KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TENSÖR İLE GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ

SALİH KİBAROĞLU

KOCAELİ 2013

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

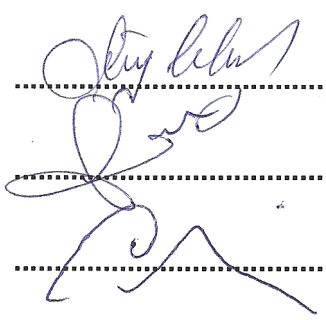
TENSÖR İLE GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ

SALİH KİBAROĞLU

Yrd.Doç.Dr. Oktay CEBECİOĞLU
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Abdurrahman ANDİÇ
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. K.Gediz AKDENİZ
Jüri Üyesi, İstanbul Üniv. .....



Tezin Savunulduğu Tarih: 09.07.2013

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmada tensör ile genişletilmiş grupların ayar teorisi incelenmiştir. Buradaki hedef kütleçekimine yeni katkılar bulmaktır. Yaptığımız çalışmalarda görüldü ki uzay-zaman simetrisine karşılık gelen grupları bir tensör ile genişletip ayar teorisini kurduğumuzda Lagranjiyene katkılar elde edebiliyoruz.

Çalışma sürecinde desteklerinden dolayı danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Oktay Cebecioğlu ve Yrd. Doç. Dr. Abdurrahman Andiç'a teşekkür ederim.

Temmuz-2013 Salih KİBAROĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER i
İÇİNDEKİLER ii
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR iii
ÖZET v
ABSTRACT vi
GİRİŞ 1
1. GRUPLARIN GENİŞLETİLMESİ 3
1.1. Kısaca Gruplar 3
1.1.1. Lie grupları 4
1.1.2. Lie gruplarının bazı özellikleri 4
1.1.3. Lie cebri 5
1.1.4. Lie cebrinin bazı özellikleri 7
1.2. Grupların Bir Tensör Üretici İle Genişletilmesi 8
1.2.1. Maxwell grubu 8
2. AYAR TEORİSİ OLARAK KÜTLEÇEKİMİ 13
2.1. Tarihsel Gelişim 13
2.2. Kibble Yaklaşımı 13
2.2.1. Sonsuz küçük koordinat dönüşümü 16
2.2.2. Poincare dönüşümleri 17
2.3. Ayar Teorisinde Diferansiyel Geometrinin Kullanımı 21
2.3.1. Kısaca diferansiyel geometri 21
2.3.2. Diferansiyel dış çarpım 21
2.3.3. Diferansiyel formlar 22
2.3.4. Dış türev 23
2.3.5. Ayar teorisinde kullanımı 24
2.3.6. Poincare cebrinin ayar teorisi 26
3. TENSÖREL GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ 29
3.1. Basit Maxwell Grubunun Ayar Teorisi 29
3.2. Yarı-Basit Genişletilmiş Poincare Grubunun Ayar Teorisi 33
3.3. AdS-Maxwell Grubunun Ayar Teorisi 36
3.4. Genişletilmiş Weyl Grubunun Ayar Teorisi 39
3.4.1. Weyl grubunun antisimetrik bir tensör ile genişletilmesi 39
3.4.2. Genişletilmiş Weyl grubunun ayar teorisi 43
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 48
KAYNAKLAR 49
EKLER 52
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 61
ÖZGEÇMİŞ 62

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\mathbb{A}$: Ayar alanı
$A,B,C...$: Lie cebri üretici indisleri (Büyük Latin harfleri)
$a,b,c...$: Tanjant uzay indisleri (Küçük Latin harfleri)
$\alpha,\beta,\gamma...$: Uzay-zaman indisleri (Küçük Yunan harfleri)
a^a : Momentum üreticinse bağlı sonsuz küçük parametre
$B_{[ab]}$: B ifadesi alt indislerine göre antisimetriktir
$B_{(ab)}$: B ifadesi alt indislerine göre simetriktir
C : Casimir operatörü
D : Ölçekleme üreticisi
D : Lie grubunun bir gösterimi
$e^a_{\ \mu}$: Momentum üreticisine bağlı ayar alanı
F^a : Momentum üreticisine bağlı eğrilik
F^{ab} : Tensör üreticisine bağlı eğrilik
F : Ölçekleme üreticisine bağlı eğrilik
$\mathbb{F}$: Eğrilik skaleri
f^C_{AB} : Yapı sabiti
G : Bir Lie grubu
g : Grup elemanı
$g_{\mu\upsilon}$: Metrik tensör
h : Altgrup
J^μ : Akım
K : Eşküme (Koset)
L : Lie cebri
L : Lagranjiyen
$\mathcal{L}$: Lagranjiyen yoğunluğu
M^{ab} : Açısal momentum üreticisi
P^a : Momentum üreticisi
$R^\delta_{\ \mu\upsilon\gamma}$: Riemann eğrilik tensörü
$R_{\mu\upsilon}$: Ricci tensörü
R : Ricci skaleri
R^{ab} : Açısal momentum üreticisine bağlı eğrilik
S : Eylem
u^{ab} : Açısal momentum üreticinse bağlı sonsuz küçük parametre
X_A : Lie grubunun üreticisi
x^a : Momentum üreticinse bağlı alan
Z^{ab} : Tensör üretici
λ : Ölçekleme üreticisine bağlı sonsuz küçük parametre
$\theta^{ab}_{\ \mu}$: Tensör üreticisine bağlı ayar alanı
θ^{ab} : Tensör üreticisine bağlı alan
σ_μ : Ölçekleme üreticisine bağlı ayar alanı

σ : Ölçekleme üreticisine bağlı alan

ε^{ab} : Tensör üreticisine bağlı sonsuz küçük parametre

Φ : Skaler bir alan

φ : Alan

ω^{ab} : Açısal momentum üreticisine bağlı alan

ω^{ab}_{μ} : Açısal momentum üreticisine bağlı ayar alanı

δ : Değişim

δ_0 : Sabit uzay-zaman noktasında değişim

$\eta_{\mu\upsilon}$: Düz uzay-zaman metriği

[,] : Komütasyon

d : Dış türev operatörü

$\wedge$: Dış çarpım operatörü

$\cdot$: Skaler çarpım operatörü

∂ : Kısmi türev operatörü

, : Adi türev

; : Kovaryant türev

| : İndis ayracı

TENSÖR İLE GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ

ÖZET

1956'da R. Utiyama ve 1961'de T.W.B. Kibble, yerel uzay-zaman dönüşümleri altında Lagranjiyenin değişmez olduğunu varsayarak kütleçekiminin elde edilebileceğini gösterdiler. Bu çalışmaların anlamı herhangi bir uzay-zaman simetrisine karşılık gelen bir grup varsa, bu grup yerel incelendiğinde kütleçekimi ortaya çıkmaktadır. Bu fikirden başlayarak kütleçekimine yeni katkılar bulabilmek için Weyl grubunu antisimetrik bir tensör üretici ile genişlettik. Daha sonra genişletilen bu grubu diferansiyel geometrik yöntemlerle yerel inceleyerek kütleçekim için yeni bir Lagranjiyen elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Ayar Alan Teorisi, Diferansiyel Geometri, Grup Teori, Kütleçekimi, Lagranjiyen.

GAUGE THEORY OF TENSOR EXTENDED GROUPS

ABSTRACT

In 1956 R. Utiyama and in 1961 T.W.B. Kibble shown that the gravitation theory can be obtained by postulating the invariance of Lagrangian under local space-time transformations. The meaning of these studies is that if we have any group corresponding to the space-time symmetry, gravitation comes out when this group is gauged. Starting from this idea, we extended Weyl group with antisymmetric tensor generator in order to find new contributions to the gravitation. Later gauging this extended group with differential geometric methods we obtained a new Lagrangian for gravitation.

Keywords: Gauge Field Theory, Differential Geometry, Group Theory, Gravitation, Lagrangian.

GİRİŞ

1956'da R. Utiyama Lorentz grubunu yerel dönüşümler altında inceleyerek Einstein kütleçekim alan denklemini elde etti. Bu sayede Utiyama uzay-zaman simetrilerinin yerel incelenmesiyle kütleçekim teorisinin elde edilebileceğini ilk olarak göstermiş oldu. 1961 yılında T.W.B. Kibble, Utiyamanın sonuçlarını genelleştirdi ve uzay-zaman simetrisi olarak Poincare grubunu kullandı. Kibble bu grubu yerel inceleyerek; Einstein-Cartan denklemi olarak da bilinen uzay-zamanda burulmayı içeren kütleçekimini elde etti. İlerleyen yıllarda ise diğer simetri grupları (DeSitter, Weyl, Konformal…) için de benzer çalışmalar yapıldı. Bu çalışmalar geometrik yollardan türetilmiş olan kütleçekimi denklemlerini ayar teorisi ile tekrar elde edilebileceğini göstermiştir.

2004 yılında D. V. Soroka ve V. A. Soroka tarafından bir antisimetrik tensör üretici ile Poincare grubu genişletildi ve 2011 yıllında buna bağlı ayar teorisini oluşturup yeni bir Lagranjiyen yazıldı. Tensör üreticinin kullanılmasındaki motivasyon daha önceden bilinen Maxwell grubuydu. Maxwell grubu, Poincare grubunun genişletilmiş halidir ve uzay-zamana bağlı antisimetrik bir tensör üretici içerir. Bu üretici elektromanyetik gerilme tensörüne karşılık gelmektedir. Ayrıca bu grubun incelenmesiyle sabit bir elektromanyetik alan içinde hareket eden yüklü bir parçacığa ait hareket denklemi elde edilmişti.

Bu tezde ise öncelikli olarak Weyl grubunu antisimetrik bir tensör üretici ile genişlettik. Daha sonra genişlettiğimiz grubun ayar teorisini inceledik. Bu sayede yeni bir Lagranjiyen elde etmiş olduk.

Birinci bölümde grupların nasıl genişletildiğini daha iyi anlamak için öncelikle grup teoriye kısa bir giriş yapacağız. Grupları genişletmedeki temel motivasyonumuz olan Maxwell grubu hakkında bilgi vereceğiz. Daha sonra bir uygulama olarak Poincare grubunu antisimetrik bir tensör üretici ile genişleteceğiz.

İkinci bölümde, kütleçekiminin bir ayar teorisi olarak nasıl gösterilebileceğini inceleyeceğiz. Bu amaçla öncelikli olarak ayar teorisinin kütleçekim alanındaki tarihsel gelişimine yer vereceğiz. Burada R. Utiyama ve T.W.B. Kibble'ın yaptıklarını detaylı inceleyeceğiz. Genişletilmiş Weyl grubu için kurduğumuz ayar teorisini

diferansiyel geometrik yöntemlerle gerçekleştirdiğimizden dolayı bu bölümde diferansiyel geometrinin temel kavramlarına giriş yapacağız. Temel tanımlamaları yapıp Poincare grubu üzerinde bir uygulama ile devam edeceğiz.

Üçüncü bölümde sırasıyla basit ve yarı-basit genişletilmiş Poincare grubu ve AdS-Maxwell grubu üzerindeki ayar teorisini kısaca tanıtacağız. Daha sonra Weyl grubunu detaylı inceleyeceğiz. Öncelikli olarak Weyl grubunu bir antisimetrik tensör üretici ile genişleteceğiz. Daha sonra genişletilen bu grup üzerinde diferansiyel geometrik yöntemlerle ayar teorisini kuracağız. Bu ayar teorisi ile birlikte, grubu genişleterek oluşturduğumuz yeni uzay-zamana ait eğrilikleri ve Lagranjiyeni elde edeceğiz.

1. GRUPLARIN GENİŞLETİLMESİ

1.1. Kısaca Gruplar

Tanım: Bir G kümesi, tanımlanmış bir $(\circ)$ işlemine göre aşağıdaki dört şartı sağlıyorsa bu küme $(\circ)$ işlemine göre bir grup oluşturur;

1. Kapalılık: $a,b \in G$, $a \circ b \in G$
2. Birleşme Özelliği: $\forall a,b,c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
3. Birim elemanın varlığı: $e \in G$, $a \circ e = e \circ a = a$ ve $\forall a \in G$ durumunda e birim elemanı gösterir.
4. Ters elemanın varlığı: $a \in G$, $b \in G$ $a \circ b = b \circ a = e$ bu durumunda $b = a^{-1}$'dir ve b ters elemanı gösterir.

Altgruplar: G grubunun bir alt kümesi olan H'ın elemanları $(\circ)$ işlemine göre grup oluşturuyorsa bu oluşan gruba G grubunun altgrubu denir. Aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$h_1, h_2 \in H, \quad \forall h_1, h_2 \in H \subset G \tag{1.1}$$

Eşküme(Koset): $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, G'nin bir altgrubu olsun, burada $H \neq G$, $H \neq I$, $I = \{e\}$'dir. Verilen $g \in G$ için;

$$gH = \{gh_1, gh_2, ..., gh_n\}, \; Hg = \{h_1 g, h_2 g, ..., h_n g\} \tag{1.2}$$

Bu eşitlikler g'ye göre H altgrubunun sol ve sağ eşkümeleri olarak adlandırılır.

Elde edilen bu küme bir grup oluşturmaz. Bu küme için $gh_i \notin H$, $(i = 1,2,...,n)$ kuralı geçerlidir.

G aşağıdaki şartlar altında eşkümelerinin toplamı şeklinde yazılabilir;

Eğer $g_{1,2,...,j} \in G$; $g_1, g_2 \notin H$; $g_2 \notin g_1 H$ ise;

$$G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \cup ... \cup g_{j-1} H \tag{1.3}$$

Normal Altgrup: Eğer H, G'nin altgrubu ise ve $H = gHg^{-1}$, $\forall g \in G$ ise H, G'nin normal altgrubudur.

1.1.1. Lie grupları

1800'lerin sonuna doğru Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından geliştirilmiştir. Lie grupları hem matematikte hem de fizikte çalışılmaktadır. Lie gruplarının fizikçiler için en önemli özelliği; sürekli yapılardan oluşmalarından dolayı sonsuz küçük dönüşümlerin veya üreticilerin kullanımına olanak vermesidir.

Tanım: Lie grupları sürekli gruplardır yani grup elemanları sonsuzdur. Örneğin 2 boyutta dönme grubu olan $SO(2)$ grubunu ele aldığımızda; $R(\alpha,\beta) \in SO(2)$ (R: grup elemanı, α, β: parametre) burada vereceğimiz parametrelere (Parametreler dönme grubunda açılara karşılık gelir.) göre sonsuz tane grup elemanı tanımlanabilir. Diğer bir tanımla Lie grupları parametrelerine göre türevlenebilen gruplardır. Fizik yasaları çoğunlukla sürekli sistemler gerektirdiğinden Lie gruplarının önemi büyüktür.

1.1.2. Lie gruplarının bazı özellikleri

Lie Gruplarının Boyutu (d): Lie gruplarında, kesikli gruplara kıyasla parametreleri sonsuz olduğundan grup derecesi $|G|$ sonsuza gider. Bu sebepten Lie gruplarında grup derecesi kullanılmaz, bunun yerini boyut kavramı alır.

Lie grubu olan G için; $g(\phi_1,\phi_2,\phi_3,...,\phi_d) \in G$ gibi bir grup elemanını tanımlamak için gerekli en az birbirinden bağımsız parametre sayısına o grubun boyutu denir. Örneğin, uzayda dönme simetrisi olan grup $SO(3)$'tür. Bu grubun boyutu 3'tür , çünkü uzayda dönmeyi tanımlamak için en az 3 açı gerekir.

Kompakt Lie Grupları: Eğer $g(\phi_1,\phi_2,\phi_3,...,\phi_d) \in G$ grubunun parametre seti $\{\phi_i\}$ kapalı ve sınırlanmış ise G kompakt grup olarak adlandırılır. Örneğin, $SO(2)$ 2B dönme grubunu $R(\phi) \in SO(2)$ olarak tanımladığımızda, burada ϕ parametre ve değer aralığı $[0,2\pi]$ olur. Bu durum ise grubun hem kapalı hem de sınırlı değer aralığında olduğunu gösterir.

Lie Gruplarının Temsili: Bu gruplar matris gruplardır diğer bir deyişle; grup elemanları belirli boyutta birer matristirler. Örneğin $SU(2)$ için grup elemanları 2×2 matris iken $SO(3)$ için grup elemanları 3×3'lük bir matris ile temsil edilir.

1.1.3. Lie cebri

d-boyutlu Lie grubunun elemanları sürekli d tane parametreye bağlı olduğundan, grup elemanlarını d-boyutlu topolojik bir uzaydaki vektörler gibi düşünebiliriz. Böylelikle bu grubun herhangi bir noktasında bir tanjant uzayı tanımlayabiliriz. Tanımladığımız bu tanjant uzayına Lie cebri L denir. Bu cebir d boyutta ve grubun bütün özelliklerini içermektedir. Bu cebrin baz vektörleri üretici olarak adlandırılır. Örneğin Lie grubu olan $SO(n)$'in Lie cebri $so(n)$ gibi küçük harflerle gösterilebilir.

Lie gruplarının sürekliliğine dayanarak sonsuz küçük dönüşümleri tanımlayabiliriz. d-boyutlu G grubunun n-boyutlu temel temsili olan D ve bu temsildeki grup elemanı $D(g(\phi_1,\phi_2,...,\phi_d))\equiv D(g(\phi))$ birim eleman $(D(e)\equiv D(g(0))=I)$ civarında açılımı yapılırsa;

$$\begin{aligned} D(g(\phi)) &= D(g(0)) + \sum_{k=1}^{d}\phi_k \frac{\partial D(g)}{\partial \phi_k}|_{\phi=0} + O(\phi_k^2) \\ &= D(e) + i\sum_{k=1}^{d}\phi_k X_k + O(\phi_k^2) \\ &= I + i\phi_k X_k + O(\phi_k^2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Burada X_k operatörü grubun üreticisi olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$X_k \equiv -i\frac{\partial D(g)}{\partial \phi_k}|_{\phi=0} \tag{1.5}$$

Eğer $D(g(\phi))$'yi Taylor serisinde açarsak:

$$\begin{aligned} D(g(\phi)) &= I + (i)\phi_k X_k + (i)^2\frac{(\phi_k X_k)^2}{2!} + (i)^3\frac{(\phi_k X_k)^3}{3!} + ... \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(i)^l\frac{(\phi_k X_k)^l}{l!} \\ &= e^{i\phi_k X_k} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Böylece grup elemanının üstel gösterimini elde etmiş oluruz. Ayrıca her sürekli grubun elemanlarının karmaşık üstel bir gösterimde yazılabileceğini göstermiş olduk.

Lie Çarpımı: Lie çarpımı $[_,_]$ ve $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$ olarak tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. Kapalılık:
   $[X_1, X_2] \in L, \ \forall X_1, X_2 \in L$
2. Doğrusallık: $[\alpha X_1 + \beta X_2, X_3] = \alpha [X_1, X_3] + \beta [X_2, X_3], \ \forall X_1, X_2, X_3 \in L, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. Anti Simetri:
   $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$
4. Jacobi Özdeşliği:
   $\left[X_1,[X_2, X_3]\right] + \left[X_2,[X_3, X_1]\right] + \left[X_3,[X_1, X_2]\right] = 0,$
   $\forall X_1, X_2, X_3 \in L$

Eğer X_i herhangi bir matris temsilin bir üreticisi ise bu Lie çarpımı bilinen matris komütasyon ilişkisine döner.

Yapı Sabiti:

$$[X_1, X_2] = i\sum_{k=1}^{d} f_{ij}^{k} X_k, \quad i, j = 1, \ldots, d \tag{1.7}$$

Burada f_{ij}^{k} tensörü yapı sabiti olarak adlandırılır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$\begin{aligned} f_{ij}^{k} &= -f_{ji}^{k} \\ f_{ij}^{k} f_{mn}^{j} + f_{mj}^{k} f_{ni}^{j} + f_{nj}^{k} f_{im}^{j} &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Yapı sabitleri üreticilerden farklı olarak, seçilen grup temsilinden bağımsızdır.

Örneğin; Poincare grubundaki bir komütasyon bağıntısını ele alırsak;

$$\begin{aligned} [M_{ab}, P_c] &= i\left(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b\right) \\ &= i\left(\eta_{bc} \delta_a^d - \eta_{ac} \delta_b^d\right) P_d \end{aligned} \tag{1.9}$$

yapı sabiti ise denklem (1.10)'daki gibidir;

$$f^{d}_{ab,c} = \eta_{bc}\delta^{d}_{a} - \eta_{ac}\delta^{d}_{b} \tag{1.10}$$

1.1.4. Lie cebrinin bazı özellikleri

Lie cebri, bazında üreticilerin olduğu bir vektör uzayı olduğundan bu vektör uzayının kendisine ait altyapıları olabilir.

Basit Gruplar: İnvaryant özalt grupları olmayan gruplardır.

Yarı-Basit Gruplar: İnvaryant özalt grupları olabilen ve abelyan altgrupları olmayan gruplardır.

Casimir Operatörü: Cebirdeki bütün üreticilerle sıradeğiştiren bir operatördür. $\{C_i\}$ ile gösterilir. Verilen $\{X_i\}$ üretici seti için $\forall X_i \in L$ aşağıdaki şart sağlanır.

$$\left[C_i, X_j\right] = 0 \tag{1.11}$$

Örneğin yarı-basit gruplar için Casimir operatör aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;

$$C = \tilde{X}_A C^{AB} X_B \tag{1.12}$$

Burada X_A üreticilerin oluşturduğu sütun matrisini, C^{AB} Cartan matrisini göstermektedir. $\tilde{X}_A$ ilgili matrisin transpozesidir.

Cartan matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;

$$C_{AB} = f_{AC}{}^{D} f_{BD}{}^{C} \tag{1.13}$$

Burada f_{AC}^{D} yapı sabitlerini gösterir. Buradan bulunan matrisin tersi alındığında Cartan matrisi elde edilir;

$$C^{AB} = \left(C_{AB}\right)^{-1} \tag{1.14}$$

1.2. Grupların Bir Tensör Üretici İle Genişletilmesi

Buradaki motivasyonumuz Maxwell grubudur. Bu bölümde öncelikle Maxwell grubunu tanıtacağız daha sonra bir uygulama olarak Poincare grubunu bir tensör üretici ile genişleteceğiz.

1.2.1. Maxwell grubu

Maxwell grubu 1965 yılında S.L. Glashow tarafından adlandırılmıştır. 1970 yılında basılan makalede H. Bacry, PH. Combe ve J.L. Richard tarafından bu grubun kinematik özellikleri incelenmiştir. 1972 yılında ise R. Schrader bu grubu sistematik olarak inceleyen ilk kişi olmuştur. Sonraki yıllarda bu grupla ilgili çalışmalar devam etmiştir.

Bu grup Poincare grubu genişleterek elde edilmiş ve içinde elektromanyetik gerilme tensörü olan F^{ab} üreticisini barındırmaktadır.

Bu cebirin üreticileri aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlamaktadır;

$$\begin{aligned}
&\left[M_{ab},M_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}M_{bc}+\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab},P_{c}\right]=i\left(\eta_{bc}P_{a}-\eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a},P_{b}\right]=iF_{ab}\\
&\left[M_{ab},F_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}F_{bc}+\eta_{bc}F_{ad}-\eta_{ac}F_{bd}-\eta_{bd}F_{ac}\right)\\
&\left[F_{ab},F_{cd}\right]=0\\
&\left[F_{ab},P_{c}\right]=0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Burada F^{ab} üreticisi uzay-zamanın bir fonksiyonudur.

Şimdi Poincare grubundan Maxwell grubuna bir antisimetrik bir tensör üretici kullanarak nasıl geçileceğini inceleyelim.

Poincare grubunun üreticileri ve sağladıkları komütasyon bağıntıları aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned}
&M_{ab}=i\left(x_{a}\partial_{b}-x_{b}\partial_{a}\right)\\
&P_{a}=i\partial_{a}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[M_{ab}, M_{cd}\right] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab}, P_{c}\right] = i\left(\eta_{bc}P_{a} - \eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a}, P_{b}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Burada M_{ab}, P_a , sırasıyla; uzay-zamanda dönme ve öteleme'ye karşılık gelir.

Şimdi bu cebri antisimetrik Z_{ab} tensör üreticisi ile genişleteceğiz. Bu üretici Maxwel grubundaki F^{ab} üreticisinin aksine, uzay-zamanın değil bir antisimetrik θ^{ab} parametresine bağlı tensör uzayının fonksiyonudur.

Bu amaçla sırasıyla komütasyon bağıntıları bulunacak, grup elemanı tanımlanacak ve son olarak grup üreticileri bulunacak.

Genişletilmiş grubun komütasyon bağıntıları Maxwell grubu ile benzerlik kurularak aşağıdaki şekilde bulundu;

$$
\begin{aligned}
&\left[M_{ab}, M_{cd}\right] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab}, P_{c}\right] = i\left(\eta_{bc}P_{a} - \eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a}, P_{b}\right] = iZ_{ab}\\
&\left[M_{ab}, Z_{cd}\right] = i\left(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&\left[Z_{ab}, Z_{cd}\right] = 0\\
&\left[Z_{ab}, P_{c}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Üreticilere bağlı alanların sonsuz küçük dönüşümler altında nasıl dönüştüğünü bulmak için koset kavramını kullanacağız.

Koset parametrelerinin herhangi bir grup elemanı etkisi altındaki değişimi aşağıdaki şekildedir;

$$
g'K\left(x,\theta\right) = K\left(x',\theta'\right)h\left(\omega\right) \tag{1.19}
$$

$$
h\left(\omega\right) = e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.20}
$$

burada K koseti, g' ise herhangi bir grup elemanını gösterir.

Sonsuz küçük bir etki için grup elemanı aşağıdaki şekilde tanımlandı;

$$
g'\left(x,\theta,\omega\right) = e^{ia\cdot P}e^{i\varepsilon\cdot Z}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \tag{1.21}
$$

Genişletilmiş olan Poincare grubunun grup elemanı;

$$g(x,\theta,\omega) = e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{1.22}$$

Bu cebre ait diferansiyel üreticileri bulmak için aşağıdaki koseti kullandık;

$$K(x,\theta) = e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z} \tag{1.23}$$

Bu tanımlamaları yaptıktan sonra, $(x(x),\theta(x),\omega(x))$ alanlarının sırasıyla (a,ε,u) sonsuz küçük parametrelerine göre değişimi incelendi.

P_a öteleme dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}h &= e^{ia\cdot P}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z} \\ &= e^{i(x+a)\cdot P}e^{i\left(\theta^{ab}-\frac{i}{4}\left(a^a x^b - a^b x^a\right)\right)Z_{ab}} \end{aligned} \tag{1.24}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned} &\delta x^a = a^a \\ &\delta\theta^{ab} = -\tfrac{1}{4}\left(a^a x^b - a^b x^a\right) \\ &h = 1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Z_{ab} tensör üreticisi dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}h &= e^{i\varepsilon\cdot Z}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z} \\ &= e^{ix\cdot P}e^{i\left(\theta^{ab}+\varepsilon^{ab}\right)Z_{ab}} \end{aligned} \tag{1.26}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned} &\delta x^a = 0 \\ &\delta\theta^{ab} = \varepsilon^{ab} \\ &h = 1 \end{aligned} \tag{1.27}$$

M_{ab} açısal momentum dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}h &= e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z} \\ &= e^{i\left(x^a+u^a{}_b x^b\right)P_a}e^{i\left(\theta^{ab}+u_c{}^a\theta^{bc}-u_c{}^b\theta^{ac}\right)Z_{ab}}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \end{aligned} \tag{1.28}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a = u^a{}_b x^b \\
&\delta\theta^{ab} = u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac} \\
&h = e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \to \omega = u
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Bu işlemler sonucunda elde edilen bu değişimlerin toplamı ise aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a = a^a + u^a{}_b x^b \\
&\delta\theta^{ab} = \varepsilon^{ab} - \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) + (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac}) \\
&\omega^{ab} = u^{ab}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Buradan hareketle x ve θ 'nın dönüşümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
&x^{a\prime} = x^a + a^a + u^a{}_b x^b \\
&\theta^{ab\prime} = \theta^{ab} + \varepsilon^{ab} - \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) + (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac})
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Bu dönüşümler altında herhangi bir skaler alan $\Phi'\left(x'^a, \theta'^{ab}\right) = \Phi\left(x^a, \theta^{ab}\right)$ şeklinde değişmez kalacaktır.

(1.31) koordinat dönüşümü sonsuz küçük olduğundan aynı uzay-zaman noktasında skaler alanın Taylor açılımı aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\Phi'(x,\theta) &= \Phi\begin{pmatrix} x^a - a^a - u^a{}_b x^b, \\ \theta^{ab} - \varepsilon^{ab} + \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) - (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac}) \end{pmatrix} \\
&= \Phi(x,\theta) + \left(-a^a - u^a{}_b x^b\right)\partial_a\Phi(x,\theta) \\
&\quad + \left(-\varepsilon^{ab} + \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) - (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac})\right)\partial_{ab}\Phi(x,\theta) \\
&= \Phi(x,\theta) + \begin{pmatrix} a^a\left(-\partial_a + \tfrac{1}{2}x^b\partial_{ab}\right) + \varepsilon^{ab}\left(-\partial_{ab}\right) \\ -\tfrac{1}{2}u^{ab}\left(-\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right) - 2\left(\theta_a{}^c\partial_{bc} - \theta_b{}^c\partial_{ac}\right)\right) \end{pmatrix}\Phi(x,\theta)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Buradan skaler alandaki sonsuz küçük değişim aşağıdaki ifade ile karşılaştırıldığında;

$$\begin{aligned}
\delta\Phi(x,\theta) &= \Phi'(x,\theta) - \Phi(x,\theta) \\
&= \left(ia\cdot P + i\varepsilon\cdot Z - \tfrac{i}{2}u\cdot M\right)\Phi(x,\theta)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

genişletilmiş grubun elde edilen yeni üreticileri aşağıdaki gibidir;

$$
\begin{aligned}
P_a &= i(\partial_a - \tfrac{1}{2} x^b \partial_{ab}) \\
Z_{ab} &= i\partial_{ab} \\
M_{ab} &= i(x_a \partial_b - x_b \partial_a) + 2i(\theta_a{}^c \partial_{bc} - \theta_b{}^c \partial_{ac})
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Bu üreticiler komütasyon bağıntıları ve Jacobi özdeşliğini sağlamaktadır.

2. AYAR TEORİSİ OLARAK KÜTLEÇEKİMİ

2.1. Tarihsel Gelişim

1956'da R. Utiyama Lorentz grubunu (SO(3,1)) yerel inceleyerek Einstein alan denklemini elde etti. Bu sayede Utiyama uzay-zaman simetrilerinin yerel incelenmesiyle kütleçekim teorisinin elde edilebileceğini ilk olarak göstermiş oldu.

1961 yılında T.W.B. Kibble, Utiyamanın sonuçlarını genelleştirdi ve uzay-zaman simetrisi olarak Poincare grubunu kullandı. Kibble bu grubu yerel inceleyerek; Einstein-Cartan denklemi olarak da bilinen uzay-zamanda burulmayı içeren kütleçekimini elde etti. İlerleyen yıllarda ise diğer simetri grupları (DeSitter, Weyl, Konformal…) için de benzer çalışmalar yapıldı. Bu çalışmalar geometrik yollardan türetilmiş olan kütleçekimi denklemlerinin ayar teorisi ile tekrar elde edilebileceğini göstermiştir.

2.2. Kibble Yaklaşımı

Bu bölümde Utiyama ve Kibble'nin neler yaptıklarına başlamadan önce, onların yaptıklarını daha iyi anlamak için, ilk olarak global ve yerel dönüşümlerin nasıl kullanıldığını çizgisel dönüşümler altında inceleyeceğiz. Bu temelden sonra Poincare grubunu global ve yerel inceleyeceğiz.

Burada $\varphi_A(x)$ alan değişkenlerinin setinden oluşan;

$$L(x) = L\left(\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)\right) \tag{2.1}$$

Lagranjiyeni global ve yerel dönüşümler açısından değerlendireceğiz.

Burada $\varphi_{,\mu} = \partial_\mu \varphi$ 'dir.

Ayrıca burada $x' = x$ 'tir. Yani aynı uzay-zaman noktasında çalışılmaktadır.

İlk olarak Lagranjiyenin global dönüşümü inceleyeceğiz.

Burada parametreler uzay-zamandan bağımsızdır. Bunun için aşağıdaki dönüşüm tanımlanır;

$$\delta\varphi = i\varepsilon^a X_a \varphi \tag{2.2}$$

$$\delta\varphi_{,\mu} = i\varepsilon^a X_a \varphi_{,\mu} \tag{2.3}$$

Burada ε^a, n tane sabit sonsuz küçük parametre ve X^a ise aşağıdaki komütasyon ilişkilerini sağlayan n tane Lie grubu üreticileridir;

$$\left[X_a, X_b\right] = if_{ab}^c X_c \tag{2.4}$$

Seçtiğimiz Lagranjiyen bu dönüşümler altında değişmez kalmaktadır ve $\delta L = 0$ eşitliği ile aşağıdaki ilişkileri sağlar;

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) X_a \varphi + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) X_a \varphi_{,\mu} = 0 \tag{2.5}$$

Bu denklem n tane korunum yasasına işaret eder ve $J^{\mu}_{a,\mu} = 0$ eşitliği bilindiğinden "akım" aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$J^{\mu}_{a} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) X_a \varphi \tag{2.6}$$

Şimdi Lagranjiyenin yerel dönüşümler altındaki davranışına bakalım. Bunun için ε^a sonsuz küçük parametresinin $\varepsilon^a \to \varepsilon^a(x)$ gibi konumun keyfi bir fonksiyonu olarak düşüneceğiz. Burada dönüşüm;

$$\delta\varphi_{,\mu} = i\varepsilon^a X_a \varphi_{,\mu} + i\varepsilon^a{}_{,\mu} X_a \varphi \tag{2.7}$$

şeklindedir ve artık, aşağıdaki gösterildiği gibi, Lagranjiyen değişmez değildir;

$$\delta L = -i\varepsilon^a{}_{,\mu} J^{\mu}_{a} \tag{2.8}$$

Biz burada Lagranjiyenin değişmez kalmasını istiyoruz. Bunun için bazı değişiklikler yapmak zorundayız. Bu sebeple yerel dönüşümü global dönüşüme benzetmek için yeni bir türev tanımlanır;

$$\delta\varphi_{;\mu} = i\varepsilon^a X_a \varphi_{;\mu} \tag{2.9}$$

Burada $(;)$ ile gösterilen kovaryant türev olarak adlandırılır. Bu türevi sağlamak için yeni bir $A^a{}_\mu$ alanı tanımlanır. Kovaryat türev φ alanına aşağıdaki şekilde etki eder;

$$\varphi_{;\mu} = \varphi_{,\mu} + iA^a{}_\mu X_a \varphi \tag{2.10}$$

Burada $A^a{}_\mu$ alanının dönüşümü aşağıdaki şekildedir;

$$\delta A^a{}_\mu = -\varepsilon^b f^a_{bc} A^c{}_\mu - \varepsilon^a{}_{,\mu} \tag{2.11}$$

Bu yol ile Lagranjiyenin değişmez kalması sağlanır;

$$L'\left(\varphi, \varphi_{,\mu}, A^a{}_{,\mu}\right) = L\left(\varphi, \varphi_{;\mu}\right) \tag{2.12}$$

Kovaryant türevin uygulanmasıyla akım da değişir;

$$J'^{\mu}{}_a \equiv -\left(\frac{\partial L'}{\partial A^a{}_\mu}\right) \equiv -\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{;\mu}}\right) X_a \varphi \tag{2.13}$$

Burada akımın dönüşümü;

$$\delta J'^{\mu}{}_a = -\varepsilon^b f^c_{ba} J'^{\mu}{}_c \tag{2.14}$$

ve akımın kovaryant türevi sıfıra gider;

$$J'^{\mu}{}_{a;\mu} = J'^{\mu}{}_{a,\mu} - A^b{}_\mu f^c_{ba} J'^{\mu}{}_c = 0 \tag{2.15}$$

Yazılan kovaryant türev abelyan değildir. Buradan yola çıkarak aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\varphi_{;\mu\upsilon} - \varphi_{;\upsilon\mu} = iF^a_{\mu\upsilon} X_a \varphi \tag{2.16}$$

Burada;

$$F^a_{\mu\upsilon} = A^a{}_{\mu,\upsilon} - A^a{}_{\upsilon,\mu} - f^a_{bc} A^b{}_\mu A^c{}_\upsilon \tag{2.17}$$

Yukarıda belirtilen $F^a_{\mu\upsilon}$ aşağıdaki dönüşüm kuralına uyar;

$$\delta F^a_{\mu\upsilon} = \varepsilon^b f^a_{bc} F^c_{\mu\upsilon} \tag{2.18}$$

Bu durumda yazılabilecek en basit Lagranjiyen;

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} F^a_{\mu\upsilon} F_a^{\mu\upsilon} \tag{2.19}$$

olur.

2.2.1. Sonsuz küçük koordinat dönüşümü

Burada $\delta x \neq 0$ olduğunu düşüneceğiz. Bu amaçla x'in aşağıdaki gibi dönüştüğünü varsayarsak;

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{2.20}$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{2.21}$$

Burada Lagranjiyen artık konuma da bağlıdır;

$$L\left(\varphi(x), \varphi(x)_{,\mu}, x\right) \tag{2.22}$$

Bu Lagranjiyenin varyasyonu;

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}\right)\delta\varphi_{,\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\right)\delta x^\mu \tag{2.23}$$

φ alanının sabit varyasyonu aşağıdaki şekildedir;

$$\delta_0\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = \delta\varphi - \delta x^\mu \varphi_{,\mu} \tag{2.24}$$

Burada sabit varyasyon (δ_0), aynı uzay-zaman noktasındaki iki alanın dönüşümüne karşılık gelmektedir ve δ_0 ve ∂_μ abelyandır.

φ alanının türevinin varyasyonu aşağıdaki şekildedir;

$$\delta\varphi_{,\mu} = (\delta\varphi)_{,\mu} - (\delta x^\upsilon)_{,\mu}\,\varphi_{,\upsilon} \tag{2.25}$$

Eylem integrali;

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \tag{2.26}$$

Burada Ω bir uzay-zaman bölgesini işaret etmektedir.

Bu integralin dönüşüm altındaki şekli ise;

$$S'(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \,||\, \partial_{\upsilon} x'^{\mu} \,||\, \mathcal{L}(x') \tag{2.27}$$

Bu integral aşağıdaki şartlar altında değişmez kalmaktadır;

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\left(\delta x^{\mu}\right)_{,\mu} = \delta_0\mathcal{L} + \left(\mathcal{L}\delta x^{\mu}\right)_{,\mu} = 0 \tag{2.28}$$

2.2.2. Poincare dönüşümleri

Poincare (homojen olmayan Lorentz) grubunun global dönüşümleri aşağıdaki gibidir;

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\upsilon} x^{\upsilon} + a^{\mu} \tag{2.29}$$

$$\delta\varphi = -\tfrac{i}{2}\omega^{\mu\upsilon}\Sigma_{\mu\upsilon}\varphi \tag{2.30}$$

Burada a^{μ} ve $\omega^{\mu\upsilon} = -\omega^{\upsilon\mu}$ sonsuz küçük parametrelerdir. $\Sigma_{\mu\upsilon}$ matrisi ise;

$$\Sigma_{\mu\upsilon} = -\Sigma_{\upsilon\mu} \tag{2.31}$$

$$\left[\Sigma_{\mu\upsilon}, \Sigma_{\rho\sigma}\right] = i\left(\eta_{\mu\sigma}\Sigma_{\upsilon\rho} + \eta_{\upsilon\rho}\Sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\Sigma_{\upsilon\sigma} - \eta_{\upsilon\sigma}\Sigma_{\mu\rho}\right) \tag{2.32}$$

Bu dönüşümlere göre;

$$\delta\varphi_{,\mu} = -\tfrac{i}{2}\omega^{\mu\upsilon}\Sigma_{\mu\upsilon}\varphi_{,\mu} + i\omega^{\rho}{}_{\mu}\varphi_{,\rho} \tag{2.33}$$

Ayrıca $\left(\delta x^{\mu}\right)_{,\mu} = \omega^{\mu}{}_{\mu} = 0$ olduğundan $\delta L = 0$ olur ve aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\rho}} = L_{,\rho} - \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)\varphi_{,\rho} - \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}\right)\varphi_{,\mu\rho} = 0 \tag{2.34}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)\Sigma_{\rho\sigma}\varphi + \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}\right)\left(\Sigma_{\rho\sigma}\varphi_{,\mu} + \eta_{\mu\rho}\varphi_{,\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\varphi_{,\rho}\right) = 0 \tag{2.35}$$

Aşağıdaki korunum yasalarını dikkate aldığımızda;

$$\begin{aligned} &T^{\mu}_{\rho,\mu} = 0 \\ &\left(S^{\mu}_{\rho\sigma} - x_{\rho}T^{\mu}_{\sigma} + x_{\sigma}T^{\mu}_{\rho}\right)_{,\mu} = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Enerji-momentum tensörü;

$$T^{\mu}_{\rho} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}\right)\varphi_{,\rho} - \delta^{\mu}{}_{\rho}L \tag{2.37}$$

ve spin açısal momentum yoğunluğu aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$S^{\mu}_{\rho\sigma} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\mu}}\right)\Sigma_{\rho\sigma}\varphi \tag{2.38}$$

Şimdi Poincare grubunu yerel inceleyelim. Artık sonsuz küçük parametreler x'in bir fonksiyonudur;

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\upsilon}(x)x^{\upsilon} + a^{\mu}(x) \tag{2.39}$$

$$\delta\varphi(x) = -\tfrac{i}{2}\omega^{ij}(x)\Sigma_{ij}\varphi(x) \tag{2.40}$$

$$\delta_0\varphi(x) = i\delta x^{\mu}\varphi_{,\mu} - \tfrac{i}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\varphi \tag{2.41}$$

Burada koordinat ve alanların dönüşümlerini ayırt edebilmek için Latin indisleri kullanılmıştır.

$\varphi_{,\mu}$'nın dönüşümü aşağıdaki şekildedir;

$$\delta\varphi_{,\mu} = -\tfrac{i}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\varphi_{,\mu} - \tfrac{i}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}\Sigma_{ij}\varphi + \left(\delta x^{\upsilon}\right)_{,\mu}\varphi_{,\upsilon} \tag{2.42}$$

Bu dönüşüm kullanıldığında Lagranjiyenin varyasyonu aşağıdaki şekilde olmaktadır;

$$\delta L = -\left(\delta x^{\rho}\right)_{,\mu} J^{\mu}_{\rho} + \tfrac{i}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}\Sigma^{\mu}_{ij} \tag{2.43}$$

Yukarıdaki ifadeden görüldüğü gibi Lagranjiyen değişmez değildir. Burada öyle bir türev tanımlayalım ki Lagranjiyen değişmez kalsın yani $\delta L' = 0$ olsun. Bu amaçla

türev (kovaryant türev) operatörü $(;)$ tanımlanmıştır. Bu yeni türev sayesinde global Poincare'de olan alan dönüşümü burada da sağlanır;

$$\delta\varphi_{;k} = -\tfrac{i}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\varphi_{;k} + i\omega^{i}{}_{k}\varphi_{;i} \tag{2.44}$$

Aynı zamanda global Lorentz dönüşümünü sağlamak için de bir türev $(|)$ (kovaryant türev) yazabiliriz;

$$\varphi_{|\mu} = \varphi_{,\mu} - \tfrac{i}{2}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij}\varphi \tag{2.45}$$

$\varphi(x)$ alanının bu kovaryant türeve göre dönüşümü ise;

$$\delta\varphi_{|\mu} = -\tfrac{i}{2}\varepsilon^{ij}\Sigma_{ij}\varphi_{|\mu} + (\delta x^{\upsilon})_{,\mu}\varphi_{|\upsilon} \tag{2.46}$$

Burada $A^{ij}{}_{\mu}$ ise 24 yeni alan değişkenidir ve bu alanın değişimi aşağıdaki şekildedir;

$$\delta A^{ij}{}_{\mu} = \omega^{i}{}_{k}A^{kj}{}_{\mu} + \omega^{j}{}_{k}A^{ik}{}_{\mu} + \left(\delta x^{\upsilon}\right)_{,\mu}A^{ij}{}_{\upsilon} - \omega^{ij}{}_{,\mu} \tag{2.47}$$

Yazdığımız bu iki kovaryant türevin alanlara etkisi arasında aşağıdaki gibi bir ilişki yazılabilir;

$$\varphi_{;k} = h_{k}{}^{\mu}\varphi_{|\mu} \tag{2.48}$$

$$\varphi_{;k} = h^{\mu}_{k}\varphi_{,\mu} - \tfrac{i}{2}h^{\mu}_{k}A^{ij}{}_{\mu}\Sigma_{ij}\varphi \tag{2.49}$$

Burada h^{μ}_{k} 16 yeni alan değişkenidir ve bu alanın değişimi aşağıdaki şekildedir;

$$\delta h^{\mu}_{k} = \left(\delta x^{\mu}\right)_{,\upsilon}h^{\upsilon}_{k} - \omega^{i}{}_{k}h^{\mu}_{i} \tag{2.50}$$

$(|)$ kovaryant türevinin h^{μ}_{k} alanına etkisi aşağıdaki şekildedir;

$$h_{i}{}^{\mu}{}_{|\upsilon} = h_{i}{}^{\mu}{}_{,\upsilon} - A^{k}{}_{i\upsilon}h_{k}{}^{\mu} \tag{2.51}$$

Ayrıca h^{μ}_{i} alan değişkeninin tersini b^{i}_{μ} olarak tanımlarsak denklem (2.52)'deki ifadeler elde edilir;

$$b^{i}{}_{\mu}h_{i}{}^{\upsilon} = \delta_{\mu}{}^{\upsilon}$$
$$b^{i}{}_{\mu}h_{j}{}^{\mu} = \delta^{i}{}_{j} \tag{2.52}$$

Son durumda elde ettiğimiz alan dönüşümlerini global dönüşümlerdeki ifadeler ile karşılaştırırsak Lagranjiyenin değişmez kaldığını göreceğiz.

Bu durumda (|) kovaryant türevine göre aşağıdaki denklemi yazabiliriz;

$$\mathcal{L}' = \wp L' \tag{2.53}$$

Burada $\mathcal{L}$ invaryant Lagranjiyen yoğunluğudur, $\wp = \left[\det\left(h_{k}{}^{\mu}\right)\right]^{-1}$'dır.

Artık (|) kovaryant türevine göre eğriliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\varphi_{|\mu\upsilon} - \varphi_{|\upsilon\mu} = -\tfrac{i}{2}R^{ij}{}_{\mu\upsilon}\Sigma_{ij}\varphi \tag{2.54}$$

Burada işlemler yapıldığında eğrilik aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$R^{i}{}_{j\mu\upsilon} = A^{i}{}_{j\mu,\upsilon} - A^{i}{}_{j\upsilon,\mu} - A^{i}{}_{k\mu}A^{k}{}_{j\upsilon} + A^{i}{}_{k\upsilon}A^{k}{}_{j\mu} \tag{2.55}$$

(;) kovaryat türevine göre eğrilikleri aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz;

$$\varphi_{;kl} - \varphi_{;lk} = -\tfrac{i}{2}R^{ij}{}_{kl}\Sigma_{ij}\varphi + iC^{i}_{kl}\varphi_{;i} \tag{2.56}$$

Burada $R^{ij}{}_{kl}$ uzay-zamandaki eğriliğe, C^{i}_{kl} ise burulmaya karşılık gelmektedir. Gerekli hesaplar yapıldığında eğrilikler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$R^{ij}{}_{kl} = h^{\mu}_{k}h^{\upsilon}_{l}R^{ij}{}_{\mu\upsilon} \tag{2.57}$$

$$C^{i}{}_{kl} = \left(h^{\mu}_{k}h^{\upsilon}_{l} - h^{\mu}_{l}h^{\upsilon}_{k}\right)b^{i}{}_{\mu|\upsilon} \tag{2.58}$$

Bu durumda (;) kovaryant türevine göre aşağıdaki denklemi yazabiliriz;

$$\mathcal{L}_{0} = \wp L_{0} \tag{2.59}$$

Kibble son denklem için Lagranjiyeni aşağıdaki gibi yazmıştır;

$$L_{0} = \tfrac{1}{2}R \tag{2.60}$$

Burada $R = R^{ij}_{ij} = h_i^{\mu} h_j^{\upsilon} R^{ij}_{\mu\upsilon}$ 'dir.

Hareket denklemlerini bulmak için aşağıdaki eylem kullanılmıştır;

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_M \right) \tag{2.61}$$

Burada $\mathcal{L}_M \left(h_k^{\ \mu}, A^{ij}_{\ \ \mu} \right)$ madde alanını temsil eden Lagranjiyen yoğunluğudur.

Bu eylemin varyasyonu alındığında aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir;

$$\wp \left(R^{ik}_{\ \ jk} - \frac{1}{2} \delta^i_{\ j} R \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h_i^{\mu}} \delta h_i^{\mu} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \wp \left(h_i^{\ \mu} h_j^{\ \upsilon} - h_j^{\ \mu} h_i^{\ \mu} \right)_{|\upsilon} &= \wp \left(h_k^{\ \mu} C^k_{\ ij} - h_j^{\ \mu} C^k_{\ ik} - h_i^{\ \mu} C^k_{\ kj} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A^{ij}_{\ \ \mu}} \right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Kibble bu Lagranjiyen ile uzay-zamanda burulmayı da içeren Einstein-Cartan teorisini elde etmiştir;

Utiyama ise uzay-zamana ötelemeyi katmadığından, yani Lorentz grubunu kullandığından boş uzay için Einstein alan denklemini elde etmiştir.

$$R_{ab} - \tfrac{1}{2} \eta_{ab} R = 0 \tag{2.64}$$

2.3. Ayar Teorisinde Diferansiyel Geometrinin Kullanımı

2.3.1. Kısaca diferansiyel geometri

Bu bölümde kütleçekim teorisi için diferansiyel formlara, dış çarpım ve dış türeve kısa bir giriş yapacağız.

2.3.2. Diferansiyel dış çarpım

Diferansiyel ifadeleri aşağıdaki şekilde yazdığımızda bu "dış çarpım" olarak adlandırılır;

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \tag{2.65}$$

Bu yapı denklem (2.66) ve (2.67)'deki özelliklere sahiptir:

$$dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} = -dx^{\upsilon} \wedge dx^{\mu} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} \left(dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon}\right) \wedge dx^{\alpha} &= dx^{\mu} \wedge \left(dx^{\upsilon} \wedge dx^{\alpha}\right) \\ &= dx^{[\mu} \wedge dx^{\upsilon} \wedge dx^{\alpha]} \end{aligned} \tag{2.67}$$

2.3.3. Diferansiyel formlar

A, p adet diferansiyelin dış çarpımı ile oluşan vektör uzayının bir elemanıdır ve p-form olarak adlandırılır;

$$A = \tfrac{1}{p!} A_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \tag{2.68}$$

Burada $A_{\mu_1 \ldots \mu_p} = A_{[\mu_1 \ldots \mu_p]}$ gibi rankı p olan antisimetrik kovaryant bir tensördür. A skaler alanı bir sıfır-form'dur. $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ şeklinde yazdığımızda burada A_{μ} 1-form'dur. Antisimetrik 2-form olan $F_{\mu\upsilon} = -F_{\mu\upsilon}$, $F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\upsilon} dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon}$ şeklinde ifade edilir. Rankı daha yüksek olan formlar ise benzer şekilde yazılabilir.

Bir p-form olan A ve bir q-form olan B 'nin dış çarpımı bir $(p+q)$-form olur;

$$A \wedge B = \tfrac{1}{(p+q)!} A_{[\mu_1 \ldots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \ldots \mu_{p+q}]} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \tag{2.69}$$

Örneğin; $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ ve $B = B_{\mu} dx^{\mu}$ 1-formaların dış çarpımı $P = A \wedge B$ dir ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir;

$$P = \tfrac{1}{2} \left(A_{\mu} B_{\upsilon} - A_{\upsilon} B_{\mu}\right) dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \tag{2.70}$$

Bu işlem birleşme özelliğine sahiptir;

$$A \wedge \left(B \wedge C\right) = \left(A \wedge B\right) \wedge C \tag{2.71}$$

ve genelde komutatif değildir, bir p-form olan A ve bir q-form olan B'nin dış çarpımı aşağıdaki özelliği sağlar;

$$A \wedge B = \left(-1\right)^{pq} B \wedge A \tag{2.72}$$

Ayrıca skalerler dış çarpımlar üzerinde dağılma özelliğine sahiptir;

$$(\alpha A + \beta B) \wedge C = \alpha (A \wedge C) + \beta (B \wedge C) \tag{2.73}$$

Burada α ve β skaler, A ve B aynı ranka sahip formlardır.

Genel görelilikte sıkça kullanılan vierbein formlarına girdiğimizde ise;

$$g_{\mu\upsilon}(x) = e_{\mu}^{\ a}(x) e_{\upsilon}^{\ b}(x) \eta_{ab} \tag{2.74}$$

$$\eta^{ab} = g^{\mu\upsilon}(x) e_{\mu}^{\ a}(x) e_{\upsilon}^{\ b}(x) \tag{2.75}$$

Burada $g_{\mu\upsilon}$ seçilen manifolda ait metrik tensör, η_{ab} ise düz yerel tanjant uzayına ait metrik tensördür ve $\mathrm{diag}(\eta_{ab}) = (1,-1,-1,-1)$; Yunan harfleri holonomik uzaysal indislerdir, Latin harfleri ise düz uzay indisleridir.

Vierbeinleri temel çerçevede aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz;

$$e^{\sigma} = e_{\mu}^{\ \sigma} dx^{\mu} \tag{2.76}$$

Bir genel p-form olan A'yı aşağıdaki şekilde gösterebiliriz;

$$A = \tfrac{1}{p!} A_{\sigma_1 \ldots \sigma_p} e^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma_p} \tag{2.77}$$

holonomik ve anholonomik bileşenlerini de yazarsak;

$$A_{\mu_1 \ldots \mu_p} = A_{\sigma_1 \ldots \sigma_p} e_{\mu_1}^{\ \sigma_1} \wedge \ldots \wedge e_{\mu_p}^{\ \sigma_p} \tag{2.78}$$

şeklinde gösterilir.

2.3.4. Dış türev

Diferansiyel formları kullanmak için bir de "dış türev" tanımını yapmamız gerekecek.

Bir p-form olan A'nın dış türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$dA = \tfrac{1}{(p+1)!} \partial_{[\upsilon} A_{\mu_1 \ldots \mu_p]} dx^{\upsilon} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \tag{2.79}$$

Örneğin, bir sıfır form olan φ'nin dış türevi bir 1-form'dur. Aşağıdaki ifadeden görülüyor ki $d\varphi$ bildiğimiz gradyente denktir;

$$d\varphi = \left(\partial_\mu \varphi\right) dx^\mu \tag{2.80}$$

Bir 1-form olan $A_\mu dx^\mu$'nın dış türevi bir 2-form'dur. $F = dA$ aşağıdaki ifadeden görülebileceği gibi A'nın rotasyoneline denktir;

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\upsilon - \partial_\upsilon A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\upsilon \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ayrıca bir 1-form'un 2. türevi sıfıra eşittir;

$$d^2 A = d\left(dA\right) = \partial_{[\mu}\partial_\upsilon A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p]} dx^\mu \wedge dx^\upsilon \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p} = 0 \tag{2.82}$$

Çünkü $\partial_{[\mu}\partial_{\upsilon]}\psi = 0$'dır. Eğer $dF = 0$ ise buradaki p-form olan F "kapalı" olarak adlandırılır.

Ayrıca son olarak dış türev aşağıdaki ifadeyi sağlar;

$$d\left(A \wedge B\right) = dA \wedge B + \left(-1\right)^p A \wedge dB \tag{2.83}$$

Burada A; p-form, B; q-form'dur.

2.3.5. Ayar teorisinde kullanımı

Bu uygulamada geleneksel ayar teorisini diferansiyel formlarla ifade edeceğiz.

G bir Lie grubu ise X_A üreticileri aşağıdaki komütasyonu sağlarlar;

$$\left[X_A, X_B\right] = i f_{AB}^C X_C \tag{2.84}$$

(Burada f_{AB}^C, G grubunun yapı sabitleridir ve büyük Latin harfleri grup manifoldunu temsil eder).

Ayar teorisini G grubunun yerel simetrisi ile formüle edebilmek için öncelikle bir $\mathcal{A}_\mu^A$ ayar alanı tanımlıyoruz. Bu ayar alanını aşağıdaki gibi bir ayar potansiyeli şeklide yazabiliriz;

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu^A X_A dx^\mu \tag{2.85}$$

Daha sonra kovaryant dış türev aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$\mathrm{D} = \mathrm{d} + \mathrm{i}\mathbb{A} \tag{2.86}$$

ve iki kovaryant türevin dış çarpımı 2-formdur. Bunu bir skaler alana uyguladığımızda;

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathbb{F}\varphi &= (\mathrm{D} \wedge \mathrm{D})\varphi \\ &= \mathrm{d}^2\varphi + \mathrm{i}\mathrm{d}(\mathbb{A}\varphi) + \mathrm{i}\mathbb{A} \wedge \mathrm{d}\varphi - \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}\varphi \end{aligned} \tag{2.87}$$

Burada $\mathrm{d}^2\varphi = 0$ 'dır ve denklem (2.83)'ü dikkate aldığımızda;

$$\mathrm{d}(\mathbb{A}\varphi) = (\mathrm{d}\mathbb{A})\varphi - \mathbb{A} \wedge \mathrm{d}\varphi \tag{2.88}$$

elde edilir. Bu denklemi denklem (2.87)'de yerine yazdığımızda;

$$\mathrm{i}\mathbb{F}\varphi = \mathrm{i}(\mathrm{d}\mathbb{A})\varphi - \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}\varphi \tag{2.89}$$

ve buradan da eğriliği elde ederiz;

$$\mathbb{F} = \mathrm{d}\mathbb{A} + \mathrm{i}\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \tag{2.90}$$

Eğriliği $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{\mathrm{A}}\mathrm{X}_{\mathrm{A}}$ ve ayar alanını $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathrm{A}}\mathrm{X}_{\mathrm{A}}$ denklem (2.90)'a eklersek;

$$\mathbb{F}^{\mathrm{A}}\mathrm{X}_{\mathrm{A}} = (\mathrm{d}\mathbb{A}^{\mathrm{A}})\mathrm{X}_{\mathrm{A}} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathbb{A}^{\mathrm{B}} \wedge \mathbb{A}^{\mathrm{C}}[\mathrm{X}_{\mathrm{B}}, \mathrm{X}_{\mathrm{C}}] \tag{2.91}$$

Burada Lie cebrinin özelliklerini kullanırsak;

$$\mathbb{F}^{\mathrm{A}} = \mathrm{d}\mathbb{A}^{\mathrm{A}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{f}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BC}}\mathbb{A}^{\mathrm{B}} \wedge \mathbb{A}^{\mathrm{C}} \tag{2.92}$$

elde edilir. Uzaysal indisleri eklemek istediğimizde ise $\mathbb{F}^{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\mathbb{F}^{\mathrm{A}}_{\mu\upsilon}\mathrm{dx}^{\mu} \wedge \mathrm{dx}^{\upsilon}$ ve $\mathbb{A}^{\mathrm{A}} = \mathbb{A}^{\mathrm{A}}_{\mu}\mathrm{dx}^{\mu}$ denklemleri denklem (2.92)'ye eklenir ve aşağıdaki şekli alır;

$$\mathbb{F}^{\mathrm{A}}_{\mu\upsilon} = \partial_{\mu}\mathbb{A}^{\mathrm{A}}_{\upsilon} - \partial_{\upsilon}\mathbb{A}^{\mathrm{A}}_{\mu} - \mathrm{f}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BC}}\mathbb{A}^{\mathrm{B}}_{\mu}\mathbb{A}^{\mathrm{C}}_{\upsilon} \tag{2.93}$$

Sonuç olarak bir invaryant eylem yazmak için; tanımlanan ayar alanına göre bulduğumuz bu eğrilik kullanılabilir.

2.3.6. Poincare cebrinin ayar teorisi

Bu bölümde Ayar Teorisinin bir Poincare grubu üzerinde basit bir kullanımını göreceğiz.

Poincare cebrinin üreticileri; $X_A = \{P_a, M_{ab}\}$ 'dir. Burada P_a öteleme, antisimetrik M_{ab} ise Lorentz tipi dönmeye karşılık geliyor. Bu üreticilerin ayar alanları sırasıyla e^a ve ω^{ab} 'dir. Bu ayar alanlarının bütün şekilde gösterimi ise:

$$\mathbb{A} = \{e^a, \omega^{ab}\} \tag{2.94}$$

şeklindedir. Burada;

$$e^a = e_\mu{}^a dx^\mu \quad , \quad \omega^{ab} = \omega_\mu{}^{ab} dx^\mu \tag{2.95}$$

Ayrıca buradaki e^a vierbein alanı ve ω^{ab} Lorentz bağlantı elemanıdır.

Poincare grubuna göre eğrilik aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = F^a P_a - \tfrac{1}{2} R^{ab} M_{ab} \tag{2.96}$$

Burada $\mathbb{F}^A = \{F^a, -\tfrac{1}{2} R^{ab}\}$ şeklindedir.

Poincare grubunun komütasyon ilişkileri aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac}) \\ [M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \\ [P_a, P_b] &= 0 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Grubun eğriliklerini bulmak için öncelikle yapı sabitlerini bulalım;

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= i f^{ik}_{ab,cd} M_{ik} \\ [M_{ab}, P_c] &= i f^{d}_{ab,c} P_d \end{aligned} \tag{2.98}$$

Ve bu ilişkilere göre yapı sabitleri;

$$\begin{aligned} f^{ik}_{ab,cd} &= \eta_{ad}\delta^i_b\delta^k_c + \eta_{bc}\delta^i_a\delta^k_d - \eta_{ac}\delta^i_b\delta^k_d - \eta_{bd}\delta^i_a\delta^k_c \\ f^{d}_{ab,c} &= \eta_{bc}\delta^d_a - \eta_{ac}\delta^d_b \end{aligned} \tag{2.99}$$

Bu yapı sabitlerine göre eğrilikleri bulmak için öncelikle yapı denklemlerini bulalım;

M_{ab} için;

$$\begin{aligned} R^{ab} &= d\omega^{ab} + \tfrac{1}{4} f^{ab}_{cd,ef}\omega^{cd} \wedge \omega^{ef} \\ &= d\omega^{ab} + \omega^{a}_{\ c} \wedge \omega^{cb} \end{aligned} \tag{2.100}$$

P_a için;

$$\begin{aligned} F^{a} &= de^{a} + \tfrac{1}{2} f^{a}_{bc,d}\omega^{bc} \wedge e^{d} \\ &= de^{a} + \omega^{a}_{\ d} \wedge e^{d} \end{aligned} \tag{2.101}$$

Eğriliklere ulaşmak için aşağıdaki denklemleri kullanacağız;

$$\begin{aligned} F^{a} &= F^{a}_{\mu\upsilon} dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \\ R^{ab} &= \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \end{aligned} \tag{2.102}$$

Yapı denklemlerinde bulduğumuz ifadeleri dış türeve göre açıp yukarıdaki denklemlerle karşılaştırdığımızda aşağıdaki eğrilikleri elde ederiz;

$$\begin{aligned} F^{a}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} e^{a}_{\upsilon]} + w^{a}_{[\mu|b} e^{b}_{\upsilon]} \\ R^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]} \end{aligned} \tag{2.103}$$

Bu ifadeleri Genel Görelilik Teorisi'ndeki ifadelerle karşılaştırdığımızda $R^{a}_{\mu\upsilon}$ burulmaya (torsion), $R^{ab}_{\mu\upsilon}$ ise Riemann-Cartan eğrilik tensörüne karşılık gelmektedir.

Böylece Poincare grubuna e^{a} ve ω^{ab} ayar alanları ekleyerek ve grubun komütasyon ilişkilerini kullanarak bu gruba ait uzay-zamandaki eğrilikleri elde etmiş olduk.

Bu yöntem; bir manifoldun geometrik yapısıyla, bir simetri grubunun cebirsel yapısı arasında bir ilişki olduğunu açık olarak göstermektedir.

Elde ettiğimiz sonuçlarda burulmayı sıfır ($R^{a} = 0$) alırsak Genel Görelilik Teorisini elde ederiz. Bunun için öncelikle Einstein eylemini yazalım;

$$S = \tfrac{1}{4\kappa} \int R^{ab} \wedge e^{c} \wedge e^{d} \varepsilon_{abcd} \tag{2.104}$$

Bu eylemi uzaysal indislerle yazarsak;

$$S = \frac{1}{4\kappa}\int R^{ab}_{\mu\upsilon} e^{c}_{\alpha} e^{d}_{\beta} dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \varepsilon_{abcd} \tag{2.105}$$

şeklinde olur. Burada aşağıdaki eşitlikleri kullandığımızda;

$$\begin{aligned} & e^{c}_{\alpha} e^{d}_{\beta} \varepsilon_{abcd} = \varepsilon_{ab\alpha\beta} \\ & dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = \varepsilon^{\mu\upsilon\alpha\beta} d^4x \\ & \varepsilon_{ab\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\upsilon\alpha\beta} = -2e e^{\mu\upsilon}_{ab} \end{aligned} \tag{2.106}$$

Eylem aşağıdaki şekli alır;

$$S = -\frac{1}{8\kappa}\int R^{ab}_{\mu\upsilon} 2e e^{\mu\upsilon}_{ab} d^4x \tag{2.107}$$

Burada;

$$\begin{aligned} & e = \det\left(e^{a}_{\mu}\right) = \sqrt{-\det\left(g_{\mu\upsilon}\right)} = \sqrt{-g} \\ & e^{ab}_{\mu\upsilon} = 2e^{[\mu}_{a} e^{\upsilon]}_{b} \\ & R = e^{[\mu}_{a} e^{\upsilon]}_{b} R^{ab}_{\mu\upsilon} \end{aligned} \tag{2.108}$$

sonuçlarını kullanırsak aşağıdaki eylemi elde ederiz;

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x \sqrt{-g} R \tag{2.109}$$

Elde edilen bu eylem Einstein-Hilbert eylemi olarak adlandırılır.

3. TENSÖREL GENİŞLETİLMİŞ GRUPLARIN AYAR TEORİSİ

Bu bölümde genişletilmiş basit Maxwell, yarı-basit Maxwell, Ads-Maxwell grubunun yerel incelenmesini kısaca tanıtacağız. Daha sonra Weyl grubunu antisimetrik bir tensör üretici ile genişletip yerel incelemesini yapacağız.

3.1. Basit Maxwell Grubunun Ayar Teorisi

Poincare cebrinin üreticileri; uzay-zamanda dönme (M_{ab}) ve öteleme (P_a)'dir ve bunların diferansiyel işlemci realizasyonu aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned} M_{ab} &= i\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right) \\ P_a &= i\partial_a \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bu üreticiler aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar;

$$\begin{aligned} \left[M_{ab},M_{cd}\right] &= i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right) \\ \left[M_{ab},P_c\right] &= i\left(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\right) \\ \left[P_a,P_b\right] &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Poincare grubuna ait herhangi bir grup elemanının üstel parametrizasyonunu,

$$g\left(x,\omega\right) = e^{ix\cdot P}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.3}$$

olacak şekilde seçtik.

Şimdi öncelikli olarak Poincare cebrini antisimetrik Z_{ab} tensör üreticisi ile genişletelim. Bu grup Z_{ab} anti-simetrik tensör üreticisi ile aşağıdaki şekilde genişletilebilir;

$$
\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&[M_{ab}, P_c] = i\left(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\right)\\
&[P_a, P_b] = iZ_{ab}\\
&[M_{ab}, Z_{cd}] = i\left(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&[Z_{ab}, Z_{cd}] = 0\\
&[Z_{ab}, P_c] = 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Bu cebrin kapalılığı Jacobi özdeşliklerini kullanılarak kontrol edildi.

Genişletilmiş olan Poincare grubunun herhangi bir elemanı aşağıdaki şekilde seçtik;

$$g(x,\theta,\omega) = e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.5}$$

ve yeni üreticilerin diferansiyel realizasyonu aşağıdaki şekilde bulundu;

$$
\begin{aligned}
&M_{ab} = i\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a + 2\left(\theta_a{}^c\partial_{bc} - \theta_b{}^c\partial_{ac}\right)\right)\\
&P_a = i\left(\partial_a - \tfrac{1}{2}x^b\partial_{ab}\right)\\
&Z_{ab} = i\partial_{ab}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Bu genişletilen simetri $\mathbb{A}$ ayar alanı tanımlandığında yerel olarak incelenebilir;

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^A X_A = e^a P_a + \theta^{ab}Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\omega^{ab}M_{ab} \tag{3.7}$$

Burada X_A grup üreticilerini göstermektedir. Ayrıca uzaysal koordinatlar eklendiğinde;

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu,\ \theta^{ab} = \theta^{ab}_\mu dx^\mu,\ \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\left(e^a_\mu, \theta^{ab}_\mu, \omega^{ab}_\mu\right)$ üreticilere ait ayar alanlarıdır.

Buna göre ayar alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathbb{A}_\mu = e^a_\mu P_a + \theta^{ab}_\mu Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\omega^{ab}_\mu M_{ab} \tag{3.9}$$

Ayar alanlarının grup dönüşümü altındaki davranışını bulmak için yeni bir $\zeta(x)$ alanı tanımladık;

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \zeta^{A}(x)X_{A} \\ &= y^{a}(x)P_{a} + \phi^{ab}(x)Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\tau^{ab}(x)M_{ab}\end{aligned} \tag{3.10}$$

ve ayar alanının sonsuz küçük ayar dönüşümü aşağıdaki ifadeden bulunur;

$$\delta\mathbb{A}_{\mu} = -\partial_{\mu}\zeta - i\left[\mathbb{A}_{\mu}, \zeta\right] \tag{3.11}$$

Ayrıca ayar alanını üreticiler bazında yazdığımızda;

$$\delta\mathbb{A}_{\mu} = \delta e_{\mu}^{a}P_{a} + \delta\theta_{\mu}^{ab}Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\delta\omega_{\mu}^{ab}M_{ab} \tag{3.12}$$

aşağıdaki dönüşümleri elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}\delta e_{\mu}^{a} &= -\partial_{\mu}y^{a} + e_{\mu}^{c}\tau^{a}{}_{c} + \omega_{\mu\ c}^{a}y^{c} \\ \delta\theta_{\mu}^{ab} &= -\partial_{\mu}\phi^{ab} + e_{\mu}^{[a}y^{b]} - 2\theta_{\mu}^{[a|d}\tau_{d}{}^{b]} + 2\omega_{\mu}^{c[b}\phi^{a]}{}_{c} \\ \delta\omega_{\mu}^{ab} &= -\partial_{\mu}\tau^{ab} + 2\omega_{\mu}^{c[b}\tau^{a]}{}_{c}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ayar alanlarının dönüşümlerini bulduğumuza göre artık eğrilikleri ve bu eğriliklerin dönüşümlerini bulabiliriz.

Eğrilik tensörü aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + i\mathbb{A}\wedge\mathbb{A} = d\mathbb{A} + \tfrac{i}{2}\left[\mathbb{A}, \mathbb{A}\right] \tag{3.14}$$

Daha önce tanımladığımız ayar alanını yukarıdaki denklemde yerine yazarsak ve burada $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{A}X_{A} = F^{a}P_{a} + F^{ab}Z_{ab} - \tfrac{1}{2}R^{ab}M_{ab}$ eşitliğini kullanırsak tanjant uzayındaki eğrilikleri buluruz;

$$\begin{aligned}F^{a} &= de^{a} + \omega^{a}{}_{b}\wedge e^{b} \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\wedge\omega^{cb} \\ F^{ab} &= d\theta^{ab} - \tfrac{1}{2}e^{a}\wedge e^{b} + 2\omega^{a}{}_{c}\wedge\theta^{cb}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Uzaysal koordinatları eklemek için $\mathbb{F}^{A}$'yı aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\mathbb{F}^{A} = \tfrac{1}{2}\mathbb{F}_{\mu\upsilon}^{A}dx^{\mu}\wedge dx^{\upsilon} \tag{3.16}$$

Üreticilere bağlı ayar alanlarını açık bir şekilde yazdığımızda aşağıdaki gibi uzaysal koordinatlara sahip eğrilikler elde edilir;

$$
\begin{aligned}
F^{a}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} e^{a}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|b} e^{b}_{\upsilon]} \\
R^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]} \\
F^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} - \tfrac{1}{2} e^{a}_{[\mu} e^{b}_{\upsilon]} + 2\omega^{a}_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Şimdi elde ettiğimiz bu eğriliklerin dönüşümünü bulabiliriz. Bunun için;

$$
\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = i\left[\zeta, \mathbb{F}_{\mu\upsilon}\right] \tag{3.18}
$$

ifadesi kullanılır burada;

$$
\mathbb{F}_{\mu\upsilon} = F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.19}
$$

olarak ele alınır.

Eğriliklerin dönüşümü aşağıdaki gibi dikkate alınırsa;

$$
\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = \delta F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.20}
$$

aşağıdaki dönüşümler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\delta F^{a}_{\mu\upsilon} &= -y^{c} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} + \tau^{a}{}_{c} F^{c}_{\mu\upsilon} \\
\delta F^{ab}_{\mu\upsilon} &= -y^{a} F^{b}_{\mu\upsilon} + 2\phi^{a}{}_{c} R^{ab}_{\mu\upsilon} - 2\tau^{ab} F^{a}_{\mu\upsilon\, b} \\
\delta R^{ab}_{\mu\upsilon} &= -2\tau^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Maxwell kütleçekimini R^{ab} ve F^{ab} çiftini kombinasyonu ile kurulabiliriz;

$$
\mathcal{L}_{1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \tag{3.22}
$$

$$
\mathcal{L}_{2} = \frac{1}{2} R^{ab} \wedge R_{ab} \tag{3.23}
$$

$$
\mathcal{L}_{3} = \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} \tag{3.24}
$$

$$
\mathcal{L}_{4} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \tag{3.25}
$$

$$
\mathcal{L}_{5} = R^{ab} \wedge F_{ab} \tag{3.26}
$$

$$\mathcal{L}_6 = \frac{1}{2} F^{ab} \wedge F_{ab} \tag{3.27}$$

Burada $\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$ bilinen kütleçekim Lagranjiyenleridir. Diğerleri ise, yeni alandan kaynaklanan katkılardır.

3.2. Yarı-Basit Genişletilmiş Poincare Grubunun Ayar Teorisi

Bu grup Z_{ab} anti-simetrik tensör üreticisi ile aşağıdaki şekilde genişletilebilir;

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&[M_{ab}, P_c] = i\left(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\right)\\
&[P_a, P_b] = iZ_{ab}\\
&[M_{ab}, Z_{cd}] = i\left(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&[Z_{ab}, Z_{cd}] = i\left(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&[Z_{ab}, P_c] = i\left(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Bu cebrin kapalılığı Jacobi özdeşliklerini kullanılarak kontrol edildi.

Genişletilmiş olan Poincare grubunun herhangi bir elemanı aşağıdaki şekilde seçtik;

$$g(x,\theta,\omega) = e^{ix\cdot P} e^{i\theta\cdot Z} e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.29}$$

Bu genişletilen simetri $\mathcal{A}$ ayar alanı tanımlandığında yerel olarak incelenebilir;

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^A X_A = e^a P_a + \theta^{ab} Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab} \tag{3.30}$$

Burada X_A grup üreticilerini göstermektedir. Ayrıca uzaysal koordinatlar eklendiğinde;

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu,\ \theta^{ab} = \theta^{ab}_\mu dx^\mu,\ \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{3.31}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\left(e^a_\mu, \theta^{ab}_\mu, \omega^{ab}_\mu\right)$ üreticilere ait ayar alanlarıdır.

Buna göre ayar alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathcal{A}_\mu = e^a_\mu P_a + \theta^{ab}_\mu Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\omega^{ab}_\mu M_{ab} \tag{3.32}$$

Üreticilere ait ayar alanlarının grup dönüşümü altındaki davranışını bulmak için yeni bir $\zeta(x)$ alanı tanımladık;

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \zeta^{A}(x)X_{A} \\ &= y^{a}(x)P_{a} + \phi^{ab}(x)Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\tau^{ab}(x)M_{ab}\end{aligned} \tag{3.33}$$

ve ayar alanının sonsuz küçük ayar dönüşümü aşağıdaki ifadeden bulunur;

$$\delta\mathcal{A}_{\mu} = -\partial_{\mu}\zeta - i\left[\mathcal{A}_{\mu}, \zeta\right] \tag{3.34}$$

Ayrıca ayar alanını üreticiler bazında yazdığımızda;

$$\delta\mathcal{A}_{\mu} = \delta e_{\mu}^{a}P_{a} + \delta\theta_{\mu}^{ab}Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\delta\omega_{\mu}^{ab}M_{ab} \tag{3.35}$$

aşağıdaki dönüşümleri elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}\delta e_{\mu}^{a} &= -\partial_{\mu}y^{a} + e_{\mu}^{c}\tau^{a}{}_{c} + \omega_{\mu\ c}^{a}y^{c} + 2e_{\mu}^{c}\phi^{a}{}_{c} + 2\theta_{\mu\ c}^{a}y^{c} \\ \delta\theta_{\mu}^{ab} &= -\partial_{\mu}\phi^{ab} + e_{\mu}^{[a}y^{b]} - 2\theta_{\mu}^{[a|d}\tau_{d}{}^{b]} + 2\omega_{\mu}^{c[b}\phi^{a]}{}_{c} + 4\theta_{\mu}^{c[b}\phi^{a]}{}_{c} \\ \delta\omega_{\mu}^{ab} &= -\partial_{\mu}\tau^{ab} + 2\omega_{\mu}^{c[b}\tau^{a]}{}_{c}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ayar alanlarının dönüşümlerini bulduğumuza göre artık eğrilikleri ve bu eğriliklerin dönüşümlerini bulabiliriz.

Eğrilik tensörü aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + i\mathcal{A}\wedge\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \tfrac{i}{2}\left[\mathcal{A}, \mathcal{A}\right] \tag{3.37}$$

Daha önce tanımladığımız ayar alanını yukarıdaki denklemde yerine yazarsak ve burada $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{A}X_{A} = F^{a}P_{a} + F^{ab}Z_{ab} - \tfrac{1}{2}R^{ab}M_{ab}$ eşitliğini kullanırsak tanjant uzayındaki eğrilikleri buluruz;

$$\begin{aligned}F^{a} &= de^{a} + \omega^{a}{}_{b}\wedge e^{b} + 2\theta^{a}{}_{b}\wedge e^{b} \\ F^{ab} &= d\theta^{ab} - \tfrac{1}{2}e^{a}\wedge e^{b} + 2\omega^{a}{}_{c}\wedge\theta^{cb} + 4\theta^{a}{}_{c}\wedge\theta^{cb} \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\wedge\omega^{cb}\end{aligned} \tag{3.38}$$

Uzaysal koordinatları eklemek için $\mathcal{F}^{A}$'yı aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\mathcal{F}^{A} = \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\upsilon}^{A}dx^{\mu}\wedge dx^{\upsilon} \tag{3.39}$$

Üreticilere bağlı ayar alanlarını açık bir şekilde yazdığımızda aşağıdaki gibi uzaysal koordinatlara sahip eğrilikler elde edilir;

$$\begin{aligned} F^{a}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} e^{a}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|b} e^{b}_{\upsilon]} + 2\theta^{a}_{[\mu|b} e^{b}_{\upsilon]} \\ F^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} - \tfrac{1}{2} e^{a}_{[\mu} e^{b}_{\upsilon]} + 2\omega^{a}_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} + 4\theta^{a}_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} \\ R^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Şimdi elde ettiğimiz bu eğriliklerin dönüşümünü bulabiliriz. Bunun için;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = i\left[\zeta, \mathbb{F}_{\mu\upsilon}\right] \tag{3.41}$$

ifadesi kullanılır burada;

$$\mathbb{F}_{\mu\upsilon} = F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.42}$$

olarak ele alınır.

Eğriliklerin dönüşümü aşağıdaki gibi dikkate alınırsa;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = \delta F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.43}$$

aşağıdaki dönüşümler elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta F^{a}_{\mu\upsilon} &= -y^{c} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} + \tau^{a}{}_{c} F^{c}_{\mu\upsilon} - 2y^{c} F^{a}_{\mu\upsilon\, c} + 2\phi^{a}{}_{c} F^{c}_{\mu\upsilon} \\ \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} &= -y^{a} F^{b}_{\mu\upsilon} + 2\phi^{a}{}_{c} R^{ab}_{\mu\upsilon} - 2\tau^{ab} F^{a}_{\mu\upsilon\, b} - 4\phi^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} \\ \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} &= -2\tau^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Burada Maxwell grubu Yarı-Basit olduğundan Maxwell kütleçekimini Yang-Mills tipinde oluşturabiliriz;

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{4} h_{kl} F_{\mu\upsilon}{}^{l} F_{\rho\lambda}{}^{k} g^{\mu\rho} g^{\upsilon\lambda} \tag{3.45}$$

Burada $e = \sqrt{-\det\left(g^{\mu\upsilon}\right)}$, h_{kl} Cartan matrisi, $F_{\mu\upsilon}{}^{l}$ eğrilik ve $g^{\mu\upsilon}$ metriği göstermektedir. Burada Cartan matrisi yerine yazıldığında aşağıdaki Lagranjiyen elde edilir;

$$\mathcal{L} = \frac{e}{4}\left(F_{\mu\upsilon}{}^{a} F_{\rho\lambda|a} + 4R_{\mu\upsilon}{}^{ab} F_{\mu\upsilon}{}^{ab} - \frac{2}{3} F_{\mu\upsilon}{}^{ab} F_{\rho\lambda|ab} \right) \tag{3.46}$$

3.3. AdS-Maxwell Grubunun Ayar Teorisi

Anti-DeSitter grubunun üreticileri; uzay-zamanda dönme(M_{ab}) ve öteleme (P_a)'dır. Bu üreticiler aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar;

$$\begin{aligned}
&\left[M_{ab},M_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}M_{bc}+\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab},P_{c}\right]=i\left(\eta_{bc}P_{a}-\eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a},P_{b}\right]=iM_{ab}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Anti-DeSitter grubuna ait herhangi bir grup elemanı ise üstel parametrizasyonunu,

$$g\left(x,\omega\right)=e^{ix\cdot P}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.48}$$

olacak şekilde seçtik.

Şimdi öncelikli olarak Anti-DeSitter cebrini antisimetrik Z_{ab} tensör üreticisi ile genişletelim. Bu grup Z_{ab} anti-simetrik tensör üreticisi ile aşağıdaki şekilde genişletilebilir;

$$\begin{aligned}
&\left[M_{ab},M_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}M_{bc}+\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab},P_{c}\right]=i\left(\eta_{bc}P_{a}-\eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a},P_{b}\right]=i\left(M_{ab}-Z_{ab}\right)\\
&\left[M_{ab},Z_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}Z_{bc}+\eta_{bc}Z_{ad}-\eta_{ac}Z_{bd}-\eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}Z_{bc}+\eta_{bc}Z_{ad}-\eta_{ac}Z_{bd}-\eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&\left[Z_{ab},P_{c}\right]=0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Bu cebrin kapalılığı Jacobi özdeşliklerini kullanılarak kontrol edildi.

Genişletilmiş olan Anti-DeSitter grubunun herhangi bir elemanı aşağıdaki şekilde seçtik;

$$g\left(x,\theta,\omega\right)=e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.50}$$

Bu genişletilen simetri $\mathcal{A}$ ayar alanı tanımlandığında yerel olarak incelenebilir;

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}^{A}X_{A}=e^{a}P_{a}+\theta^{ab}Z_{ab}-\tfrac{1}{2}\omega^{ab}M_{ab} \tag{3.51}$$

Burada X_A grup üreticilerini göstermektedir. Ayrıca uzaysal koordinatlar eklendiğinde;

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu,\ \theta^{ab} = \theta^{ab}_\mu dx^\mu,\ \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{3.52}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\left(e^a_\mu, \theta^{ab}_\mu, \omega^{ab}_\mu\right)$ üreticilere ait ayar alanlarıdır.

Buna göre ayar alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathbb{A}_\mu = e^a_\mu P_a + \theta^{ab}_\mu Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\omega^{ab}_\mu M_{ab} \tag{3.53}$$

Ayar alanlarının grup dönüşümü altındaki davranışını bulmak için yeni bir $\zeta(x)$ alanı tanımladık;

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \zeta^A(x) X_A \\ &= y^a(x) P_a + \phi^{ab}(x) Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\tau^{ab}(x) M_{ab}\end{aligned} \tag{3.54}$$

ve ayar alanının sonsuz küçük ayar dönüşümü aşağıdaki ifadeden bulunur;

$$\delta\mathbb{A}_\mu = -\partial_\mu \zeta - i\left[\mathbb{A}_\mu, \zeta\right] \tag{3.55}$$

Ayrıca ayar alanını üreticiler bazında yazdığımızda;

$$\delta\mathbb{A}_\mu = \delta e^a_\mu P_a + \delta\theta^{ab}_\mu Z_{ab} - \tfrac{1}{2}\delta\omega^{ab}_\mu M_{ab} \tag{3.56}$$

aşağıdaki dönüşümleri elde etmiş oluruz;

$$\begin{aligned}\delta e^a_\mu &= -\partial_\mu y^a + e^c_\mu \tau^a{}_c + \omega^a_{\mu\, c} y^c \\ \delta\theta^{ab}_\mu &= -\partial_\mu \phi^{ab} - e^{[a}_\mu y^{b]} - 2\theta^{[a|d}_\mu \tau_d{}^{b]} + 2\omega^{c[b}_\mu \phi^{a]}{}_c + 4\theta^{c[b}_\mu \phi^{a]}{}_c \\ \delta\omega^{ab}_\mu &= -\partial_\mu \tau^{ab} + 2\omega^{c[b}_\mu \tau^{a]}{}_c + 2e^{[a}_\mu y^{b]}\end{aligned} \tag{3.57}$$

Ayar alanlarının dönüşümlerini bulduğumuza göre artık eğrilikleri ve bu eğriliklerin dönüşümlerini bulabiliriz.

Eğrilik tensörü aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + i\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = d\mathbb{A} + \tfrac{i}{2}\left[\mathbb{A}, \mathbb{A}\right] \tag{3.58}$$

Daha önce tanımladığımız ayar alanını yukarıdaki denklemde yerine yazarsak ve burada $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{A} X_{A} = F^{a} P_{a} + F^{ab} Z_{ab} - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab}$ eşitliğini kullanırsak tanjant uzayındaki eğrilikleri buluruz;

$$\begin{aligned} F^{a} &= de^{a} + \omega^{a}{}_{b} \wedge e^{b} \\ F^{ab} &= d\theta^{ab} + \tfrac{1}{2} e^{a} \wedge e^{b} + 2\omega^{a}{}_{c} \wedge \theta^{cb} + 4\theta^{a}{}_{c} \wedge \theta^{cb} \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{cb} - e^{a} \wedge e^{b} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Uzaysal koordinatları eklemek için $\mathbb{F}^{A}$ 'yı aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\mathbb{F}^{A} = \tfrac{1}{2} \mathbb{F}^{A}_{\mu\upsilon} dx^{\mu} \wedge dx^{\upsilon} \tag{3.60}$$

Üreticilere bağlı ayar alanlarını açık bir şekilde yazdığımızda aşağıdaki gibi uzaysal koordinatlara sahip eğrilikler elde edilir;

$$\begin{aligned} F^{a}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} e^{a}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|b} e^{b}_{\upsilon]} \\ F^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} + \tfrac{1}{2} e^{a}_{[\mu} e^{b}_{\upsilon]} + 2\omega^{a}_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} + 4\theta^{a}_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} \\ R^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^{a}_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]} - e^{a}_{[\mu} e^{b}_{\upsilon]} \end{aligned} \tag{3.61}$$

Şimdi elde ettiğimiz bu eğriliklerin dönüşümünü bulabiliriz. Bunun için;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = i\left[\zeta, \mathbb{F}_{\mu\upsilon}\right] \tag{3.62}$$

ifadesi kullanılır burada;

$$\mathbb{F}_{\mu\upsilon} = F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.63}$$

olarak ele alınır.

Eğriliklerin dönüşümü aşağıdaki gibi dikkate alınırsa;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = \delta F^{a}_{\mu\upsilon} P_{a} + \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} - \tfrac{1}{2} \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.64}$$

aşağıdaki dönüşümler elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta F^{a}_{\mu\upsilon} &= -y^{c} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} + \tau^{a}{}_{c} F^{c}_{\mu\upsilon} \\ \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} &= y^{a} F^{b}_{\mu\upsilon} + 2\phi^{a}{}_{c} R^{ab}_{\mu\upsilon} - 2\tau^{ab} F^{a}_{\mu\upsilon\, b} - 4\phi^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} \\ \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} &= -2\tau^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} - 2y^{a} F^{b}_{\mu\upsilon} \end{aligned} \tag{3.65}$$

Einstein-Cartan Teorisi'nde standart Lagranjiyen aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathcal{L}_1 = R_{\mu\upsilon}{}^{ab} R^{\mu\upsilon}{}_{ab} \tag{3.66}$$

$$\mathcal{L}_2 = \varepsilon_{abcd} R_{\mu\upsilon}{}^{ab} R^{cd|\mu\upsilon} \tag{3.67}$$

AdS-Maxwell Kütleçekimi ise Einstein-Cartan Teorisi örnek alınarak R^{ab} ve F^{ab} çiftini kombinasyonu ile kurulabilir ve bu sayede Lagranjiyen aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathcal{L}_1 = (R_{\mu\upsilon}{}^{ab} + F_{\mu\upsilon}{}^{ab})(R^{\mu\upsilon}{}_{ab} + F^{\mu\upsilon}{}_{ab}) \tag{3.68}$$

$$\mathcal{L}_2 = (R_{\mu\upsilon}{}^{ab} + F_{\mu\upsilon}{}^{ab})(R^{\mu\upsilon|cd} + F^{\mu\upsilon|cd})\varepsilon_{abcd} \tag{3.69}$$

3.4. Genişletilmiş Weyl Grubunun Ayar Teorisi

3.4.1. Weyl grubunun antisimetrik bir tensör ile genişletilmesi

Weyl cebrinin üreticileri; uzay-zamanda dönme (M_{ab}), öteleme (P_a) ve ölçekleme (D) 'dir ve bunların diferansiyel realizasyonu aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned} M_{ab} &= i\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right) \\ P_a &= i\partial_a \\ D &= i\left(x\cdot\partial\right) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Bu üreticiler aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar;

$$\begin{aligned} &\left[M_{ab}, M_{cd}\right] = i\left(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}\right) \\ &\left[M_{ab}, P_c\right] = i\left(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\right) \\ &\left[P_a, P_b\right] = 0 \\ &\left[D, D\right] = 0 \\ &\left[P_a, D\right] = iP_a \\ &\left[M_{ab}, D\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Weyl grubuna ait herhangi bir grup elemanı ise üstel parametrizasyonunu,

$$g\left(x,\sigma,\omega\right) = e^{ix\cdot P} e^{i\sigma\cdot D} e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M} \tag{3.72}$$

olacak şekilde seçtik.

Weyl grubunun ayar teorisi incelenerek yeni bir kütleçekim Lagranjiyeni elde edilmişti. Bu bölümde Weyl grubuna antisimetrik bir üretici ekleyerek genişletip ayar teorisini inceledik ve önceki çalışmalara ek katkılar bulduk. Şimdi öncelikli olarak Weyl cebrini antisimetrik Z_{ab} tensör üreticisi ile genişletelim.

Genişletilmiş Weyl cebrinin üreticileri aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlar;

$$\begin{aligned}
&\left[M_{ab},M_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}M_{bc}+\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac}\right)\\
&\left[M_{ab},P_{c}\right]=i\left(\eta_{bc}P_{a}-\eta_{ac}P_{b}\right)\\
&\left[P_{a},P_{b}\right]=iZ_{ab}\\
&\left[D,D\right]=0\\
&\left[P_{a},D\right]=iP_{a}\\
&\left[M_{ab},D\right]=0\\
&\left[M_{ab},Z_{cd}\right]=i\left(\eta_{ad}Z_{bc}+\eta_{bc}Z_{ad}-\eta_{ac}Z_{bd}-\eta_{bd}Z_{ac}\right)\\
&\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=0\\
&\left[Z_{ab},P_{c}\right]=0\\
&\left[Z_{ab},D\right]=2iZ_{ab}
\end{aligned}\tag{3.73}$$

Bu cebrin kapalılığı Jacobi özdeşliklerini kullanılarak kontrol edildi.

Genişletilmiş olan Weyl grubunun herhangi bir elemanı aşağıdaki şekilde seçtik;

$$g\left(x,\theta,\sigma,\omega\right)=e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M}\tag{3.74}$$

Bu cebre ait üreticileri bulmak için aşağıdaki koseti kullandık;

$$K\left(x,\theta,\sigma\right)=e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D}\tag{3.75}$$

burada $K\left(x,\theta,\sigma\right)$ seçtiğimiz koseti gösteriyor ve kosetin dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$K\left(x',\theta',\sigma'\right)h\left(\omega\right)=g'\left(a,\varepsilon,\lambda,u\right)K\left(x,\theta,\sigma\right)\tag{3.76}$$

$$h\left(\omega\right)=e^{-\frac{i}{2}\omega\cdot M}\tag{3.77}$$

Dönüşümde kullanılacak sonsuz küçük grup elemanı aşağıdaki şekilde tanımlandı;

$$g'\left(a,\varepsilon,\lambda,u\right)=e^{ia\cdot P}e^{i\varepsilon\cdot Z}e^{i\lambda\cdot D}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}\tag{3.78}$$

Bu tanımlamaları yaptıktan sonra, $\{x(x),\theta(x),\sigma(x),\omega(x)\}$ alanlarının $(a,\varepsilon,\lambda,u)$ sonsuz küçük parametrelerine göre değişimi incelendi.

Burada alanların dönüşümü aşağıdaki şekilde ele alınmıştır;

$$\begin{aligned}\delta x^a &= x'^a - x^a \\ \delta\theta^{ab} &= \theta'^{ab} - \theta^{ab} \\ \delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ \delta\omega^{ab} &= \omega'^{ab} - \omega^{ab}\end{aligned} \tag{3.79}$$

Bu dönüşümlere göre, sonsuz küçük öteleme dönüşümü altında;

$$\begin{aligned}e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h &= e^{ia\cdot P}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= e^{i(x+a)\cdot P+\frac{1}{2}[ia\cdot P,ix\cdot P]}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= e^{i(x+a)\cdot P}e^{-\frac{i}{4}\left(a^a x^b - a^b x^a\right)Z_{ab}}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= e^{i(x+a)\cdot P}e^{i\left(\theta^{ab}-\frac{i}{4}\left(a^a x^b - a^b x^a\right)\right)Z_{ab}}e^{i\sigma\cdot D}\end{aligned} \tag{3.80}$$

x,θ,σ,ω alanlarına gelen katkılar;

$$\begin{aligned}\delta x^a &= a^a \\ \delta\theta^{ab} &= -\tfrac{1}{4}\left(a^a x^b - a^b x^a\right) \\ \delta\sigma &= 0 \\ h &= 1\end{aligned} \tag{3.81}$$

tensörel öteleme dönüşümü altında;

$$e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h = e^{i\varepsilon\cdot Z}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \tag{3.82}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned}\delta x^a &= 0 \\ \delta\theta^{ab} &= \varepsilon^{ab} \\ \delta\sigma &= 0 \\ h &= 1\end{aligned} \tag{3.83}$$

ölçekleme dönüşümü altında;

$$e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h = e^{i\lambda\cdot D}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \tag{3.84}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a = \lambda x^a \\
&\delta\theta^{ab} = 2\lambda\theta^{ab} \\
&\delta\sigma = \lambda \\
&h = 1
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Lorentz dönüşümü altında;

$$e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h = e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \tag{3.86}$$

elde edilen katkılar;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a = u^a{}_b x^b \\
&\delta\theta^{ab} = u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac} \\
&\delta\sigma = 0 \\
&h = e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \rightarrow \omega = u
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Bu işlemler sonucunda elde edilen bu dönüşümlerin toplamı ise aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned}
&\delta x^a = a^a + u^a{}_b x^b + \lambda x^a \\
&\delta\theta^{ab} = \varepsilon^{ab} - \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) + 2\lambda\theta^{ab} + (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac}) \\
&\delta\sigma = \lambda \\
&\omega^{ab} = u^{ab}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Dönüşümler elde edildikten sonra x ve θ'ya bağlı dönüşümler bir skaler alan $\Phi\left(x^a, \theta^{ab}\right)$ üzerinden Taylor serisine açıldı.

x ve θ'nın dönüşümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
&x^{a\prime} = x^a + a^a + u^a{}_b x^b + \lambda x^a \\
&\theta^{ab\prime} = \theta^{ab} + \varepsilon^{ab} - \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) + 2\lambda\theta^{ab} + (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac})
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Bu eşitliklere bağlı Taylor açılımı denklem (3.90)'daki gibidir;

$$
\begin{aligned}
\Phi'(x,\theta) &= \Phi\begin{pmatrix} x^a - a^a - u^a{}_b x^b - \lambda x^a, \\ \theta^{ab} - \varepsilon^{ab} + \frac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) - 2\lambda\theta^{ab} - (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac}) \end{pmatrix} \\
&= \Phi(x,\theta) + \left(-a^a - u^a{}_b x^b - \lambda x^a\right)\partial_a \Phi(x,\theta) \\
&\quad + \left(-\varepsilon^{ab} + \tfrac{1}{4}(a^a x^b - a^b x^a) - 2\lambda\theta^{ab} - (u_c{}^a\theta^{bc} - u_c{}^b\theta^{ac})\right)\partial_{ab}\Phi(x,\theta) \\
&= \Phi(x,\theta) + \begin{pmatrix} a^a\left(-\partial_a + \frac{1}{2}x^b\partial_{ab}\right) + \\ \varepsilon^{ab}\left(-\partial_{ab}\right) + \lambda\left(-x^a\partial_a - 2\theta^{ab}\partial_{ab}\right) - \\ \frac{1}{2}u^{ab}\left(-\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right) - 2\left(\theta_a{}^c\partial_{bc} - \theta_b{}^c\partial_{ac}\right)\right) \end{pmatrix}\Phi(x,\theta)
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

$\Phi(x,\theta)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde dönüştüğü bilindiğine göre

$$
\delta\Phi(x,\theta) = \Phi'(x,\theta) - \Phi(x,\theta) \tag{3.91}
$$

$$
\delta\Phi(x,\theta) = \left(ia\cdot P + i\varepsilon\cdot Z + i\lambda D - \tfrac{i}{2}u\cdot M\right)\Phi(x,\theta) \tag{3.92}
$$

Genişletilmiş grubun elde edilen yeni üreticileri aşağıdaki gibidir;

$$
\begin{aligned}
&P_a = i(\partial_a - \tfrac{1}{2}x^b\partial_{ab}) \\
&Z_{ab} = i\partial_{ab} \\
&D = i\left(x^a\partial_a + 2\theta^{ab}\partial_{ab}\right) \\
&M_{ab} = i(x_a\partial_b - x_b\partial_a) + 2i(\theta_a{}^c\partial_{bc} - \theta_b{}^c\partial_{ac})
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Bu üreticilerin ilgili komütasyonları sağladığı kontrol edildi.

3.4.2. Genişletilmiş Weyl grubunun ayar teorisi

Öncelikli olarak bir $\mathcal{A}$ ayar alanı tanımlanır;

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}^A X_A \\
&= e^a P_a + \theta^{ab} Z_{ab} + \lambda D - \tfrac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab}
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

Burada X_A grup üreticilerini göstermektedir. Ayrıca uzaysal koordinatlar eklendiğinde;

$$
e^a = e^a_\mu dx^\mu,\ \theta^{ab} = \theta^{ab}_\mu dx^\mu,\ \lambda = \lambda_\mu dx^\mu,\ \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{3.95}
$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $\left(e^a_\mu, \theta^{ab}_\mu, \lambda_\mu, \omega^{ab}_\mu\right)$ üreticilere ait ayar alanlarıdır.

Buna göre ayar alanı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\mathbb{A}_\mu = e_\mu^a P_a + \theta_\mu^{ab} Z_{ab} + \lambda_\mu D - \tfrac{1}{2}\omega_\mu^{ab} M_{ab} \tag{3.96}$$

Ayar alanlarının grup dönüşümü altındaki davranışını bulmak için yeni bir $\zeta(x)$ alanı tanımladık;

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \zeta^A(x) X_A \\ &= y^a(x) P_a + \phi^{ab}(x) Z_{ab} + \rho(x) D - \tfrac{1}{2}\tau^{ab}(x) M_{ab}\end{aligned} \tag{3.97}$$

ve ayar alanını sonsuz küçük dönüşümü aşağıdaki ifadeden bulunur;

$$\delta\mathbb{A}_\mu = -\partial_\mu \zeta - i\left[\mathbb{A}_\mu, \zeta\right] \tag{3.98}$$

Ayrıca ayar alanını üreticiler bazında yazdığımızda;

$$\delta\mathbb{A}_\mu = \delta e_\mu^a P_a + \delta\theta_\mu^{ab} Z_{ab} + \delta\lambda_\mu D - \tfrac{1}{2}\delta\omega_\mu^{ab} M_{ab} \tag{3.99}$$

aşağıdaki dönüşümleri elde ettik;

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= -\partial_\mu y^a + e_\mu^a \rho + e_\mu^c \tau^a{}_c - \lambda_\mu y^a + \omega_{\mu\ c}^{\ a} y^c \\
\delta\theta_\mu^{ab} &= -\partial_\mu \phi^{ab} + e_\mu^{[a} y^{b]} + \theta_\mu^{ab}\rho - 2\theta_\mu^{[a|d}\tau_d{}^{b]} - \lambda\phi^{ab} + 2\omega_\mu^{c[b}\phi^{a]}{}_c \\
\delta\lambda_\mu &= -\partial_\mu \rho \\
\delta\omega_\mu^{ab} &= -\partial_\mu \tau^{ab} + 2\omega_\mu^{c[b}\tau^{a]}{}_c
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Ayar alanlarının dönüşümlerini bulduğumuza göre artık eğrilikleri ve bu eğriliklerin dönüşümlerini bulabiliriz.

Ayrıca ayar alanını üreticiler bazında yazdığımızda;

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + \tfrac{i}{2}\left[\mathbb{A}, \mathbb{A}\right] \tag{3.101}$$

Burada $\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = F^a P_a + F^{ab} Z_{ab} + FD - \tfrac{1}{2} R^{ab} M_{ab}$ eşitliğini kullanırsak denklem (3.102)'deki sonuçları elde ettik;

$$
\begin{aligned}
F^a &= de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b + \lambda \wedge e^a \\
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \\
F^{ab} &= d\theta^{ab} - \tfrac{1}{2} e^a \wedge e^b + 2\omega^a{}_c \wedge \theta^{cb} + 2\lambda \wedge \theta^{ab} \\
F &= d\lambda
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

Üreticilere bağlı ayar alanlarını açık bir şekilde yazdığımızda aşağıdaki gibi uzaysal koordinatlara sahip eğrilikler elde edilir;

$$
\begin{aligned}
F^a &= \left(dx^\mu \partial_\mu\right)\left(dx^\upsilon e^a{}_\upsilon\right) + \left(dx^\mu \omega^a{}_{\mu\, b}\right)\left(dx^\upsilon e^b{}_\upsilon\right) + \left(dx^\mu \lambda_\mu\right)\left(dx^\upsilon e^a{}_\upsilon\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{[\mu} e^a_{\upsilon]} + \omega^a_{[\mu|b} e^b_{\upsilon]} + \lambda_{[\mu} e^a_{\upsilon]}\right) dx^\mu dx^\upsilon \\
&= \tfrac{1}{2} F^a_{\mu\upsilon} dx^\mu \wedge dx^\upsilon
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{ab} &= \left(\begin{array}{l}
\left(dx^\mu \partial_\mu\right)\left(dx^\upsilon \theta^{ab}_\upsilon\right) - \tfrac{1}{2}\left(dx^\mu e^a_\mu\right)\left(dx^\upsilon e^b_\upsilon\right) \\
+2\left(dx^\mu \omega^a_{\mu\, c}\right)\left(dx^\upsilon \theta^{cb}_\upsilon\right) + 2\left(dx^\mu \lambda_\mu\right)\left(dx^\upsilon \theta^{ab}_\upsilon\right)
\end{array}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} - \tfrac{1}{2} e^a_{[\mu} e^b_{\upsilon]} + 2\omega^a_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} + 2\lambda_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]}\right) dx^\mu dx^\upsilon \\
&= \tfrac{1}{2} F^{ab}_{\mu\upsilon} dx^\mu \wedge dx^\upsilon
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \left(dx^\mu \partial_\mu\right)\left(dx^\upsilon \lambda_\upsilon\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{[\mu} \lambda_{\upsilon]}\right) dx^\mu dx^\upsilon \\
&= \tfrac{1}{2} F_{\mu\upsilon} dx^\mu \wedge dx^\upsilon
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{ab} &= \left(dx^\mu \partial_\mu\right)\left(dx^\upsilon \omega^{ab}_\upsilon\right) + \left(dx^\mu \omega^a_{\mu\, c}\right)\left(dx^\upsilon \omega^{cb}_\upsilon\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^a_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]}\right) dx^\mu dx^\upsilon \\
&= \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} dx^\mu \wedge dx^\upsilon
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

Bu işlemlerden sonra aşağıdaki sonuçları elde ettik;

$$
\begin{aligned}
F^a_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} e^a_{\upsilon]} + \omega^a_{[\mu|b} e^b_{\upsilon]} + \lambda_{[\mu} e^a_{\upsilon]} \\
R^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\upsilon]} + \omega^a_{[\mu|c} \omega^{cb}_{\upsilon]} \\
F^{ab}_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} - \tfrac{1}{2} e^a_{[\mu} e^b_{\upsilon]} + 2\omega^a_{[\mu|c} \theta^{cb}_{\upsilon]} + 2\lambda_{[\mu} \theta^{ab}_{\upsilon]} \\
F_{\mu\upsilon} &= \partial_{[\mu} \lambda_{\upsilon]}
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

Şimdi elde ettiğimiz bu eğriliklerin sonsuz küçük dönüşümünü bulabiliriz.

Bunun için;

$$\mathbb{F}_{\mu\upsilon} = F^{a}_{\mu\upsilon} P_a + F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} + F_{\mu\upsilon} D - \tfrac{1}{2} R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.108}$$

tanımı kullanılır. Bu ifade aşağıdaki denklemde yerine yazılır;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = i\left[\zeta, \mathbb{F}_{\mu\upsilon}\right] \tag{3.109}$$

gerekli işlemler yapıldığında elde ettiğimiz sonucu aşağıdaki ifade ile karşılaştırdığımızda;

$$\delta \mathbb{F}_{\mu\upsilon} = \delta F^{a}_{\mu\upsilon} P_a + \delta F^{ab}_{\mu\upsilon} Z_{ab} + \delta F_{\mu\upsilon} D - \tfrac{1}{2} \delta R^{ab}_{\mu\upsilon} M_{ab} \tag{3.110}$$

aşağıdaki dönüşümler elde ettik.

$$\begin{aligned}
&\delta F^{a}_{\mu\upsilon} = -y^{a} F_{\mu\upsilon} - y^{c} R^{a}_{\mu\upsilon\, c} + \rho F^{a}_{\mu\upsilon} + \tau^{a}{}_{c} F^{c}_{\mu\upsilon} \\
&\delta F^{ab}_{\mu\upsilon} = -y^{a} F^{b}_{\mu\upsilon} - 2\phi^{ab} F_{\mu\upsilon} + 2\phi^{a}{}_{c} R^{ab}_{\mu\upsilon} + 2\rho F^{ab}_{\mu\upsilon} - 2\tau^{ab} F^{a}_{\mu\upsilon\, b} \\
&\delta F_{\mu\upsilon} = 0 \\
&\delta R^{ab}_{\mu\upsilon} = -2\tau^{cb} R^{a}_{\mu\upsilon\, c}
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Genişletilmiş Weyl Kütleçekim Teorisi için Lagranjiyen yoğunluklarını R^{ab}, F^{ab} ve $F_{\mu\upsilon}$ ifadelerini kullanarak aşağıdaki şekillerde yazabiliriz;

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \tag{3.112}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} R^{ab} \wedge R_{ab} \tag{3.113}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{4} F^{\mu\upsilon} F_{\mu\upsilon} \tag{3.114}$$

$$\mathcal{L}_4 = \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} \tag{3.115}$$

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \tag{3.116}$$

$$\mathcal{L}_6 = R^{ab} \wedge F_{ab} \tag{3.117}$$

$$\mathcal{L}_7 = \frac{1}{2} F^{ab} \wedge F_{ab} \tag{3.118}$$

Burada $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{L}_3$ bilinen Weyl kütleçekim Lagranjiyen yoğunluklarıdır. Diğerleri ise bulunan yeni alandan kaynaklanan katkılardır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez uzay-zaman simetrilerinin genişletilmesi üzerine bir çalışmadır. Grupların değişik metotlarla genişletilmesine dair literatürde birçok çalışma vardır. H. Bacry, P.H. Combe ve J.L. Richard ve daha sonra R. Schrader'in çalışmaları ile özellikle Maxwell grubunun global incelenmesi halinde sabit bir elektromanyetik alanda hareket eden yüklü parçacıkların etkileşimini gruptan teorik olarak elde edilebileceği göstermeleri, bu genişletilmiş grupların fizikteki simetrileri zenginleştirebileceği gibi belki de yeni teorilerin ortaya atılabileceği bir yol olabileceğini gösterdi.

D. V. Soroka ve V. A. Soroka'nın bu genişletilmiş grupları tekrar ele almaları ve yerel incelemeleri kozmolojik sabitin gruptan teorik olarak elde edilebileceği gösterdi.

Buradan hareketle bu tezde Weyl grubunu genişleterek ayar teorisi inceledik ve daha önceden bilinen ifadelere ek olarak yeni katkılar elde ettik ve bu katkıların fiziksellikleri tartışmaya açık bir şekilde bıraktık.

KAYNAKLAR

Aldrovandi R., Pereira J. G., *An Introduction to Geometrical Physics*, 1st ed, World Scientific Publishing, Singapore, 1995.

Ali S. A., Cafaro C., Capoziello S., Corda C., On the Poincare Gauge Theory of Gravitation, *Int.J.Theor.Phys*, 2009, **48**, 3426-3448.

Azcarraga J. A., Kamimura K., Lukierski J., Generalized Cosmological Term From Maxwell Symmetries, *Phys.Rev.D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.83.124036.

Azcarraga J. A., Kamimura K., Lukierski J., Maxwell Symmetries and Some Applications, *XV. International Conf. on 'Symmetry Methods in Physics'*, Dubna, Russia, 12-16 July 2011.

Babourova O. V., Frolov B. N., Gauge Field Theory for Poincare–Weyl Group, *Phys.Rev.D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.74.064012.

Bacry H., Combe P., Richard J.L., Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field, *Il Nuovo Cimento A*, 1970, **67**, 267-299.

Barut A. O., Raczka R., *Theory of Group Representation and Applications*, 1st ed, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.

Bielecki J., Coset Symmetries in Compactified Supergravity, Master Thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, 2007.

Blagojevic M., Three Lectures on Poincare Gauge Theory, *II. Summer School in Modern Mathematical Physics*, Kopaonik, Yugoslavia, 1-12 September 2002.

Blagojevic M., *Gravitation and Gauge Symmetries*, 1st ed, IOP, London, 2002.

Bonanos S., Gomis J., Infinite Sequence of Poincare Group Extensions: Structure and Dynamics, *J. Phys. A: Math. Theor.*, DOI: 10.1088/1751-8113/43/1/015201.

Cartan E., Sur Une Généralisation De La Notion De Courbure De Riemann Et Les Espaces À Torsion, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 1922, **174**, 593-595.

Charap J. M., Tait W., A Gauge Theory of Weyl Group, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1974, **340**, 249-262.

Durka R., Kowalski-Glikman, Szczachor M., Gauged AdS–Maxwell Algebra and Gravity, *Mod.Phys.Lett. A*, 2011, **26**, 2689-2696.

Stein E. M., Representation of Non-Compact Groups in “High Energy Physics and Elementary Particles”, *International Atomic Energy Agency*, Vienna, 1965

Fedoruk S., Lukierski J., New Particle Model in Extended Space-Time and Covariantization of Planar Landau Dynamics, *Phys. Lett. B*, 2012, **718**, 646-652.

Gibbons G. W., Gomis J., Pope C. N., Deforming the Maxwell-Sim Algebra, *Phys.Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.82.065002.

Gronwald F., Hehl F. W., On the Gauge Aspects of Gravity, *14th Course of the School of International School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity*, Erice, Italy, 11-19 May 1995.

Hehl F. W., Four Lectures on Poincare Gauge Field Theory, *6th Course of the International School of Cosmology and Gravitation on "Spin, Torsion, Rotation and Supergravity"*, Erice, Italy, 1979.

Hestenes D., Gauge Theory Gravity with Geometric Calculus, *Int Foundations of Physics*, 2005, **35**, 903-970.

Hori S., Sakamoto J., Sato A., Nonlinear Realisation of Conformal Symmetry, *Progress of Theoretical Physics*, 1974, **52**, 1647-1651.

Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, I. The Poincare, de Sitter and Conformal Cases, *Phys.Rev. D*, 1982, **25**, 976-987.

Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, II. Special Conformal Cases, *Phys.Rev. D*, 1982, **25**, 988-994.

Jeevanjee N., *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*, Birkhauser, 1st ed, New York, 2011.

Jeronimus L. C. W., Elementary Particles in Curved Spacetime, Doctorate Thesis, University of Groningen, Centre for Theoretical Physics, Groningen, 2012.

Jones H. F., *Groups, Representations and Physics*, 2nd ed, Taylor & Francis Group, New York, 1998.

Kasuya M., On The Gauge Theory in the Einstein-Cartan-Weyl Space-Time, *Il. Nuovo Cimento B*, 1975, **28**, 127-137.

Kibble T. W. B., Lorentz Invariance and the Gravitational Field, *Journal of Mathematical Physics*, 1961, **2**, 212-221.

Lukierski J., Maxwell Symmetries and Some Applications, *A Topical Conference On Elementary Particles, Astrophysics, and Cosmology*, Miami, USA, 15-20 December 2011.

Minkevich A. V., Gravitational Interaction and Poincare Gauge Theory of Gravitation, *Acta Physica Polonica B*, **40**, 229-239.

Okansen M. A., Noncommutative Gravitation as a Gauge Theory of Twisted Poincare Symmetry, Doctorate Thesis, University of Helsinki, Department of Physics, Helsinki, 2008.

Özemre A. Y., *Gravitasyonun Rölativistik Teorileri*, 1. Basım, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 1982.

Sabbata V., Gasperini M., *Introduction to Gravitation*, 1st ed, World Scientific Publishing, Singapore, 1985.

Schrader R., The Maxwell Group and the Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetic Field, *Fortschritte der Physik*, 1972, **20**, 701-734.

Soroka D. V., Soroka V. A., Tensor Extension of the Poincare Algebra, *Physics Letters B*, 2005, **607**, 302–305.

Soroka D. V., Soroka V. A., Poincare Algebra Extension with Tensor Generator, *6th International Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, Kiev, Ukraine, 20-26 June 2005.

Soroka D. V., Soroka V. A., Semi-Simple Extension of the (Super) Poincare Algebra, *Adv.High Energy Phys*., DOI: 10.1155/2009/234147.

Soroka D. V., Soroka V. A., Gauge Semi-Simple Extension of the Poincare Group, *Physics Letters B*, 2012, **707**, 160-162.

Srivastava P. P., Conformal Symmetry in Lagrangian Field Theory, *Revista Brasileira de Fisica*, 1973, **3**, 577-599.

Utiyama R., Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, *Physical Review*, 1956, **101**, 1597-1607.

Yang C. N., Mills, R. L., Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Physical Review*, 1954, **96**, 1597-1607.

Zet G., Gauge Theory of Gravitation and General Relativity, *Romanian Reports in Physics*, 2005, **57**, 623-647.

EKLER

EK-A: NOTASYON

$\mathrm{diag}\left(\eta_{\mu\upsilon}\right) = \left(+,-,-,-\right)$: Düz uzay metriği

$\partial_{\mu\upsilon}\theta^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\eta} - \delta^{\rho}_{\upsilon}\delta^{\sigma}_{\mu}\right)$: Tensör türevi

$A_{[\mu}B_{\upsilon]} = A_{\mu}B_{\upsilon} - A_{\upsilon}B_{\mu}$: Anti-simetrik gösterim

$A_{[\mu}B_{\rho|\upsilon]} = A_{\mu}B_{\rho\upsilon} - A_{\upsilon}B_{\rho\mu}$: İndis ayracının kullanımı

EK-B: GENİŞLETİLMİŞ WEYL GRUBUNUN ARA İŞLEMLERİ

Koset parametreleri:

Tensörel öteleme dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h &= e^{i\varepsilon\cdot Z}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= e^{ix\cdot P}e^{i\left(\theta^{ab}+\varepsilon^{ab}\right)Z_{ab}}e^{i\sigma\cdot D} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ölçekleme dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h &= e^{i\lambda\cdot D}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= \left(e^{i\lambda\cdot D}e^{ix\cdot P}e^{-i\lambda\cdot D}\right)\left(e^{i\lambda\cdot D}e^{i\theta\cdot Z}e^{-i\lambda\cdot D}\right)e^{i\lambda\cdot D}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= \exp\left\{e^{i\lambda\cdot D}ix\cdot Pe^{-i\lambda\cdot D}\right\}\exp\left\{e^{i\lambda\cdot D}i\theta\cdot Ze^{-i\lambda\cdot D}\right\}e^{i(\sigma+\lambda)D} \\ &= \exp\left\{ix\cdot P-\left[ix\cdot P,i\lambda\cdot D\right]\right\}\exp\left\{i\theta\cdot Z-\left[i\theta\cdot Z,i\lambda\cdot D\right]\right\}e^{i(\sigma+\lambda)D} \\ &= \exp\left\{ix\cdot P+\lambda x\cdot P\right\}\exp\left\{i\theta\cdot Z+2i\lambda\theta\cdot Z\right\}e^{i(\sigma+\lambda)D} \\ &= e^{i\left(x^a+\lambda x^a\right)P_a}e^{i\left(\theta^{ab}+2\lambda\theta^{ab}\right)Z_{ab}}e^{i(\sigma+\lambda)D} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Lorentz dönüşümü altında;

$$\begin{aligned} e^{ix'\cdot P}e^{i\theta'\cdot Z}e^{i\sigma'\cdot D}h &= e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{ix\cdot P}e^{i\theta\cdot Z}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= \left(e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{ix\cdot P}e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right)\left(e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{i\theta\cdot Z}e^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right)e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}e^{i\sigma\cdot D} \\ &= \exp\left\{e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}ix\cdot Pe^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right\}\exp\left\{e^{-\frac{i}{2}u\cdot M}i\theta\cdot Ze^{\frac{i}{2}u\cdot M}\right\}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\ &= \exp\left\{ix\cdot P+\left[ix\cdot P,\tfrac{i}{2}u\cdot M\right]\right\}\exp\left\{i\theta\cdot Z+\left[i\theta\cdot Z,\tfrac{i}{2}u\cdot M\right]\right\}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\ &= \exp\left\{ix\cdot P+iu^a{}_bx^bP_a\right\}\exp\left\{i\theta\cdot Z+\left(u_c{}^a\theta^{bc}-u_c{}^b\theta^{ac}\right)Z_{ab}\right\}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \\ &= e^{i\left(x^a+u^a{}_bx^b\right)P_a}e^{i\left(\theta^{ab}+u_c{}^a\theta^{bc}-u_c{}^b\theta^{ac}\right)Z_{ab}}e^{i\sigma\cdot D}e^{-\frac{i}{2}u\cdot M} \end{aligned}$$

şeklinde dönüşürler.

Ayar alanını sonsuz küçük dönüşümü aşağıdaki işlemden bulunur;

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbb{A}_\mu &= -\partial_\mu\zeta - \mathrm{i}\left[\mathbb{A}_\mu,\zeta\right] \\
&= \begin{pmatrix} -\left(\partial_\mu y^a P_a + \partial_\mu \phi^{ab} Z_{ab} + \partial_\mu \rho D - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \tau^{ab} M_{ab}\right) \\ -\mathrm{i}\begin{bmatrix} e_\mu^a P_a + \theta_\mu^{ab} Z_{ab} + \lambda_\mu D - \tfrac{1}{2}\omega_\mu^{ab} M_{ab}, \\ y^c P_c + \phi^{cd} Z_{cd} + \rho D - \tfrac{1}{2}\tau^{cd} M_{cd} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\left(\partial_\mu y^a P_a + \partial_\mu \phi^{ab} Z_{ab} + \partial_\mu \rho D - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \tau^{ab} M_{ab}\right) \\ + \begin{pmatrix} -\mathrm{i}e_\mu^a y^c \left[P_a,P_c\right] - \mathrm{i}e_\mu^a \rho\left[P_a,D\right] + \tfrac{\mathrm{i}}{2} e_\mu^a \tau^{cd}\left[P_a,M_{cd}\right] \\ + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\theta_\mu^{ab}\tau^{cd}\left[Z_{ab},M_{cd}\right] - \mathrm{i}\theta_\mu^{ab}\rho\left[Z_{ab},D\right] - \mathrm{i}\lambda_\mu y^c\left[D,P_c\right] \\ -\mathrm{i}\lambda_\mu \phi^{cd}\left[D,Z_{cd}\right] + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_\mu^{ab} y^c\left[M_{ab},P_c\right] - \tfrac{\mathrm{i}}{4}\omega_\mu^{ab}\tau^{cd}\left[M_{ab},M_{cd}\right] \\ -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_\mu^{ab}\phi^{cd}\left[M_{ab},Z_{cd}\right] \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\left(\partial_\mu y^a P_a + \partial_\mu \phi^{ab} Z_{ab} + \partial_\mu \rho D - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \tau^{ab} M_{ab}\right) \\ + \begin{pmatrix} e_\mu^a y^c Z_{ab} + e_\mu^a \rho P_a + \tfrac{1}{2} e_\mu^c \tau^a{}_c P_a + 2\theta_\mu^{ad}\tau_d{}^b Z_{ab} + 2\theta_\mu^{ab}\rho Z_{ab} \\ -\lambda_\mu y^a P_a - 2\lambda_\mu \phi^{cd} Z_{ab} - \omega_{\mu\,c}^{a} y^c P_a - \omega_\mu^{cb}\tau^a{}_c M_{ab} - 2\omega_\mu^{cb}\phi^a{}_c Z_{ab} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-\partial_\mu y^a + e_\mu^a \rho + \tfrac{1}{2} e_\mu^c \tau^a{}_c - \lambda_\mu y^a - \omega_{\mu\,c}^{a} y^c\right) P_a \\ + \left(-\partial_\mu \phi^{ab} + 2\theta_\mu^{ab}\rho + 2\theta_\mu^{ad}\tau_d{}^b - 2\lambda_\mu \phi^{cd} - 2\omega_\mu^{cb}\phi^a{}_c\right) Z_{ab} \\ + \left(-\partial_\mu \rho\right) D - \tfrac{1}{2}\left(-\partial_\mu \tau^{ab} + 2\omega_\mu^{cb}\tau^a{}_c\right) M_{ab} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Genişletilmiş Weyl grubuna ait eğrilik tensörü;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F} &= \mathrm{d}\mathbb{A} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\left[\mathbb{A},\mathbb{A}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{d}e^a P_a - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\omega^{ab} M_{ab} + \mathrm{d}\theta^{ab} Z_{ab} + \mathrm{d}\lambda D \\ + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} e^a P_a - \tfrac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab} + \theta^{ab} Z_{ab} + \lambda D, \\ e^c P_c - \tfrac{1}{2}\omega^{cd} M_{cd} + \theta^{cd} Z_{cd} + \lambda D \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{d}e^a P_a - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\omega^{ab} M_{ab} + \mathrm{d}\theta^{ab} Z_{ab} + \mathrm{d}\lambda D \\ + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} e^a \wedge e^c\left[P_a,P_c\right] - \tfrac{1}{2} e^a \wedge \omega^{cd}\left[P_a,M_{cd}\right] + e^a \wedge \lambda\left[P_a,D\right] \\ -\tfrac{1}{2}\omega^{ab} \wedge e^c\left[M_{ab},P_c\right] + \tfrac{1}{4}\omega^{ab} \wedge \omega^{cd}\left[M_{ab},M_{cd}\right] - \\ \tfrac{1}{2}\omega^{ab} \wedge \theta^{cd}\left[M_{ab},Z_{cd}\right] - \tfrac{1}{2}\theta^{ab} \wedge \omega^{cd}\left[Z_{ab},M_{cd}\right] + \\ \theta^{ab} \wedge \lambda\left[Z_{ab},D\right] + \lambda \wedge e^c\left[D,P_c\right] + \lambda \wedge \theta^{cd}\left[D,Z_{cd}\right] \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{d}e^a P_a - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\omega^{ab} M_{ab} + \mathrm{d}\theta^{ab} Z_{ab} + \mathrm{d}\lambda D \\ -\tfrac{1}{2} e^a \wedge e^b Z_{ab} - e^b \wedge \omega^a{}_b P_a - e^a \wedge \lambda P_a + \\ \tfrac{1}{2}\omega^a{}_d \wedge \omega^{bd} M_{ab} - 2\omega^{cb} \wedge \theta^a{}_c Z_{ab} - 2\theta^{ab} \wedge \lambda Z_{ab} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\mathrm{d}e^a - e^b \wedge \omega^a{}_b - e^a \wedge \lambda\right) P_a - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{d}\omega^{ab} - \omega^a{}_c \wedge \omega^{bc}\right) M_{ab} \\ + \left(\mathrm{d}\theta^{ab} - \tfrac{1}{2} e^a \wedge e^b - 2\omega^{cb} \wedge \theta^a{}_c - 2\theta^{ab} \wedge \lambda\right) Z_{ab} + \mathrm{d}\lambda D \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Eğrilik tensörlerinin sonsuz küçük dönüşümü aşağıdaki gibidir;

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbb{F}_{\mu\upsilon} &= \mathrm{i}\left[\zeta, \mathbb{F}_{\mu\upsilon}\right] \\
&= \mathrm{i}\left[y^{a}P_{a} + \phi^{ab}Z_{ab} + \rho D - \tfrac{1}{2}\tau^{ab}M_{ab} \;,\; F^{c}_{\mu\upsilon}P_{c} + F^{cd}_{\mu\upsilon}Z_{cd} + F_{\mu\upsilon}D - \tfrac{1}{2}R^{cd}_{\mu\upsilon}M_{cd} \right] \\
&= \begin{pmatrix} -y^{a}F^{b}_{\mu\upsilon}Z_{ab} - y^{a}F_{\mu\upsilon}P_{a} - y^{c}R^{a}_{\mu\upsilon\,c}P_{a} - 2\phi^{ab}F_{\mu\upsilon}Z_{ab} + 2\phi^{a}{}_{c}R^{cb}_{\mu\upsilon}Z_{ab} \\ +\rho F^{a}_{\mu\upsilon}P_{a} + 2\rho F^{ab}_{\mu\upsilon}Z_{ab} + \tau^{a}{}_{c}F^{c}_{\mu\upsilon}P_{a} - 2\tau^{cb}F^{a}_{\mu\upsilon\,c}Z_{ab} + \tau^{cb}R^{a}_{\mu\upsilon\,c}M_{ab} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-y^{a}F_{\mu\upsilon} - y^{c}R^{a}_{\mu\upsilon\,c} + \rho F^{a}_{\mu\upsilon} + \tau^{a}{}_{c}F^{c}_{\mu\upsilon}\right)P_{a} \\ +\left(-y^{a}F^{b}_{\mu\upsilon} - 2\phi^{ab}F_{\mu\upsilon} + 2\phi^{a}{}_{c}R^{cb}_{\mu\upsilon} + 2\rho F^{ab}_{\mu\upsilon} - 2\tau^{cb}F^{a}_{\mu\upsilon\,c}\right)Z_{ab} \\ -\tfrac{1}{2}\left(-2\tau^{cb}R^{a}_{\mu\upsilon\,c}\right)M_{ab} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

EK-C: GRUP TEORİDE KULLANILAN BAZI AÇILIMLAR

Baker-Hausdorff -Campell Formülü:

- $$e^{A}e^{B}=\exp\left(\begin{array}{l}A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}\left[A,[A,B]\right]\\ -\frac{1}{12}\left[B,[A,B]\right]-\frac{1}{24}\left[B,\left[A,[A,B]\right]\right]\\ -\frac{1}{720}\left(\left[\left[\left[[A,B],B\right],B\right],B\right]+\left[\left[\left[[B,A],A\right],A\right],A\right]\right)+\ldots\end{array}\right) \tag{4.6}$$

Hadamard formülü:

- $$\begin{array}{l}e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}\left[A,[A,B]\right]+\frac{1}{3!}\left[A,\left[A,[A,B]\right]\right]+\ldots\\ e^{-A}Be^{A}=B+[B,A]+\frac{1}{2!}\left[[B,A],A\right]+\frac{1}{3!}\left[\left[[B,A],A\right],A\right]+\ldots\end{array} \tag{4.7}$$

Zassenhaus açılımı:

- $$e^{t(A+B)}=e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}e^{\frac{t^3}{3}\left(2\left[B,[A,B]\right]+\left[A,[A,B]\right]\right)}e^{\frac{-t^4}{24}\left(\left[\left[[A,B],A\right],A\right]+3\left[\left[[A,B],A\right],B\right]+3\left[\left[[A,B],B\right],B\right]\right)}\ldots \tag{4.8}$$

- $$\begin{array}{l}[A,B]=sY \text{ ise;}\\ e^{A}e^{B}=e^{\exp(s)B}e^{A}\\ e^{A}e^{B}e^{-A}=e^{\exp(s)B}\end{array} \tag{4.9}$$

- $$e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}e^{[A,B]}\quad\left([A,B]=0 \text{ ve } \left[A,[A,B]\right]=\left[B,[A,B]\right]=0 \text{ ise}\right) \tag{4.10}$$

Diğer açılımlar

- $$\begin{array}{l}e^{A}e^{B}e^{-A}=\exp\left(e^{A}Be^{-A}\right)\\ \qquad\qquad=\exp\left(B+[A,B]+\frac{1}{2!}\left[A,[A,B]\right]+\frac{1}{3!}\left[A,\left[A,[A,B]\right]\right]+\ldots\right)\end{array} \tag{4.11}$$

- $$\begin{array}{l}e^{-cA}de^{cA}=cdA-\frac{1}{2!}\left[cA,cdA\right]+\frac{1}{3!}\left[cA,\left[cA,cdA\right]\right]+\ldots\\ e^{-cA}\delta e^{cA}=c\delta A-\frac{1}{2!}\left[cA,c\delta A\right]+\frac{1}{3!}\left[cA,\left[cA,c\delta A\right]\right]+\ldots\\ e^{-cA}\partial_{a}e^{cA}=c\partial_{a}A-\frac{1}{2!}\left[cA,c\partial_{a}A\right]+\frac{1}{3!}\left[cA,\left[cA,c\partial_{a}A\right]\right]+\ldots\end{array} \tag{4.12}$$

EK-D: POINCARE GRUBU İÇİN ALAN DENKLEMLERİNİN BULUNMASI

Burada Kibble'ın bulduğu alan denklemlerinin ara işlemlerini vereceğiz.

Konuya göre eylemin varyasyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\delta S = \int \left[\underbrace{\delta\left(\tfrac{1}{2}\wp\, h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon}\right)}_{(*^1)} + \underbrace{\delta\mathcal{L}_M}_{(*^2)} \right] d^4x = 0 \tag{4.13}$$

Burada (*) bölümünü tetratik Palatini formalizmine göre çözebiliriz;

$$(*^1) = \tfrac{1}{2}\left((\delta\wp) h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon} + \wp\left(\delta h_i{}^{\mu}\right) h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon} + \wp\, h_i{}^{\mu}\left(\delta h_j{}^{\upsilon}\right) R^{ij}{}_{\mu\upsilon} + \wp\, h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon}\left(\delta R^{ij}{}_{\mu\upsilon}\right)\right) \tag{4.14}$$

Burada $(\delta\wp)$ ifadesini bulabilmek için aşağıdaki ifadeler kullanıldı;

$$\delta\det(a) = \det(a)\left(a^{-1}\right)\delta a \tag{4.15}$$

$$\delta e = e e_i{}^{\alpha}\delta e^i{}_{\alpha} = -e e^i{}_{\alpha}\delta e_i{}^{\alpha} \tag{4.16}$$

ve buradan;

$$\delta\wp = \delta\det\left(b^k{}_{\sigma}\right) = -\wp\, b^k{}_{\sigma}\delta h_k{}^{\sigma} \tag{4.17}$$

elde edildi.

$\delta R^{ij}{}_{\mu\upsilon}$ ifadesini (|) kovaryant türevi cinsinden yazarsak;

$$\delta R^{ij}{}_{\mu\upsilon} = -\left[\left(\delta A^{ij}{}_{\upsilon}\right)_{|\mu} - \left(\delta A^{ij}{}_{\mu}\right)_{|\upsilon}\right] \tag{4.18}$$

elde edilir.

Bulduğumuz bu ifadeler yerine yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\begin{aligned}(*^1) &= \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2}\wp\, b_{\sigma}{}^{k}\delta h_k{}^{\sigma} h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon} + \tfrac{1}{2}\wp\left(\delta h_i{}^{\mu}\right) h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon} + \tfrac{1}{2}\wp\, h_i{}^{\mu}\left(\delta h_j{}^{\upsilon}\right) R^{ij}{}_{\mu\upsilon} \\ -\tfrac{1}{2} h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon}\left(\left(\delta A^{ij}{}_{\upsilon}\right)_{|\mu} - \left(\delta A^{ij}{}_{\mu}\right)_{|\upsilon}\right) \end{pmatrix} \\ &= \wp\left(\underbrace{-\tfrac{1}{2} b_{\mu}{}^{i} h_k{}^{\sigma} h_j{}^{\upsilon} R^{kj}{}_{\sigma\upsilon}}_{(*^3)} + \underbrace{h_j{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon}}_{(*^4)} \right)\delta h_i{}^{\mu} \underbrace{-\tfrac{1}{2} h_i{}^{\mu} h_j{}^{\upsilon}\left(\left(\delta A^{ij}{}_{\upsilon}\right)_{|\mu} - \left(\delta A^{ij}{}_{\mu}\right)_{|\upsilon}\right)}_{(*^5)}\end{aligned} \tag{4.19}$$

Burada işaretli kısımların çözümü aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned}\left(*^{3}\right) &= -\frac{1}{2} b^{i}{}_{\mu} h_{k}{}^{\sigma} h_{j}{}^{\upsilon} R^{kj}{}_{\sigma\upsilon} \\ &= -\frac{1}{2} b^{i}{}_{\mu} R\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}\left(*^{4}\right) &= h_{j}{}^{\upsilon} R^{ij}{}_{\mu\upsilon} \\ &= h_{j}{}^{\upsilon}\left(\delta_{k}{}^{j} b^{j}{}_{\upsilon} b^{k}{}_{\mu} R^{ik}{}_{jk}\right) \\ &= \delta_{k}{}^{j} \delta_{\mu}{}^{\upsilon} b_{\upsilon}{}^{k} R^{ik}{}_{jk} \\ &= b_{\mu}{}^{j} R^{ik}{}_{jk}\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\left(*^{5}\right) &= -\frac{1}{2}\wp\left[h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon}\left(\delta A^{ij}{}_{\upsilon}\right)_{|\mu} - h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon}\left(\delta A^{ij}{}_{\mu}\right)_{|\upsilon}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\wp\left[\left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon} \delta A^{ij}{}_{\upsilon}\right)_{|\mu} - \left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon}\right)_{|\mu} \delta A^{ij}{}_{\upsilon} - \left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon} \delta A^{ij}{}_{\mu}\right)_{|\upsilon} + \left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon}\right)_{|\upsilon} \delta A^{ij}{}_{\mu}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\wp\left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon} - h_{j}{}^{\mu} h_{i}{}^{\upsilon}\right)_{|\upsilon} \delta A^{ij}{}_{\mu}\end{aligned} \tag{4.22}$$

Bu sonuçlar ile $(*^{1})$ ifadesinin son hali aşağıdaki şekildedir;

$$\left(*^{1}\right) = \wp\left(R^{ik}{}_{jk} - \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j} R\right) b^{j}{}_{\mu} \delta h_{i}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\wp\left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon} - h_{j}{}^{\mu} h_{i}{}^{\upsilon}\right)_{|\upsilon} \delta A^{ij}{}_{\mu} \tag{4.23}$$

$(*^{2})$ ifadesinin çözümü ise aşağıdaki şekildedir;

$$\left(*^{2}\right) = \delta\mathcal{L}_{M}\left(h_{i}{}^{\mu}, A^{ij}{}_{\mu}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial h_{i}{}^{\mu}} \delta h_{i}{}^{\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial A^{ij}{}_{\mu}} \delta A^{ij}{}_{\mu} \tag{4.24}$$

Bulduğumuz $(*^{1})$ ve $(*^{2})$ denklemlerini eylemde yerine yazıp, $\delta h_{i}{}^{\mu}$ ve $\delta A^{ij}{}_{\upsilon}$ parantezlerine alırsak;

$$\delta S = \int \left\{ \begin{array}{l} \left[\wp\left(R^{ik}{}_{jk} - \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j} R\right) b^{j}{}_{\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial h_{i}{}^{\mu}}\right] \delta h_{i}{}^{\mu} \\ + \left[-\frac{1}{2}\wp\left(h_{i}{}^{\mu} h_{j}{}^{\upsilon} - h_{j}{}^{\mu} h_{i}{}^{\upsilon}\right)_{|\upsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial A^{ij}{}_{\mu}}\right] \delta A^{ij}{}_{\mu} \end{array} \right\} d^{4}x = 0 \tag{4.25}$$

elde edilir.

Burada parantez içlerini 0 aldığımızda ise;

$$\wp\left(R^{ik}_{\ jk}-\frac{1}{2}\delta^{i}_{\ j}R\right)b^{j}_{\ \mu}=-\frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial h_{i}^{\ \mu}} \tag{4.26}$$

$$-\frac{1}{2}\wp\left(h_{i}^{\ \mu}h_{j}^{\ \upsilon}-h_{j}^{\ \mu}h_{i}^{\ \upsilon}\right)_{|\upsilon}=-\frac{\partial\mathcal{L}_{M}}{\partial A^{ij}_{\ \mu}} \tag{4.27}$$

denklemleri elde edilir.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] Cebecioğlu O., **Kibaroğlu S.**, Gauge Theory of Tensor Extended Weyl Group, *Quantum Groups and Quantum Integrable Systems*, Kiev, Ukraine, 18–21 June 2013.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve ortaokul öğrenimini İstanbul'da, lise öğrenimini Kocaeli'de tamamladı. 2005 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Teknolojisi ve Programlama bölümünü 2007 yılında tamamladı. 2007-2011 yılları arasında bir yazılım firmasında yazılım uzmanı olarak çalıştı. 2008 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü 2011 yılında tamamladı ve aynı yılda Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik bölümünde Matematiksel Fizik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.