilere, Russell'ın yaptığı gibi belitlere gereksinim yoktur. Matematik formüllerden oluşan kendi içinde kapalı bir sistemdir" (Karaçay, 2004: s. 62).

Matematiğin aksiyomatikleştirilerek (*dizgeselleştirilerek*) kurulabileceği düşüncesi Antik Yunan'dan beri bilinmektedir. Antik Yunan'da Eukleides (MÖ 300) aksiyomatik yöntemin kurucusu olarak kabul edilir. 19. yüzyılın başında Eukleides-dışı geometrinin ortaya çıkışına kadar; "Eukleides geometrisi" adıyla bilinen düzlem geometrinin beş aksiyom ve beş postulattan (toplam on temel ilkel önermeden) oluşan aksiyomatik bir yapıya sahip olduğu, söz konusu aksiyomların da dünya hakkında kesin bilgi sağlayan doğru önermeler olduğu kabul edilmiştir. Russell Eukleides-dışı geometriyi şöyle değerlendirmektedir:

> *"Elementler"e*, yazılmış en büyük kitap gözüyle bakılsa yeridir. Bu kitap gerçekten Yunan zekâsının en yetkin anıtlarından biridir. Kitabın kuşkusuz Yunanlılara özgü eksikleri yok değildir: Dayandığı yöntem salt dedüktif niteliktedir; üstelik öncüllerini oluşturan varsayımları hiçbir şekilde yoklama olanağı yoktur, bunlar kuşku götürmez apaçık doğrular olarak konmuştur. Oysa, XIX .yüzyılda ortaya çıkan Eukleides-dışı geometriler bunların hiç değilse bir bölümünün yanlış olabileceğini, bunun da ancak gözleme başvurularak belirlenebileceğini göstermiştir (Russell'dan akt. Yıldırım, 2008: s. 29-30).

Gözkân, Eukleides'in (...) beşinci postulatın yerine, bunun tam karşıtı olan bir önermenin biçimsel olarak kanıtlanması sonucunda Eukleides-dışı geometrinin ortaya çıktığını ileri sürmektedir (Gözkân, 2008b: s. xii. "Sunuş"). Eukleides-dışı

geometrilerin kabul görmesiyle birlikte, matematiğin tümünde "tutarlılık", "kanıtlanabilirlik" kavramlarının "doğruluk" kavramının yerine geçtiğini ve kabul edildiğini görmekteyiz. Matematikte "tutarlılık" fikrinin, matematiksel önermelerin aksiyomatikleştirilme girişimine kaynaklık ettiğini söylemek mümkündür. Eukleides-dışı geometrinin ortaya çıkışıyla; biçimin, içeriğin yerini alması gerektiği görüşü öne çıkmış ve önem kazanmıştır. "Nitekim-Eukleides-dışı geometrilerden sonra, kusursuz bir biçimselliğin sağlanması arı matematiğin en önemli konusu oluyor ve aksiyomların içerik olarak doğru olma fikri, yerini, biçimsel olarak tutarlılık fikrine bırakıyor" (Gözkân, 2008b: s. xiii. "Sunuş").

Matematiğin felsefi temellerine ilişkin bir görüş olan biçimcilik, matematiğin tümünü biçimselleştirilmesi gereken bir sistem olarak görmektedir. Bu yaklaşıma göre sayıların varlığının, yokluğunun bir anlamı yoktur. Sayıların nasıl inşa edildiğinin, yasalarının ne anlama geldiğinin araştırmak yerine, Barker'in deyiş biçimiyle "(...) onlara, işaretlerle oynanan oyunlar, belli kurallara göre diğerlerinden türetilebilen, işaretler dizisinin oyunları olarak bakılabilir" (Barker, 2003: s. 160). Biçimci görüşün, matematiğin aksiyomatik yapısını temel alarak "tamlığı" ve "tutarlılığı" ispatlamaya girişmesi, matematikte içerikten önce biçimi ön plana çıkarmıştır. Yıldırım'a göre "Formalist öğreti açısından matematik soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir; öyle ki, sistemi oluşturan terimler anlamsız birer simge, ilişkileri dile getiren tümceler içerikten yoksun birer önerme kalıbıdır" (Yıldırım, 2008: s. 94).

Paradoksların ortaya çıkmasıyla birlikte; mantıksal ispatlar ve ilişkiler hiçbir anlam ifade etmemektedir. "Bundan dolayı, mantıksal işlemlerin ve matematiksel ispatların kendilerini biçimselleştirmeleri gereklidir. Bu biçimselleştirme, mantıksal ilişkileri formüllere dönüştürmeyi gerekli kılar" (Hilbert, 2004a: s.136). Matematiğin biçimsel yapısı için yapı taşları görevi gören, kesin formüller aksiyomlardır. Matematiksel ispatlar ve mantıksal ilişkiler aksiyomlar yardımıyla biçimselleştirilebilirse paradokslara karşı korunmanın yolu bulunmuş olacaktır. Bu yolun bulunmasına yardımcı olacak yöntemler şunlardır:

> (1) Her nerede kurtulma umudu varsa, verimli tanımları ve tümdengelim yöntemlerini dikkatlice inceleyeceğiz. Onlara bakacak, güçlendirecek ve kullanışlı kılacağız.
> (2) Tümdengelimlerimiz için kimsenin şüphe duymadığı ve çelişkilerin ve paradoksların sadece bizim kendi dikkatsizliğimizden dolayı çıktığı sıradan temel sayı kuramında var olan kesinliği matematiğin tümünde kurmalıyız (Hilbert, 2004a: s. 128).

Hilbert'ten önce de matematikte tutarlılık önemli bir sorun olarak ele alınmıştır. Matematiksel işlemlerin tutarlılığının yoklanması, tutarlı olduğu kabul edilen başka bir model alınarak yapılıyordu. Örneğin; aritmetiğin tutarlılığı için geometri, geometrinin tutarlılığı için de aritmetik model alınıyordu. Bu biçimde yapılan tutarlılık yoklaması göreceli bir işlemdi. Çünkü tutarlılığı kabul edilen bir "X" teoremi, bir "Y" teoremi ile birebir eşleşim gösterdiğinde "Y" teoreminin de tutarlılığı kabul edilmekteydi. Böyle bir anlayış, tutarlılık işlemini çıkmaza sokabiliyordu. Bir matematiksel işlemin tutarlı olabilmesi için, bu işlem içinde birbiriyle çelişen önermelerin olmaması gerekir.

Yıldırım'a göre matematikte "tamlık" kavramı, bir sistemde birbiriyle çelişen iki önermeden yalnız birinin, yani "p"nin ya da "$\overline{p}$"nin ispatlanabildiğini ifade eder (Yıldırım, 2008: s. 112). Bir sistemin tutarlı olabilmesi için "p" ya da "$\overline{p}$" gibi önermelerin birlikte doğru olmaması gerekirken, sistemin "tam" olabilmesi için bu önermelerden yalnızca birinin sistemde doğru olması, bir anlamda ispatlanabilir olması gerekir. Hilbert, Eukleides geometrisinin eksiklerini gidererek aksiyomatik bir yapıya kavuşturmasının ardından, aynı işlemi matematiğin tümü için yapmaya çalışır. Biçimselleştirmenin en önemli sorunu "tutarlılık" sorunudur. Tutarlılığın yanında "kesinlik" ve "tam"lığın sağlanması Hilbert ve çevresindeki matematikçiler için temel problemdir. Yıldırım'a göre Hilbert'in programının başlıca amaçları şu şekilde toparlanabilir:

(1) Matematiğin aritmetik, geometri, analiz ve kümeler teorisi gibi dallarını (sonunda tüm matematiği) aksiyomatikleştirmek;
(2) Her dalda kurulan aksiyomatik dizgenin çelişki içermeyen tutarlı bir teori olduğunu ispatlamak;
(3) Tutarlılığı ispatlanan teorinin aynı zamanda tam (yani, dizgenin kurallarına göre oluşturulan P ya da P- değil gibi her tümcenin, dizgenin öncülleri aksiyomlardan çıkarsanabilir) olduğunu göstermek;
(4) Tutarlılığı ve tamlığı ispatlanan teorinin kategorik (yani, teorinin tüm yorum ya da modellerinin izomorfik) olduğunu belirlemek (Yıldırım, 2008: s. 95).

Biçimciliğin öncüsü olan Hilbert, matematiğin, sonlu sayıdaki bir grup aksiyom üzerinde temellendirilebileceğini ve bu aksiyomların tutarlılığının ispatının yapılabileceğini iddia eden bir yaklaşımla, matematiğin tümünün "tam" ve "tutarlı" olduğu yönündeki düşünceleri pekiştirme aşamasındayken, matematikçi Kurt Gödel,

1931 yılında yayımlanan ünlü makalesindeki iki önemli "eksiklik teoremi" ile sadece matematik içerisindeki sınırlılıkları göstermekle kalmamış, aynı zamanda var olan aksiyomatik yapı içerisinde matematiğin mantığa indirgenip indirgenemeyeceği sorusuna da ışık tutmuştur. Gödel'e göre matematik mutlak doğrular alanı değildir ve aksiyomlarla sağlanan kesinlik sadece olası bir kesinliktir. Gödel'in birinci teoremine göre, matematiksel sistemlerde doğruluğu ya da yanlışlığı gösterilemeyen önermeler vardır, yani matematikte bilinemez bir şeyler vardır, her zaman da olacaktır. Bir örnek vermek gerekirse; ikiden büyük her çift sayının, iki asal sayının toplamı olduğunu iddia eden "Goldbach Teoremi"dir. Sonlu sayıdaki her çift sayı, iki asal sayının toplamı biçiminde yazılsa bile, bu teoremin ikiden büyük her çift sayı için geçerli olduğu ispatlanamamıştır. Bu örnekten de, aksiyomatik yöntemin gücünün sınırlı olduğunu görmekteyiz. İkincisine göre, matematiksel sistemin tutarlılığı sistemin kendi içinde gösterilemez. Başka bir deyişle, Gödel'in ikinci teoremi "(...) tüm aritmetiği kapsayacak ölçüde kapsamlı bir dizgenin (*Principia Mathematica* gibi) tutarlılığının üst matematiksel bir kanıtlamasını vermenin olanaksız olduğunu göstermiştir" (Nagel ve Newman, 2008: s. 45-46). Gödel'in bu iki teoremi insan kapasitesinin matematiksel düşünme gücünü ve yaratıcı boyutunu gösteren çok önemli bir çalışmadır.

Nagel ve Newman'ın deyişiyle "Gödel, aksiyomatik yöntemin bazı içsel sınırlamaları olduğunu, hatta negatif olmayan tamsayıların özelliklerinin bile tümüyle aksiyomatikleştirilemeyeceği sonucunu, bu şaşırtıcı ve biraz da hüzünlü sonucu matematik âlemine sundu" (Nagel ve Newman, 2008: s. 4). Tanınmış bilimadamı Douglas Richard Hofstadter, Gödel'in çığır açan çalışmasıyla matematik felsefesinde yeni arayışların ortaya çıkmasına zemin hazırladığını ifade etmektedir.

"(...) Gödel, matematiksel düşüncenin aksiyomatik dizgelerin sağlamlığı ile yakalanabileceğine inananların umutlarını yıktı ve böylece matematikçi, mantıkçı ve felsefecileri, kanıtlanabilirlik ile doğruluğu geri dönüşsüz bir şekilde birbirinden ayıran bu yeni gizemli gediği keşfetmeye zorladı" (Hofstadter, 2008: s. xxvi). Gödel çalışmalarında, matematikte biçimsel dizgelerin tam olmadığını, başka bir deyişle bu dizgelerde tutarlılığı ispat edilemeyen önermelerin olduğunu kanıtlamıştır.

Barker, biçimciliğin matematiksel önermelerin doğruluğunu ya da yanlışlığını konu etmemesini ve matematiği sadece işaretler dizisi olarak görmesini çok uç bir görüş olarak değerlendirir. Fakat, biçimciliğin sayıları kavramsal düzeyde ele almaması bakımından değerli bir görüş olduğunu ileri sürmektedir (Barker, 2003: s.162-163). Frege de, biçimci görüşe yönelik eleştirisini, "Formalist kuram, bütün yapmamız gerekenin postulatlar oluşturmak olduğunu düşünüyor; bunların başarılı olmasıyla işler kendiliğinden yürüyecektir. Formalist kuram sadece sözleriyle istediği her şeyi yaratabilen bir Tanrı gibi davranıyor" (Frege, 2008: §109 s. 199) sözüyle ortaya koymaktadır. Matematiksel sistemleri aksiyomatikleştirmenin iyi bir yöntem olup olmadığını sorun edinenlerden matematikçi Richard Courant'a göre aksiyomatikleştirme, matematiği belirginleştirmenin yanında konunun özünün kavranmasında yardımcı olmaktadır. Fakat aksiyomatikleştirme matematikte kavrayış, sezgi ve diğer zihinsel etkinliklerin önüne geçmemelidir (Courant, 2008: s. 219).

Biçimci görüş, insan zihnini, belli komutlar doğrultusunda işlem yapan bir makine olarak görmektedir. Başka bir deyişle biçimcilik, insan zihnini, belli semboller

kullanılarak dizgeler bütünü olarak ifade edilmiş matematiksel kalıplara bağlı kalması gerektiğini ileri sürmektedir. Halbuki insan zihni sorgulama, kavrama, öğrenme ve tahmin etme vb. düşünsel etkinliklere açıktır. Böyle bir düşünme etkinliğinde zihin, matematiksel işlemlerin doğruluğunu ya da yanlışlığını sorgular. Dahası matematik, bir matematiksel önermenin sadece doğruluğunu ispat etme etkinliği değildir, aynı zamanda yanlış olan bir işlemin yanlışlığını bulma ve gösterme etkinliğidir de.

Gödel'e göre matematiksel ispatlamalar, matematiksel düşünmenin dışında olması gereken mekanikleşmiş formüller ya da kurallar tarafından yapılmaktadır. "Matematiğin daha fazla kesinlik [*Exaktheit*] yönündeki gelişimi-iyi bilindiği gibi-geniş alanlarının biçimselleştirilmiş hale gelmesine yol açtı, öyle ki ispatlamalar birkaç mekanik kural izlenerek yapılabilir hale geldi" (Gödel, 2010: s. 23). Matematik tarihinin gösterdiği gibi, sadece aksiyomlardan hareket edilerek tüm tanımları, genellemeleri tutarlı kabul etmek matematiğin doğasına aykırıdır. Nagel ve Newman'a göre aksiyomatik yöntem, birtakım önermelerin ispat edilmeksizin aksiyom veya postulat olarak kabul edilip dizgenin diğer bütün önermelerinin ya da teoremlerin bu aksiyomlardan türetilme işlemidir (Nagel ve Newman, 2008: s. 2). Matematikçi, çalışmalarında ağırlıklı olarak matematiğin biçimsel yapısını kullansa bile, matematiğin kavramsallığının yüklediği anlamı fark etmek durumundadır. Aksi halde matematiği yaşamdan ve diğer düşünme etkinliklerinden soyutlamış olur. Bilim felsefecisi Imre Lakatos biçimciliğe yönelik şiddetli eleştirisini şu şekilde ifade etmektedir:

> Formalizm, matematik tarihi ile matematik felsefesinin ilişkisini kesmiştir; çünkü, formalizme göre, "matematik tarihi" diye bir şey yoktur. (...) Üstelik herkesin "matematik" diye bildiği önemli bir bölümü formalistlerin gözünde matematik değildir. Matematiğin gelişme sürecini göz ardı eden formalizmin kurduğu egemenliğe Kant'ın şu sözleriyle karşı çıkmak istiyoruz: Felsefenin yol göstericiliğinden yoksun matematik tarihi körleşmekten, matematik tarihindeki çarpıcı gelişmelere sırt çeviren matematik felsefesi koflaşmaktan kurtulamaz. (. ..) Formalizm ucu çok gerilere uzanan "bağnaz" diyebileceğimiz bir felsefe zincirinin son halkasıdır. İki bin yılı aşkın bir süre boyunca bağnazlarla kuşkucuların tartışmasına tanık olmaktayız. Bu büyük tartışmada matematik, bağnazların övünç kalesi olmuştur. (...) Buna karşı çıkmanın zamanı gelmiştir artık (Lakatos'tan akt. Yıldırım, 2008: s. 96).

Hilbert'e göre "matematik, ancak diğer bilimler kadar mantığa dayandırılabilir" (Hilbert, 2004b: s. 144). Başka bir yazısında Hilbert bilimsellik için, mantığın tek başına bir dayanak olamayacağını öne sürmektedir. "Frege ve Dedekind'in önceki çabalarının tersine, bilimsel bilgi için mantık tek başına yeterli değil, belli sezgisel kavramlar ve görüşler gerekli koşullardır" (Hilbert, 2004b: s. 142). Hilbert'in bu söyleminden aritmetiğin, mantıksal tümdengelim yöntemleri kullanılarak saf mantık yasaları üzerine kurulamayacağı düşüncesini çıkarmak mümkündür. Hilbert, bu noktada Kant'la olan görüş birliğine işaret eder. "Kant kendi doktrininin ayrılmaz bir parçası olarak, matematiğin mantıktan bağımsız verilen bir konu içeriğini ele aldığını öğretti. Bundan dolayı matematik hiçbir zaman yalnız mantığa oturtulamaz. Netice olarak Frege ve Dedekind'in matematiği böyle mantığa oturtmaya kalkışmaları başarısızlığa mahkumdu" (Hilbert, 2004b: s. 129).

Hilbert'te biçim içeriğin önüne geçtiği için, matematiksel sistemlerin tutarlılığı ve tamlığı ön plandadır. Davis ve Hersh, biçimcilerin bir nesne olan sayı ile ilgilenmediğini ileri sürmektedirler. "Formalistlere gelince, onlar işin içinden hemen her şeyi yadsıyarak çıkmaktadırlar. 'Matematiksel nesne' denen birşey olmadığı için bunların doğasına ilişkin bir sorun da yoktur" (Davis ve Hersh, 2008: s. 214). Gördüğümüz gibi mantıkçı görüş gibi, biçimci görüş de genel olarak matematiği ve özel olarak da sayıyı ontolojik zemininden koparmıştır. Şimdi de Kant ve Gödel'in görüş farklılıklarını daha ayrıntılı görmek için Gödel'den uzunca bir alıntıya yer verelim.

> Matematiksel sezginin, ilgili nesnelerin *dolayımsız* bir bilgisini veren bir duyu olarak kabul edilmesine gerek olmadığına dikkat edilmelidir. Bunun yerine, fiziksel deneyimde olduğu gibi, düşünce ve bu nesneler hakkındaki düşüncelerimizi dolaysız olarak verilen başka bir şeye dayalı olarak *biçimlendiriyoruz*. Burada sadece bu başka bir şey hisler değildir ya da asıl olarak değildir. Hislerden öte bu şey, aslında (matematikten bağımsız olarak) dolaysız bir şekilde şu olgudan çıkar: Fiziksel nesnelere gönderme yapan düşüncelerimiz bile duyulur veya sadece duyuların terkibinden, niteliksel olarak farklı bileşenler içerir; sözgelimi, nesne düşüncesinin kendisi böyle bir şeydir; fakat öte yandan düşüncemiz ile niteliksel olarak yeni bir şey üretmiyor, fakat sadece verili elemanları yeniden üretiyor ve birleştiriyoruz. Açıktır ki, matematiğin temellerini oluşturan "verilenler", ampirik düşüncelerimizde bulunan soyut elemanlarla yakından ilgilidir. Bununla birlikte, bundan, bu ikinci türün bilgisinin, Kant'ın önerdiği gibi, tamamen sübjektif bir şey olduğu sonucu hiçbir suretle çıkmaz. Çünkü bu bilgiler duyu organlarımız aracılığıyla belirli şeylerin eylemleriyle birleştirilemez. Bunun yerine, onlar da objektif gerçekliğin bir çehresini temsil edebilirler. Fakat, duyuların tersine, bizdeki varlıkları kendimiz ile gerçeklik arasındaki başka bir tür ilişkiden dolayı bilir (Gödel, 2004: s. 236-237).

Gödel'in "(...) kavramlar şeylerin bağıntısı ve özellikleri olarak bizim tanımlarımız ve yapılarımızdan bağımsız olarak vardır" (Gödel, 1994: s. 456) biçimindeki ifadesinden, onun, matematiğin keşfedildiği tezini savunduğunu anlamaktayız. Gödel'e göre matematiksel nesneler bir tür nesnel gerçekliği temsil ederler. İnsan bu gerçeklikle Kantçı anlamda hissetme yetisiyle (duyusallıkla) değil, düşünme aracılığı ile temas kurar. Bu görüş Kant'ın transandantal felsefesiyle taban tabana zıttır.

Özetle; Gödel'in çalışmalarından da anlaşıldığı gibi, sadece sonlu sayıdaki aksiyomlardan hareket edilerek matematiğin tümünün tutarlı ve tam olduğunun gösterilmesi imkânsızdır. Çünkü matematik; olmuş-bitmiş, durağan bir bilim değil, aksine sürekli gelişen, hâlâ çözülemeyen soruların, ispatlanmayan teoremlerin olduğu canlı bir bilimdir. Matematiğin temelleri hakkında felsefi bir görüş olan biçimcilik, "tutarlılık" ve "tamlık" iddialarıyla matematiğe salt simgesel bir kimlik kazandırmaya çalışmıştır. Bu bakımdan biçimciliğin, içeriği geri planda tutarak matematiksel düşünmenin önemini göz ardı ettiğini söylemek mümkündür. Hilbert'in öncüsü olduğu biçimci görüş ile Kant'ın aritmetik görüşü arasındaki ortak noktaların olmadığı görülmektedir. Kant sayının inşasını; hissetme yetisi (duyusallık) üretici hayal gücü ve anlama yetisinin işbirliği sonucunda gerçekleştiğini temellendirirken Hilbert, matematiğin en temel nesnesi olan sayıyı ve sayının nasıl inşa edildiğini bilme konusu yapmamaktadır.

2.2.2.3. Sezgicilik (*Intuitionism*)

Mantıkçılık ve biçimciliğe karşı bir tepki olarak sezgicilik, Brouwer ve Heyting öncülüğünde ortaya çıkmıştır. Sezgicilik, sayının varlık sorununu ön plana alarak, matematiksel kavramların sezgisel verilere dayanarak inşa edilebileceğini iddia eder. Sezgiciliğe göre, sayı ve küme gibi kavramlar aynı zamanda matematiksel nesnelerdir ve zihinde inşa edilebildikleri oranda varlıkları ortaya çıkar. Yani, matematiksel bir nesne sonlu adımda inşa edilebiliyorsa, onun varlığı ispat edilebilir.

Brouwer'a göre matematiksel yasaların kesinliğinin neye dayandırıldığı yüzyıllardır felsefi araştırmalara konu olmuştur. Matematiksel kesinlik konusunda, sezgicilik ve biçimcilik gibi iki düşünce akımı ortaya çıkmış, birçok açıdan bu iki görüş birbirine giderek daha karşıt hale gelmiş olmakla birlikte son yıllarda matematiksel yasaların doğa yasaları olarak görülemeyeceği düşüncesi üzerinde fikir birliği sağlanmıştır. Fakat, matematiksel kesinliğin nerede bulunduğu sorusuna ilişkin, iki görüş de farklı cevap verir. Bu, sezgiciliğe göre insan aklında (*in the human intellect*), biçimciliğe göre ise kağıt üzerindedir (Brouwer, 2002: s. 269-270). Kant'ın geometri görüşüne karşı en önemli darbe Eukleides karşıtı geometrinin keşfiyle ortaya çıkmıştır. Matematikteki gelişmenin bu döneminden sonra, Kant'ın uzayın *a priori* bir görü formu olduğu düşüncesi bir kenara bırakılıp, zamanın *a priori* bir görü formu olduğu düşüncesinin güçlenmesiyle sezgicilik kendini toparlamıştır. Brouwer'a göre on dokuzuncu yüzyılda matematikte ortaya çıkan gelişmeler düşünüldüğünde, sezgiciliğin Kant'ın görüşüne sadık kalması sezgicileri biçimcilere karşı zayıf bir

konumda bırakmıştır. Kant'ın görüşlerinde, şu an tamamen terk edilen eski bir sezgicilik biçimine rastlanmaktadır (Brouwer, 2002: s. 271).

Yıldırım'a göre "(...) sezgicilik sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin, sezgisel olarak bildiğimiz doğal sayılar üzerine kurulabileceği tezini içermektedir" (Yıldırım, 2008: s. 97). Matematiksel bir nesnenin, yani sayının ya da kümenin var olduğunu kabul etmek için, nasıl inşa edildiğini açıklamak gerekir. Zihnin oluşturduğu matematiksel inşalar matematiğin güvenilirliğini ortaya koymada açık ve sağlam delillerdir. 19. yüzyılın son çeyreğinde sayı kuramında tanınmış matematikçi Leopold Kronecker, "'Tanrı tamsayıları yarattı, gerisi insan oğlunun eseridir'" (Yıldırım, 2008: s. 63) sözüyle bütün sayı kümelerinin tamsayılar üzerine kurulduğunu ileri sürmektedir. Kronecker, matematiksel nesne ya da kavramların tamsayılardan kalkarak kurulabildiğini, "kurulabilirliğin" matematik için vazgeçilmez bir zihinsel işlem olduğunu iddia etmektedir. Kronecker'e göre matematiğin en sağlam temeli, sezgisel olarak oluşmuş sayılarla yapılan işlemlerde aranmalıdır. Kurulabilirliğin geçerli olabilmesi için, matematiksel tanım ve ispatların sonlu adımda inşa edilmesi gerekir.

20. yüzyılın ilk çeyreğinde, düşünceleriyle sezgiciliğe katkıda bulunan matematikçi ve fizikçi Jules Henri Poincaré'dir. Poincaré, matematiksel düşünmenin gerçek aracının matematiksel tümevarım olduğunu öne sürmektedir. Poincaré, bilinçaltının matematiksel nesneleri yaratmada önemli işlevi olduğunu, matematiğin belli kurallara bağlı kalarak yapılan mekanik bir iş olmadığını, aksine, yaratıcılığın

kurallar içinde kalarak değil, akıl yürütmenin ve sezginin kurallarının sınırlarını zorlamasıyla mümkün olabileceğini iddia etmektedir (Poincaré, 2008: s. 243).

Tanınmış matematikçi Carroll Vincent Newsom, sezgicilerin matematiksel doğruların bütününe, mantıkçılar ve biçimcilerin baktığı gibi nesnel bir yapı gözüyle bakmadığını ileri sürmektedir. Newsom, sezgiciliğin matematiğin tümünün simgesel bir yapıya indirgenmesini mümkün görmediğini ifade eder. Sezgiciliğe göre "(...) matematiksel düşünme, onu ifade etmek için kullanılan dilden kesinlikle ayrıdır. Matematiksel bir sürece ilişkin bilgi, bu sürecin sınırsız ilerlemesine elverecek türden olmalıdır. Başka bir deyişle, 'kurma' (inşa etme) olanağını içermeyen 'varlık'tan söz edilemez" (Newsom, 2008: s. 212). Davis ve Hersh'e göre sezgicilik, matematiksel nesneleri insan zihninin bir ürünü olarak görür. Matematikte, inşacı yöntemlerle ispatlanıncaya dek hiçbir teorem doğru ya da yanlış değildir (Davis ve Hersh, 2008: s. 214). Başka bir deyişle, geleneksel mantık ilkelerine göre bir önermenin ya doğru ya da yanlış olması gerekir. Fakat, sezgicilik geleneksel mantığın ilkelerine aykırı önermelerin olabileceğini düşünür ve bu tür önermelere "anlamlı bildirimler" olarak bakar.

Brouwer, sezgiciliğin, matematiksel doğruluğu keşfetmek için klasik mantığı bir araç olarak görmediğini ileri sürmektedir (Brouwer, 2004: s. 174). Sezgicilik, matematiğe mantıksal temel arama girişimine karşı çıktığı gibi, matematiği simgelerden ya da harflerden oluşan bir dizge olarak görmez. Sezgiciliğe göre matematikte önemli olan düşünme etkinliğidir. Bu bakımdan, biçim, matematiksel etkinliğe gerçek canlılık ve

zenginlik veremez. Sezgiciliğin bir diğer öncüsü olan Heyting, mantıkçılığa yönelik eleştirisini şöyle ifade etmektedir:

> Mantık benim dayandığım zemin değildir. Nasıl olabilir ki? Mantık temel alındığında, onun da, ilkeleri matematiksel ilkelerden daha karmaşık olan bir temele ihtiyacı olacaktır. Oysa matematiksel bir inşa öylesine doğrudan, öylesine açık olmalıdır ki, ona herhangi bir temel arama gereği duymayalım. Bir çıkarımın geçerli olup olmadığını mantık kullanmaksızın da bilebiliriz; bunun için açık, bilimsel bir kavrayış yeterlidir (Heyting' den akt. Yıldırım, 2008: s.100).

Heyting'e göre bilimsel kavrayış, belli kalıplar dışına çıkarak, daha çok sezgi temelinde inşa edilen kavrayıştır. Çünkü, sezgicilikte matematik, insan zekâsının bir etkinliği olarak yaşamın doğal bir parçasıdır. Mantıkçı ve biçimci görüşün aksine, sezgiciliğin matematiği dinamik bir alan olarak görmesi dikkat çekici bir durumdur. Brouwer'a göre matematik uzay ve zamanın bilimi olarak kabul edilse bile, klasik mantığın etkinlik alanı olmuştur (Brouwer, 2004: s. 172). Böyle bir yaklaşımla Brouwer, Kant sonrası matematiğin temellerine ilişkin bir görüş olan mantıkçılığın matematik üzerindeki etkilerini dile getirmektedir. Sezgicilik sonlu adımda klasik mantık ilkelerine göre her önermenin, "doğru" ya da "yanlış" olmasını mümkün görür. Fakat, ispatı sonlu adımda inşa edilemeyen önermeler için paradoksların kaçınılmaz olabileceği düşüncesiyle "doğru" ya da "yanlış" kavramlarının kullanılması yersizdir. Böyle önermelerin doğruluk değeri "belirsiz"dir. Yıldırım'ın deyiş biçimiyle "Bu, sezgiciliğin değişik bir mantık, 'doğru', 'yanlış' yanında 'belirsiz' kategorisine de yer veren en azından üç değerli bir mantık öngörmesi demektir" (Yıldırım, 2008: s. 100). Sezgiciliğin, sayıların zihnin bir ürünü olduğu teziyle Kant'ın görüşüne paralel olduğu düşünülse de, bu yaklaşım sayı gibi bir

matematiksel nesnenin nasıl inşa edildiğini belirsiz bırakmıştır. Barker, *a priori* görü formu zamanın Kant ve Brouwer'ın ortak çıkış noktası olduğu görüşündedir.

> Brouwer, Kant gibi, sayı matematiğinin çıkış noktası olarak hizmet eden zamansal saymanın "saf görüsünü" savundu; ve bundan dolayı bu grubun felsefesine "sezgicilik" (intuitionism) adı verildi. Bununla birlikte bu modern matematikçiler için, sezgicilik, Kant'ta olduğu gibi yalnızca bir felsefi teori olmamıştır. Onlar için matematiksel savların geçerliliği hakkındaki kendi yargıları, sezgiciliği kabul etmeyen diğer matematikçilerin yargılarından o derece farklıydı ki, sezgicilik, gerçekte kendi matematiksel çalışmalarına kadar sızan bir görüş olmuştu (Barker, 2003: s. 123).

Barker, Brouwer'ın öncülük ettiği sezgiciliğin sayıyı görü temelinde ele aldığını ileri sürmektedir. Yine Barker, Kant ve Brouwer'ın ortak görüşünü; "(...) sayının yasalarının, şeyleri kendilerinde oldukları gibi değil de, yalnızca zihnin onları görülediği (duyumsadığı) şekilde gerçek kıldığını söyler" (Barker, 2003: s. 128) biçiminde ifade etmektedir. Sezgiciliğin, "sezgi" kavramıyla matematikte düşünme etkinliğine vurgu yaptığını fakat, matematiksel nesnenin inşasında bilme yetilerinin kendiliğinden yaptığı işbirliğini ve rolünü Kant'ın açıkladığı gibi bir açıklama girişiminde olmadığı görülmektedir. Brouwer, geleneksel mantığın dört ilkesinin, tüm matematiksel doğruları ortaya çıkarmak için kabul edildiğini, böylece sezgiciliğin mantıkçı görüşe bir tepki olarak oluştuğunu ve bu tepkinin iki adımda kendini gösterdiğini ifade etmektedir. Birinci adımın yıkıcı ve kısırlaştırıcı sonuçlara sebep olduğunu ifade ederken; ikincisinin ise, yeni gelişmeler için birçok olasılık ürettiğini öne sürmektedir. Brouwer, sezgiciliğin birinci adımı bir etkinlik olarak adlandırdığını ifade eder ve bu adımı ilgi çekici bir ifadeyle şu şekilde anlatır:

> Matematiği, matematiksel dilden ve böylece teorik mantık tarafından betimlenen bir dil fenomeninden tamamen ayırmak; ayrıca, sezgici matematiğin, zaman hareketinin algısında kökenlerini bulan, zihnin zorunlu bir dilsiz etkinliği olduğunu teslim etmektir. Zaman hareketinin bu kavramı, hayatın bir anını iki ayrı şeye ayırmakla tanımlanabilir; bunlardan biri diğerine yer verir ama hafızada tutulur. Bu nedenle, ikilik bütün nitelikten yoksun bırakılırsa, tüm ikiliğin ortak özü içi boş biçime dönüşür. Ayrıca bu ortak öz, bu içi boş biçim, matematiğin temel sezgisidir (Brouwer, 2004: s. 167).

Brouwer, sezgiciliğin matematiği dilden, özellikle teorik mantığın betimlediği dil olgusundan ayırdığı görüşünü açık olarak ifade etmektedir. Fakat sezgiciliğin matematiği; hayatın bir zaman diliminin, biri yerini diğerine verecek, ancak bellekte tutulmaya devam edecek şekilde, iki ayrı zamansal âna ayrılmasında bulan, dilsiz bir etkinlik alanı olduğu düşüncesi belirsiz görünmektedir. Çünkü Brouwer'ın her ne kadar Kantçı bir çizgi izlediği ileri sürülse de, "zaman" görüsünü iki parçaya ayırdığı, dahası bu parçaların her birinin işlevlerini açık olarak belirtmediğini düşünmekteyiz. Bir başka deyişle, Brouwer'ın "iki parçalı" zaman görüsü belirsiz görünmektedir.

Hilbert'in asistanı olan matematikçi Paul Bernays, tamsayı kavramının sezgisel kaynaklı olması görüşünün Brouwer'a teslim edilmesi gerektiğini ifade ederken, aynı zamanda Brouwer ile Kant'ın *a priori* görü formlarına ilişkin görüş farkına vurgu yapmaktadır. "Brouwer'ın başvurduğu şeyin ne olduğu açıktır. Sezgiciliğin temel düşüncelerinin saf sezgiyle açık bir şekilde bize verildiğini iddia ediyor. Buna dayanarak, Kant ile olan kısmî uyuşmasını ortaya çıkarıyor. Ama Kant için zaman ve uzaya göre saf bir sezgi varken, Brouwer sadece Kant gibi, zamana dayanarak sayı

sezgisini kabul ediyor" (Bernays, 2004: s.183-184). Brouwer, geometride ortaya çıkan yeni gelişmelerin sezgiciliğin toparlanma dönemi yaşamasındaki etkin rolüne dayanarak, "yeni sezgicilik" olarak tanımlanan yeni yaklaşımı şu şekilde açıklar:

> Bu yeni sezgiciliğe göre, hayatın zamansal anlarının farklı parçaları nitel olarak farklı bölümlere bölünür ve bu parçalar yalnızca zamansal olarak ayrı kalırken yeniden birleştirilir; fakat tüm bunların hepsi, insan zekasının temel fenomeni olarak görülmekte, insan zekası, duyusal içeriğinden bunları ayırarak, matematiksel düşünmeye ilişkin temel bir fenomene geçiş yapar ve bu da, "iki-birlik" (*two - oneness*) inşası anlamına gelir. Matematiğin esas inşası olan iki-birlik inşası, yalnızca bir ve iki sayılarını değil, tüm sonlu sıra sayılarını da oluşturur; zira iki-birliğin elemanlarından biri de yeni bir iki-birlik olarak düşünülebilir. Bu işlem sonsuza kadar tekrar edebilir ve bu sayede en küçük sonsuz sıra sayısı "w" elde edilir. Son olarak, bağıntılı ve ayrı olanların, sürekli ve kesintili olanların bir araya geldiği, matematiğin esas inşası, doğrusal süreklilik inşasının doğmasını sağlar. Yani yeni birimlerin birbirinin yerine geçmesi ile yok edilemeyen "arasında olma" hali, asla birimlerin salt derlemesi olarak düşünülemez. Bu şekilde, zamanın *a priori* hali, yalnızca aritmetiğin özelliklerini sentetik *a priori* yargılar olarak nitelendirmekle kalmaz; geometrinin özellikleri için de bunu yapar (Brouwer, 2002 : s. 271).

Brouwer'a göre sezgiciliğin şu anki bakış açısıyla, tüm matematiksel birimler inşa yoluyla geliştirilebilir. Böyle bir işlem yalnızca, "sonlu bir sıra sayısı elde etmek" ve "sonsuz sıra sayısını yani "*w"* sayısını elde etmek" gibi iki işlemin sonlu kere birleştirilmesi ile yapılabilir. Burada Kant'ta ardışık ve bitişik bir özellik gösteren zaman Brouwer'da parçalanmaktadır. Dahası, sayının inşasında, bu parçalardan her birinin işlevi de açıklıkla ortaya konmuş değildir. Bir başka anlatımla, Kant sayının inşasında, *a priori* görü formu olan zamanın rolüne açıklık getirirken, Brouwer'da böyle bir yaklaşımın olmadığı görülmektedir. Ayrıca, sezgiciliğin öncüleri olan

Brouwer ve Heyting'in ortak görüşleri, matematiksel nesnelerin bizim dışımızda ve bizden bağımsız olarak var olduğu yönündedir. Bu yönüyle de sezgicilik Kant'ın nesne anlayışıyla taban tabana zıttır.

2.3. Çağdaş Matematik Felsefesi Tartışmalarına Eleştirel Bir Bakış

Daha önceki başlıklardan, temelci yaklaşımların matematiğin doğasına ilişkin olarak kural koyucu bir tanım vermeye çalıştıklarını anlıyoruz. Bu bakımdan, kuramsal görüşlerin matematik hakkındaki sorulara doyurucu yanıt vermesi olanaksız görünmektedir. Öte yandan, çağdaş matematik felsefesine bakıldığında ortaya çıkan yeni yaklaşımların, kuramsal görüşlerin sınırlılıklarını aşma çabasında olduğu anlaşılmaktadır. Hiç kuşkusuz, matematik felsefesi kendi yönünde gelişmeye devam etmektedir. Ancak, matematiksel nesneyi felsefi bir açıdan ele almayan girişimlerin matematik felsefesine katkısının ne olacağı her durumda tartışılmaya devam edilecektir. Öyle görünüyor ki, matematiğin en temel nesnesi olan sayıyı salt dilin imkânları ile açıklamaya çalışan eğilimler kapsamlı temellendirmelerden yoksun olacaktır. Bu başlık altında öncelikle, ontolojik bakış açısıyla matematiksel bilgiyi ve dahası matematiksel nesnelerin neliğini sorgulayacağız. Daha sonra, bir yandan kuramsal yaklaşımları değerlendirirken diğer yandan da çağdaş matematik felsefesini eleştirel bir yaklaşımla ele alıp, özgün yönelimlerin söylediklerine kısaca değinmeye, ardından da günümüz matematik felsefesinin üstlenmesi gereken görevlere ilişkin kendi görüşümüzü ortaya koymaya çalışacağız.

2.3.1. Ontolojik Bakış Açısından Matematiksel Bilgi

Nicolai Hartmann'ın bilgi sorunlarını ontolojinin ışığında ele alarak "doğruluk" ve "kesinlik" gibi kavramlara bakış tarzının, bu sorunların çözümüne yönelik yaklaşımlara dayanak sağladığı söylenebilir. Hartmann, bilginin ait olduğu nesnenin varlık alanlarına ve varlıksal özelliklerine göre farklılık gösterdiğini, dolayısıyla bilgi sorununun ontolojik temelde ele alınması gerektiğini iddia etmektedir. Hartmann, varlıkları "real varlıklar" ve "ideal varlıklar" biçiminde iki gruba ayırır. Başka bir anlatımla, real ve ideal varlık alanlarının bilgileri olmak üzere iki tür bilgi vardır. Real varlık alanının bilgisi hem *a posteriori* hem de *a priori* bilgi olurken, ideal varlık alanın bilgisi de yalnızca *a priori* bilgidir. Matematik ve mantık ideal varlık alanındadır. Dolayısıyla bunların bilgisi de *a priori* niteliktedir (Tepe, 1998: s. xii, xv, xvii).

Real ve ideal varlığa ilişkin bilgiler arasındaki farklılık, nesnenin varlık tarzına bağlıdır. Başka bir anlatımla, bilginin doğruluk ve kesinlik ölçütü nesnenin ait olduğu varlık alanının ontolojik özellikleriyle ilgilidir. Dahası, bilgi nesnesinin varlıksal özelliği bilme derecesini ve bilginin kesinliğini belirlemesi bakımından bilgi nesnesinin varlıksal özelliği dikkate alınmalıdır. Hartmann, varlık tabakalarına ait bilgi nesnenin bilme derecesini ve bilgisel kesinliği karşılaştırmak için "varlık kategorileri" ve "bilgi kategorileri" arasındaki ilişkiye bakmaktadır. Aşağıdaki "Tablo 2. 5."te görüldüğü gibi "ƨ" biçimindeki eğri iki kategorinin birbirine en çok yaklaştığı alanın, matematiksel varlık alanı olduğunu göstermektedir. Bu da, matematiksel bilgideki kesinliğin, diğer varlık alanlarından elde edilen bilgiden çok

daha fazla olduğu anlamına gelmektedir. “Bilgi kategorilerinin varlık kategorilerine en çok yaklaştığı yer, realite sınırının altındaki matematik alanıdır; burada ideal ilişki hemen hemen tam bir özdeşliğe erişir” (Hartmann, 1998: s. 28).

Tablo 2.5. Hartmann’da Bilgi Kategorileri (B.K.) ve Varlık Kategorileri (V.K.) İlişkisi

V.K.	B.K.
Tin	Tinbilimleri
Ruh	Psikoloji
Org.	Biyoloji
Anorg.	Fizik
Nicel.	Matematik
Tem.	Tem.
Kip	Ontoloji

Kaynak: Hartmann, N. (1998). *Ontolojinin Işığında Bilgi.* s. 28.

Tabloda görüldüğü gibi “ƨ” eğrisinin davranışı, varlık tabakalarının aynı derecede bilinir olmadıklarını göstermektedir. Başka bir anlatımla, “real varlık” ve “ideal varlık” aynı derecede bilinemezler. “Belki de varlık ve bilgi kategorilerinin gerçekten kapsamlı bir özdeşliğinden söz edebileceğimiz yalnızca bir tek nesne alanı vardır: Matematiğin nesne alanı, matematiksel bilginin kendine özgü kesinliği bunun bir kanıtıdır. Ama bu kesinlik yalnız saf matematik için geçerlidir; ‘saf’ matematikte, doğrudan, yalnızca sayıların, figürlerin, çokluk ve büyüklük ilişkilerinin ideal

varlığıyla ilgilidir" (Hartmann, 1998: s. 26). Hartmann'ın matematiği ontolojik bakış açısıyla ele aldığını, onu, ideal varlık alanının önemli bir disiplini olarak gördüğünü ve Kant gibi *a priori* bir bilgi alanı olarak tanımladığını söyleyebiliriz. Dahası, Hartmann'a göre matematiksel bilginin kesinliği diğer varlık alanlarındaki bilgilerden çok daha yüksek düzeydedir.

Şimdi de, matematiksel önermeler hakkındaki kuramları temel alarak matematiğin dünya ile ilişkilerini ontoloji ve matematiksel hakikat çerçevesinde açıklamaya çalışan filozof Douglas Gasking'in görüşüne yer verelim. Gasking, filozofların matematiksel önermeler hakkındaki görüşlerini "radikal kuram" ve "muhafazakâr kuram" biçiminde tanımladığı iki ana dala ayırmaktadır. Gasking, "radikal kuram"ı kendi içinde genel olarak "empirik kuram" ve "uzlaşımcı kuram" biçiminde ayırdıktan sonra, önce "empirik kuram"ın matematik görüşünü ele alır, sonra da kendi görüşünü ortaya koyar (Gasking, 2004: s. 195-197).

Gasking, matematiksel ve empirik önermeleri dünya ile ilişkisi açısından ele alır. Empirik önermelerin durumlara göre değişebileceğini ileri sürerken, matematiksel önermelerin, yani matematiğin gerçekliğin doğasına ait olduğunu iddia etmektedir. Empirik kurama göre "(...) matematiksel bir önerme, çok sayıda numune inceleyerek elde edilen ve istisnasız genel bir düzene uydukları görülen nesnelerin özellikleri ve davranışları hakkında, özellikle iyi kurulmuş ampirik bir genelleme veya kuralı sadece açıklar" (Gasking, 2004: s. 197). Bu kuram açısından baktığımızda matematikte; ölçerek, sayarak ya da dört işlem yaparak, "empirik" olarak doğrulayabileceğimiz sonlu sayıda önerme bulmak mümkündür. Örneğin, bir eşkenar

üçgenin iç açılarının eşit olduğunu ölçerek gösterebileceğimiz gibi, aynı türden nesneleri bir araya getirerek "5+7 = 12" gibi bir işlemi ya da buna benzer işlemleri saymada hassasiyet gösterdiğimiz sürece kolayca doğrulayabiliriz. Buradan, matematiksel önermelerin, nesnelerin gerçek durumları ve özellikleri hakkında bilgi verdiğini, başka bir deyişle sayma, ölçme gibi işlemlerden elde edilen sonuçlarla matematiksel önermeler arasında bağlantıların olduğunu söylemek mümkündür. Fakat, matematiksel bir önerme empirik bir önermenin karşılığı olamaz.

Gasking, matematiksel önermelerin "düzeltilemez", empirik önermelerin ise "düzeltilebilir" olduğuna vurgu yaparak matematiğin bu önemli farkına işaret eder. Dolayısıyla, "5 +7 =12" önermesi hiçbir zaman düzeltilemeyeceği için empirik olarak da çürütülemez (Gasking, 2004: s. 198). Burada, basit bir örnekle Gasking'in düzeltilebilir önermelerden ne anladığını ve ne demek istediğini açıklamaya çalışalım. Örneğin; "Ahmet bugün okula gitti" gibi bir önerme, Ahmet'in okula gidip gitmediği kesin bir biçimde tespit edildikten sonra doğrulanabilir, ya da yanlışlanabilir, yani düzeltilebilir. Fakat, "5 + 7 = 12" önermesi gelecekteki herhangi bir olaya ya da olguya bağlı olmadığı için yanlışlanamaz, dolayısıyla da düzeltilemez. Empirik önermeler biçiminde tanımlanan önermeler, dünya hakkında bilgi verirken, matematiksel önermeler gerçek dünya hakkında, empirik önermeler gibi bilgi içermez. Çünkü, bu tür önermeler hangi olayın gerçekleşeceğini, hangisinin gerçekleşemeyeceğini ifade edemez, yani olgulara bağlı değildir.

Matematiksel önermelerin doğruluğu kişinin isteğine, iradesine bağlı olmadığı için, "birey üstü" bir karakteri vardır. Gerçek dünyada ne olursa olsun "5 + 7 = 12" gibi

bir önerme her zaman doğrudur. "*Düzeltilebilir* bir önerme, size dünya hakkında bazı bilgiler verirken, tamamen *düzeltilemez* bir önerme hiçbir şey vermez. Düzeltilebilir bir önerme, dünyada belli şeyler olursa iddianızı geri çekeceğiniz ve yanlış olduğunu kabul edeceğiniz bir önermedir. (...) Düzeltilemez bir önerme, *ne olursa olsun* asla yanlış olduğunu kabul etmeyeceğiniz bir önermedir; be nedenle size, *ne* olup bittiği hakkında bilgi vermez" (Gasking, 2004: s. 200). Burada, Gasking'in matematiksel önermelerin empirik önermelerden farkını açık bir biçimde ortaya koyduğunu görüyoruz. Dahası Gasking, matematiksel önermeleri empirik önermeler olarak kabul eden empirik kuramı yanlış bulmaktadır. Çünkü matematiğin önermeleri gerçek dünya hakkında hiçbir bilgi vermez.

Matematiksel nesnelerin bizden bağımsız "idea"lar olarak var olduğunu iddia eden Platoncu görüş, günümüz matematiğinde ağırlığını korumaktadır. Bernays, aritmetikte sayı kavramının sezgisel kökenli olduğunu, geometride de Platoncu uzay düşüncesinin asli bir düşünce olduğunu, dolayısıyla matematikte "sezgici" ve "Platoncu" görüşlerin birbirini tamamladığını ileri sürmektedir (Bernays, 2004: s. 190). Matematik felsefecisi Paul Benacerraf, matematik felsefesinin; matematiksel doğruluğun matematiksel hakikat olarak görüldüğü bir hakikat kuramına ihtiyacı olduğunu ileri sürmektedir. Benacerraf, matematiksel doğruluğu "Platoncu görüş" ve "kombinatoryal (*combinatorial*) görüşler" olmak üzere iki ana bakış ekseninde ele almaktadır. Benacerraf'a göre Platoncu görüş, "standart" bir görüştür, bu görüşün kusurları olsa bile, matematiğin birçok alanında haklı olduğu yerler de vardır. Kombinatoryal görüşler ise; aritmetiğe, genelde "ispat-kuramsal", yani "sözdizimsel" özellikler temelinde doğruluk değeri atfeden görüşlerdir. Örneğin, Peano aksiyomlarında aritmetiğin hakikati üzerine bazı

görüşler kombinatoryal görüşlerdir (Benacerraf, 2004: s. 245, 249). Benacerraf'a göre matematikte "doğruluk" kavramı "(...) genellikle, belli aksiyomlardan (biçimsel) çıkarılabilme olarak" (Benacerraf, 2004: s. 245) tanımlanırken, "hakikat" kavramı "(...) çok net bir şekilde referansa, sözlük anlamına veya kanaate göre açıklanmaz. 'Hakikat' yüklemi sözdizimine göre tanımlanır" (Benacerraf, 2004: s. 245). Hakikat kavramı için matematiksel doğruluğun doyurucu bir biçimde açıklanması asgari bir şart olarak görülmelidir. "(...) matematiksel hakikat kavramı elimizdeki matematiksel bilgiyi nasıl elde ettiğimizi anlaşılır kılacak şekilde genel bir bilgi kuramıyla uyumlu olmalıdır" (Benacerraf, 2004: s. 248).

Yeri gelmişken Gödel'in, Benacerraf'ın "standart görüş" ya da Platoncu görüş olarak tanımladığı görüşü açık bir biçimde savunanlardan biri olduğunu belirtelim. Matematik felsefesinde matematiksel nesnelerin "keşfedildiği" görüşüne karşılık gelen bu görüş kimi matematikçiler tarafından kabul görmüştür, günümüzde de hâlâ kabul gördüğünü söyleyebiliriz. Benacerraf, matematikle empirik bilimler arasında bir paralellik kurma ve iki alanı uzlaştırma eğiliminin Gödel'i bu görüşe teşvik ettiğini düşünmektedir. "Gödel bence, matematiksel önermeler hakkında gerçekçi ve Platoncu yorumlarının oluşturduğu, matematiğin konusunu oluşturan varlıklar ile bilen insan arasındaki uçurumu aşmak için köprü kurulmasına yönelik bir şeylerin söylenmesi gerektiğini anlamıştı. Matematiksel önermelerin mantıksal biçimiyle veya bilinen nesnelerin yapısıyla boş yere uğraşmak yerine bu nesnelerle 'iletişim' kurabileceğimiz özel bir melekenin varlığını öne sürmektedir" (Benacerraf, 2004: s. 258).

Benacerraf, matematiksel hakikatı kendince tanımladığı bu iki ana görüş temelinde ele almaya çalışırken, bu konuda üçüncü bir görüşe ihtiyaç olmadığı düşüncesindedir. Fakat, Platoncu görüşün üstünlüklerinin yanısıra eksiklerinin de olduğu görüşündedir. "(...) standart anlayışın en büyük eksiği, matematiksel hakikat görüşümüzün, bütün bir bilgi anlayışıyla uyumunda gerekli hassasiyeti gösterememesidir. Gayet açıktır ki, bu hususu ikna edici kılmak için, en azından kaba taslak doğru kabul ettiğim ve standart olarak yorumlandığında matematiksel hakikatlerin bilgiyi oluşturmadığı esasına dayanarak epistemolojiyi kısaca açıklamam gerekir" (Benacerraf, 2004: s. 252).

Benacerraf'a göre "kombinatoryal görüşler" olarak adlandırılan yaklaşımlar matematiksel doğruluğun yapısını açıklamada başarısız olmuştur. Bunun nedeni de, "kombinatoryal görüşler" epistemolojiye dayanan köklerinden dolayı matematiğin nesnesini dikkate almaksızın, bilgimizin ispatlardan oluştuğu düşüncesinde ısrar etmesidir. Matematiksel bilginin büyük bir kısmının ispatlar yoluyla elde edilmesi ve aktarılması doğru olmakla birlikte, bu görüşler dayanaklarını, matematiksel bilginin üretim ve aktarımında yer alan özellikle "dilbilimsel araçlar"dan almaktadır (Benacerraf, 2004: s. 259).

Özetle Benacerraf, matematiğin doğasına ilişkin çalışmaların, matematiğin ontolojisi ve epistemolojisinin birbirine uyumlu olduğu bir temel üzerinde gelişebileceğine işaret etmektedir. Matematik felsefesinde matematiksel hakikat ve matematiksel bilgiye ilişkin farklı görüşler vardır. Fakat, bu ikisini bir araya getirebilecek

tatminkâr bir görüş geliştirilememiştir. Matematik felsefesinin işi, bu iki görüşü birleştirerek doyurucu bir görüş ortaya koymaktır.

2.3.2. Matematiksel Nesnelerin Neliği Sorunu

Matematiksel nesnelerin neliği sorununu, iki esas görüş olan "realizm (gerçekçilik)" ve "nominalizm (adcılık)" temelinde ele almaya çalışacağız. Daha önce de işaret edildiği gibi realizm ya da Platonculuk, matematiksel nesnelerin evrensel nesneler olarak var olduğunu iddia etmektedir. Felsefeci Field'a göre "(...) matematikte realizm sayılar, fonksiyonlar, kümeler ve benzeri matematiksel varlıkların sahiden bulunduğunu belirten doktrindir" (Field, 2004: s. 265). Seçkin matematikçilerden Gödel ve Hardy'nin birer Platoncu realist, Russell'ın da bir dönem matematikte realizmin savunucularından olduğunu tekrar belirtmiş olalım. Russell'a göre "aritmetik, Kolomb'un Amerika'yı keşfi anlamında bir keşiftir. O nasıl kızılderilileri yaratmadıysa, biz de sayıları yaratmış değiliz. (...) Bir şey varolduğu için düşünülebilir; varolma düşünülmüş olmanın sonucu değil, ön koşuludur" (Russell'dan akt. Yıldırım: 2008: s. 57). Russell gibi Gödel de matematiksel nesnelerin keşfedildiği görüşündedir.

> Matematiksel sezgi türünden algılamayı duyusal algılamadan daha az güvenilir saymak için hiçbir neden görmüyorum. (...) Set-kuramsal paradoksların matematik için yarattığı sıkıntının duyumsal yanılgıların fizik için yarattığı sıkıntıdan daha fazla olduğu söylenemez. Matematiksel sezgi verilerini, duyu organlarımızla ulaştığımız nesnelere ilişkin değildir diye Kant'ın ileri sürdüğü gibi, salt öznel saymak yanlıştır.

> Tam tersine bu verileri de nesnel dünyanın bir parçası sayabiliriz (Gödel'den akt. Yıldırım: 2008: s. 57).

Kimi matematikçi ya da filozofların, matematiğin nesnelerinin kaynağının ne olduğuna, matematikçilerin bu nesneleri nasıl bulduklarına dair soruları sorunsallaştırdığını görmekteyiz. Frege'ye göre sayılar zihnimizde inşa ettiğimiz şeyler değildir. Tam aksine, sayılar bizden bağımsız olarak var olan nesnelerdir. Platoncu realist bir filozof olan Frege, matematiğin diğer kavramları gibi sayının da yaratılmayıp keşfedildiğini açık bir dille şöyle ifade etmektedir:

> Nasıl ki coğrafyacı, "sınırlarını çizgilerle gösterdiğim şu alana 'Sarı Deniz' adını veriyorum" dediğinde bir deniz yaratmıyorsa, matematikçi de tanımlama becerisiyle herhangi bir şey yaratmaz. (...) Kağıt üstüne çizilmiş küçük çembersel bir şekile, 1'e eklendiğinde 1 veren özelliğini tanımlamayla kazandırdığımız savını, bilimsellik görünümü altında 'batıl inanç' sayıyorum. O şekil 'sıfır' adını almadan önce, öyle bir özelliği taşıyan bir, yalnızca bir nesnenin var olduğunu ortaya koymamız gerekir. Bu nedenle ne sıfırı, ne de herhangi başka bir sayıyı yaratmaya olanak yoktur (Frege'den akt. Yıldırım: 2008: s. 60).

Matematik felsefecisi Michael D. Resnik'in de matematiğin nesnelerine ilişkin realist bir duruşunun olduğunu görmekteyiz. Resnik'e göre matematiksel nesneler bir model içerisindeki konumlardır ve matematiksel ifadeler nesnel gerçeklik itibariyle doğru ya da yanlış olabilen önermelerdir (Resnik, 2004: s. 351, 356). Resnik'in "model" tanımından matematiksel yapıları anlamaktayız. Bu matematiksel yapıların, diğerleriyle oluşturduğu bağıntılar sonucunda daha büyük yapılar, yani büyük modeller ortaya çıkmaktadır. Matematiğin tümünün birbiriyle ilişkili yapılardan

oluştuğu düşünüldüğünde, onun bir modeller bilimi olduğu söylenebilir. "Bir model, benim *konum* olarak adlandırdığım, çeşitli ilişkilerde yer alan (ve çeşitli özelliklere, ayırt edilebilir konumlara ve işlemlere sahip) bir ya da daha çok nesneden oluşur" (Resnik, 2004: s. 330).

Burada sözü edilen nesne; bir sayı, bir küme, geometrik bir terim ya da şekil olabilir. Resnik, matematiksel nesnelerin kimliğini içinde bulundukları yapılarla ilişkilendirmektedir. Bir başka deyişle, biz matematiksel nesnelere, daha çok onların içinde bulundukları yapılar aracılığıyla sahip oluruz. Örneğin, "17"nin bir asal sayı olduğu, onun içsel özelliğinden değil, daha çok bu sayının doğal sayılar kümesi gibi bir yapı içerisindeki konumu itibariyle bilinir.

> İddia ediyorum ki, matematikte, yapılar içerisinde dizili "içkin" niteliklere sahip nesnelerimiz yoktur, sadece yapılarımız vardır. Matematiğin nesneleri yani matematiksel sabitlerimizin ve nicelik belirleyicilerimizin işaret ettiği varlıklar, yapı içindeki yapısız noktalar veya konumlardır. Yapının içerisindeki bir konum olmaları itibariyle yapının dışarısında bir hüviyetleri veya özellikleri yoktur. Dahası, matematikte sayılar gibi bazı matematiksel nesnelerin içkin yapılara sahip olduğunu gösteren çeşitli sonuçlar, örneğin bunların kümelerle özdeşleştirilmesi, gerçekte yapılar arası ilişkilerdir (Resnik, 2004: s. 327).

Resnik'in matematiksel nesnelerin bulundukları yapılar içerisinde keşfedildiklerini iddia etmesinin modern realizme yeni bir boyut kazandırdığı söylenebilir. Daha önce Frege'nin, sayıların, fiziksel nesnelerin bir özelliği olmadığını ispatladığını söylemiştik. "Peki, bu durumda sayılar nelerin niteliği olabilir?" Bu sorunun cevabını

matematik felsefecisi Penelope Maddy araştırmaktadır. Maddy'ye göre fiziksel nesnelerin niteliklerinin uzunluklar olması gibi, sayılar da kümelerin nitelikleridir. Sayılar, kümeler gibi başka türden nesneler değildir; ancak, onları içeren kümelerin varlığı onların nitelikleriyle mümkündür. Bu nitelikler biçimsel küme kuramı içinde; "asal sayılar kümesi", "gerçek sayılar kümesi", "doğal sayılar kümesi" gibi, sayı-küme ilişkisinin kurulduğu biçimde yer almaktadır. Fakat "(...) sayı kuramı ise küme kuramının sonlu kümelerin sayı nitelikleriyle ilgilenen bölümüdür. Aslında, sayı kuramı küme kuramının kendi genel epistemolojik beyanının içerisinde yer alır" (Maddy, 2004: s. 319). Maddy sayıların, uzunluk, hız, ağırlık gibi fiziksel niteliklerle aynı ontolojik statüye konabileceğini düşünmektedir. Buradan, Maddy'nin dikkatini daha çok ontolojik sorunlara çevirerek, "küme kuramcı realizm" biçiminde tanımladığı matematiksel realizmin, geleneksel felsefi realizmle olan bağlantı ve benzerliklerini incelediğini ve sayıya bir nitelik, bir yer bulma çabasında olduğunu anlamaktayız. Maddy, sayı kuramının, sonlu küme kuramının bir bölümü olduğunu düşünerek, "küme kuramcı realizm" olarak adlandırdığı realizmi, matematiksel realizmin bir çeşidi olarak görmektedir.

Şimdi de matematikte Platoncu realizme bir tepki olarak ortaya çıkan "nominalizm"i ele alalım. Nominalizm, matematiksel nesnelerin gerçeklikten yoksun birer isim ya da sözcük olduğunu iddia etmektedir. Örneğin, "7" sayısı sadece yedi tane somut nesneyi belirtir, fakat "7" diye bir nesne yoktur. Hartry Field, realizme karşı olan görüşleri "karşı-realizm" olarak tanımlamaktadır. Field'a göre realist görüş, matematiksel nesnelerin var olduğunu, matematiğin amacının bu nesnelere ve aralarındaki ilişkilere "doğru" bir açıklama getirdiğini düşünürken, "karşı-realist" görüş ise matematiksel nesnelerin var olduğunu kabul etmez. "Öyleyse bir yönüyle

karşı-realizmde, matematiksel bir kuram önemli olacak kadar kapsamlı ise sormamız gereken tek şey bu kuramın tutarlı olup olmadığıdır; ayrıca bu kuram doğru olmak zorunda da değildir; zaten bu amaç matematiksel varlıkların varlığını gerektirdiğinden hiçbir zaman gerçekleşemeyecektir (Field, 2004: s. 267).

Matematikte "tutarlılık" konusuna "biçimcilik" görüşü çerçevesinde ayrıntılı olarak değinmeye çalışmıştık. Gödel'in eksiklik teoremleri, matematiğin tüm dizgelerinde tutarlılığın mümkün olamayacağını göstermişti. Bu bakımdan, Field'ın tanımladığı biçimiyle "karşı-realizm"in tutarlılık iddiasıyla realist görüşe karşı çıkmasının oldukça zor olduğunu düşünmekteyiz. Field, bilimde, mantığın önemi ve matematiksel nesnelerin varlığı düşüncesinin karşılaştırıldığında, bilimde mantığın kullanıldığını, fakat, mantığın öneminin matematiksel nesnelerin varlığı düşüncesinin yerini almaması gerektiğinin tartışılabileceğini ileri sürmektedir. Field'a göre, "Mantığın kendisi bir muhakemedir; bizim varsaymamız gereken varlıklar sadece muhakememizin öncüllerinde, ara ve son aşamalarındaki çıkarımlarda ihtiyaç duyduklarımızdır. Fiziksel kuramları nominalistik olarak soyutlayabildiğimiz sürece, öncüllerimizde matematiksel varlıklara kesinlikle ihtiyacımız yoktur " (Field, 2004: s. 290).

Özetle; Field, dünya hakkında açıklama ya da tahminler yaparken kullanılan çıkarımların nominalistik olduğunu, dolayısıyla bu tür çıkarımlarda matematiksel nesnelerin varlığı düşüncesine ihtiyaç olmadığını düşünmektedir. Field, kuramsal nesneler ile matematiğin nesneleri arasında yaptığı ayrım sonucunda; kuramsal nesneleri bilim için vazgeçilmez sayarken, matematiksel nesnelerin varlığı

düşüncesini bilim ve matematik için gereksiz görmektedir. Buradan da; matematiğin nesnelerini yadsıma eğiliminin, "nominalist" ya da "karşı-realist" gibi görüşleri yüzeysel bir öğreti olmaktan ileri götürmediğini söyleyebiliriz.

2.3.3. Biçimci Görüşe Bir Karşı Duruş Olarak Matematiğin Sanat Yanı

Bu başlık altında, kimi matematikçilerin ve filozofların görüşleri çerçevesinde matematiğin sanat yönüne vurgu yapmaya çalışacağız. Matematik ve sanatı birbiriyle ilişkisi olmayan iki etkinlik olarak görmenin eski bir alışkanlık olduğunu öncelikle belirtelim. Matematiği tümüyle teknik, kuru ve salt mantık, ayrıca sanatı tümüyle mantık dışı bir alan olarak görme eğilimi entelektüel bakış açısı dışında bir yaklaşımdır. Poincaré sayı, form ve benzer matematiksel nesnelerin uyumlu bir bütün oluşturma özelliklerinden dolayı insanda estetik duyguya yol açtığını ileri sürmektedir. Bu tür nesnelerin uyumu, bir yandan düşüncemizi beslerken diğer yandan da estetik duygumuzu doyurmaktadır. "Denilebilir ki, önemliyi önemsizlerden ayırt etme gücünü matematikçiye işte bu estetik duyarlılık sağlamaktadır. Bu duyarlılıktan yoksun olan hiç kimse gerçek bir yaratıcı olmaz" (Poincaré, 2008 : s. 244). Hem matematik hem de sanatta düşünme, sezgi, duygusal doyum ve duygusal yönelim gibi unsurlar yer alır. Bu iki etkinlik alanının ortak öğelerini görmek, açığa çıkarmak ve göstermek biçimci görüşe karşı matematiğin sanat yanının bir yanıtı olacaktır.

Tanınmış matematikçi Cahit Arf "Matematiğin Şiir Yönü" adlı makalesinde matematiğin sanatsal boyutunu ele alır. Arf, matematiğin sadece sayılar üzerinde

yapılan dört işlemden ibaret olmadığını, matematikçinin de dört işlemi hatasızca yapan bir tür hesap makinesi, bir otomat olamayacağını ileri sürerek bir anlamda biçimci görüşe karşı bir duruş sergiler. Arf kendi deyiş biçimiyle, matematik ve güzel sanatlarda insana "hudutsuzluk illüzyonu" veren şey, "indüksiyon" ve "abstraksiyon" mekanizmaları olarak tanımlanabilecek insana özgü iki tür yetidir. "İndüksiyon mekanizması şuurumuzda cereyan eden ve bir kaç defa tekerrür eden bazı hadiselerin şuur altımızda ilanihaye tekerrürüdür" (Arf, 1993: s. 11). Arf, şuur altında devam eden indüksiyon yardımıyla hudutsuzluk illüzyonu oluştuğunu, ayrıca bu illüzyonun matematiksel önermelerin olanaklı hale gelmesine katkıda bulunduğunu ileri sürmektedir.

Arf'a göre matematiğin temel unsurları olan sayılar, nokta, doğru ve düzlem gibi başlangıçta bizi ilgilendiren, fiziki nesneye bağlı olarak karşılaştığımız kavramlar insan zihninde soyut kavramlar haline gelirler. "Matematiğin ilk unsurlarının tekevvünü esnasında şuur altımızda cereyan eden bu abstraksiyon hadisesi daha ileri merhalelerde şuur üstüne çıkar ve bir belirtme tekniği olarak kullanılır" (Arf, 1993: s. 9). İşte, matematikçi şuur altında olan abstraksiyon ve indüksiyon mekanizmalarını şuur üstüne çıkararak matematiksel yargıları oluşturur. Başka bir deyişle bu mekanizmaların matematikçide var olması, matematikte sonsuz sayıda önermenin, bilginin ortaya çıkmasına neden olur. Dahası Arf'a göre bu iki mekanizma sanat ve matematiğin oluşmasını mümkün kılar. Öyleyse, matematiğe daha çok bir güzel sanat gözüyle bakılması gerekir.

> Matematik herşeyden önce tıpkı resim, müzik, mimari, ilh... gibi bir güzel sanattır. Ve bunlardan bilhassa müzikle mukayese edilebilir. Şöyle ki:müzik unsurları olan basit birtakım seslerin süperpozisyonu ve birbirlerini takip etmelerinden müteşekkil cümlelerden ibarettir diyebiliriz. Fakat böyle cümleler her zaman müzik olamaz. Umumiyetle kaotik gürültüler olurlar. Gürültü olmaktan kurtulmaları için bunların bazı kaidelere uygun olarak teşkil edilmiş olmaları icap eder. Bu kaideler matematikte lojik kaidelere tekabül ederler ve bu kaidelere uygun olarak teşkil edilen ses cümleleri matematiğin sillojizm zincirleri gibidir. Bunlara artık gürültü denmese bile henüz müzik de denemez. Böyle ses cümlelerinin müzik olabilmesi, hiçbir kriteryuma mutlak olarak bağlı olmayan estetik bir unsuru ihtiva etmeleri ile mümkün olur. Aynı şey şu şekilde matematik için de doğrudur; sayılar veya geometrik şekiller yardımı ile teşkil edilen sillojizm zincirlerinin hepsine matematik, hiç değilse güzel matematik denemez. Böyle olması için ses cümlelerinde olduğu gibi, sillojizm zincirlerinin de kesin olarak tarif edilemeyen estetik bir unsuru ihtiva etmeleri lazımdır (Arf, 1993: s. 9).

Arf, matematiği anlamı olmayan simgeler bütünü olarak gören formalizmin aksine, tıpkı sanatta olduğu gibi matematiksel önermelerde de estetik bir unsurun var olduğunu, bu yönüyle matematiğin müzik gibi bir sanat olduğuna işaret eder. Burada Arf'ın, matematikte ve sanatta insana "hudutsuzluk illüzyonu" veren şeyin varlığından söz ederken, matematiksel akıl yürütmenin yaratıcı gücüne işaret ettiğini düşünüyoruz. Tanınmış matematikçi Jerry P. King, insanın entelektüel ve estetik yaşamında matematiğin güzelliğine vurgu yapmaktadır. King'e göre "(...) estetik ve entelektüel doyum *matematik hakkında* bilgi sahibi olmamızı gerekli kılar. (...) matematikçiler genel kabul görmüş bir takım estetik ilkelerle çalışıyor olsalar gerek. Öyle olmasaydı, belirli bir teoremin güzelliği-ya da güzellikten yoksunluğu-hakkında nasıl bu kadar tam uyum içinde olabilirlerdi?" (King, 1998: s. 3, 157) Dahası, matematik ve görsel sanatların "simetri", "izdüşümü", "fraktal" ve "perspektif", vb. gibi birçok ortak alanları vardır. Her iki etkinlik alanında mantıksal düşünmenin

yanında tutku ve beğeni gibi öğelerin olduğu gerçektir. Matematikte ispatlama ya da sonuç çıkarma, sanatta ise imgelem ağırlıktadır. Aristoteles, resim sanatı için, "(...) özellikle bize herhangi bir maddi nesnedeki güzelliği gözlemlemeyi öğrettiği için yararlıdır" (Aritoteles, 2005: s. 236) demektedir. Hardy, "Matematikçinin kalıpları da bir ressamın veya şairinki gibi *güzel* olmak zorundadır; düşünceler ise renkler ve sözcükler gibi uyum içinde olmalıdır. İlk ölçüt güzelliktir: dünyada çirkin matematiğe yer yoktur" (Hardy, 1994: s. 63) sözüyle matematikçi ile şair veya ressamın ortak yanlarına işaret eder. Modern analizin babası olarak bilinen matematikçi Karl Weierstrass "Bir nevi şair olmayan bir matematikçi, hiçbir zaman mükemmel bir matematikçi olamaz" (Weierstrass'dan akt. Arf, 1993: s. 8) sözüyle matematikçideki şairliğe vurgu yapar. Matematiğin salt mantık olduğunu düşünen Russell da matematiğin sanatsal niteliğini inkâr etmez.

> İyi anlaşıldığında matematiğin yalnız doğruluğu değil, üstün bir güzelliği de içerdiği görülür. Yaratılışımızdaki zaafları okşamaktan, resim ve müziğin abartılı çekiciliğinden uzak, bir heykel kadar soğuk ve yalın, yalnızca büyük sanatta bulduğumuz yetkin, katıksız bir güzelliktir bu. Yüceliğin denek taşı olan gerçek ruhsal erinç ve doygunluğa, insandan daha fazla olma duygusuna, şiirde olduğu kadar matematikte de erişebiliriz (Russell'dan akt. Yıldırım, 2008: s. 148).

Sanat gibi matematikte, temeli sayıya dayanan bir güzellik ve estetik boyuta sahiptir. Antik Yunan'dan günümüze kadar sanatta kullanılan altın oran (yaklaşık 1,618...) bir irrasyonel sayıdır. Sonsuza kadar düzensiz olarak devam eden bu sayının Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, George Seurat, Piet Mondrian ve Salvador Dali gibi ustaların eserlerinde yarattığı güzellik matematiğin sanatla ilişkisini çok açık bir biçimde ortaya koymaktadır. İrrasyonel sayı kavramının başlı başına bir konu olarak,

genelde felsefenin özelde de matematik felsefesinin eğilebileceği bir çalışma alanı olduğunu düşünüyoruz. Dahası, matematik ve doğa bilimlerinin geliştiği dönemlerde aynı şekilde sanatta gelişmiştir. Yine tanınmış bir matematikçi olan J. Bronowski, sanatın, matematik ve bilimlerle paralel olarak geliştiği görüşünü şöyle ifade eder :

> (...) Antik Yunan uygarlığının en parlak döneminde sanatla bilim tam bir etkileşim içindeydi. (...) Sokrates için ne diyeceğiz: Bilgin mi, sanatçımı? İdeal devletinde şairlere yer vermeyen Platon terslik bu ya, diyaloglarını Aristophanes Yunan dramını gömerken yazıyordu. Bu kişilerin sanatta olduğu kadar düşünde de ortaya koydukları örnek yapıtlar Rönesans'ta modern dünyanın hayal gücünü tutuşturmuştur. (...) Leonardo da Vinci hem ressam ve heykeltıraştı, hem matematikçi ve mühendisti. (Batı'da tanınan tek Doğulu şair Ömer Hayyam aynı zamanda yaşadığı dönemin seçkin matematikçisi ve astronomuydu.) Leonardo gibi Hayyam da insan zekâsının birliğini, evrensel niteliğini simgeler (Bronowski'den akt. Yıldırım, 2008: s. 147).

Bütün bunlara dayanarak, matematiğin sanatsal bir niteliğe sahip olduğunu ve insan yaşamında güzellik, estetik gibi değerleri resmettiğini söylemek olanaklıdır. Eski uygarlıklardan günümüze kadar matematik ve sanatın birlikte var olduğu, ikisinin birlikte geliştiği ve anlam kazandığı görülmektedir.

2.3.4. Yirminci Yüzyılda Matematiğin Neliğine İlişkin Özgün Yönelimler

20. yüzyılda temelci görüşlerin dışında kimi matematikçilerin ya da matematikçi filozofların özgün görüşlerinin ortak yanının temelci görüşleri tekrar ele almak, eleştirmek ve bu eleştiri zemini üzerinde kendi düşüncelerini ifade etmek olduğu görülmektedir. Bunlardan biri, özgün görüşleriyle tanınan matematikçi ve bilgisayar bilimcisi Gregory J. Chaitin'dir. Chaitin, bir taraftan matematiğin tümünün salt aksiyomlar üzerine kurulamayacağını kendi alanıyla ilgili örneklerle açıklamaya çalışırken, diğer yandan da aksiyomatik sistemin bilgisayar teknolojisinin gelişimine yaptığı olumlu katkılara vurgu yapmaktadır. Matematikçi Alan Turing'in, 1936 yılında "Turing Makinesi" olarak adlandırılan bir tür hesap makinesi icat ederek teknolojinin gelişmesine öncülük ettiği bilinmektedir. Biçimci görüşe yakınlığı ile bilinen Turing, Hilbert'in matematik felsefesiyle ilgili çalışmalarını takip ederken kendi adıyla anılan makineyi icat etmiş ve daha sonra da İngiltere'de ilk bilgisayarı yapmıştır. Böylelikle bilgisayar ve teknolojisinin kökeninde, Hilbert'in tüm matematiği üzerine kurmaya çalıştığı aksiyomatik yapı anlayışının olduğunu anlamaktayız. Chaitin, herhangi bir "A" sorusunun ya onun doğruluğunun, ya da yanlışlığının ispatlanarak çözüldüğü biçimsel aksiyomatik sistemi "tam" olarak adlandırmaktadır. Chaitin'e göre Gödel'in "eksiklik" ya da "tamamlanamazlık" teoremleri; "(...) içinde bir şeyin doğru olup olmadığını duru ve açık kılacak, bütün matematiksel gerçekliği kapsayacak bir kurallar kümesi üzerine anlaşıp matematiğin tümü için biçimsel bir aksiyomatik sisteme sahip olacak hiçbir yol yoktur" (Chaitin, 2004: s. 370, 373). Üstelik "doğal sayılar"la yapılan dört işlem bile, bu alanda matematiksel gerçekliğin tümünün ortaya konmasına imkân sağlayan bir aksiyomatik sistem üzerine kurulamaz. Böyle bir aksiyomatik sistemin kurulduğu varsayılsa bile,

bu sistem ya "tam" olmayacak ya da "tutarsız" olacaktır. Dahası, Chaitin'e göre "Matematiksel gerçeklik sonsuz miktarda bir bilgidir; hâlbuki, herhangi belirli bir aksiyomlar kümesi sadece sonlu miktarda bir bilgiye sahiptir. Çünkü oyunun kuralları olarak üzerinde anlaştığınız sadece sonlu sayıda prensip olacaktır. Ve ne zaman herhangi bir cümle, herhangi bir matematiksel iddia bu aksiyomlardan daha fazla bilgi içerse, o durumda doğal olarak, bu aksiyomların yeteneklerini aşacaktır" (Chaitin, 2004: s. 390).

Buradan, sonlu sayıda aksiyomatik sistemin yalnızca sonlu sayıda matematiksel tamlığa ve tutarlılığa ulaşabileceğini anlıyoruz. Aynı zamanda, verili sonlu sayıda aksiyomatik sistem üzerine kurulan bir bilgisayar programının mükemmelliği sonlu olmasına rağmen, sonsuz sayıda bilgisayar programlarının olabileceğini, böyle programların matematiksel akıl yürütme ile keşfedileceğini düşünüyoruz. Çünkü matematiksel akıl yürütme aksiyomatik sistemin üstünde bir etkinlik olarak sonsuz sayıda aksiyomları ortaya çıkarabilme gücüne sahiptir. Fakat, matematiksel gerçeklik sonsuz sayıda bilgi içermesine rağmen, verili aksiyomlar kümesinin bilgisi bu gerçekliğin ancak sonlu bir miktarını ifade edebilir.

20. yüzyılda, özgün ve ilgi çekici görüşleriyle diğer bir matematikçi olan Hersh, üç temelci yaklaşımı değerlendirmenin ışığında matematik felsefesinin günümüzde yerine getirmesi gereken görevlerine değinmektedir. Matematiğin tümünde mutlak kesinlik anlayışının insanüstü bir kesinlik önerdiğini ileri süren Hersh, "Bize miras kalan ve *sorgulanmayan* felsefi dogma, matematiksel doğruluğun mutlak kesinliğe sahip olması gerekliliğidir" (Hersh, 2004: s. 410) sözüyle kalıtsal önyargılara dayalı

bir matematik tanımı yerine, matematikçinin gerçek deneyimlerine dayalı bir matematik tanımına ihtiyaç olduğuna işaret etmektedir. Bu, şu anlama gelmektedir: Matematik felsefesinin bu üç klasik bakış açısından tamamıyla farklı bir bakış açısına ihtiyacı vardır. Matematik felsefesi; matematikçinin, matematiğe yaptığı katkıların ötesinde, matematiği insan kültürünün bir parçası olarak algılamalı ve bu doğrultuda matematikçinin çalışmasını yorumlamalı. Eğer matematik felsefesi böyle bir yolu dener ve bu yol başarılı olursa, matematikçilerin genelinin doğru olarak kabul edebileceği bir tanım yapılmış olabilir. Matematiği kullanma, öğretme, keşfetme, icat etme gibi matematiğe ilişkin yapılan her türlü etkinlik matematiğin tanımında yer almalıdır. Hersh'e göre matematik felsefesi, sarsılmaz doğruyu aramak yerine, matematiğin diğer bilgilerde olduğu gibi kesin olmayan, yanılabilir ve düzeltilebilir olduğunu kabul etmelidir. Başka bir anlatımla, matematik felsefesi matematiğe temel aramak veya matematiksel bilgiyi temelsizlikten dolayı boşlukta duran bir bilgi gibi görmek yerine, matematiği insan bilgisinin bir parçası olarak kabul ederek ne olduğuna bakmaya çalışmalıdır (Hersh, 2004: s. 418). Hersh, temelci yaklaşımların dışında başka bir matematik tanımının olması gerektiğini iddia ederken, tanınmış diğer bir matematikçi E. C. Titchmarsh, matematik yapmak için matematiğin tanımına çok ihtiyaç olmadığına vurgu yapmaktadır.

> Verilen tanımların hiçbiri tümüyle doyurucu olmadığına göre, biz matematikçiler, "Sayı nedir?" sorusuna basit ve doğrudan bir yanıt vermeksizin de işimizi görürüz. Belki de sayıyı kabaca para gibi bir değiş-tokuş aracı sayabiliriz. Pek çok kimse için önemli olan ihtiyaç duydukları eşya ve hizmetlerdir; para yalnızca bunları temsil eden bir simgedir; ancak anlamsız bir simge değil! Paranın kullanılmadığı, mal ya da eşyanın takas edildiği trampa yönteminin karmaşık bir toplum düzeninde sıkıntıları bir yana, kullanış olanağı bile yoktur. Matematiği, "Benim parmaklarım senin kulaklarından fazladır," türünden önermelere indirgeyen bir sistemi tasavvur etmek

bile yersizdir. Sayılar birer simgedir, son derece ilginç ve vazgeçilmez birer simge! (Titchmarsh'tan akt. Yıldırım, 2008: s. 62-63).

Görüldüğü gibi birçok matematikçi gibi Titchmarsh'da, sayının ne olduğuna ilişkin felsefi sorularla uğraşmadan matematik yapılabileceğini ileri sürmektedir. Bu yaklaşımın günümüzde de geçerliliğini koruduğunu düşünüyoruz. Kimi matematikçiler için matematik yapmak, matematiğin neliğinden daha önceliklidir. Her ne kadar matematikçiler için sayı bir simge de olsa, sayının ne olduğu felsefi bir sorudur. Bu soruya yanıt aramak da Eskiçağdan günümüze kadar geçen zaman içinde felsefenin görevlerinden biri olmuştur.

2.3.5. Matematiğin Temellerine İlişkin Üç Temelci Yaklaşımın Değerlendirilmesi Bağlamında Günümüz Matematik Felsefesinin Belirlenen Görevi

Matematiğin gelişim sürecinde onun kendi iç dinamiğinden kaynaklanan bunalımlar, matematiğe sağlam bir temel bulma girişimlerine neden olduğu görülmektedir. Matematiğin tarihine baktığımızda; Antik Yunan'da, kenar uzunluğu "1" birim olan karenin köşegeni tamsayı türünden ifade edilemeyince, böyle bir durum evreni tamsayılarla açıklamaya çalışan Pythagorasçı matematikte bir tür bunalıma yol açmıştır. Yine matematikte "sonsuz küçükler hesabı"nın sağlam bir temele oturtulamamasının yol açtığı bir bunalımın yanı sıra, Eukleides'in 5. postulatının farklı durumlara doyurucu cevap verememesinden kaynaklanan başka bir bunalım da vardır ki, o da Eukleides-dışı geometrilerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Ayrıca,

küme kuramının neden olduğu paradokslar ve bu paradoksların giderilememesinin sonucunda oluşan bunalımları da belirtelim. Matematikte yaşanan her bunalım yeni atılımların ve temel arama girişimlerinin başlangıç noktası olmuş olması bakımından, matematik felsefesinin kendisiyle yüzleşmesine önemli katkılar sağlamıştır. Üstelik matematikçi-felsefeci Hillary Putnam'a göre matematiğin temellendirilmeye ihtiyacı da yoktur.

> Filozoflar ve mantıkçılar son elli yıl boyunca matematiğe bir "temel" bulma yolunda öylesine yoğun bir çaba içine girmişlerdir ki, yalnızca birkaç cılız ses matematiğin bir temele ihtiyacı olmadığını söyleme cesaretini gösterebilmiştir. Ben bu cılız seslere katılmak istiyorum. (...) Matematiğin temellendirilmesine ilişkin bir bunalımının olduğunu düşünmüyorum. Dahası, matematiğin temeli olduğuna ya da bir temele ihtiyacı olduğuna da inanmıyorum (Putnam, 1979: s. 43).

20. yüzyılda matematiğin temellerine ilişkin arayışlar genellikle, üç temel felsefi görüşün uzantıları biçiminde kendini gösterse de, felsefenin yol göstericiliğinin önemine vurgu yapan kimi düşünürlerin de olduğunu görmekteyiz. Matematikteki gelişim; her bilim dalında olduğu gibi "ilerleme", "açılma" ve "pekiştirme" biçiminde devam eden uzun bir süreçle kendini göstermiştir. Bu aşamalar sonucunda günümüzde matematik, geçen yüzyıla oranla çok daha fazla soyut bir kimlik kazanmış ve çok fazla alt dallara ayrılmıştır. Matematiğin canlı ve sürekli ilerleyen bir yapıda olması bakımından "açılma" sürekli olacaktır. Bu gelişmeler sürecinde atılan her adım, konan her tuğla matematiğin günümüzdeki düzeyine ulaşmasına katkı sağlamıştır. Matematikte bunalımlar olsun ya da olmasın, matematikçiler doğruluğu ve kesinliği ispatlanmış sağlam önermelerle kendi alanlarında ilerlemek

için çaba göstermektedirler. Tanınmış matematikçilerden Ian Nicholas Stewart, bu konudaki görüşlerini şu şekilde ifade etmektedir:

> Tüm sağlamlaştırma çabalarına karşın matematiğin temelleri sallantılı durumundan çıkmış değildir. Belki de matematiği çökertecek yeni güçlüklerle karşılaşacağız. Ne ki, bu pek olası görünmüyor. Matematikçiler kimi mantıksal güçlükler karşısında matematiğin çökmesine izin vermeyeceklerdir. Unutmamak gerekir ki, sezgi her zaman salt mantığı bastırmıştır. Teoremlerimiz uyum içinde kalıyor, bize anlayış ve heyecan sağlıyorsa, kimse bizden "kılı kırk yaran" mantıksal nedenlerle matematikten vazgeçmemizi beklemesin (Stewart'tan akt. Yıldırım, 2008: s. 101).

Stewart üstü kapalı da olsa, matematiğin salt mantık olmadığını ileri sürmektedir. Dahası Stewart, Putnam gibi matematiğin temele ihtiyacı olmadığı görüşünde değildir. Üç ana felsefi görüşün değerlendirilmesine devam ederken matematik felsefesinde tanınmış bir isim olan matematikçi Reuben Hersh'in özgün görüşlerine yer vereceğiz. Hersh'e göre işbaşındaki matematikçinin hafta içinde Platoncu, hafta sonunda biçimci olması bu konu ile ilgilenen kimi yazarların hemfikir olduğu bir görüştür. Mantıkçı anlayış, matematiğe sağlam bir temel bulma amacıyla matematiği bir totolojiye dönüştürme çabası içerisinde olurken, biçimci anlayış da matematiği güvenli kılmak için onu anlamsız bir oyuna dönüştürme girişiminde bulunmuştur. Brouwer'ın inşa edilebilirlik kuramının "gerçek sayılar" sistemini dışarıda bırakacak kadar katı olduğunu iddia eden Hersh, sezgiciliğin; matematiğin anlamlı olduğu konusunda ısrar etmesinden ve onun zihinsel etkinlik olarak görülmesi gerektiği düşüncesinden ötürü, Platonculuğa ve biçimciliğe alternatif arayanlar için hâlâ ilgi çekici bir görüş olduğunu ileri sürmektedir (Hersh, 2004: s.400, 409, 410).

Matematiksel doğruluktaki mutlak kesinlik arayışının temelci yaklaşımların art arda doğmasına zemin hazırladığını, böylece temelci yaklaşımların birbirine tepki olarak ortaya çıktığını ve bu yaklaşımların ortak yanlarının da matematiğe sağlam bir temel bulmanın gerekliliğine olan inançları olduğunu belirtelim. Hersh, bu temelci görüşlerin epistemolojik başarısızlıklarının altında yatan nedenlerin, matematiğin niteliğine ilişkin ön kabullenmeler olduğunu iddia etmektedir. Hersh, bu iddiasını şu şekilde dile getirmektedir:

> Üç temelci ekolün hepsi aynı ön kabulü paylaşmıştır. Bugün bizim için, onların ortak başarısızlıkları ışığında, ekollerin ortak ön kabulleri, fazlaca vurgu yapılmış farklılıklardan daha önemlidir. Bu ön kabulü ortaya çıkarmak ve tartışmaya açmakla, matematiksel felsefenin elli yıldır saplandığı bataktan kurtulabiliriz. Ortak ön kabul, matematiğe mutlak bir güvenilir temel sağlanması zorunluluğuydu. Anlaşmazlık, stratejideydi ve üzerinde uzlaşılmış amaç için neyin feda edileceğiydi. Fakat amaca hiçbir zaman ulaşılamadı ve onun başarısı için umutlu olanlar hâlâ az sayıda vardır (Hersh, 2004: s. 410).

Eskiçağlardan günümüze kadar matematiksel bilginin doğruluğunun kesinliğine olan güvenin ön planda olduğunu söylemek mümkündür. Her ne kadar matematiksel bilginin güvenilirliği diğer bilim ya da disiplinlerinkinden daha yüksek olsa da, matematikte de doğruluğu ispatlanamayan önermelerin varlığı da bir gerçektir. Örneğin, "Riemann Hipotezi", "Goldbach Teoremi" ve "Collatz Problemi"nin de içinde bulunduğu altı soru hâlâ çözülememiştir. Bu ve buna benzer sorular, matematiksel akıl yürütmenin sınırlarını zorlaması bakımından, matematiğin tümününün sonlu sayıdan oluşan aksiyomatik bir sistem üzerine kurulabilmesinin

imkânsızlıklarını ortaya koymaktadır. Yaklaşık iki bin beş yüz yıl önce temelleri atılan ve günümüze kadar çok katlı bir bina gibi yükselerek gelen "Matematik nedir?" sorusuna cevap olabilecek açıklamalar hâlâ tartışılmaktadır.

Sayı, nokta, doğru, küme gibi kavramlar aynı zamanda matematiğin temel nesneleridir. Felsefenin görevlerinden biri de bu nesnelerin inşasını açıklamak olmalıdır. Matematik felsefesinin bütünü gözden geçirildiğinde, Kant'ın sayının inşasına dair geniş çaplı bir ontolojik çalışma yapmış bir filozof olduğunu, sayının inşasına tatminkâr bir açıklama getiremeyen yaklaşımların ise yüzeysel kaldığını anlıyoruz. Bu alanda, Kant'ın görüşlerine karşı çıkan düşünürlerin, nesnenin mekânını gösterme girişimlerinin olmaması yeni bir yaklaşım da değildir. Bu yaklaşım, Frege ile başlamış ve günümüze kadar da devam etmiştir. Frege'nin sayıyı dilin imkânları içerisinde tanımlama girişimi, felsefi tartışmalardaki dikkatin nesnenin inşasına ilişkin konulardan uzaklaşmasına neden olmuştur. Yani, Frege aritmetiği ontolojisinden koparmıştır. Burada, Frege ve Kant'ın görüşlerinin ayrıldıkları ve kesiştikleri noktalara kısaca tekrar değinme gereği duymaktayız. Frege'nin görüşlerinin kökeninin Kant'ın transandantal felsefesine dayandığını söylemek mümkündür. Hem Kant'ta hem de Frege'de nesne ve kavram yargı içerisinde birlikte bulunur. Buradan, yargının kavram ve nesneye göre ontolojik önceliği bulunduğunu anlıyoruz. Fakat Frege, yargının nasıl ortaya çıktığını açıklayamadığı için, nesnenin ve kavramın birlikte bulunduğu ontolojik zemini de gösterememiştir. Frege'nin sayıyı tanımlama girişiminde, saf görü formu olan zamanı dışarıda bırakarak, sayıyı, genel mantığın ilkeleri ve küme kuramıyla tanımladığını görüyoruz. Frege'nin transandantal mantığı göz ardı etmesi sayıya

ilişkin iddialarını temelsiz bıraktığı gibi, sayının inşasında gövde görevi yapan transandantal senteze de hiç yer vermemesi girişimlerini boşa çıkarmıştır.

Önceki bölümlerde matematiğe felsefi temel arayan görüşlerin bulundukları noktaları ayrı ayrı ortaya koymaya çalıştık. Matematiğin tümünü mantıksal önermeler alanı ya da aksiyomatik bir sistem üzerine oturmuş bir kapalı sistem olarak görme eğiliminin bizi yanıltabileceğini düşünmekteyiz. Formel mantığın ilkelerinin matematikte kullanımı yaygın olsa da, aritmetik mantık yasaları üzerinden temellendirilememiştir. Böyle bir girişimin paradoksa yol açtığını biliyoruz. Peki, matematiğin tümü sağlam bir aksiyomatik sistem üzerine kurulabilir mi? Başka bir deyişle matematiğin tümünde "tamlık" ve "tutarlılık" mümkün olabilir mi? Gödel, yaptığı çalışmalarla bize bunun mümkün olmadığını göstermiştir.

Matematiğin her dalında aksiyomatik sistemi kullanarak uygulama yapma etkinliği, matematiksel düşünmenin bu sistem içerisinde sıkışıp kaldığı ya da sınırlı olduğu anlamına gelmez. Bir başka deyişle matematiğin tümü aksiyomatik sistem üzerinde kurulmuş, olmuş-bitmiş, diğer alanlardan bağımsız ve donmuş bir yapı değildir. Matematiksel terim ya da kavramların yaşamda önemli bir yerinin ve anlamının olması gerçeği, onun, insan kültürünün bir parçası olarak canlı ve sürekli devinim içinde bir alan olduğunu göstermektedir. Oysa, Frege aritmetiğin yargılarının analitik *a priori* nitelikteki yargılar olduğunu göstermeye girişmekle bir anlamda aritmetiğin içerikten yoksun, anlamı olmayan ve bilgimizi genişletmeyen yargılardan oluştuğunu iddia eder olmaktadır. Günümüzde matematiğin ulaştığı konumun yanı sıra diğer bilimlerle ve insanla olan ilişkisini de düşündüğümüzde, aritmetiğin yargılarının

öğretici, içeriğe sahip, daha kavramsal bir deyişle sentetik *a priori* yargılar olduğunu söylemek pekâlâ mümkündür.

Daha önce de söylemeye çalıştığımız gibi Kant'ta zaman ardışık bir özellik gösterirken, Brouwer'da parçalanmaktadır. Ancak, zaman parçalanırken matematiğin sonlu adımda doğal sayılar üzerine nasıl kurulacağı açık değildir. Brower'da sayının inşa edildiği mekâna dair bir saydamlığın olmadığını düşünmekteyiz. Sezgicilik, sonlu adımda ispatı yapılamayan tanımları ya da ispatları belirsiz kabul ederek matematiğin dışında tutmaktadır. Oysa matematikte sonlu adımda ispatı yapılamayan bir dizi önerme ya da teorem bulunmaktadır. "Goldbach Teoremi"ne bakıldığında, bu teoremin doğruluğu, gelişmiş bilgisayar programları yardımıyla "10^{24}" sayısına kadar ispatlanmıştır, fakat her "n" sayısı için ispatı yapılamamıştır. "Sezgiciliğin sonlu adımı kaç basamaklı bir sayıdır?" Eğer sonlu adım birkaç basamaklı bir sayı ise bu teorem ispatlanmıştır, eğer sonlu adım, örneğin "26" basamaklı bir sayı ise bu teorem hâlâ ispatlanamamıştır. Dahası, matematikte bu gibi önermelerin ispatı sonlu adımda gerçeklik kazanacaksa, birçok ispat bu koşulu karşılamaktan uzaktır. Görüldüğü gibi, sezgiciliğin getirdiği kısıtlamaların kimi önermeleri bir yana itmesi bakımından, bu yaklaşımın yetersizliğini ortaya koymaktadır. Sezgiciliğin "doğru", "yanlış" ve "belirsiz" olmak üzere 3-değerli mantık anlayışına vurgu yapmıştık. Konuyla ilgisi bakımından, burada, 3-değerli mantık görüşüne Reichenbach'ta da rastlandığını belirtelim. Bu mantıkta, bir önermenin doğruluk değeri "doğru", "yanlış" ya da "belirsiz" olabilir. Bunların dışında başka bir seçeneğin olması olanaksızdır (Yıldırım, 2005: s.131). Çok-değerli mantık sistemini kullanarak sezgiciliğin matematiğe getirdiği sınırlamanın olumsuz yanlarından biri de, sonsuz kümeler üzerinde önermelerin ispatı yapılmaya çalışıldığında "üçüncü şıkkın olanaksızlığı

ilkesi", yani "bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır" diyen, 2-değerli geleneksel mantığın özdeşlik ve çelişmezlik ilkelerinden sonra gelen ilkesi geçerliliğini yitirmektedir.

Henry Mehlberg, 1960 yılında yayımlanan "The Present Situation in the Philosophy of Mathematics (Matematik Felsefesinin Şimdiki Durumu)" başlıklı makalesinde matematik felsefesini enine boyuna irdelemektedir. Mehlberg'e göre matematik felsefesinin karşılaştığı en önemli zorluklardan biri, Russell'ın, matematiğin mantığın bir parçası olduğu görüşünden yola çıkarak, matematiksel sözcük dağarcığının, mantıksal sözcük dağarcığının bir parçası olduğunu iddia eden savıdır (Mehlberg, 2002: s.79). Mehlberg, matematik felsefesinin bugünkü durumu bağlamında üç temel yaklaşımdan biri olan sezgiciliğin mantıkçılığa göre ufuk açıcı ve istikrarlı bir yaklaşım olarak kalmaya devam ettiğini, Hibert'in kısmi başarılarınınsa sonlu olmayan matematiğin asıl rolünü belirleyecek nitelikte olmadığını, dolayısıyla biçimci eğilimlerin zaman içinde neredeyse tamamen yok olduğunu ileri sürmektedir (Mehlberg, 2002: s. 80). Kimi felsefecilerin çalışmalarına değinen Mehlberg, yakın dönemde matematik felsefesine ilişkin umut veren yeni yaklaşımların olabileceğine de işaret etmektedir.

> Matematiğe felsefi yaklaşımlar, örneğin, Wittgenstein'ın vefatı sonrası yayımlanan çalışmasındaki matematik felsefesi, güçlü Fransız Bourbaki grubunun, yapılandırmacılığının (*constructivism*) (Polonya içindeki ve dışındaki) birçok versiyonunu, Goodstein'ın "yapılandırmacı biçimciliğini" vb. incelemesi gerekir. Profesör Saunder Maclane tarafından, matematiğin çeşitli uygulamalarını matematik felsefesinin anlaşılmasında temel faktör kılacak şekilde felsefeye dahil etme girişimi ayrı bir ilgiyi hak ediyor, zira felsefenin kapsamı yeterince genişletilse bu sorun da

> halledilmiş olacak. (...) Şundan şüphem yok ki, önümüzdeki gelişmelerin ne doğuracağı düşüncesinden bağımsız olarak, son dönemde çıkan matematik felsefesine yönelik yaklaşımların hepsi, ilgili sorunların karmaşıklığı göz önüne alınınca memnuniyetle karşılanmaktadır. 1930-1960 arası geçen otuz yıl bize en azından şunu öğretti: cennet ve yeryüzü arasındaki matematiksel muammaların sayısı, mantıkçı, sezgici ve biçimcilerin hayal edebileceğinin çok çok üzerindedir (Mehlberg, 2002: s. 80-81).

Matematiksel nesnelerin inşasına ilişkin konulardan kopuk yeni bir matematik tanımı yapılması girişiminin, matematiğin doğasına yönelik çalışmalara katkıda bulunmaktan uzak bir noktada olacağını düşünüyoruz. Kant sonrasında yapılan çalışmaların matematiksel nesnelerin inşasını, düşüncenin bir konusu yapma gibi bir etkinliğin dışında tuttuklarını görmekteyiz. "(...) tüm bu yaklaşımlar, (...) özelde matematiksel düşünmenin, genelde de fikriyatın nesneyle bağının koptuğu, 'nesnesizleştiği' bir dönemin ürünleridir ve aşılmak durumundadır. Matematik felsefesi nesneyi esasa alan, nesne-merkezli bir yaklaşımla yeniden kurulmalıdır" (Çitil, 2012a: s. 257). Dahası, bu alanda yapılacak çalışmalar; tekrar matematiksel nesnenin ontolojik mekânını bilme konusu yapmasıyla ve nesneye yönelişi mümkün kılmasıyla matematik felsefesine katkıda bulunabilir. Matematik felsefesinde ontolojiyi esas almayan çalışmaların epistemolojik başarısızlıkla sonuçlandığını gördük. Zira, geçmişte olduğu gibi şu ya da bu görüşün bakış açısıyla, nesneden uzaklaşarak tanım yapılmaya çalışıldığında matematik felsefesinde ciddi bir yol alınamayacağını yinelemek istiyoruz. Nesnenin mekânının yargı olması bakımından, yargının oluşumunun açıklanması nesnenin tesisinin açıklanmasına katkı sağlayacaktır. "(...) nesneler bir disiplinin en temel ontolojik unsurları olduğundan onlar iyice bilinmeden yapılan herhangi bir bilimsel faaliyet temelsiz bir bina gibi, deyim yerindeyse, havada kalacaktır" (Yalçın, 2003b: s. 48). Kısaca, ontolojik

temelli bir yaklaşımın gelişmemiş olması, geniş çaplı araştırmaların önünü tıkamıştır. Günümüz matematik felsefesinde ontoloji ve epistemolojinin uyum içinde olabileceği bir yaklaşımın geliştirilmesine ihtiyaç vardır. Putnam, "Bana öyle geliyor ki, matematiksel bilgi gerçek bir bilmece ve felsefecilerin matematik felsefesi üzerinde şimdi yaptıklarından daha fazla yoğunlaşmaları gerekiyor sanırım, çünkü bu hiçbir kuramın pek iyi işlemediği bir alan gibi gözüküyor" (Putnam, 2004: s. 315) biçimindeki ifadesiyle kuramsal yaklaşımların başarısızlıklarına vurgu yapmaktadır. Öte yandan, tanınmış bir matematikçi-filozof olan Karl Menger matematiğin neliği hakkındaki görüşlerin hiçbirine katılmamaktadır. Menger'e göre matematiğin ne olduğu ya da ne olmadığı sorusunun cevabı matematikçinin gerçeğinde saklıdır. Menger, matematikçinin bu soruların dışında belli yöntemlerle önermeler üzerinde çalıştığını, matematiğin doğasıyla ilgili söylenebilecek her şeyin kaynağının matematikçinin bilimsel etkinliğinde olduğunu ileri sürmektedir.

> Matematiksel önermeler, Mill ile Mach'ın söylediği gibi, empirik kökenli midir? Yoksa, aritmetik ve geometrik önermelerin sentetik *a priori* yargılar olduğunu ileri süren Kant'a mı inanalım? Poincaré, temel aritmetik kuralların gerçekten sentetik *a priori*, geometrik önermelerin ise analitik yargılar olduğunu söylediğinde, doğruyu mu dile getiriyordu? Tersine, aritmetiğin temel kurallarını analitik, geometrik doğruları ise sentetik diye niteleyen Frege'ye mi hak vereceğiz? Yoksa Russell gibi tüm matematiksel önermeleri analitik sayanları mı izleyelim? Matematiksel önermelerin doğruluğu deneyime bağlı mıdır? Son çözümlemede, matematiksel doğruluk sezgi ve deneyimsel kanıtlara mı dayanmaktadır? Ya da, matematiğin, günümüzde çok kez söylendiği gibi, totolojik bir sistem olan mantığın bir parçası olması gerçeği mi bu doğruluğu sağlamaktadır? Yoksa, matematiğin temeli onun tutarlılık ispatına mı dayanmaktadır? Ben kendi payıma, bu soruların hiçbirinin yanıtının olumlu olabileceğine inanmıyorum. Matematikçinin yaptığı şey, aslında, belli yöntemler aracılığıyla birtakım önermeleri, daha önce seçilmiş birtakım başka önermelerden çıkarsamadan ileri bir şey değildir. İşte, matematikçinin uğraşına

ilişkin matematik ve mantığın tüm söyleyebileceği şey bu basit belirlemede saklıdır (Menger'den akt. Yıldırım, 2008: s. 17-18).

Her ne kadar Menger, matematik hakkındaki bütün görüşleri matematikçinin yapıp etmeleriyle ilişkilendirse de, bu gibi sorular geçmişte de sorulmuştu ve bunlar, günümüz matematik felsefesinin hâlâ cevap bekleyen önemli sorularıdır. Özetle; matematiğin en temel nesnesi olan sayının ontolojik zeminini göstererek, arimetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğunu temellendiren Kant'tan sonra matematik felsefesinde ortaya çıkan görüşler, matematiğin temel nesnesinin mekânını derin bir biçimde araştırma ve açıklama girişiminden yoksun olan görüşlerdir. Bu bakımdan günümüz matematik felsefesinde, nesneyi ve nesnenin ortaya çıktığı mekânı esas alan bir yaklaşımın geliştirilmesine ihtiyaç olduğunu düşünüyoruz. Böyle bir çalışma; "ontolojik-temelli" matematik felsefesinin gelişmesine katkı sağlaması bakımından, matematiğin doğasına ilişkin sorulara yanıt verme imkânını da güçlendirebilir; dahası, matematik eğitimindeki sorunların tanımının yapılmasına ve anlaşılmasına olumlu katkılar sağlayabilir.

3. BÖLÜM: KANT'IN BİLGİ YAKLAŞIMI, İNSAN VE EĞİTİM ANLAYIŞI ÇERÇEVESİNDE ARİTMETİK GÖRÜŞÜNÜN GÜNÜMÜZ MATEMATİK EĞİTİMİ AÇISINDAN İRDELENMESİ

Birinci bölümde Kant'ın, aritmetiği sentetik *a priori* yargılar alanı olarak temellendirdiğini göstermeye çalıştık. Bir başka anlatımla, Kant'ta matematiğin saf görü temelinde kavramlardan inşa edildiğine, bu yönüyle matematiksel yargıların evrensel, zorunlu, kesin ve öğretici olduğuna ana hatlarıyla değindik. İkinci bölümde, matematik felsefesinde geliştirilen kuramsal yaklaşımların "sayı"yı açıklamaktan uzak bir noktada olduğunu, matematiğe ilişkin felsefi söylemlerin sayıyı merkeze alarak içerik kazandığında matematiğin doğası hakkında daha doyurucu açıklamalar getirebileceği düşüncesine vardık. Dahası, Kant'ın sayının inşasını sayının ontolojik zeminini göstererek açıkladığını, Kant sonrasındaysa bu tür geniş çaplı ve derin bir ontolojik çalışma yapılamadığını gördük. Şimdi de bu bölümde, Kant'ın bilgi kuramı, insan ve eğitim yaklaşımı, aritmetik anlayışı bağlamında günümüz matematik eğitiminin sorunlarını anlamayı ve yine Kant'ın görüşleri temelinde bu sorunların çözümüne yönelik yetkin bir yaklaşım geliştirmeyi hedeflemekteyiz.

3.1. Kant'ın İnsan ve Eğitim Anlayışı

Kant, insanı, eğitimle zihinsel yetilerini bütünleştirerek insanlaşacak bir doğal varlık olarak görür. Kant'a göre insanın bilme, hoşlanma ve isteme yetileri vardır. İnsan hayvandan farklı olarak bilme aracılığıyla var olduğu için, bu zihinsel yetiler de bilme yetisi aracılığıyla bilinir ve kullanılır. Bu nedenle bilme yetileri olan zihinsel yetiler-aynı sırayla-anlama yetisi, yargı gücü ve akıl olarak belirlenmiştir. Diğer iki bilme yetisi olan yargı gücü ve akıl da kendi alanlarında anlama yetisinin *a priori* bilme kategorilerini kullanarak bilme işlevlerini gerçekleştirir. *A priori* kategoriler anlama yetisiyle doğanın zorunlu yasalarını bilmeyi, akılla ahlâkın özgürlük yasasını bilmeyi, yargı gücüyle de diğer iki yetinin ereklerini birleştirmeyi, ahlâk yasasını gerçekleştirmeyi hedefleyecek şekilde doğanın yasalarına uygun yaratıcı yargı ve eylemde bulunmayı kendine erek edinir; sonuç olarak insan bütünlüğüne, *universitas*a ulaşılır. Kant insan bütünlüğünü bir tasım formunda kurar. Burada akıl, tümel insan bilgisini veren büyük önerme, anlama yetisi tekil nesnenin bilgisini veren küçük önerme, yargı gücü de küçük önermeye büyük önermeyi yükleme nedeni olan orta terim işlevi görür ve insan düşünen bir varlık olarak kendini insan olma yasası temelinde dönüştürmeye çabalar; eğitim de bu dönüşümün alt yapısını oluşturur. Kant'ın kendisi, bu bütünlüğü aşağıdaki tablo ile göstermiştir:

Tablo 3. 6. Kant'ın Yetiler Tablosu

Zihnin bütün yetileri	Bilme yetileri	*A priori* ilkeleri	Alanları
Bilme yetisi	Anlama yetisi	Yasalılık	Doğa
Hoşlanma yetisi	Yargı gücü	Ereklilik	Sanat
(İsteme) Arzu yetisi	Akıl	Son erek, ideler	Özgürlük [ahlâk]

Kaynak: Kant, I. (2001). *Critique of the Power of Judgement*. s. 85.

Bu bağlamda sayının, aynı türden bir *a priori* görü *manifold*unun zaman temelinde çokluğun birliği olarak tanımlanan tümlük veya bütünlük (*universitas*) kategorisi altında bir kavram olarak belirlendiğini biliyoruz. "Nicelik kategorisi" başlığı altında, birlik, çokluk ve bütünlük kategorilerinin ahlâkın ve sanatın nesnelerini nasıl belirlediğini de kısaca şöyle ele alabiliriz. Ahlâk önce kişiye özgü, "öznel kurallar", "maksimler" olarak, çokluk kategorisinde belirlenir. Sonra toplumsal bir ortaklık ve uzlaşım arayışında "nesnel ilkeler" olarak birlik altında paylaşılır. Fakat bu birlik zorunlu olarak bir tümele göre belireceğinden yeterli değildir ve akıl, pratik kullanımında evrensel olanda kendini tamamlar ve ahlâk değerlendirmelerini bir "evrensel yasa" ile, tümel kavram düzeyinde nedeniyle birlikte bilebilir ve uygulayabilir olur. Kant ahlâk yasasının bu dönüşümünü "Öyle eyle ki, senin istemenin maksimi, hep aynı zamanda genel bir yasamanın ilkesi olarak da geçerli olabilsin" (Kant, 1999: s. 35) sözüyle ifade etmiştir. Böylece eylemin amacı elde edilecek sonuç değil, aklın kendi özerkliğini kurarak insanı bütünleyecek yasayı korumak niyetiyle eylemek olur. Elde edeceği sonuca göre niyetini değiştirmek

yaderklik ve kölelik demektir. “Demek ki özerklik insanın ve her akıl sahibi varlığın değerinin temelidir” (Kant, 1995: s. 53).

İnsanı insan yapacak şey yetilerini ahlâk yasasına göre örgütlemektir ve insanı bu bütünlüğe taşıyacak yeti de yargı gücüdür. Bir estetik değeri (güzel, komik, vb.) estetik ve mantıksal tamlığı içinde bilmek için yaratım nesnesinin içerdiği estetik biçimler “çokluğunun” nicelik kategorisi altında uyumlu olacak şekilde “birleşmesi” ve o estetik değerin evrensel olarak tanınacak, bilinecek kadar tümelliğine, bütünlüğüne, *universitas*a ulaşmış olması gerekir. Diğer kategorilerin de sentezlenmesiyle ulaşılacak estetik “genellik”, çoğunluk için “geçerli” bir popüler beğeni yargısına dönüşür (Kant, 1974: s. 43). Konu insan estetiği, insanın yaratımı, insanlığının ortak beğeni konusu olacak kadar iyi eğitimi olunca, yargı gücü diğer yetileri ereksellik ilkesi gereğince bir bütünlüğe taşıyabilecektir. Aklın pratik kullanımı en yüksek iyi ideali çerçevesinde ahlâk yasasına, koşulsuz buyruğa göre özerk olmayı erek edinmiştir. “İnsanın ödevi kendisini geliştirmektir; [ruhunu-dimağını] inceltmektir ve kendisini yoldan sapmış bulduğunda [yoldan çıkanı] ahlâk yasasının boyunduruğu altına sokmaktır. Düşününce bunun çok güç ve zor olduğunu göreceğiz. Bu yüzden insanın bir ödev olarak üstlenebileceği ve kendisini adayabileceği en büyük ve en güç sorun eğitim meselesidir” (Kant, 2009: s. 38). Aklın görü, hayal gücü ve *apperception* ile teorik kullanımında ise, anlama yetisi deneyime ilişkin nesnenin koşullu teorik bilgisini erek edinmiştir. Yargı gücü de bu iki yetinin transandantal olanağını ve ereklerini eylemde birleştirmeyi ve koşulsuz olanı koşullu bir evrende gerçeğe dönüştürmeyi erek edinmiştir (Kant, 2001: s. 59). Eğitimin de amacı, genellikle, bilimsel olarak doğru anlamlandırılmış bir dünyada kendini özerk bir akıl varlığı olarak gerçekleştirmek, ahlâk yasasına uygun bir

karakter ve değerlendirme becerisi geliştirmek, bu yönde tutarlı, bütünlüklü bir insan olmayı sağlayacak bir görüş, karar, yargı gücü ve aklını kullanma, eyleme geçme cesareti geliştirmektir.

Kant, bilgi ve bilimlerin bir birliğe sokulmasına "saf aklın arkitektoniği (*architectonic*)" demektedir. Ancak sistemleştirilmiş bir yapı aklın ereklerine katılabilir. Eğitimin temeli açısından da, öğrencide doğa felsefesinin ve bilimlerin zorunluluk yasaları, onları belirleyecek rasyonel öznenin ahlâkının özgürlük yasalarına göre belirlenecektir (Kant, 1998: A836-9/B864-8). Bilimsel eğitimin de temeli insan, insan kavrayışı, ahlâk ve özgürleşmedir. Bilimler de bu amaçla sistemleştirilir. Bilgi ve bilimler sisteminin amacı, "bir idea altında çokluğun birliği", ideanın bilimsel bütünlüğü, yani *universitas*ıdır. Bütün, tam bir tutarlılık içinde büyümeli, genişlemelidir. Anlama yetisinin verdiği kavramsal "şema" rastlantısal olarak dış koşullara göre, empirik olarak tasarlanmıştır. Bütünün biçim ve ereğine uygun bir sistem kurabilecek, bir idea altında kendi *a priori* ereklerine göre empirik şemaya "arkitektonik (*architectonic*)" bir birlik verebilecek olan yeti akıldır. Bir bilim, ancak bir idea üzerine kurulabilir. Bilimsel çalışmalarla, zamanla içeriği olgunlaşacak olan idea, önce bir çekirdek gibi saf akıl tarafından, bütünlüğün ereğine göre tayin edilir (Kant, 1998: A832-5/B860-3).

Kant'ın insan ve eğitim anlayışını kimi Kant yorumcularına dayanarak açmaya devam edelim. Walter Heistermann'a göre, Kant'ın felsefesinin ana problemi "İnsan nedir?" sorusudur; bu bakımdan, transendental felsefede insan varlığı çeşitli açılardan ele alınarak aydınlatılmaya çalışılır. Çünkü bir akıl varlığı olarak insan

yeterince temellendirilebilirse, "insanlık idesi" boş bir görünüş olmaktan çıkıp ortak bir görev olarak bütün insanları birbirine bağlama imkânına sahip olabilir (Heistermann, 1968: s. 49-50). Kant'a göre insan bir yanıyla doğal bir varlık, diğer yanıyla da bir akıl varlığı olarak iki dünyalı bir varlıktır. Doğal bir varlık olarak insan, diğer canlılar gibi zaman-mekân içinde doğa yasalarına bağlıdır. İnsanın arzuları, eğilimleri onu zorunlu olan doğa yasalarına bağlar. Bu bakımdan doğa varlığı olarak insan özgür olmayan bir varlıktır. Akıl varlığı olarak insan ise akıl yasalarına bağlıdır, başka bir anlatımla akıl (varlığı) sahibi insan olmak demek özgür olmak, özerk olmak ve kendi kendine yasa koymak demektir. Kant'ın insana ilişkin bu iki dünyalı görüşünün, insanı parçalayan ontik bir görüş olmanın aksine sadece bilgi bakımından başvurulan bir yöntem olduğu anlaşılmaktadır.

Bir doğa varlığı olarak insan, çevreyi kullanılabilir bir hale getirmek için kendisinde imkân olarak bulunan "ben-bilgisi" ve "aklın" gerçekleştirilmesi gerekir. İnsan ancak "ben-bilgisi"ne sahip olmasıyla kendisini akıl sahibi bir varlık yapabilir. Çünkü "ben-bilgisi"ne sahip olan bir insanın kendi kendisinden ve şeylerden mesafe alması mümkün olur. "Bu mesafe alma, gaye koymanın ön şartıdır. O ancak koyduğu gayeleri gerçekleştirerek, kendisini ve çevresini mükemmelleştirebilir. 'Ben-bilgisi', insanda başlangıçta bir imkân olarak bulunur. Çocukta da daha baştan beri vardır. Fakat ortaya çıkması, yaşın ilerlemesi ile olanaklı olur" (Heistermann, 1968: s. 52-53). "Ben-bilgisi"nin gelişmesi de çocuğun alacağı aile ve okul eğitimine bağlıdır. Kant'a göre, insan kendisindeki imkânları geliştirerek her türlü doğa nedenselliğinin dışında özgür bir istemenin mümkün olabileceğini gösterebilir.

Akıl varlığı insanın istediği şeyler ile doğa varlığı insanın istediği şeyler arasında her zaman bir uyuşmazlık ve bir çatışma söz konusudur; "(...) insan, aklın kanunlarına göre hareket ettikçe hür, otonom; fakat hareketlerini tabiat kanunlarına göre düzenledikçe hür olmayan, diğer tabiî varlık dünyası gibi heteronom olan bir varlıktır" (Mengüşoğlu, 1969: s. 48). Kant'a göre, özgürlük bir *ide* olarak eylemlerimizin değil, istemelerimizin bir özelliğidir. Bu bakımdan özgürlük insan için bir olanaktır ve aklın pratik alandaki kullanılmasında aranmalıdır. İşte eğitimin amacı da, bir doğa varlığı olan insanı bir akıl varlığı olarak gerçekleştirerek özerk ve özgür kılmaktır. Öte yandan,"Özgürlük sevgisi doğal olarak insanda o kadar güçlüdür ki, bir kere özgürlüğe alıştığında, artık her şeyi onun uğruna feda edecektir. Sırf bu sebepten ötürü talim-terbiyenin disiplin kısmı çok erken dönemlerde yerini almalıdır, çünkü bu yapılmadığı zaman, hayatta daha sonra kişiliği değiştirmek kolay olmayacaktır. Disiplinden yoksun [yani kendi kendini sınırlama becerisi gelişmemiş] insanlar gelip geçici her arzuyu, her hevesi takip etmeye yatkındırlar" (Kant, 2009: s. 33).

İnsanın otonom (özerk) bir varlık olduğunu gösteren ilk filozof olarak Kant, insanın aklın yasalarına göre hareket etmesi halinde özerk bir varlık olabileceğine vurgu yapar. İşlenmemiş yetenekleriyle birlikte doğan insan aslında bir olanaklar varlığıdır. İşte insan, eğitimle birlikte, doğuştan getirdiği yetenekleri işleyerek kendisindeki olanakları geliştirir. Mengüşoğlu'ya göre "İnsan hazır olmayan, ham yeteneklerle dünyaya geldiği için, hayatının sonuna kadar bir öğrenci, bir çırak olarak kalır. Bu yüzden insanın eğitime, eğitilmeye ihtiyacı vardır. Kant eğitimle disiplin, öğrenme ve belli bir form kazanmayı kasteder" (Mengüşoğlu, 1998: s. 45). İnsana bazı şeylerin eğitimle verilebileceğine, bazılarının da eğitimle geliştirilebileceğine işaret

eden Kant, insanın doğal yeteneklerinin kendiliğinden gelişmeyeceğini ileri sürmektedir. Bu bakımdan eğitim, insanın doğuştan gelen yeteneklerini geliştirmesi ve insanın insanlaşması için bir sanattır.

> Tabiat insanın içine bu amaç için bir içgüdü yerleştirmemiştir. Bu sanatın kökeni gibi tatbiki [gelişme süreci] de ya mekanik ve plansızdır [belirli şartların belirlediği tasarıdan yoksundur] ya da yargı gücünün kullanımını gerekli kılar. Şansa ya da tesadüfe bağlı durumlarda herhangi bir şeyin insana faydalı mı yoksa zararlı mı olduğunu tecrübe ile öğreniyorsak eğitim sanatı sadece mekaniktir. Safi mekanik olan her türlü eğitim birçok hatayı ve kusuru da beraberinde getirir, çünkü üzerinde oturacağı güvenilir ilkelere sahip değildir (Kant, 2009: s. 40).

Eğitimcilerin göz önünde bulundurması gereken eğitim ilkesi; çocukları içinde bulundukları çağın gereksinimlerine göre eğitmekten daha çok, gelecekte daha iyi bir dünya kurulması amacıyla onları mümkün olabilecek gelişmiş bir seviyeye yükseltmeyi amaç edinmelidir. Bu amaçla insan önce disiplin eğitimi almalıdır. Disiplin eğitimi, bir doğa varlığı olan insanın eğilimlerini sınırlamayı amaç edinerek insanlığı daha iyi duruma getirir. İnsan kültürle donatılırsa içindeki yetenek ortaya çıkar. Ayrıca eğitim insana ayırt etme yetisi ve anlayışının yanında ahlâki terbiye de kazandırmalıdır (Kant, 2009: s. 40-44).

Kant'ın *Pratik Aklın Eleştirisi* adlı yapıtında da eğitim hakkındaki görüşlerinin yer aldığını görüyoruz. Bu yapıtında Kant, eğitime ilişkin bir yöntem olan "metot öğretisi"nin çerçevesini çizer. Bilimlerin bilgisini edinmenin ancak metotla mümkün olabileceğini ileri süren Kant, "(...) popüler bilgi bir uslûp, bilim ise bir metot, yani

yalnızca onlar aracılığıyla bilginin çeşitliliğinin bir sistem haline gelebildiği akıl ilkelerine göre iş görmeyi gerektirir" (Kant, 1999: s. 163) demektedir. Metot öğretisinin içeriği özgün bir etik eğitiminin ilk taslağı gibi görünse de, genel olarak onun bilim, eğitim-öğretim görüşünü yansıtmaktadır. Sadece duygulara dayanan eğitim anlayışı (ahlâksal bir etki sağlayacağı varsayılsa da) çocukları erken yaşta palavracı yapacağı için eğitim-öğretim daha çok akıl ve sorgulama yoluyla edinilen ilkeler üzerine kurulmalıdır. "Eğitim ve öğretim sadece mekanik olmamalı; sabit değişmez ilkeler üzerine oturtulmalıdır. (...) Eğitimde her şey doğru ilkeler tesis etmeye ve çocukların bunları anlayıp kabul etmesine önderlik etmeye dayanır" (Kant, 2009: s. 46, 123).

Kant'ın etik eğitiminde, ahlâk ilkelerinin kavramlar üzerine kurulması gerektiğine vurgu yapması, onun, eğitim-öğretimde "kavram"ı bir başka deyişle, "kavram öğrenimi"ni esas aldığını göstermektedir. Kant'a göre, eğitimde öğreticilerin, kavramları saf hale getirmeleri teorik bakımdan önemlidir. Çünkü ahlâk kavramları deneyim olan bilgiden çıkarılamaz. "(...) bütün ahlâk kavramlarının yeri ve kaynağı tamamen *a priori* olarak akılda bulunur (...)" (Kant, 1995: s. 27). Burada, Kant'ın amacının, her türlü deneyimden tamamen bağımsız bir şekilde "ahlâk yasası"nı türeterek özgürlüğe gerçeklik kazandırmak ve ahlâk yasasıyla da zorunlu olarak bir "özgür isteme"nin var olabileceğini ortaya koymak olduğunu ileri sürebiliriz. Bir başka anlatımla söylenecek olursa, Kant'ın etik eğitimi görüşünün özünü çocuklarda "ahlâk yasasına göre isteme"yi uyandırmak oluşturur. İsteme ise, istemenin bilgisi verilerek mümkün kılınır. Kant'a göre "(...) ahlâki eğitim bir insana özgür bir varlık olarak nasıl yaşaması gerektiğini öğreten eğitimdir" (Kant, 2009: s. 53). Dolayısıyla ahlâk yasasının ilkeleri *a priori* olandan türetilmelidir. "İlkeler hakkında bir

kavrayışa akıl vasıtasıyla ulaşırız" (Kant, 2009: s. 97) diyen Kant, ilke ve kavram ilişkisini "[i]lkeler kavramlar üzerine kurulmalıdır (...)" (Kant, 1999: s. 169-170) sözleriyle ifade eder. Buradan Kant'ın eğitim görüşünün "öğretim" ve "ahlâki eğitim"i birleştiren bir eğitim olduğu anlaşılmaktadır (Kant, 2009: s. 49). Bu bakımdan Kant'taki etik eğitimi, onun insan ve genel eğitim-öğretim görüşünden ayrı düşünülemez.

Kant'ta etik eğitiminin farklı bir araştırma alanı olduğunu düşünerek şimdi, günümüz matematik eğitiminin sorunlarına, Kant'ın matematiği bir "kavram" alanı olarak tanımlaması temelinde bakmaya çalışalım. Daha önce de birçok kez ifade edildiği gibi, transandantal felsefede matematik, bir kavramlar bütünüdür. Matematik kavramların inşasından oluşan akıl bilgisi olduğuna göre, önce kavramın ne olduğunu açalım, en sondaki başlık altında da matematik öğretiminde kavramların tanımlarının yapılmasının öğrenmeyle ilişkisini irdeleyelim. Varolanı bilmenin temeli olarak kavram, bilme etkinliğini gerçekleştirir. Bu yönüyle kavramlar, düşünülene ilişkin olarak oluşan zihinsel çerçevelerdir. Dolayısıyla kavramlar düşünme alanında yer alırlar ve her türlü varolanın bilinmesine ve anlamlandırılmasına olanak sağlarlar.

> Varolanın sınırlarını belirleyen bir çerçeve olması, kavramın en temel işlevi olmaktadır. (...) Şu ya da bu biçimde elde edilmiş olan çerçeveler, başka deyişle kavramlar, varolabilmenin değil bilinebilmenin, bilinmenin dolayısıyla bilmenin olanağını sağlarlar. (...) Bilme, genel kavramlarla ancak sağlanabilir. İşte bu noktada Aristoteles'in "asıl bilgi, tümelin sağladığı bilgidir" deyişinin bir anlamı olabilir (Çotuksöken, 2000: s. 26-27).

Matematik de dahil bütün bilgi dallarında asıl işimizin kavramlar olduğunu ve kavram olmadan bilmenin, düşünmenin olanaksız olduğunu belirtelim. Çünkü matematiksel olarak düşünmek demek, matematiğin kavramlarıyla bilmek demektir. Kavramlar aracılığıyla düşünen bir varlık olarak insan matematiksel kavramları kurmakta, üretmekte ve matematiğin bilgisine sahip olmaktadır. Üstü kapalı olarak, Kant'ın genel eğitim görüşünün merkezine "kavram öğrenimi/öğretimi"ni yerleştirdiğini anlıyoruz. Çünkü Kant'a göre eğitim-öğretim ilkeler üzerine, ilkeler de kavramlar üzerine kurulmalıdır. Buradan onun eğitim-öğretim görüşünün kavramı esas aldığını söyleyebiliriz. İzleyen bölümlerde Kant'ın görüşleri temelinde yapılandırmacılık yaklaşımını eleştirel bir bakışla ele alırken, Kant'ta nesne, kavram ve bilgi ilişkisine tekrar yer vermeye çalışacağız.

3.2. Kant'ın Görüşlerinin Eğitimde Bir Yansıması Olarak Görülen Yapılandırmacı Öğrenme Kuramı

Üçüncü bölümün ana teması Kant'ın görüşleri temelinde bir matematik eğitiminin genel taslağını oluşturmaktır. Bu bakımdan bir önceki başlık altında, Kant'ın insan ve eğitim anlayışının ana hatlarını çizmeye çalıştık. Her türlü eğitim, doğru bir kuram ve eylem bütünlüğü ile gerçekleştirilebilir. Matematik eğitimine ilişkin yeni bir yaklaşım denemesi için kimi öğrenme kuramlarını genel olarak ele almamız gerekiyor. Dahası, olana bakıp olması gerekenleri söyleyebilmek için kimi eğitimcilerin ya da eğitim sistemlerinin her yönüyle kabul edilebilir bir öğrenme kuramı olarak gördüğü yapılandırmacılığın felsefi temellerini sorgulamayı gerekli görmekteyiz. Bu amaçla, yapılandırmacılığı önce John Dewey, Jean Piaget, L. S.

Vygotsky ve Ernst von Glasersfeld gibi öncülerinin görüşleri zemininde ele alacağız, sonra da bu öğrenme yaklaşımının Kantçı ve post-positivist felsefi temellerini ayrıntılı bir biçimde sorgulamaya çalışacağız.

3.2.1. Yapılandırmacılığın Belli Başlı Öncülerinin Bilgi, Öğrenme ve Gerçekliğe İlişkin Görüşleri

Yapılandırmacılık (*constructivism*), öğrenmede yeni bir paradigma olarak son dönemlerde eğitimbilim literatüründe çok sık tartışılan bir kavramdır. Bu öğrenme yaklaşımı Amerika, Yeni Zelanda, İsrail, Kanada, İsviçre ve Avustralya gibi ülkelerin eğitim sistemlerine ek olarak Türkiye'de de 2005 yılında yapılan bir dizi değişikliklerle ilköğretim ve ortaöğretim programlarına girmiştir (Aydın, 2012: s. 13).

Öğretim, daha çok eğitimin okulda planlı ve programlı yürütülen kısmı, öğrenmenin gerçekleştiği eğitim durumu olan güdümlü ve destekli bir süreçtir. Eğitim kavramı ise edinilen bilginin beceriye dönüşmesi, davranışa yansıması biçiminde karşımıza çıkar. Başka bir deyişle eğitim, zaman ve mekân yönünden kapsamlı, süreli ve çok boyutlu bir kavram olarak, bilgi dahil her türlü tecrübeyi (yaşantıyı) kapsar (Özdemir, 2006: s. 5-6). Nermi Uygur, eğitimi kuram ve eylem bütünlüğü olarak görür. Uygur'a göre, eğitimin yaygın anlamının bilmeye, bilgiye ilişkin olduğu ileri sürülse de, eğitim ne yalnızca kurama ne de yalnızca eyleme indirgenebilir. Eğitim "*Bir bakıma* 'kuram'sa, *bir bakıma* 'eylem'dir. Öyle bir dokudur ki 'eğitim', 'kuram

ile eylem'i birlikte özümsemiştir. Birlikte önemlidirler eğitimde" (Uygur, 1996: s. 135).

Yapılandırmacılı öğrenme kuramının bilgide ve öğrenmede özneye etkin bir konum kazandırması bakımından, felsefi temelinde Kant'ın epistemolojisinin etkilerinin olduğu burada öncelikli olarak ileri sürülebilir. Yapılandırmacı yaklaşımda, "deneyim", "yaşantı", "anlam", "yapılandırma" gibi kavramlarla sık sık karşılaşıyoruz. Bu yaklaşımda öğrenme etkinliği bu kavramlar üzerinden tanımlanmaktadır. Bilginin yapılandırılmasının, anlam oluşturulmasının ne anlama geldiğini "bilişsel", "toplumsal" ve "köktenci (*radical*)" yapılandırmacılık bağlamında açık kılmak için, bu görüşlerin öncülerine gitmeden önce yapılandırmacılığa kazandırdığı "deneyim" kavramıyla bilinen Dewey'nin eğitim görüşünü ele alalım.

Dewey, *Eğitim ve Deneyim* adlı yapıtında "geleneksel" eğitim yaklaşımıyla "ilerlemecilik (*progressivism)*" adını verdiği eğitim görüşünü karşılaştırmaktadır. "Geleneksel anlayışta, öğrencilerin görevi yapmak ve öğrenmektir. (...) 'Öğrenme' kelimesi, burada hâlihazırda kitaplara ve yaşça daha büyük olanların kafalarına yerleştirilmiş olan şeylerin alınması anlamına gelmektedir. Bunun da ötesinde, bu anlayışta öğretilen şeyin özünde durağan olduğu hâkimdir. Öğretilen şey, ilk ortaya çıkışındaki koşullar ve gelecekte meydana gelmesi kesin olan değişimler dikkate alınmaksızın, tamamlanmış bir ürün olarak öğretilmektedir" (Dewey, 2011: s. 22). Dewey'nin eğitim görüşünde "deneyim" kavramının somut ve işlevsel bir anlamının olduğunu anlıyoruz. Deneyim, bireyin gerçek hayat deneyimidir. Bu nedenle kişisel

deneyimler ve eğitim arasında canlı bir bağ bulunmaktadır. O halde ilerlemeci eğitim görüşünün, eğitimi yaşam deneyimi olarak gören bir deneyim felsefesi geliştirmeye ihtiyacı vardır. Eğitimde "devamlılık" ve "etkileşim" deneyim için önemli olan ilkelerdir. Eğitimcinin doğrudan ilgilenmesi gereken şey, etkileşimlerin meydana getirdiği durumlar olmalıdır.

> Devamlılık ve etkileşim prensipleri birbirinden ayrı değildir. Birbirleriyle kesişirler ve bütünleşirler. Tabiri caizse bunlar deneyimin enlemsel ve boylamsal değerleridir. Farklı durumlar birbiri ardına gelir. Ancak devamlılık prensibi sayesinde bir şeyler daha öncekilerden daha sonrakilere taşınır. Birey bir durumdan ötekine geçtikçe dünyası, yani çevresi genişler veya daralır. Kendisini başka bir dünyada değil de aynı dünyanın farklı yerinde bulur. Bir durumdan öğrenmiş olduğu bilgi ve beceriler daha sonra gelecek durumları anlaması ve bunlarla etkin biçimde başa çıkabilmesi için bir araç olur. Yaşam ve öğrenme devam ettiği sürece bu süreç de devam eder (Dewey, 2011: s. 53-54).

Dewey, "yaparak öğrenme (*learning by doing*)" biçiminde geliştirdiği yaklaşım çerçevesinde öğrenmeyi, bireyin çevresiyle girdiği etkileşim sonucunda ortaya çıkan deneyimler süreci biçiminde tanımlamaktadır. Öğrenme etkinliğinde öğreneni merkezi bir konuma yerleştirmesiyle Dewey, yapılandırmacı yaklaşımın en temel ilkelerinden birini oluşturmuştur. Dewey'de öğrenme yaşam boyu devam eden bir süreçtir. Bilgi gerçekliği olduğu gibi yansıtan bir yapı olmanın ötesinde, deneyimler sonucunda ortaya çıkan bir üründür. İnsanın bilme etkinliği, deneyim yoluyla gerçekliğe katılmasıyla gerçekleşir. Kısacası, Dewey'de bilginin deneyim sonucunda oluştuğunu, değişken bir yapı gösterdiğini, gerçekliğin de öznelliğe dayanarak, yani bireysel deneyimlere bağlı olarak açıklandığını görmekteyiz.

> (...) bilimin deneysel yöntemi, fikirlere sadece -"fikir"- olarak bile diğer yöntemlere kıyasla daha az değil, daha fazla önem atfeder. (...) Fikirlerin kesin doğrular değil de hipotezler olarak algılanması gerçeği, fikirlerin bilimden başka yerlerde olduğundan daha kıskanç bir tavırla korumaya alınmalarının ve denenmelerinin sebebidir. Bu fikirlerin kendi içlerinde gerçekleri temsil ettiği anlaşıldığı anda; üzerlerinde derin incelemeler yapmak için hiçbir sebep kalmaz. Sabit doğrular olarak kabul edilmelidirler, o kadar. Ancak hipotez olarak kaldıkları sürece sürekli olarak denenmeli ve düzeltilmelidirler (...) (Dewey, 2011: s. 106).

"Bilişsel yapılandırmacılık" kuramıyla öne çıkan Piaget'ye göre yapılandırmacılığın uzun tarihi araştırıldığında onun bir öğreti ya da felsefe olmadığı ortaya çıkmaktadır. Yapılandırmacılığı temelde bir yöntem (Piaget, 1999a: s. 124) olarak gören Piaget, bu öğrenme yaklaşımının temel kavramlarından biri olan "yapı" kavramının araştırılmasının tamamlanmış bir çalışma olmadığına, bu kavramın araştırılmasında disiplinlerarası etkileşime ihtiyaç olduğuna vurgu yapmaktadır. Piaget'ye göre bilginin, bilmenin ve öğrenmenin doğasında "yapı" kavramına ek olarak "şema" ve "kavram" da yer alır.

> Bir eylemde tekrarlanabilen ya da genelleştirilebilen şeyi "şema" olarak adlandırıyorum. Sunulan her şema, kendi içerisinde mantıksal bir unsura sahip değildir; fakat şemalar eylemlerin genel düzenini ifade ederek birbirlerini düzenleyebilirler. Bu düzenlemeler mantıksal matematiksel yapıların çıkış noktası olan eylemler mantığını oluşturur (Piaget, 1999b: s. 42-43).

Yurdakul'a göre şema, zihinsel ya da fiziksel bir yapı olarak öğrenenin bir amaca ulaşmak ya da bir problemi çözmek için kullandığı hareketleri ifade eder. Öğrenen, yaşantıları yorumlamada, dengesizlik yaşandığında uygun olmayan şemaları

değiştirmede şemalara dayanan bilişsel yapıları kullanır. Öğrenen bilgiyi derinliğine işlerken, benzetmeler, karşılaştırmalar ve düşünme deneyleri yapmaktadır. Önceden var olan şemalara uymayan bilgi bilişsel çelişki ile sonuçlanmaktadır. Bu durumda birey, çelişkiyi azaltmak için yeni bilgilere başvurur, yeni bilgilerle de yeni şemalar oluşturur (Yurdakul, 2011: s. 42-43).

Piaget'ye göre bilgi, zihinsel yapıların bir ürünü olarak insanın dünya ile etkileşimleri sonucunda değişen bir yapıdır. Şemalar bilginin bilişsel düzeyde oluşmasında, deneyim ise bilginin dünya boyutunda gelişmesinde ve değişmesinde önemli öğelerdir. Bilginin kökeni deneyimden daha çok bilişselliğe dayanır, bu nedenle deneyim kavramında psikolojik süreçler olan algı ve alışkanlıklara değinmek gerekir. Piaget, "Bilginin yapısını sadece 'deney' yoluyla anlatmak istersek, bu tür bir önermeyi ancak deneyin yapısını çözümlemeye girişerek haklı gösterebiliriz (...)" (Piaget, 1980: s.14-15) sözüyle "biyolojik yapı", "çevre" ve "deneyim"in bilginin oluşumundaki temel unsurlar olduğuna vurgu yapar. O halde, etkin bir anlam oluşturma süreci olarak öğrenme, öğrenen merkezlidir, durumsaldır ve süreklidir (Albayrak, 2012: s. 27). Öyleyse bilgi bireyin önceki öğrendiklerine ve deneyimlerine göre oluşan ve değişebilen bir üründür. Piaget'nin öğrenmede öğrenenin bilişsel yapısında yer alan içsel hareketlere daha çok vurgu yaptığını söylemek mümkündür.

> Gerçekten de, eğer bilgi sürekli gelişim içindeyse ve daha sınırlı bilgi durumundan daha olgun ve etkin bilgi durumuna geçiyorsa, o zaman bütün sorun, bu gelişimi anlamak ve olanakların elverdiğince çözümlemek sorunudur. Bu gelişme süreci, gelişigüzel değil, birbirini izleyen aşamalardan oluşur ve algılama alanlarında bu

> gelişimin kesin bir başlangıç noktası olmadığı için, oluşum evreleri içinde incelenmesi gerekir (Piaget, 1980: s. 16).

Piaget, matematiksel bilginin deneyim temelli olduğuna işaret eder. Fakat Piaget'de her türlü bilginin kökeninde bilişsel yapıların yer aldığı dikkate alınırsa, buradaki deneyim, fiziksel, yani görgül bir deneyim değildir, daha çok bilişselliğe dayanan bir etkinliktir. Matematiksel bilgi açısından bakıldığında; Kant'ta sayı zaman temelinde inşa edilirken, Piaget'de matematiksel yapılar, istisnasız dönüşüm dizgeleridir. Ancak dönüşüm zamana bağlı olan bir süreç değildir. Örneğin ona göre, "1 + 1", "2" "eder", "3", "2"yi "takip eder" biçimindeki ifadelerde "eder", "takip etme" gibi sözcükler zamana bağlı süreçleri ifade etmez (Piaget, 1999a: s. 17). Piaget, matematiksel bilgi ile deneyim ilişkisini şöyle bir örnekle açıklar: "(...) on çakıl taşı sayan ve bunların yerleri değiştiği zaman yine on tane taş olduğunu bulan çocuk ise, oldukça değişik yapıda bir deney yapmaktadır: Çocuk gerçekte çakıl taşlarıyla deney yapmamakta, sadece araç olan bu taşlardan yararlanarak kendi sayma ve sıralama eylemleri üzerinde deney yapmaktadır" (Piaget, 1980: s. 37).

Piaget'de bilgi, öğrenenin dışarıdan edindiği bir yapı olmanın ötesinde, bireyin zihninde gerçekleşen bilişsel yapılar aracılığıyla ve bireyin çevresiyle girdiği etkileşim sonucunda yapılandırılır. Bilgi doğası gereği, öznenin nesne ile etkileşimi sonucunda ortaya çıkar. Özne olmaksızın, nesnenin bilgisi yoktur. Dolayısıyla öğrenme daha çok bilişsel yapılar temelinde oluşan bir süreçtir. Piaget'nin bilgi görüşü ile Kant'ın bilgi felsefesi çok farklı olmakla birlikte, her ikisinde de bilgide öznenin etkin kılınması bakımından benzerliklerinin olduğuna vurgu yapılmaktadır.

> (...) başlangıçta kendini tanımayan bir "ben"e, kalıcı olmayan nesnelere ve bu iki kutup arasındaki karşılıklı etkileşimlere sahipsiniz. Bilgi, "ben"de başlamaz; nesnede de başlamaz. Bilgi karşılıklı etkileşimlerle başlar. Özne ve nesne arasındaki bu etkileşimler ayrı tutulduğu ve düzenlenmemiş eylemler var olduğu sürece ne nesneler ne de özne vardır. Bu etkileşimlerin eşgüdümlerine sebep olduğu çapta, bir tarafta özne diğer tarafta nesnenin karşılıklı ve eşzamanlı yapılanması vardır (Piaget, 1999b: s. 74).

Aydın, Piaget'de nesnel gerçekliğin bilişsel yapılar aracılığıyla kavranmasında ve anlam oluşturulmasında; deneyimlerin, çevre ile etkileşimin ve zihinsel yapıların önemli bir rol üstlendiğine işaret etmektedir (Aydın, 2012: s. 19). Piaget'ye göre bir şeyi bilmek demek, o şeyin gerçekliğini dönüşüm sistemleri içerisinde sindirmek demektir. Başka bir deyişle bilmek, belli bir duruma nasıl sebep olunduğunu anlamak için gerçekliğin dönüştürülmesidir.

> Bu düşünceden ötürü kendimi, bilgiyi gerçeğin edilgen bir kopyası olarak gören anlayışın karşısında buluyorum. Zaten gerçekte bu anlayış bir kısır döngüye dayanmaktadır: Kopyalama yapmak için kopyaladığınız modeli bilmeniz gerekir, onu bilmenin tek yolu da onu kopyalamaktır. Bir nesneyi bilmenin ona göre hareket etmek üzerinde ya da aracılığıyla uygulanabilecek dönüşümler sistemlerini inşa etmek olduğunu biliyorum (Piaget, 1999b: s. 39).

Özetle; bilişsel yapılandırmacılığın öncüsü olarak Piaget bilgiyi, öğrenmeyi ve gerçekliği bilişsellik üzerinden açıklamaktadır. Piaget'ye göre bilginin oluştuğu dönüşümsel yapılar gerçekte dönüşümlerin kopyaları değildir. Bu yapılar deneyimin bize seçme imkânı sağladığı olası eşbiçimli modellerdir. Bu bakımdan bilgi süreç içinde oluşan bir dönüşümler sistemidir.

"Toplumsal yapılandırmacılık" kuramının öncüsü olan Lev Semyonovich Vygotsky'ye göre, bilgi toplumsal ve kültürel bir bağlamda edinilir. Öğrenme, sosyal bir etkileşimin bir ürünü olarak, toplumsal-kültürel bir ortamda, dilsel bir bağlamda gerçekleşmektedir (Aydın, 2012: s. 23). Dil, kavramların anlamlarını açıklamada etkin bir araç olarak yüksek düzey öğrenme biçimlerini mümkün kılar. Çocuklar doğduğunda kavramları sadece adlarıyla öğrenir ve ezberlerler; kavramların içeriği ise deneyimle oluşur. "(...) bilimsel bir kavramın gelişmesi ise, genellikle sözlü tanımı ve kendiliğinden olmayan işlemlerde kullanılmasıyla başlar. Bilimsel kavramlar, çocuğun zihnindeki yaşamlarına, kendiliğinden kavramların ancak daha sonraları eriştikleri düzeyden başlarlar" (Vygotsky, 1988: s. 157). Vygotsky'ye göre öğrenmede başarılı yöntemler geliştirmenin yolu, kavramların bireyin zihninde nasıl geliştiğini anlamaktan geçer. Kavramların öğrenilmesi alıştırma yapılarak gerçekleşmez, ancak çocuğun zihinsel gelişimi yeterli düzeye ulaştığında gerçekleştirilebilir. Öğrenme, bilimsel kavramların gelişmesi aşamasında karmaşık ilişkinin ortaya çıkartılması için gerekli süreçtir. Vygotsky, anlam oluşturma ve öğrenmede öykünmenin ve model almanın önemine işaret etmektedir. Kalıcı öğrenmede yetişkinlerin deneyimi ve kültürel çevrenin rolü kadar, akran etkileşiminin de önemli bir yeri vardır.

> Çocuğun gelişmesinde ise, öykünme ve öğretim önemli bir rol oynar. Bunlar, zihnin insana özgü niteliklerini açığa çıkarır ve çocuğu yeni gelişme düzeylerine eriştirirler. (...) biricik iyi öğretim biçimi, gelişmenin önünde giden ve onu yönlendiren öğretim biçimidir; öğretimin hedefi olgunlaşmışlardan çok, olgunlaşmakta olan işlevler olmalıdır. Örneğin aritmetik öğretimi için işlevlerin belli bir asgari olgunluk düzeyine ulaşmış olmaları gerektiğinden, bu öğretimin başlayabileceği bir en alt sınır belirlemek gereklidir (Vygotsky, 1988: s. 151-152).

Piaget'de bilişsel gelişim içten dışa doğru gerçekleşirken Vygotsky'de bu süreç dıştan içe doğrudur. Vygotsky'ye göre öğrenme toplumsal etkileşim sonucunda oluşur. Dil, kültür ve çevre bireyin gerçeklikle ilişkisini sağlayan önemli bir öğedir. Aydın'a göre Vygotsky'de gerçeklik insanın doğrudan temas ettiği bir şey değildir; gerçeklik, dil ve kültür aracılığıyla yapılandırılır (Aydın, 2012: s. 23).

Şimdi Vygotsky'de bilgi-dil ilişkisine bilgi felsefesi üzerinden bakmaya çalışalım. Bilgi, gerçeğin, hakikatin bilgisi olmayı amaç edinmesi bakımından, bilinecek olan şeyler olgulardır. "Bilmek, bir durumu, olguyu, ilişkileri çerçevesinde açıklamak, anlamak, onun tüm bağlantılarını, kategorilere ilişkin oluşumunu, yapısını gözler önüne sermek demektir. (...) Bir bilme edimini doğru önermelerden kurulu bir dille sonuçlandırmada, nesnesine uygun bilme yollarını dikkate almanın rolü çok büyüktür. Bu olmadığı takdirde, hakikatin bilgisinden söz edilemez" (Çotuksöken, 2010: s. 25). Çotuksöken'in bakış açısıyla Vygotsky'de dilin, insanın dünya ve gerçeklik ile ilişkisini sağlayan bir araç durumunda olduğunu söylemek mümkündür.

Şimdi de "köktenci yapılandırmacılık"ın öncüsü olan Ernst von Glasersfeld'in görüşlerine yer verelim. Von Glasersfeld, "Why Constructivism Must Be Radical" adlı yazısında, her tür insan bilgisinin bağımsız olarak var olan veya ontolojik nitelikteki gerçekliğin öyle ya da böyle doğru temsiline yaklaşabilmesine esas teşkil eden geleneksel düşünme tarzından ayrı düşünmenin radikal olduğunu ileri sürer. Von Glasersfeld'e göre deneyim her zaman özneldir. Fakat bu öznellik, sosyal şekilde niteleyebileceğimiz etkileşimlerin sonucu olarak öznelerarasılığın gelişmesine hiçbir şekilde engel olamaz. Dolayısıyla yapılandırmacılığa göre

bilimsel bilgi, belirli bir deneyim alanı bağlamında uygulanabilir olduğu kanıtlanmış kuramsal modellerden oluşur.

> Belirli bir bilimsel model, o anda elde bulunan en iyi model olsa bile, hedef aldığı sorunların çözümü için tek seçenek olarak görülmemelidir. Ayrıca, birden fazla çözüm söz konusu ise bu çözümlerin arasından yapılacak tercih, çözümün ontolojik açıdan "doğru" olduğu için değil, ekonomi, basitlik veya şıklık nedenine bağlı olarak yapılmalıdır. Yapılandırmacılık, doğruluktan ziyade uygunluk ve oluşturulan önceki modeller ile uyumluluğu yeğler. Yani, bilimsel modeller bir araçtır (Von Glasersfeld, 1998: s. 25).

Von Glasersfeld'de bilgi, gerçekliğin bir kopyasını üretmeye çalışmak yerine adaptasyon amacına hizmet etmektedir. Adaptasyon ise, kavramsal açıdan tutarlı ve kendi içinde çelişmeyen yapılar oluşturmaktır. Bu yönüyle Von Glasersfeld'in radikal yapılandırmacılığında pragmatizmin etkilerini görmek mümkündür. Bu başlık altında Dewey'den başlayarak yapılandırmacılığın bu üç öncüsünün görüşlerini özetlemeye çalıştık. İzleyen alt başlık altında da, onun felsefi temellerini sorgulamaya çalışalım.

3.2.2. Kant'ın Bilgi Felsefesi ve Matematik Görüşü Bağlamında Yapılandırmacılığın Felsefi Temellerine İlişkin Bir Soruşturma

Felsefi temellerinin pozitivizm[13] sonrası, "post-pozitivist" bir felsefi görüşe dayandığı ileri sürülen "yapılandırmacılık", öğrenmede yeni bir paradigma olarak kabul edilmektedir. Stephen C. Fleury'ye göre "(...) yapılandırmacılığı, iki felsefi temel ilke karakterize etmektedir. (...) Birincisi, bilgi etkin bir biçimde, öznenin bilişi tarafından yapılandırılır. Bu görüş, çocuğun gelişmesinde eğitimcilerin çoğunlukla kabul ettiği ve benimsediği bir görüştür. (...) İkincisi ise, (...) bilişin işlevi ontolojik gerçekliğin keşfi değildir, deneyimlenen dünyanın düzenlenmesidir" (Fleury, 1998: s. 157-158). Şimdi, Kant'ın bilgi felsefesini zemine yerleştirerek kimi gelişmiş ülkelerin eğitim sistemlerinde ağırlıklı olarak yer aldığı iddia edilen bu öğrenme kuramının felsefi temellerini tartışmaya çalışalım. Bilindiği gibi Kant'ın transandantal felsefesinde bilgi; hissetme yetisi (duyusallık), hayal gücü ve düşünme yetilerinin kendiliğinden yaptığı işbirliğinin sonucunda oluşur. Bilginin nesnesi, özneden bağımsız, yani öznenin dışında bir yerde değildir. Nesne, zihnin bilişsel etkinliğinin bir sonucu olarak kavramıyla birlikte zihinde kurulur. Bu bakımdan, *a posteriori* ya da *a priori* bilgi öznenin bilme yetisinin bir işlevi sonucunda ortaya çıkar. Kant'ta görü ve kavramın kendiliğinden yaptığı işbirliğinde empirik bilginin

[13] "Pozitivizm" terim olarak Auguste Comte tarafından felsefeye kazandırılmış bir kavramdır. Bilmeyi olguyla, olgusal olanla sınırlandırdığı için "pozitivizm", Latince etimolojisinden de yararlanılarak, Türkçede "olguculuk" olarak da adlandırılmıştır. Pozitivizim (olguculuk), "Araştırmalarını olgulara, gerçeklere dayayan, fizikötesi açıklamaları kuramsal olarak olanaksız, kılgılı olarak yararsız gören; deneyle denetlenmeyen soruları sözde soru olarak niteleyen felsefe doğrultusu" (Akarsu, 1998: s.136) olarak tanımlanmaktadır. Pozitivizm, felsefi anlamını Viyana Çevresi'nde gelişen bilim felsefesinden kazanacaktır. Ernst Mach, genel olarak fenomen-noumen ayrımını reddeder ve bilgimizin fenomenle sınırlı olduğunu, noumen alanı diye bir alandan söz edemeyeceğimizi, elimizde sadece empirik verilerin bulunduğunu, bilginin bilimle sınırlı olup, fenomenin noumenle ilgisinin kurulamayacağını belirterek pozitivizmin sınırlarını çizer. Pozitivistler, Kant'ın ünlü "görüsüz kavramlar boş, kavramsız görüler kördür" ifadesine dayanarak görüsüz, boş kavramlar alanı olarak metafiziği reddetmişlerdir (Ayer, 1970: s. 20, 78, 120).

malzemesinin *a posteriori manifold* iken, matematiksel nesnelerin malzemesi *a priori manifold* olduğuna birinci bölümde ayrıntılarıyla değinmeye çalıştık. Kant'ta hem *a priori* hem de empirik alanın bilgisinin nesnelliğini anlama yetisinin saf kategorilerinin mümkün kıldığını belirtelim. Bu bakımdan Kant'ın felsefesinde kategori öğretisi önemli bir yere sahiptir. "Peki, sıradan anlama yetisi nedir? O, bilmenin ve kuralları somut olarak kullanmanın yetisidir ve soyut olarak kuralları bilmenin yetisi olan kurgusal anlama yetisinden ayrılır" (Kant, 2002: §60). Çünkü anlama yetisi görüden gelen empirik malzeme ile deneyimi mümkün kılar. Bu işi de, düşünme formları, yani kategoriler yapar.

Kant'ta "kendinde şey" hissetme yetisi (duyusallık) yoluyla tezahürlerin (belirişlerin) malzemesini sağlamaktadır. Kant'ın "hissetmenin asıl karşılığıdır" (Kant, 1998: B45) dediği "kendinde şey" kavramını anlama yetisinin tümel olarak düşünmesi gibi bir faaliyetinin olması söz konusu olmadığını, bu kavramın daha çok aklın faaliyet alanı içerisinde olabilecek bir akıl kavramı olduğunu burada belirtelim. Kant'a göre zihin daima "kendinde şey" ile bizim aramızda filtre görevi yapar. Bu bakımından şeylerin oldukları gibi ya da kendileri bakımından bilinmesi olanaksızdır. "Kendinde şey"in bir anlam kazanması bu filtreden geçmesiyle mümkün olur (Akdoğan, 2013: s. 248, 251).

Şimdi radikal yapılandırmacılığın öncüsü Von Glasersfeld'in "gerçeklik" kavramının bir anlamının Kant'ın "kendinde şey" kavramıyla benzer olduğu görüşüne yer verelim, sonra da onun ileri sürdüğü gibi Kant'ta "kendinde şey"in ontolojik gerçeklik olup olmadığına bakmaya çalışalım.

> Yapılandırmacılığı anlamak için her şeyden önce "gerçeklik" kelimesinin olağan olarak iki anlamda kullanıldığını hiçbir zaman aklımızdan çıkarmamalıyız. Kelime bir yandan her tür bilişin ötesinde, Kant'ın "*Ding an sich* (kendinde şey)*"* şeklinde bulgusal kurgu olarak nitelediği gerçekliğe benzeyen ontolojik gerçekliği, diğer yandan hayat deneyimimizin "bilgi" olarak nitelediğimiz her şeyi üzerinden türettiğimiz yaşanmış ve somut gerçekliğini, yani uygulanabilir kabul edilen eylemler ve aklî faaliyetler ile uygulanmamış eylem ve düşünce örüntülerini kastetmektedir (Von Glasersfeld, 1998: s. 25).

Kant'a göre insan aklının doğasına yönelik bir araştırma, metafiziği bilim haline getirmek için bir girişimdir. Öte yandan ruhun yetilerinin ve aklın, bilginin oluşumundaki işlevselliği araştırılmadan ortaya konan her çaba, metafiziği bilim haline getirme girişimine katkı sağlamaktan uzak olacağı için boş bir uğraş olarak kalacaktır. Dolayısıyla transandantal felsefe, Kant'ın eleştirel düşüncesiyle insan aklının doğasına yönelik bir araştırma olarak, metafiziği bilim haline getirme girişimi olarak nitelendirilir. "Kant'ın eleştirel düşüncesini, töze dayalı bir ontoloji yerine, temsillere dayalı bir metafizik olarak değerlendirmek gerekir. Temsillere dayalı bir metafizik ise, kendinde-şeyin, ancak ruhun yetileri vasıtasıyla transandantal öğelerin kayıt ve koşullarına tabi olarak bilinebilmesi demektir" (Gözkân, 2002: s. 23). Buradan da Kant'taki "kendi başına şey" ya da "kendinde şey"in Von Glasersfeld'in görüşünün aksine ontolojik gerçeklik olmadığını görebiliyoruz. Gözkân'a göre "Kendinde-şey kavramı, kendisi itibariyle ayrılabilecek, yani kendisine ayrımlar yüklenebilecek ve parçalar cinsinden düşünülebilecek bir kavram değildir; çünkü malzemenin, tekil olarak ve parçaları cinsinden düşünülmesi ve kuruluşu, ancak uzay, zaman ve kategorilerin koşullarına tâbi olmakla mümkündür (...)" (Gözkân, 2002: s. 55). Dahası, kendinde şey tekil değildir, ancak kayıt ve koşul altına alınması durumunda tekilliğinden söz edilebilir. Öyleyse "kendinde şey" hissetme yetisinin

(duyusallığın) *a priori* formlarının koşulları dışındadır. Kant, "[z]amanda ve uzamda bulunan nesnelerden söz ettiğim zaman, kendi başına şeylerden söz etmiş olmuyorum, çünkü onlar konusunda hiçbir şey bilmiyorum (...)" (Kant, 2002: §52c) demektedir.

Matematik ve empirik bilginin malzemesinin farklılığına, bu iki alanın bilgisinin oluşumundaki temel farklılıklara ve ikisi arasındaki bağlantısal ilişkiye birinci bölümde geniş çapta yer vermeye çalıştık. Matematik, deneyimden bağımsız olmakla birlikte, empirik alanın, yani doğa bilimlerinin dilidir. Daha önce Kant'ta, "saf sentez" ve "empirik sentez" olmak üzere iki tür sentezin varlığından söz etmiştik. Doğa bilimlerinin bilgisi "empirik sentez"le mümkün olurken, matematiksel bilgi "saf sentez" sürecinden sonra oluşmaktadır. "Saf sentez", zaman ve mekân olarak "empirik sentez"den önceliğe sahiptir. Başka bir anlatımla, matematiğin empirik alanla ilişkisi "empirik sentez"i önceleyen "saf sentez"le kurulabilmektedir. Kant, transandantal felsefesinde empirik bilginin olanağının *a priori* koşullarını araştırmış ve göstermiştir. *A priori* ilkeler, asıl doğa yasaları olan dinamik ilkeler olarak, deneysel olmakla birlikte nesnel geçerli olan yargıların olanağının temelinde bulunurlar. Her ne kadar matematik doğa bilimlerinin yasalarını ifade etse de, Kant, kavramlarla inşa edilen akıl bilgisi olarak tanımladığı matematikle doğa bilimleri arasındaki felsefi farka şu şekilde vurgu yapar:

> Saf Matematik ve Doğa Bilimi, kendi güvenilirlikleri ve kesinlikleri için, bizim burada yaptığımız türden bir türetimi gerektirmezdi; çünkü ilki kendi apaçıklığına dayanır; ikincisi ise, her ne kadar anlama yetisinin saf kaynaklarından doğsa da, deneye ve deneyin tam doğrulamasına dayanır, bundan dolayı en sonda deneyin

> tanıklığını reddedemez, onsuz da olamaz; çünkü Doğa Bilimi, bütün kesinliğine rağmen, Felsefe olarak, hiçbir zaman Matematikle bir olamaz (Kant, 2002: §40).

Kant'ın "Copernicusçu devrim" dediği değişimin, onun bilgi felsefesindeki etkilerini açık bir biçimde görmek mümkündür. Daha açık bir deyişle, bu değişimde Antik Yunan'dan beri gelen öznenin nesneye uyumu ilkesinin yerini, nesnenin özneye zorunlu uyumu ilkesi almıştır. Kant'ta, dünyanın tezahürlerin (belirişlerin) bütünü olarak tanımlanması (Kant, 1998: A418/B446), dış dünyanın zihnimizdeki kavramlarla anlamlı hale geldiği anlaşılmaktadır. Kant, "(...) Doğa adını verdiğimiz görüngüler dünyasındaki düzen ve birlik, bizim ona verdiğimiz birliktir" (Kant, 1998: A125) sözüyle kategorilerin rolüne vurgu yapar.

Transandantal felsefede nesne ve nesnenin bilgisini oluşturmanın iki koşulundan birinin, nesnenin düşünülmesi, diğerinin ise nesnenin görüsel karşılığının ortaya konması olduğuna vurgu yaparak, Kant'ın felsefesinde bilginin görü ve kavram ayağının işlevselliğinin altını bir kez daha çizmiş olalım. Burada, anlama yetisinin tek başına bilme yetisi olmadığını, ancak akılla birlikte bilme etkinliğini gerçekleştirdiğini belirtmeden geçmeyelim. Aklın anlama yetisiyle birlikte oluşturduğu tüm teorik bilgi görüsel karşılıkla sınırlıdır. Demek ki, bilme yetisinin görü ayağı anlama yetisine malzeme sağlarken, aklın nesnesi de anlama yetisinin verileri olmaktadır. Kant'a göre bir nesne ancak, anlama yetisinin kategorileri aracılığıyla düşünülebilir. Düşünülen bir nesne ise ancak kavramlara karşılık gelen görüler aracılığıyla idrâk edilebilir (Kant, 1998: B166). Bu bakımdan Kant'ta bir nesneyi düşünmekle, bir nesneyi idrâk etmek aynı şey değildir. "(...) transandantal

düşüncede nesnenin ve bilgisinin ortaya çıkması için gerekli iki bileşen vardır: nesnenin (*Objekt*) düşünülmesini sağlayan kavram (*Begriff)* ve nesnenin görüsel karşılığı (*Gegenstand*)" (Gözkân, 2002: s. 32). Burada nesnenin görüsel karşılığı *a priori* ya da *a posteriori manifold* olurken, kavram da anlama yetisinin saf kategorileridir. Özellikle altını çizelim: Anlama yetisinin bu kavramları empirik değildir, salt kavramlardır. Bunlar, hissetme yetisine (duyusallığa) ait değildir; düşünmeye ve anlama yetisine aittir. Ayrıca bu kavramlar türetilmiş ya da oluşturulmuş kavramlar değil, temel durumundaki kavramlar olup anlama yetisi alanının bütününü kuşatırlar. İşte, hem matematiğin hem de empirik alanın kavramları anlama yetisinin bu saf kategorileri tarafından kurulur.

Kant transandantal felsefesinin temellerini, düşünen beni, yani özneyi merkeze alarak ve bilme yetilerinin tek tek analizini yaparak oluşturur. Geleneksel bilgi öğretilerinden farklı olarak, Kant'ın bilgi görüşünde en dikkat çekici olan öğe, bir akıl varlığı olan öznenin bilgiyi kuran bir etken olarak öne çıkmasıdır. Bu yaklaşım; bilginin, öznenin bilme yetileriyle olanaklı olması anlamına geldiğine, yani bilgide öznenin kurucu unsur olduğuna vurgu yapmaktadır. Yapılandırmacı öğrenme kuramının bilgide özneyi ön plana alma yaklaşımı ile Kant'ın bilgi felsefesi arasında benzerlikler yakalanmakta, bu açıdan ortak noktalarının olduğu ileri sürülmektedir. Fakat Kant'ta nesnel bilgi herkeste bulunan anlama yetisinin saf kategorileriyle olanaklı olurken, yapılandırmacı yaklaşım bilgisel doğruluğu bireysel deneyim, psikoloji, dil ve kültür üzerinden açıklamaktadır. Başka bir deyişle, yapılandırmacılık bilgiyi ve epistemik doğruluğu daha çok bireyin bilişselliğine dayanarak tanımlamaktadır. Dolayısıyla yapılandırmacılıkta gerçek ve hakikat gibi kavramlar öznelliğe dayandığı için bilgi de göreceli olmaktadır.

Burada, gerçeklik ve doğruluk kavramlarını bilgi felsefesi temelinde ele almaya ve pragmatizmin bu kavramlara yüklediği anlamlara bakarak yapılandırmacılığın felsefi temellerini yoklamaya devam edelim. Epistemik (bilgisel) doğruluk, diğeri de varlıksal (ontik) doğruluk, yani hakikat anlamındaki doğruluk olmak üzere iki tür doğruluktan söz edilebilir. Buradaki "hakikat" kavramı ile "gerçeklik" kavramı birbirine çok yakın gibi dursa da bilimlerin konu edindiği bilgisel doğruluk açısından ikisi arasındaki ayrımın yapılması önemlidir. Hakikat kavramı, olgusal varlık alanı durumundaki "gerçeklik" ile, metafizik, mitoloji ve sanat alanında yer alan, fakat somut bir gerçekliği olmayan varlık alanlarının tamamını kapsar. Bilgisel doğruluk anlamındaki doğruluğun bilen özneye bağlı olduğunu, bu tür doğruluğun, kendisini önermenin doğruluk-değeri olarak ortaya koyduğu için ilgili önermenin bir anlama da sahip olduğuna, fakat hakikat anlamındaki varlıksal doğruluğun, bir anlamda gerçekliğin özneden bağımsız olarak var olabilen varlığın bir özelliği olduğu için, gerçekliğin/hakikatin anlamından ya da anlamlılığından, anlamlı oluşundan söz edilemeyeceğine işaret etmek gerekir (Kutlusoy, 2006: s. 667). Buradan da, epistemolojinin ve bilimin tartışmalarının epistemik doğruluk üzerinde yoğunlaştığını anlıyoruz. Fakat günümüz epistemolojisi, doğruluk tartışmalarında, bilginin varlıksal temellerini dikkate almadığı iddiasıyla eleştirilerle karşılaşmaktadır. "Bilimdeki hızlı gelişmelerin etkisiyle bilim ve bilgi felsefelerinin felsefe alanında daha etkin bir konum kazanmalarının sonucu olarak, günümüzün doğruluk tartışmalarının içeriğinin ağırlıklı bir biçimde varlıksal değil de bilgisel doğruluğa ilişkin konulara/sorunlara kaydığı görülür" (Kutlusoy, 2006: s. 668). Konumuz açısından gerçekliğin var olma tarzlarından biri, yani ontolojik bir durum olduğunu, doğruluğun ise epistemolojik bir şey olması bakımdan bir önermenin ya da bir bilginin doğruluğundan söz edilebileceğini belirtelim.

Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına yakınlığıyla tanınan eğitim bilimci G. Wheatly'ye göre yapılandırmacılıkta doğruluk güvence altına alınamaz. "Biz doğruyu/doğruluğu bulamayız; sadece deneyimlerimizin işlevsel/yaşamsal bir açıklamasını verebiliriz" (Wheatly'den akt. Aydın, 2012: s. 87). Radikal yapılandırmacılığın öncüsü olan Von Glasersfeld'e göre bilimsel bilgi bize gerçekliğin bilgisini veremez. "Gerçekte, bilimsel bilginin, bize saltık gerçekliğin bir resmini verdiği, saltık gerçekliğe uygun olduğu, ona karşılık geldiği temellendirilemez" (Von Glasersfeld'den akt. Aydın, 2012: s. 81). Buradan da anlaşılacağı gibi yapılandırmacı öğrenme kuramının "bilgi", "gerçeklik" ve "doğruluk" anlayışları sorunlu görülmektedir.

Pragmatizm "Doğruluğu ve gerçekliği tek yanlı olarak yalnızca eylemlerin sonuçları ve başarıları ile değerlendiren felsefe öğretisi (...)" (Akarsu, 1998: s. 151) olarak tanımlar. Pragmatizm (pragmacılık), C. S. Peirce, J. Dewey ve W. James gibi düşünürlerin 19. yüzyılda ve 20. yüzyılın başında Amerika ve İngiltere'de geliştirdiği felsefi bir akımdır ve Yunanca etimolojisine baktığımızda "eylem" ve "yararlı" anlamını taşıyan "pragma" sözcüğünden geldiğini ve pratikle ilgili bir zihinsel etkinliği ifade ettiğini anlıyoruz. Dolayısıyla bir yaklaşım olarak pragmatizm birçok eğilimi kendinde barındırır. Pragmacılığın öncülerinden biri olan James'e göre, " (...) pragmacılık, bütün kuramlarımızı yumuşatır, bağlarını çözer ve her birini çalışmaya sokar. Esas itibariyle yepyeni bir şey olmadığı için, birçok eski felsefi yönsemelerle anlaşır" (James, 1986: s. 39-40).

Başka türlü son verilemeyecek olan metafizik tartışmaların yatıştırılması metodu olarak pragmatizm, bir tür nesnesiz hakikat teorisidir. James, "(...) benim pragmacılık adını verdiğim şey, bir ara bulucu, bir uzlaştırıcıdır (...)" (James, 1986: s. 58) sözüyle pragmacılığın hiçbir önyargısının ve dogmasının olmadığını, üstelik onun tamamıyla samimi olduğunu anlatmaktadır. Pragmatik metot, ilkelerden, kategorilerden, var sayılan zorunluluklardan başını çevirerek, deneye, olgulara ve sonuçlara bakma tavrıdır; bilginin zamanla değiştiğini iddia ederek bilimlerde kesin bilgiyi ve doğru bilgiyi olanaksız görmektedir. Pragmatizm çatışan savların üstesinden gelmek için, bu savlara ve sonuçlara bakarak göreceli hakikat teorisi geliştirmektedir. Hakikat, ne şekilde olursa olsun faydalı olan şeydir. "'Hakikat', kısaca söylemek lâzım gelirse, düşünürken bize faydası olan şeydir, (...)" (James, 1986: s. 80). Pragmatizme göre yaşamda yararlı olan iyidir, böylece doğruluk kavramı "yararlı"lık kavramı üzerine kurulur. "'Doğru' kelimesi, inanç alanında iyi olduğunu ispat eden her şeyin adıdır ve belirli sebepler dolayısıyla aynı zamanda iyidir" (James, 1986: s. 56).

Yapılandırmacılığın yorumcularından olan Marie Larochelle ve Nadine Bednarz; yapılandırmacılık, gerçekçiliğin bireyden bağımsız olarak varlık ve fenomen cinsinden kodlandığını kabul eden temel deneyci realist görüşleri kökten sarsmıştır, yapılandırmacılık bunu yaparken, bilginin, ontolojik gerçekliğin bir yansıması olduğunu ve dilin nesnel olarak bu gerçekliği işaret ettiğini iddia eden eski inançlara meydan okumuştur (Larochelle & Bednarz, 1998: s. 5) sözüyle yapılandırmacılığın felsefi temelinin post-pozitivizm ve pragmatizm üzerine kurulduğuna işaret etmektedir.

Kant ve Piaget'nin bilgi görüşlerinde benzer noktaların bulunduğu ileri sürülmektedir. Bu bakımdan, Kant'ın görüşleri üzerinden Piaget'nin görüşlerini yoklamayı, özellikle köktenci yapılandırmacılığın temsilcisi olan Von Glasersfeld'in "doğruluk" ve "gerçeklik" kavramlarını Kant'ın görüşleriyle karşılaştırmayı gerekli bulmaktayız. Bilindiği gibi Kant'ın bilgi görüşününün temelinde olan hissetme yetisiyle (duyusallıkla) düşünme yetilerinin işbirliğini yapılandırmacılığın en önemli öncülerinden olan Piaget'nin bilgi yaklaşımında göremiyoruz. Piaget'ye göre bilginin görü temelli olması olanaklı değildir. Piaget, bilgi görüşünü şu şekilde ifade eder:

> (...) bilginin çeşitli biçimleri, hiçbir zaman sadece duyumdan ya da algıdan türemez, bunların yanı sıra davranış şemalarından ya da çeşitli düzeylerdeki işlemsel şemalardan da türer ve bu şemaların ikisi de sadece algılara indirgenemez. (...) algı, duyumsal bilginin derlenmesinden ibaret değildir. (...) her türlü bilgimizin ya da en azından deneysel bilgimizin duyumsal kökeni olduğu yolundaki klasik ve basit görüşü, bu bölümün başında belirttiğimiz gibi "masal" olarak ele almak, konuyu abartmak sayılmaz. Bu tür görgül bir yorumun temel yanlışı, bireyin hareketlerini hesaba katmamasıdır. (...) (Bilginin oluşması), nesnenin sağladığı bilgiler ile öznenin hareketleri ya da işlemleri arasında bir işbirliğini gerektirir. Bilgiyi duyumsal köken varsayımının yaptığı gibi sadece edilgin bir kayıt rolüne indirgemeye çalışmak, bilgi, zekâ ve eylemin oluşturduğu sınırsız verimli yapının özelliğini budamak demektir (Piaget, 1980: s. 87-88).

Piaget'nin öncülüğünü yaptığı yapılandırmacı yaklaşıma göre bilgi, özne tarafından etkin bir biçimde yapılandırılmaktadır. Başka bir deyişle yapılandırmacılıkta öğrenen, öğrenmeye etkin bir biçimde katılarak bilgiyi yapılandırır, bilgi öznenin dışında değil tamamıyla öznenin bir ürünüdür, yani özne edilgin değil, etkindir. Anlaşılacağı gibi, hem Kant'ın bilgi felsefesinde hem de yapılandırmacılıkta bilginin

oluşumunda öznenin etkinliği merkeze alınmaktadır. Fakat, yapılandırmacı öğrenme anlayışıyla yapılandırmacı bilgi anlayışının farklı olduğunu, bu ikisinin kendi arasında mantıksal olarak zorunluluk ilişkisinin olmadığını düşünüyoruz. Her ne kadar yapılandırmacı bilgi anlayışının Kant'ın bilgi görüşünden etkilendiği ileri sürülse de, yapılandırmacı görüş genel olarak bilginin nesnelliğini yadsımaktadır. Bu yönüyle de Kant'ın bilgi felsefesinden ayrılmaktadır.

Yapılandırmacılık, matematiğin en temel nesnesi olan sayıların, bizden bağımsız olarak doğada var olan soyut nesneler olmadığı gibi, içeriksiz ya da anlamsız sözcükler olmadığını ileri sürmektedir. Bu yaklaşıma göre, sayma ve ölçme gibi temel zihinsel etkinlikler, insanın, yaşamındaki ihtiyaçları karşılama çabası sonucunda oluşmuştur. Yapılandırmacılık açısından baktığımızda, matematiğin binlerce yıl öncesiyle günümüzdeki durumu, matematiksel kavramların kökeninin insanın empirik yaşamında olduğunu kanıtlar niteliktedir. Piaget, "(...) yapısal mantıkla beraber matematik, tümdengelimsel tek bilim dalı. İçerisindeki her şey öznenin eyleminden gelir. İnsan yapımıdır" (Piaget, 1999b: s. 100) demektedir.

Konunun akışı içerisinde Kant ve Piaget'nin matematiksel bilgiye ilişkin görüşlerini karşılaştırmaya çalışalım. Bilindiği gibi Kant'ta sayı, aynı cinsten *a priori manifold*un, saf sentezlenmesinin birliğinden oluşur. Bu bakımdan matematiğin bilgisi deneyime dayanmaz. Yani, saf matematik saf *a priori* bilgi içerir, deneyimden elde edilemez. Kant, *Prolegomena*'da, "dış deney"in asıl fiziğin kaynağını oluşturduğuna, "iç deney"in ise *a priori* bilgi, saf anlama yetisi ve saf akıl bilgisi olduğuna işaret etmektedir (Kant, 2002: §1). Piaget'ye göre fiziksel bir deneyim

olduğu gibi, matematiksel-mantıksal deneyim de söz konusudur. Matematiksel bilgi, işte bu matematiksel-mantıksal deneyim üzerine kurulur. Piaget bu görüşünü şöyle ifade eder:

> (...) gerçekte iki tür deney vardır. (...) Görgül (fiziksel) dediğimiz deneyler ve mantıksal-matematiksel deneyler. Görgül deney, klasik deney kavramının karşılığıdır: Bu tür deney, bilgi edinmek için nesneler üzerinde eylem yaparak, bu nesnelerden soyutlama yoluyla edinilen deneydir. Örneğin, çocuk nesneleri eline alarak fiziksel deney yoluyla, bu nesnelerin değişik ağırlıklarını, özgül ağırlığı eş olan nesnelerin hacim ilişkilerini, özgül ağırlık değişikliklerini vb. kavrar. Öte yandan mantıksal-matematiksel deney, nesneler üzerindeki eylemden oluşmakla birlikte, nesnenin değil, eylemin soyutlanmasıyla elde edilir. (...) Örneğin, çocuk çakıl taşlarını sıraya dizdiği ve saydığı zaman, taşlar, bir eylemin etkisiyle sıralanırlar, (...) Öznenin kavradığı, taşlarının fiziksel özellikleri değil, sıralama ve toplama eylemleri arasındaki bağımsızlık ilişkisidir. (...) işte bu noktada, deney, nesnelerle değil, öznenin eylemleriyle ilgili olduğu için kesinlikle mantıksal-matematikseldir (Piaget, 1980: s. 73-74).

Anlaşılacağı gibi, Kant'ın sentetik *a posteriori* bilgi görüşü ile genel olarak Piaget'nin bilgi görüşü birbirine paralellik gösterse de, Kant'ın sentetik *a priori* bilgi görüşü Piaget'nin matematiğe ilişkin bilgi görüşünden farklıdır.

Köktenci (*radical)* yapılandırmacılık görüşüyle öne çıkan Von Glasersfeld'e göre "Her ne kadar bizim dışımızda, orada duran bir nesnel gerçekliğin bulunması olası olsa da, bilgi bu nesnel gerçekliği yansıtmaz. Bilgi açıkçası, bizim deneyimlerimiz tarafından oluşturulmuş, düzenlenmiş ve organize edilmiş bir dünyayı yansıtır (Von Glasersfeld'den akt. Aydın, 2012: s. 24). Von Glasersfeld'in bu yorumuna David

Grünberg'in "Gerekçelendirme ve Doğruluk" yazısında ele aldığı "*gerçekçi* doğruluk" kuramı üzerinden bakalım. Grünberg'e göre "Doğruluğun öznenin gerekçelendirmesinden bağımsız bir kavram olduğunu ileri süren görüş, *gerçekçi* doğruluk kuramı olarak adlandırılır. Öte yandan, doğruluğu, bir biçimde, gerekçelendirme ile özdeşleştiren görüşe, *gerçekçi-olmayan* doğruluk görüşü denir" (Grünberg, 2010: s. 33). Grünberg'e göre gerçekçi görüşü destekleyen durumlar vardır, fakat gerçekçi doğruluk kuramı doğruluk kavramını tanımlasa da doğruluk değerini saptayacak bir ölçüt vermemektedir (Grünberg, 2010: s. 35). Şimdi, sadece "gerçekçi doğruluk" tanımı çerçevesinde yapılandırmacılığın görüşüne bakmaya çalışalım. Doğa bilimlerinde deneye dayalı önermelerin doğruluğu bilimin yöntemleriyle saptanmaktadır. Eğer biz bir olguyu fiziksel olarak saptayabiliyorsak, bu tür olguları dile getiren önermelerin doğruluğundan söz edebiliriz. Başka bir deyişle, doğa bilimlerinde bir "p" önermesinin doğruluğu ancak ve ancak "p"nin dile getirdiği olguya uygunluğu ile mümkündür. Örneğin, "Van Gölünde 'x' ton tatlı su vardır" önermesinde, bilim gerçekten "x" ton tatlı suyun varlığını saptayabiliyorsa bu önerme bu koşullarda doğrudur. Bu tür olgusallığa ve uygunluk kuramına dayanan bilginin öznelliği olamaz. Dolayısıyla, eğitimde, özellikle doğa bilimleri söz konusu olduğunda ontolojik doğruluğa yapılandırmacı yaklaşım gözlüğü ile baktığımız zaman ciddi sakıncalarının olabileceğini görmekteyiz. Zira bilimsel eğitimin amacı, öğrenciye bilimin doğası ve bilimsel bilgiye ilişkin bir takım ölçütler kazandırmak olmalıdır. Bu açıdan bakıldığında, yapılandırmacı öğrenme kuramının nesnel bilgiyi yok sayması bilimsel yasaların ve kuramların geçerliliğine kuşku ile bakılmasına neden olabilir, dahası bilim denen etkinliğin yapıldığı zemini ortadan kalkabilir.

Şimdi de Kant'ın "doğruluk" kavramı çerçevesinde yapılandırmacılığın görüşünü değerlendirerek, bu öğrenme kuramının felsefi temellerine ilişkin görüşlerimizi ortaya koyalım. Kant, transandantal felsefesinde doğruluğun olanağının koşullarını sorgular, doğrunun ne olduğunu değil. Kant'a göre "doğruluk (*truth*) bilginin nesnesine uygunluğudur" (Kant, 1998: A191/B236). Kant, doğruluğun bu anlamını "nesnel geçerlilik (*objective validity*)" (Kant, 1998: A788/B816) olarak tanımlar. Buradan Kant'ta nesnel geçerliliğin, yargının nesnesine uygunluğu anlamına geldiğini anlıyoruz. Yargının nesnel gerçekliği ise, yargının her kişi için geçerliliği olması anlamına gelmektedir:

> (...) eğer bir yargı nesne ile uyuşuyorsa, o halde aynı nesne hakkındaki bütün yargılar kendi aralarında da uyuşmalıdırlar; (...) eğer bir yargıyı zorunlu olarak genel geçer kabul etmek için (ki bu hiçbir zaman algıya değil, altına algının konduğu saf anlama yetisinin kavramına dayanır). (...) Öyleyse nesnel geçerlik ve zorunlu genel geçerlik (herkes için geçerlik) birbirinin yerini alabilecek kavramlardır ve biz kendi başına nesneyi bilmiyorsak da, eğer bir yargıyı genel geçer, dolayısıyla zorunlu kabul ediyorsak, bundan nesnel geçerliğini anlıyoruz demektir. Bu yargı aracılığıyla, verilmiş algıların genel geçer ve zorunlu bağlantılılığı aracılığıyla nesneyi biliyoruz (başkaca, yani kendi başına nasıl olduğu bakımından bilinmez kalıyorsa da) (Kant, 2002: §18, 19).

Kant'ta her türlü bilginin doğruluğunun kaynağı anlama yetisinde bulunur. Böylelikle bilginin doğruluğu, bilginin nesnesine uygun olduğunda ve aynı zamanda bilginin formel mantığın yasalarıyla uyumlu olduğunda mümkündür. Kant'ta, yapılandırmacı görüşün aksine, bilginin doğruluğunu sınamak mümkündür. Empirik alanın bilgisinde yargının nesnesine gitmek olanaklıdır, dolayısıyla bu alanın doğruluğunu test etmekte sıkıntı yoktur. Tepe'ye göre, Kant'ın transandantal

felsefesinde, bilme yetisinin kendisini nesnelere değil, nesnelerin kendilerini bilme yetisine ve anlama yetisinin *a priori* formlarına uydurmaları sentetik *a priori* yargıların doğruluğunu mümkün kılmaktadır. "Kant'ın doğruluk görüşü bir anlamda geleneksel doğruluk anlayışı çerçevesinde yer almaktadır. Transendental doğruluk, nesne ile anlama yetisi arasındaki ilişkinin olanağının koşullarına ilişkindir" (Tepe, 2003: s. 71).

Kant'ın bilgi kuramında, sorununun kesinlikle dışdünya ve nesne ile doğrudan ilgili olmadığını söylemek mümkündür. "(...) onun asıl sorunu nesnenin bilgisinin onsuz olunamaz koşullarıdır. Ona göre 'gerçekliğin kendinde (an sich) ve türlü insana ait düşünsel kavrayış tarzlarından bağımsız haliyle ne olduğu sorusu, artık hiçbir şekilde yanıtlanamaz. Çünkü bu soruyla birlikte felsefe, kendisini yine dayanaktan yoksun soyutlamanın boş alanına yuvarlanmış hisseder; ayaklarının altındaki sağlam yer ve zemini kaybeder'" (Çotuksöken, 1998: s. 16). Transandantal felsefede insan zihninden bağımsız bir gerçekliğin cevabının olamayacağı gibi, insan zihni dışında bilginin gerçekleşmesi de olanaksızdır. Kant'ta anlama yetisinin her bilgisi kavramlara dayanan bilgidir. Bu bakımdan, anlama yetisinin kavramları olmadan düşünmek, bilmek ve yargıda bulunmak olanaksızdır. Görüldüğü gibi Kant'ın en özgün yanlarından biri de, bilgi ve doğruluk kavramlarını anlama yetisinin kategorilerini belirleyerek temellendirmiş olmasıdır.

Özetle; Kant'ta her türlü bilginin doğruluğunu mümkün kılan, anlama yetisinin *a priori* kavramlarıdır ve genel geçer bilgi bu salt kavramlar sayesinde gerçekleşir. Başka bir deyişle, Kant'ın kavramlar tablosunun tam olması ve bu tablonun bütün

anlama yetisini kuşatması sentetik *a priori* ve sentetik *a posteriori* bilginin doğruluğunu olanaklı hale getirir. Oysa, yapılandırmacılığın felsefi temellerinin post-pozitivizm ve daha çok pragmatizme dayandığı görülmektedir. Nesnesiz bir hakikat teorisi olarak pragmatizm ve diğer epistemolojik yaklaşımlar günümüz bilgi felsefesinde bilginin nesnesinin kaybolmasında etkin bir rol oynayarak nesneleştirmeyi imkânsızlaştırmaktadır. Doğruluk bilginin nesnesiyle uyuşması olduğuna göre, bilgi nesnesine gidilerek doğrulanabilir ya da yanlışlanabilir. Yapılandırmacılık ise bilgi ve doğruluk kavramlarına pragmatizm temelinde bakarak bu kavramları öznellik üzerinden açıklamaktadır. Dahası, yapılandırmacılığın bilgide nesnelliğin olanaksızlığına vurgu yapmasının eğitimde sonu gelmez tartışmalara neden olacağı düşünülürken, Kant'ın nesnel bilginin olanaklılığını temellendirmesi yeni bir yaklaşım geliştirmemizde bize sağlam bir zemin hazırlamaktadır.

3.3. Yetkin Bir Yaklaşım Geliştirmeye Doğru: Günümüzün Matematik Eğitiminin Temel Sorunlarına Çözüm Arayışları Bağlamında Eleştirel Değerlendirmeler

Dünyanın birçok eğitim sisteminde olduğu gibi Türk eğitim sisteminde de matematik eğitimi sorunlarla ve sıkıntılarla doludur. Matematik eğitimindeki bu güçlüklerin aşılması öncelikle matematiğin ne olduğunun bilinmesi, sonra da bu bilimin nasıl bir eğitim-öğretim yöntemiyle öğrenilebileceğinin araştırılmasıyla mümkün olabilir. Bu başlık altında, önce uluslararası sınav sonuçları bağlamında günümüz matematik eğitiminin sorunlarını anlamaya ve daha sonra da öğrenme kuramlarını eleştirel bir yaklaşımla ele alarak matematik eğitimine ilişkin kendi görüşlerimizi ortaya koymanın yolunu açmaya çalışacağız.

3.3.1. Günümüz Matematik Eğitimindeki Temel Sorunlar

Günümüz matematik eğitiminin sorunları birçok alanda dile getirilmektedir. Bu çalışma, matematik eğitiminin genel sorularını daha çok kavramsal düzeyde ifade etmeyi ve bu sorunların çözümüne de kavramsal bir yaklaşım geliştirmeyi amaç edinmektedir. Dahası matematik eğitiminde olması gerekenleri söyleyebilmek için, öncelikle olanları ortaya koymanın gerekli olduğunu düşünüyoruz. Bilindiği gibi mevcut eğitim sisteminin genelde bütün dalları özelde de matematik programı bilgi ağırlıklıdır, bu yönüyle mevcut program matematiksel düşünmeyi geri planda bırakmıştır. Bilgi, matematiksel düşünme için gerekli fakat yeterli değildir. Matematik eğitiminin temel amacı, öğrenciye temel cebir ve geometri bilgi becerisini

vermenin yanı sıra, matematiksel akıl yürütmeyi de geliştirmek olmalıdır. Nesin, "Matematik dersleri bilgi öğretmeye değil, araştırmaya, düşünmeye, kendi kendine öğrenmeye yönelik olmalıdır. Ve konular bir oyun biçiminde, öğrencileri sıkmadan sunulmalıdır"(Nesin, 2001: s. 14) sözüyle matematik eğitiminde olması gerekenlere işaret etmektedir. Çoktan seçmeli sınavlar için hazırlanan öğrencilerin durumu, matematik öğretiminin gerçeğini yansıtmaktadır. Bu sınavlara hazırlanan öğrenciler, daha çok belirli bir zamanın gerektirdiği işlem yapabilme becerisini kazanmayı hedeflemektedirler. "Matematiksel düşünme", "analiz-sentez yapma" ve "akıl yürütme" gibi düşünme etkinliklerini öğretimin/öğrenimin merkezine almaktan uzak, salt "yığma bilgi"ye ağırlık veren sınav sistemi öğrencileri "ezber"e yöneltmektedir. Ezberci eğitim, öğrencinin yaratıcı gücünü engellemektedir. Nesin, şu anki matematik öğretiminin durumunu şöyle ifade etmektedir:

> Eğitim sistemimiz, öğrencinin matematiği anlayarak öğrenmesine engeldir. Üniversiteye giriş sınavı bugünkü gibi olduğu ve toplumumuzda, başarmak için bir üniversite bitirmek düşüncesi var olduğu sürece, bunun böyle olması kaçınılmazdır. (...) Bugünkü anlayışla, eğitim sistemimiz ezberciliğe mahkûmdur, daha da acısı, en az ezbere dayanması gereken matematik bile ezbercilikten kurtulamaz. Ezbere dayanan matematik dersinde de gerçek matematik öğretilemez elbet. Bugün, ortaöğretimde "matematik" adı altında okutulan ders aslında matematik değildir (Nesin, 2001: s. 11-12).

Mevcut matematik öğretiminin gerçek durumunu "PISA 2009", "TIMSS 2011" ve "PISA 2012" raporları nesnel bir biçimde ortaya koymaktadır. OECD (*Organisation for Economic Co-Operation and Development*) tarafından üç yılda bir yapılan ve uluslararası en büyük eğitim araştırmalarından biri olan "Uluslararası Öğrenci

Değerlendirme Programı (*Programme for International Student Assessment = PISA*)*",* 2009 yılında "33"ü OECD ülkesi olmak üzere toplam "65" ülkenin katıldığı geniş bir eğitim araştırması yapmıştır. Yine aynı yılda, daha sonra "9" ülkenin katılımıyla PISA tarafından ek bir çalışma yapılmıştır. Fakat, bu rapor, esas uygulamaya katılan 65 ülkedeki toplam "475460" öğrencinin verileri temel alınarak hazırlanmıştır. PISA 2009 raporu, bu projeye katılan ülkelerdeki öğrencilerin "matematik", "fen" ve "okuma becerileri" alanlarındaki başarı düzeylerini göstermektedir (PISA, 2009: s.1-6).

PISA matematik alanında; öğrencilerin farklı durumlarda matematik problemleri oluşturma, formülleştirme, matematik problemlerini çözerken ve yorumlarken fikirleri analiz etme, akıl yürütme, bir başka deyişle matematiksel düşünme etkinliği üzerinde durmaktadır. Bu amaçla 15 yaş grubu öğrencilerinin, basit matematiksel işlem yapabilme, bir problemi çözmek amacıyla farklı düşünme yöntemlerini bir araya getirme ve kullanma becerileri ölçülmüştür. PISA, "matematik okuryazarlığı"nı "(...) matematiğin önemini tanımlama ve anlama, sağlam temellere dayanan yargılara varma, yapıcı, ilgili ve duyarlı bir vatandaş olarak kendi ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde matematikle ilgilenme ve matematiği kullanma konularında bireyin kapasitesi" (OECD'den akt. PISA 2009: s. 101) olarak tanımlanmaktadır. "Tablo 7" PISA 2009 programına katılan ülkelerin "matematik okuryazarlığı" düzeylerini göstermektedir.[14] Tablo 7'ye göre, PISA 2009 "matematik okuryazarlığı" en yüksek ortalama puanıyla OECD üyesi olmayan Şanghay-Çin (600) ve Singapur'un (562) ortalamaları PISA 2009 OECD ortalaması olan 496 puanın üzerindedir. Bu araştırmada 496 puan "yeterlik düzeyi" olarak kabul

[14] Bkz. "Ekler" Tablo 7.

edilmiştir. Ortalamanın üzerinde yer alan diğer OECD ülkeleri Finlandiya (541), İsviçre (534), Japonya (529), Kanada (527), Hollanda (526), Yeni Zelanda (519), Belçika (515), Avustralya (514), Almanya (513), Estonya (512), İzlanda (507), Danimarka (503) ve Slovenya'dır (501). OECD ülkeleri arasında en yüksek puan alan ülke ile en düşük puan alan ülke arasında "128" puanlık bir fark vardır. Türkiye, "matematik okuryazarlığı" ortalama "445" puanla OECD ortalamasının (496) altında yer alarak, OECD ülkeleri içerisinde 31. sırada, tüm ülkeler içerisinde ise 41. sıradadır. Başka bir ifadeyle, Türkiye'deki 15 yaş grubu öğrencilerin "matematik okuryazarlığı" yeterlikleri OECD ortalamasının oldukça gerisinde kalmıştır (PISA 2009: s. 16).

Kimi ülkelerin matematik ve fen eğitimine ilişkin kapsamlı bilgi veren başka bir araştırma da "Uluslararası Eğitim Başarısını Değerlendirme Kuruluşu (International Association for the Evaluation of Educational Achievement = IEA)" tarafından dört yılda bir 4. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematik ve fen başarısını ölçmeye yönelik kapsamlı bir araştırma olan "Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Bilgisi Çalışması (*Trends in International Mathematics and Science Study = TIMSS*)" adı altında yapılan araştırmadır. TIMSS'in beşinci araştırması 2011 yılında yapılmıştır. Bu araştırmaya 4. sınıflar düzeyinde toplam 50 ülke, 8. sınıflar düzeyinde de toplam 42 ülke katılmıştır. Matematik alanında 8. sınıf öğrencilerinin "sayılar", "cebir" ve "geometri"; 4. sınıf öğrencilerinin "sayılar", "geometrik şekiller", "ölçüler" ve "veri gösterimi" konuları kapsamında bilgi düzeyleri, uygulama yapabilme ve akıl yürütme becerileri ölçülmüştür. "Ekler" kısmında verilen tablolar her iki sınıf seviyesinin matematik başarı düzeylerini göstermektedir.

Tablo 8'e göre, Türkiye 4. sınıf düzeyinde "469" puanla 50 ülke içerisinde 35. sırada yer almıştır.[15] TIMSS ölçek ortalaması olan 500 puanın altındadır. Tablo 9'a göre de Türkiye 8. sınıf düzeyinde "452" puanla, 42 ülke içerisinde 24. sırada yer almıştır.[16] TIMSS ölçek ortalaması olan ise 500 puan altındadır. Her iki tablo da Türkiye'nin 4. ve 8. sınıf düzeyindeki matematik eğitiminin seviyesini göstermektedir.

PISA 2012 çalışmasına ise 4848'i Türkiye'den olmak üzere, toplam 65 ülkeden 15 yaşında yaklaşık 28 milyon öğrenciyi temsilen 510 bin civarında öğrenci katılmıştır. PISA 2012'de ölçülen temel yeterlik "okur-yazarlık" başlığı altında ele alınmaktadır. Matematik özelinde bu yeterlik; verilen bir problemi matematik diliyle kurgulama, matematiksel bilgi-işlem ve muhakeme ile matematiksel problemleri çözme ve elde edilen sonucun gerçek yaşama uygunluğuna karar verme gibi boyutlarda ölçülmektedir. Bu uygulamada ilk kez öğrencilere sunulan öğrenim olanaklarının matematik özelinde ayrıntılı olarak ele alındığı görülmektedir. Bu amaçla öğrencilere farklı boyutlu soru örnekleri gösterilerek, bu sorular ya da benzerleriyle ne sıklıkla karşılaştıkları sorulmuştur. Matematik programı kapsamında hazırlanan sorular matematik öğrenim olanaklarını "uygulamalı matematik", "formel matematik" ve "sözel problem" olmak üzere üç temel eksende ele almayı amaçlamaktadır (PISA 2012: s. 10, 27, 29). "Tablo 10"a göre, PISA 2012'de ilk üç sırada Çin (Şanghay) (613), Singapur (573), Çin (Hong Kong) (561) yer alırken, Türkiye PISA 2012'de 65 ülke içerisinde "448" matematik puanı ile 44. sırada yer almaktadır[17], OECD ortalaması ise "494" puandır. Türkiye PISA 2009'daki "445" matematik puanı ile 65 ülke arasında Sırbistan'ın bir üstünde, 41. sırada yer alırken, PISA 2012'deki puanı

[15] Bkz. "Ekler" Tablo 8
[16] Bkz. "Ekler" Tablo 9
[17] Bkz. "Ekler" Tablo 10

ile Sırbistan'dan bir sonraki sıra olan 44.sıraya inmiştir. Burada altı çizilmesi gereken önemli bir noktayı da belirtelim: Bu çalışmada öğrenciler OECD genelinde matematik derslerinde "sözel problemler" ve "uygulamalı matematikle" "bazen" karşılaştıklarını belirtirken, formel matematikle ilgili soru ve konularla "daha az" karşılaştıklarını belirtmişlerdir. PISA 2012'de yüksek başarı gösteren Doğu Asya ülkelerinde ise durum tam tersidir. Bu ülkelerdeki öğrenciler, diğer ülkelerdeki öğrencilerden daha fazla formel matematik gördüklerini ifade etmektedirler (PISA, 2012: s. 30).

Bu dört tablo, çok somut bir biçimde belli seviyelerdeki matematik eğitimine ilişkin bilgi verse de , ülkelerarası sıralamada Türk eğitim sisteminin genelinde matematik eğitimi seviyesinin diğerleri arasında son sıralarda yer aldığını göstermektedir. Başka bir anlatımla bu somut verilere bakarak, matematik eğitiminin temelinde olması gereken matematiksel düşünme ve akıl yürütme gibi düşünsel etkinliklere yeteri kadar yer verilmediğini, bunun yerine belli kalıplar ve kurallar verilerek matematik öğretimi yapılmaya çalışıldığını söylemek mümkündür.

3.3.2. Belli Başlı Öğrenme Kuramlarına Genel Bir Bakış

Bu başlık altında öğrenmenin doğasını ve sonuçlarını açıklamaya çalışan temel öğrenme kuramlarına önce genel olarak değineceğiz; sonra da davranışçı kuramı sorgulamaya çalışacağız. Öğrenme, genel anlamda bir etkileşim sonucunda kişide meydana gelen düşünce, duygu ve davranış değişikliği olarak tanımlanabilir. Bu değişikliğin nasıl oluştuğu konusuna farklı açılardan bakan görüşler, "davranışçı

(geleneksel)", "bilişsel", "duyuşsal" ve "nörofizyolojik" temelli öğrenme kuramları olarak dört temel kuram altında toplanmaktadır (Özden, 1998: s. 21).

Şimdi bu kuramları kısaca tek tek ele alalım. Davranışçı kuramlar, öğrenmenin, uyarıcı ile davranış arasında bir bağ kurularak gerçekleştiğine vurgu yaparlar. Bu kuramın temelinde yaparak öğrenme esastır. Dolayısıyla öğrenme için pekiştirme, tekrar yapma ve güdülemenin çok önemli bir işlevselliği vardır. Bilişsel kuramcılar, öğrenmenin doğrudan gözlemlenemeyen içsel bir süreç olduğunu ileri sürerler. Bu yaklaşıma göre, öğrenme, bir anlam yükleme çabasıdır ve kişinin daha önceki öğrendikleri üzerine inşa edilir. Bilginin, öğrencinin çevresi ve öğretmeniyle karşılıklı etkileşimleri sonucunda oluşması bakımından, öğretmen bir otorite olmaktan daha çok yönlendiricidir. Duyuşsal kuramlar, öğrenmenin doğasından daha çok öğrenmenin "benlik-ahlâk" gelişimi gibi duyuşsal sonuçlarıyla ilgilenirler ve eğitimin temel hedeflerinin öğrencide, sağlıklı benlik ve ahlak gelişimine katkı yapmak olduğuna vurgu yaparlar. Nörofizyolojik temelli (beyin temelli) öğrenme kuramları öğrenmeyi fizyolojik bir değişim olarak tanımlarlar. Bu kurama göre öğrenme ve anlam yükleme, nöronlarda meydana gelen yeni iplikçiklerin oluşması demektir. Yani öğrenme, beyinde oluşan biyokimyasal bir değişmedir (Özden, 1998: s. 21, 22, 24, 29, 35, 36, 47, 48). Geleneksel yaklaşım, "öğrenme" kavramını "öğretme" temelinde düşünür. Nasıl öğrenileceğinden daha çok nasıl öğretileceğini sorunsallaştırması bakımından, öğrenmede sürece değil sonuca odaklanır. Davranışçı yaklaşım öğrenmeyi, tek tip ders kitabı ve yetiştirilmesi gereken bilgi ağırlıklı müfredat sınırları içinde planlamaktadır. Bu anlayış çerçevesinde, bireyin, böyle bir öğrenme ortamında yeteneklerini ortaya koyması ve geliştirmesi güçleşmektedir. Öğrencinin edilgen, öğretmenin etkin olduğu geleneksel öğrenme ortamlarında bilgi

öğretmen tarafından aktarılır, öğrenci dinleyerek bilgiyi alır. Bu bakımdan öğretim/öğrenim; öğretmen, kitap ve müfredat merkezlidir. Aydın'a göre davranışçı yaklaşımda, doğru, nesnel, genel geçer bilgiye ulaşma ideali vardır. Dolayısıyla öğretmenin, kesin ve doğru bilgiyi öğrenciye aktarmak ve beceri kazandırmak gibi sorumlulukları vardır. Dahası öğretmenin nesnel bilgiyi temsil etmesi, ona otorite kazandırmaktadır. Ayrıca öğretmen, öğrenme sonuçlarını değerlendirmekle yükümlüdür (Aydın, 2012: s.129-130).

Şimdi Dewey'nin görüşleri üzerinden davranışçı yaklaşımlara ve bu yaklaşımların uygulama alanları olan geleneksel okul anlayışlarına bakmaya çalışalım. Dewey, geleneksel ve ilerlemeci okul anlayışlarını geniş çaplı olarak karşılaştırır. Geleneksel okul anlayışı, geçmişte işe yaramış temel bilgi, beceri ve davranış standartlarını öğrenciye aktarmayı hedef edinir. Bu anlayış özünde yukarıdan ya da dışarıdan zorlamaya dayanır. "Erişkinlerin standartlarını, konularını ve yöntemlerini, erişkinliğe yavaş adımlarla ilerlemekte olan gençlere zorla kabul ettirmeye çalışır" (Dewey, 2011: s. 21). Erişkinlere ait ürünler ve gençler arasındaki deneyim farkının büyük olması, öğretilenlerin geliştirilmesini olanaksızlaştırır. Bütün deneyimlerin itici bir güç oluşturması bakımından, eğitimcinin görevi deneyimin hangi yöne doğru gittiğini görmektir. Dewey, geleneksel okul anlayışları okulu, "Sıralardan, karatahtalardan ve küçük bir okul bahçesinden oluşan okul ortamının yeterli olduğu varsayıldı" (Dewey, 2011: s. 49) sözüyle davranışçı öğrenme anlayışında öğrenme etkinliğinin yaşamdan kopuk olduğuna işaret etmektedir. Öğrenci konuyu en azından sınavı geçecek kadar öğrenir. Daha sonra öğrenildiği kabul edilen şeyler, gerçek yaşam koşullarında ortaya çıkmamaktadır. Çünkü, "(...) ilgili konu tecrit içerisinde,

diğer şeylerden yalıtılmış bir şekilde öğretilmiştir; adeta su geçirmez bir bölmeye konulmuştur" (Dewey, 2011: s. 58).

Davranışçı kuram; "öğretmen merkezli" olmasıyla, öğreneni edilgin kılmasıyla, süreçten daha çok sonuca odaklanmasıyla, öğretimi salt ders kitaplarıyla sınırlamasıyla, öğretimde öğrenenin öğrenme tarzlarını, ilgilerini, yeteneklerini ve hazır bulunuşluk düzeyini yeteri kadar dikkate almadığı gerekçesiyle eleştirilmektedir.

3.3.3. Davranışçı ve Yapılandırmacı Öğrenme Kuramlarının Karşılaştırılmasından Kantçı Bir Matematik Eğitimi Yaklaşımına Doğru

Geleneksel davranışçı kuramlarla ve bilişsel temelli gördüğümüz yapılandırmacı kuram arasında bilginin oluşumu, bilginin nesnelliği, nesnel gerçeklik, öğrenme, okul, öğretmenin rolü gibi konularda dikkate değer farklılıklar görülmektedir. Bu alt başlık altında, öğrenmenin doğasına ilişkin farklı yaklaşımları olan özellikle bu iki temel öğrenme kuramını kısaca karşılaştırmaya çalışacağız. Kant'ın görüşleri temelinde matematik eğitiminde bir yaklaşım denemesinin genel olarak çerçevesini oluşturmak için bu karşılaştırmanın gerekli olduğunu düşünüyoruz. Daha önce de ifade edildiği gibi, geleneksel yaklaşımın felsefi temellerinde pozitivizmin etkilerini görmek mümkündür. Bu kurama göre bilgi, öğrenenden bağımsız olarak var olan nesnel gerçekliğin bilgisidir. Dolayısıyla, gerçeklik ile bilgi arasında şaşmaz bir uygunluk söz konusudur. Bu bakımdan öğrenen gerçekliği oluşturmaz, keşfeder. Davranışçı kuramlar yapılandırmacı yaklaşımdan farklı olarak, bilgideki nesnelliğe,

ontolojik olarak da bireyin dışında nesnel gerçekliğin var olduğuna vurgu yaparlar. Özden'e göre geleneksel yaklaşımlar; bilginin kesin olduğu, eğitimin öğrenciye bilgi yüklemek için verildiği, bilginin gelecekte kullanılmak için edinildiği ve bilgilenmenin bilginin aktarılmasıyla gerçekleştiği gibi bilginin doğasına ve eğitimdeki rölüne ilişkin belli kabullenmeleri vardır (Özden, 1999: s. 73-74).

Yapılandırmacı öğrenme kuramı; öğrenmede öğrencinin ilgi ve yeteneklerini merkeze aldığı için öğrenci merkezli oluşuna, sürekliliğe vurgu yapmasından dolayı bütünleştirici, bağlamsal ve gelişimsel yapısına, ayrıca öğrenmede güdülemenin anahtar bir rol aldığına güçlü bir biçimde vurgu yapmaktadır. Geleneksel yaklaşım "öğretmen merkezli" bir anlayış çizgisinde görünürken, yapılandırmacılıkta öğretmen otoriter bir simge olmaktan daha çok öğrenme sürecinde bir rehberdir. Dolayısıyla öğretmen, "öğretmeyi öğretmek" yerine "öğrenmeyi öğretme" ilkesini temel alarak ve öğrenme ortamında öğrenciyi etkin kılarak işbirliğine dayalı bir öğretimi hayata geçirir. Öğretmen, bilgiden daha çok düşünmeye odaklanması bakımından, açık uçlu sorularla öğrencinin sorgulama becerisini geliştirmeyi amaç edinir. Bilgi teknolojilerinin önemi yapılandırmacı kuramda daha çok öne çıkmaktadır, öğretmen bilgi teknolojilerini bilginin yapılandırılmasında, yaşamla ilişkilendirilmesinde etkin ve amaca yönelik bir biçimde kullanır. Dahası öğretmen ders ortamını farklılaştırmak, zenginleştirmek amacıyla ders planını öğrencinin ilgi, yetenek ve öğrenme tarzlarını dikkate alarak yapar (Aydın, 2012: s. 66-68).

Davranışçı yaklaşım bilgide nesnelliğin olanaklılığına vurgu yaparken, yapılandırmacılığın genel geçer bilginin olanaklılığı konusunda ciddi çıkmazlarının

olduğunu görmekteyiz. Bilimsel bilginin gelişimi ve günümüzdeki düzeyini düşündüğümüzde davranışçı kuramın bilginin doğasına ilişkin daha sağlam bir duruşunun olduğunu ileri sürmek mümkündür. Yapılandırmacılık, bilgide özneyi ön plana alarak eğitim-öğretimde özgün bir açılım geliştirmekle birlikte, nesnel bilginin olanaksızlığına vurgu yapmasıyla felsefi temellerini dayanaksız bırakmıştır. Gerçekliği, "Bilimsel araştırmalarda her türlü öznel öğenin karşısında nesnel olarak geçerliliği olan şey" (Akarsu, 1998: s. 85) olarak düşündüğümüzde, yapılandırmacı yaklaşımın gerçeklik görüşü bilimsel çalışmalarda çok ciddi çıkmazlara neden olabilir. Üstelik, yapılandırmacılığın bu çıkmazların nasıl aşılacağı konusunda tatminkâr bir girişimi ve açıklaması yoktur. Burada, matematiğin doğasına bakıldığında, matematiksel önermelerin niceliksel ya da mantıksal olarak zorunlu bağlantıları ifade ettiklerini, zorunlu ilişkiler alanı olan matematiksel doğruların nesnel gerçekliğini belirtelim.

Önceki başlıklar altında da vurgulandığı gibi yapılandırmacılığın eğitime ilişkin kavramlara daha çok pragmatizm temelinde bakması Kant'ın görüşleri temelinde bir matematik eğitimi yaklaşımı geliştirme girişimimize güçlü dayanaklar sağlamaktadır. Bu bakımdan, bu bölümdeki hedefimiz; matematik eğitim-öğretimini Kant'ın görüşleri temelinde ele almak ve onun görüşleri doğrultusunda matematik eğitmine ilişkin yetkin bir yaklaşım geliştirmeye çalışmaktır. Daha önce de belirtildiği gibi doğruluk, önermenin nesnesine uygunluğu anlamına gelmektedir. Bilgi her zaman bir şeyin bilgisidir. "(...) her bilginin nesnesi, ya da bilinen, bilenin keşfettiği ve-başarılı-başarısız-kurduğu bir bağlantıdır" (Kuçuradi, 1995: s. 100). Bir önermenin bilgi olabilmesi için nesnesi olması gerekir. Bilginin nesnesi ise bilme konusu yapılan şeydir. Nesnesi olmayan önermeler bilgisel önermeler değildir. Bilgi, nesnesi olduğu

için doğrulanabilir ya da yanlışlanabilir. Ayrıca, doğrulanabilirlik bir ölçüt değil, bir sonuçtur. Pragmatizm, bilginin nesnesini göz ardı ederek önermelerden hareket etmektedir. Başka bir deyişle pragmatizm bilme etkinliğine değil, önermeye bakmaktadır. Dolayısıyla pragmatizm, bir tarafı ya da diğerini haklı çıkarmak üzere, 20. yüzyılda bilginin nesnesinden koparılmasında ve bilgi nesnesinin kaybında önemli rol oynamıştır. Bu anlayışın, bilginin doğasına ilişkin görüşleri etkilemesinin bir sonucu olarak, "kesin bilgi" ve "doğru bilgi" edinme etkinliği kuramsal olarak olanaksız görmektedir. Bu gibi epistemolojik yaklaşımlar eğitimde bilginin nesnesizleştirilmesine yol açmaktadır. Bu bakımdan, İoanna Kuçuradi'nin deyiş biçimiyle günümüz epistemolojisi bilginin nesnesini yeniden canlandırmak zorundadır. Bunun için yeni bir ontolojiye gerek vardır. Bilginin nesnesi yeniden canlandırılmadan, günümüzün bilgi felsefesi günümüz dünyasının ihtiyaç duyduğu doğru teşhis, doğru açıklama, doğru değerlendirme için gerekli araçları belki de elde edemeyecektir (Kuçuradi, 1995: s. 102).

Kant'ın görüşleri temelinde matematik eğitimi yaklaşımının ana hatlarına geçmeden önce, bu iki temel öğrenme kuramını kısaca karşılaştırmayı gerekli gördük. Sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı zemininde olan Kantçı yaklaşım; yapılandırmacı yaklaşımın öğrenene ve öğretmene biçtiği rol, öğretim araç-gereçlerinin tanımı, öğretim yöntem ve tekniklerine ilişkin zengin görüşüyle desteklenebilir. Çalışmamız; uygulamada her iki öğrenme kuramının yaptıklarını nesnel bir biçimde ve eleştirel bir yöntemle ele alarak Kant'ın insan, bilgi ve eğitim görüşleri zemininde, felsefi dayanakları sağlam, yetkin bir yaklaşım geliştirmeyi amaç edinmektedir.

Kant'ın epistemolojisinde bilgi, bilme yetilerinin tesis ettiği nesnenin ve kavramının bilgisi olarak sentetik yargılar biçiminde ortaya çıkmaktadır. Kant'ın bilgi kuramında sınanmış, nesnesine varılmış, doğrulanmış bilgi genel geçer bilgidir ve bilimlerin bilgisi daha çok sentetik yargıların oluşturduğu bilgiler alanıdır. Eğitim-öğretimin genelinin sentetik yargılar alanıyla ilgili olduğu düşünüldüğünde bilginin, bilmenin ve öğrenmenin yolu kavramların anlamlarını öğrenmekle mümkündür. Kant'ın nesne, kavram bilgi ve doğruluk ilişkisini sentetik yargıların olanaklılığı temelinde geniş kapsamlı araştırması ve açıklamasının, geliştirmeye çalışacağımız yaklaşıma sağlam temeller oluşturduğunu düşünüyoruz. Bu bakımdan matematik eğitimine ilişkin yetkin olabilecek bir deneme, sentetik *a priori* yargıların olanaklılığı temelinde ve "kavramın inşası"nı nesnesiyle birlikte merkeze alan bir yaklaşım olmalıdır.

3.4. Kant'ın Matematik Görüşü Temelinde Yetkin Bir Matematik Eğitimi Yaklaşımı Geliştirme Denemesi

Daha önceki başlıklar altında popüler bir öğrenme kuramı olarak kabul edilen yapılandırmacılığın felsefi temellerini eleştirdikten sonra eğitim-öğretim açısından ne davranışçı kuramın ne de yapılandırmacılığın her yönüyle kabul edilebilir tek bir kuram olmadığı sonucuna varıldı. Yapılandırmacı öğrenme kuramı Kant'ın görüşleri temelinde sorgulandı ve böylelikle nesnel bilginin sentetik *a priori* ya da sentetik *a posteriori* yargıların olanaklılığı temelinde mümkün olabileceği görüldü. Dahası, Kant'ın eğitim görüşünde "ilke"lerin ve "kavram"ların merkezi bir konuma sahip olması, genelde eğitimde, özelde de matematik eğitiminde kavram temelli

öğrenime/öğretime vurgu yapmamıza olanak sağladı. Ayrıca Kant'ın matematiği sentetik *a priori* yargılar alanı olarak temellendirmesi, yetkin bir yaklaşım geliştirmemize zemin olabilecek geniş çaplı bir açılımı da sağlamış oldu. Şimdi, Kant'ın görüşlerine dayanarak matematik eğitimine ilişkin kendi görüşlerimizi ana hatlarıyla ifade etmeye çalışalım.

3.4.1. Matematik Eğitiminde Kant'taki *Universitas* Saf Kategorisinin İşlevselliği

Anlama yetisi görmeyen fakat düşünen bir yetidir ve bu yetinin saf kavramları matematiksel bilginin evrenselliğini, kesinliğini, zorunlu olmasını ve dahası nesnelliğini mümkün kılar. Demek ki, matematiksel bilgi empirik kaynaklı olmadığı gibi öznel de değildir. Kant'ta matematiksel bilgi, görü temelli olarak öznenin etkinliğinin bir ürünüdür ve matematiksel yargıların oluşumunda görü ayağının ilk aşama olması, hissetme yetisine (duyusallığa) önemli bir rol sağlar. Kant, bu rolün önemini şu şekilde ifade eder:

> Eğer sizde *a priori* görünün bir gücü var olmasaydı ve eğer bu öznel koşul, biçimi açısından aynı zamanda, yalnız bu dış görünün nesnesinin kendisini olanaklı kılan evrensel *a priori* koşul altında da olmasaydı; eğer nesne (üçgen), özne olarak sizinle, herhangi bir ilişkiden ayrı olarak kendinde bir şey olmasaydı, nasıl diyebilirdiniz ki bir üçgenin yapımı için öznel koşullar olarak sizde zorunlu olarak varolması gereken şeyin, üçgenin kendisine zorunlu olarak ait olması gerekir (Kant, 1998: A48/B65).

Birinci bölümde işaret ettiğimiz gibi, transandantal felsefede matematiksel bilgi sentetik *a priori* yargılarda ortaya çıkmaktadır. Yine birinci bölümde analitik

yargıların nesneyi tesis etme işlevselliğinin olmadığını, dolayısıyla bilgimizi genişletmeyen, yani öğretici olmayan bu tür önermeler alanından bilimlerin bilgisinin elde edilemeyeceğine vurgu yapmıştık. Sentetik yargıların nesnenin ontolojik mekânı olmaları bakımından nesnenin kurulumunu gerçekleştirirler. Başka bir anlatımla, Kant'ta "sentetik yargı olmak" demek "nesne tesis etmek" demektir. Kant'ın felsefesinde sayı *a priori* inşa edilebilen bir nesne ve bir kavram olarak sentetik yargının oluşmasıyla olanaklı olur. Çünkü, nesne ve kavram sentetik yargı içinde birlikte yer alırlar. Burada, Kant'ta matematiğin saf görü zemininde inşa edilmesi bakımından, matematiğin kavramlarının görü temelli kavramlar olduğunu tekrar belirtelim. Daha önce de birkaç kez işaret ettiğimiz gibi Kant'ın transandantal felsefesinde anlama yetisinin *a priori* kavramları olmadan hiçbir bilgi oluşmaz. Yeri gelmişken Kant'ın kavramı "empirik (*empirical*)" ya da "saf kavram (*pure concept*)" olarak ikiye ayırdığını, kaynağı yalnızca anlama yetisinde olan kavramı "*notio*" olarak, "*notio*"lardan oluşan ve deneyimi aşan kavramları da "akıl kavramı" ya da "idea" olarak tanımlandığını işaret edelim (Kant, 1998: A320/B377). Görü temelli kavramlar bütünü olarak matematik, anlama yetisinin saf kategorileri aracılığıyla oluşmaktadır. Anlama yetisi kavramları saf tümel kavramlardır, bu kavramlar sayesinde matematiksel nesneye ilişkin tasarımlara anlam kazandırılmaktadır. Bir başka anlatımla ifade edecek olursak, anlama yetisinin saf kategorileri matematikteki tekil yapıları üretmemizi, dolayısıyla matematiksel bilgiyi oluşturmamızı mümkün kılmaktadır. "Örneğin 'geometrik kurgu, tekil geometrik şekillerden 'önce' gelir; çünkü tekil şekillerin anlamı, ancak ve öncelikle bu kurgu aracılığıyla kavranır ve bunun tersine kurgunun anlamı tekil şekillerle kavranmaz'" (Çotuksöken, 1998: s. 16).

Nicelik kategorisinin üç esas kavramından biri olan "bütünlük (*universitas*)" saf kategorisi matematiksel yargının ortaya çıkmasında merkezi bir konuma sahiptir. Tekil çoklukların genelleştirilerek bir tümel altında birliğe bağlanması bilmenin ve bilme olanaklarının temelidir. Örnek verilecek olursa; bir dar açının trigonometrik oranları daha tümel bir kavram olan "türev kavram"ı altında tanımlanmasıyla trigonometrik oranların türevlerinin bilgisini öğrenmiş oluruz. Cebirde tümel bir kavram olan "polinom" kavramı tanımlanmadan, öğrenciler cebirsel ifadelerle sadeleştirme işlemlerini tam olarak kavrayamamaktadır. Polinomlarda dört işlemin öğrenilmesi, tekil yapıların "polinom" genel kavramı altında bir araya getirilip bütünlük verilmesiyle olanaklıdır. İşte, matematik öğretiminde "*universitas*" saf kategorisinin önemi bu şekilde ortaya çıkmaktadır.

Bu ve benzer örnekleri matematiğin bütün konuları için geliştirmek olanaklıdır. Öğrenme etkinliğinde tekil çoklukların birliği sağlanmadan bilme etkinliği gerçekleşemez. "(...) çokluğun birlik altında toplanmasının temelinde, 'tümlük', yani *universitas* vardır. O halde *universitas*'ın mantığın, bilginin ve bunlara dayalı her tür eylem ve oluşumun temeli olduğunu söylemek yanlış olmaz" (Bilgiç, 2011: s. 101). Matematikte her nesne, hem tekil hem de tümel bir yapıya sahiptir. İşte tekil olanlar, daha genel tümellere ve genel kavramlar altına götürülerek tasarlanabilirler. Başka bir deyişle, öğrenme etkinliği genelde her disiplinde özelde de matematikte, tekil yapıların tümel kavramlar altında alınarak bütünlük (*universitas*) verilmesiyle olanaklıdır. Bu bakımdan matematik öğretimi Kant'taki *universitas* saf kavramı temelinde geliştirilebilir.

Matematiğin kavramsal karaktere ve mantıksal kurguya sahip olması öğretiminde kavramların türetilmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Burada "kavram" kavramını sadece Kant'ın anlama yetisi kavramlarıyla sınırlamanın söz konusu olamayacağını düşünüyoruz. "(...) her tekil yapıyı ona ilişkin bir kavrama, başka bir deyişle bir çerçeveye bağlamak olanaklıdır" (Çotuksöken, 1998: s. 18). Matematikte, her tekil yapıyı çerçeveleyen yapıların türetilmesi de anlama yetisi saf kavramlarıyla olanaklıdır. Kavramsal bir yapı olan matematiğin her terimi, her sembolü bir anlamı imlemektedir. Bu alanda birçok değişken, sayı, sembol ve önermenin oluşturduğu karmaşık görünen işlemlerin sistematik bütünlüğünden bir önermeye varılır. İşte bu önermede ortaya çıkan yeni kavram düşünmenin bir ürünüdür.

> Kavram, düşünmenin en küçük birimidir. Nasıl ki dışdünyada-bir bakıma-en küçük birim nesne ise, düşünmede de-yine bir bakıma-ona (nesneye) karşılık gelmek üzere, en temel, en küçük öğe kavramdır. Kavramların dildeki karşılığı ise, terimdir, sözcüktür. Kavramlar nesnelere karşılık gelen ve düşünmede yer alan, nesnelerin bilinmesinde, tanınmasında ilk adımı oluşturan yapılardır, çerçevelerdir (Çotuksöken, 2013: s. 56).

Eğitim bilimci Mahinur Karataş Coşkun, "kavram öğretimi"ni geniş çaplı olarak araştırdığı, *Kavram Öğretimi* adlı yapıtında, eğitimde kavram öğretiminin önemine vurgu yaparken, aynı zamanda kavram öğretimine ilişkin sorunları da araştırmıştır. Coşkun'a göre bir kavramdan söz edildiğinde gerçekte bir soyutlama becerisinden söz edilir. "Soyutlama, zorunlu olarak ayırt etme, tanıyıp öğrenme ve ayıklayıp seçmeyi içerir. Bu yüzden bir kavramı öğrenirken de ayırt eder, tanıyıp öğrenir, ayıklayıp seçeriz" (Coşkun, 2011: s. 6). Matematikte üst ve alt kavramlar arasındaki

ilişkide, üst kavramların bütün özelliklerinin alt sınıflarda bulunması yeni kavramların üretilmesi ve öğrenilmesi anlamına gelmektedir.

Matematiğin nesnelerinin kavram olarak görülmesi, matematik eğitimindeki güçlüklerin tanınmasına, anlaşılmasına olanak sağlayacağı gibi, bu güçlüklerin aşılması yolunda önemli bir adımın da başlangıcı olacaktır. Çünkü, matematiği kavram olarak tanımlamak demek, matematik ve matematik eğitimini Kant'ın özelde aritmetik, genelde de matematik görüşü çerçevesinde ele almak demektir. Böyle bir görüş, matematiğin felsefi temellerine ilişkin biçimci görüşün matematiği anlamı olmayan kendi içinde kapalı bir sistem olarak görmesinin ötesinde, kavramı merkeze alan yeni bir eğitim yaklaşımı olarak, matematik ders araç-gereçlerinin biçim ve içerik olarak geliştirilmesine, öğretim metodlarının ve öğretmen yetiştiren programlarının gözden geçirilmesine, dahası eğitimde köklü bir yaklaşımın geliştirilmesine imkân sağlayabilir.

Matematiksel bilginin kavramlardan inşa edilmiş akıl bilgisi olduğunu (Kant, 1998: A713/B741) bir kez daha Kant'ın diliyle vurgulayalım. Öğrenenin düşünme etkinliği içerisine çekilebilmesinin yolu kavramların anlamlarını öğrenmekten geçer. Çünkü bilmenin olanağı kavramların anlamlarının zihinde yer almasıyla mümkündür. "(...) bir şeye ilişkin düşünme hep bir kavrama dayanır; (...) kavramlar varolanı bilgibilimsel bakımdan belirleyici çerçevelerdir" (Çotuksöken, 2000: s. 28-29). Matematiğin, bilme yetilerinin farklı düzlemlerde ve aşamalarda ilişkisel ağlarında oluşturduğu kavramlar bütünü olduğunu işaret etmeye çalıştık. O halde, matematiksel terimler ya da kavramlar gerçek hayatla ilişkilendirilerek

tanımlanmalıdır. Kant'a göre "matematikteki tanımlar, kökensel olarak üretilmiş kavramların yapılaştırılmasıyla oluşmaktadır. (...) Matematiksel kavramların kendileri tanımlarla yapılır" (Kant, 1998: A730/B758). Matematikteki kavramların ve terimlerin tanımlarla var olması yani tanımın kavramı öncelemesi, kavramların içeriklerinin tanım yapılarak anlaşılmasını sağlar. Kant'ın "Matematikte tanımı önceleyen hiçbir kavramımız yoktur. Kavram, ancak tanım yoluyla verilir. Dolayısıyla matematikte her zaman tanımdan başlanmalıdır. Matematiksel tanımlar hiçbir zaman yanılmazlar" (Kant, 1998: A731/B759) sözleriyle matematikte tanımlama işleminin, bir kavram sınıfının bütün üyelerinin ortak özelliklerini ortaya koyarak zihinde anlamlara yer açtığına ve öğrenmeyi mümkün kıldığına vurgu yapmaktadır.[18]

Öğretimde kavramların tanımının yapılması matematiğin doğasına ilişkin araştırmaların gelişmesine olanak sağlayabilir. Kavramların tanımı yapılmadığında, matematiğin simgesel boyutu anlamın üzerini kapatmakta ve bunun bir sonucu olarak matematiğin tümü anlamı olmayan, birbiriyle ilgisiz bir bilgi yığını olarak düşünülmektedir. Matematik öğretiminde kavram ve tanımının geri planda tutulmuş olması, biçimci görüşün matematik eğitimindeki ağırlığının ve etkisinin korunmasında etkili olmuştur. "Tanım olmadan verilen matematik, matematiğin bellenmesi gereken bir buyruklar ve konular topluluğu olduğu izlenimi yaratmaktadır. Öğrencilerin düşünen, alternatif çözümler üretebilen esnek zihinli

[18] "A" gibi bir sayının "$\frac{1}{n}$" ci kuvveti, kök sembolü kullanılarak nasıl ifade edildiği tanımlamadan karekök, küpkök ya da daha yüksek dereceli köklü ifadelerle dört işlemin bilgi ve becerisinin tam olarak kazanılamadığı görülmektedir. Uygulamaların da gösterdiği gibi, burada genel kavramın bilinmesi tekil durumların öğrenilmesini mümkün kılmaktadır.

kişiler olmasını engellemektedir" (Yıldırım, 2010: s. 76). Yıldırım, "Matematik için Matematik Eğitimi" adlı yazısında, Japonya'da okutulan matematik ders kitaplarında Amerika'dakilerden farklı olarak "tanım"ın ilk sınıflardan itibaren çok önemli bir yer tuttuğunu, tanımın küçük çocuklara basit olarak resimlerle verildiğine, üst sınıfların kitaplarında da tanım için ayrılmış özel bölümlerin olduğuna işaret etmektedir (Yıldırım, 2010: s. 76).

Matematik eğitimi, matematiğin kavram olduğu gerçeğini esas alarak yeniden yapılandırılabilir. Matematik, öğrenmekten ve ezberlemekten daha çok anlamaya dayanır. Anlama edimi, kavramların anlamlarını bilmekle olanaklı olur. İşte bu noktada tanım yapmanın işlevselliği çok önemlidir. "(...) Günlük hayatta karşılaşılan problemler, matematik dünyasına tanımla transfer edilir. Dolayısıyla, matematik öğretim programlarında tanım üzerinde önemle durulmalıdır" (Yıldırım, 2010: s. 75). Matematik konularında yer alan anahtar kavramlar, terimler özellikle küçük yaşlarda öğrenciye gerçek hayatıyla ilişkilendirilerek öğretilebilir. Küme, sayı, nokta, doğru ve düzlem vb. kavramlar öğrencinin deneyimi üzerine kurulursa, matematik eğitimi "anlam" üzerinde şekillenir. Anlam ve anlama üzerinde biçimlenen yaklaşım, matematiksel düşünmenin, problem çözmenin ve ispatlama işlemlerinin temelini oluşturabilir.

Özetle, anlama yetisinin nicelik kategorisi olmadan matematiksel kavramlar oluşamaz. Anlama yetisinin herkeste bulunan ve önceliğe sahip bu tümel yapıları aracılığıyla tekillerin anlamları kavranır. Başka bir deyişle, matematiksel terimler ve kavramlar, bir tümel kavram olan *universitas* saf kategorisi sayesinde oluşur, her

türlü bilme etkinliğinin temelinde *universitas* vardır. İşte oluşturulan bu kavramlar dile geçmediği, yani tanımlanmadığı zaman öznel ve bulanık kalmaktadır. Kavramın dile geçmesi demek, kavramın tanımlanması demektir. Kavramın tanımının yapılmasıyla birlikte düşünmenin ve öğrenmenin yolu da açılmış olur.

3.4.2. Matematik Eğitiminde Bilgiden Daha Çok Dedüktif-Indüktif Düşünme Süreçleri ve Yargı Gücünün Kullanımı

Matematikte, genellemeler dedüktif çıkarımlarla ispatlanmaktadır. Bu yanıyla matematik daha çok dedüktif bir bilim olarak kabul edilir. Oysa ki genellemelere gitmek matematiksel indüksiyonla mümkündür. Başka bir deyişle, teoremler dedüksiyonla ispatlanırken, her teorem bir tür genelleme olduğu için indüksiyona ihtiyaç duyar. Bu bakımdan matematikte dedüktif düşünmenin yanında indüktif düşünme biçimlerine de ihtiyaç vardır. Tanınmış matematikçilerden R. Courant ve H. Robbins'e göre matematik salt dedüktif mantıkla eş tutulmamalıdır.

> Matematiğin dedüktif-aksiyomatik özelliğini vurgulamada tehlikeli bir aşırılığa düşüldüğü söylenebilir. (...) Matematikte amaç, yetkin dedüktif biçime ulaşmaksa, bu yolda itici gücün kaynağı yaratıcı sezgidir. Matematiği, isteğe göre ortaya konan birtakım postulat ve tanımlara dayalı bir teoremler sistemi olmaktan ibaret sanmak yanlıştır. Bu niteleme doğru olsaydı, matematik hiçbir yetenekli kişinin ilgisini çekme gücünü taşıyamaz; amaç ve çekicilikten yoksun, salt tanım, kural ve tasımlardan oluşan bir oyun olmaktan ileri geçemezdi (Courant ve Robbins'den akt. Yıldırım, 2008: s. 51).

Genel olarak düşünme, bir problem çözme etkinliği olarak tanımlanabilir. Dedüktif düşünme ise bir problem için oluşturulan çözümün doğruluğunun yoklanmasıdır. Her ne olursa olsun, her türlü düşünmenin temel amacı doğruya ulaşmaktır. Matematik, matematiksel kavramlara dayanan bir düşünme yöntemi, kültürel yaşamın hemen her alanında yer alan bir problem çözme yöntemi ve ispatlama etkinliğidir. Matematiksel düşünmenin özünü "somuttan soyuta gidiş" ve "soyuttan somuta dönüş" oluşturmaktadır. Courant'a göre matematiğin özünde somut örneklerle, soyut genelleme, dedüktif çıkarımlarla indüktif düşünmenin yanı sıra mantıkla imgenin işbirliği bulunmaktadır. "Belli bir başarıda bu öğelerden biri ya da diğeri ağır basabilir.Matematiğin gelişim sürecine tümüyle bakıldığında hepsinin payı önemlidir" (Courant, 2008: s. 219). Anlaşılacağı gibi, matematik öğreniminde dedüktif akıl yürütme ile birlikte diğer düşünme biçimlerinin rolü de ortaya çıkmaktadır. "Matematiksel düşünme, kuralları belli salt dedüktif çıkarımlardan ibaret değildir, her aşamada kişinin deneyim, sezgi, yaratıcı imgelem ve zekâ gücünü gerektirir" (Yıldırım, 2008: s. 159). İşte, kesin, zorunlu ve evrensel bilgiler alanı olarak matematik, dedüktif-indüktif ve diğer düşünme süreçlerini esas alan bir eğitimle öğrenilebilir.

Bilimlerde tümel olmadan belirsiz bir şeyi tekille ilişkilendirme veya büyük önerme olmadan küçük önermeden sonuç çıkarma girişimi, bilimlerin ilkesel düzeyde kurucu kavramsal bütünlüğü görülmeden bir tür bilgi üretme etkinliğidir. Böyle durumlarda çıkarımın nedeni olacak orta terim görülemeyeceğinden, ne yapılan bilimsel etkinlik anlaşılabilir, ne de onun içinde bir deneyim anlamlandırılabilir. Matematik için söylersek, matematiğin normatif bir bilim olarak pozitif bilimlerle ayırıcı farkı, bu farkın nedeni ve sonuçları, matematiğin pozitif bilimlerle ilişkisi, sayı-kavram,

aritmetik-geometri ilişkisi, vb. kavramsal çatıyı bilmeyen birisinin matematiği bilme ve öğrenme, öğretme olanağı yoktur. Herhangi bir matematik problemi, içerisindeki kavramlar arasındaki ilişki bilinmeden anlaşılamaz. Örneğin, Leibniz'in sonsuz küçükler kuramı, seri, limit, fonksiyon, trigonometri gibi tümel kavramlar bilinmeden integral yapılamaz. Çünkü tümel çerçeve bilinmeden hangi nedenle veya orta terimiyle tekil konuya bağlanacağı görülemeyeceği için akıl yürütme gerçekleştirilemeyecektir. "Keskin zekâ birdenbire orta terimi bulma yetisidir. (…) küçük ve büyük terimi görmek ve nedeni, orta terimi kavramaktır" (Aristoteles, 1950: 89b 15-20). Orta terimi görmek aklın birden bire kuracağı bir bağlantı, bir keşiftir. Çünkü öğrenme demek, her yargının nedenini göstermek olan orta terimi keşfettirmek demektir. Örneğin: "Bütün insanlar ölümlüdür", "Sokrates bir insandır", "Sokrates ölümlüdür" önermelerinden küçük-büyük terim ile kurulan bir yargı olarak, "Sokrates ölümlüdür"ü alalım. Bu yargıyı anlamak için sadece doğrulama mantığıyla orta terimi öğretmeden alıp ilişkilendirmek bile yetmez. Buluş mantığıyla tekil-tümel arasındaki o, heyecan verici teorik gerilime geri dönmek, ve orta terim yokken bir neden bulamamanın sıkıntısını öğrenciye yaşatmak, diyalektik sorgulamalarla bulunabilecek yanlış nedenleri deneyip yanıldığını görmek ve öğrenciyi orta terimi keşfetmeye zorlamak gerekir. Başka bir deyişle yargı gücü, aklın mantıksal çıkarımlarında orta terimin oluşmasına olanak sağlayarak bilme etkinliğinin gerçekleşmesine katkıda bulunmaktadır. Matematik öğretimi öğrencinin yargı gücünü kullanması temelinde geliştirilebilir, öğretmenler öğrencileri yargı gücünü kullanımı için zorlayabilirler.

Matematik öğretiminde, formüllerini ezberleten bir öğretmen değil, bilim insanı gibi önermelerin ispatlarını yapabilen, ispatları yapamadığında içine düştüğü teorik

gerilimle nasıl başedileceğini bilen öğretmen ancak o bilim dalının öğretmeni olabilir. İspat ise birbiriyle ilgili önermelerin belli bir düzen içerisinde birleşmesiyle gerçekleşmektedir. "Burada düzen, içinde yer alan öğelerden çok daha önemlidir. Eğer bu düzene ilişkin bende bir duygu ya da sezgi oluşmuşsa, düzende yer alan şu ya da bu öğeyi unutabileceğim korkusuna kapılmama gerek yoktur; çünkü bunlardan her biri kendiliğinden düzen içindeki yerini kolayca bulur" (Poincaré, 2008: s. 241). Oysa üniversitelerin öğretmenlik bölümlerinde yetişen öğretmenlerin geneli sadece müfredat içeriğindeki konuları işleyerek daha çok öğretmenlik mesleğinin uygulamalarıyla ilgilenmektedirler. Matematikte düşünme, özünde bir tür problem çözme etkinliği, bir önermeyi ispatlama ya da önermelerden sonuç çıkarma biçimidir. Düşünmeden, düşünmeyi öğrenmeden matematik öğrenilemez. Arf'ın "bir şeyi öğrenmek demek onu yeniden keşfetmek demektir" sözünden keşfetme etkinliğinin orta terimi bulmakla olanaklı olduğunu düşünüyoruz. Matematik eğitimi, ilgili müfredatları usulüne göre tamamlamaktan daha çok "keşfederek" öğrenmeye odaklanmalıdır. Matematikte keşfederek öğrenmenin en iyi yöntemlerinden biri de, soru sorma ve cevap verme-verdirme ustalığı olarak "Sokratik Metot/Yöntem" tur (dir).

> Aklın eğitiminde Sokratik yöntemi esas kabul etmeliyiz. Kendisine dinleyicilerinin bilgisini doğurtan ebe diyen Sokrates, bir bakıma Platon'un bizim için muhafaza ettiği diyaloglarında, yetişkin insanların durumunda bile fikirlerin kendi ferdi akıllarından nasıl çıkartılabileceğinin misallerini verir. Birçok bakımdan çocuklar akıllarını kullanma lüzumu duymazlar. (...) Eğitimleriyle irtibatlı her şeyin ilkelerini bilmeleri onlar için gerekli değildir; ama ödev-vazife meselesi ortaya çıktığında bu ilkeler onlara anlatılmalıdır. Fakat çoğu durumda akla dayalı olarak konuşturmak suretiyle kendi fikirlerini ortaya çıkarmaya çalışmalıyız, bu fikirleri onlara

> benimsetmeye [zihinlerine zerk etmeye] değil. Şu halde Sokrates'in benimsediği usul sorulu cevaplı yöntem için kural teşkil etmelidir (Kant, 2009: s. 97-98).

Platon'da bir eğitim "metot"u olarak diyalektik bir "yürüyüş" ve bir "ustalık"tır. Yürüyüş, filozof olacak kişinin eğitim aşamaları olarak karşımıza çıkar. Yani yürüyüş, "filozof olurken kişinin yürüdüğü ve bir filozofun yürüttüğü yoldur" (Kuçuradi, 2009: s. 101). Bu yürüyüşte yolu yürüyen kadar yürüten, eğitilen kadar eğiten de önemlidir. Böyle bir yürüyüş, iyi bir yol göstericiyle yapılabilir. "(...) yol gösterici ona doğru bilgilerin 'güzelliği'ni görmeyi öğretir ve gözlerini 'uçsuz bucaksız güzel'e çevirterek onda sürekli bilgi doğurma arzusunu uyandırır" (Kuçuradi, 2009: s. 101). İşte, bu noktada bir eğitim metodu olarak "diyalektik" yani "Sokratik Metot/Yöntem" matematik eğitiminde önemli bir öğretim yöntemi olarak karşımıza çıkar. "Dialektikçe yanıtlama 'yalnız doğru olanı yanıt olarak söylemek değil, aynı zamanda kendisine soru sorulanın bildiğini söylediği şeyleri kullanarak' olur" (Kuçuradi, 2009: s. 102). Eğiticinin, sorduğu sorularla ve verdiği yanıtlarla, eğittiği insanın bildiğini sandığı şeyleri bilmediğini göstermedeki ya da bildiklerinin yanlış olduğunun bilincine varmasında ve doğru olanı buldurmasındaki ustalığı matematik öğretimi için temel bir öğretim tarzı olabilir. Dahası "Sokratik Metot"un dedüktif-indüktif ve diğer düşünme etkinliklerine dayanması bakımından verimli ve yaratıcı düşüncenin oluşmasında etkili olduğunu düşünüyoruz.

Kant, "Kendi ölçütlerini matematik kendinde taşır; (...)" (Kant, 2002: 3. Bölüm. Ek. s. 133) sözüyle matematiğin evrenselliğine ve kesinliğine işaret etmektedir. Kant'a göre anlama yetisi, kavramlarla düşünme gücüdür. Kavramlarla düşünme gücü,

öncelikle belli bir şekilde, ya kuralları kanıtlayan durumları örnek alarak ya da tam tersine, belirli durumlar için kuralları keşfederek kazanılabilir. Kant, "Kavramlarla düşünme gücü öğrendiğimiz yahut söylediğimiz şeyi anlayabilmemiz ve herhangi bir şeyi anlamadan tekrar etmememiz için gereklidir. O kadar çok insan vardır ki her ne kadar buna inanmasalar da anlamadıkları şeyleri dinlerler ve okurlar (Kant, 2009: s. 97) sözleriyle düşünme etkinliğinde anlama yetisinin önemli rolüne işaret eder.

Kant, "Düşünmeyi öğrenerek insan keyfi-gelişigüzel değil, sabit-değişmez ilkelere göre hareket etmesini öğrenmeye başlar" (Kant, 2009: s. 45) sözüyle düşünmeyi öğrenmenin doğruları bulmadaki önemine işaret etmektedir. Ortaöğretimde bilgi ağırlıklı matematik müfredatı matematiksel düşünmenin gelişmesi önünde önemli bir engeldir. Başka bir anlatımla, matematik eğitiminde bilginin ön planda tutulması öğrencileri matematiksel düşünme etkinliğinden daha çok belli kalıpları bilgi olarak kabul etmeye ve öğrenmeye yönlendirmektedir. Öğrencilerin yaşam etkinliğinde hiç kullanmayacakları, dahası bir süre sonra unutabilecekleri bilgilerle donatılmaları onların yaratıcılıklarını köreltmektedir. Matematik müfredatı, bilginin yanında sorgulamaya temel olabilecek açık uçlu sorulara, etkinliklere daha çok yer verebilir. Matematiğin doğası gereği, matematik öğretiminin somuttan soyuta doğru yapılandırılması gerekir. Başka bir deyişle, özellikle küçük yaşlardaki çocuklarda öğretim somut işlemlerle başlamalı, fakat matematiğin soyut bir bilim olması gerçeği öğretimin soyut düşünmeye geçmesini zorunlu kılmaktadır. Bu bakımdan matematik öğretiminde, soyut-somut düzeyi farklı yaş seviyeleri dikkate alınarak ayarlanmalıdır.

Matematik öğretiminde düşünme etkinliği daha çok öğretmen-öğrenci, öğrenci-öğrenci işbirliğini temel alan ekip ya da grup çalışmalarıyla gelişmektedir. İyi oluşturulmuş bir ortaklıkla işbirliğine dayalı bir öğretim öğrencinin farklı bakış açıları kazanması için iyi bir yöntemdir. Eğitim bilimci Finlay McQuade ve David W. Champagne *How to Make A Better School* adlı yapıtında işbirliğine dayalı öğrenmenin tanımı ve işlevselliği üzerinde durur. McQuade ve Champagne, işbirliğine dayalı öğrenmenin öğretmenlerin bir kez deneyerek çalıştığını gördüğü bir yöntem olmadığını, böyle bir öğrenme sürecinde öğrenci ve öğretmenin kökleşmiş ortaklar olması gerektiğini belirtir (McQuade & Champagne, 1995: s. 138). Konuların yapısına göre iyi oluşturulan grup çalışmaları öğrencilerin görüş alışverişinde bulunmalarına, verimli tartışma yapmalarına ve farklı bakış açıları kazanmalarına imkân sağlamaktadır.

Özetle, matematik daha çok dedüktif bir bilim olarak kabul edilse de genellemelere gitmede indüktif düşünme biçimleri ve diğerlerine de ihtiyaç vardır. Matematik eğitiminde, bu düşünme süreçlerini etkin bir biçimde harekete geçirmenin yolu da ispat yapmadır. Bu amaçla, öğretimde ispatlara ve açık uçlu sorulara daha çok yer verilmelidir. Matematikte tümel kavramların bilinmesi düşünmeyi, akıl yürütmeyi ve keşfetmeyi olanaklı kılmaktadır. Tümel-tekil ilişkisinde orta terimin bulunmasıyla mantıksal çıkarımları olanaklı kılan, düşünme yetisinin önemli bir yetisi olan yargı gücünün kullanımı matematik öğretiminde daha çok hayata geçirilebilir. Kant, eğitimde yargı gücü kullanımının önemini "Eğer eğitim insan tabiatını varlığın amacına erişebilecek şekilde geliştirecekse, o zaman bünyesinde kesinlikle yargı gücünün kullanımına yer vermelidir. (...) Yargı gücü genelin özele tatbikidir" (Kant, 2009: s. 40, 90) sözleriyle ifade eder. Matematik öğretiminde bilgiden daha çok iyi

soru sormak ve iyi cevap vermek/verdirmek anlamanın, öğrenmenin olmazsa olmaz öğeleridir. Kant'ın işaret ettiği etkili bir eğitim metodu olan "Sokratik Metot" hem öğretmenin hem de öğrencinin akıl yürütmesinde, sorgulamasında, dahası kavramları anlayarak öğrenmesinde etkin bir öğretim tekniğidir. Öğretmenler bu metodu daha etkin bir biçimde kullanabilir.

3.4.3. Matematik Öğretiminin Öğrencinin İlgi, Yetenek ve Öğrenme Tarzları Temelinde Farklılaştırılması

Verimli matematik öğretimi öğrencinin, ilgi, yetenek ve gereksinimleri doğrultusunda bireysel faklılıklar temel alınarak, yani dersin farklılaştırılmasıyla mümkündür. Her bireyde hissetme yetisinin (duyusallığının), hayal gücünün ve düşünme yetisinin (anlama yetisi, yargı gücü ve akıl) bireysel farklılıklara dayanması öğretimin farklılaştırılmasını gerektirir. Eğitim Bilimci Carol Ann Tomlinson, *How to Differentiate Instruction in Mixed-Ability Classrooms* adlı kitabında kimi eğitimcilerin "iyi eğitim"i iki farklı biçimde tanımladığına, bunlardan birinci tanımın belirli bir zaman içerisinde bir amaca yönelik olarak öğrencilerin temel bilgi ve becerilerde ustalaşmasını hedefleyen eğitim olduğuna, ikincisinin ise öğrenenlerin kapasitelerini azami yüksekliğe çıkarmaları için öğrenenlere destek olan eğitim tanımı olduğuna vurgu yapmaktadır. İkinci tanım öğrencinin öğrenme seviyesini ve bireysel sınırlarını sürekli yükseltmeyi hedeflediği için öğrenenler açısından en anlamlı tanımdır (Tomlinson, 2001: s. 8). Tomlinson, öğretimde farklılaştırma kavramının, öğretimin üç temel unsuru olan; "içeriği", "süreci" ve "ürünü" öğrencinin "hazır bulunuşluk", "ilgileri" ve "öğrenme tarzları" temel alınarak dersin

planlanması anlamına geldiğine işaret etmektedir. Tomlinson'a göre dersin farklılaştırılmasına neden olan öğrenenin üç durumu vardır. Bunlar; öğrenenin hazır bulunuşluk düzeyi, ilgi alanları ve öğrenme tarzlarıdır (*learning styles*) (Tomlinson, 2001: s. 45). Öğrenenin hazır bulunuşluk düzeyi; öğrenenin o anki bilgi birikimi, becerisi ve öğrenme olanağıdır. Dersin, öğrencinin mevcut bilgi ve beceri düzeyi temel alınarak farklılaştırılması, öğrencinin konuyu yakalamasına ve öğretimin içerisine çekilebilmesine katkı sağlamaktadır. Konunun, öğrencinin ilgi alanları ve yetenekleriyle ilişkilendirilmesi ise öğretimin niteliğini artırmaktadır. Öğrencinin merakı, tercihi, ilgisi temel alınarak öğrenme ortamları oluşturulduğunda öğrencinin motivasyonu artmakta ve öğrenme kalıcı olmaktadır. Her öğrencide bilme yetisinin bireysel farklılıklar göstermesi öğrenmenin düzeyini etkilemektedir. Başka bir deyişle, bu yetilerin her öğrenende farklı kapasitede olması dersin genel olarak öğrenme tarzlarına, özel olarak da duyusal öğrenme tarzlarına (*sensory learning styles*) göre farklılaştırılmasını gerekli kılmaktadır. Tomlinson'a göre öğrenme tarzları, öğrenenin hangi yöntemlerle daha iyi öğrenebileceğini ortaya koymaktadır. Dersin, öğrenme tarzları temel alınarak farklılaştırılması, öğrenene, öğrenirken kendisine en uygun yöntemi bulmasına yardımcı olduğu için, öğrenme daha etkili ve verimli olmaktadır (Tomlinson, 2001: s. 60). Burada, öğretimde "farklılaştırma" kavramının duyusal öğrenme tarzlarını merkeze almasıyla, Kant'ın transandantal felsefesinde bilginin oluşumunda önemli bir boyut olan hissetme yetisinin (duyusallığın) oynadığı epistemolojik rolün önemine ve katkısına vurgu yapıldığını görüyoruz. Başka bir anlatımla, derslerin genelde öğrencinin öğrenme kapasitesine özelde de duyusal öğrenme tarzlarına göre farklılaştırmasının felsefi temellerinin Kant'ın bilgi kuramı üzerinde şekillendiğini belirtelim.

Duyusal öğrenme tarzları; kinestetik (*kinesthetic*), dokunsal (*tactual*), görsel (*visual*) ve işitsel (*auditory*) olmak üzere dört temel öğrenme tarzından oluşmaktadır. Kinestetik öğrenenler; hareket ederek, büyük kaslarını kullanarak öğrenirken, dokunsal öğrenenler; küçük kasları ve kişisel ilişkiler yoluyla, görsel öğrenenler; görerek, izleyerek okuyarak, işitsel öğrenenler ise daha çok duyarak, konuşarak, tartışarak ve sesli düşünerek daha etkin öğrenmektedir (KTAV, 2010). Farklılaştırılmış öğretim, bütün sınıfa, gruba ve bireye yönelik öğretimin bir harmanı olarak öğrenci merkezli olup, bu yönüyle ezber bilgiler üzerine değil, kavramlara, kavramların öğretimine ve ilkelere odaklanmaktadır. Tomlinson, kavramların bilginin yapı taşları olduğunu, kalıcı anlamanın gerçekleşmesi için temel kavram ve ilkelerin vurgulanması gerektiğini, dolayısıyla farklılaştırılmış öğretimin ağırlıklı olarak bilgilere odaklanmayıp kavramlar ve ilkeler üzerine odaklandığında çok güçlü olduğunu belirtmektedir (Tomlinson, 2001: s. 74-75).

Anlaşılacağı gibi "öğretimde farklılaştırma yaklaşımı" bilme yetisini temel alarak, öğretimin kavramlar ve ilkeler üzerine kurulması gerektiğine işaret ederek Kant'ın eğitim ve bilgi görüşü temelinde bir duruş sergilemektedir. Farklılaştırma kavramı, Kant'ın bilgi felsefesi üzerinde geliştirilmiş bir yaklaşım olarak matematik öğretiminde yaygınlaştırılabilir. Bir başka anlatımla ifade edilecek olursa; öğrenme etkinliğinde ve ders araç-gereçlerinin oluşturulmasında tek tip öğrenme/öğretme tarzı esas alınmaktadır. Ders araç-gereçlerinin içerikleri görsel, işitsel, dokunsal ve kinestetik öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılamaktan uzaktır. Bu bakımdan öğretmenin farklı öğrenme tarzlarını dikkate alarak dersini zenginleştirmesi, farklılaştırması gerekir.

3.4.4. Matematik Eğitiminde Matematiğin Felsefi Temellerine İlişkin Biçimci Görüşün Olumsuz Etkilerinin Aşılması ve Öğretmenin Rolü

Günümüzde matematiksel bilgi, öğretimin geneli içinde önemli bir yere ve işleve sahip olmuştur. 18. yüzyılda Kant'ın, doğa bilimlerinin bilgisini edinmede matematik bilgisinin gerekliliğine ve matematik öğretiminde uygulama yapılmasının önemine vurgu yaptığını öğreniyoruz (Kant, 2009: s. 93). Matematik eğitiminin bakış açısının, matematiğin gerçek yaşamda ve diğer bilimlerdeki yeri ve etkin rolüne odaklanarak geliştirilebilir. "PISA 2009", "TIMSS 2011" ve "PISA 2012", Türkiye'deki matematik eğitiminin gerçek durumunu ortaya koymaktadır. İlgili raporlar matematik eğitiminin genelinde matematiği gerçek hayatla ve diğer disiplinlerle ilişkilendirmenin, matematiksel düşünmenin ve problem çözmenin oldukça alt seviyelerde olduğunu göstermektedir. Başka bir deyişle bu ve buna benzer değerlendirmeler matematiği yalnızca simgeler bütünü olarak gören, onu yaşamın diğer alanlarıyla ilişkilendiremeyen bir eğitim anlayışını göstermektedir.

Şimdi, matematiğin anlamlı önermelerden oluştuğunu *calculus*'ten bir örnekle anlatmaya çalışalım. Yüksek matematiğin temel konulardan biri olan "türev" konusunun, "eğim", "hız" ve "ivme" gibi kavramlarla ilişkisine kısaca bakalım. Genel bir tanım yapılacak olursa; bir $f(x)$ fonksiyonunun "x_0" noktasındaki türevi, bu noktadaki teğetinin eğimine eşittir. Eğer bu fonksiyon bir hareketlinin gittiği yolu ifade ediyorsa, bu hareketlinin "t" anındaki hızı $f(x)$'in bu noktadaki birinci türevine ($f'(t)$), "t" anındaki ivmesi ise $f(x)$'in bu noktadaki ikinci türevine ($f''(t)$) eşittir. Buradan da anlaşılacağı gibi matematiği oluşturan terimler, kavramlar

ve önermeler insan etkinliklerinde ya da dünya hakkında bir anlamı ifade ederler. Bu bakımdan bir içeriğe sahiptirler, dolayısıyla öğreticidirler ve bilgimizi genişletirler. Öyleyse matematik eğitimi, matematiğin her konusunun imlediği farklı alanlardaki farklı anlamlar temelinde geliştirilebilir.

Matematiğin temellerine ilişkin biçimci görüşün matematik eğitiminde özellikle iki önemli alanda olumsuz etkilerini görmek mümkündür. Bunlardan biri, öğrenim araç-gereçlerinin biçim ve içeriğiyle ilgili olurken, diğeri de matematik hakkında ön kabullenmelerin oluşması ve yerleşmesiyle ilgilidir. Matematik ders kitapları, biçim-içerik ve görsellik olarak öğrenciyi matematik öğrenmeye motive etmekten uzaktır. Konu dizilimi, konuların içeriğini parçalamakta ve ünite sonlarında yer alan alıştırmalar, öğrencinin sadece "işlem yapma" becerisini geliştirmeyi amaç edinmektedir. Dahası, kitaplarda matematiksel düşünmeye zemin oluşturabilecek açık uçlu soruların sayısı oldukça yetersizdir. Ders kitaplarının içeriği, öğrencilerin ilgili önermelerin ispatlarına yoğunlaşmalarını hedeflemekten daha çok, pratik işlem yapma becerilerini geliştirmeye ve ölçmeye yöneliktir. Oysa ki ispat, genelleme gerektiren bir tür sonuç çıkarma biçimi olarak matematik öğretiminin temelini oluşturur. Bu bakımdan, öğrencinin seviyesi dikkate alınarak konularla ilişkili önermelerin ve teoremlerin ispatları tek tek yapılmalıdır. Ayrıca matematiğin kavramsal niteliği temel alınarak, ders araç-gereçlerine biçim ve içerik kazandırılmalıdır.

İkinci bölümde; Hilbert'in öncülük ettiği matematiğin felsefi temellerine ilişkin biçimci görüşün matematiği simgelerden oluşan, anlamı olmayan, olmuş-bitmiş,

tamamlanmış, kendi içinde tutarlı ve kapalı bir sistem olarak gördüğüne işaret etmeye çalıştık. Matematik eğitiminde görev alan eğitimciler biçimci görüşün etkisinin bir sonucu olarak matematiği salt kurallar, tanımlar ve ispatlar yığını olarak görme eğiliminde olmuşlardır. Başka bir anlatımla, formel öğretimde görev ve sorumluluk alan eğitimcilerin matematiğin doğasına ilişkin araştırma alışkanlıklarının yetersizliği, biçimci görüşün matematik eğitiminin her seviyesinde yaygınlaşmasında, geçerlilik kazanmasında ve kabul görmesinde etkili olduğunu düşünüyoruz. Matematikçilerin, eğitimcilerin bu alanla ilgili bilimsel çalışmalara daha fazla yoğunlaşmaları halinde, bu görüşün dışında matematiğin doğasını doğru açıklayabilen yaklaşımların ortaya çıkarak matematik eğitimine olumlu katkılarda bulunabileceğini belirtmek istiyoruz.

Matematik eğitiminin sorunlarının temelinde öğretmenlerin mesleki bilgi ve pedagojik açıdan yetersizliği, tutum ve davranışlardaki katılığın da önemli payının olduğuna işaret edelim. Öğretmenin, etkileşimlerin ve karşılıklı iletişimlerin yürütülmesinde özel bir sorumluluğu vardır. Bu bakımdan öğretmen, daha çok öğrenen bir grubun olgun bir üyesi olarak öğrencinin motivasyonunu yüksek tutmalıdır. Dahası öğretmen; insan olmanın bütün olanaklarının ve sorumluluklarının bilincinde olan bir eğitimci olarak, matematik bilgi birikimiyle, entelektüel düzeyiyle, her bakımdan olumlu yaklaşım, tutum, davranış sergileyen ve temel bir bilimin yetkin bir temsilcisi olarak öğrencilere matematiği sevdirebilir.

Öğretmen disiplini sağlayan bir otorite olmanın ötesinde doğru değerlendirmenin ve doğru eylemde bulunmanın nasıl yapılacağını öğreten bir lider rolünü üstlenebilir.

Kuçuradi'nin eğitim, öğretmenlik görüşü de, Kant'ın aklın özerkliği ve insanlık onuru görüşlerine uygun görünmektedir. Kuçuradi eğitim ve öğretmenliği daha çok "insanlaşma" ve "doğru değerlendirme" kavramları çerçevesinde ele alır. Kuçuradi'ye göre eğitim, "'kişilerin insanlaşmasına yardımcı olmayı'" (Kuçuradi, 1988: s. 35) amaç edinmelidir. Öğretmenin görevlerinden biri de öğrenciye doğru değerlendirmenin nasıl yapılacağını göstermektir. "Öğretmenlik, öğrencilere ilişkin herşeyi, öğrencilerin insanlaşmasına katkıda bulunması veya bunu engellemesi açısından değerlendirme ve buna göre eylemde bulunma mesleği gibi görünüyor: ister felsefe, ister tıp, ister hukuk öğretmenliği olsun bu öğretmenlik" (Kuçuradi, 1988: s. 36).

Russell'ın çalışmalarından matematiğin temel nesnesi olan sayının, küme kuramı ve mantık yasalarıyla tanımlanamadığını biliyoruz. Matematikçi, mantığın yasalarını düşünmenin temeline alarak ve matematiğin simgesel boyutunu kullanarak işini yapmaktadır. Fakat, sayı mantıktan çıkarılamadığı için matematiğin bütünü mantığın bir dalı olamamaktadır. Gödel'in çalışmaları; matematiğin sadece simgelerden oluşan, olmuş-bitmiş, tamamlanmış, tümü doğrulanmış donuk bir alan olmadığını ispatlamıştır. Dahası, matematiksel önermelerin sonlu sayıda, matematiksel gerçekliğin sonsuz olması, sonlu sayıdaki önermelerin sonsuz gerçekliği açıklayamayacağı ileri sürülmektedir. Dolayısıyla çok sınırlı dizgeler dışında, matematiğin bütününde "tamlık" ve "tutarlılığın" olamayacağı gerçeği ortaya çıkıyor. Matematik eğitiminde matematiğin bu yanı da göz önüne alınabilir.

Arf'a göre, eğitimin esas hedefi öğrendiklerinin çoğundan şüphe edebilen ve her bilgiyi yeniden gözden geçirebilen insanlar yetiştirmek olmalıdır. Çünkü bilimde kesinlik yoktur, eğer kesinlik olsaydı bilim değil dogma olurdu. (Terzioğlu ve Yılmaz, 2005: s. 135). Kant, bilimlerin bilgisini bilgelik öğretisi için bir adım olarak görür. Bu bakımdan eğitim-öğretimde bilimlerin bilgisi, eleştirel bir yaklaşımla metodik bir araştırmaya dayanmalıdır.

> Tek kelimeyle: bilim (eleştirel olarak araştırıldığında ve metodik olarak sunulduğunda), bilgelikten sırf ne yapılması gerektiği değil, öğreticiler için herkesin izlemesi gereken bilgeliğe giden yolu iyi ve tanınabilir bir şekilde açmak ve başkalarını da yanlış yollardan alıkoymaya yaraması gereken bir hareket hattı olarak anlaşılırsa, bilgelik öğretisine açılan dar bir kapıdır (Kant, 1999: s. 176).

Matematik diğer bilimlerle karşılaştırıldığında, bizi doğruluğa ve kesinliğe götüren entelektüel değeri yüksek olan önemli bir düşünme yöntemidir. Yeni arayışlara açık, sürekli gelişen ve büyüyen canlı bir alan olarak matematikte de, diğer bilimler kadar olmasa da uygulama aşamasında "deneme-yanılma" yaklaşımına yer verilir. Bu bakımdan matematik eğitimi, matematiğin tümünde "tutarlılık" ve "tam"lığın mümkün olamayacağı gerçeğini benimseyen, şüpheci, araştırmacı ve sorgulayıcı bir yaklaşım temelinde yapılandırılabilir.

3.4.5. Sentetik *A Priori* Yargılar Alanı Olarak Temellendirilen Matematik ve Öğretimi

Kant sonrası matematiğin felsefi temellerine ilişkin kuramsal yaklaşımların niteliği ve günümüzün kimi özgün yönelimlerin matematiğin doğası hakkındaki görüşleri, Kant'ın aritmetiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olduğu savına güçlü dayanaklar oluşturmaktadır. Sentetik *a priori* yargılar; *a priori* olmalarından dolayı genel, zorunlu ve kesindir, sentetik olma özelliklerinden dolayı da olgusal içeriklidir, empirik bilgimizin dayanağıdır ve aynı türden kavramların birbiriyle oluşturduğu sentetik birlik sayesinde dünya hakkında bir şey söylerler. İşte bu sentetik birliğin kendine temel aldığı bir dayanak, bu tür yargıların öğretici ve bilgimizi genişletme işlevini mümkün kılar. Zihnimizde bulunan ve deneyimi olanaklı kılan *a priori* yapılar aracılığıyla bu yargıların deneyimle ilişkisi bulunmaktadır. Dahası sentetik *a piori* yargılardaki aynı ya da farklı türden kavramların kendi aralarında yaptığı sentetik birlik ve bu birliğin zihinde anlamlar oluşturmasıyla öğrenme gerçekleşmektedir. Kant, sentetik *a priori* yargılara ilişkin verdiği kimi örneklerde bu tür yargıların kavramlarımıza yeni kavramlar ekleyerek bilgimizi artırdığını vurgular (Kant, 2002: § 2). Örneğin; "13 + 19 = 32" gibi bir önermede "13"e kendisinde olmayan bir başka sayı olan "19"un eklenmesiyle kendi kavramımız genişleyerek bilgimiz artmıştır. Matematiğin sentetik *a priori* yargılar alanı olarak temellendirilmesi matematik öğretiminde; onun *a priori* boyutunun soyut düşünmeyi, sentetik boyutunun da daha çok düşünme temelinde uygulamayı öne çıkardığını söylemek mümkündür. Buradaki uygulama bir tür denemedir, yani "düşünsel deney"dir. Deneme belli bir önermenin ya da sorunun bütün ayrıntılarını inceleme ve çözüm yolları arama etkinliğidir. Matematikçiler, böyle denemeler yaparak ve

indüktif akıl yürütme yoluyla genel doğrulara giderler. "Gerçek dünyada olup bitenleri matematiğin soyut modelleriyle temsil etme ve bu temsilin doğruluk derecesini belirleme, deneyimle kesinlik kazanan sezgisel duyguya ihtiyaç duyar" (Courant, 2008: s. 223).

Bu iki boyut ekseninde matematik öğretimine ilişkin görüşlerimizi belirtmeye çalışalım. Kant'ın transandantal felsefesinde sentetik *a priori* yargılar alanı olarak matematik saf düşünme edimi olan transandantal *apperception* temellinde inşa edilmektedir. İşte insan, deneyimden tümüyle bağımsız, düşünmenin kendiliğinden faal yanını oluşturan ve bütün bilgimizin kaynağında olan transandantal *apperception* sentetik düşünme edimi sayesinde matematiği öğrenir ve matematik yapar. Kant, insan bilgisinin tüm alanı içindeki en yüksek ilke, matematik ve her tür bilginin temelindeki en yüksek yeti olan *apperception*'ı göstererek, matematiğin bu düşünme edimi zemininde oluştuğunu temellendirmiştir. Böylece, transandantal *apperception* düşünme edimi temelinde oluşan matematik, aktarma ile değil ancak tamamen kendi düşünme etkinliği ile düşünmeyi-anlamayı etkin kılarak öğretilebilir ve öğrenilebilir.

Matematikte genel doğrular ya da genellemeler matematiğin simgesel ve soyut karakteriyle ifade edilmektedir. Genel doğrulara ulaşma, doğru düşünmenin yanında aksiyomatik anlayış kazanmakla mümkündür. İşte burada, matematikte uygulama yapmanın önemi ortaya çıkar. Bu bakımdan "Öğrenme giderek somut deneyim ve işlemlerden soyut düşünmeye, öğrenileni simgesel olarak dile getirmeye yönelmeli, deneyim bağlamında öğrenilen kavram ve ilişkilerin, o bağlamla sınırlı kalmadığı gösterilmeli, genelleme yolu açılmalıdır" (Yıldırım, 2008: s. 152). Matematik

öğretiminde; somut sorunlar matematiğin diliyle irdelenmeli, gerçeklik kendi diliyle ortaya konulmalı, gerçek anlamda problem çözme tekniklerine ağırlık verilerek matematiğin uygulama boyutu geliştirilmelidir. "Matematikçinin ayağı bir süre yerden kesilse bile sonunda yere basmalıdır. İnanılmaz gibi görünse de, uygulamadan en uzak salt kuramsal matematiğin bile konusu çoğu kez somut gerçekliğe ilişkindir" (Courant, 2008: s. 222).

Sentetik *a priori* yargılar alanı olarak matematik, düşünmeyi öne çıkararak, ilkeli bir disiplin anlayışıyla kendi kendine çalışarak, kavramlar arasındaki sentetik ilişkiyi kavrayarak, aktif bir biçimde öğrenme ortamına katılarak ve dahası uygulama yaparak öğrenilir. İşte burada, öğretmenlerin öğrencilere ders çalışma alışkanlıkları kazandırmaları önem kazanır.

> Çocukların çalışmayı öğrenmesi hayati önem arz eder. (...) Göğün bize, çalışmak zorunda kalmaksızın bütün ihtiyaçlarımızı sunarak [eğer olsaydı] büyük âlicenaplık göstermiş olup olmayacağı sorusu kesinlikle olumsuz cevaplanmalıdır, çünkü insan meşguliyete ihtiyaç duyar, bu belli ölçüde bir sınırlama [özgürlük kısıtlaması] gerektiren bir meşguliyet olsa bile. (...) bir çocuk çalışmaya alıştırılmalıdır ve çalışma temayülü okuldaki kadar iyi ve mükemmel şekilde başka nerede geliştirilebilir? (Kant, 2009: s. 89).

Matematik öğrenimi, dedüktif ve indüktif akıl yürütme ve cebirsel işlem becerisi gibi iki alanın birlikte geliştirilmesiyle olanaklıdır. Bu bakımdan öğrencinin öğrenim sürecinde derin düşünmesi, problem oluşturması, düşündüğünü aksiyomatik yapı üzerinde kurması ve çözüm araması önemlidir. Matematiksel doğruluğu ve kesinliği

sınamanın bir biçimi de uygulama yapmaktır. Kant, "Anlamanın en iyi yolu yapmaktır. En eksiksiz biçimde öğrendiğimiz, en iyi hatırladığımız şey bir bakıma kendi kendimize öğrettiğimiz şeydir" (Kant, 2009: s. 97) sözüyle öğrenim etkinliğinde uygulama yapmanın ve bir tür "düşünsel deney" niteliği taşıyan denemenin önemine işaret etmektedir.

Özetle; sentetik *a priori* yargıların "saf görü" ve "saf kavram" olmak üzere iki ana ayağı vardır. Görü ayağını, iki temel unsur olan "malzeme" (bu malzeme, saf malzeme yani saf görü formuna bağlı malzemedir) ve saf görü formları olan uzay ve zaman oluşturmaktadır. Derslerde teknoloji kullanımı, matematiğin görü ayağının işlevini artırarak matematiksel bilginin inşa edilmesine katkıda bulunur. Örneğin, konuların genelinde olduğu gibi "denklemler" konusu çalışılırken görsellikten yararlanılabilir. Denklemlerin farklı durumlarındaki grafiklerini ve anlamlarını daha somut görebilmek, denklem-grafik ilişkisini doğru anlamak bakımından eğitim teknolojileri daha çok hayata geçirilebilir. Dahası, derslerde "denklem" tümel kavramının uzay-zaman formları çerçevesinde kişinin gerçek yaşamıyla ve diğer alanlarla ilişkisini ortaya çıkarabilecek düşünme etkinliklerine daha çok yer verilebilir. Konu, bu kavram altında birbirini tamamlayabilecek ortak özellikleri olan kavramların bir araya getirilmesiyle ve farklı boyutlu uygulamalarla pekiştirilebilir. Sentetik *a priori* yargıların saf kavram ayağını ise, anlama yetisinin nicelik ve nitelik kategorisi altındaki saf kavramlar oluşturmaktadır. Deneyimden tamamıyla bağımsız *apperception* saf düşünme ediminin tüm akli ve anlama yetilerin temelinde olması bakımından, tekil yapıların tümel kavramlar altına alınmasını mümkün kılarak öğrenmeyi gerçekleştirir. Bu bakımdan matematik yapma faaliyetinin temelinde olan bu saf görü ve saf kavram zeminindeki inşa faaliyetine paralel olarak, matematik

eğitiminde de böyle bir “inşa yoluyla” matematiği öğretme arayışı bir model olarak düşünülmelidir. Öyleyse kısıtlanmış bir “zaman”a bağlı olarak yapılan çoktan seçmeli sınavlarda yanlış seçeneklerin elenerek doğru “şıkkı” bulma etkinliği matematiksel düşünmenin özüne aykırıdır. Bu bakımdan matematik öğretiminde; gerekli olduğu kadar yazma, çizme, işlem yapmanın bütün aşamalarını oluşturan ve yeterli bir zamanda düşünmeyi etkin kılan uygulamalara daha çok yer verilmelidir.

SONUÇ

Eskiçağdan günümüze kadar matematiğin felsefeyle ilişkisi incelendiğinde onun, genel olarak felsefi söylemden uzak kalmadığını, aksine zaman zaman felsefi söylemin temelinde yer alarak geliştiğini görmekteyiz. Tüm zamanlarda; matematiksel bilginin doğruluğuna ve kesinliğine olan güven yüksek olmakla birlikte, Kant öncesinde özelde sayı, genelde de matematik ayrıntılı olarak temellendirilememiştir. Bu bakımdan tezde, Kant'ın aritmetik görüşleriyle birlikte Kant sonrasındaki görüşler de ele alınmıştır.

Kant'ın amacı, sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını, matematiğin en temel nesnesi olan sayının inşasının ayrıntılı bir biçimde temellendirilebileceğini göstererek metafiziği matematiksel nitelikte kesin bir bilim haline getirmektir. Çünkü Kant'ın, "dogmatik metafizik" dediği geleneksel metafiziğin bilgisinden ciddi kuşkuları vardır. Ona göre Eskiçağdan beri düşüncenin boş, hayali yollara yönelmesi sonucunda metafizik, sonu gelmeyen çatışmaların savaş alanı olmuş ve bilim olmaktan uzaklaşmıştır. Transandantal felsefenin ana problemi "Nesne nedir ve nasıl oluşur?" sorusu olması bakımından,"Sentetik *a priori* yargılar nasıl olanaklıdır?" sorusu ontolojik nitelikte bir sorudur. Bu soruya yanıt bulmak nesnenin mekânının

gösterilmesiyle mümkündür. Çünkü sayı bir ontolojik nesnedir ve bu bakımdan bir mekâna tâbi olması gerekir.

Transandantal felsefede düşünmenin bir yanı, görüsel karşılığı tesis ederek her türlü *a posteriori* bilgiyi oluşturur. Düşünmenin bu yanı, anlama yetisinin bir tür işlevi olarak deneyimin olanağını sağlar. Bir başka anlatımla, anlama yetisi, hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen tikel malzemeye sentetik bir birlik vererek deneyimi mümkün kılar. Düşüncenin kendi içinde duyuların bir ürünü olarak sınırlandırılmaması düşünmenin diğer yanını, yani "düşünmenin kendiliğinden faal yanı"nı oluşturur. Düşünmenin bu yanını da, hissetme yetisinden (duyusallıktan) gelen hiçbir *a posteriori* unsurun olmadığı şeye yönelen ve saf bir düşünme edimi olan transandantal *apperception* edimi oluşturmaktadır. Bu yanıyla düşünme idrâk edebileceği malzemeye üretici hayal gücü aracılığıyla yönelir. Yani transandantal *apperception* ediminin hissetme yetisinin saf malzemesine yönelişi üretici hayal gücünü etkin kılmaktadır. Böyle bir yöneliş sonucunda her türlü nesnenin (sayının) mekânı olan "saf ben"in kurulumu gerçekleşmektedir. Katışıksız bir düşünme edimi olan *apperception* anlama yetisinin düşünme edimlerinden farklı olarak, sentetik *a priori* yargıların oluşmasını mümkün kılan ve tek bölünmez bir bütün olan "saf ben" mekânını tesis eder. *Apperception* yoluyla "saf ben"in tesis edilmesi demek, saf tekil temsillere birlik vererek sayının inşa edilebileceği ontolojik mekânın kurulması demektir.

Kant, deneyim kökenli olmayan fakat bilgimizi genişletme özelliğine sahip sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını, tüm düşünme ve idrâk faaliyetlerinin zemininde olan

transandantal *apperception* (sentetik ve bütünü kavrayabilen saf düşünme edimi) ediminin, nesnenin (sayının) mekânı olan "saf ben"i tesis ettiğini göstererek temellendirmiştir. Transandantal felsefede "saf ben"in tesis edilmesiyle birlikte, her türlü yargının ve nesnenin (sayının) tesis edileceği mekân da kurulmuş olmaktadır. Çünkü "saf ben" sayının malzemesi olan *a priori manifold*un birlik verildiği ve birleştirildiği bir mekândır ve anlama yetisine önceliği vardır.

Teorik aklın matematiksel yargıların oluşumundaki rolüne bakılacak olursa, akıl teorik kullanımında tümel nesneyi kurmadan hiçbir mantıksal çıkarımda bulunamaz. *Apperception* edimi aklın kuruluşunun zemininde yer alması bakımından tümel nesnenin kurulumunun temelinde yer almaktadır. Anlama yetisinin kurallar yetisi ve aklın ilkeler yetisi olması bakımından ise, bir düşünme yetisi olarak teorik akıl hissetme yetisinin (duyusallığın) *a priori* formlarının koşullarına ve anlama yetisine tâbi olarak tekilleştirilmiş yargıları genel ilkeler altına alarak matematiğin tümünde genellemelerin oluşturulmasını mümkün kılmaktadır. Yine matematik açısından düşündüğümüzde, düşünme yetisinin anlama yetisi olarak adlandırılan yanı tikelin birliğini sağlamada, yargı gücü tikeli tümel altına almanın kurallarını belirlemede, akıl yanı ise yargı gücünün yargılarını birbirine bağlayarak mantıksal sonuçlar çıkarmada rol almaktadır. Bir başka deyişle akıl, anlama yetisinin tekil matematik önermelerinden büyük teoremleri oluşturmaktadır.

Kant'ın felsefesinde üretici hayal gücü bir düşünme yetisi değildir, fakat bilginin görü yanı ile kavram yanı arasındaki bağlantıyı transandantal şemalarla kurarak sentetik *a priori* yargıların oluşmasına katkıda bulunur. Ayrıca hayal gücünün bu

yanının üretici sentezlemeyi olanaklı hale getirmesi, aritmetiğin yargılarının üç aşamalı üretici saf sentez sonucunda ortaya çıkmasına imkân sağlar. Başka bir anlatımla Kant, üretici hayal gücünün; sayının malzemesi olan saf *manifold*ları "saf ben" mekânında canlandırmasında aldığı rol, saf sentez ve transandantal şemayı olanaklı kılmasında üstlendiği işlev, ayrıca anlama yetisinin nicelik kategorisi ile hissetme yetisi (duyusallık) arasında kurduğu bağlantı ile sayının inşasını olanaklı hale getirdiğini göstermiştir.

Kant'ın özgün yönlerinden biri de transandantal mantığın içeriğinin *a priori* ontolojik unsurlardan oluştuğunu göstermesidir. Çünkü transandantal felsefede *a priori* inşa edilebilen bir nesne olarak sayının ontolojik mekânını belirlemek gerekir, aksi halde sayının inşası açıklanamaz. Çalışmada Kant'ın sentetik *a priori* yargıların olanaklılığını, dolayısıyla sayının inşasını, bilme yetilerinin rollerini tek tek ele alarak, sayının inşa edildiği zemini ve bu zeminin *a priori* koşullarını transandantal mantık yoluyla belirleyerek açıkladığı sonucuna varılmıştır.

Kant'ta matematik bilgisi saf görü temelli olmakla birlikte, anlama yetisinin nicelik kategorisiyle olanaklı hale gelmektedir. Başka bir deyişle, sayının malzemesi olan saf görü temelli *a priori manifold* anlama yetisinin bu tümel kavramları veya düşünme formları çerçevesinde biçimlendirilir. Yani, kategoriler olmadan matematiksel bilgi oluşamaz. Anlama yetisinin saf kavramlarından biri olan nicelik kategorisinin üç esas kategorisi "birlik", "çokluk" ve "bütünlük (*universitas*)" kategorileri aynı türden saf *manifold*lara birlik vererek sentetik *a priori* yargının oluşmasında ve sayının inşasında merkezi bir konuma sahiptir. Bütünlük kavramı,

yani *universitas* çoklukta birliğin düşünülmesidir. Tekil saf temsillerin "saf ben" mekânında birliğinin sağlanarak bütünlük oluşturulması *universitas*la mümkündür. Bu bakımdan *universitas* sayının inşasında temel bir kavramdır.

Kant'ta sayı, zaman formundaki *a priori manifold*a sentetik birlik verilmesi sonucunda ortaya çıkmaktadır. Burada sayının görü temelli olduğu savı, sayının malzemesinin görüde olduğuna işaret etmektedir. Fakat bir nesne olarak sayının yalnızca yargı içinde ortaya çıktığını tekrar belirtelim. *A priori* görü formu olan zamanın ardışık olması, ardışık bir yapıya sahip olan sayının inşasını mümkün kılmaktadır. Kant'ın sayıyı zaman temelinde açıklaması, Kant sonrası yoğun eleştirilere maruz kalmıştır. Öte yandan zamanı matematikle ilişkilendirmek istemeyen yaklaşımların hiçbiri de sayıyı felsefi açıdan doyurucu bir biçimde temellendirememiştir. Bu bakımdan Kant, matematiğin en temel nesnesi olan sayının nasıl inşa edildiğini kavramsal düzeyde açıklayarak, matematik felsefesinin oluşmasına da öncülük etmiş ve özgün katkılarda bulunmuş bir filozoftur.

Kant sonrasında matematiğin temellerine ilişkin felsefi görüşlerin sayının ontolojik zeminini göstermeden sayıyı tanımlama girişimleri, matematiğin neliği hakkında sistematik, derin ve kavramsal düzeyde tutarlı yaklaşımların gelişmesini güçleştirmiştir. Bunlardan en iddialısı olan Frege'nin aritmetik görüşüdür. Kant sayıyı görü temelinde ele alırken, Frege sayıyı düşüncede, yani kavramsal olanda ve dilde tanımlamaktadır. Başka bir deyişle Frege'de sayı "düşünceler evreni"nde ortaya çıkmaktadır. Örneğin, "Pyhtagoras Teoremi" kişinin hissetme yetisinden (duyusallığından) bağımsızdır, yani zaman dışında vardır ve düşünce içeriğine aittir.

Frege'ye göre kavramlar doymamış şeylerdir ve bir sayı tümcesi bir kavram hakkında bildirim içerir. Nesnelerin kavramlar altına düşmesi sayma işlemini mümkün kılar. Örneğin; "bu kitap 150 sayfadır" ya da "bu sayfada üç paragraf vardır" dediğimizde "sayfa" ve "paragraf" kavramları altına düşen nesneleri saymış oluruz. Frege'de, doğal sayılar fiziksel şeylerin özellikleri değildir, doğal sayılar küme kuramıyla ve "aynılık (özdeşlik)" kavramıyla, yani genel mantığın özdeşlik yasasına dayanılarak tanımlanmıştır. Frege, "'0'ı kendisiyle aynı olmayan", "'1'i '0'la aynı olan", "'2'yi de aynı şekilde '0' veya '1' sayısıyla aynı olan" kavramına ait sayı olarak tanımlar. Frege, "'0'ı bütün boş kümelerin kümesi", "'1'i bütün bir elemanlı kümelerin kümesi", "'2'yi bütün iki elemanlı kümelerin kümesi", "'x' gibi bir sayıyı da bütün 'x' elemanlı kümelerin kümesi" olarak tanımlamaktadır. İşte, Frege'nin "x" gibi bir sayıyı "x" elemanlı bütün kümeleri kapsayan küme olarak tanımlaması "Russell Paradoksu"na yol açmıştır. Bu paradoks, sayının mantığın özdeşlik yasası temele alınarak tanımlanamayacağını, dolayısıyla da aritmetiğin analitik *a priori* yargılar alanı olamayacağını göstermektedir. Fakat aritmetiğin daha gelişmiş bir mantık çerçevesine gereksiniminin olması, sayı için yeterli olmayan mantığın sembolik formlarda yeniden geliştirilmesini zorunlu kılmıştır. Dolayısıyla Frege'nin sayıyı saf görü zemininden kopartarak sadece mantık ilkeleriyle açıklama girişimi ontolojik bir hataya neden olmuştur. Bundan ötürü de, aritmetiğin tümünün analitik *a priori* yargılar alanı, yani mantığın bir dalı olduğunu iddia eden Frege'nin öncülük ettiği mantıkçı görüş sarsılmıştır.

Biçimci görüşün öncüsü olan ve aynı zamanda 20. yüzyıl matematiğine damgasını vuran ünlü matematikçi Hilbert, geliştirdiği bazı özel formüllerle matematik teoremlerini kanıtlamış olması sonucunda, matematiğin kendi içinde aksiyomlardan

oluşan kapalı bir sistem olduğunu iddia etmiştir. Hilbert matematiğe sağlam temeller bulmak amacıyla, matematiksel bir sistemdeki her önermenin kendisinin ya da değilleyeninin kanıtlanabildiğini ve ayrıca sistemdeki her önermenin kendisi doğru iken değilleyeninin yanlış olduğunu göstermeye çalışarak matematiğin tümünün "tam" ve "tutarlı" olduğunu ileri sürmüştür. Hilbert çalışmalarıyla matematiksel bilginin kesinliğine olan güveni tekrar kazandırdığını düşünürken, Gödel, tamamlanamazlık (*incompleteness*) teoremleriyle matematikte tamlık ve tutarlılığın sadece sınırlı dizgelerde mümkün olabildiğini ispat etmiştir. Matematik eğer Hilbert'in iddia ettiği gibi bir yığın bilgiden oluşan kapalı bir sistem olsaydı, matematiğin tümü tamamlanmış, tümü doğrulanmış donuk bir alan olarak kalacaktı. Tanınmış matematikçi Andrew Wiles, 1993'te matematikte çözülemeyen problemler arasında yer alan Pierre de Fermat'nın son teoremini ispatlamış olsa da, günümüzde hâlâ çözülmesi gereken problemlerin varlığı bir gerçektir. Zaman içinde bu problemlerden bazıları çözülebilir, bazılarının da çözülemeyeceği gösterilebilir. Fakat matematiğin doğası gereği yine de ispatlanamayan önermeler hep olacaktır. İşte matematiğin günümüzde gelmiş olduğu düzey Hilbert'in görüşünü çürütürken, Gödel'in görüşünü de desteklemektedir. Gödel çalışmasıyla, matematiğin sürekli gelişen bir alan olarak temel ilke ve kavramlar zemininde bir düşünme yöntemi, bir problem çözme ve ispatlama etkinliği olduğunu göstermiştir. Dahası Gödel, sonlu sayıdaki matematiksel önermelerin sonsuz olan matematiksel gerçekliği karşılayamayacağını, matematiksel düşünmenin ve akıl yürütmenin her türlü simgeselliğin ya da aksiyomatik sistemin üzerinde olduğunu kanıtlamıştır. Böylelikle, matematiğe ilişkin mantıkçı görüş gibi biçimci görüş de sarsılmıştır.

Biçimci yaklaşımın sarsılması üzerine matematiğe sağlam bir temel bulma arayışı sezgici yaklaşımla devam etmiştir. Sezgici görüşün, matematiğin, sonlu adımda doğal sayılar üzerine inşa edilebileceğini iddia etmesi ve sonlu adımda ispatlanamayan teoremlerin doğruluk değerinin "belirsiz" olduğuna vurgu yapması matematiğin doğasına aykırıdır. Dahası bu yaklaşımın, bu tür önermeleri matematiğin dışında sayma girişiminin, insan aklının gücüne sınırlama getirmek anlamına geldiğini belirtelim. Bu yönüyle sezgiciliğin, matematiği açıklamada yetersiz kaldığı gibi, sayının inşasında da iki parçalı zaman görüşünü temellendiremediği görülmüştür.

Çalışma boyunca yapılan araştırmaların bulguları ışığında Kant sonrası kimi mantıkçı, matematikçi-filozofların sayının inşasına ilişkin, bilme yetilerine dayanarak, kavramsal düzeyde ve geniş çaplı bir temellendirme girişimlerinin bulunmadığı saptanmıştır. Matematiğin temel nesnesi olan sayının ontolojik mekânını araştırmaktan ve göstermekten uzak olan bu görüşlerin, matematiğin doğasını açıklamakta yetersiz kaldığı açık kılınmıştır. Başka bir deyişle, sözü edilen epistemolojik yaklaşımların, matematiği ontolojik zemininin dışında tutmalarının sonucu olarak ortaya çıkan (ontolojik) sorunları dilin imkânlarıyla çözme girişimlerinde başarılı olamadıkları saptanmıştır.

Günümüzdeki özgün yönelimlerin genelinin de matematiğe ilişkin kuramsal yaklaşımları eleştirerek görüş geliştirdiklerini görüyoruz. Bunlardan kimileri, matematiksel bilginin doğruluğunun kesinliğini kayıtsız şartsız kabul eden görüşleri önyargılı yaklaşımlar olarak değerlendirirken, kimileri de matematiğe felsefi temel

bulma girişimlerinin gereksiz olduğuna işaret etmektedirler. Burada göz önüne alınan üç felsefi yaklaşım eleştirel bir çözümlemeye tâbi tutulduktan sonra bu yaklaşımların niteliğine, günümüzün özgün yönelimlerinin söylemlerine ve dahası Kant'ın ontolojik nitelikli özgün çalışmasına bakıldığında, Kant'ın yaklaşımının sayının inşasını temellendirme girişimlerinde dikkate alınması gereken en sağlam yol olduğudur. Bu bakımdan, Kant'ın aritmetik görüşü temelinde günümüzün matematik eğitimi ele alınmıştır.

Kant'ın bilgi felsefesi zemininde, eğitimde popüler bir yaklaşım olarak kabul edilen yapılandırmacılığın bilgi, öğrenme ve gerçeklik görüşleri araştırıldığında bu kavramlara ilişkin felsefi açıdan tatminkâr bir açıklama getiremediği tespit edilmiştir. Yapılandırmacı öğrenme kuramının öncülerinden Dewey, Piaget ve Von Glasersfeld'in göreceli bilgi anlayışları ve dahası nesnel bilginin olanaksızlığı görüşü eğitimde önemli sorunlara yol açabilir. Dewey'ye göre bilgi, gerçekliği olduğu gibi yansıtan bir yapı olmanın ötesinde deneyimler sonucunda oluşan bir ürün olurken, Piaget'de bilgi bilişsel yapıların bir ürünü olarak, insanın dünya ile etkileşimlerinin sonucunda değişebilen bir yapıdır. Dolayısıyla bilgi gerçekliğin edilgen bir kopyası değildir. Radikal yapılandırmacılık görüşüyle bilinen Von Glasersfeld'e göre ise nesnel bilgi olanaksızdır. Bu bakımdan bilimsel bilgi bize gerçekliğin bilgisini veremez.

Doğru eğitim, doğru bir eğitim kuramı ve bu kuramın gerektirdiği doğru uygulamalarla olanaklıdır. Yapılandırmacı öğrenme kuramının felsefi temellerinin daha çok pragmatizme dayanmasının bir sonucu olarak, bilgide nesnelliğin

olanaksızlığı ileri sürülmektedir. Kant'ın, transandantal felsefesinde nesnel bilginin anlama yetisinin saf kategorileri aracılığıyla olanaklı olduğunu göstermesi, dahası aritmetik görüşünü geniş çaplı temellendirmesi, onun görüşleri temelinde matematik eğitiminin ele alınmasını mümkün kılmıştır. İşte buradan hareket edilerek Kant'ın genelde bilgi, insan, eğitim ve özelde de aritmetik görüşleri temelinde matematik eğitimine ilişkin bir taslak niteliğinde olabilecek öneriler geliştirilmeye çalışılmıştır.

Günümüz matematik eğitiminde, matematiğin kavramsal boyutuna gereği kadar yer verilmemesi, matematiği anlamı olmayan ve kendi içinde kapalı bir sistem olarak gören formalist (biçimci) yaklaşımın eğitimde ağırlığını korumasında etkili olmuştur. Böylece matematik eğitimi, kavramların anlamları üzerinde anlamaya dayanan bir etkinlik olmaktan uzaklaşarak, kabul edilmiş önermeler zemininde ezber bilgilerle işlem yapma olarak anlaşılmıştır. Kant'ta ise matematik, kavramlardan inşa edilen bir akıl bilgisidir. Matematik eğitiminde, matematiğin kavramlardan inşa edildiği gerçeğini merkeze alan bir yaklaşım; matematiğe insan kültüründe ve insan yaşamının etkinliklerinde daha anlamlı bir konum kazandıracağı gibi, matematik eğitimindeki sorunların daha nesnel bir biçimde tespit edilmesine, bu sorunların doğru olarak tanımlanmasına ve çözüm önerilerinin geliştirilmesine de geniş çaplı katkılar sağlayabilecektir. Bu bakımdan matematik öğretiminde/öğreniminde kavramı zemine alan bir eğitim yaklaşımı hayata geçirilmelidir. Çünkü matematikte düşünme ve öğrenme etkinliğinin gerçekleşmesi, kavramların tanımlarının yapılmasıyla olanaklıdır. Dahası her türlü öğrenme, tekil yapıların tümel kavramlar altına getirilip bütünlük (*universitas*) verilmesiyle mümkündür. Bu bağlamda, matematik eğitimi Kant'ın *universitas* saf kategorisi temelinde yapılandırılabilir.

Bilgi, düşünmek için gerekli olan bir birikim olmakla birlikte yeterli değildir. Matematik eğitiminin ana amacı, öğrenciyi temel bilgi ve becerilerle donatmanın yanı sıra ona akıl yürütme, analiz-sentez yapma, sebep-sonuç ilişkisi kurma, yargıda bulunma, karar verme gibi düşünme edimlerini kazandırmak da olmalıdır. Kant'ın epistemolojisinde ussal çıkarımlarda orta terimin elde edilmesini mümkün kılan, hem bilme yetisi kapsamındaki bir düşünme yetisi hem de kurallar altına getirme yetisi olarak tanımlanan "yargı gücü"nün matematik eğitiminde kullanımına ağırlık verilmesinin dedüktif (tümdengelimsel), indüktif (tümevarımsal) ve diğer düşünme biçimlerini geliştireceği açıktır.

Kant'ta hissetme yetisi (duyusallık) ve anlama yetisi her türlü bilginin oluşumunda bilmenin iki temel, "olmazsa olmaz" unsurudur. Öğrenenin öğrenmedeki bireysel farklılıkları öğretimin farklılaştırılmasını zorunlu kılmaktadır. Kant'ın matematiği sentetik *a priori* yargılar alanı olarak temellendirmesi; matematik öğretiminde öğrenmenin, öğrencilerin günlük deneyimlerine dayalı olarak düşünme ve uygulamanın bütünlüğü üzerinde gerçekleşebileceğini göstermektedir. Tezimizde ortaya koymaya çalıştığımız gibi, matematik olmuş-bitmiş, donuk, durağan bir alan değildir. Bu bakımdan, matematiksel doğruluğun ve kesinliğin deneme-yanılma temelinde sınanmasına daha çok yer verilmelidir.

Kısacası matematik eğitimi Kant'ın görüşleri bağlamında; matematiğin sentetik *a priori* karakteri, kavramlarının *a priori* görü temelinde anlama yetisinin saf

kategorileri tarafından inşa edilmesi, onun tümdengelimsel bir yapıya sahip olması ve dahası yargı gücünün mantıksal çıkarımlarda orta terimi keşfetmedeki rolü merkeze alınarak yeniden yapılandırılmalıdır.

KAYNAKLAR

Akarsu, B. (1998). *Felsefe Terimleri Sözlüğü.* İstanbul: İnkılâp Kitabevi.

Akdoğan, C. (2013). "Immanuel Kant'ın Bilim Felsefesine Birincil ve İkincil Nitelikler Ayrımını Yadsıyarak Yaptığı Devrimsel Katkı". Ed. Kutlusoy, Z., *Tutarsızlığın İz Sürücüsü:Dilde/Düşüncede-Teo Grünberg'e Armağan* içinde (s. 245-251). Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.

Aksoy, Y. (2000). *Dünya Matematikçileri.* İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları.

Albayrak, Y. (2012). *Yapılandırmacı Paradigma Bağlamında Öğetmenin Rolünün İncelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Maltepe Üniversitesi.

Aristoteles, (1950). "Analitica Posteriora". Ed. Ross, W. D., Çev. Mure, G. R. G., *The Works of Aristotle* içinde. Cilt I. London: Oxford University Press.

Aristoteles, (2002). *ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΙ / Kategoriler*. Çev. Babür, S., 2. Baskı, İstanbul: İmge Kitabevi Yayınları.

Aristoteles, (2005). *Politika*. Çev. Tunçay, M., İstanbul: Remzi Kitabevi.

Arf, C. (1993). "Matematiğin Şiir Yönü". *Matematik Dünyası, 3*(4), (s. 8-11)

Aschenbrenner, K. (1983). *A Companion to Kant's Critique of Pure Reason.* London: University Press of America.

Ayer, A. J. (1970). *Language, Truth and Logic*. London: The Camelot Press.

Aydın, H. (2012). *Felsefi Temelleri Işığında Yapılandırmacılık*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Barker, S. F. (2003). *Matematik Felsefesi*. Çev. Dursun, Y., Ankara: İmge Kitabevi.

Beaney, M. (1997). *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell Publishers Lt.

Benacerraf, P. (2004). "Matematiksel Hakikat". Ed. Gür, B. S., Çev. Özlük, M., *Matematik Felsefesi* içinde (s. 239-264). Ankara: Orient Yayınevi.

Bernays, P. (2004). "Matematikteki Platonculuk Üzerine". Ed. Gür, B. S., Çev. Kayan, C. & Gür, B. S., *Matematik Felsefesi* içinde (s.175-194). Ankara: Orient Yayınevi.

Bilgiç, M. (2011). *Universitas Kavramının Kant Felsefesindeki Yeri ve Üniversite Kurumu ile İlişkisi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. İstanbul: Maltepe Üniversitesi.

Brouwer, L. E. J. (2002). "Intuitionism and Formalism". Ed. Jacquette, D., *Philosophy of Mathematics* (pp. 269-276). Massachusetts: Blackwell Publishers.

Brouwer, L. E. J. (2004). "Sezgicilik Üzerine Konuşmalar". Ed. Gür, B. S., Çev. Kayan, C. & Gür, B. S., *Matematik Felsefesi* içinde (s.163-174). Ankara: Orient Yayınevi.

Cassirer, E. (2007). *Kant'ın Yaşamı ve Öğretisi.* Çev. Özlem, D., İstanbul: İnkılâp Kitabevi Yayınları.

Chaitin, G. J. (2004). "Matematiğin Temelleri Üzerine Uyuşmazlık Yüzyılı". Ed. Gür, B. S., Çev. Gür. B. S., *Matematik Felsefesi* içinde (s.359-397). Ankara: Orient Yayınevi.

Coşkun, M. K. (2011). *Kavram Öğretimi*. Adana: Karahan Yayınları.

Courant, R. (2008). "Modern Dünyada Matematik". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s. 217-233). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Çitil, A. A. (2000). *Kant'ın Transandantal Düşüncesinde Nesne Kuramı ve Bu Kuramın Derinleştirilmesinin Yolaçtığı Bazı Sonuçlar.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi.

Çitil, A. A. (2012a). *Matematik ve Metafizik, Kitap I: Sayı ve Nesne*. İstanbul: Alfa Yayınları.

Çitil, A. A. (2012b). *Çağdaş Felsefe-I*. Ed. Akıncı, S., Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Çotuksöken, B. (1998). *Kavramlara Felsefe ile Bakmak*. İstanbul: İnsancıl Yayınları.

Çotuksöken, B. (2000). *Felsefi Söylem Nedir?* İstanbul: İnkılâp Yayınevi.

Çotuksöken, B. (2013). *Felsefe: Özne-Söylem.* İstanbul: Notos Kitap Yayınevi.

Çotuksöken, B. (2010). "Dışdünya-Düşünme-Dil İlişkisi Olarak Bilgi". Ed. Çotuksöken, B. & Tunçel, A., *Bilgi Felsefesi* içinde (s. 17-31). İstanbul: Heyamola Yayınları.

Davis, P. J. & Hersh, R. (2008). "Sanal Nesnelerin Varlık Sorunu". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s. 213-216). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Deleuze, G. (1995). *Kant'ın Eleştirel Felsefesi*. Çev. Altuğ, T., İstanbul: Payel Yayınevi.

Deleuze, G. (2007). *Kant Üzerine Dört Ders.* Çev. Baker, U., İstanbul: Kabalcı Yayınevi.

Descartes, R. (1945). *Aklın İdaresi İçin Kurallar.* Çev. Karasan, M., İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Descartes, R. (1963). *Felsefenin İlkeleri*. Çev. Karasan, M., İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Descartes, R. (1998). *Yöntem Üzerine Konuşma.* Çev. Timuçin, A., İstanbul: Çağdaş Mabaacılık Yayıncılık Ltd. Şti.

Descartes, R. (2007). *Meditasyonlar.* Çev. Birkan, İ., Ankara: BilgeSu Yayıncılık.

Dewey, J. (2011). *Deneyim ve Eğitim*. Çev. Akıllı, S., Ankara: ODTÜ Yayıncılık.

Dursun, Y. (2004). *Felsefe ve Matematikte Analitik/Sentetik Ayrımı.* Ankara: Elips Kitap.

Field, H. (2004). "Matematikte Realizm ve Karşı-Realizm". Ed. Gür, B. S., Çev. Özlük, M. & Kayan, C., *Matematik Felsefesi* içinde (s. 265-298). Ankara: Orient Yayınevi.

Fleury, S. C. (1998). "Social Studies, Trivial Constructivism, and the Politics of Social Knowledge". Eds. Marie, L., Nadine, B. & Jim, G., *Constructivism and Education* (pp.156-172). Cambridge: Cambridge University Press.

Frege, G. (2008). *Aritmetiğin Temelleri Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme.* Çev. Gözkân, B., İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Friedman, M. (1994). *Kant and the Exact Sciences*. Cambridge: Harvard University Press.

Gasking, D. (2004). "Matematik ve Dünya". Ed. Gür, B. S., Çev. Gür, B. S. & Kayan., C., *Matematik Felsefesi* içinde (s.195-215). Ankara: Orient Yayınevi.

Gödel, K. (1994). "Russell's mathematical logic". Eds. Benacerraf, P. & Putnam, H., *Philosophy of mathematics* (pp. 447-469). Cambridge: Cambridge University Press.

Gödel, K. (2004). "Cantor'un Süreklilik Problemi". Ed. Gür, B. S., Çev. Kayan, C., & Gür, B. S., *Matematik Felsefesi* içinde (s.217-238). Ankara: Orient Yayınevi.

Gödel, K. (2010). *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine-I.* Çev. Ekin, Ö., İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları.

Gözkân, B. (2002). "Kant'ın Metafizik ve Akıl Eleştirisi Üzerine Bir Eleştiri". *Yeditepe'de Felsefe* (Felsefe Tarihi Soruları), (7), (s. 21-79).

Gözkân, B. (2006). "Kant'ın Eleştiri Öncesi Döneminden Eleştiri Dönemine Geçişteki Anahtar Yazı: Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında". *Felsefe Tartışmaları*, (37), (s. 43-55).

Gözkân, B. (2008a). "Sunuş: Frege ve Aritmetiğin Temelleri". *Aritmetiğin Temelleri Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme* içinde (s.13-69). İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Gözkân, B. (2008b). "Sunuş". *Gödel Kanıtlaması* içinde (s.ix-xviii). İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları.

Gözkân, B. (2013). "*Saf Aklın Eleştirisi*'nde 'Ben'in Kuruluşu". Ed. Kutlusoy, Z., *Tutarsızlığın İz Sürücüsü:Dilde/Düşüncede-Teo Grünberg'e Armağan* içinde (s.313-336). Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.

Grünberg, D. (2010). "Gerekçelendirme ve Doğruluk ". Ed. Çotuksöken, B. & Tunçel, A., *Bilgi Felsefesi* içinde (s. 33-76). İstanbul: Heyamola Yayınları.

Gür, B. S. (2005). "Leibniz'in Matematiksel Düşüncesi". *Matematik Dünyası*, (3), (s. 91-96).

Hartmann, N. (1998) *Ontolojinin Işığında Bilgi.* Çev. Tepe, H., Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Çeviri Dizisi.

Hardy, H. G. (1994). *Bir Matematikçinin Savunması.* Çev. Arık, N., Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları Dizisi.

Heistermann, W. (1968). "Kant'ın Felsefesinde İnsanın Yeri". *Felsefe Arkivi,* (16), (s. 49-62).

Heimsoeth, H. (2007). *Kant'ın Felsefesi.* Çev. Mengüşoğlu, T., Ankara: Doğu Batı Yayınları.

Hempel, C. G. (2008). "Matematiksel Doğruluğun Niteliği". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s.191-200). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Hersh, R. (1999). *What Is Mathematics, Really?* Oxford: Oxford University Press.

Hersh, R. (2004). "Matematik Felsefesinin İhyası İçin Bazı Öneriler (*Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*)". Ed. Gür, B. S., Çev. Özlük, M. & Gür, B. S., *Matematik Felsefesi* içinde (s. 399-427). Ankara: Orient Yayınevi.

Hilbert, D. (2004a). "Sonsuz Üzerine". Ed. Gür, B. S., Çev. Güner, H., *Matematik Felsefesi* içinde (s.117-142). Ankara: Orient Yayınevi.

Hilbert, D. (2004b). "Matematiğin Temelleri". Ed. Gür, B. S., Çev. Kayan, C., *Matematik Felsefesi* içinde (s.143-161). Ankara: Orient Yayınevi.

Hume, D. (1993). *An Enquiry Concerning Human Understanding.* Indianapolis: Second Edition Eric Steinberg. Hackett Publishing Company.

Hofstadter, D. R. (2008). "Yeni Baskıya Önsöz". Çev. Gözkân, B., *Gödel Kanıtlaması* içinde (s.xxi-xxxi). İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları.

İyi, S. (1999). *Çağımızda Metafizik Sorunu*. Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

James, W. (1986). *Pragmacılık I*. Çev. Aşkın, M., İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Kant, I. (1967). *Kant-Philosophical Correspondence 1759-99*. Trans. Zweig, A., Chicago & London: The University of Chicago Press.

Kant, I. (1974). *Logic*. Trans. Hartman, R. S. & Schwarz, W., Indianapolis and New York: The Bobbs-Merrill Company, Inc.

Kant, I. (1993). *Arı Usun Eleştirisi*. Çev. Yardımlı, A., İstanbul: İdea Yayınevi.

Kant, I. (1995). *Ahlâk Metafiziğinin Temellendirilmesi*. Çev. Kuçuradi, İ., Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

Kant, I. (1998). *Critique of Pure Reason (CPR)*. Trans. Paul, G. & Allen, W. W., New York: Cambridge University Press.

Kant, I. (1999). *Pratik Aklın Eleştirisi*. Çev. Kuçuradi, İ., Gökberk, Ü. & Akatlı, F., Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

Kant, I. (2001). *Critique of the Power of Judgement*. Ed. Guyer, P., Trans. Guyer, P. & Mattews, E. N. Y., Cambridge: Cambridge University Press.

Kant, I. (2002). *Gelecekte Bilim Olarak Ortaya Çıkabilecek Her Metafiziğe Prolegomena (PR)*. Çev. Kuçuradi, İ. & Örnek, Y., Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

Kant, I. (2009). *Eğitim Üzerine*. Çev. Aydoğan, A., Ankara: Say Yayınları.

Karaçay, T. (2004). "Yirminci Yüzyılda Matematiği Sarsan Temel Düşünceler". *Matematik Dünyası,* (2), (s. 62).

King, J. P. (1998). *Matematik Sanatı*. Çev. Arık. N., Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları Dizisi.

Koç, Y. (1994). "Nesne ve Mekan". *Felsefe Arkivi,* (29), (s.13-20).

Koç, Y. (1995). "Doğal Sayıların Ontolojisi Bakımından Transendental Mantığın Önemi ve Matematiksel Mantığın Bir Eleştirisi". Ed. Şafak Ural. *Matematik ve Felsefe.* Viyana-İstanbul Felsefe Çevresi Sempozyumu. (1994) Isıs Ltd. Şti. (s. 54-63).

Koç, Y. (1997). "Matematiğin Ontolojisi Bakımından Kant ile Frege Karşılaştırması". *Felsefe Arkivi,* (30). (s. 50-54).

Kuçuradi, İ. (1988). *Uludağ Konuşmaları*. Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

Kuçuradi, I. (1995). "Knowledge and Its Object". Eds. Kuçuradi, İ. & Cohen, R. S., *The Concept of Knowledge* (pp. 97-102). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kuçuradi, İ . (2009). *Çağın Olayları Arasında.* Ankara: Şiir-Tiyatro Yayınları.

KTAV, (2010). "Sensory Learning Styles". Erişim 29. 2.2010, Erişim Sitesi: http://bb.plsweb.com/LSPD1/m1/m3/topicd.html.

Kutlusoy, Z. (2003). *Temel Sembolik Mantık*. Ankara: Art Basın Yayın Kültür Hizmetleri Ltd. Şti.

Kutlusoy, Z. (2006). "Doğruluk". Ed. Cevizci, A., Cilt 4. *Felsefe Ansiklopedisi* içinde (s. 666-669). Ankara: Babil Yayınları.

Larochelle, M. & Bednarz, N. (1998). "Constructivism and Education Beyond Epistemological Correctness". Eds. Marie, L., Nadine, B. & Jim, G., *Constructivism and Education* (pp. 3-20). Cambrige University Press.

Leibniz, G. W. (1998). *Philosophical Texts*. Eds. & Trans. Woolhouse, R. S. & Francks, R., Oxford: Oxford University Press.

Locke, J. (1992). *İnsan Anlığı Üzerine Bir Deneme.* Çev. Hacıkadiroğlu, V., İstanbul: Ara Yayıncılık.

Maddy, P. (2004). "Kümeler ve Sayılar". Ed. Gür, B. S., Çev. Özoğlu, M., *Matematik Felsefesi* içinde (s. 299-324). Ankara: Orient Yayınevi.

McQuade, F. & Champagne, D. W. (1995). *How to Make a Better School.* Massachusetts: Allyn and Bocon.

Mehlberg, H. (2002). "The Present Situation in the Philosophy of Mathematics". Ed. Dale. J., *Philosophy of Mathematics* (pp.65-82). Massachusetts: Blackwell Publishers.

Mengüşoğlu, T. (1969). *Kant ve Scheler'de İnsan Problemi*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Mengüşoğlu, T. (1998). *İnsan Felsefesi*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Nagel, E. & Newman, J. R. (2008). *Gödel Kanıtlaması*. Çev. Gözkân, B., İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları.

Nesin, A. (2001). *Matematik ve Sonsuz.* İstanbul: Bilgi Üniversitesi Yayınları.

Nesin, A. (2009). *Sezgisel Kümeler Kuramı.* İstanbul: Nesin Yayıncılık A.Ş.

Nesin, A. (2010). *Matematik ve Gerçek*. İstanbul: Nesin Yayıncılık A.Ş.

Newsom, C. V. (2008). "Modern Matematiksel Düşünce". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s. 201-212). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Özden, Y. (1998). *Öğrenme ve Öğretme*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Özden, Y. (1999). *Eğitimde Yeni Değerler*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Özdemir, M. (2006). *"TI-83 PLUS" ve Benzer Grafik Hesap Makinelerinin Matematik Derslerinde Öğrenci Başarısına Olan Etkileri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Yeditepe Üniversitesi.

PISA (2009). "Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (*Programme for International Student Assessment = PISA)* 2009 Ulusal Ön Raporu". Erişim: 06.02.2013, MEB resmi sitesi: www.meb.gov.tr .

PISA (2012). "Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (*Programme for International Student Assessment = PISA)* 2012 Ulusal Ön Raporu". Erişim: 16. 12. 2013, MEB resmi sitesi: www.meb.gov.tr .

Piaget, J. (1980). *Epistemoloji ve Psikoloji*. Çev. Cılızoğlu, S., İstanbul: Havass Yayınları.

Piaget, J. (1999a). *Yapısalcılık*. Çev. Okyayuz, Y., A. Ş., Ankara: Doruk Yayımcılık.

Piaget, J. (1999b). *İnsan ve Fikirleri*. Çev. Çiftçioğlu, Ş., Ankara: Doruk Yayımcılık.

Platon, (1997). *Theaitetos.* Çev. Gökberk, M., İstanbul: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Platon, (2007). *Devlet*. Çev. Eyüboğlu, S. & Cimcoz, M. A., İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

Poincaré, H. (2008). "Matematiksel Yaratma". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s. 240-245). İstanbul: Remzi Kitapevi.

Putnam, H. (1979). *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge: Cambridge University Press.

Putnam, H. (2004). "Hillary Putnam ile Söyleşi". Ed. Magee, B., Çev. Mahçupyan, E., *Yeni Düşün Adamları* içinde (s. 297-317). İstanbul: İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları.

Reichenbach, H. (2000). *Bilimsel Felsefenin Doğuşu*. Çev. Yıldırım, C., Ankara: Bilgi Yayınevi.

Rényi, A. (1999). *Matematik Üzerine Diyaloglar*. Çev. Taşdelen, İ., Ankara: Dost Kitabevi Yayınları.

Resnik, M. D. (2004). "Modeller Bilimi Olarak Matematik: Ontoloji ve Referans". Ed. Gür, B. S., Çev. Kiraz, M. S. & Kayan, C., *Matematik Felsefesi* içinde (s.325-357). Ankara: Orient Yayınevi.

Russell, B. (2004a). "Matematiksel Felsefeye Girişten Seçmeler". Ed. Gür, B. S., Çev. Özlük, M., *Matematik Felsefesi* içinde (s.73-103). Ankara: Orient Yayınevi.

Russell, B.(2004b). "Matematiksel Mantığın Felsefi Önemi". Ed. Gür, B. S., Çev. Özlük, M., *Matematik Felsefesi* içinde (s.105-116). Ankara: Orient Yayınevi.

Schaaf, W. L. (2008). "Kültürel Bir Birikim Olarak Matematik". Çev. Yıldırım, C., *Matematiksel Düşünme* içinde (s.163-168). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Tepe, H. (1998). "Giriş: Nicolai Hartmann ve Bilgiye Ontolojik Bakış". Çev. Tepe, H., O*ntolojinin Işığında Bilgi* içinde (s.v-xxi). Ankara: Türkiye Felsefe Kurumu Yayınları.

Tepe, H. (2003). *Platon'dan Habermas'a Felsefede Doğruluk ya da Hakikat.* Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.

Terzioğlu, T. & Yılmaz, A. (2005*). 'Anlamak' Tutkunu Bir Matematikçi CAHİT ARF*. Ankara: Türkiye Bilimler Akademisi.

TIMSS (2011). "Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Bilgisi Çalışması (*Trends in International Mathematics and Science Study* = TIMSS)
2011 Türkiye Değerlendirmesi". Erişim: 07.02.2013, Seta Analiz. Web sitesi: http://file.setav.org/Files/Pdf/20130129165730_seta_analiz_timss.pdf.

Tomlinson, C. A. (2001). *How to Differentiate Instruction in Mixed-Ability Classrooms.* Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

Uygur, N. (1996). *Kuram Eylem Bağlamı.* İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Von Glasersfeld, E. (1998). "Why Constructivism Must Be Radical". Eds. Marie, L., Nadine, B. & Jim, G., *Constructivism and Education* (pp. 23-28). Cambridge: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1988). *Düşünce ve Dil*. Çev. Koray, S., İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Yalçın, Ş. (2003a). "Kant'ta Matematiğin Felsefi Temelleri". *Felsefe Dünyası,* (37). (s.128-143).

Yalçın, Ş. (2003b). "Frege: Semantikten Matematiğe Paradokslar". *Felsefe Tartışmaları,* (30). (s. 47- 60).

Yalçın, Ş. (2010). *Modern Felsefede Benlik.* İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları.

Yurdakul, B. (2011). "Yapılandırmacılık". *Eğitimde Yeni Yönelimler*. Ed. Demirel, Ö., Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Yıldırım, C. (1994). *Bilim Tarihi*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, C. (2005). *Bilim Felsefesi*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, C. (2008). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, H. (2010). "Matematik İçin Matematik Eğitimi". *Matematik Dünyası*, (85), (s.73-78).

EKLER

Tablo 3. 7. PISA 2009'a Göre Türkiye ile Diğer Ülkelerin Matematik Okuryazarlığı Ortalama Puanlarına Göre Karşılaştırılması

Ortalama Puanları Türkiye'ninkinden Yüksek Olan Ülkeler	Ortalama Puanları İstatistiksel Olarak Türkiye'ninkinden Anlamlı Bir Farklılık Göstermeyen Ülkeler	Ortalama Puanları Türkiye'ninkinden Düşük Olan Ülkeler
Şanghay-Çin (600) Singapur (562) Hong Kong-Çin (555) Kore (546) Tayvan-Çin (543) Finlandiya (541) Lihtenştayn (536) İsviçre (534) Japonya (529) Kanada (527) Hollanda (526) Makao-Çin (525) Yeni Zelanda (519) Belçika (515) Avustralya (514) Almanya (513) Estonya (512) İzlanda (507) Danimarka (503) Slovenya(501) Norveç (498) Fransa (497) Slovakya (497) **OECD Ortalaması (496 Puan)** Avusturya (496) Polonya (495) İsveç (494) Çek Cumhuriyeti (493) Birleşik Krallık (492) Macaristan (490) Lüksemburg (489) ABD (487) İrlanda (487) Portekiz (487) İspanya (483) İtalya (483) Letonya (482) Litvanya (477) Rusya Federasyonu (468) Yunanistan (466) Hırvatistan (460)	Dubai (BAE) (453) İsrail (447) **(TÜRKİYE 445 Puan)** Sırbistan (442)	Azerbaycan (431) Bulgaristan (428) Romanya (427) Uruguay (427) Şili (421) Tayland (419) Meksika (419) Trinidad ve Tobago (414) Kazakistan (405) Karadağ (403) Arjantin (388) Ürdün (387) Brezilya (386) Kolombiya (381) Arnavutluk (377) Tunus (371) Endonezya (371) Katar (368) Peru (365) Panama (360) Kırgızistan (331)

Kaynak: PISA (2009). "Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (*Programme for International Student Assessment = PISA)* 2009 Ulusal Ön Raporu". s. 109.

Tablo 3. 8. Dördüncü Sınıf Düzeyinde TIMSS 2011 Matematik Sonuçları

Sıralama	Eğitim Sistemi	Ortalama
1	Singapur	606
2	Güney Kore	605
3	Hong Kong	602
4	Tayvan	591
5	Japonya	585
6	Kuzey İrlanda (Birleşik Krallık)	562
7	Belçika	549
8	Finlandiya	545
9	İngiltere (Birleşik Krallık)	542
10	Rusya	542
11	ABD	541
12	Hollanda	540
13	Danimarka	537
14	Litvanya	534
15	Portekiz	532
16	Almanya	528
17	İrlanda	527
18	Sırbistan	516
19	Avustralya	516
20	Macaristan	515
21	Slovenya	513
22	Çek Cumhuriyeti	511
23	Avusturya	508
24	İtalya	508
25	Slovakya	507
26	İsveç	504
27	Kazakistan	501
	TIMSS ölçek ortalaması	**500**
28	Malta	496
29	Norveç	495
30	Hırvatistan	490
31	Yeni Zelanda	486
32	İspanya	482
33	Romanya	482
34	Polonya	481
35	**Türkiye**	**469**
36	Azerbaycan	463
37	Şili	462
38	Tayland	458
39	Ermenistan	452
40	Gürcistan	450
41	Bahreyn	436
42	Birleşik Arap Emirlikleri	434
43	İran	431
44	Katar	413
45	Suudi Arabistan	410
46	Umman	385
47	Tunus	359
48	Kuveyt	342
49	Fas	335
50	Yemen	248

Tablo 3. 9. Sekizinci Sınıf Düzeyinde TIMSS 2011 Matematik Sonuçları

Sıralama	**Eğitim Sistemi**	**Ortalama**
1	Güney Kore	613
2	Singapur	611
3	Tayvan	609
4	Hong Kong	586
5	Japonya	570
6	Rusya	539
7	İsrail	516
8	Finlandiya	514
9	ABD	509
10	İngiltere (Birleşik Krallık)	507
11	Macaristan	505
12	Avustralya	505
13	Slovenya	505
14	Litvanya	502
	TIMSS ölçek ortalaması	**500**
15	İtalya	498
16	Yeni Zelanda	488
17	Kazakistan	487
18	İsveç	484
19	Ukrayna	479
20	Norveç	475
21	Ermenistan	467
22	Romanya	458
23	Birleşik Arap Emirlikleri	456
24	**Türkiye**	**452**
25	Lübnan	449
26	Malezya	440
27	Gürcistan	431
28	Tayland	427
29	Makedonya	426
30	Tunus	425
31	Şili	416
32	İran	415
32	Katar	410
34	Bahreyn	409
35	Ürdün	406
36	Filistin	404
37	Suudi Arabistan	394
38	Endonezya	386
39	Suriye	380
40	Fas	371
41	Umman	366
42	Gana	331

Kaynak: TIMSS (2011). "Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Bilgisi Çalışması (*Trends in International Mathematics and Science Study* = TIMSS)". (Tablo 8, s. 5), (Tablo 9, s. 6)

Tablo 3. 10. PISA 2012'ye Göre Türkiye ile Diğer Ülkelerin Matematik Okuryazarlığı Ortalama Puanlarına Göre Karşılaştırılması

Ortalama Puanları Türkiye'ninkinden Yüksek Olan Ülkeler	Ortalama Puanları İstatistiksel Olarak Türkiye'ninkinden Anlamlı Bir Farklılık Göstermeyen Ülkeler	Ortalama Puanları Türkiye'ninkinden Düşük Olan Ülkeler
Şanghay-Çin (613) Singapur (573) Hong Kong-Çin (561) Tayvan-Çin (560) Kore (554) Makao-Çin (538) Japonya (536) Lihtenştayn (535) İsviçre (531) Hollanda (523) Estonya (521) Finlandiya (519) Polonya (518) Kanada (518) Belçika (515) Almanya (514) Vietnam (511) Avusturya (506) Avustralya (504) İrlanda (501) Slovenya(501) Yeni Zelanda (500) Danimarka (500) Çek Cumhuriyeti (499) Fransa (495) İngiltere (494) İzlanda (493) Letonya (491) Lüksemburg (490) Norveç (489) Portekiz (487) İtalya (485) İspanya (484) Slovak Cumhuriyeti (482) Rusya (482) Amerika (481) Litvanya (479) İsveç (478) Macaristan (477) Hırvatistan (471) İsrail (466) **OECD Ortalaması (494)**	Yunanistan (453) Sırbistan (449) **(TÜRKİYE 448 Puan)** Romanya (445) Güney Kıbrıs (440)	Bulgaristan (439) Birleşik Arap Emir. (434) Kazakistan (432) Tayland (427) Şili (423) Malezya (421) Meksika (413) Karadağ (410) Uruguay (409) Kosta Rika (407) Arnavutluk (394) Brezilya (391) Arjantin (388) Tunus (388) Ürdün (386) Katar (376) Kolombiya (376) Endonezya (375) Peru (368)

Kaynak: PISA (2012). "Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (*Programme for International Student Assessment = PISA)* 2012 Ulusal Ön Raporu". s. 12.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Özdemir, 1962 yılında Çorum'da doğdu. 1989'da Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olduktan sonra, İstanbul'da orta dereceli özel okullarda matematik öğretmeni olarak mesleğine adım attı. Özel Yeni Yıldız Koleji ve Özel Darüşşafaka Lisesinde matematik bölüm başkanlığı yaptı. 1993-1994 öğretim yılında Marmara Üniversitesinde "Modern Yönetim Teknikleri" adlı ihtisas programını tamamladı. 2006'da Yeditepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsünde Prof. Dr. Canan Çetin danışmanlığında "TI-83 Plus ve Benzer Grafik Hesap Makinelerinin Matematik Derslerinde Öğrenci Başarısına Olan Etkileri" adlı teziyle "Eğitim Yönetimi ve Denetimi Programı"ndan yüksek lisans derecesi aldı. Genel eğitim hakkında sunumlar yapmakta ve makaleler yazmaktadır. Halen Özel Enka Okullarında matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.