



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT DİTOPOLOJİK- FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR VE TIPTA UYGULAMALAR

Tuğba Han DİZMAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Öğrencinin Adı SOYADI
Tuğba Han DİZMAN
Tarih:23.05.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SOFT DİTOPOLOJİK- FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR VE TIPTA UYGULAMALAR

Tuğba Han DİZMAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye Yüksel

2014, 60Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Doç. Dr. Kemal AYDIN
Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Bu tezde belirsizliğe farklı bir yaklaşım olarak Molodtsov (1999) tarafından geliştirilmiş soft kümeler ile topolojik yapılar ve soft ilefuzzy kümelerin bir araya getirilmesiyle oluşturulmuş melez bir model olan fuzzy soft kümeler ile fuzzy topolojik kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca soft kümeleri kullanarak prostat kanserini teşhis etmek için bir uzman sistem tasarlanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde verilen soft ditopolojik uzaylar birbirinden bağımsız olarak tanımladığımız soft açıklarla ilgili özelliklerin bulunduğu soft topolojik uzaylar ve soft kapalılarla ilgili özelliklerin bulunduğu soft kotopolojik uzaylardan elde edilmiştir.Soft topoloji ve soft kotopolojilerde sırasıyla τ-soft süreklilik, τ-soft ayırma aksiyomları, κ-soft süreklilik ve κ-soft ayırma aksiyomları verilmiştir. Bu kavramlar soft ditopolojik uzaylarda da incelenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde fuzzy soft topolojik uzaylar incelenmiş, bu uzaylarda komşuluk, Q-komşuluk, alt uzay, fuzzy soft iç ve kapanış noktaları gibi kavramlar verilmiş vequasi ayırma aksiyomları çalışılmıştır.

Tezin dördüncübölümünde son yıllarda erkeklerde sıkça görülen prostat kanserinin teşhisi için soft kümelerden faydalanarak elde ettiğimiz vesoft uzman sistemler olarak adlandırdığımız birtahmin sistemitasarlanmıştır. Tasarladığımız bu sistem,hastanın prostat spesifik antijen (PSA), yaş ve prostat hacmi (PV) verilerinikullanarak prostat kanseri olma riskiyüzdesini hesaplayan bir programdır. Hesaplanan buyüzde ile uzman doktora hasta hakkında bir fikir vermek amaçlanmıştır. Bu yolla maliyeti yüksek olan ve hastada bazı fiziksel zararlara neden olabilen biyopsi işlemini gereksiz yere uygulamak engellenebilir.Tasarladığımız sistemin prostat kanseri teşhisi için kullanılması önerilir.

Anahtar Kelimeler:.Fuzzy soft quasi ayırma aksiyomları, fuzzy soft topolojik uzaylar, prostat kanseri, soft ayırma aksiyomları, soft ditopolojik uzaylar, soft remote komşuluk, soft uzman sistem.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOFT DITOPOLOGICAL- FUZZY SOFT TOPOLOGICAL SPACES AND THE APPLICATIONS IN MEDICINE

Tuğba Han DİZMAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY INMATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2014,60 Pages

Jury
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Doç. Dr. Kemal AYDIN
Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

In this thesis, both the relation between soft set, defined byMolodtsov as a new method for vagueness, and its corresponding topological structures and the relation between fuzzy soft sets, a combination of fuzzy and soft sets, and its corresponding fuzzy topological structures are investigated. Moreoverby using soft sets an expert system to diagnose the prostate cancer is devised.

In the second section, soft ditopology is defined as a synthesis of soft topology which is used to describe soft openness-type properties of a space and the soft cotopology which deals with its soft closedness-type properties. τ-soft continuity, τ-soft seperation axioms and κ-soft continuity, κ-soft seperation axioms are investigated in soft topological and soft cotopological spaces, respectively.These concepts are also studied in soft ditopological spaces.

In the third section fuzzy soft topological spaces are given and the concepts as neihgborhood, Q-neighborhood, relative fuzzy soft topology, fuzzy soft interior and closure points are defined and the quasi seperation axioms are investigated.

In the fourth section a prediction system, called soft expert system, is designed to diagnose the prostate cancer which is the second most common cause of cancer death among men. In our system the percantage of prostate cancer risk is obtained by using the data of prostate specific antigen, age and prostate volume. We aim to help to the doctor to decide whether the biopsy is necessary for a patient. It is known that biopsy has high cost and sometimes can lead some complications for patients. For this reason it is important to reduce the number of biopsy operations. Since our system prevents unnecessary biopsy operations, it is suggested to use soft expert system to diagnose the prostate cancer.

Keywords: Fuzzy soft quasi seperation axioms, fuzzy soft topological spaces,prostate cancer, soft ditopological spaces, soft expert system, soft remote neighborhood,soft seperation axioms.

ÖNSÖZ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde soft küme ve fuzzy soft küme teoride yapılmış ve çalışmamız boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde birbirinden bağımsız olan soft topoloji ve soft kotopoloji kavramları tanıtılmış ve bu kavramlardan faydalanarak oluşturulmuş soft ditopolojik uzaylar tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy soft topolojik uzaylar geliştirilmiş ve fuzzy soft quasi ayırma aksiyomları çalışılmıştır. Dördüncü bölümde soft kümeler kullanılarak prostat kanseri teşhisinde kullanılması önerilen bir program tasarlanmıştır. Beşinci bölümde ise bu çalışmanın sonuçlarına yer verilmiştir.

Tez konumun seçilmesi ve yürütülmesi sürecinde özveri ve sabırla yol gösteren, bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan ve akademik hayatıma başladığım günden beri desteğini her zaman hissettiğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'esonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımda ve çalışmalarımda en büyük destekçilerim olan değerli annem ve babam Nuran-Fahrettin ŞİMŞEKLER'e ve eşim Gürcan DİZMAN'a minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Tuğba Han DİZMAN
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Kavramlar 2

1.1.1. Fuzzy Kümeler ve Soft Kümeler 2

1.1.2. Fuzzy Soft Kümeler 6

2. SOFT DİTOPOLOJİK UZAYLAR **9**

2.1. Temel Kavramlar 10

2.2.Soft Açıklar Yardımıyla Tanımlanmış Soft Topolojik Uzaylar 12

2.2.2. τ-soft Sürekli ve Soft Açık Fonksiyonlar 14

2.2.2.τ-ayırma Aksiyomları 16

2.3.Soft Kapalılar Yardımıyla Tanımlanmış Soft Kotopolojik Uzaylar 19

2.3.2. κ-soft Sürekli ve Soft Kapalı Fonksiyonlar 22

2.3.3. κ-soft Ayırma Aksiyomları 26

2.4. Soft Ditopolojik Uzaylar 29

3.FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR **32**

3.1. Fuzzy Soft Topolojik Uzayın Temel Kavramları 32

3.2. Fuzzy Soft Quasi Ayırma Aksiyomları 40

4. SOFT KÜMELERİN PROSTAT KANSERİ TEŞHİSİNDE BİR UYGULAMASI **47**

4.1. Soft Uzman Sistemleri 48

4.2. Sonuç 55

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **57**

5.1 Sonuçlar 57

5.2 Öneriler 58

KAYNAKLAR 59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\subseteq$	:Alt küme
$\cup$	:Birleşim
$0_{U_E}^{\sim}$	:Boş fuzzy soft küme
Φ_A	:Boş soft küme
$\in$	: Eleman
$\notin$	:Eleman değil
$\exists$	: En az bir
$\forall$	:Her
I^X	:Fuzzy kümeler ailesi
x_α, y_μ	:Fuzzy noktalar
f_A	:Fuzzy soft küme
A_x^λ	:Fuzzy soft nokta
τ_f, τ_f^*	:Fuzzy soft topolojiler
$\wedge$	: İnfimum
$\cap$	:Kesişim
τ	:Soft topoloji
κ	:Soft kotopoloji
δ	:Soft ditopoloji
F_A	:Soft küme
x_A	:Soft nokta
$\vee$	:Supremum
$1_{U_E}^{\sim}$	:Tam fuzzy soft küme
$U_E^{\sim}$	:Tam soft küme
$\mathcal{P}(U)(2^U)$	:U kümesinin kuvvet kümesi
I	:[0,1] kapalı aralığı

1. GİRİŞ

George Cantor tarafından verilen “küme teori” matematiksel düşüncenin gelişmesinde büyük rol oynamıştır. Bir küme elemanlarıyla belirlenir ve bir eleman kümeye aittir ya da değildir. Örneğin doğal sayılar kümesini göz önüne alalım. Bu kümede hiçbir belirsizlik yoktur ve elemanları bellidir. Şimdi bölümümüzdeki zeki öğrencilerin kümesini bulmaya çalışalım. Kolayca anlaşılacağı gibi “zeki olma” kavramı kesin bir kavram değildir, belirsizdir ve klasik kümeler yardımıyla böyle bir kümeyi oluşturamayız. Olasılık teori, interval matematik, fuzzy küme teori gibi teoriler belirsiz durumlar için geliştirilmiş teorilerden bazılarıdır. 1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanan fuzzy küme teori mühendislik, tıp,bilgisayar bilimleri gibi pek çok alana uygulanmış ve araştırmacıların ilgisini çekmeyi başarmıştır. Fuzzy kümeler üyelik fonksiyonları yardımıyla belirlenir. Bir eleman bir fuzzy kümeye üyelik derecesiyle aittir ve bu derece [0,1] kapalı aralığında bir değerdir. Bu düşünceyle klasik kümelerdeki nesnellik yerini belirsiz durumlar için geçerli olan öznelliğe bırakmıştır.

1999 yılında Molodtsov belirsiz durumlar için “soft küme teori” adını verdiği yeni bir teori geliştirdi ve “Soft Set Theory- First Results” isimli makalesinde soft küme teorinin fuzzy küme teoriden daha iyi bir yöntem olduğunu gösterdi.Molodtsov makalesinde fuzzy kümelerde tanımlanan üyelik fonksiyonunun her durum için nasıl belirleneceği sorusunun bu teori için bir zorluk olduğunu belirtti ve bu durumun nedenini parametreleme işleminin olmayışına bağladı. Bu zorluktan kurtulmak için de soft kümeleri bir evren ile bir parametre kümesinden faydalanarak tanımladı ve soft kümeler evrenin parametrelenmiş alt kümeleri olarak verildi. Molodtsov soft kümelerin Perron integrasyonu, oyun teori, olasılık teori, ölçü teori, düz fonksiyonlar gibi alanlara uygulamalarını verdi. Soft küme teori kısa zamanda hızla gelişti. Maji ve arkadaşları (2002) soft kümeleri karar verme problemlerinde kullandı. Pei ve Miao (2005) soft kümeler ile bilgi sistemleri arasındaki ilişkileri gösteren bir çalışma yaptı. Chen (2005) soft kümelerde parametre azaltmayla ilgili bir metot verdi ve bu metodu rough kümelerdeki özellikleriazaltmayla karşılaştırdı. Aktaş ve Çağman (2007) soft kümelerle fuzzy ve rough kümeler arasındaki ilişkiyi gösterdi ve soft kümeleri cebirsel yapılara uyguladı. Jun ve Park (2008) soft kümelerin BCK/BCI cebirlere uygulanmasını gösteren bir çalışma yaptı. Feng ve arkadaşları (2008) soft yarı halkalar üzerine çalışmalar başlattı. Kong ve arkadaşları (2008) en iyi seçimi yapma problemi için soft kümeleri kullandı ve soft kümelerde normal parametre azaltma için bir algoritma verdi. Ma ve

arkadaşları (2011) soft kümelerde parametre azaltma için yeni bir algoritma verdi ve bu algoritmanın Kong ve arkadaşları (2008) tarafından verilen algoritmadan daha kullanışlı olduğunu gösterdi. Feng ve arkadaşları (2010) soft kümeleri fuzzy ve rough kümelerle bir araya getirdi ve rough fuzzy, rough soft, soft rough, soft rough fuzzy olarak adlandırılan yeni melez kümeleri tanımladı. Shabir ve Naz (2011) soft topolojik uzayları tanımladı ve sonrasında pek çok yazar soft topolojik uzayları geliştirdi(Ali ve ark.(2009), Çağman ve ark.(2011), Ahmad ve Hussain (2012), Zorlutuna ve ark. (2012)).

Maji ve arkadaşları (2001) fuzzy ve soft kümeleribir araya getirerek fuzzy soft kümeleri tanımladı. Roy ve Maji (2007), fuzzy soft kümelerin uygulamalarına yönelik çalışmalar yaptı. Ahmad ve Kharal (2009) fuzzy soft kümelerde birleşim, kesişim gibi kuralları tanımladı ve fuzzy soft kümelerin De-Morgan ilişkilerini inceledi. Kharal ve Ahmad (2009)fuzzy soft kümelerin sınıfları arasındaki dönüşümleri tanımladı.Tanay ve Kandemir (2011) fuzzy soft topolojik uzayları ve bu uzaylardaki temel kavramları tanımladı. Roy ve Samanta (2011) fuzzy soft topolojik uzayları sabit parametre kümeli fuzzy soft kümeler üzerinde tanımladı, fuzzy soft topolojiler için taban ve alt taban kavramlarını verdi.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız tanımlar, teoremler ve lemmalar verilmiştir.

1.1.1. Fuzzy Kümeler ve Soft Kümeler

Bu kesimde belirsizliğe iki farklı yaklaşım olan fuzzy küme teori ve soft küme teorinin tez boyunca kullanılacak olan kavramları verilmiştir.

1.1.1.1.Tanım(Zadeh, 1965). $U \neq \emptyset$olmak üzere U kümesi üzerinde bir ***fuzzy kümesi***, $\mu_A: U \to I = [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$A = \{(u, \mu_A(u)) : u \in U\}$$

ikililerin oluşturduğu kümedir.

1.1.1.2. Tanım(Zadeh, 1965).*Boş fuzzy küme*her $u \in U$ için $\mu_\emptyset(u) = 0$ üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir ve 0_Usimgesi ile gösterilir:

$$0_U = \{(u, 0) : u \in U\}.$$

1.1.1.3.Tanım(Zadeh, 1965).*Tam fuzzy küme* her $u \in U$ için $\mu_U(u) = 1$ üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir ve 1_U simgesi ile gösterilir:

$$1_U = \{(u, 1): u \in U\}.$$

1.1.1.4.Tanım(Zadeh, 1965). A ve B, U kümesiüzerinde iki fuzzy küme olsun.

i) Her $u \in U$ için $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ ise A fuzzy kümesine B fuzzy kümesinin ***alt kümesi*** denir ve $A \leq B$ simgesiyle gösterilir.

ii) A ve B kümelerinin ***birleşimi*** C fuzzy kümesidir, $A \vee B = C$ simgesiyle gösterilir ve

$$\forall u \in U \text{için} \mu_C(u) = max\{\mu_A(u),\ \mu_B(u)\}$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlanır.

iii) A ve B kümelerinin ***kesişimi*** D fuzzy kümesidir, $A \wedge B = D$ simgesiylegösterilir ve

$$\forall u \in U \text{için} \mu_D(u) = min\{\mu_A(u),\ \mu_B(u)\}$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlanır.

iv) A fuzzy kümesinin ***tümleyeni*** A^c simgesi ile gösterilir ve

$$\forall u \in U \text{için} \mu_{A^c}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlanır.

1.1.1.5. Tanım(Zadeh, 1965). Bir A fuzzy kümesinin ***α-seviye kümesi***,

$$F(\alpha) = \{u \in U: \mu_A(u) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanır.

1.1.1.1. Uyarı(Aktaş ve Çağman, 2007). Fuzzy küme ile klasik küme arasındaki ilişki α-seviye fonksiyonu yardımıyla kurulabilir. A fuzzy kümesi,

$$\mu_A(u) = sup\{\alpha: u \in F(\alpha)\}$$

formülünden α-seviye kümelerinin herhangi bir ailesi yardımıyla elde edilebilir.

1.1.1.6. Tanım (Molodtsov, 1999). U evren kümesi, E parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F: A \to \mathcal{P}(U)$ bir dönüşüm ise F_A (yada (F, A)) ikilisine U evreni üzerinde ***soft küme*** denir. Başka bir deyişle soft küme U evren kümesinin altkümelerinin parametrelenmiş bir ailesidir.

Tez boyunca aksi belirtilmediği sürece F_A, U evreni üzerinde bir soft küme olarak düşünülecektir.

1.1.1.1.Örnek. Bay X ve Bayan Y evlilik törenleri için bir salon kiralamayı planlamaktalar. $F_E$soft kümesi "salonun olanaklarını" göstersin.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$kiralanabilecek salonları ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi ve

$$F(e_1) = \{u_2, u_4\}$$
$$F(e_2) = \{u_1, u_3, u_4\}$$
$$F(e_3) = \emptyset$$
$$F(e_4) = \{u_1, u_3, u_5\}$$
$$F(e_5) = \{u_1, u_6\}$$

olsun. O halde F_E $(ya\ da\ (F, E))$soft kümesi:

$$F_E = \{e_1 = \{u_2, u_4\}, e_2 = \{u_1, u_3, u_4\}, e_3 = \emptyset, e_4 = \{u_1, u_3, u_5\}, e_5 = \{u_1, u_6\}\}$$

dir.

U	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
u_1	0	1	0	1	1
u_2	1	0	0	0	0
u_3	0	1	0	1	0
u_4	1	1	0	0	0
u_5	0	0	0	1	0
u_6	0	0	0	0	1

Tablo1.1.1.1.F_E soft kümesinin tablosal gösterimi

1.1.1.7. Tanım(Maji ve ark, 2003).Uevreni üzerinde F_A ve $G_B$iki soft küme olsun. $A \subseteq B$veher $a \in A$için$F(a) \subseteq G(a)$ise$F_A$soft kümesi $G_B$soft kümesinin ***altkümesi*** olarak adlandırılır.

1.1.1.8.Tanım(Maji ve ark, 2003). Her $a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise $F_A$soft kümesi ***boş soft küme*** olarak adlandırılır ve $\Phi_A$simgesi ile gösterilir.

1.1.1.9. Tanım(Maji ve ark, 2003). Her $a \in A$ için $F(a) = U$ ise $F_A$soft kümesi ***tam soft küme*** olarak adlandırılır ve $U_{\tilde{A}}$simgesi ile gösterilir.

1.1.1.2.Uyarı.İki soft küme için "VE", "$VE\ YA$" işlemleri Molodtsov'un makalesindetavsiye ettiği doğrultuda Maji ve arkadaşları tarafından 2003 yılında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

1.1.1.10. Tanım(Maji ve ark, 2003).U evreni üzerindeF_A ve G_B iki soft küme olsun. "$\boldsymbol{F_A VE G_B}$"soft kümesi

$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times B, H(\alpha,\beta)=F(a)\cap G(b)$$

olmak üzere $F_A \wedge G_B = H_{A\times B}$ şeklinde tanımlanır ve $F_A \wedge G_B$simgesi ile gösterilir.

1.1.1.11.Tanım(Maji ve ark, 2003). $F_A$veG_B U evreni üzerinde iki soft küme olsun. "$\boldsymbol{F_A VE\ YA G_B}$"soft kümesi

$$\forall(\alpha,\beta)\in A\times B, O(\alpha,\beta)=F(a)\cup G(b)$$

olmak üzere $F_A \vee G_B = (O_{A\times B})$ şeklinde tanımlanır ve $F_A \vee G_B$simgesi ile gösterilir.

1.1.1.12.Tanım(Maji ve ark, 2003). $A_i \subset E$ve$F_{A_i}: A_i \to \mathcal{P}(U)$bir soft küme olmak üzere $\{F_{A_i}: i\in I\}$ soft kümeler ailesinin ***kesişimi***

$G_C = \bigcap_{i\in I}^{\sim} F_{A_i}$, $C=\bigcap_{i\in I}A_i$, $G: C \longrightarrow \mathcal{P}(U) vehere \in C\ için G_C(e)=\bigcap_{i\in I}F_{A_i}(e)$

olacak şekilde bir soft kümedir.

1.1.1.13.Tanım(Maji ve ark, 2003). $A_i \subset E$ve$F_{A_i}: A_i \to \mathcal{P}(U)$bir soft küme olmak üzere $\{F_{A_i}: i\in I\}$ soft kümeler ailesinin ***birleşimi***

$G_C = \bigcup_{i\in I}^{\sim} F_{A_i}$, $C=\bigcup_{i\in I}A_i$, $G: C \longrightarrow \mathcal{P}(U) vehere \in C\ için G_C(e)=\bigcup_{i\in I}F_{A_i}(e)$

olacak şekilde bir soft kümedir.

1.1.1.14. Tanım(Zahiri, 2013). Ubirevren kümesive $F: U \longrightarrow \mathcal{P}(U)$dönüşümü

$$\forall u\in U\ için\ F(u)=\{u\}$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. BuradanF_U soft kümesine U kümesinden üretilmiş ***basit soft küme*** denir.

1.1.1.3.Uyarı.1.1.1.14.Tanımgereği her kümeden bir soft küme elde edilebileceği açıktır.

1.1.1.1.Teorem(Aktaş ve Çağman, 2007). Her fuzzy kümeden bir soft küme elde edilebilir.

1.1.1.15. Tanım(Ma ve ark., 2011). $U=\{u_1,u_2,\dots,u_{|U|}\}$ boş kümeden farklı, sonlu sayıda nesnelerin kümesi, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{|A|}\}$ boş kümeden farklı sonlu özelliklerin kümesi,V_a kümesi a özelliğinin değer kümesi olmak üzere $V=\bigcup_{a\in A}V_a$, her $(u,a)\in U\times A$ve$f(u,a)\in V_a$için $f: U\times A\to V$ bir bilgi fonksiyonu olsun.O halde $S=(U,A,V,f)$ dörtlüsü bir ***bilgi sistemi*** olarak adlandırılır. Bilgi sistemleri bilgi tabloları şeklinde de gösterilebilir (Bkz. Tablo 1.1.1.2). Bir $S=(U,A,V,f)$ bilgi

sisteminde her $a \in A$ için $V_a = \{0,1\}$ ise Sdörtlüsü$Boolean$-değerli bilgi sistemi olarak adlandırılır.

U	a_1	a_2	⋯	a_k	⋯	$a_{\|A\|}$
u_1	$f(u_1, a_1)$	$f(u_1, a_2)$	⋯	$f(u_1, a_k)$	⋯	$f(u_1, a_{\|A\|})$
u_2	$f(u_2, a_1)$	$f(u_2, a_2)$	⋯	$f(u_2, a_k)$	⋯	$f(u_2, a_{\|A\|})$
u_3	$f(u_3, a_1)$	$f(u_3, a_2)$	⋯	$f(u_3, a_k)$	⋯	$f(u_3, a_{\|A\|})$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
$u_{\|U\|}$	$f(u_{\|U\|}, a_1)$	$f(u_{\|U\|}, a_2)$	⋯	$f(u_{\|U\|}, a_k)$	⋯	$f(u_{\|U\|}, a_{\|A\|})$

Tablo1.1.1.2. Bilgi sistemi

1.1.1.2. Teorem(Ma ve ark, 2011).U evreninde $F_E$soft kümesi $S = (U, A, V_{[0,1]}, f)$ biçiminde bir $Boolean$-değerli bilgi sistemidir.

1.1.1.4.Uyarı.$Boolean$-değerli bir bilgi sisteminin bir soft küme olarak gösterilebileceği açıktır. 1.1.1.1.Örnekte verilmiş olan $F_E$soft kümesi 1.1.1.2. Tabloda olduğu gibi bir $Boolean$ tablosu olarak gösterilebilir.

1.1.2.FuzzySoft Kümeler

Bu kesimde fuzzy küme ve soft kümeden yararlanılarak Maji ve arkadaşları (2001) tarafından tanımlanmış fuzzysoft küme teorinin tez boyunca kullanılacak genel kavramları verilmiştir.

1.1.2.1. Tanım(Maji ve ark, 2001). I^Uya da$\mathcal{F}(U)$simgesi$U$ kümesinin tüm fuzzy alt kümelerinin ailesini göstersin.$A \subseteq E$olmak üzere$f: A \to \mathcal{F}(U)$bir dönüşüm ise f_A ikilisine***fuzzysoft küme***denir.

Çalışmamız boyunca *U* evreni üzerinde *E* parametresine bağlı fuzzysoft kümeler ailesini $FS(U, E)$simgesi ile göstereceğiz.

1.1.2.1.Uyarı. Roy ve Samanta (2011) çalışmalarında fuzzysoft küme kavramınıaşağıda gösterildiği gibi düzenlediler:

1.1.2.2. Tanım (Roy ve Samanta, 2011).$f: E \to \mathcal{F}(U)$dönüşümüeğer her $e \in E - A$için$f_A(e) = \mu_{f_A}^e = 0_U$ve her $e \in A$ için$f_A(e) = \mu_{f_A}^e \neq 0_U$şeklinde tanımlı ise$f_A$ikilisine$U$ evreni üzerinde ***fuzzysoft küme*** denir.

1.1.2.3. Tanım(Roy ve Samanta, 2011). $f_A$fuzzy soft kümesinin***tümleyeni*** $f_A{}^c$simgesi ile gösterilir ve

$$f_A^c : E \to \mathcal{F}(U), \forall e \in E \; için \; \mu^e_{f_A{}^c} = 1 - \mu^e_{f_A}$$

şeklinde tanımlanır.

1.1.2.4. Tanım(Maji ve ark, 2001). $f_A, g_B \in FS(U,E)$olsun.

$$A \subseteq B \; ve \; \forall e \in A \;\; için \; f_A(e) \leq g_B(e)$$

isef_A fuzzy soft kümesine$g_B$fuzzy soft kümesinin***alt kümesi*** denir ve $f_A \sqsubseteq g_B$simgesi ile gösterilir.

$g_B$fuzzy soft kümesif_A fuzzy soft kümesinin alt kümesi ise f_A fuzzy soft kümesineg_B fuzzy soft kümesinin ***süper kümesi***denir.

1.1.2.5. Tanım(Maji ve ark, 2001). $f_A, g_B \in FS(U,E)$olsun. Bu iki fuzzysoft kümenin***birleşimi***

$$C = A \cup B \; ve \; \forall e \in C \; içinh_C = \begin{cases} f_C(e), & e \in A - B \\ g_C(e), & e \in B - A \\ f_C(e) \vee g_C(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde bir $h_C$fuzzysoft kümesidir vebu işlem $f_A \sqcup g_B = h_C$ ile gösterilir.

1.1.2.6.Tanım(Maji ve ark, 2001). $f_A, g_B \in FS(U,E)$olsun. Bu iki fuzzysoft kümenin ***kesişimi*** $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için,$h_C(e) = f_C(e) \wedge g_C(e)$ şeklinde bir $h_C$fuzzysoft kümesidir ve bu işlem $f_A \sqcap g_B = h_C$ ile gösterilir.

1.1.2.7. Tanım(Maji ve ark, 2001). $f_A \in FS(U,E)$olsun. Her $e \in A$ için $f_A(e) = 0$ise f_A fuzzy soft kümesine***Aparametre kümesine göreboşfuzzy soft küme*** denir ve $0_{U_A}^{\sim}$simgesi ile gösterilir. Her $e \in E$ için $f_E(e) = 0$ ise f_A***boş fuzzy softküme*** olarak adlandırılır ve $0_{U_E}^{\sim}$ simgesi ile gösterilir.

1.1.2.8.Tanım (Maji ve ark, 2001). $f_A \in FS(U,E)$olsun. Her $e \in A$ için $f_A(e) = 1$ ise f_A fuzzy soft kümesine***Aparametre kümesine göretamfuzzysoft küme*** denir ve $1_{U_A}^{\sim}$simgesi ile gösterilir. Her $e \in E$ için$f_E(e) = 1$ise f_A***tam fuzzysoft küme*** olarak adlandırılır ve $1_{U_E}^{\sim}$simgesi ile gösterilir.

1.1.2.2. Uyarı.$(0_{U_E}^{\sim})^c = 1_{U_E}^{\sim}$, $(1_{U_E}^{\sim})^c = 0_{U_E}^{\sim}$olduğuboş fuzzysoft küme ve tam fuzzysoft küme tanımlarından kolaylıkla görülebilir.

1.1.2.9. Tanım(Kharal ve Ahmad 2009). $FS(U,E)$ve$FS(V,P)$ sırasıyla U ve V üzerindeki tüm fuzzysoft kümelerin ailesini göstersin. $\varphi: U \to V$ve$\psi: E \to P$ iki fonksiyon olsun. $\varphi_\psi = (\varphi,\psi): FS(U,E) \to FS(V,P)$***fuzzysoft dönüşüm***olarak adlandırılır,

$i)$ $f_A \in FS(U,E)$olsun. $f_A$fuzzy soft kümesinin$\varphi_\psi$fuzzysoft dönüşümü altındaki ***görüntüsü*** Vevreniüzerinde bir fuzzysoft kümedir ve

$$\forall k \in \psi(e), \forall v \in V \; için$$

$$\varphi_\psi(f_A)(k)(v) = \begin{cases} V_{\varphi(u)=v} V_{\psi(e)=k} \mu^e_{f_A}(u), & u \in \varphi^{-1}(v) \; ise \\ 0_U, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$ii)$ $g_B \in FS(V,P)$olsun. g_B fuzzy soft kümesinin$\varphi_\psi$fuzzysoftdönüşümü altındaki***tersgörüntüsü*** Uüzerinde bir fuzzysoft kümedir ve

$$\forall e \in \psi^{-1}(P), \forall u \in U \; için \; {\varphi_\psi}^{-1}(g_B)(e)(u) = \mu^{\psi(e)}_{g_B}(\varphi(u))$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer φ ve ψ bire-bir ise $\varphi_\psi$fuzzysoft dönüşümü bire-bir,φ ve ψ örtense $\varphi_\psi$fuzzysoft dönüşümü örten olarak adlandırılır.

2. SOFT DİTOPOLOJİK UZAYLAR

$Ditopoloji$kavramı ilk olarak Brown ve Diker (1998) tarafından tanımlanmış ve sonrasında bu konuda pek çok araştırma yapılmıştır. $Ditopoloji$kavramı, Kelly tarafından 1962 yılında tanımlanan $bitopoloji$ kavramıyla ilişkilidir. Bitopolojilerden farklı olarak ditopolojilerde bir küme üzerinde iki farklı yapı vardır, bunlardan biri kümelerin açıklarla ilgili özelliklerini tanımlarken, diğeri kapalılarla ilgili özellikleri tanımlar. Bu yapılar arasında bir bağ olmasına gerek yoktur ancak topolojilerde bu yapılar birbiriyle ilişkilidir. Soft kümeler tümleme işlemi için uygun olmadıklarından soft küme uygulamalarını $ditopolojiye$ uygulamak topolojiye uygulamaktan daha elverişlidir.

Çalışmamızın bu kesiminde soft küme ile ilgili yapılmış çalışmalardan soft küme kavramında verilen E ve A parametre kümelerinin yorumlanması açısından ayrılmaktayız. Ekümesini potansiyel parametre kümesi ve Akümesini asıl parametre kümesi olarak düşünebiliriz. Soft kümeyle ilgili çalışmalarda yazarlar, bir parametre A kümesine ait değilse görüntüsünü boş küme olarak ve ya E ile A kümesini aynı (çakışık) olarak kabul etmişlerdir. Biz ise çalışmamızda A kümesine ait olmayan parametrelerin görüntüsünü tanımlanmamış olarak kabul edeceğiz yani bu parametrelerin görüntüsünü göz önüne almayacağız. Bu durum soft kümelerle ilgili işlemlerde temel bir farklılık yaratmaktadır.

Bu bölümde ilk olarak bölüm boyunca kullanacağımız teorem, tanım ve önermeleri vereceğiz. Sonra soft açıklar üzerine kurulmuş soft topolojiyi tanımlayacağız. Soft topolojide vereceğimiz pek çok kavram ve sonuç daha önce çeşitli yazarlar tarafından yapılmış olan çalışmalardaki sonuçlara benzer olduğundan ispatlar kısaca geçilmiştir. Belirtmeliyiz ki, burada tümleyen işlemini kapalıları elde etmek için kullanamıyoruz, çünkü kabul ettiğimiz soft küme modeliyle bu mümkün değildir. Daha sonra soft kapalı kümelerden yararlanarak $soft\ kotopolojileri$ kuracağız. $Soft\ kotopolojilerde$yaptığımız tüm işlemlerde soft kapalı kümelerden faydalanacağız ve soft açıkları kullanmayacağız. Son olarakta önceki iki bölümde tanımladığımız ve birbirinden bağımsız olan $soft\ topoloji$ ve $soft\ kotopoloji$ kavramlarından yararlanarak $soft\ ditopolojileri$ tanımlayacağız ve bu uzaydaki bazı özellikleri çalışacağız.

2.1.Temel Kavramlar

2.1.1.Tanım. U evren kümesi, Epotansiyel parametre kümesi ve $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{E}$asıl parametre kümesi olsun. $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{U})$bir dönüşüm olmak üzere $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})$ ikilisine*soft küme* denir ve kısaca $\boldsymbol{F_A}$ simgesiyle gösterilir Burada $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{A}$ ise $\boldsymbol{F_A}(\boldsymbol{e}) \subseteq \boldsymbol{U}$olur ancak $\boldsymbol{e} \notin \boldsymbol{A}$ durumu göz önüne alınmayacaktır.

2.1.1.Uyarı. Bu bölüm boyunca soft küme 2.1.1.Tanım anlamında düşünülecektir.

2.1.2.Tanım. $F_A$soft kümesinin ***tümleyeni*** $F_A^c: A \longrightarrow \mathcal{P}(U)$dönüşümüdür ve

$$\forall e \in A \; için \; F_A^c(e) = U - F_A(e)$$

olur.

2.1.2.Uyarı. Soft kümelerin birleşimi, kesişimi, alt küme işlemleri, $U_E^{\sim}$tam soft küme ve$\Phi_E$boş soft kümeI. bölümde verildiği gibidir.

2.1.1.Teorem. $F_{A_i}: A_i \longrightarrow \mathcal{P}(U)$soft kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda soft kümelerde De-Morgan tipindeki ilişkiler aşağıdaki gibi sağlanır:

$i)$ $(\cap^{\sim}{}_{i \in I} F_{i_{A_i}})^c \subseteq^{\sim} \cup_{i \in I}{}^{\sim} (F_{i_{A_i}})^c$.

$ii)$ $(\cup^{\sim}{}_{i \in I} F_{i_{A_i}})^c \supseteq^{\sim} \cap_{i \in I}{}^{\sim} (F_{i_{A_i}})^c$.

2.1.2.Teorem. $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)$ $\Phi_E \cap^{\sim} F_A = \Phi_A$,$\Phi_E \cup^{\sim} F_A = F_A$.

$ii)$ $U_E^{\sim} \cap^{\sim} F_A = F_A, U_E^{\sim} \cup^{\sim} F_A = U_E^{\sim}$.

2.1.3.Teorem. $F_A, G_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)$ $F_A \subseteq^{\sim} G_B$ *olması için gerek ve yeter koşul* $F_A \cap^{\sim} G_B = F_A$ *olmasıdır.*

$ii)$ $F_A \subseteq^{\sim} G_B$ *olması için gerek ve yeter koşul* $F_A \cup^{\sim} G_B = G_B$ *olmasıdır.*

2.1.4.Teorem. $F_A, G_B, H_C, S_D \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$i)$$A \subseteq B$olmak üzere $F_A \cap^{\sim} G_B = \Phi_A$ *olması için gerek ve yeter koşul*

$$F_A \subseteq^{\sim} {G_B}^c \; olmasıdır.$$

$ii)$ $F_A \cup^{\sim} {F_A}^c = U_A^{\sim}$ *ve* $F_A \cap^{\sim} {F_A}^c = \Phi_A$ *eşitlikleri sağlanır.*

$iii)$ $F_A \subseteq^{\sim} G_B$ *olması için gerek ve yeter koşul* ${G_B}^c \subseteq^{\sim} {F_A}^c$*olmasıdır.*

$iv)$ $F_A \subseteq^{\sim} G_B$ *ve* $G_B \subseteq^{\sim} H_C$ *ise* $F_A \subseteq^{\sim} H_C$ *olur.*

$v)\ F_A \subseteq^{\sim} G_B\ ve\ H_C \subseteq^{\sim} S_D\ ise\ F_A \cap^{\sim} H_C \subseteq^{\sim} G_B \cap^{\sim} S_D\ olur.$

2.1.3.Uyarı. Kharal ve Ahmad (2011) "Mappings on Soft Classes" isimli çalışmalarında soft kümelerin aileleri arasında dönüşümü tanımlamıştır. Bizde bu tanıma benzer olarak soft kümeler arasındaki dönüşümü aşağıdaki gibi düzenledik:

2.1.3.Tanım. U, V iki evren kümesi E, P iki potansiyel parametre kümesi, $S(U,E)$ ve $S(V,P)$, sırasıyla (U,E) ve (V,P) üzerinde tanımlı soft kümelerin aileleri olsun. $\varphi: U \longrightarrow V$ ve $\psi: E \longrightarrow P$ iki fonksiyon olsun. $\varphi_\psi = (\varphi,\psi): S(U,E) \longrightarrow S(V,P)$ fonksiyonu altında,

$i)\ F_A \in S(U,E)$ soft kümesinin ***görüntüsü***,

$$\varphi_\psi((F_A)(e)) = \varphi(\bigcup_{e\in\psi^{-1}(p)} F(e)),\ \forall p \in \psi(A),$$

$ii)\ G_B \in S(V,P)$ soft kümesinin ***ters görüntüsü,***

$$\varphi_\psi{}^{-1}((G_B)(p)) = \varphi^{-1}(G_B(\psi(e))),\ \forall e \in \psi^{-1}(B)$$

olaraktanımlanmıştır.

φ ve ψ dönüşümleri bire-bir ise φ_ψ dönüşümüne ***bire-bir***, φ ve ψ dönüşümleri örtense φ_ψ dönüşümüne ***örten*** adı verilir.

2.1.4.Uyarı. Sıradaki üç teorem Kharal ve Ahmad (2011) tarafından "Mappings on Soft Classes" isimli çalışmalarında verilmiştir. Biz bu teoremleri parametre kümesinde değişiklik yaparak tanımladığımız soft kümeler için yeniden düzenledik.

2.1.5.Teorem. $\varphi_\psi: S(U,E) \longrightarrow S(V,P)$ bir fonksiyon, $F_A, G_B \in S(U,E)$ ve $F_{i_{A_i}}$, $S(U,E)$'de soft kümelerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ \varphi_\psi(\Phi_A) = \Phi_{\Psi(A)},\ \varphi_\psi(U_E^{\sim}) \subseteq^{\sim} V_P^{\sim}.$

$ii)\ \varphi_\psi\left(\bigcup_{i\in I}{}^{\sim} F_{i_{A_i}}\right) = \bigcup_{i\in I}{}^{\sim} \varphi_\psi\left(F_{i_{A_i}}\right).$

$iii)\ \varphi_\psi\left(\bigcap_{i\in I}{}^{\sim} F_{i_{A_i}}\right) \subseteq^{\sim} \bigcap_{i\in I}{}^{\sim} \varphi_\psi\left(F_{i_{A_i}}\right).$

$iv)\ F_A \subseteq^{\sim} G_B$ ise $\varphi_\psi(F_A) \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(G_B).$

2.1.6.Teorem. $\varphi_\psi: S(U,E) \longrightarrow S(V,P)$ bir fonksiyon, $H_C, S_D \in S(V,P)$ ve $H_{i_{C_i}}$, $S(V,P)$'de soft kümelerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ \varphi_\psi{}^{-1}(\Phi_P) = \Phi_E,\ \varphi_\psi{}^{-1}(\mathrm{V}_P{}^{\sim}) = \mathrm{U}_E{}^{\sim}.$

$ii)\ \varphi_\psi{}^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}{}^{\sim} H_{i_{C_i}}\right) = \bigcup_{i\in I}{}^{\sim} \varphi_\psi{}^{-1}\left(H_{i_{C_i}}\right).$

$iii)\ {\varphi_\psi}^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}{}^{\sim} H_{i_{C_i}}\right)=\bigcap_{i\in I}{}^{\sim}{\varphi_\psi}^{-1}\left(H_{i_{C_i}}\right).$

2.1.7.Teorem. $\varphi_\psi: S(U,E)\longrightarrow S(V,P)$bir fonksiyon ve $H_C\in S(V,P)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ \varphi_\psi({\varphi_\psi}^{-1}(\mathrm{F}_A))\ \subseteq^{\sim} F_A.$

$ii)\ {\varphi_\psi}^{-1}(\mathrm{F}_A{}^c)=({\varphi_\psi}^{-1}(\mathrm{F}_A))^c.$

$iii)\ F_A\subseteq^{\sim}{\varphi_\psi}^{-1}(\varphi_\psi(\mathrm{F}_A)).$

2.2.Soft Açıklar Yardımıyla Tanımlanmış Soft Topolojik Uzaylar

2.2.1. Soft Topoloji

Bu kesimdeÇağman ve ark.(2011),Zorlutuna ve ark. (2011), Kharal ve Ahmad (2011),Aygünoğlu ve Aygün (2011), Shabir ve Naz(2013) tarafından soft topolojide verilmiş bazı kavramları, sonuçları ve yapıları hatırlatacağız. Ancak bu çalışmalarda elde edilen sonuçlardan Epotansiyelve$A$ asıl parametre kümelerinin yorumlanışı bakımındanayrılmaktayız. Bunun yanısıra bu kesimde sadece açıklarla ilgili özellikleri kullanırken kapalılarla ilgili özellikleri kullanmaktan kaçınacağız.

2.2.1.1.Tanım.Uevren kümesi ve Epotansiyel parametre kümesi olsun. ${U_E}^{\sim}$tam soft kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olan τ, aşağıdaki özellikleri sağlarsa ***soft topoloji*** olarak adlandırılır:

$i)\ \Phi_A, U_E^{\sim}\in\tau,$

$ii)\ \forall i\in I\ için\ F_{i_{A_i}}\in\tau\ ise\ \bigcup_{i\in I}{}^{\sim}F_{i_{A_i}}\in\tau,$

$iii)\ F_A, G_B\in\tau\ ise\ F_A\cap^{\sim} G_B\in\tau.$

τailesinin her elemanına ***soft açık küme*** ve $(U_E^{\sim},\tau)$ ikilisine ***soft topolojik uzay***denir.

2.2.1.2.Tanım.$U_E^{\sim}$üzerinde tanımlı τ_1 ve τ_2 soft topolojileri verilmiş olsun. Her $F_A\in\tau_2$ için $F_A\in\tau_1$ oluyorsa τ_2 soft topolojisine τ_1 soft topolojisinden ***daha kaba*** denir.

2.2.1.1.Teorem.$(U_E^{\sim},\tau_1)$ve$(U_E^{\sim},\tau_2)$ iki soft topolojik uzaysa $(U_E^{\sim},\tau_1\cap\tau_2)$uzayı da soft topolojik uzaydır.

İspat.$i)\ \Phi_{\mathrm{A}}, U_E^{\sim}\in\tau_1\cap\tau_2$olduğu kolayca görülür.

ii) Her $i \in I$ için $(F_A)_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. Buradan

$$(F_A)_i \in \tau_1 , (F_A)_i \in \tau_2 \; ve \; \cup_{i\in I}{}^{\sim}(F_A)_i \in \tau_1, \cup_{i\in I}{}^{\sim}(F_A)_i \in \tau_2$$

dir. Böylece $\cup_{i\in I}{}^{\sim}(F_A)_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ olur.

iii) $F_A, G_B \in \tau_1 \cap \tau_2$olsun. Buradan

$$F_A, G_B \in \tau_1, F_A, G_B \in \tau_2 \; ve \; F_A \cap^{\sim} G_B \in \tau_1, , F_A \cap^{\sim} G_B \in \tau_2$$

dir. Böylece $F_A \cap^{\sim} G_B \in \tau_1 \cap \tau_2$ olur.

2.2.1.2.Teorem.$(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay ise her $e \in E$ için $(U(e), \tau(e))$uzayı da bir topolojik uzaydır.

2.2.1.1. Uyarı. 2.2.1.1. Teorem ve 2.2.1.2. Teoremlerin ispatı Shabir ve Naz (2011) tarafından yapılmış çalışmadaki ispatlara benzer olarak yapılmıştır.

2.2.1.3.Tanım.$x \in U$, $A, B \subseteq E$ ve $F_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Her $e \in A$ için $x_A(e) = x$ şeklinde tanımlanan x_A soft kümesine ***soft nokta*** denir.

Eğer her $e \in A$ için $x \in F_B(e)$ ise x_A soft noktası F_B soft kümesinin bir ***elemanıdır*** denir ve $x_A \in^{\sim} F_B$ şeklinde gösterilir.

2.2.1.4.Tanım.$(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay, $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ ve $F_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. $x_A \in^{\sim} G_C \subseteq^{\sim} F_B$olacak şekilde bir G_C soft açığı varsa F_B soft kümesine x_A soft noktasının ***τ-soft komşuluğu*** denir. $x_A$soft noktasının bütün τ-soft komşuluklarının ailesini$\mathcal{N}(x_A)$ ile göstereceğiz.

2.2.1.2.Uyarı. $U_E^{\sim}$soft kümesinin her x_A soft noktasının τ-soft komşuluğu olduğu ve $G_B \in \mathcal{N}(x_A)$,$G_B \subseteq^{\sim} H_C$ ise $H_C \in \mathcal{N}(x_A)$olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.2.1.5.Tanım.$(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay ve $F_A, G_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. $F_A \subseteq^{\sim} H_C \subseteq^{\sim} G_B$olacak şekilde H_C soft açığı varsa G_B soft kümesine F_A soft kümesinin ***τ-soft komşuluğu*** denir. $F_A$soft kümesinin bütün τ-soft komşuluklarının ailesini$\mathcal{N}(F_A)$ simgesi ile göstereceğiz.

2.2.1.6.Tanım.$(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. $F_A$soft kümesinin ***soft içi*** F_A° simgesi ile gösterilir ve

$$F_A^{\circ} = \cup^{\sim}{}_{i\in I}\{G_{B_i} \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : G_{B_i} \in \tau \; ve \; G_{B_i} \subseteq^{\sim} F_A\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.1.3.Uyarı.Sıradaki iki teoremin ispatını Çağmanve ark.(2011), Shabir ve Naz(2011),Hussain ve Ahmad. (2011) tarafından yazılmış makalelerde verilmiş benzer teoremlerin ispatlarından faydalanarak elde edebiliriz.

2.2.1.3.Teorem.$(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ {F_A}^{\circ} \subseteq^{\sim} F_A.$

$ii)\ {F_A}^{\circ}$soft kümesi F_A soft kümesinde kapsanan en büyük soft açıktır.

$iii)\ F_A \in \tau\ olması\ için\ gerek\ ve\ yeter\ koşul\ {F_A}^{\circ} = F_A\ olmasıdır.$

$iv)\ ({F_A}^{\circ})^{\circ} = {F_A}^{\circ}.$

$v)\ Her\ A \subseteq E\ için\ {\Phi_A}^{\circ} = \Phi_A\ ve {U_E^{\sim}}^{\circ} = U_E^{\sim}\ olur.$

2.2.1.4.Teorem. $(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay ve $F_A, G_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ F_A \subseteq^{\sim} G_B\ ise\ {F_A}^{\circ} \subseteq^{\sim} {G_B}^{\circ}.$

$ii)\ (F_A \cap^{\sim} G_B)^{\circ} = {F_A}^{\circ} \cap^{\sim} {G_B}^{\circ}.$

$iii)\ (F_A \cup^{\sim} G_B)^{\circ} \supseteq^{\sim} {F_A}^{\circ} \cup^{\sim} {G_B}^{\circ}.$

2.2.2. τ-soft Sürekli ve Soft Açık Fonksiyonlar

Bu kesimde soft topolojik uzaylarda dönüşümlerle ilgili kavramlar tekrar gözden geçirilecektir.

2.2.2.1. Tanım(Zorlutuna ve ark, 2012).$(U_E^{\sim}, \tau_1)$ve$(V_P^{\sim}, \tau_2)$ iki soft topolojik uzay, $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ bir soft nokta ve $\varphi: U \to V$, $\psi: E \to P$ fonksiyonlarolmak üzere $\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \tau_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2)$olsun. $\varphi_\psi(x_A)$soft noktasının her $G_{\psi(A)}\tau$-soft komşuluğu için $\varphi_\psi(H_A) \subseteq^{\sim} G_{\psi(A)}$ olacak şekilde x_A soft noktasının bir $H_A\tau$-soft komşuluğu varsa φ_ψ dönüşümüne x_A soft noktasında ***τ-soft sürekli fonksiyon*** denir. $\varphi_\psi$dönüşümü$U_E^{\sim}$ soft kümesinin her soft noktasında τ-soft sürekli ise $U_E^{\sim}$ üzerinde
τ-soft süreklidir.

2.2.2.1.Uyarı. Aşağıdaki dört teoremin ispatı Aygünoğlu ve Aygün(2011), Zorlutuna ve ark. (2012) tarafından yazılmış makalelerde verilmiş benzer teoremlerin ispatlarından faydalanılarak yapılmıştır.

2.2.2.1.Teorem. $\varphi_\psi : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (V_{\widetilde{P}}, \tau_2)$fonksiyonu için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

$i)$ $\varphi_\psi$fonksiyonux_A soft noktasında τ-soft süreklidir.

$ii)$ $\varphi_\psi(x_A)$soft noktasının her $G_{\psi(A)}\tau$-soft komşuluğu için $H_A \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}(G_{\psi(A)})$ olacak şekilde x_A soft noktasının bir $H_A\tau$-soft komşuluğu vardır.

$iii)$ $\varphi_\psi(x_A)$soft noktasının her $G_{\psi(A)}$ τ-soft komşuluğunun ters görüntüsü olan ${\varphi_\psi}^{-1}(G_{\psi(A)})$soft kümesi x_A soft noktasının bir τ-soft komşuluğudur.

2.2.2.2.Teorem.$\varphi_\psi : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (V_{\widetilde{P}}, \tau_2)$soft fonksiyonunun τ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\tau_2$ soft topolojisine göre soft açık olan her soft kümenin ters görüntüsünün τ_1 soft topolojisine göre soft açık bir küme $olmasıdır$.

2.2.2.3.Teorem.U, V, Wevren kümeleri, E, P, Kpotansiyel parametre kümeleri, $\varphi_1 : U \to V$,$\varphi_2 : V \to W$, $\psi_1 : E \to P$, $\psi_2 : P \to K$ fonksiyonlar, $(U_{\widetilde{E}}, \tau_1)$, $(V_{\widetilde{P}}, \tau_2)$ ve $(W_{\widetilde{K}}, \tau_3)$soft topolojik uzaylar,

$(\varphi_\psi)_1 = (\varphi_1, \psi_1) : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (V_{\widetilde{P}}, \tau_2) ve (\varphi_\psi)_2 = (\varphi_2, \psi_2) : (V_{\widetilde{P}}, \tau_2) \to (W_{\widetilde{K}}, \tau_3)$

soft fonksiyonlar olsun. $(\varphi_\psi)_1$, $(\varphi_\psi)_2$fonksiyonlarıτ-soft sürekli ise $(\varphi_\psi)_2 o (\varphi_\psi)_1 : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (W_{\widetilde{K}}, \tau_3)$bileşke soft fonksiyonu da τ-soft süreklidir.

2.2.2.4.Teorem.$\varphi_\psi : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (V_{\widetilde{P}}, \tau_2)$bir soft fonksiyon olsun. $\varphi_\psi$soft fonksiyonunun τ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$

$$\forall F_A \subseteq^{\sim} V_{\widetilde{P}}\ için\ {\varphi_\psi}^{-1}\left(F_A^{\ \circ}\right) \subseteq^{\sim} \left({\varphi_\psi}^{-1}(F_A)\right)^{\circ}$$

$olmasıdır$.

2.2.2.1.Örnek.$\varphi : U \to U, \psi : E \to E$birim dönüşümler olsun.

$$i = (\varphi, \psi) : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (U_{\widetilde{E}}, \tau_2)$$

birim soft fonksiyonunun τ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\tau_2 \subseteq^{\sim} \tau_1 olmasıdır$.

2.2.2.2.Tanım (Aygünoğlu ve Aygün, 2011).$\varphi_\psi : (U_{\widetilde{E}}, \tau_1) \to (V_{\widetilde{P}}, \tau_2)$soft fonksiyon olsun. Her $F_A \in \tau_1$ için $\varphi_\psi(F_A) \in \tau_2$ ise φ_ψ soft fonksiyonuna ***soft açıkfonksiyon*** denir.

2.2.2.5.Teorem. $\varphi_\psi : (U_E^{\sim}, \tau_1) \to (V_P^{\sim}, \tau_2)$soft fonksiyonunun soft açık olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$

$$\forall F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}\ için\ \varphi_\psi(F_A^{\circ}) \subseteq^{\sim} (\varphi_\psi(F_A))^{\circ}$$

$olmasıdır.$

İspat.⇒: $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. $F_A^{\circ} \in \tau_1$ve$\varphi_\psi$soft açık fonksiyonolduğundan $\varphi_\psi(F_A^{\circ}) \in \tau_2$ dir. Diğer taraftan $\varphi_\psi(F_A^{\circ}) \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(F_A)$ ve böylece

$$\varphi_\psi\left(F_A^{\circ}\right) = (\varphi_\psi(F_A^{\circ}))^{\circ} \subseteq^{\sim} (\varphi_\psi(F_A))^{\circ}$$

bağıntısı sağlanır.

⇐: $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$bir soft açık küme olsun. O halde hipotez yardımıyla

$$\varphi_\psi(F_A) = \varphi_\psi\left(F_A^{\circ}\right)$$
$$\subseteq^{\sim}(\varphi_\psi(F_A))^{\circ}$$

ifadesini elde ederiz. Bu da $\varphi_\psi$soft fonksiyonunun soft açık olduğunu gösterir.

2.2.2.6.Teorem. U, V, Wevren kümeleri, E, P, Kpotansiyel parametre kümeleri,

$$\varphi_1 : U \to V\ , \varphi_2 : V \to W, \psi_1 : E \to P, \psi_2 : P \to K$$

fonksiyonlar, $(U_E^{\sim}, \tau_1)$, $(V_P^{\sim}, \tau_2)$ ve $(W_K^{\sim}, \tau_3)$soft topolojik uzaylar,

$$(\varphi_\psi)_1 = (\varphi_1, \psi_1) : (U_E^{\sim}, \tau_1) \to (V_P^{\sim}, \tau_2)\ ve\ (\varphi_\psi)_2 = (\varphi_2, \psi_2) : (V_P^{\sim}, \tau_2) \to (W_K^{\sim}, \tau_3)$$

soft fonksiyonlar olsun. Eğer $(\varphi_\psi)_1$ ve $(\varphi_\psi)_2$ fonksiyonları soft açıksa

$$(\varphi_\psi)_2 o (\varphi_\psi)_1 : (U_E^{\sim}, \tau_1) \to (W_K^{\sim}, \tau_3)$$

bileşke soft fonksiyonu da soft açıktır.

İspat. $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$bir soft açık küme olsun. O halde $(\varphi_\psi)_1(F_A)$ soft kümesi τ_2 soft topolojisinde soft açıktır. $(\varphi_\psi)_2$soft açık fonksiyon olduğundan

$$\left(\varphi_\psi\right)_2((\varphi_\psi)_1(F_A)) = ((\varphi_\psi)_2\ o(\varphi_\psi)_1)(F_A)$$

soft kümesi de τ_3 soft topolojisine göre soft açık kümedir. Bu da $(\varphi_\psi)_2 o(\varphi_\psi)_1$bileşke soft fonksiyonunun soft açık olduğunu gösterir.

2.2.2. τ-ayırma Aksiyomları

Soft topolojik uzaylar için ayırma aksiyomları ilk kez Shabir ve Naz (2011) tarafından verildi. Shabir ve Naz'ın çalışmasında ayırma aksiyomları klasik noktalardan faydalanılarak tanımlanmıştır. Biz ise bu çalışmadan farklı olarak soft noktalardan

yararlanarak ayırma aksiyomlarını aşağıdaki gibi yeniden verdik ve ayırma aksiyomlarını soft topolojik uzaylarda inceledik.

2.2.3.1.Tanım. $(U_E^{\sim}, \tau)$bir softtopolojik uzay olmak üzere her $x_A, y_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ farklı soft nokta çifti için

- $x_A$soft noktasının y_A soft noktasını içermeyen bir $G_A\tau$-soft komşuluğu ya da y_A soft noktasınınx_A soft noktasını içermeyen bir$H_A\tau$-soft komşuluğu varsa $(U_E^{\sim}, \tau)$uzayına***τ-soft T_0-uzay***,
- $x_A$soft noktasının y_A soft noktasını içermeyen bir $G_A\tau$-soft komşuluğu ve y_A soft noktasınınx_A soft noktasını içermeyen bir $H_A\tau$-soft komşuluğu varsa $(U_E^{\sim}, \tau)$uzayına***τ-soft T_1-uzay***,
- $x_A$vey_A soft noktalarının $G_A \cap^{\sim} H_A = \Phi_A$ olacak şekilde sırasıyla $G_A, H_A\tau$-soft komşulukları varsa $(U_E^{\sim}, \tau)$uzayına***τ-soft T_2-uzay*** denir.

2.2.3.1.Teorem.$(U_E^{\sim}, \tau)$birsofttopolojik uzay olmak üzere her $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft noktası için ${x_A}^c$soft kümesi soft açıksa $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojik uzayıτ-soft T_1dır.

İspat. ${x_A}^c$soft açık küme ve x_A, y_Asoft noktaları$U_E^{\sim}$soft kümesinde herhangi iki farklı soft nokta olsun. O halde $y_A \in^{\sim} {x_A}^c$, $x_A \notin^{\sim} {x_A}^c$ ve benzer olarak $x_A \in^{\sim} {y_A}^c$, $y_A \notin^{\sim} {y_A}^c$ dir. Bu da bize $(U_E^{\sim}, \tau)$uzayınınτ-soft T_1-uzay olduğunu gösterir.

2.2.3.1.Uyarı. Kolaylıkla görebiliriz ki, $(U_E^{\sim}, \tau)\tau$-soft T_2-uzay ise τ-soft T_1-uzayıdır ve $(U_E^{\sim}, \tau)\tau$-soft T_1-uzay ise τ-soft T_0-uzayıdır. Bu durumların karşıtı aşağıdaki örneklerde de görüleceği gibi genellikle doğru değildir.

2.2.3.1.Örnek.$U = \{x, z\}$evren kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$potansiyel parametre kümesi, $A = \{e_1, e_2\}$asıl parametre kümesi ve $F_A = \{e_1 = \{x\}, e_2 = \{x, z\}\}$, $G_A = \{e_1 = \{x\}, e_2 = \emptyset\}$olmak üzere $\tau = \{\Phi_A, U_E^{\sim}, F_A, G_A\}$ bir soft topoloji olsun. $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojik uzayının birτ-soft T_0-uzayı olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Ancak z_A soft noktasını kapsayıp x_A soft noktasını kapsamayan hiçbir τ-soft açık küme olmadığından $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojikuzayıbir τ-soft T_1-uzayı değildir.

2.2.3.2.Örnek.$U = \{x, y\}$evren kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$potansiyel parametre kümesi, $A = \{e_1, e_2\}$, $B = \{e_1\}$, $C = \{e_2\}$ asıl parametre kümeleri,

$$F_A = \{e_1 = \{x\}, e_2 = \{x, y\}\},$$

$$G_A = \{e_1 = \{x, y\}, e_2 = \{y\}\},$$

$$D_A = \{e_1 = \{x\}, e_2 = \{y\}\},$$
$$T_A = \{e_1 = \{y\}, e_2 = \{x\}\},$$
$$H_B = \{e_1 = \{x\}\},$$
$$K_B = \{e_1 = \{y\}\},$$
$$I_C = \{e_2 = \{y\}\},$$
$$L_C = \{e_2 = \{x\}\}$$

olmak üzere $\tau = \{\Phi_A, U_E^{\sim}, F_A, G_A, D_A, T_A, H_B, K_B, I_C, L_C\}$ olsun. $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojik uzayı bir τ-soft T_1-uzayıdır ancak τ-soft T_2-uzayı değildir çünkü x_A ve y_A soft noktalarının $G_A \cap^{\sim} H_A = \Phi_A$ olacak şekilde G_A, H_A soft açık kümeleri yoktur.

2.2.3.2.Teorem.$(U_E^{\sim}, \tau_1)$, $(V_P^{\sim}, \tau_2)$ iki soft topolojik uzay ve $\varphi_\psi = (\varphi, \psi)$: $(U_E^{\sim}, \tau_1) \to (V_P^{\sim}, \tau_2)$bire-bir ve τ-soft sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $(V_P^{\sim}, \tau_2)$uzayı τ-soft T_2 ise $(U_E^{\sim}, \tau_1)$ uzayı da τ-soft T_2-uzayıdır.

İspat.$x_A \neq y_A$ikifarklı soft nokta olsun. $\varphi_\psi$soft fonksiyonubire-bir olduğundan $\varphi_\psi(x_A) \neq \varphi_\psi(y_A)$'dır. O halde $\varphi_\psi(x_A)$,$\varphi_\psi(y_A)$ soft noktalarının $F_{\psi(A)} \cap^{\sim} G_{\psi(A)} = \Phi_A$ olacak şekilde sırasıyla $F_{\psi(A)}$ ve $G_{\psi(A)}\tau$-soft komşulukları vardır. $\varphi_\psi$softfonksiyonu τ-soft sürekli olduğundan ${\varphi_\psi}^{-1}(F_{\psi(A)})$ ve ${\varphi_\psi}^{-1}(G_{\psi(A)})$ soft kümeleri $x_A$vey_A soft noktalarının τ-soft komşuluklarıdır ve

$${\varphi_\psi}^{-1}(F_{\psi(A)}) \cap^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}(G_{\psi(A)}) = \Phi_A$$

dır. Bu da $(U_E^{\sim}, \tau_1)$soft topolojik uzayının bir τ-soft T_2-uzayı olduğunu gösterir.

2.2.3.3.Teorem.$(U_E^{\sim}, \tau_1)$, $(V_P^{\sim}, \tau_2)$ iki soft topolojik uzay ve $\varphi_\psi = (\varphi, \psi)$: $(U_E^{\sim}, \tau_1) \to (V_P^{\sim}, \tau_2)$bire-bir, örten ve soft açık bir fonksiyon olsun. Eğer $(U_E^{\sim}, \tau_1)$soft topolojik uzayıτ-soft T_2-uzayı ise $(V_P^{\sim}, \tau_2)$soft topolojikuzayı da τ-soft T_2-uzayıdır.

İspat.$\varphi_\psi(x_A) \neq \varphi_\psi(y_A)$ikifarklı soft nokta olsun. O halde $x_A \neq y_A$'dır. $(U_E^{\sim}, \tau_1)$uzayıτ-soft T_2 olduğundan x_A ve y_A soft noktalarının $F_A \cap^{\sim} G_A = \Phi_A$ olacak şekilde sırasıyla F_A ve$G_A\tau$-soft açık komşulukları vardır. φ_ψ soft açık fonksiyon olduğundan $\varphi_\psi(F_A)$ ve$\varphi_\psi(G_A)$ soft kümeleri sırasıyla $\varphi_\psi(x_A), \varphi_\psi(y_A)$ soft noktalarınınτ-soft açık komşuluklarıdır ve $\varphi_\psi(F_A) \cap^{\sim} \varphi_\psi(G_A) = \Phi_{\psi(A)}$dır. Böylece $(V_P^{\sim}, \tau_2)$bir τ-soft T_2-uzayıdır.

2.2.3.2.Tanım. $(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay olsun. Her $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft noktası ve $x_A \in^{\sim} F_A^c \in \tau$ şeklindeki boş kümeden farklı her $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ soft kümesi için $G_A \cap^{\sim} H_A = \Phi_A$ olacak şekilde x_A soft noktasının veF_A soft kümesinin sırasıyla G_A ve $H_A$$\tau$-soft açık komşulukları varsa $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojikuzayına ***τ-soft regüler uzay***denir.

$(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojik uzayı hem τ-soft regüler hem deτ-soft T_1-uzayıysa ***τ-soft T_3-uzayı***olarak adlandırılır.

2.2.3.2.Uyarı. Aşağıdaki örnekte τ-soft regüler uzayın her zaman τ-soft T_1-uzayı olmadığı görülür:

2.2.3.3.Örnek.$U = \{x, y, z\}$bir evren kümesi, $A = \{e_1\}$asıl parametre kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$potansiyel parametre kümesi ve

$$\tau = \{\Phi_A, U_E^{\sim}, F_A = \{e_1 = \{x\}\}, G_A = \{e_1 = \{y, z\}\}, H_A = \{e_1 = \{x, y, z\}\}\}$$

olmak üzere $(U_E^{\sim}, \tau)$ uzayıτ-soft regüler uzaydır ancak τ-soft T_1-uzayı değildir.

2.2.3.3.Tanım. $(U_E^{\sim}, \tau)$bir soft topolojik uzay olsun. $F_A \cap^{\sim} G_A = \Phi_Ave{F_A}^c, {G_A}^c \in \tau$ şeklindeki boş kümeden farklı her $F_A, G_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$soft kümesi için $V_A \cap^{\sim} W_A = \Phi_A$ olacak şekilde sırasıyla V_A ve $W_A$$\tau$-soft açık komşulukları varsa $(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojikuzayına ***τ-soft normal uzay*** denir.

$(U_E^{\sim}, \tau)$, hem τ-soft normal hem deτ-soft T_1-uzayıysa ***τ-soft T_4-uzayı***olarak adlandırılır.

2.3.Soft Kapalılar Yardımıyla Tanımlanmış Soft Kotopolojik Uzaylar

2.3.1. Soft Kotopoloji

2.3.1.1.Tanım.*U* bir evren kümesi ve *E*potansiyel parametre kümesi olsun. $U_E^{\sim}$tam soft kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olan κ aşağıdaki koşulları sağlarsa ***soft kotopoloji*** olarak adlandırılır:

$i)\ \Phi_A, U_E^{\sim} \in \kappa$,

$ii)\ \{(K_A)_i \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : i \in I\} \subseteq \kappa ise \bigcap^{\sim}_{i \in I} (K_A)_i \in \kappa$,

$iii)\ K_A, L_B \in \kappa ise K_A \cup^{\sim} L_B \in \kappa$dır.

κailesinin her elemanına ***soft kapalı küme*** ve $(U_E^{\sim}, \kappa)$ikilisine***soft kotopolojik uzay***denir.

2.3.1.2.Tanım. κ_1, κ_2 aileleri $U_E^{\sim}$ tam soft kümesi üzerinde iki soft kotopoloji olsun. Her $F_A \in \kappa_2$ için $F_A \in \kappa_1$ oluyorsa κ_2 ailesine κ_1 ailesinden ***daha kabadır*** denir ve $\kappa_2 \subseteq \kappa_1$ ile gösterilir.

2.3.1.1.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay ise her $e \in E$ için $(U(e), \kappa(e))$ uzayı bir kotopolojik uzaydır.

2.3.1.2.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa_1)$ ve $(U_E^{\sim}, \kappa_2)$ soft kotopolojik uzaylarsa $(U_E^{\sim}, \kappa_1 \cap \kappa_2)$ uzayı bir soft kotopolojik uzaydır.

2.3.1.1.Uyarı. Soft kotopolojik uzayın lokal yapısını daha iyi anlayabilmek için Wang (1983) tarafından verilmiş remote komşuluk kavramını soft kümeler için genelleştirerek vereceğiz.

2.3.1.3.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay, $M_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ soft küme ve $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft nokta olsun. Eğer $x_A \notin^{\sim} K_C \supseteq^{\sim} M_B$ olacak şekilde bir K_C soft kapalı kümesi varsa M_B soft kümesine x_A ***soft noktasınınsoft remote komşuluğu*** denir. x_A soft noktasının tüm soft remote komşuluklarının ailesi $\mathcal{R}_{\aleph}(x_A)$ simgesi ile gösterilir.

2.3.1.4.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay ve $F_A, M_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Eğer $F_A \not\subseteq^{\sim} K_C \supseteq^{\sim} M_B$ olacak şekilde bir K_C soft kapalı kümesi varsa M_B soft kümesine F_A ***soft kümesinin soft remote komşuluğu*** denir.

2.3.1.3.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay, $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}, F_B, G_C \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$i)$ Φ_E boş soft kümesi $U_E^{\sim}$ tam soft kümesindeki her noktanınsoft remote komşuluğudur.

$ii)$ G_C soft kümesi x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğu ve $F_B \subseteq^{\sim} G_C$ ise F_B soft kümesi de x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur.

2.3.1.5.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay, $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$, ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. x_A soft noktasının her M_A soft remote komşuluğu için $F_A{}^c \cup^{\sim} M_A \neq U_A^{\sim}$ ise x_A soft noktasına F_A soft kümesinin ***soft kapanış (değme) noktası*** denir. F_A soft kümesinin tüm soft kapanış noktaları kümesine F_A soft kümesinin ***soft kapanışı*** adı verilir ve $F_A{}^{-}$ simgesi ile gösterilir.

2.3.1.4.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir soft kotopolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. O halde

$$F_A^{-} = \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_A soft kapalı, K_A \supseteq^{\sim} F_A\}$$

olur.

İspat. $x_A \in^{\sim} \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_A$soft kapalı$, K_A \supseteq^{\sim} F_A\} ve x_A \notin^{\sim} F_A^{-}$ olduğunu varsayalım. O halde $F_A{}^{c} \cup^{\sim} L_A = U_A^{\sim}$ olacak şekilde x_A soft noktasını içermeyen en az bir L_A soft kapalı kümesi vardır. Bu durumda $L_A{}^{c} \subseteq^{\sim} F_A{}^{c}$ olur ve buradan $F_A \subseteq^{\sim} L_A$ dır. Böylece $x_A \notin^{\sim} L_A \supseteq^{\sim} F_A$ olacak şekilde bir L_A soft kapalı kümesi bulanabilir. Buradan $x_A \notin^{\sim} \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_A\ soft\ kapalı,\ K_A \supseteq^{\sim} F_A\}$ olur ve bu durumdabir çelişkidir. O zaman $x_A \in^{\sim} F_A^{-}$ olmalıdır.

Şimdi $x_A \in^{\sim} F_A^{-}$ ve $x_A \notin^{\sim} \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_A\ soft\ kapalı, K_A \supseteq^{\sim} F_A\}$ olduğunu kabul edelim. O halde $x_A \notin^{\sim} K_A \supseteq^{\sim} F_A$ olacak şekilde bir K_A soft kapalı kümesi vardır ve böylece K_A soft kümesinin x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğu olduğu ve $F_A{}^{c} \cup^{\sim} K_A = U_A^{\sim}$ olduğu görülür. Buradan $x_A \notin^{\sim} F_A^{-}$ olur.Bu ise çelişkidir. O zaman $x_A \in^{\sim} \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_A$soft kapalı$, K_A \supseteq^{\sim} F_A\}$ olmalıdır.

2.3.1.5.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

$$i)\ F_A \subseteq^{\sim} F_A^{-}$$

$ii)$ F_A^{-}soft kümesi F_A soft kümesini kapsayan en küçük soft kapalı kümedir.

$iii)$ $F_A$soft kümesinin soft kapalı olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\ F_A = F_A^{-}$ $olmasıdır.$

$iv)$ $(F_A^{-})^{-} = F_A^{-}$.

İspat.İspat 2.3.1.4.Teoremden açıktır.

2.3.1.6.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay ve $F_A, G_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

$$i)\ F_A \subseteq^{\sim} G_B ise F_A^{-} \subseteq^{\sim} G_B^{-}$$

$ii)$ $(F_A \cup^{\sim} G_B)^{-} = F_A^{-} \cup^{\sim} G_B^{-}$.

$iii)$ $(F_A \cap^{\sim} G_B)^{-} \subseteq^{\sim} F_A^{-} \cap^{\sim} G_B^{-}$.

$iv)$ $(U_E^{\sim})^{-} = U_E^{\sim}, (\Phi_A)^{-} = \Phi_A$.

2.3.1.6.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay, $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ ve $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$olsun.$x_A$soft noktasının her M_A soft remote komşuluğu için $(M_A \cup^{\sim} x_A) \cup^{\sim} F_A{}^{c} \neq U_A^{\sim}$ ise x_A soft noktasınaF_A soft kümesinin ***soft yığılma noktası***

denir.$F_A$soft kümesinin tüm soft yığılma noktalarının kümesini $F_A{}^{\sim}$simgesi ile göstereceğiz.

2.3.1.2.Uyarı. Her soft yığılma noktasının bir soft kapanış noktası olduğu kolayca görülebilir.

2.3.1.7.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. O halde $F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim}$soft kümesi bir soft kapalı kümedir.

İspat. Varsayalım ki$F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim}$ soft kapalı küme olmasın. O halde $x_A \in^{\sim} (F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim})^{-}$ ve $x_A \notin^{\sim} F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim}$ olacak şekilde bir $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft noktası vardır. Buradan $x_A \notin^{\sim} F_A$ ve $x_A \notin^{\sim} F_A{}^{\sim}$dir. Bu durumda x_A soft noktasının

$$(M_A \cup^{\sim} x_A) \cup^{\sim} F_A{}^{c} = U_A^{\sim}$$

olacak şekilde bir M_A soft remote komşuluğu vardır. $x_A \notin^{\sim} F_A$olduğundan

$$M_A \cup^{\sim} F_A{}^{c} = U_A^{\sim}$$

dır. Böylece,

$$x_A \notin^{\sim} (F_A)^{-} = (F_A)^{-} \cup^{\sim} (F_A{}^{\sim})^{-} = (F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim})^{-}$$

olur. Bu durum ise bir çelişkidir.

2.3.1.8.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. O halde $F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim} = (F_A)^{-}$dır.

İspat.$F_A \subseteq^{\sim} (F_A)^{-}veF_A{}^{\sim} \subseteq^{\sim} (F_A)^{-}$olduğundan

$$F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim} \subseteq^{\sim} (F_A)^{-} \qquad (1)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Diğer taraftan $F_A \subseteq^{\sim} F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim}$ ve $F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim}$soft kümesi soft kapalı olduğundan

$$(F_A)^{-} \subseteq^{\sim} F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim} \qquad (2)$$

ifadesini elde ederiz.

(1) ve (2) ifadelerinden$F_A \cup^{\sim} F_A{}^{\sim} = (F_A)^{-}$olduğu görülür.

2.3.1.2.Sonuç.$(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay ve $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. $F_A$soft kümesinin soft kapalı olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul F_A{}^{\sim} \subseteq^{\sim} F_A olmasıdır.$

2.3.2. κ-soft Sürekli ve Soft Kapalı Fonksiyonlar

2.3.2.1.Tanım.$(U_E^{\sim}, \kappa_1)$ve$(V_P^{\sim}, \kappa_2)$ iki soft kotopolojik uzay, $x_A \in U_E^{\sim}$ bir soft nokta ve $\varphi: U \to V$, $\psi: E \to P$ fonksiyonlar olmak üzere $\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$bir

soft fonksiyon olsun. $\varphi_\psi(x_A)$soft noktasının her $M_{\psi(A)}$ soft remote komşuluğu için $M_{\psi(A)} \cap^{\sim} \varphi_\psi(U_E^{\sim}) \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$ olacak şekilde x_A soft noktasının bir N_A soft remote komşuluğu varsa φ_ψ dönüşümüne x_A soft noktasında ***κ-soft sürekli fonksiyon*** denir. $\varphi_\psi$dönüşümü$U_E^{\sim}$ soft kümesinin her soft noktasında κ-soft sürekli ise $U_E^{\sim}$ üzerinde κ-soft süreklidir denir.

2.3.2.1.Uyarı.$V_P^{'} = \varphi_\psi(U_E^{\sim})$olmak üzere $\kappa_2{}^{'}$, $V_P^{'}$ üzerinde $\kappa_2$kotopolojisinden indirgenmiş bir kotopolojidir ve$K_A^{'} \in \kappa_2{}^{'}$ olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$

$$K_A^{'} = K_A \cap^{\sim} V_P^{'}\ ,K_A \in \kappa_2$$

$olmasıdır.$

2.3.2.1.Lemma.$\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$softfonksiyonunun κ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{'}, \kappa_2{}^{'})$soft fonksiyonunun κ-soft sürekli $olmasıdır.$

İspat.⇒: $K_{\psi(A)}^{'} \in \kappa_2{}^{'}ve\varphi_\psi(x_A) \notin^{\sim} K_{\psi(A)}^{'} = K_{\psi(A)} \cap^{\sim} V_P^{'}$,$K_A \in \kappa_2$ olsun. $\varphi_\psi(x_A) \notin^{\sim} K_{\psi(A)} \in \kappa_2$olduğu kolaylıkla görülür. $\varphi_\psi$softfonksiyonuκ-soft sürekli olduğundanx_A soft noktasının$K_{\psi(A)}^{'} = K_{\psi(A)} \cap^{\sim} \varphi_\psi(U_E^{\sim}) \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$ olacak şekilde bir N_A soft remote komşuluğu vardır. Bu da $\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2{}^{'})$soft fonksiyonunun κ-soft sürekli olduğunu gösterir.

⇐: $K_{\psi(A)} \in \kappa_2$ve$\varphi_\psi(x_A) \notin^{\sim} K_{\psi(A)}$ olsun. $K_{\psi(A)}^{'} = K_{\psi(A)} \cap^{\sim} \varphi_\psi(U_E^{\sim})$ olduğundan $\varphi_\psi(x_A) \notin^{\sim} K_{\psi(A)}^{'}$dır. O halde$x_A$ soft noktasının$K_{\psi(A)}^{'} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$olacak şekilde bir N_A soft remote komşuluğu vardır ve böylece $\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$fonksiyonu κ-soft süreklidir.

2.3.2.2.Lemma$\varphi_\psi: (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$soft fonksiyonunun κ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının her $K_{\psi(A)}^{'} \subseteq^{\sim} f(U_E^{\sim})$ soft remote komşuluğu içinx_A soft noktasının$K_{\psi(A)}^{'} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$olacak şekilde bir N_A soft remote komşuluğunun olmasıdır. Üstelik bu durumda $K_{\psi(A)}^{'} = \varphi_\psi(N_A)$ olur.

2.3.2.1.Teorem.$\varphi_\psi$softfonksiyonunun x_A soft noktasında κ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\ \varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının her $K_{\psi(A)}^{'} \subseteq^{\sim} V_P^{'}$ soft remote komşuluğunun ters görüntüsü olan $\varphi_\psi{}^{-1}(K_{\psi(A)}^{'}) \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$soft kümesinin$x_A$ soft noktasının bir soft remote komşuluğudur.

İspat.⇒: $K'_{\psi(A)}$soft kümesi$\varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının bir soft remote komşuluğu olsun.$K'_{\psi(A)}$soft kümesini V'_P evreninde $\varphi_\psi(x_A)$ soft noktasını içermeyen bir soft kapalı olarak varsayabiliriz. $\varphi_\psi$softfonksiyonu x_A soft noktasında κ-soft sürekli olduğundan $K'_{\psi(A)} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$olacak şekilde x_A soft noktasını içermeyen bir $N_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ soft kapalı kümesi vardır. Şimdi ${\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)}) \subseteq^{\sim} N_A$olduğunu göstermeliyiz. ${\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)}) \not\subseteq^{\sim} N_A$olduğunu varsayalım. O halde $N_A \cup^{\sim} ({\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)}))^c \neq U_E^{\sim}$ ve$\varphi_\psi(N_A) \cup^{\sim} (K'_{\psi(A)})^c \neq V'_P$dır. Buradan $K'_{\psi(A)} \not\subseteq^{\sim} \varphi_\psi(N_A)$ olur ve bu durum bir çelişkidir. O halde ${\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)}) \subseteq^{\sim} N_A$dır. Böylece,

$$ {\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)}) = \cap^{\sim}\{N_A : x_A \notin^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)})\} $$

olur. Bu da gösterir ki; ${\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)})$ soft kümesi x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur.

⇐: $K'_{\psi(A)}$soft kümesi $\varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının bir soft remote komşuluğu olsun. Varsayımımızdan, ${\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)})$ soft kümesi de x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur.$\varphi_\psi({\varphi_\psi}^{-1}(K'_{\psi(A)})) = K'_{\psi(A)}$olduğundan, $\varphi_\psi$soft fonksiyonu x_A soft noktasında κ-soft süreklidir.

2.3.2.1.Sonuç.$\varphi_\psi$softfonksiyonux_A soft noktasında κ-soft sürekli ise $\varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının her $K_{\psi(A)} \subseteq^{\sim} V_P$ soft remote komşuluğunun ters görüntüsü olan ${\varphi_\psi}^{-1}(K_{\psi(A)}) \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ soft küme x_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur.

2.3.2.3.Lemma. $(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayında$F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ soft kümesinin soft kapalı olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul F_A$ soft kümesinin içermediği her noktanın soft remote komşuluğu $olmasıdır$.

2.3.2.2.Teorem.$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \kappa_U) \to (V_P^{\sim}, \kappa_V)$softfonksiyonunun κ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul \kappa'_V$ kotopolojisine göre soft kapalı olan her soft kümenin ters görüntüsünün κ_U topolojisine göre soft kapalı olmasıdır.

2.3.2.3.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa_1)$ve$(V_P^{\sim}, \kappa_2)$ iki soft kotopolojik olsun.
$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$soft fonksiyonunun κ-soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$ her ${F_A}' \subseteq^{\sim} {V_P}^{\sim'}$ için $({\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'))^{-} \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-}) olmasıdır$.

İspat. $\Rightarrow$: ${F_A}' \subseteq^{\sim} {V_P^{\sim}}'$ olsun. ${F_A}'^{-}$soft kümesi soft kapalı olduğundan, ${\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-})$soft kapalıdır. ${F_A}' \subseteq^{\sim} {F_A}'^{-}$ olduğundan ${\varphi_\psi}^{-1}({F_A}') \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-})$dır. Böylece $({\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'))^{-} \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-})$ olur.

$\Leftarrow$:${F_A}' \in {\kappa_2}'$ olsun. Hipotezden,$({\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'))^{-} \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-}) = {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}')$ olur. Bu da bize ${\varphi_\psi}^{-1}({F_A}')$ soft kümesinin bir soft kapalı küme olduğunu gösterir.

2.3.2.4.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa_1)$, $(V_P^{\sim}, \kappa_2)$ ve $(W_R^{\sim}, \kappa_3)$ soft kotopolojik uzaylar, $\varphi_1: U \longrightarrow V$, $\varphi_2: V \longrightarrow W$ ve $\psi_1: E \longrightarrow P$, $\psi_2: P \longrightarrow K$ dönüşümler olmak üzere

$(\varphi_\psi)_1 = (\varphi_1, \Psi_1): (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$,$(\varphi_\psi)_2 = (\varphi_2, \Psi_2): (V_P^{\sim}, \kappa_2) \longrightarrow (W_R^{\sim}, \kappa_3)$

iki soft fonksiyon olsun. $(\varphi_\psi)_1$ve$(\varphi_\psi)_2\kappa$-soft sürekli fonksiyonlar ise $(\varphi_\psi)_2 o (\varphi_\psi)_1$bileşke soft fonksiyonu da κ-soft süreklidir.

İspat.$K_A \in \kappa_3$olsun.$(\varphi_\psi)_2$soft fonksiyonuκ-soft sürekli olduğundan ${(\varphi_\psi)_2}^{-1}(K_A) \in \kappa_2$ dir. $(\varphi_\psi)_1$soft fonksiyonuκ-soft sürekli olduğundan $(\varphi_\psi)_2 o (\varphi_\psi)_1 = {(\varphi_\psi)_1}^{-1}({(\varphi_\psi)_2}^{-1}(K_A)) \in \kappa_1$ dir. Bu da $(\varphi_\psi)_2 o (\varphi_\psi)_1$ bileşke soft fonksiyonununκ-soft sürekli olduğunu gösterir.

2.3.2.2.Tanım.$(U_E^{\sim}, \kappa_1)$ve$(V_P^{\sim}, \kappa_2)$ iki soft kotopolojik uzay ve

$$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$$

bir soft fonksiyon olsun. Her $K_A \in \kappa_1$ için $\varphi_\psi(K_A) \in \kappa_2$ise φ_ψ soft fonksiyonu ***soft kapalı***olarak adlandırılır.

2.3.2.5.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa_1)$ve$(V_P^{\sim}, \kappa_2)$ iki soft kotopolojik uzay ve

$$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \kappa_2)$$

soft fonksiyon olsun. $\varphi_\psi$softfonksiyonunun soft kapalı olması için $gerek\ ve\ yeter$

$$koşul her F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}\ için \left(\varphi_\psi(F_A)\right)^{-} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi({F_A}^{-}) olmasıdır.$$

İspat.$\Rightarrow$: $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. ${F_A}^{-}$soft kapalı olduğundan $\varphi_\psi({F_A}^{-})$soft kümesi soft kapalıdır. $F_A \subseteq^{\sim} {F_A}^{-}$olduğundan$\left(\varphi_\psi(F_A)\right)^{-} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi({F_A}^{-})$ olduğu kolayca görülebilir.

$\Leftarrow$: $K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$bir soft kapalı küme olsun. Hipotezden $\left(\varphi_\psi(K_A)\right)^{-} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi({K_A}^{-})$dırve $\varphi_\psi({K_A}^{-}) = \varphi_\psi(K_A)$ olduğundan $\left(\varphi_\psi(K_A)\right)^{-} \subseteq^{\sim} \varphi_\psi(K_A)$ olur Bu da $\varphi_\psi$soft fonksiyonunun soft kapalı olduğunu gösterir.

2.3.3. κ-soft Ayırma Aksiyomları

2.3.3.1.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir softkotopolojik uzayolsun. Her farklı$x_A, y_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$soft nokta çifti için x_A soft noktasınıny_A soft noktasını içeren bir M_A soft remote komşuluğu ya da $y_A$soft noktasınınx_A soft noktasını içeren bir N_A soft remote komşuluğu varsa $(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayına***κ-softT_0-uzay*** denir.

2.3.3.1.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa)$softkotopolojik uzayıκ-soft T_0-uzay ise

$$x_A \neq y_A \Rightarrow (x_A)^{-} \neq (y_A)^{-}$$

dır.

İspat.$(U_E^{\sim}, \kappa)$birκ-soft T_0-uzay olsun. $x_A \neq y_A$farklı soft noktaları için $(x_A)^{-} = (y_A)^{-}$ olsun. O halde $x_A \in^{\sim} (x_A)^{-}, (x_A)^{-} = (y_A)^{-}$ olduğundan $x_A \in^{\sim} (y_A)^{-}$ve $y_A \in^{\sim} (y_A)^{-}$, $(x_A)^{-} = (y_A)^{-}$olduğundan $y_A \in^{\sim} (x_A)^{-}$dır. $x_A \in^{\sim} (y_A)^{-}$olduğundan, x_A soft noktasının her M_A soft remote komşuluğu için$M_A \cup^{\sim} y_A^{c} \neq U_A^{\sim}$dır. O halde

$$M_A(e) \cup^{\sim} (U - y_A(e)) \neq U$$

olacak şekilde bir$e \in A$ vardır. Buradan $y \notin M_A(e)$ ve böylece $y_A \notin^{\sim} M_A$ olur. Yukarıdaki işlem benzer şekilde x_A soft noktası için de gösterilebilir. Bu ise $(U_E^{\sim}, \kappa)$ uzayınınκ-soft T_0-uzay olmasıyla çelişir.

2.3.3.2.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir softkotopolojik uzay olmak üzere her farklı$x_A, y_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$soft nokta çifti için, x_A soft noktasının$y_A$soft noktasını içeren bir M_A soft remote komşuluğu ve $y_A$soft noktasınınx_A soft noktasını içeren bir N_A soft remote komşuluğu varsa$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayına***κ-softT_1-uzay***denir.

2.3.3.2.Teorem. $(U_E^{\sim}, \kappa)$softkotopolojik uzayının κ-soft T_1olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$ her $x_A (x \in U, A \subseteq E)$ soft noktasının soft kapalı bir küme $olmasıdır$.

İspat.⇒: $x_A \neq (x_A)^{-}$olsun. O halde $z_A \in^{\sim} (x_A)^{-}$olacak şekilde bir $z_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft noktası vardır. Buradan z_A soft noktasının bir$M_A$soft remote komşuluğu için $M_A \cup^{\sim} {x_A}^{c} \neq U_A^{\sim}$dır. Böylece$x_A \notin^{\sim} M_A$ olur. Bu ise $(U_E^{\sim}, \kappa)$ uzayınınκ-soft T_1 olmasıyla çelişir.

⇐: $x_A$soft kapalı bir küme olsun. Bu durumda $x_A = (x_A)^{-}$dır. Farklı bir y_A soft noktası için,$y_A \notin^{\sim} (x_A)^{-}$ ve $(x_A)^{-} = x_A$ olduğundan x_A soft noktasıy_A soft

noktasınınbir soft remote komşuluğudur. Benzer şekilde y_A soft noktası dax_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur. Böylece $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıbirκ-soft T_1-uzayıdır.

2.3.3.1.Uyarı. Herκ-soft T_1-uzayı bir κ-soft T_0-uzayıdır. Ancak karşıtı aşağıdaki örnekte de olduğu gibi genellikle doğru değildir.

2.3.3.1.Örnek.*U* reel sayılar kümesi, E doğal sayılar kümesi

$$K_{E_\lambda} = \{(e, [e+\lambda, \infty[\quad): \lambda \in \mathbb{N}, e \in E_\lambda\}\ ve\ \kappa = \left\{K_{E_\lambda} \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}\right\} \cup^{\sim} \{\Phi_A, U_E^{\sim}\}$$

olsun. $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayı bir κ-soft T_0-uzayıdır ancakκ-soft T_1-uzayı değildir.

2.3.3.2.Uyarı.κ-soft T_2, κ-soft regüler ve κ-soft normal uzayların özelliklerini verebilmek için soft remote komşuluktan daha kuvvetli bir yapıya ihtiyaç duyarız:

2.3.3.3.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$bir soft kotopolojik uzay, $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ bir soft nokta ve $S_B \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ bir soft küme olsun.

$$\forall e \in C\ için\ x \notin K_C(e) \supseteq S_B(e)$$

olacak şekilde bir K_C soft kapalı kümesi varsa S_B soft kümesinex_A soft noktasının***strong soft remote komşuluğu*** denir.

$$\forall e \in C\ için\ F_A(e) \not\subseteq^{\sim} K_C(e) \supseteq S_B(e)$$

olacak şekilde bir K_C soft kapalı kümesi varsa S_B soft kümesineF_A soft kümesininstrong soft remote komşuluğu denir.

2.3.3.4.Tanım.$(U_E^{\sim}, \kappa)$bir softkotopolojik uzay olmak üzere herx_A, y_Afarklı soft nokta çifti içinx_A ve y_A soft noktalarının$M_A \cup^{\sim} N_A = U_A{}^{\sim}$ olacak şekilde sırasıyla M_A ve N_A soft strong remote komşulukları varsa$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayına***κ-softT_2-uzay*** denir.

2.3.3.3.Teorem$(U_E^{\sim}, \kappa)$birκ-soft T_2-uzay ise

$$x_A = \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : x_A \in^{\sim} K_A \in \kappa\}$$

dır.

İspat. $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$olsun. $x_A$soft noktasından farklı bir y_A soft noktasını göz önüne alalım.$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıκ-soft T_2-uzay olduğundan her $e \in A$ için $, x \notin M_A(e)$, $y \notin N_A(e)$ ve $M_A \cup^{\sim} N_A = U_A{}^{\sim}$ olacak şekilde M_A ve N_A soft kapalı kümeleri vardır. O halde $x_A \in^{\sim} N_A$ ve$y_A \in^{\sim} M_A$dır.Bu da bize gösterir ki, x_A soft noktasını içeren bir soft kapalı küme y_A soft noktasını içermez. Böylece $x_A = \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : x_A \in^{\sim} K_A \in \kappa\}$olur.

2.3.3.4.Teorem $x_A = \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : x_A \in^{\sim} K_A \in \kappa\}$ ise $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayı birκ-soft T_0-uzayıdır.

İspat. $x_A, y_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$iki farklı soft nokta olsun.Bu durumda$y_A \notin^{\sim} \bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : x_A \in^{\sim} K_A \in \kappa\}$ olur. $\bigcap^{\sim}\{K_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : x_A \in^{\sim} K_A \in \kappa\}$softkümesini$S_A$olarak adlandıralım. O halde S_A soft kümesi y_A soft noktasının bir soft remote komşuluğudur ve x_A soft noktasını içerir. Bu da bize$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayınınbirκ-soft T_0-uzayı olduğunu gösterir.

2.3.3.3.Uyarı. Her κ-soft T_2-uzayı bir κ-soft T_1-uzayıdır ancak karşıtı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi doğru değildir:

2.3.3.2.Örnek $U = \mathbb{R}$evren kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve$A \subseteq E$ parametre kümeleri,$\lambda \in \mathbb{N}$ ve$(K_A)_\lambda = \{(e_i, V) : i \in \{1,2,3\}, e_i \in E$ ve $V \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir küme$\}$ olmak üzere $\kappa = \{(K_A)_\lambda \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}\} \cup^{\sim} \{U_E^{\sim}\}$şeklinde alınırsa $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayı bir soft kotopolojik uzayıdır ve bir κ-soft T_1-uzayıdır ancakκ-soft T_2-uzayı değildir.$x_A \neq y_A$ soft noktaları için, $M_A = \{(e_i, \{y\}) : e_i \in A\}$ ve $N_A = \{(e_i, \{x\}) : e_i \in A\}$ soft kümeleri sırasıyla x_A ve y_A soft noktalarının soft remote komşuluklarıdır ve$y_A \in^{\sim} M_A$,$x_A \in^{\sim} N_A$dır. Buradan $(U_E^{\sim}, \kappa)$ bir κ-soft T_1-uzayıdır.Ancakx_A ve y_A soft noktalarının$M_A \cup^{\sim} N_A = \mathbb{R}_A^{\sim}$ olacak şekilde strong soft remote komşulukları olmadığından $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıbir κ-soft T_2-uzay değildir.

2.3.3.5.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$softkotopolojik uzay olmak üzere her$x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$soft noktası ve x_A soft noktasını içermeyen her soft kapalı$K_A \neq \Phi_A$ soft kümesi için$x_A$soft noktasının ve K_A soft kümesinin$M_A \cup^{\sim} N_A = U_A^{\sim}$ olacak şekilde sırasıyla M_A ve N_A strong soft remote komşulukları varsa $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayına***κ-soft regüler uzay*** denir.

2.3.3.6.Tanım. $(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayı hem κ-soft T_1 hemde κ-soft regüler uzay ise ***κ-soft*** $\boldsymbol{T_3}$***-uzay***olarak adlandırılır.

2.3.3.5.Teorem.$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıκ-soft regüleruzay ise $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ soft noktasının her M_A soft remote komşuluğu için $M_A \subseteq^{\sim} L_A$ olacak şekilde bir $L_A \in \Re_\aleph(x_A)$vardır.

İspat. $M_A \in \Re_\aleph(x_A)$olsun. O halde $x_A \notin K_A \supseteq^{\sim} M_A$olacak şekilde bir K_A soft kapalı kümesi vardır. $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıκ-soft regüler olduğundan $x_A$soft noktasının ve K_A soft kümesinin$L_A \cup^{\sim} S_A = U_A^{\sim}$ olacak şekilde sırasıyla L_A ve S_A strong soft remote komşulukları vardır. Buradan $M_A \subseteq^{\sim} K_A \subseteq^{\sim} L_A$olur ve ispat tamamlanır.

2.3.3.6.Teorem $(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayıκ-soft T_3 ise κ-soft T_2-uzayıdır.

İspat.$x_A \neq y_A$iki farklı soft nokta olsun. $(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayı κ-soft T_1 olduğundan y_A soft kapalı bir kümedir ve $x_A \notin {y_A}^{-}$dır. Diğer taraftan$(U_E^{\sim}, \kappa)$uzayıκ-soft regülerolduğundan $x_A$vey_A soft noktalarının$M_A \cup^{\sim} N_A = U_A^{\sim}$ olacak şekilde sırasıyla M_A ve N_A strong soft remote komşulukları vardır. Bu da bize $(U_E^{\sim}, \kappa)$softkotopolojik uzayınınκ-soft T_2 olduğunu gösterir.

2.3.3.7.Tanım.$(U_E^{\sim}, \kappa)$birsoft kotopolojik uzay olsun. ${K_1}_A \cap^{\sim} {K_2}_A \neq \Phi_A$olacak şekilde her${K_1}_A, {K_2}_A$soft kapalı altkümesi için $M_A \cup^{\sim} N_A = U_A^{\sim}$ olacak şekilde sırasıyla M_A ve N_A strong soft remote komşulukları varsa $(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayına***κ-soft normal uzay***denir.

$(U_E^{\sim}, \kappa)$soft kotopolojik uzayı hem κ-soft T_1 hem de κ-soft normal uzay ise ***κ-soft T_4-uzay***olarak adlandırılır.

2.4. Soft Ditopolojik Uzaylar

Bu kesimde soft ditopolojik uzayları tanımlayacağız. Soft ditopolojik uzaylar 2.2 ve 2.3kesimlerinde verdiğimiz birbirinden bağımsız olan soft topolojik uzaylar ve soft kotopolojik uzayların bir kombinasyonu olarak düşünülebilir.

2.4.1.Tanım.τailesi$U_E^{\sim}$ üzerinde bir soft topoloji ve κ ailesi$U_E^{\sim}$ üzerinde bir soft kotopoloji ise $(U_E^{\sim}, \tau, \kappa)$üçlüsüne $U_E^{\sim}$ üzerinde bir ***soft ditopolojik uzay*** denir.$\delta = (\tau, \kappa)$çifti ise $U_E^{\sim}$soft kümesi üzerinde bir ***soft ditopoloji*** olarak adlandırılır.

2.4.2.Tanım.$U_E^{\sim}$üzerinde iki soft ditopoloji $\delta_1 = (\tau_1, \kappa_1)$ ve $\delta_2 = (\tau_2, \kappa_2)$ verilsin. Eğer $\tau_2 \subseteq \tau_1$ ve $\kappa_2 \subseteq \kappa_1$ ise δ_1 soft ditopolojisi δ_2 soft ditopolojisinden ***dahakabadır***denir ve $\delta_1 \subseteq \delta_2$ sembolü ile gösterilir.

2.4.3.Tanım. $(U_E^{\sim}, \tau, \kappa)$bir soft ditopolojik uzay, $F_B, M_C \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ ve $x_A \in^{\sim} U_E^{\sim}$ olsun. Eğer F_B soft kümesix_A soft noktasının bir soft τ-komşuluğu ve M_C soft kümesi$x_A$soft noktasının bir soft remote komşuluğu ise (F_B, M_C) ikilisine x_A soft noktasının bir ***soft komşuluğu*** denir.

2.4.3.Tanım. $(U_E^{\sim}, \tau, \kappa)$soft ditopolojik uzayında herhangi bir $F_A \subseteq^{\sim} U_E^{\sim}$ kümesinin içi ve kapanışı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$F_A^{\circ} = \bigcup_{i\in I}^{\sim}\{G_{A_i} \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : G_{A_i} \in \tau, G_{A_i} \subseteq^{\sim} F_A\}$,

$F_A^{-} = \bigcap_{i\in I}^{\sim}\{K_{A_i} \subseteq^{\sim} U_E^{\sim} : K_{A_i} \in \kappa, F_A \subseteq^{\sim} K_{A_i}\}$.

2.4.4.Tanım. $(U_E^{\sim}, \delta_1)$ve$(V_P^{\sim}, \delta_2)$iki soft ditopolojik uzay olsun.$\varphi: U \to V$ve $\psi: E \to P$softfonksiyonlar olmak üzere $\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2, \kappa_2)$bir soft fonksiyon olsun.

Eğer $\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2)$soft fonksiyonu$x_A$ soft noktasında τ-sürekli ve κ-sürekli ise $\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2, \kappa_2)$ fonksiyonux_A soft noktasında ***soft sürekli*** olarak adlandırılır.

2.4.1.Teorem.$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2, \kappa_2)$softfonksiyonunun$x_A$ soft noktasında soft sürekli fonksiyon olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul \varphi_\psi(x_A)$ soft noktasının her soft komşuluğu $(F_{\psi(A)}, {M_{\psi(A)}}')$ için $({\varphi_\psi}^{-1}(F_{\psi(A)}),\ {\varphi_\psi}^{-1}({M_{\psi(A)}}'))$ soft kümesininx_A soft noktasının bir soft komşuluğu $olmasıdır$.

İspat.2.2.2.1.Teorem ve 2.3.2.1.Teoremin sonucudur.

2.4.2.Teorem. $\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2, \kappa_2)$softfonksiyonunun soft sürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul$ her $T_{\psi(A)} \in \tau_2$ için ${\varphi_\psi}^{-1}(T_{\psi(A)}) \in \tau_1$ ve her ${K_{\psi(A)}}' \in {\kappa_2}'$ için ${\varphi_\psi}^{-1}({K_{\psi(A)}}') \in \kappa_1 olmasıdır$.

İspat. 2.2.2.2. Teorem ve 2.3.2.2.Teoremin sonucudur.

2.4.3.Teorem.$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (U_E^{\sim}, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (V_P^{\sim}, \tau_2, \kappa_2)$soft fonksiyonunun softsürekli olması için $gerek\ ve\ yeter\ koşul\ her\ F_A \subseteq^{\sim} V_P^{\sim}$ için,

$${\varphi_\psi}^{-1}(intF_A) \subseteq^{\sim} int\left({\varphi_\psi}^{-1}(F_A)\right) ve\ ({\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'))^{-} \subseteq^{\sim} {\varphi_\psi}^{-1}({F_A}'^{-})$$

$olmasıdır$.

İspat.2.2.2.4.Teorem ve 2.3.2.3. Teoremin sonucudur.

2.4.5.Tanım.$(U_E^{\sim}, \tau)$soft topolojik uzayı **τ-*soft T_0*(**sırasıyla**τ-*softT_1*, τ-*softT_2*, τ-$softregüler$, τ-*softT_3*,τ-*soft normal*,τ-*softT_4*)** ve $(U_E^{\sim}, \kappa)$**κ-*softT_0*** (sırasıyla**κ-*softT_1*,κ-*softT_2*,κ-*soft regüler*,κ-*soft T_3*,κ-*softnormal*, κ-*softT_4*)** ise $(U_E^{\sim}, \tau, \kappa)$ soft ditopolojik uzayına ***soft T_0*(**sırasıyla***soft T_1*, *soft T_2*, *soft regüler*, *soft T_3*, *soft normal*, *soft T_4*)** denir.

2.4.4.Teorem.$(U_{\widetilde{E}}, \tau, \kappa)$soft ditopolojik uzay ve $x_A \in^{\sim} U_{\widetilde{E}}$ olsun. Eğer ${x_A}^c$soft kümesi soft açık ve $x_A$soft kümesi soft kapalıysa $(U_{\widetilde{E}}, \tau, \kappa)$soft ditopolojik uzayı soft T_1-uzayıdır.

İspat.2.2.3.1.Teorem ve 2.3.3.2.Teoremin sonucudur.

2.4.1.Uyarı. Her soft T_1 ditopolojik uzay bir soft T_0 ditopolojik uzaydır. Karşıtı aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi genelde doğru değildir:

2.4.1.Örnek. $U = \mathbb{R}$ evren kümesi, $E = \mathbb{N}$, $A \subseteq E$ parametre kümeleri, ve $F_{E_\lambda} = \{(e,]-\infty, e+\lambda[\ ) : e \in E_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}\}\ ve\ \tau = \{(F_E)_\lambda \subset^{\sim} U_{\widetilde{E}}\} \cup \{\Phi_A, U_{\widetilde{E}}\}$, $K_{E_\lambda} = \{e, [e+\lambda, \infty[\ ) : e \in E_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}\} ve \kappa = \{(K_E)_\lambda \subset^{\sim} U_{\widetilde{E}}\} \cup \{\Phi_A, U_{\widetilde{E}}\}$olsun. O halde $(U_{\widetilde{E}}, \tau, \kappa)$ bir soft T_0 ditopolojik uzaydır ancak soft T_1 ditopolojik uzay değildir.

3.FUZZYSOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde Tanay ve Kandemir (2011)tarafından $1_{\widetilde{U}_E}$ tam fuzzy soft kümesi üzerinde tanımlanmış olan fuzzy soft topoloji kavramından yararlanarak, herhangi bir f_A fuzzy soft kümesi üzerinde fuzzy soft topoloji tanımladık. Bu uzayda fuzzy soft açık, fuzzy soft kapalı, fuzzy soft nokta, fuzzy soft komşuluk, fuzzy soft Q-komşuluk vb. gibi temel kavramları verdik ve bu özelliklerle ilgili teorem ve sonuçları elde ettik.

3.1.Fuzzy Soft Topolojik Uzayın Temel Kavramları

3.1.1.Tanım. $f_A \in FS(U,E)$,$\mathcal{P}(f_A), f_A$ fuzzy soft kümesinin tüm fuzzysoft altkümelerinin ailesi ve τ_f,$\mathcal{P}(f_A)$ailesinin bir alt ailesi olsun. $\tau_f$ailesiaşağıdaki koşulları sağlayan bir aile ise $f_A$fuzzy soft kümesi üzerinde ***fuzzysoft topoloji*** ve (f_A, τ_f) ikilisi de***fuzzysoft topolojik uzay*** olarak adlandırılır:

$i)\ 0_{\widetilde{U}_E},\ f_A\ \in \tau_f,$

$ii)\ g_A, h_A \in \tau_f \Rightarrow g_A \sqcap h_A \in \tau_f,$

$$iii)\ \forall i \in I, \qquad f_{i_A} \in \tau_f \Rightarrow \bigsqcup_{i\in I}(f_{i_A}) \in \tau_f.$$

$\tau_f$ailesinin her elemanına ***fuzzy soft açık küme*** denir.Fuzzysoft açık kümenin tümleyenine ***fuzzy soft kapalı küme*** denir.

3.1.1.Uyarı. $f_A$fuzzy soft kümesi tam soft küme olan $1_{\widetilde{U}_E}$olarak alınırsa (f_A, τ_f)uzayı için elde edilen bütün sonuçlar $(1_{\widetilde{U}_E}, \tau_f)$uzayı için de geçerli olur.

3.1.1.Teorem. (f_A, τ_f) uzayıf_A fuzzy soft kümesi üzerinde bir fuzzysoft topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)\ 1_{\widetilde{U}_E}, {f_A}^c$fuzzysoft kapalı kümelerdir,

$ii)$Fuzzysoft kapalı kümelerin keyfikesişimleri de fuzzysoft kapalıdır.

$iii)$ İki fuzzysoft kapalı kümeninbirleşimi de fuzzysoft kapalıdır.

İspat. 3.1.1. Tanım gereği ispat açıktır.

3.1.1.Örnek. $U = \{a,b,c,d,e\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, A = \{e_1, e_2, e_3\}$ve

$f_A = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.5}, d_{0.6}, e_{0.7}\}, e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.5}, c_{0.9}, d_{0.5}, e_1\},$
$e_3 = \{a_{0.6}, b_{0.7}, c_{0.4}, d_{0.5}, e_{0.8}\}\},$

$f_{1_A} = \{e_1 = \{a_{0.2}, b_{0.4}, c_{0.1}, d_{0.3}, e_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.7}, b_{0.4}, c_{0.8}, d_{0.3}, e_{0.9}\},$

$e_3 = \{a_{0.5}, b_{0.6}, c_{0.1}, d_{0.3}, e_{0.8}\}\},$

$f_{2_A} = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.3}, c_{0.2}, d_{0.5}, e_{0.6}\},\ e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.3}, c_{0.7}, d_{0.4}, e_{0.8}\},$

$e_3 = \{a_{0.4}, b_{0.7}, c_{0.2}, d_{0.2}, e_{0.6}\}\},$

$f_{3_A} = \{e_1 = \{a_{0.2}, b_{0.3}, c_{0.1}, d_{0.3}, e_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.7}, b_{0.3}, c_{0.7}, d_{0.3}, e_{0.8}\},$

$e_3 = \{a_{0.4}, b_{0.6}, c_{0.1}, d_{0.2}, e_{0.6}\}\},$

$f_{4_A} = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.2}, d_{0.5}, e_{0.6}\}, e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.4}, c_{0.8}, d_{0.4}, e_{0.9}\},$

$e_3 = \{a_{0.5}, b_{0.7}, c_{0.2}, d_{0.3}, e_{0.8}\}\},$

$f_{5_A} = \{e_1 = \{a_{0.1}, b_{0.2}, d_{0.2}, e_{0.4}\}, e_2 = \{a_{0.5}, b_{0.1}, c_{0.4}, d_{0.1}\},$

$e_3 = \{a_{0.2}, b_{0.4}, c_{0.1}, d_{0.1}, e_{0.4}\}\}$

olsun. O halde,

$$\tau_f = \{0_{\widetilde{U}_E}, f_A, f_{1_A}, f_{2_A}, f_{3_A}, f_{4_A}, f_{5_A}\}$$

ailesi$f_A$fuzzy soft kümesi üzerinde bir fuzzysoft topolojidir.Fuzzysoft kapalı kümeler ailesini de tümleme işlemi yardımıyla elde edebiliriz.

3.1.2.Teorem.$(1_{\widetilde{U}_E}, \tau_f)$bir fuzzy soft topolojik uzay olsun. O halde her $e \in E$için

$$\tau_{f_e} = \{g_A(e): g_A \in \tau_f\}$$

bir fuzzy topolojidir.

İspat*i*)$0_{\widetilde{U}_E}, 1_{\widetilde{U}_E} \in \tau_f$ olduğundan her $e \in E$ için $0_U, 1_U \in \tau_{f_e}$ dir.

ii) $g_A, h_A \in \tau_f$olsun. $g_A \sqcap h_A \in \tau_f$olduğundan her $e \in E$ için$g_A(e) \cap h_A(e) \in \tau_{f_e}$ dir.

iii) Her $i \in I$ için$f_{i_A} \in \tau_f$ olsun. $\bigsqcup_{i\in I}(f_{i_A}) \in \tau_f$olduğundan her $e \in E$ için $\bigcup_{i\in I}(f_{i_A}(e)) \in \tau_{f_e}$ olur.

3.1.2.Uyarı.3.1.2.Teoremin karşıtı aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi genellikle doğru değildir.

3.1.2.Örnek.$U = \{x, y, z\}, E = \{e_1, e_2\}$olsun.

$f_{1_E}(e_1) = \{x_{0.3}, y_{0.5}, z_{0.8}\}, f_{1_E}(e_2) = \{x_{0.1}, y_{0.6}, z_{0.3}\},$

$f_{2_E}(e_1) = \{x_{0.2}, y_{0.8}, z_{0.5}\}, f_{2_E}(e_2) = \{x_{0.2}, y_{0.4}, z_{0.5}\},$

$f_{3_E}(e_1) = \{x_{0.3}, y_{0.8}, z_{0.8}\}, f_{3_E}(e_2) = \{x_{0.1}, y_{0.4}, z_{0.3}\},$

$f_{4_E}(e_1) = \{x_{0.2}, y_{0.5}, z_{0.5}\}, f_{4_E}(e_2) = \{x_{0.2}, y_{0.6}, z_{0.5}\}.$

olmak üzere

$$\tau_f = \{0_{U_E}^{\sim}, 1_{U_E}^{\sim}, f_{1_E}, f_{2_E}, f_{3_E}, f_{4_E}, f_{5_E}\}$$

olsun.$f_{1_A} \sqcup f_{2_A} \notin \tau_f$olduğundan$\tau_f$ fuzzy soft topoloji değildir. Ancak$\tau_{f_{e_1}}$ve $\tau_{f_{e_2}}$ fuzzy topolojidir.

3.1.2.Tanım. $f_A \in FS(U,E)$bir fuzzy soft küme ve $V \subseteq U$ olsun.$f_A$fuzzy soft kümesinin(V,E)ikilisi üzerindeki***alt fuzzy soft kümesi***

$$f_A{}^V(e) = V \cap f_A(e), \forall e \in E.$$

şeklinde tanımlanır ve $f_A{}^V$ simgesi ile gösterilir.

3.1.3.Tanım.(f_A, τ_f) bir fuzzy soft topolojik uzay ve $V \subseteq U$ olsun.

$$\tau_{f_V} = \{g_A{}^V : g_A \in \tau_f\}$$

fuzzy soft topolojisine $f_A{}^V$ üzerinde ***fuzzysoft relative topoloji*** ve $(f_A{}^V, \tau_{f_V})$ ikilisine de(f_A, τ_f) uzayının***fuzzy soft alt uzayı*** denir.

3.1.4.Tanım.x_λ $(x \in U, \lambda \in (0,1])$, fuzzy nokta olsun.$A \subseteq E$olmak üzere

$$\forall u \in U, \forall e \in E \; için \; \mu^e_{A^\lambda_x}(u) = \begin{cases} \lambda; \; u = x \; ise \\ 0, \; u \neq x \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fuzzysoft kümeye ***fuzzysoft nokta*** denir ve A_x^λ şeklinde gösterilir.

3.1.1.Sonuç.$f_A \in FS(U,E)$bir fuzzy soft küme ve A_x^λ $(x \in U, \lambda \in (0,1])$ bir fuzzysoftnokta olsun. Buradan,

$i)$ $A_x^\lambda \in^{\sim} f_A olması \; için \; gerek \; ve \; yeter \; koşul \; A_x^\lambda \sqsubseteq f_A \; olmasıdır.$

$ii)$ $A_x^\lambda \sqcap f_A = 0_{U_E}^{\sim} \; ise \; A_x^\lambda \notin^{\sim} f_A olur.$

3.1.5.Tanım. (f_A, τ_f)birfuzzysoft topolojik uzay, $g_A \sqsubseteq f_A$ ve A_x^λbir fuzzysoft nokta olsun. $A_x^\lambda \in^{\sim} h_A \sqsubseteq g_A$olacak şekilde bir $h_A$fuzzysoft açık kümesi varsa g_A fuzzy soft kümesineA_x^λ fuzzy soft noktasının***fuzzysoft komşuluğu*** denir.A_x^λfuzzy soft noktasının tüm fuzzy soft komşuluklarının ailesi $\aleph_{(A_x^\lambda)}$simgesi ile gösterilir.

3.1.3.Örnek.3.1.1. Örnekte verilmiş(f_A, τ_f)fuzzysoft topolojisini göz önüne alalım. $A_c^{0.2}$birfuzzysoft nokta olsun. O halde f_A, f_{2_A}ve f_{4_A}fuzzysoft kümeleri $A_c^{0.2}$fuzzy soft noktasınınfuzzysoft komşularıdır.

3.1.3.Teorem. (f_A, τ_f)fuzzysoft topolojik uzay, A_x^λ fuzzy soft nokta ve $g_A, h_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)$ $g_A \in \aleph_{(A_x^\lambda)}$ ise $A_x^\lambda \in g_A$dır.

$ii)$ $g_A, h_A \in \aleph_{(A_x^\lambda)}$ ise $g_A \sqcap h_A \in \aleph_{(A_x^\lambda)}$dır.

$iii)$ $g_A \in \aleph_{(A_x^\lambda)}$, $g_A \sqsubseteq h_A$ ise $h_A \in \aleph_{(A_x^\lambda)}$dır.

İspat. 3.1.5.Tanım gereğince ispat açıktır.

3.1.6.Tanım. (f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay, A_x^λ bir fuzzy soft nokta ve $g_A, h_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $A_x^\lambda \in^{\sim} g_A \sqsubseteq h_A$olacak şekilde bir g_A fuzzy soft açığı varsa A_x^λ fuzzy soft noktasınah_A fuzzy soft kümesinin ***fuzzy soft iç noktası*** denir ve $A_x^\lambda \in^{\sim} (h_A)^\circ$simgesi ile gösterilir.

3.1.4.Teorem. (f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$i)$ $(g_A)^\circ$fuzzy soft kümesig_A fuzzy soft kümesinin kapsadığı tüm fuzzy soft açık kümelerin birleşimine eşittir.

$ii)$ $(g_A)^\circ \sqsubseteq g_A$.

$iii)$ $(g_A)^\circ$bir fuzzy soft açık kümedir.

$iv)$ $(g_A)^\circ$, g_A fuzzy soft kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy soft açık kümedir.

$v)$ $g_A$fuzzy soft kümesinin fuzzy soft açık küme olması için$gerek\ ve\ yeter\ koşul g_A = (g_A)^\circ olmasıdır.$

İspat. $i)$ $(g_A)^\circ$=$\sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$olduğunu göstermeliyiz.

$A_x^\lambda \in (g_A)^\circ$olsun. 3.1.6.Tanım gereği$A_x^\lambda \in h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir $h_A \in \tau_f$ vardır. Böylece

$$A_x^\lambda \in \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\} \qquad (1)$$

olur.

Varsayalım ki $A_x^\lambda \in \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$ olsun. O halde 3.1.6.Tanım gereği

$$A_x^\lambda \in (g_A)^\circ \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) gereği

$$(g_A)^\circ = \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$$

elde edilir.

$ii), iii), iv)$ve$v)$ şıklarının ispatları $i)$ den açıktır.

3.1.5.Teorem. (f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay ve $g_A, h_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$i)\ 0_{\widetilde{U}_E}{}^{\circ} = 0_{\widetilde{U}_E}, (f_A)^{\circ} = f_A.$

$ii)\ ((g_A)^{\circ})^{\circ} = (g_A)^{\circ}.$

$iii)\ g_A \sqsubseteq h_A ise (g_A)^{\circ} \sqsubseteq (h_A)^{\circ}$ dir.

$iv)\ (g_A)^{\circ} \sqcap (h_A)^{\circ} = (g_A \sqcap h_A)^{\circ}.$

$v)\ (g_A)^{\circ} \sqcup (h_A)^{\circ} \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{\circ}.$

İspat. $i), ii)$ve$iii)$3.1.1.Tanımdan açıktır.

$iv)\ (g_A)^{\circ} \sqsubseteq g_Ave(h_A)^{\circ} \sqsubseteq h_A$ olduğundan ve $iii)$ gereği

$$(g_A)^{\circ} \sqcap (h_A)^{\circ} \sqsubseteq g_A \sqcap h_A$$

olur. $g_A \sqcap h_A$fuzzy soft kümesinin içindeki en büyük fuzzy soft açık küme $(g_A \sqcap h_A)^{\circ}$ fuzzy soft kümesi olduğundan

$$(g_A)^{\circ} \sqcap (h_A)^{\circ} \sqsubseteq (g_A \sqcap h_A)^{\circ} \qquad (1)$$

olur.

Diğer taraftan $(g_A \sqcap h_A)^{\circ} \sqsubseteq (g_A)^{\circ}$ ve $(g_A \sqcap h_A)^{\circ} \sqsubseteq (h_A)^{\circ}$ olduğundan

$$(g_A \sqcap h_A)^{\circ} \sqsubseteq (g_A)^{\circ} \sqcap (h_A)^{\circ} \qquad (2)$$

olur. (1)ve(2) den $(g_A)^{\circ} \sqcap (h_A)^{\circ} = (g_A \sqcap h_A)^{\circ}$ olduğu görülür.

$v)(g_A)^{\circ} \sqsubseteq g_Ave(h_A)^{\circ} \sqsubseteq h_A$ olduğundan $(g_A)^{\circ} \sqcup (h_A)^{\circ} \sqsubseteq g_A \sqcup h_A$ olur. $g_A \sqcup h_A$fuzzy soft kümesinde kapsanan en büyük fuzzy soft açık küme $(g_A \sqcup h_A)^{\circ}$ fuzzy soft kümesi olduğundan

$$(g_A)^{\circ} \sqcup (h_A)^{\circ} \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{\circ}$$

olur.

3.1.3.Uyarı.3.1.5.Teoremin $v)$şıkkının karşıtı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi genellikle doğru değildir.

3.1.3.Örnek. 3.1.1.Örnekte verilmiş fuzzy soft topolojik uzayı göz önüne alalım.$g_A = \{e_1 = \{a_{0.2}, b_{0.3}, c_{0.5}, d_{0.5}, e_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.5}, b_{0.2}, c_{0.8}, d_{0.2}, e_{0.3}\},$
$e_3 = \{a_{0.4}, b_{0.5}, c_{0.4}, d_{0.2}, e_{0.5}\}\}$ve
$h_A = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.4}, d_{0.3}, e_{0.6}\}, e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.4}, c_{0.7}, d_{0.4}, e_{0.9}\},$
$e_3 = \{a_{0.5}, b_{0.7}, c_{0.3}, d_{0.4}, e_{0.9}\}\}$

iki fuzzy soft küme olsun. Bu durumda $g_A{}^{\circ} = f_{5_A}$ ve $h_A{}^{\circ} = f_{3_A}$ olup $g_A{}^{\circ} \sqcup (h_A)^{\circ} = f_{3_A}$ dır. Diğer taraftan,

$g_A \sqcup h_A = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.5}, d_{0.5}, e_{0.6}\}, e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.4}, c_{0.8}, d_{0.4}, e_{0.9}\}, e_3 = \{a_{0.5},$
$b_{0.7}, c_{0.4}, d_{0.4}, e_{0.9}\}\}$

olup $(g_A \sqcup h_A)^{\circ} = f_{4_A}$ dır.

3.1.7.Tanım.(f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzayı ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $g_A$fuzzy soft kümesini içeren tüm fuzzy soft kapalı kümelerin kesişimine g_A***fuzzy soft kümesininkapanışı***denir ve

$$g_A{}^{-} = \sqcap\{h_A : g_A \sqsubseteq h_A, h_A \in \tau_f{}^{c}\}$$

$g_A{}^{-}$simgesi ile gösterilir.

3.1.6.Teorem. (f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzayı ve $g_A, h_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$i)$ $g_A{}^{-}$bir fuzzy soft kapalı kümedir.

$ii)$ $g_A \sqsubseteq g_A{}^{-}$.

$iii)$ $g_A{}^{-}$fuzzy soft kümesig_A fuzzy soft kümesini içeren en küçük fuzzy soft kapalı kümedir.

$iv)$ $g_A \sqsubseteq h_A ise\ (g_A)^{-} \sqsubseteq (h_A)^{-}$dır.

$v)$ $(g_A)^{-} \sqcap (h_A)^{-} \sqsupseteq (g_A \sqcap h_A)^{-}$.

$vi)$ $(g_A)^{-} \sqcup (h_A)^{-} = (g_A \sqcup h_A)^{-}$.

$vii)$ $((g_A)^{-})^{-} = (g_A)^{-}$.

$viii)$ $g_A$fuzzy soft kümesinin fuzzy soft kapalı olması için $gerek\ ve\ yeter$

$$g_A = (g_A)^{-} olmasıdır.$$

İspat.$v)(g_A \sqcap h_A)^{-} \sqsubseteq (g_A)^{-}ve(g_A \sqcap h_A)^{-} \sqsubseteq (h_A)^{-}$ olduğundan

$$(g_A \sqcap h_A)^{-} \sqsubseteq (g_A)^{-} \sqcap (h_A)^{-}$$

dır. $g_A \sqcap h_A$ fuzzy soft kümesini kapsayan en küçük fuzzy soft kapalı küme $(g_A \sqcup hA)-$dır. Buradan $(gA)-\sqcap(hA)-\sqsupseteq(gA\sqcap hA)-$ olur.

$vi)(g_A)^{-} \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{-}$, $(h_A)^{-} \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{-}$ olduğundan

$$(g_A)^{-} \sqcup (h_A)^{-} \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{-}(1)$$

olur. Diğer taraftan $g_A \sqcup h_A \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^{-}$ ve $g_A \sqcup h_A \sqsubseteq (g_A)^{-} \sqcup (h_A)^{-}$dır. $g_A \sqcup h_A$fuzzy soft kümesini kapsayan en küçük fuzzy soft kapalı küme $(g_A \sqcup h_A)^{-}$ olduğundan

$$(g_A \sqcup h_A)^- \sqsubseteq (g_A)^- \sqcup (h_A)^- (2)$$

dır. (1) ve (2) ifadelerinden $(g_A)^- \sqcup (h_A)^- = (g_A \sqcup h_A)^-$ olduğu görülür.

3.1.4. Uyarı. 3.1.6.Teoremin v) şıkkının karşıtı genellikle doğru değildir.

3.1.4.Örnek.3.1.1.Örnekte verilmiş fuzzy soft topolojik uzayı göz önüne alalım.

$g_A = \{e_1 = \{a_{0.2}, b_{0.3}, c_{0.5}, d_{0.5}, e_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.5}, b_{0.2}, c_{0.8}, d_{0.2}, e_{0.3}\},$

$e_3 = \{a_{0.4}, b_{0.5}, c_{0.4}, d_{0.2}, e_{0.5}\}\}$ve

$s_A = \{e_1 = \{a_{0.3}, b_{0.4}, c_{0.4}, d_{0.3}, e_{0.6}\}, e_2 = \{a_{0.8}, b_{0.4}, c_{0.6}, d_{0.4}, e_{0.9}\},$

$$e_3 = \{a_{0.5}, b_{0.7}, c_{0.3}, d_{0.4}, e_{0.9}\}\}$$

fuzzy soft kümeleri için

${g_A}^- = U_E^{\sim}$ve${s_A}^- = U_E^{\sim}$ olduğundan ${g_A}^- \sqcap {s_A}^- = U_E^{\sim}$ dir.

Diğer taraftan,

$g_A \sqcap s_A = \{e_1 = \{a_{0.2}, b_{0.3}, c_{0.4}, d_{0.3}, e_{0.5}\}, e_2 = \{a_{0.5}, b_{0.2}, c_{0.6}, d_{0.2}, e_{0.3}\},$

$e_3 = \{a_{0.4}, b_{0.5}, c_{0.3}, d_{0.2}, e_{0.5}\}\}$ $olup$ $(g_A \sqcap s_A)^- = f_{5_A}^c$ dir.

3.1.8.Tanım. A_x^λbir fuzzy soft nokta ve $f_A$bir fuzzy soft küme olsun.

$$\forall e \in A \; için \; \lambda + \mu_{f_A}^e(x) > 1$$

iseA_x^λfuzzy soft noktası, $f_A$fuzzy soft kümesiyle ***quasi çakışıktır*** denir ve $A_x^\lambda q f_A$simgesi ile gösterilir.

3.1.9.Tanım. $f_A, g_A \in FS(U,E)$ olsun.

$$\forall e \in A \; için \; \mu_{f_A}^e(u) + \mu_{g_A}^e(u) > 1$$

olacak şekilde bir $u \in U$ varsa $f_A$fuzzy soft kümesiyle$g_A$fuzzy soft kümesi ***quasi çakışıktır***denir ve $f_A q g_A$simgesi ile gösterilir.

3.1.10.Tanım.(f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay, A_x^λ bir fuzzy soft nokta ve $v_A \sqsubseteq f_A$olsun. $A_x^\lambda q w_A \sqsubseteq v_A$olacak şekilde bir w_A fuzzy soft açığı varsa v_A fuzzy soft kümesineA_x^λ fuzzy soft noktasının***Q-fuzzy soft komşuluğu*** denir.

3.1.7.Teorem.(f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzayında aşağıdakiler sağlanır:

i) $g_A$fuzzy soft kümesiA_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu ise A_x^λ fuzzy soft noktası $g_A$fuzzy soft kümesiyle quasi çakışıktır.

ii) g_A,h_A fuzzy soft kümeleri A_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu ise$g_A \sqcap h_A$ fuzzy soft kümesi deA_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğudur.

$iii)$ $g_A$fuzzy soft kümesiA_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu ve $g_A \sqsubseteq h_A$iseh_A fuzzy soft kümesi A_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğudur.

İspat.i) 3.1.10.Tanımdan açıktır.

$ii)$$g_A$,$h_A$ fuzzy soft kümeleriA_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu olduğundan

$$\forall e \in A \; için \; \lambda + \mu_{g_A}^e(x) > 1 \; ve \; \lambda + \mu_{h_A}^e(x) > 1$$

olur. Buradan her$e \in A$ için$\lambda + \min\{\mu_{g_A}^e(x), \mu_{h_A}^e(x)\} > 1$ olduğu görülür.

$iii)$ $g_A$fuzzy soft kümesi A_x^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu olduğundan her $e \in A \; için, \; \lambda + \mu_{g_A}^e(x) > 1$ ve $g_A \sqsubseteq h_A$ olduğundan her$e \in A \; için,$ $\mu_{g_A}^e(x) \leq \mu_{h_A}^e(x)$ olur. Böylece her$e \in A \; için, \; \lambda + \mu_{h_A}^e(x) > 1$ olduğu görülür.

3.1.2.Sonuç.$g_A, h_A \in FS(U,E)$olsun. $g_A \sqsubseteq h_A$olması için $gerek \; ve \; yeterkoşul g_A$ fuzzy soft kümesinin$(h_A)^c$fuzzy soft kümesiyle quasi çakışık $olmamasıdır.$

İspat.$g_A \sqsubseteq h_A$olması için $gerek \; ve \; yeter \; koşul$

$$\forall e \in E, \forall u \in U \; için \; \mu_{g_A}^e(u) \leq \mu_{h_A}^e(u)$$

$olmasıdır$. Başka bir deyişle $g_A \sqsubseteq h_A$ olması için $gerek \; ve \; yeter \; koşul$

$$\forall e \in E, \forall u \in U \; için \; \mu_{g_A}^e(u) + (1 - \mu_{h_A}^e(u)) \leq 1$$

$olmasıdır$.Buradan,

$$\mu_{g_A}^e(u) + \mu_{h_A{}^c}^e(u) \leq 1$$

olur. Sonuç olarak$g_A$fuzzy soft kümesi$(h_A)^c$ fuzzy soft kümesiyle quasi çakışık değildir.

3.1.8.Teorem. (f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay olsun, A_x^λbir fuzzy soft nokta ve$g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $A_x^\lambda \in^\sim g_A{}^-$olması için $gerek \; ve \; yeter \; koşul \; A_x^\lambda$ fuzzy soft noktasının her Q-fuzzy soft komşuluğunun $g_A$fuzzy soft kümesiyle$x$ noktasında quasi çakışık $olmasıdır$.

İspat.$A_x^\lambda \in^\sim g_A{}^-$olması için $gerek \; ve \; yeter \; koşul g_A$ fuzzy soft kümesini kapsayan her v_A fuzzy soft kapalı kümesi için$A_x^\lambda \in^\sim v_A$ olmasıdır, yani

$$\forall e \in A \; için \; \lambda \leq \mu_{v_A}^e(x)$$

olmasıdır. O halde $A_x^\lambda \in^\sim g_A{}^-$ olması için $gerek \; ve \; yeter \; koşul \; g_A^c$ fuzzy soft kümesinde kapsanan her k_A fuzzy soft açık kümesi için

$$1-\lambda \geq \mu_{k_A}^{e}(x), \forall e \in A,$$

olmasıdır. Böylece $1-\lambda < \mu_{k_A}^{e}(x)$koşulunu sağlayan her k_A fuzzy soft açık kümesi g_A^c fuzzy soft kümesinde kapsanmaz. 3.1.2.Sonuçtank_A fuzzy soft kümesinin$g_A$fuzzy soft kümesiyle quasi çakışık olmadığı görülür.

3.2.Fuzzy Soft Quasi Ayırma Aksiyomları

3.2.1.Tanım.(f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay olsun.Her $A_x^{\lambda}, A_y^{\mu}(x, y \in U,$ $x \neq y)$farklıfuzzy soft nokta çifti için.

$$A_x^{\lambda} q g_A \sqsubseteq (A_y^{\mu})^c \;\; ya\ da \;\; A_y^{\mu} q h_A \sqsubseteq (A_x^{\lambda})^c$$

olacak şekilde g_A, h_A fuzzy soft açık kümeleri varsa (f_A, τ_f)uzayına***fuzzy soft quasi*T_0**denir.

3.2.1.Lemma.$A_x^{\lambda} q g_A \;\; ise \;\; A_x^{\lambda} \not\in^{\sim} (g_A)^c$dir.

İspat.$A_x^{\lambda} q g_A$olsun. O halde

$$\forall e \in A \; için \; \lambda + \mu_{g_A}^{e}(x) > 1$$

olur ve buradan$\lambda > 1 - \mu_{g_A}^{e}(x)$=$\mu_{g_A{}^c}^{e}(x)$ elde edilir. Sonuç olarak$A_x^{\lambda} \not\in^{\sim} (g_A)^c$ olduğu görülür.

3.2.1.Teorem.(f_A, τ_f)bir fuzzy soft quasi T_0-uzay ise $A_x^{\lambda}, A_y^{\mu}(x, y \in U, x \neq y)$ farklı fuzzy soft noktaları için

$$A_x^{\lambda} \not\in (A_y^{\mu})^- \; ya\ da \; A_y^{\mu} \not\in (A_x^{\lambda})^-$$

dır.

İspat. HerA_x^{λ}, A_y^{μ} $(x, y \in U, x \neq y)$ farklı fuzzy soft noktası için(f_A, τ_f) fuzzy soft quasi T_0-uzay olduğundan

$$A_x^{\lambda} q g_A \sqsubseteq (A_y^{\mu})^c \; ya\ da \; A_y^{\mu} q h_A \sqsubseteq (A_x^{\lambda})^c$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ vardır. İlk durumu göz önüne alalım. 3.2.1.Lemmadan$A_x^{\lambda} \not\in^{\sim} (g_A)^c$ve $A_y^{\mu} \sqsubseteq g_A{}^c$dir. $g_A{}^c$fuzzy soft kümesi fuzzy soft kapalı olduğundan $(A_y^{\mu})^- \sqsubseteq g_A{}^c$ olur. Böylece $A_x^{\lambda} \not\in^{\sim} (A_y^{\mu})^-$dır. Benzer işlem ikinci durum için de yapılabilir ve ispat tamamlanır.

3.2.2.Tanım (Ghanim ve ark, 1997).(X, τ)bir fuzzy topolojik uzay olsun. Herx_{λ}, y_{μ} $(x, y \in X, x \neq y)$ farklı fuzzy nokta çifti için eğer

$$x_\lambda qU \leq (y_\mu)^c \; ya \; da \; y_\mu qV \leq (x_\lambda)^c$$

olacak şekilde U, V fuzzy açık kümeleri varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına ***quasiT_0-uzay*** denir.

3.2.2.Teorem. (f_A, τ_f) fuzzy soft quasi T_0-uzay ise her $e \in E$ için $(f_A(e), \tau_{f_e})$ fuzzy quasi T_0-uzaydır.

İspat. Her x_λ, y_μ farklı fuzzy noktaları için A_x^λ ve A_y^μ iki farklı fuzzy soft noktadır. (f_A, τ_f) bir fuzzy soft quasi T_0-uzay olduğundan,

$$A_x^\lambda q g_A \sqsubseteq (A_y^\mu)^c ya \; da \; A_y^\mu q h_A \sqsubseteq (A_x^\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ vardır. Buradan

$$\forall e \in E \; için \; x_\lambda q g_A(e) \sqsubseteq (y_\mu)^c ya \; da \; y_\mu q g_A(e) \sqsubseteq (x_\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A(e), h_A(e) \in \tau_{f_e}$ vardır. O halde $(f_A(e), \tau_{f_e})$ bir fuzzy quasi T_0-uzaydır.

3.2.3.Teorem. $(1_{U_E}^{\sim}, \tau_f)$ bir fuzzy soft quasi T_0-uzay ise $(1_E^{\sim V}, \tau_{f_V})$ de bir fuzzy soft quasi T_0-uzaydır.

İspat. (f_A, τ_f) bir fuzzy soft quasi T_0-uzay olsun. Her $A_x^\lambda, A_y^\mu \; (x, y \in V, x \neq y)$ farklı fuzzy soft noktası için

$$A_x^\lambda q g_A \sqsubseteq (A_y^\mu)^c \; ya \; da \; A_y^\mu q h_A \sqsubseteq (A_x^\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ vardır. İlk durumu göz önüne alalım. $x \in V$ olduğundan

$$A_x^\lambda q(1_E^{\sim V} \sqcap g_A) \sqsubseteq (A_y^\mu)^c \; ve \; 1_E^{\sim V} \sqcap g_A \in \tau_{f_V}$$

sağlanır. İkinci durum için de ispat benzer şekilde yapılır. Sonuç olarak $(1_E^{\sim V}, \tau_{f_V})$ de bir fuzzy soft quasi T_0-uzaydır.

3.2.3.Tanım. (f_A, τ_f) bir fuzzy soft topolojik uzay olsun. Her $A_x^\lambda, A_y^\mu (x, y \in U, \; x \neq y)$ farklı fuzzy soft nokta çifti için

$$A_x^\lambda q g_A \sqsubseteq (A_y^\mu)^c \;\; ve \;\; A_y^\mu q h_A \sqsubseteq (A_x^\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ varsa (f_A, τ_f) uzayına ***fuzzy soft quasiT_1-uzayı*** $denir$.

3.2.4.Teorem. Her $x \in U$ için A_x^1 fuzzy soft kapalı küme ise (f_A, τ_f) bir fuzzy soft quasi T_1-uzayıdır.

İspat. HerA_x^λ, A_y^μ $(x, y \in V, x \neq y)$ farklı fuzzy soft noktası için.A_x^1, A_y^1fuzzy soft kümeleri fuzzy soft kapalı olduğundan,$(A_x^1)^c, (A_y^1)^c$ fuzzy soft kümeleri fuzzy soft açıktır. Kolayca görülebilir ki,

$$A_x^\lambda q (A_y^1)^c \; ve \; A_y^\mu q (A_x^1)^c ve (A_y^1)^c \sqsubseteq (A_y^\mu)^c \; ve \; (A_x^1)^c \sqsubseteq \; (A_x^\lambda)^c$$

dir. Böylece (f_A, τ_f)uzayı fuzzy soft quasi T_1–uzayıdır.

3.2.1.Uyarı. 3.2.4.Teoreminin karşıtı genelde aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi sağlanmaz.

3.2.1.Örnek. $U = \{x, y\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau_f = \{0_{\widetilde{U_E}}, f_A, f_{1_A}, f_{2_A}, f_{3_A}, f_{4_A}\}$ bir fuzzy soft topoloji olsun öyle ki,

$$f_A = \{e_1 = \{x_{0.8}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.9}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{1_A} = \{e_1 = \{x_{0.7}, y_{0.3}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.4}\}\},$$
$$f_{2_A} = \{e_1 = \{x_{0.5}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.4}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{3_A} = \{e_1 = \{x_{0.5}, y_{0.3}\}, e_2 = \{x_{0.4}, y_{0.4}\}\},$$
$$f_{4_A} = \{e_1 = \{x_{0.7}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.8}\}\}.$$

Sonuç olarak(f_A, τ_f) fuzzy soft quasi T_1–uzayıdır ancakA_x^1 ve A_y^1fuzzy soft kümeleri fuzzy soft kapalı değildir.

3.2.4. Tanım (Ghanim ve ark, 1997).(X, τ)bir fuzzy topolojik uzay olsun. Herx_λ, y_μ $(x, y \in X, x \neq y)$ farklı fuzzy nokta çifti için eğer

$$x_\lambda q U \leq (y_\mu)^c \; ve \; y_\mu q V \leq (x_\lambda)^c$$

olacak şekilde U, Vfuzzy açık kümeleri varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına ***quasi*T_1*-uzay***denir.

3.2.5.Teorem.(f_A, τ_f)bir fuzzy soft quasi T_1-uzay ise her $e \in E$ için$(f_A(e), \tau_{f_e})$ fuzzy quasi T_1-uzaydır.

İspat.x_λ, y_μfuzzy noktaları için A_x^λ ve A_y^μ iki farklı fuzzy soft noktadır. (f_A, τ_f)uzayıbir fuzzy soft quasi T_1-uzay olduğundan

$$A_x^\lambda q g_A \sqsubseteq (A_y^\mu)^c \; ve \; A_y^\mu q h_A \sqsubseteq (A_x^\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ vardır. Buradan

$$\forall e \in E \; için \; x_\lambda q g_A(e) \sqsubseteq (y_\mu)^c \; ve \; y_\mu q g_A(e) \sqsubseteq (x_\lambda)^c$$

olacak şekilde $g_A(e), h_A(e) \in \tau_{f_e}$ vardır. O halde $(f_A(e), \tau_{f_e})$ bir fuzzy quasi T_1-uzaydır.

3.2.6.Teorem.$(U_{\tilde{E}}, \tau_f)$bir fuzzy soft quasi T_1-uzay ise $(1_{\tilde{E}}^{V}, \tau_{f_V})$ de bir fuzzy soft quasi T_1-uzaydır.

İspat.3.2.3.Teoremin ispatına benzer olarak yapılır.

3.2.2.Uyarı. Her fuzzy soft quasi T_1-uzay fuzzy soft quasi T_0-uzaydır. Karşıtı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi her zaman doğru değildir.

3.2.2.Örnek.$U = \{x, y\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve

$$f_{1_A} = \{e_1 = \{x_1, y_0\}, e_2 = \{x_1, y_{0.}\}\}$$

olmak üzere $\tau_f = \{0_{\tilde{U}_E}, U_{\tilde{E}}, f_{1_A}\}$ bir fuzzy soft topolojidir ve(f_A, τ_f) fuzzy soft quasi T_0–uzayıdır ancak fuzzy soft quasi T_1–uzayı değildir.

3.2.5.Tanım.(f_A, τ_f)fuzzy soft topolojik uzay olsun.Her $A_x^{\lambda}, A_y^{\mu} (x, y \in U,$ $x \neq y)$farklıfuzzy soft nokta çifti için

$$A_x^{\lambda} q g_A \sqsubseteq (A_y^{\mu})^c, A_y^{\mu} q h_A \sqsubseteq (A_x^{\lambda})^c \; ve \; g_A \; çakışık \; değil \; h_A$$

olacak şekilde $g_A, h_A \in \tau_f$ varsa (f_A, τ_f) uzayına ***fuzzy soft quasi*$\mathbf{T_2}$*–uzayı***denir.

3.2.6.Tanım (Ghanim ve ark, 1997).(X, τ)bir fuzzy topolojik uzay olsun. Her x_λ, y_μ $(x, y \in X, x \neq y)$ farklı fuzzy nokta çifti için

$$x_\lambda q U \leq (y_\mu)^c, y_\mu q V \leq (x_\lambda)^c \;\; ve \; U \; çakışık \; değil \; V$$

olacak şekilde U, Vfuzzy açık kümeleri varsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına ***fuzzyquasiT_2-uzay*** denir.

3.2.7.Teorem.(f_A, τ_f)bir fuzzy soft quasi T_2-uzay ise her $e \in E$ için $(f_A(e), \tau_{f_e})$ fuzzy quasi T_2-uzaydır.

İspat.3.2.2.Teoremin ispatına benzer olarak yapılır.

3.2.8.Teorem.$(1_{U_{\tilde{E}}}, \tau_f)$bir fuzzy soft quasi T_2-uzay ise $(1_{\tilde{E}}^{V}, \tau_{f_V})$ de bir fuzzy soft quasi T_2-uzaydır.

İspat. 3.2.3.Teoremin ispatına benzer olarak yapılır.

3.2.7.Tanım.$(1_{U_{\tilde{E}}}, \tau_f)ve(1_{V_{\tilde{P}}}, \tau_{f^*})$iki fuzzy soft topolojik uzay olsun.

$$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (1_{U_{\tilde{E}}}, \tau_f) \to (1_{V_{\tilde{P}}}, \tau_{f^*})$$

bir fuzzy soft dönüşümolsun.$\varphi_\psi(A_x^\lambda)$fuzzy soft noktasının her Q-fuzzy soft komşuluğunun ters görüntüsü A_x^λ fuzzy soft noktasının bir Q-fuzzy soft komşuluğu ise $\varphi_\psi$dönüşümüne***fuzzy soft Q-sürekli*** denir.

3.2.2.Lemma.$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (1_{U_E^\sim}, \tau_f) \to (1_{V_P^\sim}, \tau_{f^*})$bire-bir bir fuzzy soft dönüşüm olsun. Eğer $f_A q g_A$ ise ${\varphi_\psi}^{-1}(f_A) q {\varphi_\psi}^{-1}(g_A)$dır.

İspat.$f_A q g_A$olsun. O halde

$$\forall p \in P \; için \; \mu_{f_A}^p(v) + \mu_{g_A}^p(v) > 1$$

olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Buradan

$$\forall e \in \psi^{-1}(P) \; için$$

$$\begin{aligned} {\varphi_\psi}^{-1}(f_A)(e)(u) + {\varphi_\psi}^{-1}(g_A)(e)(u) &= \mu_{f_A}^{\psi(e)}\big(\varphi(u)\big) + \mu_{g_A}^{\psi(e)}\big(\varphi(u)\big) \\ &= \mu_{f_A}^p(v) + \mu_{g_A}^p(v) > 1 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. O halde ${\varphi_\psi}^{-1}(f_A) q {\varphi_\psi}^{-1}(g_A)$dır.

3.2.9.Teorem.$(1_{U_E^\sim}, \tau_f)$ve$(1_{V_P^\sim}, \tau_{f^*})$iki fuzzy soft topolojik uzay ve

$$\varphi_\psi = (\varphi, \psi): (1_{U_E^\sim}, \tau_f) \to (1_{V_P^\sim}, \tau_{f^*})$$

bire-bir ve Q-sürekli bir fuzzy soft dönüşüm olsun. Eğer $(1_{V_P^\sim}, \tau_{f^*})$uzayı fuzzy soft quasi T_2ise $(1_{U_E^\sim}, \tau_f)$ uzayı da fuzzy soft quasi T_2 dir..

İspat.A_x^λveA_y^μ $(x, y \in U, x \neq y)$ farklı fuzzy soft noktalar olsun. O halde

$$\varphi_\psi(A_x^\lambda) \neq \varphi_\psi(A_y^\mu)$$

dır. $(1_{V_P^\sim}, \tau_{f^*})$fuzzy soft quasi T_2-uzay olduğundan

$$v_A \sqsubseteq (\varphi_\psi(A_y^\mu))^c, w_A \sqsubseteq (\varphi_\psi(A_x^\lambda))^c \;\; ve \;\; v_A \; çakışık \; değil \; w_A$$

olacak şekilde $\varphi_\psi\big(A_x^\lambda\big), \varphi_\psi(A_y^\mu)$ fuzzy soft noktalarının sırasıyla v_A, w_AQ-fuzzy soft komşulukları vardır. Sonuç olarak $(1_{U_E^\sim}, \tau_f)$ uzayı fuzzy soft quasi T_2-uzayıdır.

3.2.8.Tanım.(f_A, τ_f)bir fuzzy soft topolojik uzay, A_x^λ bir fuzzy soft nokta ve $A_x^\lambda q g_A^c$ olacak şekilde g_A bir fuzzy soft kapalı küme olsun. Eğer $s_A q t_A^c$ olacak şekildeA_x^λfuzzy soft noktasının ve $g_A$fuzzy soft kapalı kümesinin sırasıyla s_A,t_AQ-fuzzy soft komşulukları varsa (f_A, τ_f) uzayına ***fuzzy soft quasi regüler uzay*** denir.

3.2.3.Örnek.$U = \{x, y\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}, A = \{e_1, e_2\}$olsun.

$$f_{1_A} = \big\{e_1 = \{x_{0.6}, y_{0.7}\}, e_2 = \{x_{0.6}, y_{0.8}\}\big\},$$

$$f_{2_A} = \{e_1 = \{y_{0.9}\}, e_2 = \{y_{0.8}\}\},$$
$$f_{3_A} = \{e_1 = \{x_{0.8}\}, e_2 = \{x_{0.8}\}\},$$
$$f_{4_A} = \{e_1 = \{x_{0.9}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{5_A} = \{e_1 = \{x_{0.6}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.6}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{6_A} = \{e_1 = \{y_{0.7}\}, e_2 = \{y_{0.8}\}\},$$
$$f_{7_A} = \{e_1 = \{x_{0.8}, y_{0.7}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{8_A} = \{e_1 = \{x_{0.6}\}, e_2 = \{x_{0.6}\}\},$$
$$f_{9_A} = \{e_1 = \{x_{0.8}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{10_A} = \{e_1 = \{x_1, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_1, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{11_A} = \{e_1 = \{x_{0.9}, y_{0.1}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_1\}\}$$

olmak üzere $\tau_f = \{0_{U_E^{\sim}}, 1_{U_E^{\sim}}, f_{1_A}, f_{2_A}, f_{3_A}, f_{4_A}, f_{5_A}, f_{6_A}, f_{7_A}, f_{8_A}, f_{9_A}, f_{10_A}, f_{11_A}\}$ fuzzy soft topolojidir ve $(1_{U_E^{\sim}}, \tau_f)$ uzayı fuzzy soft quasi regüler uzaydır.

3.2.9.Tanım.(f_A, τ_f) hem fuzzy soft quasi regüler hemde fuzzy soft quasi T_1-uzayı ise (f_A, τ_f) ***uzayına fuzzy soft quasi*** $\boldsymbol{T_3}$ $denir$.

3.2.3.Uyarı. Fuzzy soft quasi regüler olma özelliği aşağıdaki örnekte de görülebileceği gibi kalıtımsal bir özellik değildir.

3.2.4.Örnek.3.2.3.Örneği göz önüne alalım. $(1_{U_E^{\sim}}, \tau_f)$ uzayı fuzzy soft quasi regüler olmasına rağmen$V = \{x\}$ olmak üzere $(1_E^{\sim V}, \tau_{f_V})$ alt uzayı fuzzy soft quasi regüler değildir. Çünkü $A_x^{0.3}$ fuzzy soft noktası ve$f_{10_A}^c$ fuzzy soft kapalı kümesi için $s_A q {t_A}^c$ olacak şekilde sırasıyla s_A, t_AQ-fuzzy soft komşulukları yoktur.

3.2.10.Tanım.(f_A, τ_f)bir fuzzy soft topolojik uzay, $g_A$ve$h_A, g_A q\, {h_A}^c$ olacak şekilde iki fuzzy soft kapalı küme olsun. $g_A$veh_A fuzzy soft kümelerinin, $s_A q t_A^c$ olacak şekilde sırasıyla s_A ve t_AQ-fuzzy soft komşulukları varsa (f_A, τ_f)uzayına***fuzzy softquasi normal uzay***denir.

3.2.5.Örnek.$U = \{x, y\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}, A = \{e_1, e_2\}$olsun.

$$f_{1_A} = \{e_1 = \{x_{0.3}, y_{0.5}\}, e_2 = \{x_{0.5}, y_{0.4}\}\},$$
$$f_{2_A} = \{e_1 = \{x_{0.6}, y_{0.4}\}, e_2 = \{x_{0.2}, y_{0.7}\}\},$$
$$f_{3_A} = \{e_1 = \{x_{0.6}, y_{0.5}\}, e_2 = \{x_{0.5}, y_{0.7}\}\},$$

$$f_{4_A} = \{e_1 = \{x_{0.3}, y_{0.4}\}, e_2 = \{x_{0.2}, y_{0.4}\}\},$$
$$f_{5_A} = \{e_1 = \{x_{0.9}, y_{0.9}\}, e_2 = \{x_{0.8}, y_{0.8}\}\},$$
$$f_{6_A} = \{e_1 = \{x_1, y_{0.4}\}, e_2 = \{x_1, y_{0.5}\}\}$$

fuzzy soft kümeleri ile kurulan$\tau_f = \{0_{U_E^{\sim}}, 1_{U_E^{\sim}}, f_{1_A}, f_{2_A}, f_{3_A}, f_{4_A}, f_{5_A}, f_{6_A}\}$ bir fuzzy soft topolojidirve $(1_{U_E^{\sim}}, \tau_f)$ uzayı bir fuzzy soft quasi normal uzaydır.

3.2.11.Tanım.(f_A, τ_f) hem fuzzy soft quasi normal hem de fuzzy soft quasi T_1-uzayı ise***fuzzy soft quasi*T_4*-uzay*** olarak adlandırılır.

3.2.4.Uyarı. Fuzzy soft quasi normal olma özelliği aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi kalıtımsal bir özellik değildir.

3.2.6.Örnek.3.2.5.Örneği göz önüne alalım. $(1_{U_E^{\sim}}, \tau_f)$ bir fuzzy soft quasi normal uzay olmasına rağmen $V = \{x\}$ olmak üzere $(1_E^{\sim V}, \tau_{f_V})$ alt uzayı fuzzy soft quasi normal değildir. Çünkü $f_{1_A}^c$ ve $f_{5_A}^c$ (öyle ki $f_{1_A}^c \mathrm{q} f_{5_A}$) fuzzy soft kapalı kümelerinin ${s_A}^c \mathrm{q} t_A$ olacak şekilde sırasıyla s_A ve t_AQ-fuzzy soft komşulukları yoktur.

4. SOFT KÜMELERİN PROSTAT KANSERİ TEŞHİSİNDE BİR UYGULAMASI

Endüstriyel ülkelerde prostat kanseri erkeklerde ölüme neden olan en yaygın ikinci kanser tipidir. Prostat kanserinin nedenleri arasında $yaş$, $etnik\ geçmiş$,$kandaki\ prostat\ spesifik\ antijen\ (PSA)\ seviyesi$, $aileninhastalığayatkınlığı$gibi farklı faktörler vardır. Kandaki PSA seviyesi hastalığın teşhisi için kullanılan önemli yöntemlerden biridir (Catolana ve ark. (1998), Egawa ve ark. (1997), Van Cagh ve ark. (1996)). Ne varki, kandaki PSA seviyesi prostatın iltihaplanması ve prostatta iyi huylu büyümenin(BPH) sonucu olarak ta artabilir. Bu yüzden kandaki PSA seviyesine bakarak kesin teşhis koymak mümkün olmayabilir. Bunun yanı sıra rektal muayene ve transrektal bulgular da doktora hastalığın teşhisi açısından bilgi verir (Nguyen ve ark. (2001), Metlin ve ark. (1991), Şeker ve ark. (2003)). Prostat kanserinin kesin teşhisi ise ancak $biyopsi$ ile mümkündür. Ne var ki, $biyopsi$ işleminin bazı zorlukları vardır, hastada bazı zaralara neden olabilir ve maliyeti yüksektir. Bu yüzden hastalara biyopsi işlemini uygulamak önemli bir karadır ve düşük risk altındaki hastalara uygulamaktan kaçınılmalıdır.

Biyopsinin gerekli olup olmadığına karar vermek için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan birisi hastaların PSA, prostat hacmi (PV) ve yaş verilerini kullanarak oluşturulmuş kural tabanlı $fuzzy\ uzman\ sistemi$ (FES) dir ve bu sistem uzman doktora $biyopsi$ yapıp yapmaması hakkında fikir vermeyi amaçlar (Sarıtaş ve ark. (2003)). Benecchi (2006) hastaların kandaki total prostat spesifik antijen, free prostat spesifik antijen seviyeleri ve yaş faktörlerini kullanarak bir $neuro\text{-}fuzzy\ sistem$ geliştirdi ve kandaki total prostat spesifik antijen seviyesinin prostat kanserini teşhis etmede ne ölçüde etkili olduğunu göstermeyi amaçladı. Keleş ve ark.(2007), prostat kanseri ve prostattaki iyi huylu büyümeyi ayırt etmek için bir $neuro\text{-}fuzzy\ sınıflandırma\ sistemi$ tasarladılar. Bu iki hastalığın belirtileri çok benzer olduğundan birbirinden ayırt etmek son derece önemlidir. Sarıtaş ve ark. (2010), hastanın total prostat spesifik antijen, free prostat spesifik antijenve yaş verilerini kullanarak kanserin teşhisine yardımcı olmayı amaçlayan $yapay\ sinir\ a$ğı tasarladılar.

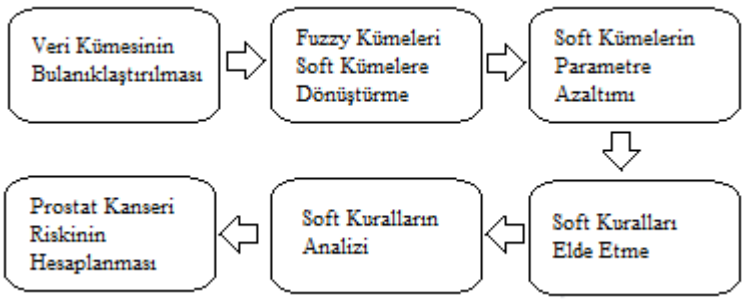
Bu bölümde bizim amacımız PSA, PV ve yaş faktörlerini kullanarak kanser yüzdesini hesaplayan soft küme tabanlı bir tahmin sistemi tasarlamaktır. Tasarladığımız sistem kural tabanlıdır. Amacımız uzman doktora biyopsinin gerekli olup olmadığı konusunda yardımcı olmaktır.

4.1.Soft Uzman Sistemleri

Tasarladığımız sistemde kullandığımız veriler Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram Tıp Fakültesi, Üroloji bölümünden alınmıştır. Veri kümesi 78 hastanın PSA, PV ve yaş değerlerinden oluşmaktadır (Bkz. Tablo 4.1.). Tasarladığımız sistemdegiriş değerleri olarak PSA, PV ve yaş kullanılarak çıkış değeri olarak prostat kanser riskinin yüzdesi elde edilmiştir. Soft uzman sistemini tasarlarken kullandığımız yöntemin adımları Şekil.4.1.de gösterilmiştir.

U=Hastalar	PSA	PV	Yaş
u_3	100	44	58
u_{19}	20	37	69
u_{25}	38	36	72
u_{42}	25	48	60
u_{46}	4,03	60	63
u_{55}	10	62	71
u_{60}	31	72	79
u_{68}	20,6	78	67
u_{72}	8,5	82	60
u_{75}	41	79	80

Tablo.4.1. Bazı hastaların giriş değerleri



Şekil.4.1. Soft uzman sistemi için adımlar

1. Adım: Veri Kümesini Bulanıklaştırma

Veri kümesindeki değerler $softküme$olarak gösterime uygun olmadığından değerler için öncelikle bulanıklaştırma işlemini yaptık. Değerleri bulanıklaştırırken

PSA için çok yüksek (ÇY), yüksek (Y), orta (O), düşük (D) ve çok düşük (ÇD) değişkenleri,

PV için çok küçük (ÇK), küçük (K), orta (O), büyük (B) ve çok büyük (ÇB) değişkenleri,

Yaş için ise genç (G), orta yaş (OY), ve yaşlı (Y) değişkenleri kullanılmıştır.

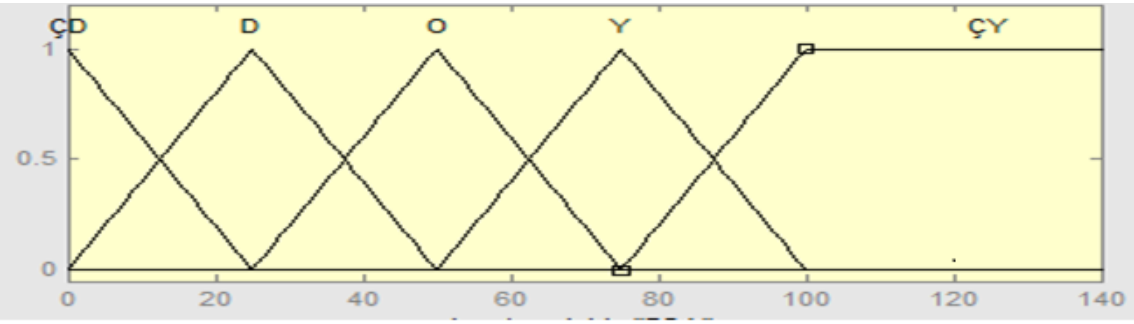
Veri kümesindeki değerlerin bulanıklaştırma işlemi yapılırken$(1), (2)$ ve (3) üyelik fonksiyonlarını kullandık. Bu fonksiyonlar uzman doktor ve literatür yardımıyla belirlenmiştir:

$$PSA(a) = \begin{cases} \mu_a; & 0 \leq a < 100, \\ 1; & 100 \leq a \end{cases} \qquad (1)$$

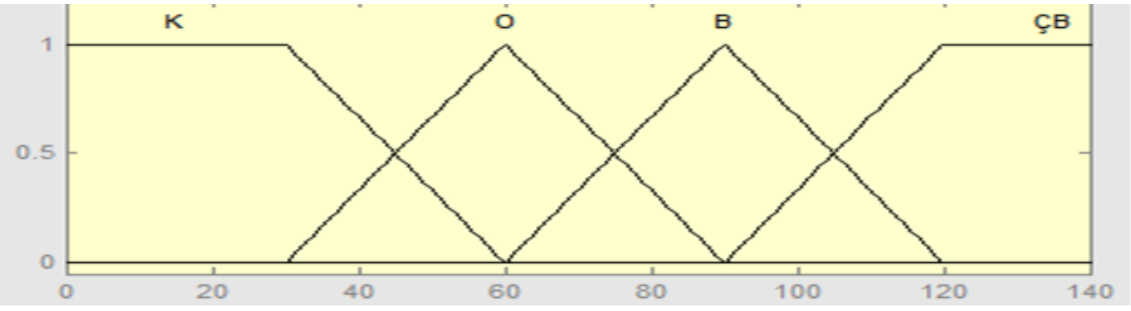
$$PV(b) = \begin{cases} \mu_b; & 30 < b < 120 \\ 1; & b \geq 120 \end{cases} \qquad (2)$$

$$Yaş(c) = \begin{cases} 0; & c \leq 20, \\ \mu_c; & 20 < c < 65, \\ 1; & c \geq 65 \end{cases} \qquad (3)$$

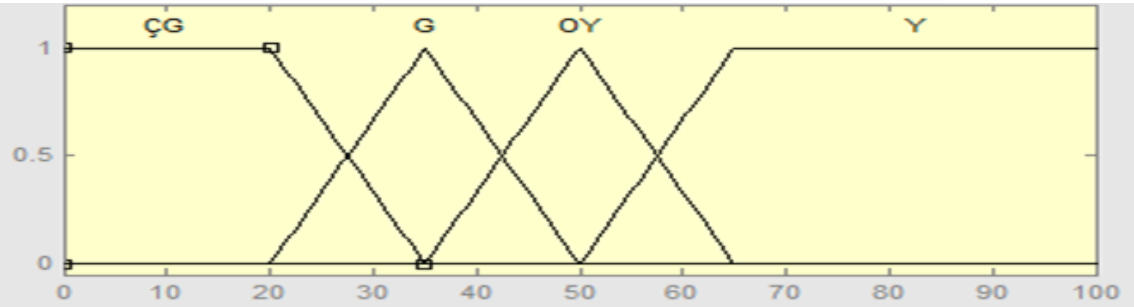
$(1), (2)$ ve (3) formüllerinden giriş değerlerinin üyelik fonksiyonları Şekil.4.2.,Şekil.4.3.,Şekil.4.4., te verilmiştir:



Şekil.4.2. PSA için üyelik fonksiyonu



Şekil.4.3. PV için üyelik fonksiyonu



Şekil.4.4. Yaş için üyelik fonksiyonu

Tüm hastaların giriş değerlerini yukarıdaki üyelik fonksiyonları yardımıyla bulanıklaştırdık. Bazı hastaların üyelik fonksiyonları Tablo 4.2. de gösterilmiştir.

U=Hastalar	PSA	PV	Yaş
u_3	1 ÇY	0.53 K, 0.47 O	0.47 O, 0.53 Y
u_{19}	0.2 ÇD, 0.8 D	0.77 K, 0.23 O	1 Y
u_{25}	0.48 D, 0.52 O	0.8 K, 0.2 O	1 Y
u_{42}	0.28 ÇD, 0.72 D	0.4 K, 0.6 O	0.33 O, 0.67 Y
u_{46}	0.84 ÇD, 0.16 D	1 O	0.13 O, 0.87 Y
u_{55}	0.6 ÇD, 0.4 D	0.93 O, 0.07 B	1 Y
u_{60}	0.41 D, 0.59 O	0.6 O, 0.4 B	1 Y
u_{68}	0.18 ÇD, 0.82 D	0.4 O, 0.6 B	1 Y
u_{72}	0.66 ÇD, 0.34 D	0.27 O, 0.73 B	0.33 O, 0.67 Y
u_{75}	0.36 D, 0.64 O	0.37 O, 0.63 B	1 Y

Tablo.4.2. Bazı hastaların giriş değerleri

2. Adım. Fuzzy Kümeleri Soft Kümelere Dönüştürme

1.1.1.1.Teorem gereği her fuzzy küme bir soft küme olarak ifade edilebilir. Öncelikle üyelik fonksiyonlarını kullanarak parametre kümesini seçelim. Parametre kümesinin seçiminin belli bir kuralı yoktur. Biz parametre kümelerini belirlerken hastaların o verideki en düşük ve en yüksek üyelik değerlerini göz önüne alarak bu değerler arasından seçtik. Böylece parametre kümesi için nümerik değerler elde ettik. Fuzzy kümelerden elde ettiğimiz soft kümelerin bazıları aşağıdaki gibidir:

$$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{77}, u_{78}\}, \quad E = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\},$$

$(F_{O\ PSA}, E) = \{0 = \{u_4, u_5, u_6, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{30}, u_{32}, u_{34}, u_{38}, u_{41}$
$u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{53}, u_{60}, u_{64}, u_{73}, u_{75}\}, 0.25 = \{u_4, u_6, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25},$
$u_{34}, u_{38}, u_{41}, u_{43}, u_{44}, u_{60}, u_{64}, u_{75}\}, 0.5 = \{u_4, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{38},$
$u_{41}, u_{44}, u_{60}, u_{64}, u_{75}\}, \quad 0.75 = \{u_{13}, u_{20}, u_{23}, u_{38}, u_{41}\}, 1 = \{u_{20}, u_{38}\}\}.$

$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{77}, u_{78}\}, \quad E = \{0, 0.185, 0.37, 0.555, 0.74\},$

$(F_{B\ PV}, E) = \{0 = \{u_{11}, u_{17}, u_{35}, u_{36}, u_{45}, u_{46}, u_{49}, u_{53}, u_{55}, u_{60}, u_{65}, u_{68}, u_{72}, u_{73}, u_{75}\},$
$0.185 = \{u_{11}, u_{17}, u_{36}, u_{45}, u_{60}, u_{68}, u_{72}, u_{73}, u_{75}\}, 0.37 = \{u_{36}, u_{45}, u_{60}, u_{68}, u_{72}, u_{73},$
$u_{75}\}, 0.555 = \{u_{45}, u_{68}, u_{72}, u_{75}\}, 0.74 = \emptyset\}.$

$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{77}, u_{78}\}, \quad E = \{0.06, 0.31, 0.56, 0.81, 0.94\},$

$(F_{O\ YAŞ}, E) = \{0 = \{u_3, u_8, u_9, u_{22}, u_{32}, u_{33}, u_{35}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{46}, u_{48}, u_{49}, u_{52}, u_{56},$
$u_{58}, u_{63}, u_{66}, u_{67}, u_{69}, u_{70}, u_{72}, u_{74}, u_{76}, u_{78}\}, 0.31 = \{u_3, u_{22}, u_{33}, u_{35}, u_{42}, u_{43}, u_{44},$
$u_{48}, u_{52}, u_{58}, u_{63}, u_{66}, u_{69}, u_{70}, u_{72}, u_{74}, u_{76}, u_{78}\}, 0.56 = \{u_{43}, u_{48}, u_{52}, u_{58}, u_{63},$
$u_{70}, u_{74}, u_{78}\}, 0.81 = \{u_{48}, u_{52}, u_{70}\}, \ 0.94 = \emptyset\}.$

3. Adım. Soft Kümelerin Parametre Azaltma

$U = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ nesneler kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$parametre kümesi olmak üzere (F, E) soft kümesi tablosal gösterimiyle verilmiş olsun (Bkz. Tablo 1.1.1.1.) ve h_{i_j} sembolü (F, E) soft kümesinin tablodaki girdilerini göstersin.

4.1.1.Tanım (Ma ve ark, 2011).(F, E)soft kümesi için $S(e_j) = \sum_i h_{i_j}$***yönlü-parametre toplamı*** olarak adlandırılır.

4.1.2.Tanım (Ma ve ark, 2011).(F, E)soft kümesi için $A \subseteq E$ olmak üzere $S_A = \sum_j S(e_j)\, A$ parametre kümesinin***tüm toplamı*** olarak adlandırılır.

4.1.3.Tanım (Ma ve ark, 2011).(F, E)soft kümesi ve $e_j \in E$ için eğer

$$h_{1_j} = h_{2_j} = \cdots = h_{n_j} = 1$$

isee_j parametresi e_j^1 olarak gösterilir.

4.1.4.Tanım (Ma ve ark, 2011).(F, E)soft kümesi ve $e_j \in E$ için eğer

$$h_{1_j} = h_{2_j} = \cdots = h_{n_j} = 0$$

isee_j parametresi e_j^0 olarak gösterilir.

4.1.1.Sonuç. Ma ve arkadaşları (2011), soft kümelerde parametre azaltma yapmak için aşağıdaki algoritmayı verdiler:

i) (F, E)soft kümesini ve E parametre kümesini gir,

ii) Eğer e_j^1 ve e_j^0 varsa bu parametreleri$C$ ile gösterilen indirgenmiş parametre kümesine koy ve $U = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, $E' = \{e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{m'}\}$ olmak üzere parametre kümesinde e_j^1 ve e_j^0 olmadan yeni $(F, E^{'})$ soft kümesini oluştur,

iii) $(F, E^{'})$soft küme olmak üzere$j^{'} = 1^{'}, 2^{'}, \cdots, t^{'}$ içine_j parametresi için 4.1.1.Tanımdan$S(e_j)$ yönlü-parametre toplamını hesapla,

iv) 4.1.2.Tanımdan A parametre kümesinin tüm toplamını olan S_A kümesini bul, $S_A$tüm toplam kümesi $|U|$ kardinalitisinin katı olacak şekilde $A \subset E^{'}$ alt kümesini bul ve A aday indirgenmiş parametre kümesinin içine koy,

v) Her aday indirgenmiş parametre kümesi A için

$$f_A(h_1) = f_A(h_2) = \cdots = f_A(h_n)$$

durumunun sağlanıp sağlanmadığını kontrol et, eğer bu durum sağlanıyorsa A kümesiaday indirgenmiş parametre kümesi olarak kalsın, aksi durumda$A$ kümesini aday indirgenmiş parametre kümesi olmaktan çıkar,

vi) Aday indirgenmiş parametre kümesinde $maksimum\ kardinalitiye$ sahip olan A kümesini bul, $E - (A - C)$ kümesioptimal normal parametre indirgeme kümesidir.

4.1.1.Uyarı. İkinci adımda her fuzzy kümeye karşılık gelen soft kümeyi elde ettik. Üçüncü adımda ise Ma ve ark. (2011),tarafından verilen soft kümelerde parametre azaltma işleminin yöntemini verdik. Böylece yeni parametre kümeleri ve yeni soft kümeler elde ettik. Bu soft kümelerden bazıları aşağıdaki gibidir:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_{78}\},$$

$$E = \{0.25,0.5,0.75,1\}(F_{O\ PSA}, E) = \{0.25$$

$$= \{u_4, u_6, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{34}, u_{38}, u_{41}, u_{43}, u_{44},$$

$$u_{60}, u_{64}, u_{75}\}, 0.5 = \{u_4, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{38}, u_{41}, u_{44}, u_{60}, u_{64}, u_{75}\},$$

$$0.75 = \{u_{13}, u_{20}, u_{23}, u_{38}, u_{41}\}, 1 = \{u_{20}, u_{38}\}\}.$$

$$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{77}, u_{78}\}, \quad E = \{0.185, 0.37, 0.555\},$$

$$(F_{B\ PV}, E) = \{0.185 = \{u_{11}, u_{17}, u_{36}, u_{45}, u_{60}, u_{68}, u_{72}, u_{73}, u_{75}\}, 0.37 = \{u_{36}, u_{45}, u_{60},$$

$u_{68}, u_{72}, u_{73}, u_{75}\}$, $0.555 = \{u_{45}, u_{68}, u_{72}, u_{75}\}\}$.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{77}, u_{78}\}, \quad E = \{0.31, 0.56, 0.81\},$$

$$\left(F_{O\ YAŞ}, E\right) = \{0.31 = \{u_3, u_{22}, u_{33}, u_{35}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{48}, u_{52}, u_{58}, u_{63}, u_{66}, u_{69}, u_{70},$$

$u_{72}, u_{74}, u_{76}, u_{78}\}$,$0.56 = \{u_{43}, u_{48}, u_{52}, u_{58}, u_{63}, u_{70}, u_{74}, u_{78}\}$, $0.81 = \{u_{48}, u_{52}, u_{70}\}$.

4. Adım. Soft Kuralları Elde Etme

Bu adımda üçüncü adımda elde edilensoft kümelerle "VE" işleminden yararlanarak kurallar elde ettik ve hangi hastanın hangi kurala uyduğunu tespit ettik. Elde ettiğimiz bazı kurallar aşağıdaki gibidir:

$$F_{ÇD\ PSA}(0.35) \wedge F_{O\ PV}(0.25) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.59) = \{u_7, u_{10}, u_{14}, u_{16}, u_{27}, u_{31}, u_{33}, u_{39}, u_{46},$$
$$u_{49}, u_{50}, u_{51}, u_{54}, u_{55}, u_{56}, u_{57}, u_{61}, u_{62}, u_{63}, u_{65}, u_{67}, u_{71}, u_{72}\}$$

$$F_{D\ PSA}(0.2875) \wedge F_{K\ PV}(0.275) \wedge F_{O\ Yaş}(0.31) = \{u_{22}, u_{33}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{48}, u_{52}, u_{58},$$
$$u_{63}, u_{70}, u_{74}, u_{78}\}$$

$F_{O\ PSA}(0.25) \wedge F_{O\ PV}(0.25) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.325) = \{u_6, u_{11}, u_{15}, u_{20}, u_{34}, u_{41}, u_{44}, u_{60}, u_{75}\}$.

$F_{O\ PSA}(0.25) \wedge F_{O\ PV}(0.5) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.325) = \{u_6, u_{11}, u_{15}, u_{34}, u_{41}, u_{44}, u_{60}\}$.

$F_{Y\ PSA}(0.2225) \wedge F_{S\ PV}(0.785) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.59) = \{u_8\}$.

$F_{Y\ PSA}(0.2225) \wedge F_{S\ PV}(0.53) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.325) = \{u_5, u_8\}$.

$F_{ÇY\ PSA}(0.6875) \wedge F_{S\ PV}(0.785) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.59) = \{u_8\}$.

$F_{ÇY\ PSA}(1) \wedge F_{S\ PV}(0.275) \wedge F_{Y\ Yaş}(0.59) = \{u_5, u_8, u_{34}\}$.

Bu şekilde 400 kural elde ettik. Bu kurallardan aynı çıktıyı (aynı hasta) verenleri eledik ve böylece 285 kurala indirgedik.

5. Adım. Soft KurallarınAnalizi

Bu adımda soft kuralları analiz ettik ve prostat kanseri yüzdesini hesapladık. Dördüncü adımda her kurala karşılık gelen hasta kümesini elde etmiştik. Bu adımda elde ettiğimiz bu kümeleri göz önüne alarak her kurala karşılık gelen kümedeki hastaların kaç tanesinin prostat kanseri olduğunu gözlemledik ve her bir kümedeki prostat kanseri olan hasta sayısını tüm hasta sayısına böldük. Böylece her kural için prostat kanser riskini elde ettik. Eğer bir hastanın verileri birden fazla kurala ve böylece

birden fazla yüzdeye uygunsa o zaman en yüksek yüzdeyi hastanın prostat kanseri olma riski yüzdesi olarak kabul ettik.

Aşağıda kurallara karşılık gelen yüzdelerin bazıları verilmiştir:

Kural 1.

$$F_{\text{ÇD PSA}}(0.35) \wedge F_{O\ PV}(0.25) \wedge F_{Y\ \text{Yaş}}(0.59) = \{u_7, u_{10}, u_{14}, u_{16}, u_{27}, u_{31}, u_{33}, u_{39}, u_{46}, u_{49}, u_{50}, u_{51}, u_{54}, u_{55}, u_{56}, u_{57}, u_{61}, u_{62}, u_{63}, u_{65}, u_{67}, u_{71}, u_{72}\}$$

Kural 1'e uyan 23 hasta var ve bu hastaların 8 tanesinin prostat kanseri olduğunu biliyoruz. Böylece Kural 1'in risk yüzdesi $(8 \div 23) \times 100 = 34.78$ dir. PSA, PV ve yaş verileri Kural 1'e uyan hastaların kanser olma riskinin %34.78 olduğunu söyleyebiliriz.

Aşağıda bazı kuralların risk yüzdesi verilmiştir:

Kural 1: Bir hasta $F_{\text{ÇD PSA}}(0.35)$ ve $F_{O\ PV}(0.25)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.59)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 34'tür.

Kural 2: Bir hasta $F_{D\ PSA}(0.2875)$ ve $F_{K\ PV}(0.275)$ ve $F_{O\ \text{Yaş}}(0.31)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 34'tür.

Kural 3: Bir hasta $F_{O\ PSA}(0.25)$ ve $F_{O\ PV}(0.25)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.325)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 74'tür.

Kural 4: Bir hasta $F_{O\ PSA}(0.25)$ ve $F_{O\ PV}(0.5)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.325)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 83'tür.

Kural 5: Bir hasta $F_{Y\ PSA}(0.2225)$ ve $F_{K\ PV}(0.785)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.59)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 100'dür.

Kural 6: Bir hasta $F_{Y\ PSA}(0.2225)$ ve $F_{K\ PV}(0.53)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.325)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 100'dür.

Kural 7: Bir hasta $F_{\text{ÇY PSA}}(0.6875)$ ve $F_{K\ PV}(0.785)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.59)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 100'dür.

Kural 8: Bir hasta $F_{\text{ÇY PSA}}(1)$ ve $F_{K\ PV}(0.275)$ ve $F_{Y\ \text{Yaş}}(0.59)$ verilerine sahipse kanser olma riski % 100'dür.

Sonuç olarak PSA, PV ve yaş verilerini girerek kanser olma riskini hesaplayan soft uzman sistemini yazarız.

Soft uzman sistemin tüm adımlarını tasarlarken Microsoft Visual Studio 2008

ve C^{+} programlama dili kullanılmıştır. Şekil 4.5'te hesaplama sonuçlarından iki tanesi verilmiştir.



Şekil.4.5.

4.2. Sonuç

Bu bölümde, soft kümeleri kullanarak soft uzman sistemi elde edilmiştir ve bu sistem yardımıyla soft kümeler tıpta teşhis yapmak için kullanılmıştır. Bu bağlamda, çalışma soft kümelerin tıpta kullanımını içeren ilk çalışmalardan biri olma niteliğini taşımaktadır.Sistem tasarlanırken;

- Birinci adımda fuzzy üyelik fonksiyonları kullanılarak girdiler bulanıklaştırılmıştır.
- İkinci adımda veri kümeleri soft kümeler şeklinde ifade edilmiştir. Girdikümeleri olan PSA, PV ve yaş faktörleri, gösterilendilsel ifadelerle sınıflandırılmış ve parametre kümeleri en düşük ve en yüksek üyelik dereceleri göz önüne alınarak seçilmiştir.
- Üçüncüadımda Ma ve ark. (2011) tarafından verilen soft kümelerde parametre azaltma işlemi uygulanarak indirgenmiş yeni parametre kümeleri ve dolayısıyla yeni soft kümeler elde edilmiştir.
- Dördüncüadımda kural çıkarımı yapılmıştır.
- Beşinci adımda tüm bu kurallara göre kanser olma riski hesaplanmıştır.

Tasarlanan $soft\ uzman\ sistemi$sayesindeprostat şikâyetiyle gelen hastanın PSA, PV ve yaş verileri yardımıyla prostat kanseri olma riskinin yüzdesi elde edilmiştir. Elde edilen bu bilgiler ışığında uzman doktor, prostat şikâyetiyle gelen herhangi bir hastanın kanser olma riskini hesaplayarak, biyopsi işlemine ilişkin karar verebilir ve dolayısıylayapılması gerekli olmayan biyopsi işlemlerinin önüne geçilmiş olur.

Tasarlanan sisteme göre risk yüzdesi % 50'den büyükse biyopsi gereklidir, aksi takdirde biyopsi işlemi gerekmemektedir.

Çalışmanın örneklemiyetmiş sekiz hastadan oluşmaktadır. Uzman doktora prostat şikâyeti ile gelen hastalardan $yetmiş\ sekizinin$PSA, PV ve yaş değerleri yüksek olduğundan kanser olma risklerinin yüksek olduğu belirlenmiştir.Bu sebeple de bu hastalara biyopsi uygulanmıştır. Biyopsi sonuçlarına göre ise bu hastalardan $kırk\ dördünün$ prostat kanseri olduğu görülmüştür. Aynı hastaların verileri $soft\ uzman\ sistemine$ göreanaliz edildiğinde ise $yetmiş\ sekiz$ hastadan yalnızca$elli\ bir$ tanesine biyopsi uygulanması gerektiği sonucu elde edilmiştir. Buna göre, eğer hastalara ait veriler ilk anda soft uzman sistemine göre değerlendirilmiş olsaydı düşük risk grubunda yer alan$yirmi\ yedi$ hastaya gereksiz biyopsi uygulanmasından kaçınılmış olacaktı.Sistemin tasarlanmasında, kanser riski görülen bir hastaya biyopsi işlemiuygulanıp uygulanmaması konusunda uzman doktora fikir vermek ve dolayısıyla gereksiz olabilecek biyopsi uygulamalarından kaçınmak amaçlanmıştır. Yapılan bu çalışmada ise soft uzman sistemin bu amaca hizmet edecek nitelikte olduğu sonucu elde edilmiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada üç ayrı problem ele alınmıştır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde soft kümeler potansiyel ve asıl parametre kümelerinin yorumlanışı açısından bu konuda yapılan diğer çalışmalardan farklı bir bakış açısıyla ele alınmıştır. Bu yeni tanımla soft topolojik uzaylar yeniden incelenmiş, soft açıklar ve soft komşuluklar kullanılarak τ-soft süreklilik ve τ-soft ayırma aksiyomları incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra soft topolojik uzaylardan bağımsız olan soft kotopolojik uzaylar tanımlanmış, soft kapalılarla ilgili özellikler incelenmiştir. Soft remote komşuluk tanımından faydalanılarak κ-soft süreklilik ve κ-soft ayırma aksiyomları çalışılmıştır. Bir $U_{\widetilde{E}}$ soft kümesi üzerine kurulmuş soft topolojik ve soft kotopolojik uzay göz önüne alınarak $(U_{\widetilde{E}}, \tau, \kappa)$ soft ditopolojik uzayı elde edilmiştir. Soft ditopolojik uzaylarda soft süreklilik ve soft ayırma aksiyomları tanımlanmış ve incelenmiştir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde Tanay ve Kandemir (2011) tarafından tanımlanmış fuzzy soft topolojik uzaylar geliştirilmiştir.Fuzzy soft topolojik uzaylarda Q-komşuluk ailesi tanımlanmış ve bu aileden faydalanılarak fuzzy soft quasi ayırma aksiyomları incelenmiştir.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde soft kümeler kullanılarak bir sistem tasarlanmıştır. Soft uzman sistemler adını verdiğimiz bu sistemin oluşturulmasında prostat şikayetiyle Meram Tıp Fakültesine başvuran hastaların prostat spesifik antijen, yaş ve prostat hacmi verileri girdi olarak kullanılmıştır. Sistem tasarlanırken veri kümesini bulanıklaştırma, elde edilen fuzzy kümeleri soft kümelere çevirme, soft kümelerde parametre azaltma, kural çıkarma ve kural analizi işlemlerinden sonra prostat kanser riski yüzdesini hesaplayan program elde edilmiştir. Bu sistem doktora yardımcı olmak amacıyla tasarlanmıştır. Doktor, soft uzman sistemine hastanın prostat spesifik antijen, yaş ve prostat hacmi verilerini girerek kanser olma riskini hesaplayabilir. Böylece doktor, düşük kanser riski olan hastalara, çok pahalı ve bazen hastalarda zararlara neden olabilen bir uygulama olan biyopsi işlemini gereksiz yere yapmaktan kaçınmış olacaktır.

5.2. Öneriler

Soft ditopolojik ve fuzzy soft topolojik uzaylarda elde edilen sonuçlar geliştirilebilir. Bağlantılılık, kompaktlık gibi topolojik yapılar bu uzaylarda araştırılabilir. Ayrıca bu uzaylar kategori açıdan incelenebilir. Prostat kanserinin teşhisi için tasarlanan soft uzman sistemler farlı hastalıkların teşhisi için geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, B., ve Kharal, A., 2009, On fuzzy soft sets, *Advances in Fuzzy Systems*, doi:10.1155/2009/586507, 1-7.

Ahmad, B., ve Hussain, S., 2012, On some structures of soft topology, *MathematicalSciences*, 6 (64), 2-7.

Aktaş, H., ve Cağman N., 2007, Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 1 (77), 2726-2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Aygünoğlu, A., ve Aygün, H., 2011, Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 21(1), 113-119.

Benecchi, L., Neuro-fuzzy system for prostate cancer diagnosis, 2006 *Urology*, 68(2), 357-36.

Brown, L.M., Diker, M.,1998, Ditopological texture spaces and intuitionistic sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 98,217-224.

Catolona, W.J., Partin, A.W., Slawin, K.M., Brawer, M.K., Flanigan, R.C., Patel, A. et al., 1998, Use of the percentage of free prostate-specific antigen to enhance differentiation of prostate cancer from benign prostatic disease: A prospective multicenter clinical trial, *Journal of American Medical Association (JAMA)*, 279, 1542-1547.

Chen, D., 2005, The parametrization reduction of soft sets and its applications, *Computers and Mathematics with Applications*,, 49(5-6), 757-763.

Çağman, N., Karataş S., ve Enginoğlu, S., 2011, Soft topology, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.

Egawa, S., Soh, S., Ohori, M., Uchida, T., Gohji, K., Fujii, A., ve ark., 1997, The ratio of free to total serum prostate specific antigenand its use in differential diagnosis of prostate carcinoma,*Japan. Cancer (Online)*, 79, 90-98.

Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X.Z., 2008, Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.

Feng, F., Jun Y.B., Liu, X.Y., Li, L.F., 2010, An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 10-20.

Feng, F., Changxing, L., Davvaz, B., ve Irfan Ali, M., 2010, Soft Sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, *Soft Computing*, 14(9) 889-911.

Ghanim, M.H., Tantawy, O.A., Selim Fawzia, M., 1997, On Lower Seperation Axioms, *Fuzzy Sets and Systems*, 85, 385-389.

Hussain, S., ve Ahmad, B., 2011, Some properties of soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (11), 4058-4067.

Jun, Y.B., ve Park, C.H., 2008, Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 1408-1413.

Keleş, A., Hasıloğlu, A.S., Keleş, A. ve Aksoy, Y., 2007, Neuro-fuzzy classification of prostate cancer using NEFCLASS-J, *Computers in Biology and Medicine*, 37, 1617-1628.

Kelly, J.L., 1963, Bitopological spaces, *Proc. Lond. Math.Soc.*, III Ser. 13, 71-89.

Kharal, A., ve Ahmad, B., 2009, Mappings on fuzzy soft classes, *Advances in Fuzzy Systems*, doi: 10.1155/2009/4078, 1-7.

Kharal, A., ve Ahmad, B., 2011, Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation*, 7(3), 471-481.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L., Li, S., 2008, The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *Computers and Mathematics with Applications*, 56(12), 3029-3037.

Ma, X., Sulaiman, N., Qin, H., Herewan, T., Zain, J.M., 2011, A new efficient normal parameter reduction algorithm of soft set, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 588-598.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., 2001, Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589-602.

Maji, P. K., ve Roy, A. R., 2002, An application of soft sets in a decision making problem,*Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.

Maji, P.K., Biswas, R., ve Roy, A.R, 2003, Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.

Metlin, C., Lee, F. ve Drago, J., 1991, The American Cancer Society National prostate cancer detection, project: Findings on the detection of early prostate cancer in 2425 men, *Cancer*, 67, 2949-2958.

Molodtsov, D., 1999, Soft set theory-First results, *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.

Nguyen, H.P. ve Kreinovich, V., 2001, Fuzzy logic and its applications in medicine, *International Journal of Medical Informatics*, 62, 165-173.

Pei, D., Miao D., 2005,From soft sets to information systems, *Granular Computing 2005 IEEE International Conference*, 2, 617-621.

Roy, A.R., Maji, P.K., 2007, A fuzzy soft set theoric approach to decision making problems, *Journal ofComputational and Applied Mathematics with Applications,* 203, 412-418.

Roy, S., ve Samanta, T. K., 2011, A note on fuzzy soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2), 305-311.

Sarıtaş, I., Allahverdi, N. ve Sert, 2003, U., A fuzzy expert system design for diagnosis of prostate cancer, *International Conference on Computer Systems and Technologies-CompSysTech*.

Sarıtaş, I.,Özkan, I.A., Sert, U., 2010, Prognasis of prostate cancer by artificial neural Networks, *Expert Systems with Applications*, 37, 6646-6650.

Shabir, M., Naz, M., 2011, On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

Şeker, H., Odetayo, M., Petrovic, D. ve Naguib, R.N.G., 2003, A fuzzy logic based method for prognostic decision making in breast and prostate cancers, *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7, 114-122.

Tanay, B., Kandemir, M.B., 2011, Topological structure of fuzzy soft sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2952-2957.

Van Cangh, P.J., De Nayer, P., De Vischer, L., Sauvage, P., Tombal, B., Lorge, F. et al., 1996, Free to total prostate-specific antiden (PSA) ratio is superior to total PSA in differentiating benign prostate hypertrophy from prostate cancer, *The prostate*, 29, 30-34.

Wang, G., 1983, Generalized topological molecular lattices, *Sci. Sinica*, Ser. A 12, 1063-1072.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zahiri O., 2013, Category of Soft Sets, *Annals of the University of Craiova Mathematics and Computer Science Series*, 40(2), 154-166.

Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W.K., ve Atmaca, S., 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2), 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Tuğba Han DİZMAN
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kars-1985
Telefon	**:**	0332 223 3960
Faks	**:**	
e-mail	**:**	tsimsekler@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Kars Anadolu Lisesi, Merkez, Kars**	**2003**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2007**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2009**
Doktora	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya**	**2014**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-2010	**Kafkas Üniversitesi**	**Araştırma Görevlisi**
2010-2014	**Selçuk Üniversitesi**	**Araştırma Görevlisi**

UZMANLIK ALANI
Topoloji

YABANCI DİLLER
İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

1. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler, Zehra G. Ergül, T. Noiri, Strongly θ-pre-I-continuous functions, ‘’Vasile Alecsandri’’ University of Bacau Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 20(2), 111-126, 2010. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)
2. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler, B. Kut, Upper and Lower Na Continuous Multifunctions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40 (2), 341-348, 2011.
3. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler, B. Bilik, Upper and Lower Pre Strong Na Continuous Multifunctions, Applied Mathematics and Computation, 218, 1142-1146, 2011.
4. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler, Strongly θ-I-continuous functions, Far East Journal of Mathematical Sciences, 58 (2), 223-233, 2011.

5. Şaziye Yüksel, Zehra G. Ergül, Tuğba Han Şimşekler, On Weakly θ-pre-I continuous functions, ‘’Vasile Alecsandri’’ University of Bacau Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 21(2), 157-172, 2011.
6. Tuğba Han Şimşekler, Şaziye Yüksel, Fuzzy Soft Topological Space, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1) 87-96, 2012.(Doktora tezinden yapılmıştır.)
7. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Dizman (Şimşekler), Gülnur Yıldızdan,I. Unal Sert, Applications of Soft Sets to Diagnose the pProstate Cancer Risk, Journal of Inequalities and its Applications,doi:10.1186/1029-242X-2013-229, 2013. (Doktora tezinden yapılmıştır.)
8. Tuğba Han Dizman, Şaziye Yüksel, Fuzzy Soft Quasi Seperation Axioms, 2013, gönderildi. (Doktora tezinden yapılmıştır).
9. Tuğba Han Dizman, Alexander Sostak, Şaziye Yüksel, Soft Ditopological Spaces, 2014, (gönderildi). (Doktora Tezinden yapılmıştır)

ULUSLARARASI KONFERANSLAR

1. **.**Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler, Berrak Bilik, " Pre Strong Na Continuous Multifunctions, International Congress in Honour of Professor H.M. Srivastava on His 70 th Birth Anniversary, 18-21 Ağustos, 2010, Bursa.
2. Tuğba Han Şimşekler, Şaziye Yüksel, " Upper and Lower Semi Strong Na Continuous Multifunctions, International Conference on Topology and its Applications, 4-10 Temmuz 2011, Islamabad- Pakistan.
3. Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler , " Beta Baire Spaces, International Conference on Topology and its Applications, 4-10 Temmuz 2011, Islamabad-Pakistan.
4. Tuğba Han Dizman, Şaziye Yüksel, Gülnur Yıldızdan, Ünal Sert, " An Application of Soft Sets to Diagnose the Prostate Cancer Risk, International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava, 23-26 Ağustos 2012, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
5. Tuğba Han Dizman, Şaziye Yüksel, "Fuzzy Soft Quasi Seperation Axioms, Third International Conference on Topology and its Applications, 2-7 Eylül 2012, Üsküp-Makedonya (Doktora tezinden yapılmıştır).
6. Tugba Han Dizman(Simsekler), Saziye Yuksel, ‘’On Fuzzy Soft Topological Spaces’’ 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 26-29 August 2013, Sarajevo- Bosnia and Herzegovina(Doktora tezinden yapılmıştır).