İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİNİN (KDY) ÖLÜ ZAMANLI SİSTEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Mert YARDIMCI

Anabilim Dalı: Elektrik Mühendisliği
Programı: Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Atilla BİR

HAZİRAN 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİNİN (KDY) ÖLÜ ZAMANLI SİSTEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Mert YARDIMCI
(504021144)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 1 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mayıs 2005

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Atilla BİR (İ.T.U.)**
Diğer Jüri Üyeleri	**Yrd.Doç.Dr. M. Turan SÖYLEMEZ (İ.T.U.)**
	Yrd.Doç.Dr. (İ.T.U.) Osman Kaan EROL (İ.T.U.)

HAZİRAN 2005

ÖNSÖZ

Tez konumda bana bütün bilgi birikimiyle yardımcı olan ve göstermiş olduğu büyük sabrı için tez danışmanım Prof. Dr. Atilla Bir hocama, sevgili arkadaşım Arş.Gör.Ömür Öcal'a, Hayk Markaroğlu ve Eren Erdoğan'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca tüm yaşamım boyunca bana maddi ve manevi destek için aileme ve dostlarıma sonsuz şükranlarımı sunarım.

Mayıs 2005 Mert Yardımcı

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR v
TABLO LİSTESİ vı
ŞEKİL LİSTESİ vıı
SEMBOL LİSTESİ vıı
ÖZET ıx
SUMMARY x

1. GİRİŞ 1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı 1

2. KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ 2
2.1. KDY Kontrol Sistem Yapısı 2
2.2. KDY Tasarım Parametreleri 3
2.3. Katsayı Diyagramı 7
2.4. Tasarım Parametreleri 15
2.4.1. Kararlılık İndeksi ve Kararlılık 15
2.4.1.1. Kararsızlık için Zorunluluk Koşulları 16
2.4.1.2 Kararlılık için Zorunluluk Koşulları 17
2.4.2. Eşdeğer Zaman Sabiti ve Cevap Hızı 17
2.5. Kararlılık İndisleri ve Standart Manabe Biçimi 18
2.6. KDY ile Kontrol Tasarım Prosedürü 22
2.6.1. Tasarım Öncesi Belirlenmesi Gereken Bilgiler 22
2.6.2. Kontrolör Polinom Katsayılarının Belirlenmesi 24
2.7. Ölü Zaman İçeren Sistemler İçin KDY Uygulanması 24

3. ÖLÜ ZAMAN YAKLAŞIMLARI 26
3.1. Limit Yaklaşımı 26
3.2. Seri Açılımı 28
3.3. Padé Açılımı 30
3.3.1. Padé Açılımının Uygulanması 31

4. KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ KULLANARAK YAPILAN TASARIM UYGULAMALARI 39
4.1. Uygulama 1 39
4.2. Uygulama 2 44
4.3. Uygulama 3 46

5. DİĞER TASARIM YÖNTEMLERİYLE KARŞILAŞTIRMA 49
5.1. Giriş 49
5.2. Uygulama 49

6. SONUÇLAR **53**

KAYNAKLAR **54**

ÖZGEÇMİŞ **56**

KISALTMALAR

KDY	: Katsayı Diyagram Yöntemi
PID	: Proportional Integral Derivative (Oransal İntegral Türevsel)
KD	: Katsayı Diyagramı
YSSB	: Yerleşme Süresi Standart Biçimi
CHR	: Chein, Hrones ve Reswick
IMC	: Internal Model Controller

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1.	Standart Kararlılık İndeksleri …….	19
Tablo 2.2.	Prototip Karakteristik Denklem……..……..	19
Tablo 2.3.	Prototip Karakteristik Denklem……..……..	20
Tablo 2.4.	Farklı biçimdeki bozucular için seçilmesi gereken A(s), B(s), P(s) mertebeleri ve ön koşullar ……...	23
Tablo 3.1.	Limit yaklaşımıyla yapılan açılımların karesel ortalama hataları...	27
Tablo 3.2.	Seri yaklaşımıyla yapılan açılımların karesel ortalama hataları.....	29
Tablo 3.3.	Pade açılımları ve ortalama karesel hataları ……. ……. ……. …	35
Tablo 5.1.	Farklı PID tasarım yöntemlerine ilişkin oransal, integral ve türev katsayıları …… …… …….....	50

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1.	Katsayı diyagram metoduna ilişkin temel blok diyagramı	2
Şekil 2.2.	Katsayı diyagram metoduna ilişkin alternatif temel blok diyagramı	3
Şekil 2.3.	1-Tipi sistemin yaklaşık frekans genlik cevabı	8
Şekil 2.4.	Katsayı diyagramı	9
Şekil 2.5.	Farklı γ_i kararlılık indisleri için sistem kararlılığındaki değişimi	12
Şekil 2.6.	Farklı eşdeğer zaman sabit τ değerlerinin sistem kararlılığındaki değişimi	14
Şekil 2.7.	Standart Manabe kararlılık indisli karakteristik denklemlerin kök dağılımı	21
Şekil 3.1.	Farklı n değerleri için ölü zamanın limit yaklaşımını kullanarak yapılan yaklaşımların birim basamak yanıtı	27
Şekil 3.2.	Maclaurin seri açılımlarının n=1,2,3,4,5. için kutup dağılımları	28
Şekil 3.3.	τ =1 için ölü zamanın maclaurin seri açılımları	29
Şekil 3.4.	*n*=0 ve *m*=0,1,2,3,4 için Padé açılımları	36
Şekil 3.5.	*n*=1 ve *m*=1,2,3,4 için Padé açılımları	36
Şekil 3.6.	*n*=2 ve *m*=2,3,4 için Padé açılımları	37
Şekil 3.7.	*n*=3 ve *m*=3,4 için Padé açılımları	37
Şekil 4.1.	Uygulama 1' e ait KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı	42
Şekil 4.2.	Farklı Padé açılımları için uygulama 1' e ait KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı	43
Şekil 4.3.	Uygulama 2' e ait KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı	46
Şekil 4.4.	Uygulama 3' e ait KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı	47
Şekil 4.5.	Farklı Padé açılımları için KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı	48
Şekil 5.1.	Farklı yöntemler için birim basamak yanıtı, kontrol işareti ve hata işaretleri	51

SEMBOL LİSTESİ

τ	: Eşdeğer zaman sabiti
γ	: Kararlılık indeksi
γ^*	: Kararlılık sınır indeksi
a_i	: P(s) karakteristik polinom katsayıları
k_i	: B(s) kontrolör polinom katsayıları
l_i	: A(s) kontrolör polinom katsayıları
w_i	: Kırılma noktaları
C_i	: Lipatov-Sokolov sabiti
s_i	: Karakteristik denklem kökleri
t_s	: Yerleşme zamanı
p	: A(s) polinom mertebesi
q	: B(s) polinom mertebesi
n	: N(s) polinom mertebesi
m	: D(s) polinom mertebesi
k	: Oransal kazanç
k	: Türevsel kazanç
k	: İntegral kazanç
ζ	: Sönüm oranı
R	: Padé açılım fonksiyonu

KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİNİN (KDY) ÖLÜ ZAMANLI SİSTEMLERE UYGULANMASI

Özet

Bu çalışmanın amacı doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için geliştirilen Katsayı Diyagram Metodunu tanıtmak ve ölü zamanlı sistemlere uygulamaktır. Katsayı Diyagram Yönteminde, kontrolör polinomunun katsayıları, eşdeğer zaman sabiti, kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksi gibi parametrelerin uygun seçilmesi sonucunda elde edilir. Ölü zaman içeren sistemler içinse, ölü zamanın bir rasyonel fonksiyon biçiminde ifade edildikten sonra Katsayı Diyagram Yöntemi uygulanır. Yapılan yaklaşımın doğruluk miktarı artıkça Katsayı Diyagram Yönteminden elde edilen kontrolöründe uygunluğu artmaktadır. Endüstride ki birçok uygulamada ölü zaman olduğu düşünülürse bu tasarım yöntemi birçok uygulamada kullanılabilir.

DESIGN OF CONTROLLER FOR TIME-DELAY SYSTEMS BY COEFFICIENT DIAGRAM METHOD

Abstract

The objective of thesis is to introduce the Coefficient Diagram Method (CDM), which is new control design method for linear time-invariant control systems, and design a controller for time-delay systems by CDM. In CDM method, the coefficient of the target characteristic polynomial is obtained by using the convenient chosen CDM parameters such as equivalent time constant, stability index, and stability limit index. For the time delay systems, delay is approximated by rational function and after that CDM method apply. If the approximation of the accuracy rate is increased, the result from the CDM method will show better performance. The using of CDM method may be more suitable by considering that most of the industrial applications have time-delays.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Katsayı Diyagram Yöntemi (KDY) kontrol sistemlerinde kontrolör tasarlamak için geliştirilmiş bir yöntemdir. Katsayı Diyagram Yönteminin temeli uzun yıllardan beri kontrol teorisinde bulunmasına rağmen yöntem ilk defa 1991 yılında Shunji Manabe tarafından doğrusal ve zamanla değişmeyen tek girişli tek çıkışlı sistemlerin kontrolü için geliştirilmiştir. Manabe KDY yöntemini geliştirirken mevcut yöntemlerin üstünlüklerini alıp temel prensiplerin daha uygun bir şekilde uygulanmasını sağlamıştır. Bunun sonucunda KDY yöntemi kontrol tasarımına yönelik daha etkili, verimli ve diğer yöntemlerden daha kolay uygulanabilen analitik bir yöntem haline gelmiştir.

Günümüzdeki sistemler zamanla değişmeyen, zamanla değişen, doğrusal , doğrusal olmayan ...vb gibi farklı özellikler vardır. Bunun gibi özelliklere ek olarak da ölü zaman yada zaman gecikmesi de içerebilir. Endüstrideki hemen hemen birçok uygulamada gecikme görülebilir ve bu gecikme etkisini göz önüne alınarak birçok kontrol tasarım yöntemi vardır. Fakat temelde hepsinin ortak noktası ölü zamanın kesirli bir fonksiyon biçiminde yaklaşımı yapıldıktan sonra kontrolör tasarlanmaktadır

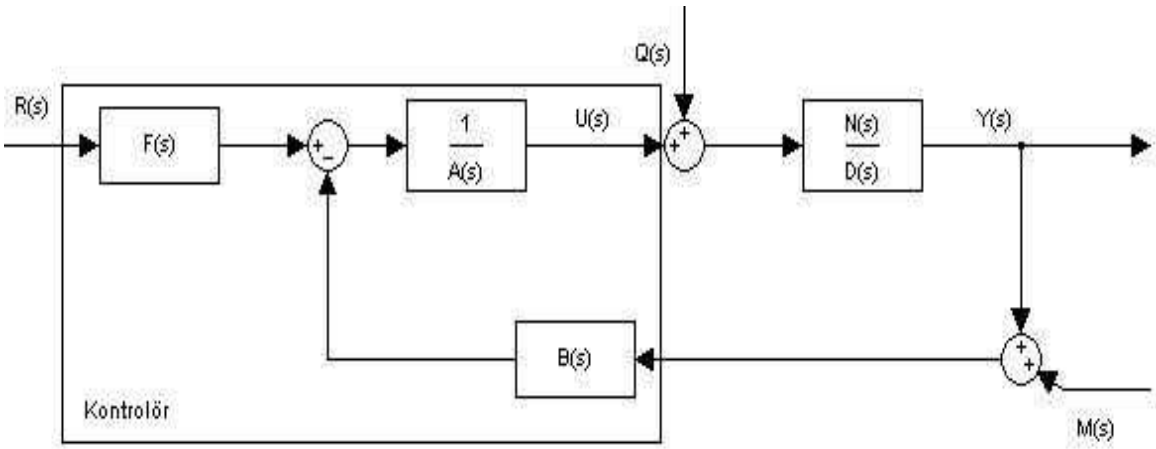
Shunji Manabe tarafından 1991 yılından itibaren yapılan çoğu uygulamada ölü zaman içeren birinci ve ikinci mertebeden sistemler için KDY yöntemini uygulayarak kontrolör tasarlanmıştır. Takip edilen bölümlerde ise her mertebeden doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için KDY yöntemini uygulanacak ve başka yöntemlere göre üstünlükleri örnekler üzerinde gösterilecektir.

2. KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ

2.1 KDY Kontrol Sistem Yapısı

Kontrol sistemleri için kontrolör tasarlanırken uygulamada önem taşıyan bazı sınırlamaları dikkate almak gerekmektedir. Genellikle kontrolörün mümkün olduğu kadar düşük mertebeli, minimum fazlı ve kararlı olması istenir. Ayrıca kontrolörün yeterli bant genişliğine ve güç sınırlamasına sahip olması istenmektedir. Katsayı diyagram metodu ile kontrolör tasarımında bu özelliklerin hepsi dikkate alınmaktadır. Katsayı diyagram yöntemiyle tasarlanan kontrolörler düşük mertebeli, uygun bant genişliğine sahip ve kapalı çevrim transfer fonksiyonun zaman cevabının aşımsız olması sağlanır.

Tek-giriş tek-çıkışlı bir sistem için katsayı diyagram metodu uygulamak için standart blok diyagram Şekil 2.1 de verilmiştir.

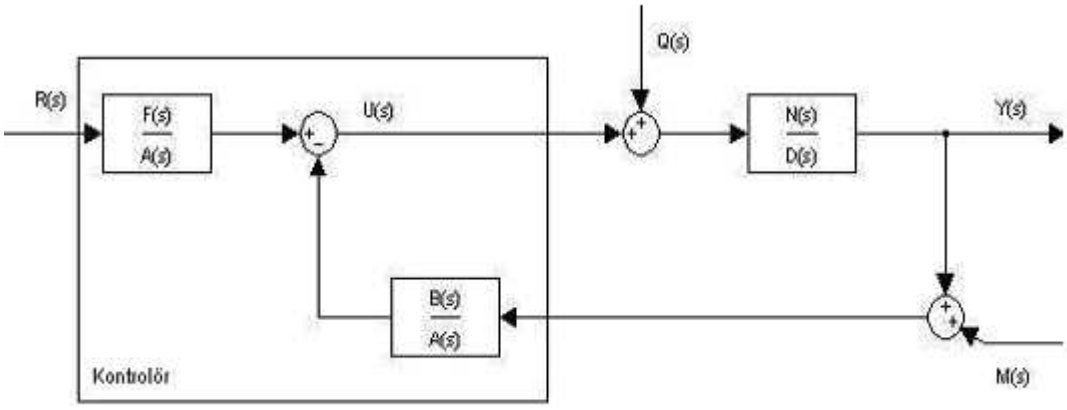


Şekil 2.1 : Katsayı diyagram metoduna ilişkin temel blok diyagramı

Şekil 2.1 deki temel blokta *r(t)* referans girişini, *y(t)* sistem çıkışını, *u(t)* kontrol işaretini, *q(t)* sisteme etkiye gürültü işaretini, *e(t)* hata işaretini ve *m(t)* ise geri besleme yada ölçme gürültüsünü ifade etmektedir. Ayrıca kontrolör yapısındaki *A(s)* payda polinomu, *F(s)* referans payda polinomu ve *B(s)* ise geri besleme pay polinomudur. *G(s)* kontrol edilmesi istenen sistemin transfer fonksiyonu olup

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.1}$$

şeklinde iki polinom oranından oluşur. Eğer *1/A(s)* bloğunu kaydırırsak Şekil 2.2 deki yapı elde edilir.



Şekil 2.2 : Katsayı diyagram metoduna ilişkin alternatif temel blok diyagramı

elde edebiliriz. Burada önemli olan fiziksel sistemlerde polinomlarının mertebeleri arasındaki ilişkinin $de\{g(D)\}\geq de\{g(N)\}$ ve $de\{g(A)\}\geq de\{g(B)\}$ $de\{g(F)\}$ biçiminde olmasıdır.

Temel blok diyagramlarından (Şekil 2.1 ve Şekil 2.2)

$$U(s)=\frac{F(s)R(s)-B(s)Y(s)-A(s)M(s)}{A(s)} \tag{2.2}$$

ve

$$Y(s)=Q(s)+U(s)\frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.3}$$

ifadeleri elde edilir. Eğer Denklem (2.2), Denklem (2.3) de yerine konursa

$$Y(s)=Q(s)+\left[\frac{F(s)R(s)-B(s)Y(s)-A(s)M(s)}{A(s)}\right]\frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.4}$$

ilişkisi elde edilir. Sonuç olarak kapalı çevrimli sistemin çıkışı

$$Y(s) = \frac{A(s)N(s)}{A(s)D(s)+B(s)N(s)}Q(s) + \frac{F(s)N(s)}{A(s)D(s)+B(s)N(s)}R(s) \qquad (2.5)$$

$$- \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s)+B(s)N(s)}M(s)$$

olarak bulunur. Burada $A(s)D(s)+B(s)N(s)$, kontrol sisteminin karakteristik denklemidir. Eğer karakteristik denklemi

$$P(s) = A(s)D(s)+B(s)N(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \qquad (2.6)$$

biçiminde ifade edersek, sistem çıkışı kısaca

$$Y(s) = \frac{A(s)N(s)}{P(s)}Q(s) + \frac{F(s)N(s)}{P(s)}R(s) - \frac{B(s)N(s)}{P(s)}M(s) \qquad (2.7)$$

biçiminde yazılabilir. Aynı şekilde *U(s)* kontrol işareti (2.2) denklemi ve (2.6) denklemindeki daki *Y(s)* ifadesi kullanılırsa

$$U(s) = \frac{F(s)}{A(s)}R(s) - \frac{B(s)}{A(s)}\left[\frac{A(s)N(s)}{P(s)}Q(s) + \frac{F(s)N(s)}{P(s)}R(s) - \frac{B(s)N(s)}{P(s)}M(s)\right] - M(s) \qquad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.8) kontrol işareti daha düzgün yazılırsa

$$U(s) = \frac{F(s)D(s)}{P(s)}R(s) - \frac{B(s)N(s)}{P(s)}Q(s) - \frac{B(s)D(s)}{P(s)}M(s) \qquad (2.9)$$

daha sade bir ifade elde edilir. Aynı şekilde hata işareti

$$E(s) = A(s)U(s) \qquad (2.10)$$

ilişkisinden

$$E(s) = \frac{A(s)F(s)D(s)}{P(s)}R(s) - \frac{A(s)B(s)N(s)}{P(s)}Q(s) - \frac{A(s)B(s)D(s)}{P(s)}M(s) \qquad (2.11)$$

elde edilir.

2.2 KDY Tasarım Parametreleri

Bununla birlikte KDY'de γ_i kararlılık indeksi, γ_i^* kararlılık sınır indeksi ve τ eşdeğer zaman sabiti olarak adlandırılan üç farklı tasarım parametresi vardır. Bu parametrelerin sırasıyla sistem kararlılığı, dayanıklılık ve zaman cevap hızı ile yakından ilişkilidir. Kararlılık indeksi ile kararlılık sınır indeksi sistemin kararlılığı ve zaman cevabının biçimini (salınımlı, aşımsız vb.) belirlerken, aynı zamanda sistemin parametre değişimlerine karşı kontrol sisteminin dayanıklılığının da ölçüsünü verir. Bu nedenden dolayı kapalı çevrim karakteristik polinomu γ_i, γ_i^* ve τ cinsinden ifade edilebilir. Karakteristik denklemin genel ifadesi denklem (2.6) da verilmişti ancak bu denklemi

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \tag{2.12}$$

biçiminde de yazarsak, polinomun a_i katsayıları ile performans parametreleri arasındaki ilişki

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1} a_{i-1}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \gamma_0 = \gamma_n = \infty \tag{2.13}$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0}, \quad a_1 = \tau a_0 \tag{2.14}$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilebilinir. Eğer karakteristik denklemin katsayıları hesaplanırsa

$$\gamma_1 = \frac{a_1^2}{a_2 a_0} \Rightarrow a_2 = a_1 \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{\gamma_1} \tag{2.16}$$

ifadesinden

$$a_2 = \frac{a_1^2}{a_0} \frac{1}{\gamma_1} \tag{2.17}$$

denklem (2.14)deki eşdeğer zaman sabiti ilişkisi ile

$$a_2 = \frac{\tau^2 a_0}{\gamma_1} \tag{2.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde a_3 için de yaparsak

$$a_3 = \frac{\tau^3 a_0}{\gamma_1^2 \gamma_2} \tag{2.20}$$

bulunur.

Denklem (2.13)-(2.15) göz önüne alındığında, karakteristik denklemin katsayılarının Manabe tasarım parametreleri cinsinden

$$a_i = \frac{\tau^i a_0}{\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \gamma_3^3 \cdots \gamma_1^{i-1}} = \frac{\tau^i}{\prod_{j=0}^{i-1} \gamma_j^{i-1}} \quad i \geq 2 \tag{2.20}$$

biçiminde genelleştirilmiş bir şekilde ifade edilebileceği görülür.

Manabe tarafından belirtilen karakteristik denklem katsayılarını P(s) sistem karakteristik polinomumuna yerleştirmek istersek önce karakteristik denkleminden a_0 parantezine alınmalıdır.

$$P(s) = a_0 \left[\left(\frac{a_n}{a_o} \right) s^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_o} \right) s^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_2}{a_o} \right) s^2 + \left(\frac{a_1}{a_o} \right) s + 1 \right] \tag{2.21}$$

Ayrıca Denklem (2.14) de belirtilen eşdeğer zaman sabiti eklenirse

$$P(s) = a_0 \left[\left(\frac{a_n}{a_o} \right) \tau^n s^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_o} \right) \tau^{n-1} s^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_2}{a_o} \right) \tau^2 s^2 + \left(\frac{a_1}{a_o} \right) \tau s + 1 \right] \tag{2.22}$$

denklem (2.22) elde edilir. Son olarak (2.20) de belirtilen genelleştirilmiş ifadeden yararlanılırsa genelleştirilmiş karakteristik denklem

$$P(s) = a_0 \left[\left\{ \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^j} \right) \right\} s(\tau)^i + \tau s + 1 \right] \tag{2.23}$$

γ_i ve τ parametreleri ile ifade edilmiş olur. Denklem (2.23) tasarıma başlarken belirlenen tasarım parametreleri göz önüne alınarak oluşturulan hedef transfer fonksiyonu olarak kullanılır. Böylece τ eşdeğer zaman sabitinden dolayı yerleşme zamanı belirlenir ve γ_i kararlılık indeksleri sayesinde de kapalı çevrimli sistemde istenilen sistem dinamiği yerine getirilmiş olur.

2.3 Katsayı Diyagramı

Katsayı diyagramı Bode diyagramı gibi frekans cevap yönteminden yararlanarak oluşturulan bir grafiktir. Ancak Bode diyagramından farklı olarak 3 kenarı da kullanılır. Yatay eksende *i* indeksleri, sol dikey ekseninde a_i polinom katsayıları ve sağ dikey ekseninde ise γ_i kararlılık indeksleri, γ_i^* kararlılık sınır indeksleri ve τ eşdeğer zaman sabiti bulunur.

1950 yıllarında yapılan çalışmalar sonucunda frekans yanıt yöntemleri ortaya çıkmıştır. Ancak 1958 yılında yapılan çalışmalarda (Tustin ve diğ) Bode diyagramının kullanarak tasarlanan kontrolörlerde kazanç payı (gain margin) ve faz payı (phase margin) gibi parametrelerin yeterli olmadığı ve açık çevrim transfer fonksiyonunun frekans karakteristiğinin yeterince geniş bir frekans bandında uygun bir biçimde olması sonucuna varır.

Chestnut (1951) açık çevrim transfer fonksiyonuna ait Bode diyagramı için önerilen asimptotik – çizgi yaklaşımı ile kırılma noktalarının yerleri ve buralardaki eğrilerin eğiminin değişimine ilişkin bilgilerle, kontrol sistemlerin tasarımında kolaylık sağlar. Çünkü kırılma noktalarının arasındaki fark yaklaşık olarak γ_i kadardır. Ancak karmaşık sistemlerde Chestnut'ın ortaya koyduğu bu pratik gösterim uygulanabilir hale getirilmek istenmiştir. Kırılma noktalarının yerini kararlılık indisleri ve Bode eğrisinin yerini ise katsayı diyagramının kullanımı önerilir (MANABE 1998a).

Katsayı diyagramı ve Bode diyagramı arasındaki ilişkiyi anlamak için 1-Tipi türünden bir sistem ele alalım. Çünkü 1-Tipi sistemlerin basamak yanıtında kararlı hal hatası ve rampa yanıtına da sabit bir kararlı hal hatası oluşur. 1-Tipi sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunu

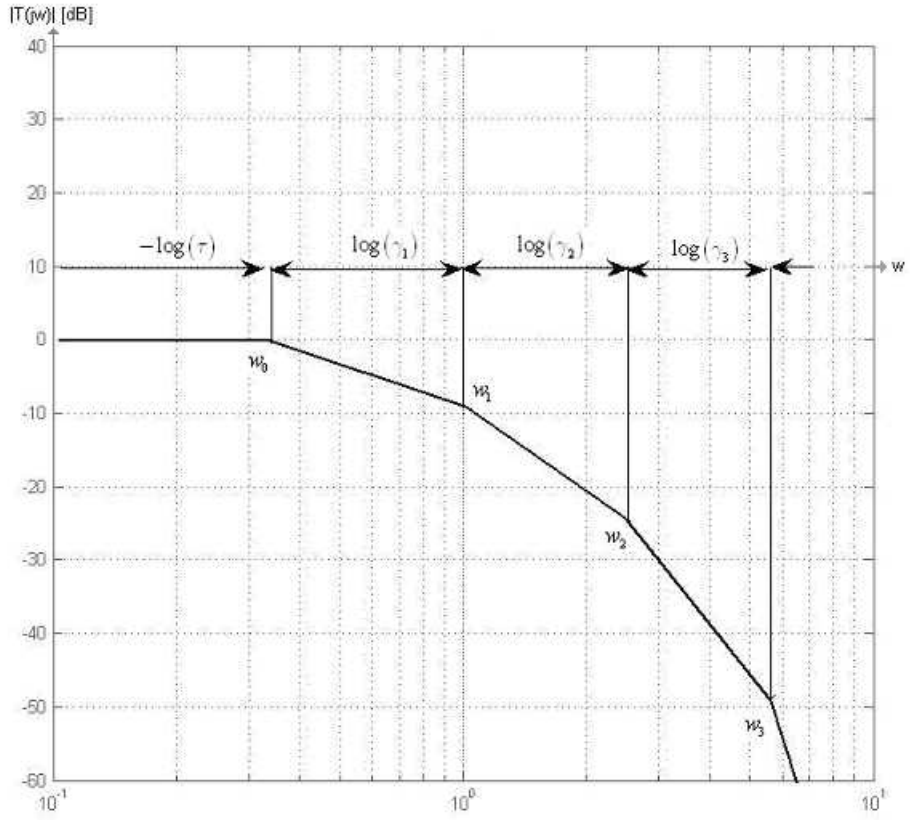
$$T(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{a_0}{P(s)} \tag{2.24}$$

biçiminde olduğunda sistemin karakteristik fonksiyonu

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{2.25}$$

şeklindedir.

Bu sistem için Chestnut' un belirttiği asimtotik – çizgi yaklaşımını kullanarak genel bir Bode genlik diyagramı Şekil 2.3 de verilmiştir.



Şekil 2.3 :1-Tipi sistemin yaklaşık frekans genlik cevabı

Geleneksel Bode diyagramından farklı olarak burada transfer fonksiyonun kutup ve sıfırları değil, karakteristik denklem katsayılarının oranları kullanılmıştır. Böylece kırılma noktaları

$$w_i = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{\tau_i} \quad , \; i = 0 \quad n(\sim \quad 1) \tag{2.26}$$

ile tanımlanır ve kırılma noktalarının birbirine oranı ise

$$\gamma_i = \frac{w_i}{w_{i-1}}, \quad i = 0 \quad n(\sim \quad 1) \tag{2.27}$$

biçiminde kararlılık indekslerini verir. Böylelikle Bode diyagramını bu şekilde kullanarak kontrolör tasarımında kolaylık sağlanır, çünkü bu yapıyla sistem katsayılarını istenilen kapalı çevrim frekans yanıtına uygun bir değerde seçmemizi sağlar.

Sonuç olarak katsayı diyagramı Bode ve Nyquist eğrileri gibi kararlılık ve zaman cevabına ilişkin bilgiler vermek dışında ayrıca sistemin dayanıklığı hakkında da bilgi verdiğinden katsayı diyagram yönetiminin verimliliğini arttırır.

Katsayı diyagramını daha iyi anlamak için

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 0.2s^2 + 0.4s + 0.8} \tag{2.28}$$

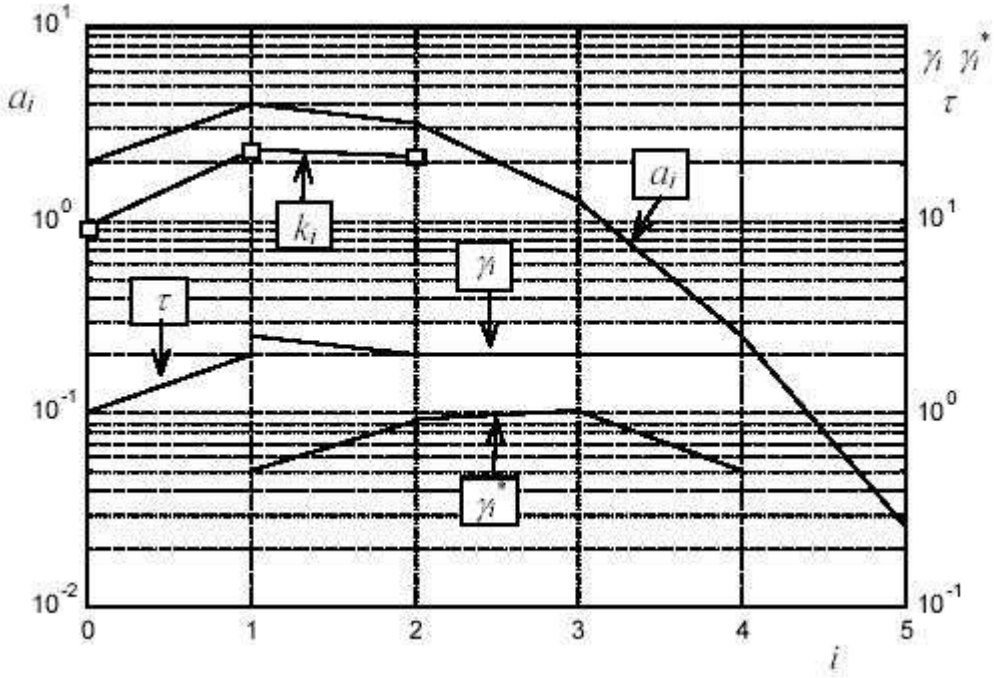
biçiminde bir sistem ele alalım.Burada $\tau = 2$ ve $\gamma_i = [2.5, 2, 2]$, olarak kabul edelim. Bu bilgiler vasıtasıyla, daha sonra anlatılacak tasarım prosedürüyle

$$A(s) = 1.024 + 0.238s + 0.402s^2 + s^3 \tag{2.29}$$

$$B(s) = 1.180 + 2.379s + 1.925s^2 \tag{2.30}$$

$$P(s) = 2.443 + 2.581s + 2.803s^2 + 2.560s^3 + 0.252s^4 + s^5 \tag{2.31}$$

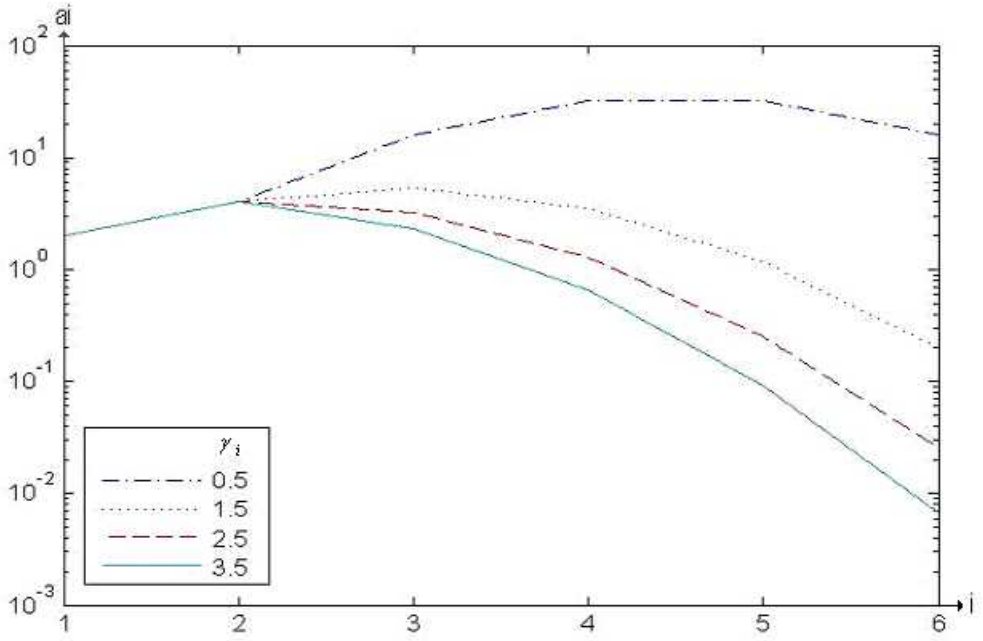
şeklindeki *A(s)* kontrolör transfer fonksiyonun payda polinomunu, *B(s)* geri besleme pay polinomunu ve *P(s)* karakteristik polinomu elde edilir. Şekil 2.4'te tasarlanan kontrol sistemine ilişkin katsayı diyagramı görülür.



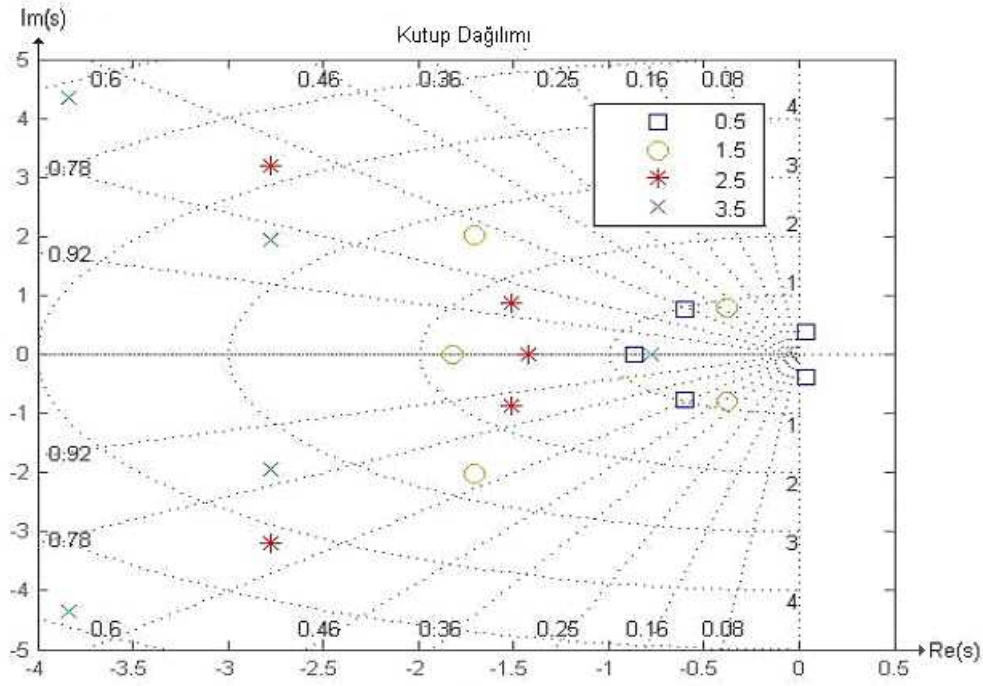
Şekil 2.4 : Katsayı diyagramı

Şekil 2.4 te a_i karakteristik denklem katsayılarından oluşan katsayı eğrisi, τ eşdeğer zaman sabiti, γ_i kararlılık indeksinin oluşturduğu kararlılık eğrisi, γ_i^* kararlılık sınır indeksinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisi, k ve l ise kısmi katsayı eğrilerini göstermektedir. Denklem (2.13-15)'den anlaşıldığı gibi kararlılık eğrisi ve kararlılık sınır eğrisi birbirleriyle ilişkilidir. Eğer katsayı eğrisinin dışbükeylik derecesi arttıkça kontrol sisteminin kararlılığı da artar. Aynı şekilde dışbükeylik

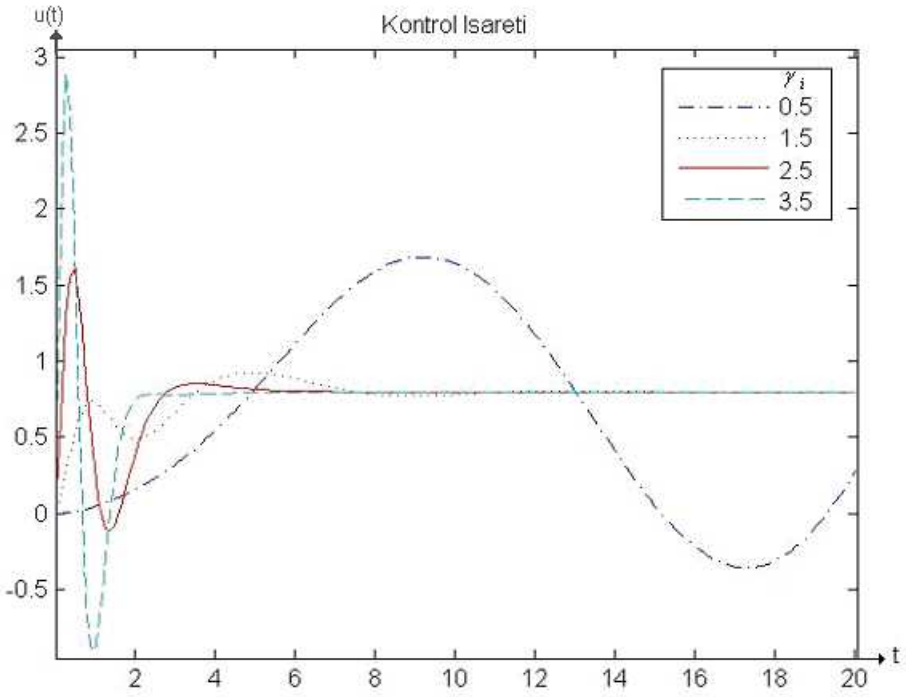
azaldıkça kararlılık özelliği azalmaktadır ki sistem kararsız hale bile gelmektedir. Açık çevrim transfer fonksiyonu denklem (2.28) de verilen sistem için farklı γ_i kararlılık indisleri alındığında, sistemin birim basamak yanıtı ve sistem kutuplarının değişimi Şekil 2.5 de verilmiştir.



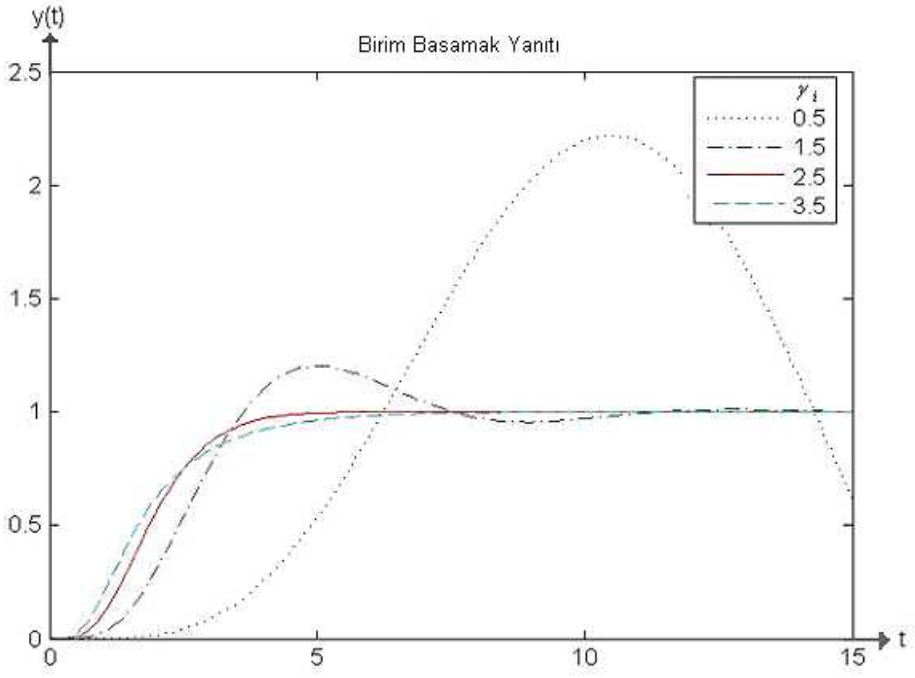
(a)



(b)



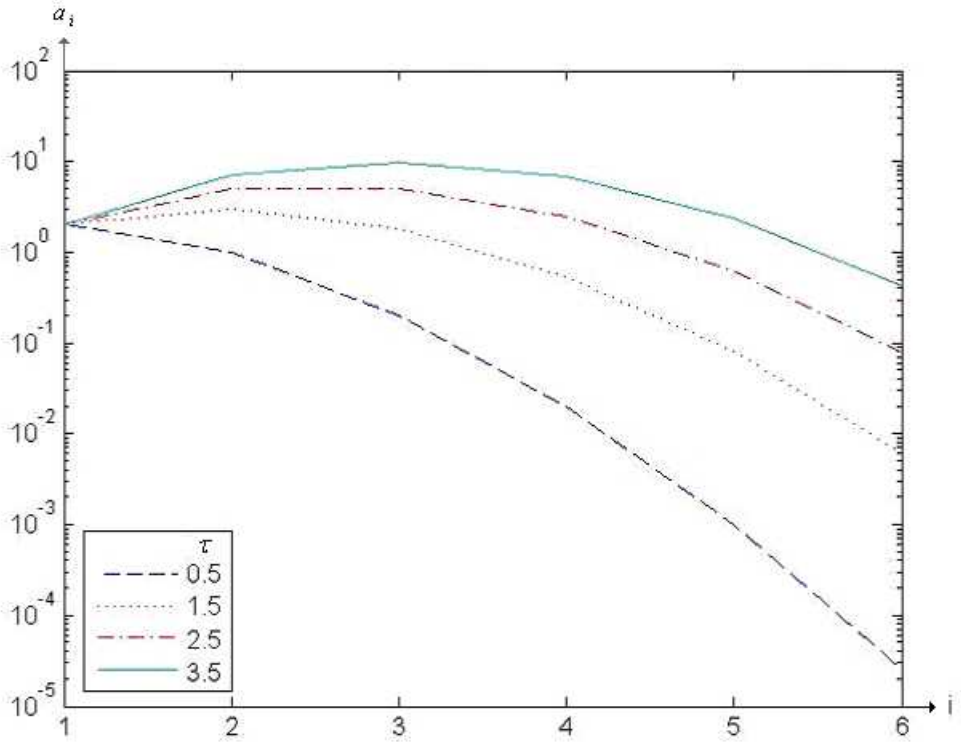
(c)



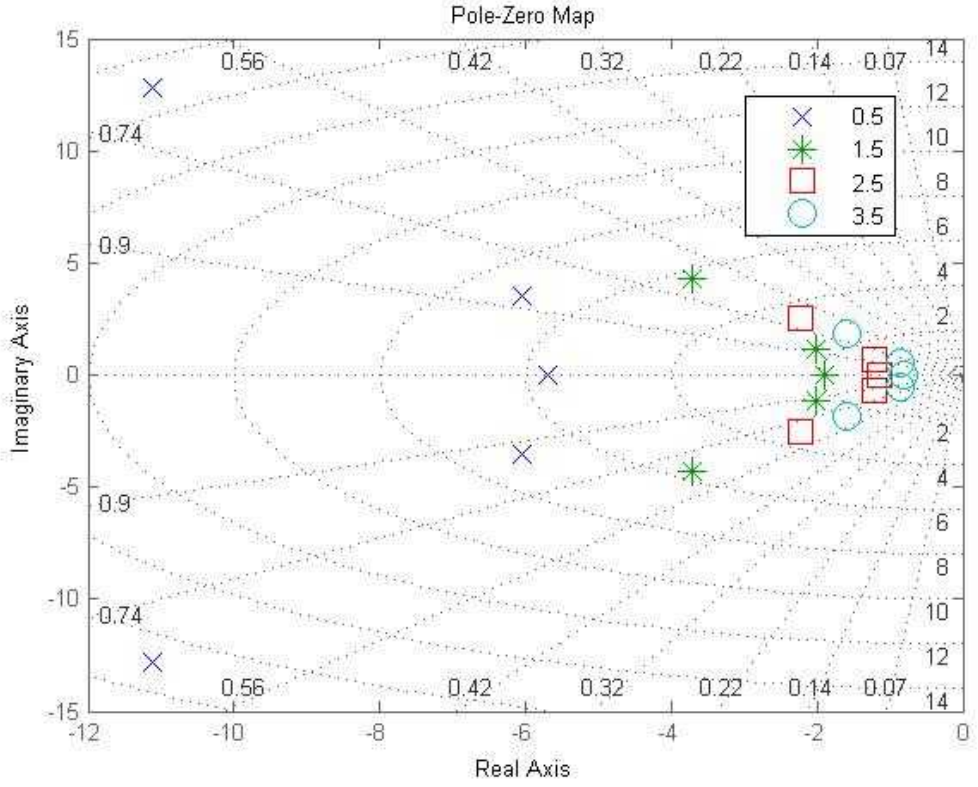
(d)

Şekil 2.5 : Farklı γ_i kararlılık indisleri için sistem kararlılığındaki değişim a) a_i katsayı diyagramı b) s-düzleminde kapalı çevrim kutup dağılımı c) *u(t)* kontrol işareti d) *y(t)* birim basamak yanıtı değişimi

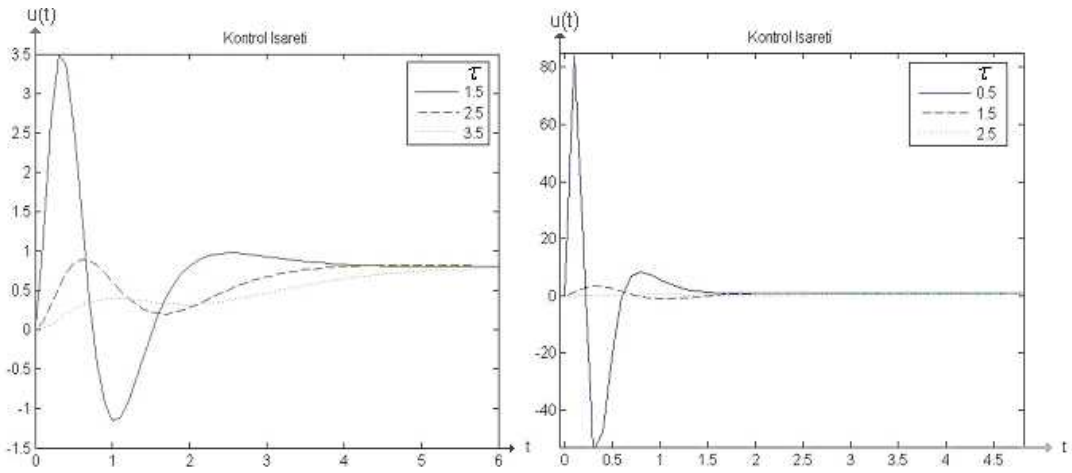
Katsayı diyagramında, karakteristik denklem katsayılarının a_0 başlangıç ve a_n bitiş noktasına göre konumu, cevap hızı için bir ölçüdür. Eğer bitiş noktası, başlangıç noktasından daha aşağıda ise, yani eşdeğer zaman sabiti τ daha küçük ise, sistemin cevap hızı daha yüksek olacaktır. Benzer şekilde bitiş noktası başlangıç noktasından daha yukarıda olursa, yani eşdeğer zaman sabiti τ daha büyükse, sistemin cevap hızı daha yavaş olacaktır. Çünkü eşdeğer zaman sabiti τ bant genişliğini doğrudan etkiler. Şekil-6'da denklem (2.28)'de verilen kontrol sistemi için farklı eşdeğer zaman sabit τ değerleri için katsayı değişim eğrisi ve sistem basamak giriş yanıtları verilmiştir.



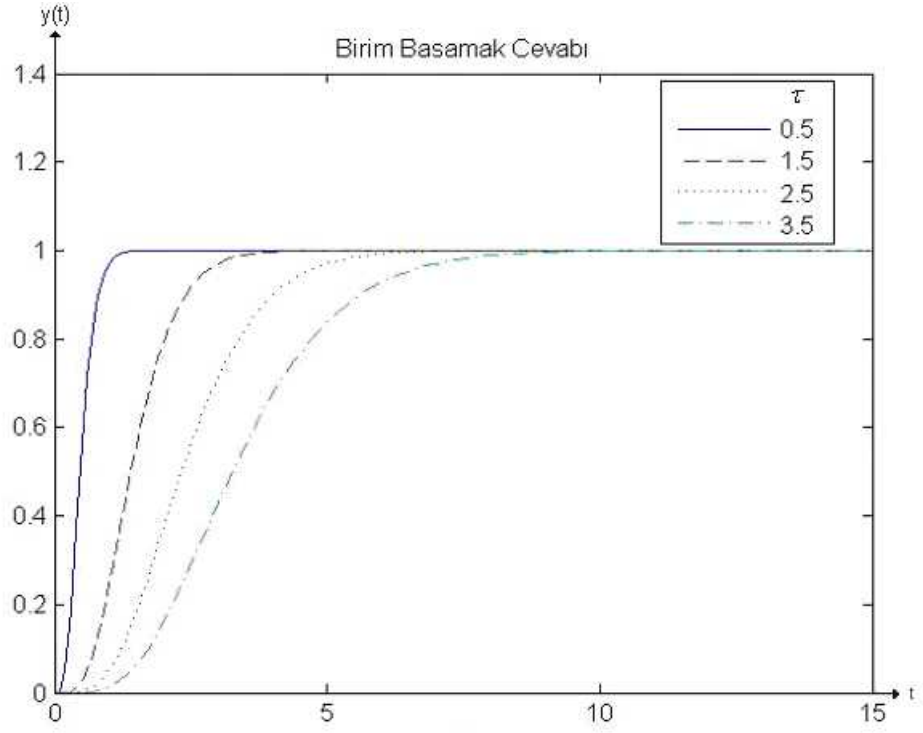
a)


Pole-Zero Map
Imaginary Axis
Real Axis
0.5
1.5
2.5
3.5
0.56
0.42
0.32
0.22
0.14
0.07
0.74
0.9

(b)


u(t)
Kontrol Isareti
τ
1.5
2.5
3.5
t
u(t)
Kontrol Isareti
τ
0.5
1.5
2.5
t

(c)



(d)

Şekil 2.6 : Farklı τ eşdeğer zaman sabit değerlerinin, a) katsayı diyagramına b) s-düzleminde kapalı çevrim kutup dağılımına, c) *u(t)* kontrol işaretine, d) *y(t)* birim basamak yanıtlarına etkisi.

Kontrol sisteminin dayanıklılığı ise *B(s)*'in katsayılarından oluşmuş k_i katsayı eğrisine göre yorumlanır. Bunun için duyarlılık faktörü olarak bilinen

$$\frac{\Delta a_i / a_i}{\Delta k_i / k_i} = \frac{k_i}{a_i} \leq 1 \tag{2.32}$$

ifade göz önünde bulundurulur.(Manabe 1998)

Duyarlılık faktörü k_i katsayılarının değişiminin , a_i katsayı değişimine oranını ifade eder. Bu oran 1 den küçük olursa duyarlılık artar ve böylece dayanıklılık da artmış olmaktadır. Eğer açık çevrim transfer fonksiyonu (2.28) de ifade edilen sisteme (2.32) koşulu uygulanırsa

$$\frac{\Delta a_0 / a_0}{\Delta k_0 / k_0} = \frac{k_0}{a_0} = \frac{1.1808}{2} = 0.590 \tag{2.33}$$

$$\frac{\Delta a_1 / a_1}{\Delta k_1 / k_1} = \frac{k_1}{a_4} = \frac{2.791}{} = 0.697 \quad (2.34)$$

$$\frac{\Delta a_2 / a_2}{\Delta k_2 / k_2} = \frac{k_2}{3a_2} = \frac{1.9251}{2} = 0.6015 \quad (2.35)$$

sonuçlar elde edilir. Görüldüğü gibi tüm değerler 1 den küçük olduğu için sistem parametrelerindeki herhangi bir değişikliğe karşı kontrol sisteminin dayanıklı olduğu anlışılır. Dayanıklılık derecesi ise bu elde edilen parametrelerdeki değişime göre belirlenir. Yalnız her değer için böyle hesap yapmak yerine katsayı diyagramını kullanarak doğrudan sistemin dayanıklı olup olmadığı görsel olarak da kolaylıkla test edilebilir. Çünkü (2.32) ifadesi aslında a_i katsayı eğrisinin, k_i kısmi eğrisinin, üstünde veya çakışması gerektiğini belirtir. Kısmi katsayı eğrisi, a_i katsayı eğrisinden ne kadar küçükse, sistem o kadar dayanıklıdır.

2.4 Tasarım Parametreleri

2.4.1 Kararlılık İndeksi ve Kararlılık

Herhangi bir kontrolörle kontrol edilen bir sistemin kararlı olması yani Hurwitz kararlılığına sahip olması gerekmektedir. Bunun için de kapalı çevrim transfer fonksiyonundan elde edilen karakteristik denklemin kökleri s-düzleminin sol tarafında bulunmalıdır. Hurwitz koşullarını ifade etmek yani sistemin kararlılığı hakkında bilgi edinmek için Routh kriterlerinden yararlanılır. Routh kriteri sayesinde sistem kararlılığı analitik olarak ifade edilebilir. Ancak sistemin mertebesi arttığında Routh kriterinin uygulanması zorlaşır. Ayrıca kontrol tasarımı için genellikle sistemin matematiksel modeli kullanıldığından, elde edilen kontrolör uygulamaya geçildiğinde hatalar ortaya çıkar. Bu sebeplerden dolayı KDY yapısına Routh-Hurwitz kriterinin yanında Lipatov-Sokolov kriteri de dahil edilir (Manabe, 1994c). Lipatov koşulları, karakteristik denklemin Hurwitz kararlı yada kararsız olduğunun analizi için sadece yeterlilik koşullarını verir. Buna karşın Lipatov-Sokolov kriteri, Routh kriterine göre bir yaklaşıklık kriteri olarak göz önüne alınabilir. Kararlılığı ifade etmedeki kolaylık ve kararlılık derecesini gösterme yeteneği açısından pratik ve avantajlıdır. Aynı zamanda Lipatov-Sokolov kriterindeki KDY' nın tasarım parametreleri ile yakından ilişkilidir ve bu parametreler cinsinden kolayca ifade edilir. Bu yüzden de KDY' de bu kriterleri kullanmak üstünlük sağlar

2.4.1.1 Kararsızlık için Zorunluluk Koşulları

Koşul 1. γ_i performans parametreleri cinsinden ifade edilirse

$$\gamma_{i-1}\gamma \le 1 \quad \exists i \text{ için i=2,3....n-1} \tag{2.36}$$

olarak tanımlanır. Bu koşul 3.mertebeden kısmi a_i polinom katsayıları cinsinden

$$a_{i-1}\ q \le 2\ q\ a + a \quad \exists i \text{ için i = 2,3....n-1} \tag{2.37}$$

şeklinde de ifade edilir.

Koşul 2. γ_i performans parametreleri cinsinden

$$\gamma_{i-}\ \gamma_i^2\ \gamma_{+1\,i} \le C_n \quad \exists i \text{ için i = 2,3....n-1} \tag{2.38}$$

şeklindedir ve bu ifade 5. mertebeden kısmi a_i polinom katsayıları cinsinden de

$$C_{i\ n} = \left(n - \frac{(-1)^{n+}}{2}\ i + \left(\frac{i\ (-1)}{2}\ i + 3 \right) n - \left(\frac{n-1(\ )}{2}\ i + \frac{-1}{2} \right) i + \left(\frac{-1^{\,i}\ (\ -1)}{} \right) \right) \tag{2.39}$$

olmak üzere

$$a_i^2 \le C_{\ n}\ a_{+2}\ q_{+1} \quad \exists i \text{ için i = 2,3....n-1} \tag{2.40}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bu koşullar, aynı zamanda kararlılık için zorunlu koşullar olduğundan, önem taşır. Kararsızlık için her iki koşulunda sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

2.4.1.2 Kararlılık için Zorunluluk Koşulları

Koşul 1. Kararlılık sınır koşulu diye ifade edilir ve γ_i performans parametreleri cinsinden

$$\gamma_{i-1}\gamma > 2\ .\ 1\ 5\ (\ \forall i \text{ için i=2,3....n-1} \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilir ve 3. mertebeden kısmi a_i polinom katsayıları cinsinden

$$a_{i-1} \quad a\ 2_{-2}\ 1a5\ 0_{+1}a \quad \forall i \text{ için i = 2,3....n-1} \tag{2.42}$$

ile ifade edilir.

Koşul 2. γ_i performans parametreleri cinsinden

$$\gamma_i > 1 \quad \forall i \text{ için i=2,3....n-2} \tag{2.43}$$

biçiminde ifade edilir ve a_i kısmi polinom katsayıları cinsinden ise

$$a_i > 1 \quad \forall i \text{ için i = 2,3....n-1} \tag{2.44}$$

şeklinde ifade edilir.

Kararlılık için 2. koşul kesinlikle kontrol edilmelidir.

2.4.2 Eşdeğer Zaman Sabiti ve Cevap Hızı

Karakteristik denklem kökleri cinsinden ifade edilirse

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - s_i) \tag{2.45}$$

yazılabilinir. Bu denklemde görülen s_i'ler karakteristik denklemin kökleridir. (2.45) denkleminde $s = 0$ için

$$\frac{a_o}{a_n} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} s_i \tag{2.46}$$

ilişkisi elde edilir. (2.45) çarpanları açılır ve s'in kuvvetlerine göre tekrar düzenlenirse

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} s_i \tag{2.47}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{\substack{i=1 \\ i>j \\ i\neq j}}^{n} s_i s_j \tag{2.48}$$

$$\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{s_j}{} \tag{2.49}$$

yazılabilir. Buradan τ eşdeğer zaman sabiti

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \frac{(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{s_j}{s_i}}{(-1)^n\prod_{i=1}^{n}s_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \qquad (2.50)$$

biçiminde karakteristik denklemin s_i kökleri ve a_i katsayıları cinsinden ifade edilebilir. Bu ifadeden τ eşdeğer zaman sabiti ile cevap hızı arasındaki ilişki açıkça görülür. τ eşdeğer zaman sabiti azaldığında karakteristik denklemin kökleri *s*-düzleminin solunda, orijinden uzaklaşmaya başlar. Böylece sistemin cevap hızı artar.

2.5 Kararlılık İndisleri ve Standart Manabe Biçimi

Yapılan çalışmalar neticesinde, karakteristik denkleminin katsayıları ile kökleri arasında ilişkiden yararlanarak, sistem geçici hal davranışı için standart biçimler belirlenmiştir. Bunlardan bazıları Binomial, Bessel, ITAE (Integral of Time Multiplied by Absolute Value of Error) , Kessler...vb gibi isimlerle adlandırılır. 1991 yılında Shunji Manabe γ_i kararlılık indeksinin ilk değerini 2.5 olarak belirtmiş ve Kessler'in standart biçimini yeniden düzenlemiştir. Böylece 1-tipi biçimindeki kontrol sistemleri için, aşımsız bir zaman cevabı elde ederek, Standart Manabe Biçimi önerilmiştir. Manabe bu sonucu tamamen deneysel yaklaşımlara bağlı olarak oluşturmuştur. Tablo 2.1 de belirlenen standart biçimler yer almaktadır.

Tablo 2.1 : Standart γ_i Kararlılık İndeksleri

Biçim	*n*	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	Biçim	*n*	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
Binomial	3	3	3			ITAE	3	2.641	1.424		
	5	2.5	2	2	2.5		5	2.102	1.78	1.624	1.568
Bessel	3	2.5	2.4			Kessler	3	2	2		
	5	2.25	1.778	1.75	2.14		5	2	2	2	2
YSSB	3	2.845	1.144			Manabe	3	2.5	2		
	5	2.232	1.372	2.54	0.613	(KDY)	5	2.5	2	2	2

Tablo 2.1 de görüldüğü üzere KDY için önerilen ve standart biçim olarak adlandırılan standart biçimde γ_i kararlılık indeksleri

$$\gamma_{n-1} = \gamma_2 = 2 \ , \ \gamma_n = 2 \ . \tag{2.51}$$

olarak seçilir. 1-Tipi sistem göz önüne alarak (2.51) deki Standart Manabe Formu kullanılarak elde edilen karakteristik denklem prototipleri Tablo 2.2 de verilmiştir.

Tablo 2.2 : $a_0 = 1$ için Prototip Karakteristik Denklemler

Mertebe	$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ ($a_0 = 1$ alınmıştır)
1	$P(s) = s + \tau$
2	$P(s) = s^2 + 2\zeta\tau s + \tau^2$
3	$P(s) = s^3 + (2\zeta + 1)\tau s^2 + (2\zeta + 1)\tau^2 s + \tau^3$
4	$P(s) = s^4 + (2\zeta + 1)\tau s^3 + (2\zeta + 2)\tau^2 s^2 + (2\zeta + 1)\tau^3 s + \tau^4$
5	$P(s) = s^5 + (2\zeta + 1)\tau s^4 + (2\zeta + 2)\tau^2 s^3 + (2\zeta + 2)\tau^3 s^2 + (2\zeta + 1)\tau^4 s + \tau^5$

Tablo 2.3 : $a_0 = 2$ için Prototip Karakteristik Denklemler

Mertebe	$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ ($a_0 = 2$ alınmıştır)
1	$P(s) = s + 2\tau$
2	$P(s) = s^2 + 2\zeta\tau s + \tau^2$
3	$P(s) = s^3 + (2\zeta + 2)\tau s^2 + (2\zeta + 2)\tau^2 s + 2\tau^3$
4	$P(s) = s^4 + (2\zeta + 2)\tau s^3 + (4\zeta + 3)\tau^2 s^2 + (4\zeta + 2)\tau^3 s + 2\tau^4$
5	$P(s) = s^5 + (2\zeta + 2)\tau s^4 + (4\zeta + 3)\tau^2 s^3 + (4\zeta + 4)\tau^3 s^2 + (4\zeta + 2)\tau^4 s + 2\tau^5$

Tablo 2.2 ve Tablo 2.3 de görüldüğü üzere karakteristik polinomlarıyla istenilen her hangi bir eşdeğer zaman sabiti değer için karakteristik polinom katsayıları hesaplanabilir. Eşdeğer zaman sabitini $\tau = 1$ ve $a_0 = 1$ seçilirse

$$P(s) = 1 + s \tag{2.51}$$

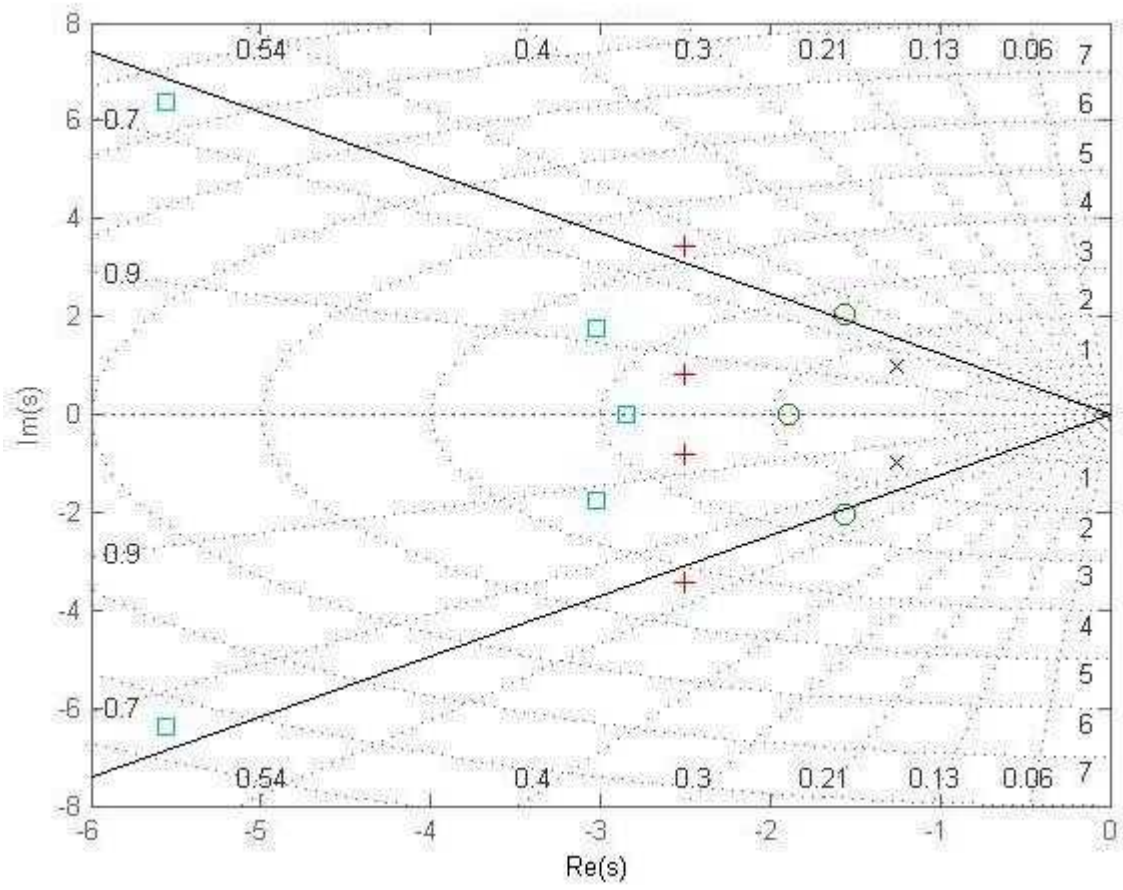
$$P(s) = 1 + 1.0s + 0.5s^2 \tag{2.52}$$

$$P(s) = 1 + 1.5s + 1.0s^2 + 0.5s^3 \tag{2.53}$$

$$P(s) = 1 + 2.0s + 1.5s^2 + 1.0s^3 + 0.5s^4 \tag{2.54}$$

$$P(s) = 1 + 2.5s + 3.0s^2 + 2.0s^3 + 1.5s^4 + 0.5s^5 \tag{2.55}$$

biçiminde karakteristik denklemler elde edilir. Eğer bu karakteristik denklemlerin köklerini s-düzleminde işaretlenirse Şekil 2.7 de ki kutup dağılımları elde edilir.



Şekil 2.7 : $\tau = 1$ ve $a_0 = 1$ için 5. mertebeye kadar Standart Manabe γ_i kararlılık indisli karakteristik denklemlerin s-düzlemindeki kök dağılımları.

Şekil 2.6 da 5. dereceden yüksek mertebeden sistemlerin kökleri bulunmamaktadır, çünkü daha yüksek mertebelerde karakteristik denklemin kökleri düşey eksen ile

negatif gerçel eksen arasındaki açı 49.5 derece olan doğrunun altında kalmaktadır. Böylelikle ζ sönüm oranı 0.65'ten büyük olur. Fakat 4. ve 3. dereceden sistemler için Şekil 2.7 de görüldüğü gibi karakteristik denklemin kökleri bu doğrunun altında kaldığından ζ sönüm oranı 0.65'ten küçük olmakta ve bundan dolayı da aşım gerçekleşmektedir. Aşımın olmaması içinde kararlılık indislerinde yapılan ufak değişiklikle ki ilk indeks değerini 2.7 yaparak bu taşma düzeltilir.

Sonuç olarak Manabe tarafından standart biçime sokulan γ_i kararlılık indisleri sayesinde kapalı çevrim basamak yanıtı aşımsız olacaktır. Özellikle yüksek mertebedeki karakteristik denklemlerin kökler negatif eksenle 49.5 derecelik açı yaparlar böylelikle ζ sönüm oranı 0.65'ten büyük olur. Yerleşme zamanı ise T_s yaklaşık olarak $2 .\sim 5\tau$ olacaktır. Ayrıca Manabe tarafından standartlaştırılan kararlılık indisleri kolayca hatırlanabilir.

2.6 KDY ile Kontrol Tasarım Prosedürü

KDY ile kontrol tasarımı genel olarak iki yöntemden oluşmaktadır. İlk yöntemde kararlılık indekslerinin önemi artmaktadır çünkü kararlılık indeksleri belirlendikten sonra kontrol parametrelerini kararlılık indeksleri tarafından yazılır. Fakat elde edilen denklemler çoğu zaman lineer olmayan denklemlerdir ve sistem mertebesi arttıkça çözülmesi zorlaşır. İkinci yöntem ise analitik yöntemdir. Analitik yöntem daha kolaydır ve kontrol parametrelerini bulmak için belirlenmiş bir yöntemi vardır.

Analitik yöntemde öncelikle *A(s), B(s) ve F(s)* kontrolör polinomlarının mertebeleri ve tasarım için gerekli olan γ_i kararlılık indeksleri, τ eşdeğer zaman sabiti belirlenir. Bu parametrelerden yararlanılarak hedeflenen karakteristik polinom bulunur ve buradan da ileride bahsedilecek olan matematiksel işlemlerle seçilen kontrolör polinom katsayıları elde edilir. Bulunan tüm değerler katsayı diyagramına işlenerek elde edilen kontrol sistemi hakkında kararlılık , dayanıklılık ve zaman cevabı özelliklerine bakılır.

2.6.1 Tasarım Öncesi Belirlenmesi Gereken Bilgiler

KDY yöntemiyle elde edilen kontrolörler 3 ayrı polinomdan oluşmaktadır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de belirtildiği gibi *A(s), B(s) ve F(s)* polinomlarının mertebeleri tasarımdan önce belirlenmesi gerekmektedir. Kontrol edilecek sistem genel olarak doğrusal, zamanla değişmeyen bir sistem olup

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0} \tag{2.56}$$

biçimindedir. Burada *N(s)* sistemin pay polinomudur ve mertebesi mertebesi *m*'dir. *D(s)* sistemin payda polinomudur ve mertebesi *n*'dir. Tüm sistemlerde geçerli olan $n \geq m$ kuralı burada da geçerlidir.

Kontrolör polinomları

$$A(s) = \sum_{i=0}^{p} l_i s^i \text{ ve } B(s) = \sum_{i=0}^{q} k_i s^i \tag{2.57}$$

biçiminde tanımlanır. 2.75 de belirtilen *A(s)* ve *B(s)* kontrolör polinomlarının mertebeleri tasarım için çok önemlidir. Çünkü sisteme etkileyecek bir bozucu işaretine karşı *A(s)* ve *B(s)* kontrolör polinomlarının mertebeleri değişir. Sisteme etkileyen bozucu türlerine göre seçilmesi gereken *A(s)* ve *B(s)*'in mertebeleri ve ayrıca bunlara bağlı olarak elde edilecek olan *P(s)* karakteristik denklem mertebesi Tablo 2.4 de verilmiştir.

Tablo 2.4 : Farklı biçimde bozucular için seçilmesi gereken *A(s), B(s), P(s)* polinomlarının mertebeleri ve tasarımda kullanılan ön koşullar

	Bozucu Yok	Basamak Türü Bozucu	Rampa Türü Bozucu	Sinüs Türü Bozucu	Darbe Türü Bozucu
$Derece\{g(A)\}$	*n-1*	*n*	*n+1*	*n+1*	*n+1*
$Derece\{g(B)\}$	*n-1*	*n*	*n+1*	*n+1*	*n+1*
Ön Koşul	-	$l_0 = 0$	$l_0 = l_1 = 0$	$l_0 = l_1 = 0$	$l_0 = l_1 = 0$
$Derece\{g(P)\}$	*2n-1*	*2n*	*2n+1*	*2n+1*	*2n+1*

Tablo 2.4'ta verilen bilgiler (2.7)'den elde edilmiştir. Bu değerler kullanılarak herhangi bir bozucu işaretini tamamen söndürecek ayrıca istenen kapalı çevrim cevabını elde edilir. Sisteme birden fazla ve farklı türden bozucu işaretleri erki ediyorsa, bozucu etkisi yok etmek için sisteme etkiyen en büyük bozucuya türüne göre *A(s), B(s) ve P(s)* polinomlarının mertebelerini seçilmelidir.

F(s) polinomu ise

$$F = \left(\frac{P(\quad 0}{N(\quad 0} \right. \tag{2.58}$$

biçiminde tanımlanır. Böylelikle kapalı çevrimli sistemin sürekli hal cevabında meydana gelebilecek hata sıfırlanır.

Tasarıma başlamadan önce belirlenmesi gereken diğer önemli parametrelerden biri de τ eşdeğer zaman sabitidir. Eşdeğer zaman sabiti sistemin yerleşme zamanının belirlenmesinde kullanılır. KDY ile kontrolör tasarımında temel olarak Standart Manabe Biçimi kullanıldığı için yerleşme süre t_s ile τ eşdeğer zaman sabiti arasında

$$\tau = \frac{t_s}{2 \quad .\sim 5} \tag{2.59}$$

biçibinde bir ilişki vardır. Eğer τ eşdeğer zaman sabiti büyürse sistem yanıtı yavaşlamakta, aynı şekilde τ eşdeğer zaman sabiti küçülürse, sistemin cevap hızı artmaktadır. Bundan dolayı τ eşdeğer zaman sabiti rasgele seçilmez.

Katsayı diyagram yönteminin diğer önemli parametresi ise γ_i kararlılık indeksleridir. Kısım 2.5 ‘ te anlatıldığı üzere kararlılık indeksleri Standart Manabe biçiminde seçilir.

2.6.2 Kontrolör Polinom Katsayılarının Belirlenmesi

Tasarımda gerekli görülen parametrelerin kararlılık sınır indeksleri, eşdeğer zaman sabiti, kontrolör polinom mertebeleri...vs belirlenmesinden sonra (2.23) $P_{h\,e\,d\,\epsilon}$ hedef karakteristik denklemi oluşturulur. Eğer $P_{h\,e\,d\,\epsilon}$ hedeflenilen karakteristik denklem şekil 2.1 deki yapı kullanılarak elde edilen kapalı çevrimin karakteristik denklemine eşitlenirse,

$$A(\ s)\ \ D\ )s+\ B\ )s\ \ N)\ s\quad P_{e\,d\,\epsilon} \tag{2.60}$$

biçiminde Diophantine Eşitliği olarak adlandırılan eşitlik elde edilir ve denklem (2.50)

$$[C]_{(p+\quad)n} \quad x\left[\begin{matrix} l_i \\ k_i \end{matrix} a \right]_{(p+)n} \quad n \quad (\ p \quad i \quad \text{lx} \tag{2.61}$$

şeklindeki Sylvester Biçimine dönüştürülür. Eşitlik çözüldüğünde l_i ve k_i yani *A(s)* ve *B(s)* polinom katsayıları belirlenmiş olur.

2.7 Ölü Zaman İçeren Sistemler İçin KDY Uygulanması

Sistem ölü zaman içeriyorsa, yani sistem transfer fonksiyonu

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}e^{-\alpha s} \tag{2.62}$$

biçimindeyse, öncelikle ölü zaman $e^{-\alpha s}$ Bölüm 3 de anlatıldığı yaklaşımlar yardımıyla kesirli polinom biçiminde yazılır.

$$e^{-\alpha s}\simeq\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{c_r s^r+c_{r-1}s^{r-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{d_t s^t+d_{t-1}s^{t-1}+\cdots+d_1 s+d_0}, \qquad t\geq r \tag{2.63}$$

Yapılan bu yaklaşım sayesinde sistem transfer fonksiyonu değişmektedir. Sistemin mertebesi artar. Ancak Katsayı Diyagram Yönteminde değişiklik olmayacaktır. Değişen kısım sadece *A(s), B(s)* ve *P(s)* mertebelerinin *t* mertebe kadar artmasıdır. Mertebenin artması kullanılan kararlılık indeks sayısını artırır ve denklem 2.61 çözülmesini zorlaştırır.

Ölü zaman içeren sistemler için KDY uygularken eşdeğer zaman sabitinin seçimi de önemli olmaktadır. Yerleşme süresi ölü zamana dikkate alınarak seçilmelidir. Yerleşme süresinin ölü zamana yakın seçildiğinde kontrol işareti ölü zaman etkisi altındayken büyük değerler almaktadır.

3. ÖLÜ ZAMAN YAKLAŞIMLARI

Bir sistemde ölü zaman bulunması halinde transfer fonksiyonunda $e^{-\tau s}$ şeklinde bir üstel fonksiyon elde edilir. Bu durumda sisteme herhangi bir kararlılık analizi Routh kriterleri, kök-yer metodu.. vs uygulamadan önce transfer fonksiyonundaki üstel fonksiyonlar polinom oranları şeklinde yaklaşık ifade etmek gerekir. Bunun için aşağıdaki yaklaşımlardan yararlanır.

3.1. Limit Yaklaşımı

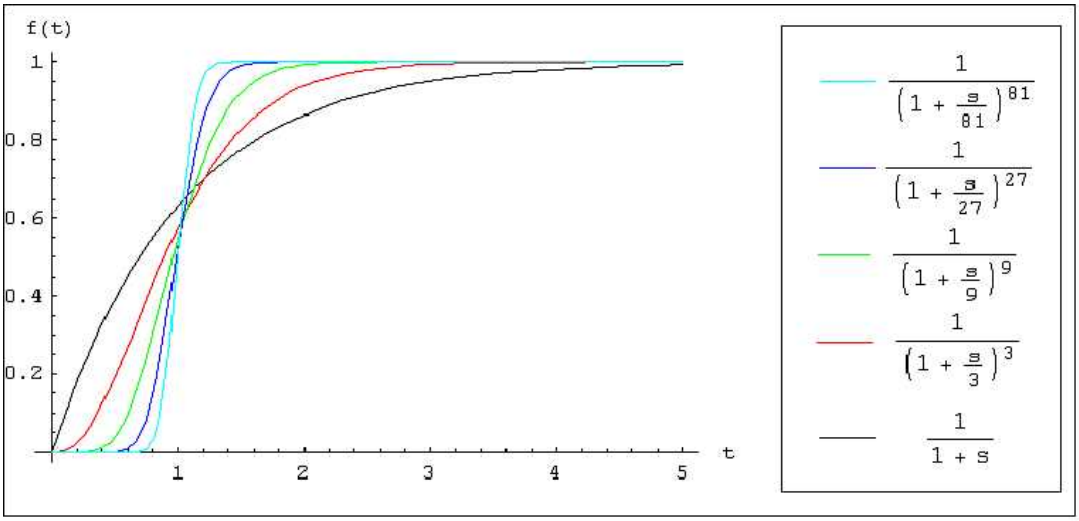
Üstel fonksiyonlar bir limit ile ifade edilebilir:

$$e^{-\tau s} \cong \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\tau \frac{s}{n}} \right)^n \tag{3.1}$$

Ölü zamanın bu tür bir yaklaşım uygulandığında, n = 1,3,9,27,81 ve τ = 1 için basamak giriş yanıtı

$$f(t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1+\frac{s}{n}} \right)^n \right\} \tag{3.2}$$

Şekil-3.1 de görüldüğü gibi elde edilir.



Şekil 3.1: Farklı n değerleri için ölü zamanın limit yaklaşımını kullanarak yapılan yaklaşımların birim basamak yanıtı

Yapılan yaklaşımların performanslarını değerlendirmek için (3.3) karesel ortalama hata yöntemine başvurulmuştur.

$$I = \int_0^{\infty} \left(H(\quad x) - \quad (\ ) \right)^2 \tag{3.3}$$

Bu ilişkide *y(t),* $\tau = 1$ için yapılan yaklaşımı, $1(t-\tau)$ ise 1 saniyelik ideal gecikmeye karşı düşer. Şekil 3.1'de verilen farklı ölü zamanın yaklaşımları için karesel ortalama hata değerleri Tablo 3.1 oluşturuldu.

Tablo 3.1: τ =1 için limit yaklaşımıyla yapılan açılımların karesel ortalama hataları

n	Hata değerleri
1	0.2358
3	0.1357
9	0.0781
27	0.0450
81	0.059

Tablo 3.1 de görüldüğü üzere limit yardımıyla yapılan yaklaşımda düşük n değerleri için yeterli derecede iyi bir yaklaşım elde edilmemektedir. Ancak, n'nin büyük değerleri için tatminkar sonuçlar bulunmasına rağmen sistem mertebesi artar ve $s = \frac{n}{\tau}$'de n adet kutup oluşmaktadır. Bu ise sistem kararlılığını olumsuz yönde etkiler.

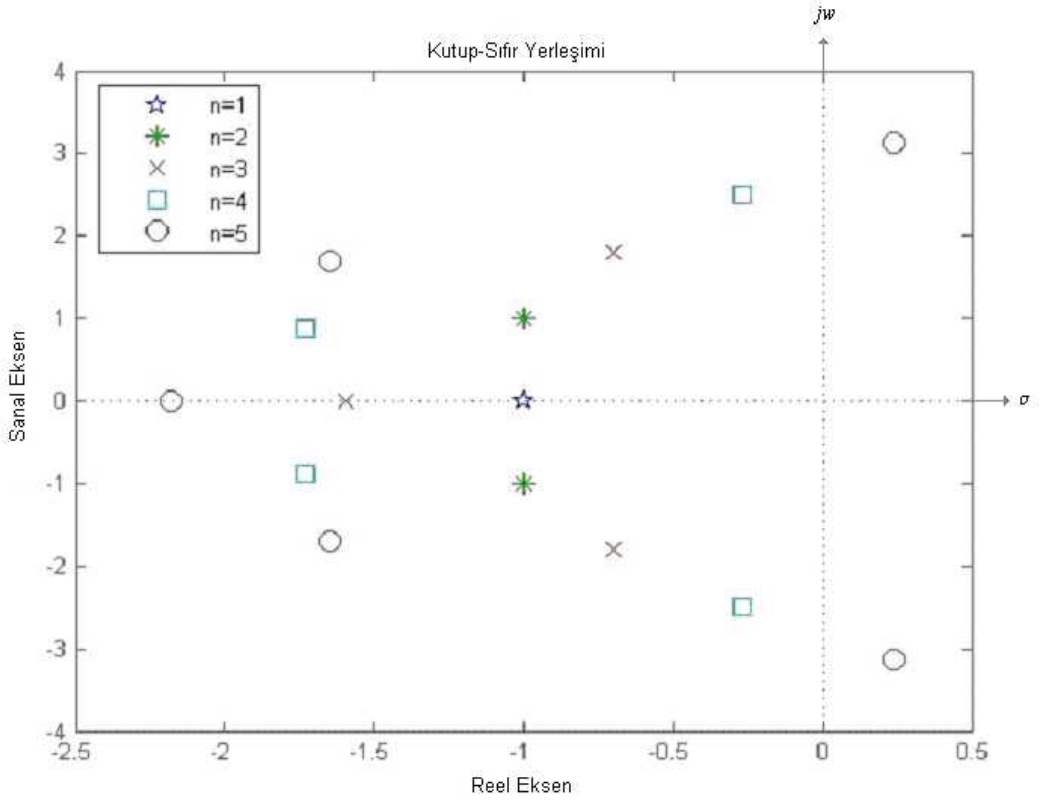
3.2 Maclaurin Seri Açılımı

Üstel fonksiyonlar Maclaurin seri açılımının ilk birkaç başlangıç terimi ile ifade edilir;

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} - \frac{\tau(s^3)}{3!} \quad . \tag{3.4}$$

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2} + \frac{\tau(s^3)}{3!}} \simeq \frac{1}{\sum_{m=0}^{n} \frac{(\tau s)^m}{m!}} \tag{3.5}$$

Ölü zamanın (1.5) deki gibi Maclaurin seri açılımının birkaç başlangıç terimi ile yaklaşık ifade edildiğinde polinom derecesinin, yani n'nin önemi artar. Özellikle $n > 4$ olduğu durumlarda, polinomun kutuplarının Şekil-1.2 de görüldüğü gibi s-yarı düzleminin sağ tarafında olmaktadır.

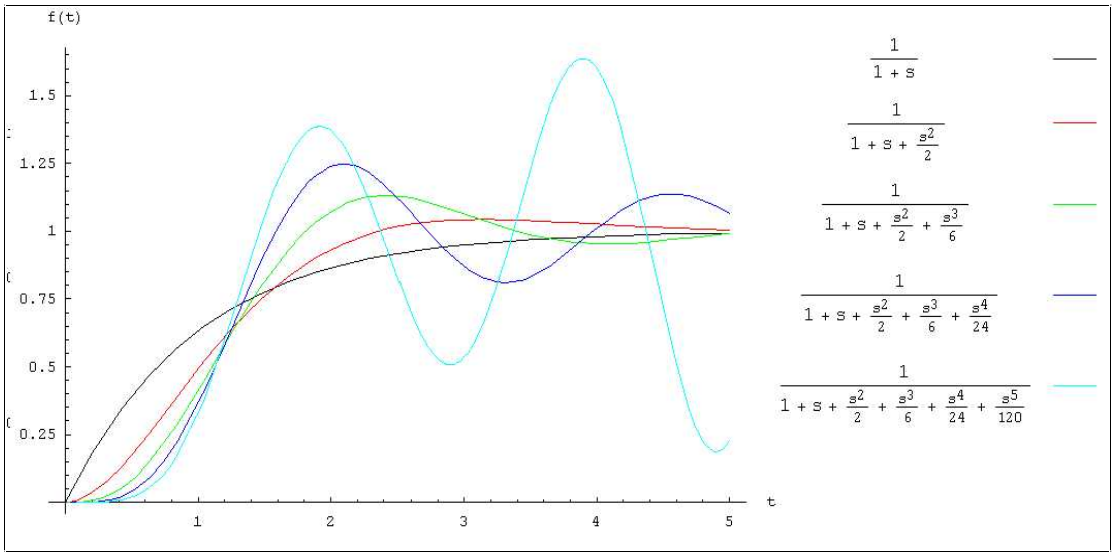


Şekil 3.2 : Maclaurin seri açılımlarının n = 1,2,3,4,5. için kutup yerleşimi

Böyle bir yaklaşım yapıldığında, n = 1,2,3,4,5 ve $\tau = 1$ için basamak giriş yanıtına bakılırsa

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tau s)^n}{n!}}\right)\right\} \tag{3.6}$$

Şekil 3.3 de görüldüğü gibi, n>4 olduğunda yani kutupların s-yarı düzleminin sağında olduğunda, basamak giriş cevabının kararlı olmadığı görülmektedir.



Şekil 3.3: τ =1 için ölü zamanın Maclaurin seri açılımları

Diğer yaklaşımlar ile kıyaslama yapabilmek için bu yöntem için de karesel ortalama hataya baktığımızda (Tablo 3.2), seri açılımının n=1,2,3,4 için, limit yaklaşımından çok az bir farkla daha iyi sonuç vermektedir.

. **Tablo 3.2 :** τ =1 için seri açılımıyla yapılan yaklaşımların karesel ortalama hata değerleri

n	Hata Değerleri
1	0.234
2	0.1475
3	0.1291
4	0.1786

Sonuç olarak bu yaklaşım limit yardımıyla yapılan yaklaşımından daha iyi sonuç verir, ancak bu yaklaşım kullanıldığında seri açılım mertebesini kesinlikle 4 ve altında seçmek gerekir.

3.3 Padé Açılımı

Açık çevrim transfer fonksiyonun analitik ifadesinin karmaşıklığını artırmamak için rasyonel bir fonksiyon kullanarak daha uygun bir yaklaşım elde edilir.

Herhangi bir fonksiyonu Padé yöntemi kullanarak ($R_{n,m}$) rasyonel bir fonksiyon biçiminde yazabilmek için öncelikle fonksiyonun ve türevinin $s = 0$ da sürekli olması gerekir.

Burada

$$R_{n,m}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \tag{3.7}$$

$$P_n(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_n s^n \tag{3.8}$$

$$Q_m(s) = 1 + q_1 s + q_2 s^2 + \cdots + q_m s^m \tag{3.9}$$

şeklinde yaklaşık ifade edilecek $F(s)$ fonksiyonunun analitik ve Taylor açılımının

$$F(s) \cong a_o + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_k s^k + \cdots \tag{3.10}$$

olduğu varsayılır. Buna göre $F(s) \approx R_{n,m}(s)$ yada $F(s) - R_{n,m}(s) \frac{Z(s)}{Q_m(s)}$, diğer bir deyişle $F(s) Q_m(s) - P_n(s) \approx Z(s)$ ilişki oluşturulur. Buradan

$$Z(s) = \sum_{j=n+m+1}^{\infty} e_j s^j = e_{n+m+1} s^{n+m+1} + \cdots \tag{3.11}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki seri açılımının en düşük indisi $n + m + 1$'dir. Çünkü ilk $n + m$ terim $F(s)$ ve $R_{n,m}(s)$'in eşit olması gerektiğinden sıfırdır. Eğer seriler açılırsa aşağıdaki $n + m + 1$ adet lineer denklem elde edilir:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 - p_0 = 0 \\ &q_1 a_0 + q_0 a_1 - p_1 = 0 \\ &q_2 a_0 + q_1 a_1 + q_0 a_2 - p_2 = 0 \\ &q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + q_0 a_3 - p_3 = 0 \\ &q_m a_n + q_{m-1} a_{n+1} + \ldots + q_n a_m - p_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (n+1)\text{adet denklem} \qquad (3.12)$$

ve

$$\left.\begin{aligned} &q_m a_{n-1} + q_{m-1} a_n + q_{m-2} a_{n+1} + \ldots + q_0 a_{m+n-1} = 0 \\ &q_m a_{n-2} + q_{m-1} a_{n-1} + q_{m-2} a_n + \ldots + q_0 a_{m+n-2} = 0 \\ &\ldots \\ &q_m a_0 + q_{m-1} a_1 + q_{m-2} a_2 + \ldots + q_0 a_m = 0 \end{aligned}\right\} \quad m \text{ adet denklem} \qquad (3.13)$$

Yukarıdaki denklemleri çözmek için önce denklen (3.13) numaralı denklemlerden $q_1, q_2, \ldots q_m$, bilinmeyenleri daha sonra denklem (3.12) numaralı denklemlerden $p_1, p_2, \ldots p_n$, bilinmeyenleri bulunur. Son olarak da denklem (3.7) numaralı ilişki oluşturulur.

3.3.1: Padé Açılımının Uygulanması

$f(s) = e^{s}$ fonksiyonunu $n = m = 1$ yada $R_{1,1}(s)$ için Padé açılımını bulmaya çalışalım. Padé açılımını uygulayabilmemiz için önce *f(s)* fonksiyonun s = 0 da kendisinin ve $f^{(i)}(s)$ türevlerinin sürekli olması gerekir.

$$\begin{aligned} &f(s) = e^{s} \\ &f^{(1)}(s) = e^{-s} \\ &f^{(2)}(s) = e^{-s} \end{aligned} \qquad (3.14)$$

$F(s)$ fonksiyonu $s = s_0$ noktasında bir kuvvet serisine açılırsa $s_0 = 0$ için

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} (s - s_0)^k \qquad (3.15)$$

$$
\begin{aligned}
f(s) &= e^{-s} & F(0) &= 1 \\
f^{(1)}(s) &= -e^{-s} & F^{(1)}(0) &= -1 \\
f^{(2)}(s) &= e^{-s} & F^{(2)}(0) &= 1 \\
f^{(3)}(s) &= -e^{-s} & F^{(3)}(0) &= -1
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
F(s) = 1 - s + \frac{1}{2!}s^2 - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{4!}s^4 - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s)^j}{j!} \tag{3.17}
$$

elde edilir. Özellikle $(m,n) = (1,1)$ için

$$
Q_1(s) = \sum_{j=0}^{1} q_j s^j = 1 + q_1 s \qquad P_1(s) = \sum_{j=0}^{1} p_j s^j = p_0 + p_1 s \tag{3.18}
$$

$$
Z(s) = \sum_{j=3}^{\infty} c_j s^j = c_3 s^3 + c_4 s^4 + \cdots . \tag{3.19}
$$

yazılabilir. Bu durumda hata denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\left(1 - s + \frac{1}{2!}s^2 - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{4!}s^4 - \cdots\right)(p_0 + p_1 s) - (1 + q_1 s) = c_3 s^3 + c_4 s^4 + \cdots .
$$

$$
1 - s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \cdots + p_0 + p_1 s - q_1 s = c_3 s^3 + c_4 s^4 + \cdots \tag{3.20}
$$

$$
= 0 + 0 \cdot s + 0 \cdot s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4 + \cdots .
$$

$$
(p_0 - 1) + \left(p_1 - q_1 + \frac{1}{2}\right)s + \left(-\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{6}\right)s^2 + \cdots = 0 \tag{3.21}
$$

denklemler çözülürse

$$
\begin{aligned}
1 - p_0 &= 0 \\
-1 + q_1 - p_1 &= 0 \\
\frac{1}{2} - q_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

yada $p_0 = 1$, $p_1 = -\frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{2}$ $p_1 = \frac{1}{2}$ bulunur. Buradan

$$e^{-s} = \frac{1-\frac{1}{2}s}{1+\frac{1}{2}s} \equiv \frac{2-s}{2+s} \tag{3.23}$$

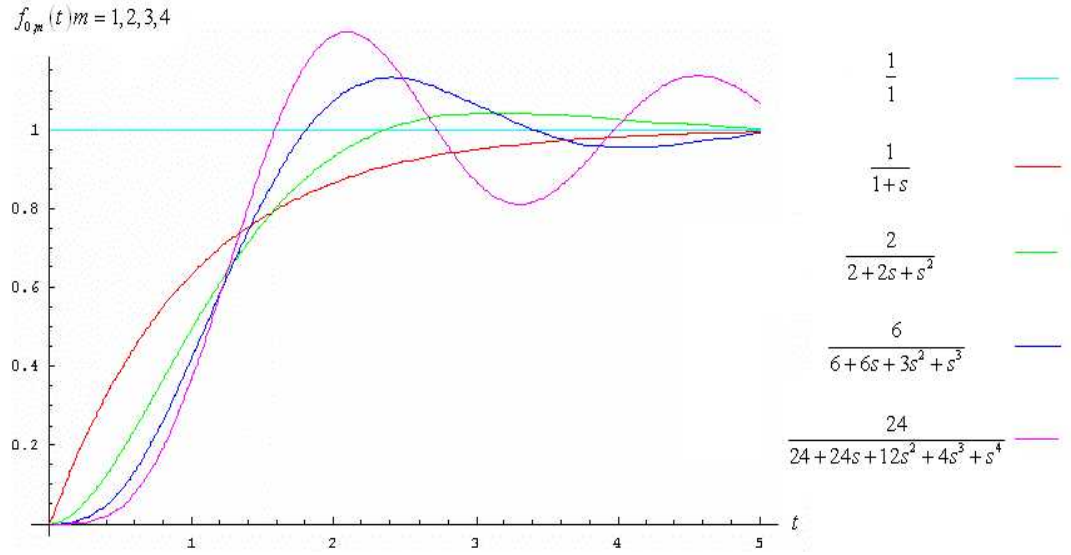
$R_{1,1}(s)$ 1. dereceden Padé açılımı elde edilir.

Tablo1 de $e^{-\tau s}$ in τ =1 için n=3 ve m=4 e kadar çeşitli $R_{n,m}(s)$ açılımları ve bu açılımlarının ortalama karesel hataları verilmiştir. Tablo 3.3 de $e^{-\tau s}$ in Padé açılımları pay ve payda polinom mertebelerine göre düzenlenmiştir.

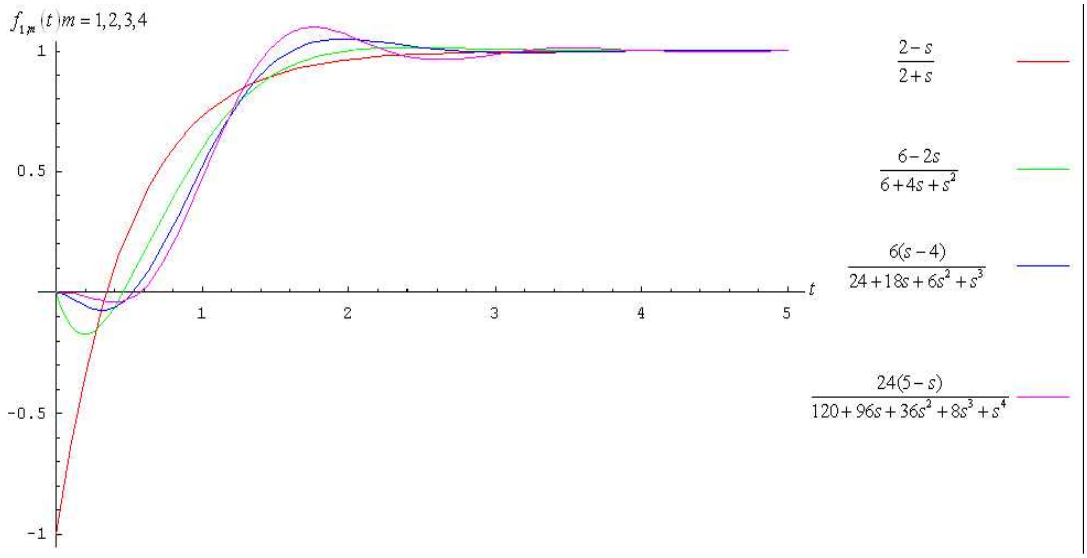
Tablo 3.3 : $e^{-s} \approx R_{n,\,m}$ Padé Açılımları ve ortalama karesel hataları

n / m	0	1	2	3
1	$\frac{1}{1+s}$, 0.2355	$\frac{2-s}{2+s}$, 0.2698		
2	$\frac{2}{2+2s+s^2}$, 0.1475	$\frac{6-2s}{6+4s+s^2}$, 0.1058	$\frac{12-6s+s^2}{12+6s+s^2}$, 0.1542	
3	$\frac{6}{6+6s+3s^2+s^3}$, 0.1293	$\frac{6(s-4)}{24+18s+6s^2+s^3}$, 0.07623	$\frac{3(20-8s+s^2)}{60+36s+9s^2+s^3}$, 0.06903	$\frac{120-60s+12s^2-s^3}{120+60s+12s^2+s^3}$, 0.107
4	$\frac{24}{24+24s+12s^2+4s^3+s^4}$, 0.167	$\frac{24(5-s)}{120+96s+36s^2+8s^3+s^4}$, 0.0661	$\frac{12(30-10s+s^2)}{360+240s+72s^2+12s^3+s^4}$, 0.05246	$\frac{4(210-90s+15s^2-s^3)}{840+480s+120s^2+16s^3+s^4}$, 0.0519

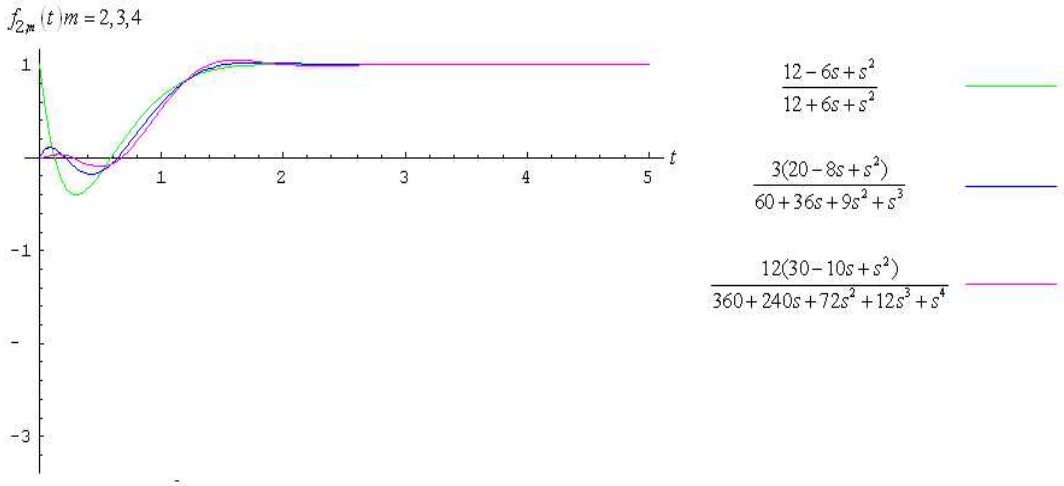
Tablo 3.3 de bulunan açılımların payda değerinin artışına göre birim basamak yanıtları Şekil3-4-5-6-7 de görülmektedir.



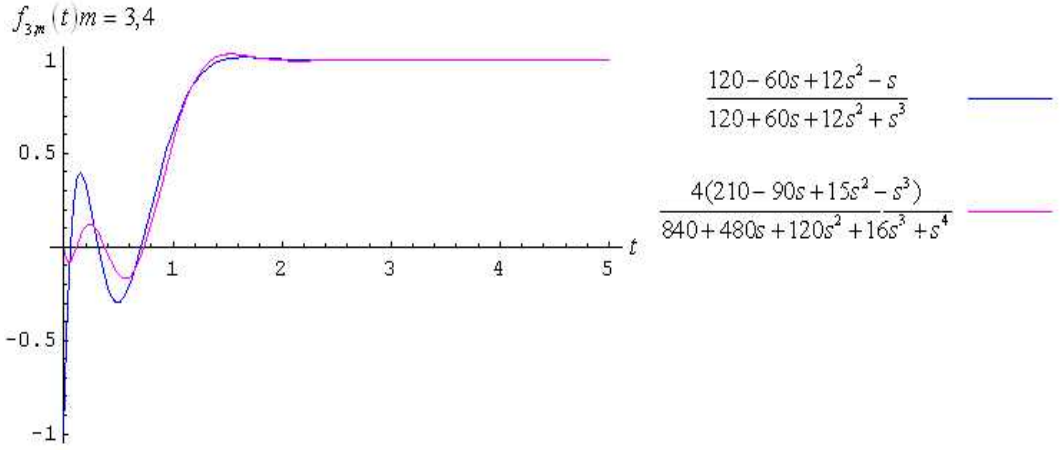
Şekil 3.4: *n*=0 ve *m*=0,1,2,3,4 için Padé açılımları



Şekil 3.5 : *n*=1 ve *m*=1,2,3,4 için Padé açılımları



Şekil 3.6 : *n*=2 ve *m*=2,3,4 için Padé açılımları



Şekil 3.7: *n*=3 ve *m*=3,4 için Padé açılımları

Padé yaklaşımı uygulandığında ilginç sonuçlar gözlendi. Pay ve payda polinomlarının mertebeleri eşit seçildiğinde da Şekil 3.4-5-6-7 de görüldüğü gibi t = 0 birim basamak girişinde bir sıçrama oluşur. Sistem yanıtında t = 0 da herhangi bir değerden başlaması kontrol sisteminde bir sorun oluşturabilir. Bundan dolayı, pay ve payda polinomlarının mertebesi seçilirken pay polinomunun mertebesi payda polinomundan bir derece düşük seçilebilir. Ayrıca karesel ortalama hata da %50 azalır. Böylece Padé açılımı uygulandığında pay ve payda polinom mertebelerinin eşit seçilmesi yerine pay polinom mertebelerini bir derece düşük seçilirse daha uygun olur. Diğer taraftan ölü zamanın $e^{-\tau s}$ Padé açılımında mertebelerin de bir limiti vardır. $\tau = 1$ için ölü zamanın Padé açılımı uygulandığında pay ve payda polinomlarının mertebe değerleri arasındaki fark birinci derecen açılım için 5,

dördüncü mertebeden açılım için 6 fark olduğunda Padé yaklaşımı kararsız bir hale gelir, diğer bir değişle kutuplar sağ yarı s-düzlemine geçer. Bu özellik τ zaman sabitinin değerine bağlı olarak değişir.

4. KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ KULLANARAK YAPILAN TASARIM UYGULAMALARI

Bu bölümde ölü zaman içeren sistemler için katsayı diyagram yöntemi kullanılarak kontrolör tasarlanacaktır. Sistemdeki ölü zamanlanın farklı Padé açılımları uygulanacaktır. Yapılan yaklaşımlar sayesinde katsayı diyagram yöntemiyle tasarlanan kontrolörlerin kararlılığı ve dayanıklılığı incelenecektir. Ayrıca sisteme etkiyen 3 ayrı (darbe , rampa, sinüs) bozucu türlerinin etkisinin giderildiği gösterilecektir. Her durum için basamak giriş yanıtı ve kontrol işareti çizilmiştir.

4.1 Uygulama 1

Açık çevrim transfer fonksiyonu denklem (4.1)'de verilmiş olan sistemin 3 kökü de sol yarı s-düzlemin de bulduğu için kararlıdır.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)^2} e^{-s} \tag{4.1}$$

Bu sistemin dinamiğini daha uygun ve daha dayanıklı bir hale getirmek istensin ve aynı zamanda sistemin 5 saniyede doyuma ulaşması amaçlansın. Sistemdeki ölü zamanın 1saniye olduğunu ve ayrıca sisteme 9 saniye sonra, genliği 0.5 olan basamak bozucusu uygulandığını varsayalım.

KDY kullanılarak kontrol edilmek istenen bu sistemin $G(s) = N(s)/D(s)$ polinomunun pay ve payda polinomları farklı Padé açılımları yüzünden etkilenecektir. Bundan dolayı her bir Pade yaklaşımı için KDM'da ki parametreler değişecektir.

Eğer ölü zaman $e^{-s} \cong \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde ifade edilirse $G(s) = N(s)/D(s)$ pay ve payda polinomları

$$N(s) = 2 - s \tag{4.2}$$

$$D(s) = s(s^3 + 5s^2 + 8s + 4)(2 + s) \tag{4.3}$$

biçiminde olur. Denklem (4.3) te görüldüğü gibi sistem mertebesi ölü zamanın $e^{-s} = \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde yaklaşımıyla 1 derece artar.

Tasarım yöntemine göre eğer bozucu basamak biçiminde seçilirse, *A(s)* ve *B(s)* polinomlarının mertebeleri *D(s)* polinomunun merteesiyle aynı olmalıdır, ayrıca hedeflenen karakteristik polinom mertebesi $P(s)=A(s)D(s)B(s)N(s$ den dolayı 8 olmalıdır. Başlangıç koşulu olarakta $l_0 = 0$ alınmalıdır. Buna göre kontrolör polinomları

$$A(s) = l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0 \tag{4.4}$$

$$B(s) = k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Tasarım parametreleri, Standart Manabe biçimi kullanıldığından karalılık indeksleri

$$\gamma_i = [2.5, 2, 2, 2, 2, 2] \tag{4.6}$$

ve τ eşdeğer zaman sabiti

$$\tau = \frac{t_s}{2.5} = \frac{4.5}{2.5} = 1.8 \tag{4.7}$$

olarak seçilir. Böylelikle tasarımdan önce belirlenmesi gereken tüm kontrol polinomları ve parametreleri belirlenmiş olur. *A(s)* ve *B(s)* kontrolör polinomlarının katsayıları hesaplamak için denklem (4.4) ve denklem (4.5)'de tanımlanan polinomlar denklem (2.6) da belirtilen karakteristik denkleme yerleştirilirse

$$\begin{aligned} P(s) &= (l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3 + l_4 s^4)(k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + k_3 s^3 + k_4 s^4) \\ &+ (k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + k_3 s^3 + k_4 s^4)(l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3 + l_4 s^4) s \\ &+ (l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3 + l_4 s^4)(k_0 + k_1 s + k_2 s^2 + k_3 s^3 + k_4 s^4) s \end{aligned} \tag{4.8}$$

ifadesi elde edilir. Eğer denklem (4.6-7)'de tanımlanan parametreler yardımıyla Manabe tarafında genelleştirilmiş $P_{hedef}(s$ karakteristik denklemi oluşturulursa

$$\begin{aligned} P_{hedef}(s) &= 1.81 + 2.9603s + 4.6653s^2 + 6.0839s^3 + 8.0705s^4 + 5.5006s^5 + 2.7561s^6 \\ &+ 7.6521 \times 10^{-1} s^7 + 8.6093 \times 10^{-2} s^8 \end{aligned} \tag{4.9}$$

biçiminde bir ifade elde edilir. Denklem (4.9) ile denklem (4.8) birbirine eşitlenerek kontrolörün bilinmeyen l_i ve k_i katsayıları hesaplanabilir. Bu katsayıları rahat

bulabilmek için eşitlenen denklemlerden ortaya çıkan dokuz adet denklem takımını Sylvester biçimine dönüştürülür;

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 8 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 7 & 1 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 8 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ . \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 0.0003 \\ 7.65\times 10^{-6} \\ 8.6093\times 10^{-8} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Sonuç olarak (3.10) daki matris çözüldüğünde kontrolör polinomları elde edilir.

$$A(s) = 0.0387s^3 + 0.0208s^2 + 0.0028s + 7.6050\times 10^{-4} \tag{4.11}$$

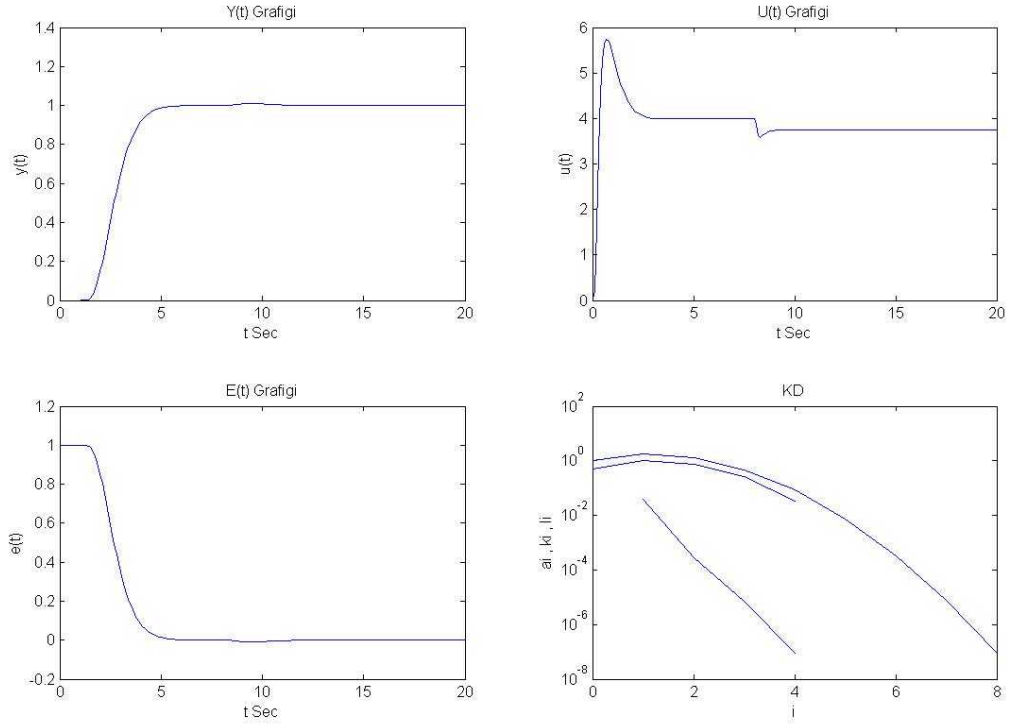
$$B(s) = 0.5099s^3 + 0.4879s^2 + 0.0756s + 4.8310\times 10^{-3} \tag{4.12}$$

$$P(s) = 1.8129s^6 + 0.4656s^5 + 0.0839s^4 + 0.0073s^3 + 0.0005s^2 + 0.0000 + 7.6527\times 10^{-6}s + 8.6093\times 10^{-8}s^4 \tag{4.13}$$

F(s) denklemi ise denklem (2.58) den

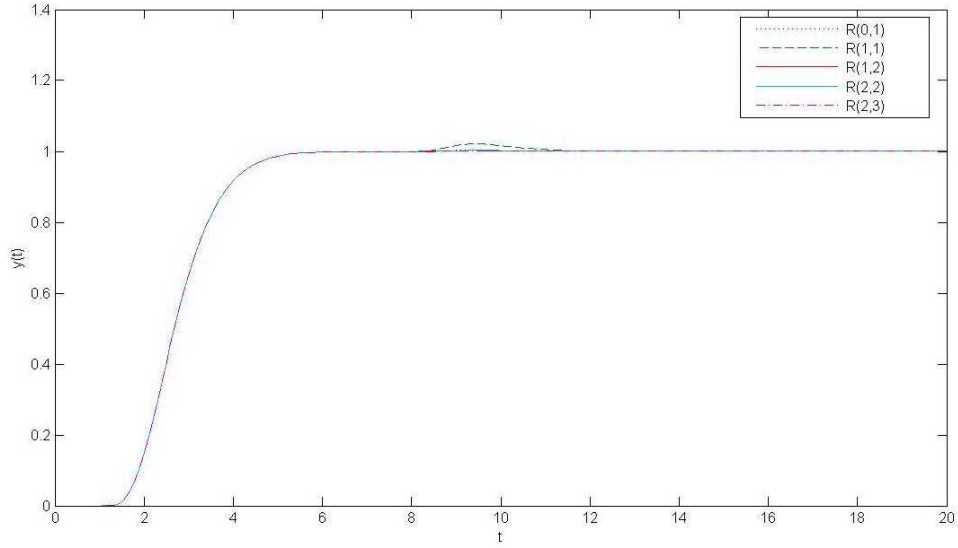
$$F(s) = \frac{P(0)}{N(0)} = 1 \tag{4.14}$$

olarak hesaplanır.Ölü zamanın $e^{-s} = \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde yaklaşım yapıldığında ve sisteme 7.5 saniye sonra ve genliği 0.5 olan basamak bozucusu uygulandığında elde edilen birim basamak yanıtı ve kontrol işareti Şekil 4.1 de gösterilmiştir.

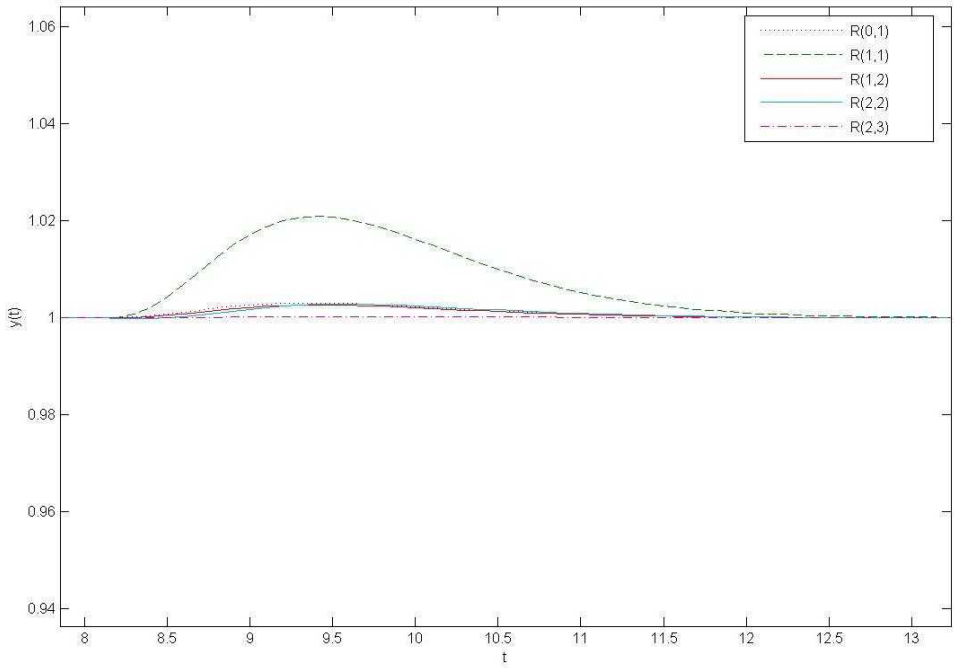


Şekil 4.1: Denklem 4.1'e ait sistemin ölü zamanını $e^{-s} \cong \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde yaklaşık ifade edilmesi halinde KDY ile tasarlanan sistemin birim basamak giriş yanıtı ,sisteme etki eden kontrol işareti , e(t) hata işareti ve katsayı diyagramı

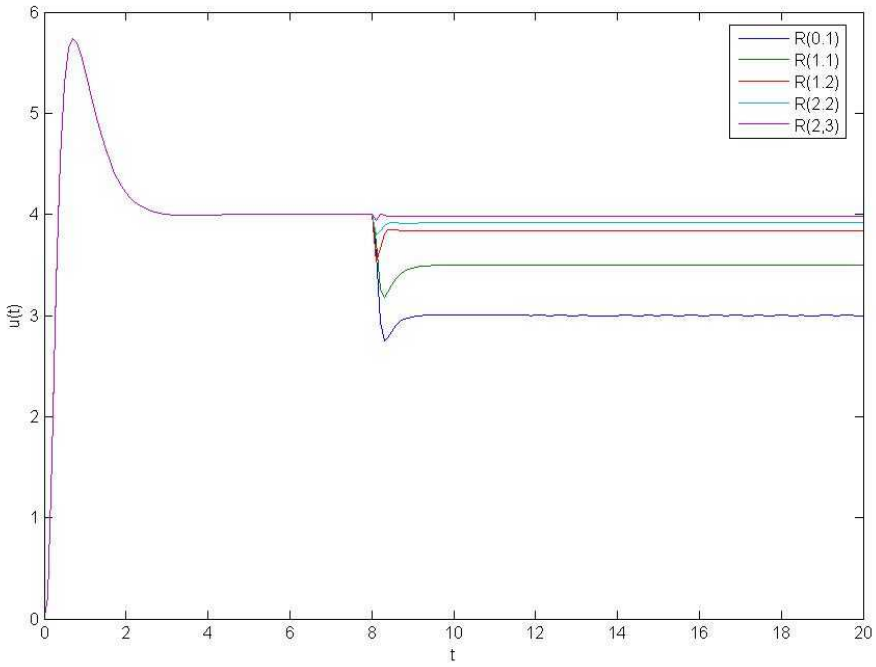
Transfer fonksiyonu denklem (4.1) de gösterilen sistemin ölü zamanını farklı mertebeden Padé açılımları yapıldığında birim basamak yanıtı ve kontrol işaretinin değişimini Şekil (4.2) gösterilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.2 : Farklı Pade açılımları elde edilmiş a)birim basamak yanıtı b)yakınlaştırılmış birim basamak yanıtı c) kontrol işareti

Uygulama 1' e ait *y(t)* birim basamak yanıtı, *u(t)* kontrol işareti, katsayı diyagramı ve *e(t)* etkin hata Şekil 4.1' de gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 4.2' de ise aynı sistemin fakat ölü zamanın farklı Pade açılımlarıyla yapılan yaklaşımın etkisi görülmektedir. Özellikle *y(t)* kapalı çevrim çıkış işaretinin aşımsız olarak elde edildiği ve basamak tipi bozucunun etkisinin hızlı bir şekilde giderildiği görülmektedir. Katsayı diyagramından ise sistemin yeterince kararlı ve dayanıklı olduğu anlaşılmaktadır. Bundan dolayı kararlılık indeksleri üzerinde herhangi değişikliğe gerek yoktur. Şekil 4.2 den ise farklı Padé açılımları yapıldığında, basamak bozucu etkisinin kontrol işaretine yapmış oldu değişikliği görülmektedir. Eğer ölü zaman e^{-s}, için yapılan yaklaşım ne kadar hatasız olursa bozucu etkisi gidermek için uygulanan kontrol işaretinin ve birim basamak yanıtının değişimi daha az olacaktır.

4.2 Uygulama 2

Açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem (4.15)' te verilmiş olan sistemin yerleşme zamanını 4 saniye olması istensin.

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s(s+2)^2} e^{-s} \tag{4.15}$$

Ayrıca sisteme 9 saniye sonra ve eğimi 0.5 olan rampa biçiminde bozucunun uygulandığını varsayalım. Sistemin biri sıfırda diğer ikisi de sol yarı *s* düzlemindedir. Sistemde ayrıca $s = -5$ de bir adet sıfır kökü bulunmaktadır. Sistemdeki ölü zamanın Padé açılımları ile ifade edildikten sonra KDY kullanılarak kontrol edilmesi istensin. Eğer ölü zaman $e^{-s} \cong \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde ifade edilirse, $G(s) = N(s)/D(s)$ polinomlarının mertebeleri değişecektir. Bundan dolayı mertebelerin seçimi büyük önem taşımaktadır. Bundan dolayı $G(s) = N(s)/D(s)$ pay ve payda polinomları

$$N(s) = (s+5)(2-s) \tag{4.16}$$

$$D(s) = (s^3 + 4s^2 + 4s)(2+s) \tag{4.17}$$

şeklindedir.

Öncelikle Kısım 2.6 da anlatıldığı gibi öncelikle uygulanan bozucu türüne ve sistemin mertebesine göre *A(s), B(s), F(s)* ve *P(s)*' in mertebeleri belirlenir. Ayrıca gerekiyorsa başlangıç koşulları belirlenmelidirr. Denklem (3.15) deki sisteme rampa biçiminde bir bozucu etkilediğinden başlangıç koşulu olarak Tablo 2.4' den

$l_0 = {}_1l = 0$ olacaktır. *A(s)* ve *B(s)* in mertebeleri ise 5 olarak alınır çünkü ölü zamanın Padé yaklaşımı yapıldığından sistem mertebesi artar. Sonuç olarak

$$A(s) = l_5 s^5 + l_4 s^4 + l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s \tag{4.18}$$

$$B(s) = k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \tag{4.19}$$

olarak tanımlanır.

Tasarım parametreleri belirlerken, Standart Manabe biçimi kullanıldığından

$$\gamma_i = [2.5, 2, 2, 2, 2, 2] \tag{4.20}$$

ve τ eşdeğer zaman sabiti

$$\tau = \frac{t_s}{2.5 \sim 3} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \tag{4.21}$$

olarak hesaplanır. Böylelikle tasarımdan önce belirtilmesi gereken tüm ön koşullar ve tasarım parametreleri belirlendi. Uygulama 1' deki aynı matematiksel işlemlerden sonra *A(s)* ve *B(s)* kontrolör polinomları ve *P(s)* karakteristik polinomu

$$A(s) = 0.01s^2 + 0.08s + 0.025 \tag{4.22}$$

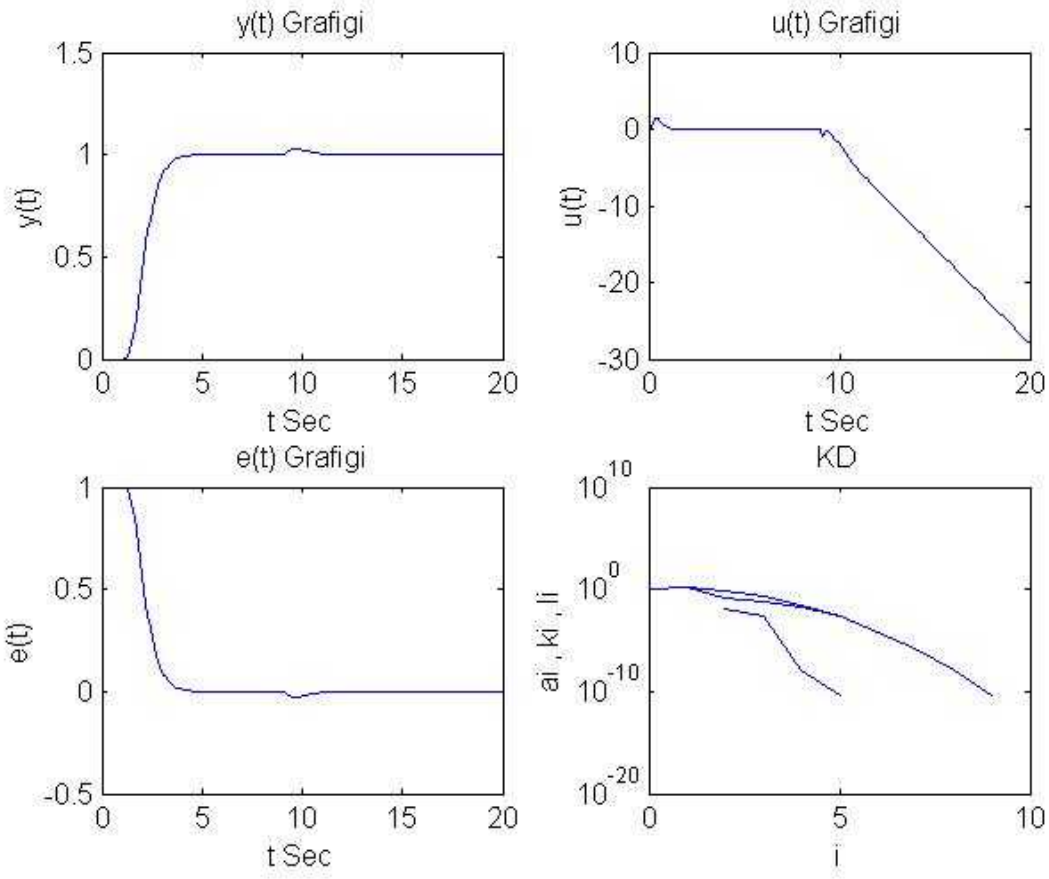
$$B(s) = 1.40 + 1.39s + 0.37s^2 + 0.59s^3 + 0.24s^4 + 0.05s^5 + 0.002s^6 \tag{4.23}$$

$$P_{hedef}(s) = s^{10} + 7.84s^9 + 27.19s^8 + 52.03s^7 + 70.43s^6 + 70.05s^5 + 52.98s^4 + 29.51s^3 + 12.17s^2 + 3.14s + 0.42 \tag{4.24}$$

biçiminde bulunur. *F* referans pay katsayısı ise denklem (2.58) den

$$F(0) = \frac{P(0)}{N(0)} = 1 \tag{4.25}$$

Uygulama 2' ye ilişkin ait *y(t)* birim basamak yanıtı, *u(t)* kontrol işareti, katsayı diyagramı ve *e(t)* etkin hata işareti Şekil 4.3' de gösterilmiştir. Kapalı çevrim çıkış işaretinin *y(t)* aşımsız olduğu ve rampa bozucu etkisinin giderildiği görülmektedir.



Şekil 4.3: Denklem 4.15'e ait sistemin ölü zamanını $e^{-s} \cong \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde ifade edilmesi halinde KDY ile tasarlanan sistemin *y(t)* birim basamak giriş yanıtı , *u(t)* sisteme etki eden kontrol işareti , *e(t)* hata işareti ve katsayı diyagramı

4.3 Uygulama 3

Açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem (4.26)' te verilmiş olan sistemin yerleşme zamanını 4 saniye olması istensin.

$$G(s) = \frac{(s-3)}{(s-2)(s-1)(s+2)} e^{-s} \tag{4.26}$$

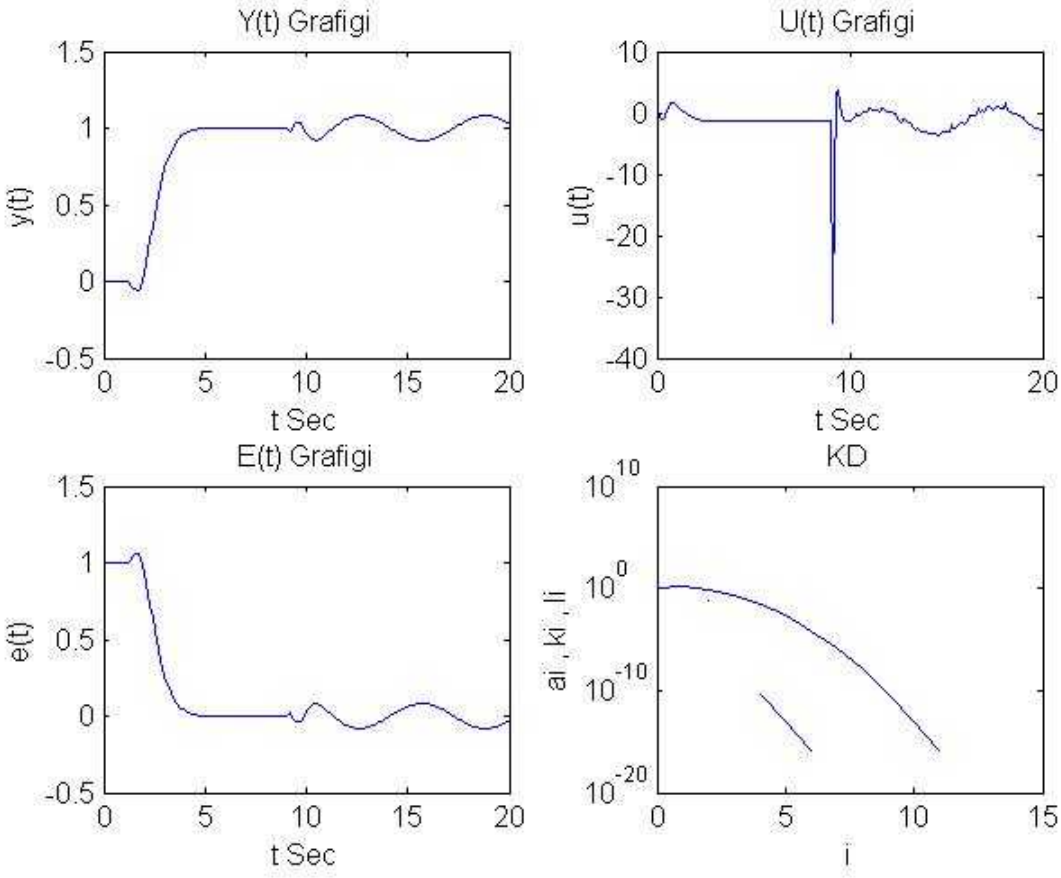
Ayrıca sisteme 9 saniye sonra ve genliği 0.5, frekansı 1 rad/sn ve fazı sıfır olan sinüs biçiminde bozucunun uygulandığını varsayalım. Görüldüğü gibi sistem köklerinin sadece bir tanesi, $s = -2$ sol yarı *s*-düzlemindedir. Sistemde ayrıca iki kararsız kök $s = 1$ ve $s = 2$ bulunmaktadır. Sistemde ayrıca $s = 3$ de bir adet sıfır kökü bulunmaktadır. Sistemdeki ölü zamanın Padé açılımları ile ifade edildikten sonra

KDY kullanılarak kontrolör edilecektir. Ölü zaman $\frac{6-2s}{6+4s+s^2}$ biçiminde ifade edilirse, $G(s)=N(s)/D(s)$ polinomlarının mertebeleri değişecektir. Bundan dolayı $G(s)=N(s)/D(s)$ pay ve payda polinomları

$$N(s)=(s+3)(6-2s) \tag{4.27}$$

$$D(s)=(s^3+4s^2+6s+4)(s+1) \tag{4.28}$$

şeklindedir. Uygulama 1 ve uygulama 2 de yapıldığı gibi Kısım 2.6 belirtilen tasarım yöntemini uygularsak ve aynı başlangıç koşulları altında *y(t)* birim basamak cevabı, *u(t)* kontrol işareti, katsayı diyagramı ve *e(t)* etkin hata işareti Şekil 4.4' de gösterilmiştir.

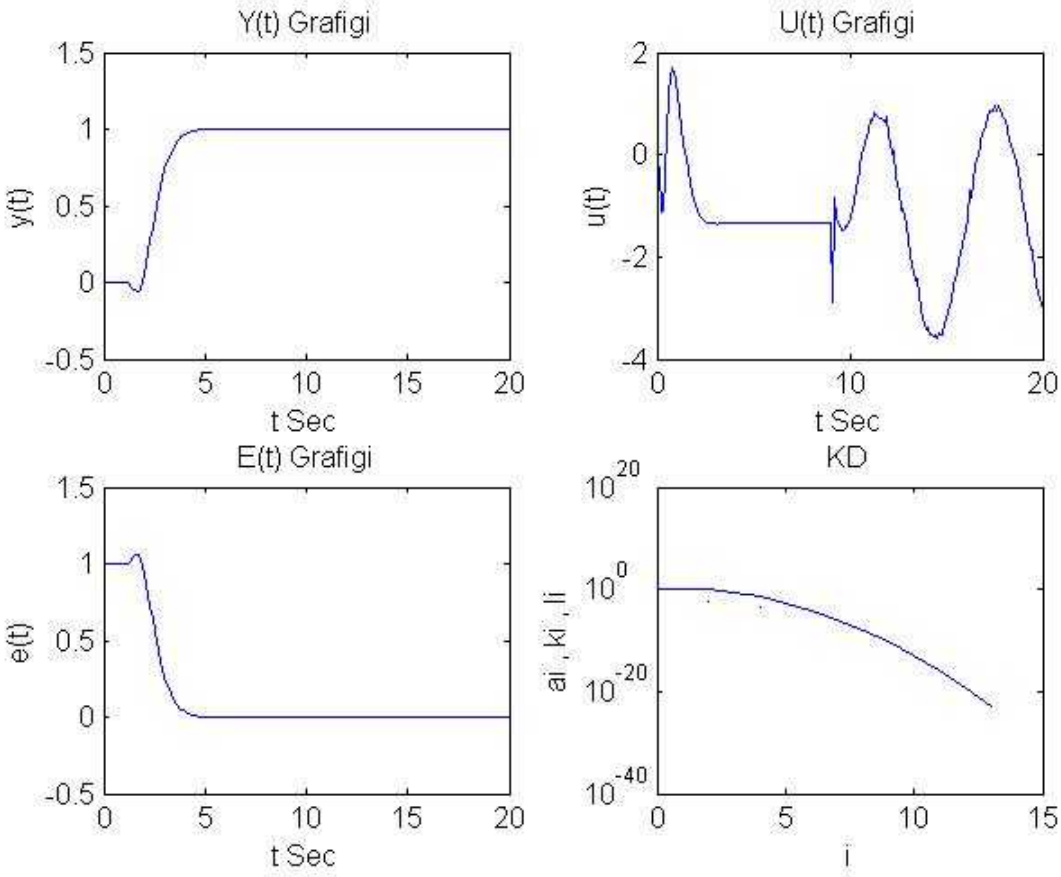


Şekil 4.4: Denklem 4.26'e ait sistemin ölü zamanını $e^{-s} \cong \frac{6-2s}{6+4s+s^2}$ biçiminde ifade edilmesi halinde KDY ile tasarlanan sistemin *y(t)* birim basamak cevabı, *u(t)* sisteme etki eden kontrol işareti , *e(t)* hata işareti ve katsayı diyagramı

Şekil 4.4' de görüldüğü gibi, kontrol işareti *u(t)*'nin sinüs biçiminde bozucunun etki ettiği zamanda istenmeyen bir sıçrama olmaktadır. Bunun önlenmesi için ölü zamanın daha az bir hatayla yaklaşım yapılmalıdır. Ölü zaman

$$e^{-s} \cong \frac{3 \quad (-2\,s\,0 + \;\;8^{2})}{6 \quad 0 \quad 3s + 6 \quad s^{3} + \;\;3^{3}} \tag{4.29}$$

biçiminde ifade edilirse ve tasarım prosedürü tekrarlanırsa Şekil 4.5' te görüldüğü gibi kontrol işaretindeki sıçrama büyük ölçüde giderilir.



Şekil 4.5: Denklem 4.26'e ait sistemin ölü zamanını $e^{-s} \cong \frac{3 \quad (-2\,s\,0 + \;\;8^{2})}{6 \quad 0 \quad 3s + 6 \quad s^{3} + \;\;3^{3}}$ biçiminde ifade edilmesi halinde KDY ile tasarlanan sistemin *y(t)* birim basamak cevabı, *u(t)* sisteme etki eden kontrol işareti , *e(t)* hata işareti ve katsayı diyagramı

5. DİĞER TASARIM YÖNTEMLERİYLE KARŞILAŞTIRMA

5.1 Giriş

Bu bölümde KDY yöntemiyle ölü zamanlı, doğrusal ve zamanla değişmeyen birinci dereceden sisteme kontrolör tasarlanacak ve çıkan sonuçlar başka tasarım yöntemleriyle karşılaştırılacaktır.

5.2 Uygulama

Açık çevrim transfer fonksiyonu (5.1)' de verilen ve *s*-düzleminin sağ tarafında 1 adet kutba sahip bir sistemi ele alalım. Bu sistem sırasıyla Ziegler-Nicholas, CHR (Chein, Hrones ve Reswick), Cohen-Coon ve IMC tasarım metodu ile PID tasarlama yöntemleriyle KDY yöntemiyle oluşturulan kontrolör karşılaştıracaktır.

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+2} \tag{5.1}$$

Ayrıca sisteme 15 saniyede basamak türünden ve genliği 0.5 olan bir basamak türünden bozucu etki etsin.

Denklem (5.1)'deki sistemi Katsayı diyagram yöntemiyle kontrolör tasarlayabilmek için daha önce de bahsedildiği gibi tasarım parametrelerine ihtiyaç duyulur.

Sistemde ölü zaman olduğu için ölü zaman $e^{-s} \cong \frac{2-s}{2+s}$ biçiminde ifade edilir ve böylece sistem $G(s) = N(s)/D(s)$ pay ve payda polinomları

$$N(s) = 2 - s \tag{5.2}$$

$$D(s) = (2-s)(2+s) \tag{5.3}$$

Sisteme 15. saniyede basamak bozucusu etkiliyorsa başlangıç koşulu olarak $l_0 = 0$ alınır. Buna göre kontrolör polinomları

$$A(s) = l_2 s^2 + l_1 s + l_0 \tag{5.4}$$

$$B(s) = k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \quad (5.5)$$

olarak tanımlanır.

Tasarım parametresi olan kararlılık indislerini Standart Manabe biçiminde seçersek

$$\gamma_i = [2.5, 2, 2, 2, 2, 2] \quad (5.6)$$

ve τ eşdeğer zaman sabiti

$$\tau = \frac{t_s}{2.5 \sim 3} = \frac{4.5}{2.5} = 1.8 \quad (5.7)$$

olarak hesaplanır ve tasarım parametrelerinden Kısım 2.6 da belirtildiği gibi hedeflenen karakteristik denklem

$$P_{hedef}(s) = s^6 + 11.8s^5 + 29.6s^4 + 36.5s^3 + 23.9s^2 + 8.3s + 1.0 \quad (5.8)$$

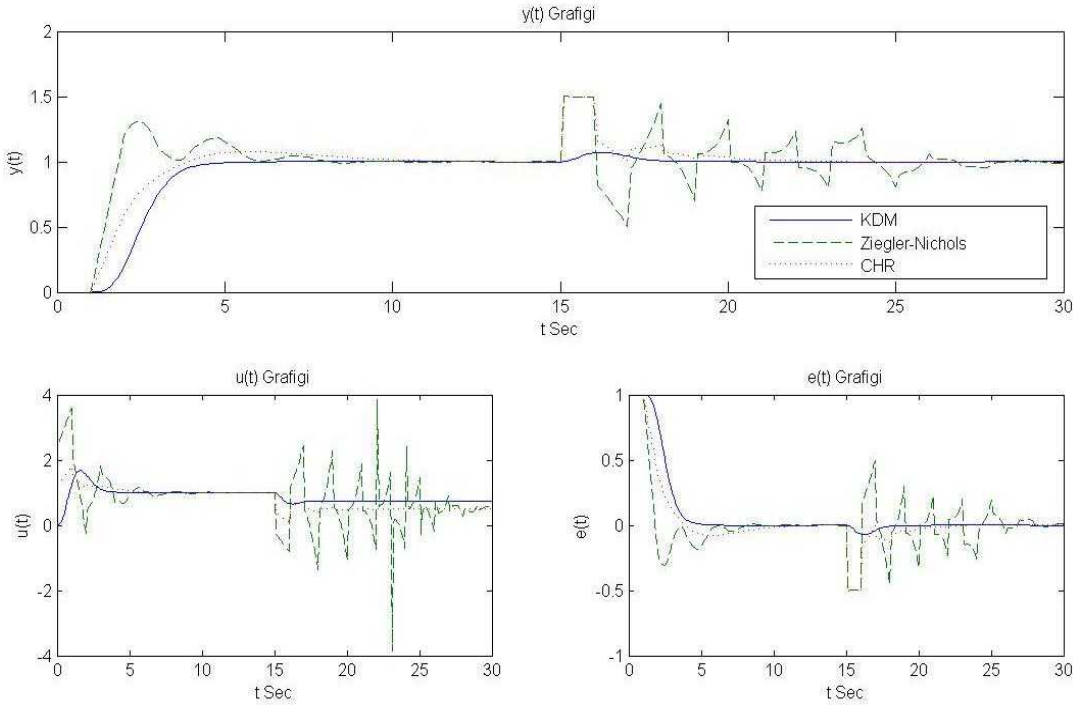
biçiminde olacaktır.

Yukarda bahsedilen PID tasarım yöntemlerini uygularsak eğer Tablo 5.1 elde edilir.

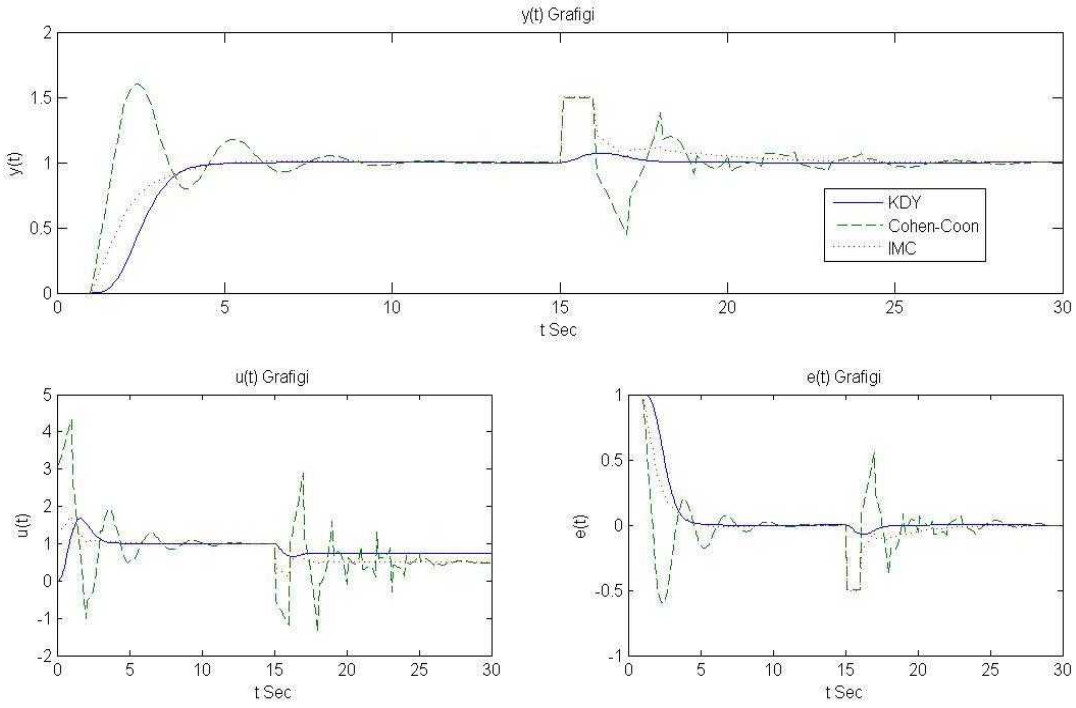
Tablo 5.1: Farklı PID tasarım yöntemlerine ilişkin oransal, integral ve türev katsayıları

	Ziegler-Nichols	CHR	Cohen-Coon	IMC
Kp	2.4	1.2	2.943	1.25
Ki	1.2	0.6	1.39659	0.5
Kd	1.2	0.6	0.9949	0.5

KDY ile tasarlana kontrolör ve Tablo 5.1 de belirtilen PID katsayılarını kullanılarak tasarlanan kontrolörlere ilişkin *y(t)* birim basamak cevabı, *u(t)* kontrol işareti ve *e(t)* etkin hata işareti Şekil 5.1 de verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 5.1 a-b Farklı yöntemler için *y(t)* birim basamak cevabı, *u(t)* kontrol işareti ve *e(t)* etkin hata işaretleri

Katsayı diyagram yöntemiyle tasarlanan kontrolör sayesinde kapalı çevrim çıkış işareti aşımsız ve daha hızlıdır. Ayrıca eşdeğer zaman sabitini değiştirerek daha da hızlı elde edilebilir. Ayrıca kontrol işaretinin diğerlerine göre genliği daha düşüktür. Özellikle basamak bozucusunun yaratmış olduğu etkiyi azaltmak için ölü zamanın daha az bir hatayla yaklaşımı yapılırsa daha, kontrol işaretinin genliği daha da az olacaktır.

5. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Teknolojik gelişmelerin etkisinde, kontrol sistemleri daha karmaşık ve hassas olmuşlardır. Bu nedenlerde de kontrol tasarım yöntemleri de daha karmaşık hale gelmektedir. Ortaya konulan ihtiyaçlara yönelik mevcut kontrolörler sürekli geliştirilmiştir. Katsayı diyagram yöntemi mevcut yöntemlerin üstünlüklerini ek olarak günümüzün ihtiyaçlarına yönelik özellikleri de kendi bünyesinde toplayarak kontrolör tasarımını güçlendirmiştir. KDY kullanıldığında sistem ne olursa olsun tasarım parametrelerini, kararlılık indeksleri, karalılık sınır indeksleri ve eşdeğer zaman sabiti, kullanarak tasarlanan kontrolörle kapalı çevrim cevabı aşımsız olmakta ve istenilen yerleşme süresinde de sistem oturur. Ayrıca sistem dayanıklıdır ve bozucu etkilerini diğer yöntemlerden daha hızlı bir şekilde giderir. Eğer sistemde herhangi bir aşım gözlenirse kararlılık indekslerinde ufak değişiklikler yapıldığında istenilen aşımsız yanıt elde edinilir.

Günümüzdeki birçok uygulamada bulunan ölü zamanın etkisi altında KDY yöntemiyle yapılan kontrolörün yine aşımsız ve istenilen yerleşme süresinde sistemin yerleştiği görülmektedir.

Ölü zaman içeren sistemlerde yapılan rasyonel yaklaşımda pay ve payda polinom mertebelerinin seçilmesi önemlidir. Eğer pay ve payda mertebeleri eşit alındığında sisteme etkiye bozucu sırasında kontrol işaretinde ani bir sıçrama olmaktadır. Bu sıçrama etkisi daha yüksek simetrik Padé açılımlarıyla azaltalabilinir. Ayrıca pay mertebesinin paydadan küçük seçildiği zaman da kontrol işaretinde görülen sıçrama azalır. Birim basamak yanıtında ise, simetrik Padé açılımları kullanmak yerine, Padé açılımdaki pay mertebesini payda mertebesinden bir derece küçük seçilerek tasarlanan kontrolörle bozucu etkisinin daha hızlı giderilir. Mertebelerin bu biçimde seçilmesi kontrolör polinomlarının derecelerini değiştirmediği için tasarım parametrelerinde değişiklik olmaz.

Sonuç olarak KDY yöntemi günümüzdeki mevcut tasarım yöntemlerinden daha üstün olmakla birlikte kolay uygulanır. Tasarım parametrelerinin az oluşu ve akılda kalmasından dolayı diğer tasarım yöntemlerinden daha kolay uygulanır. İstenilen sistem dinamiği önceden belirlenmesi tasarımcıya üstünlük sağlar.

KAYNAKLAR

[1] **Hamamcı, S. E., A.,** 2002. Katsayı Diyagram Methodu' nun Özel Durumlara ve ÇGÇÇ Sistemlere Uygulanması, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[2] **Manabe, S.,** 1998. Coefficient Diagram Method, 14th IFAC Symosium on Automatic Control in Aerospace, Aug. 24-28, Seoul, Korea, 199-210.

[3] **Manabe, S. Ve Kim, Y. C.,** 2000. Recent Development of Coefficient Diagram Method, ASSC' 2000 3rd Asian Control Conference, Shanghai.

[4] **Ogata, K.,** 1997. Modern Control Engineering, Third Edition, Prentice-Hall International, Inc, Upper Saddle River, New Jersey.

[5] Lipatov, A. V. ve Sokolov N, 1979. Some Sufficient Conditions for Stability and Instability By Lipatov and Its Application To Coefficient Diagram Method, Tokai University, Control Eng. Dept., 1117 Kitaname, Hiratsuka, Kanagawa 259-1292, Japan, 440-449.

[6] **Lipatov, A. V. ve Sokolov N,** 1979. Some Sufficient Conditions For Stability and Instability Of Continuous Linear Stationary Systems, Automat. Remote Control.,39, 1285-1291

[7] **Manabe, S.,** 1994a**, "**Coefficient Diagram Method as applied to the attitude control of controlled-bias-momentum satellite", 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, 12-16 Sept.i Palo Alto, CA, 322-327.

[8] **Manabe, S.,** 1994b, A low cost inverted pendulum system for control system education, 3rd IFAC Symposium on Advances in Control Education, Tokyo, August 1-2, 1994.

[9] **Manabe, S.,** 1994c, Design of velocity controller for three inertia system by Coefficient Diagram Method, First Asian Control Conference, 27-30 July, Tokyo, 1997.

[10] **Manabe, S.,** 1998c,. Coefficient Diagram Method, 14th IFAC Symp. On Automatic Control in Aerospace, Aug. 24-28, Seoul, Korea, 199-210.

[11] **Manabe, S.,** 1998c,. "Analytical weight selection for LQ design" 8th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, 23-24 July, Sagamihara, ISAS.

[12] **Chestnut, H. And Mayer, R. W.,** 1951, Servomechanism and Regulating System Design, Vol 1, Chap. 14,John Wiley, NY.

[13] **Mathews John H.**, 1992, Methods For Mathematics, Science, and Engineering, Prentice Hall,Englewwod Cliffs, N.J.

[14] **Truxall John G.**, 1955, Automatic Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill, New York.

[15] **Vajta, M.,** 2000, Some Remarks on Padé-Approximations, 3rd Tempus-Intcom Symposium,

[16] **Öcal, Ö.,** 2004. Katsayı Diyagram Yönteminin (KDY) Kurumsal Altyapısı ve değişik Sistemlere Uygulaması, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

15 Haziran 1980'de İstanbul'da doğdu. İlkokulu Ankara okuduktan sonra, orta okul eğitimini Kahire'de tamamladı. Lise eğitimini Ankara Atatürk Anadolu Lisesinde başarıyla tamamladıktan sonra, 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği bölümüne girmeye hak kazandı. 1998 yılında, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliğine yatay geçiş yaparak 2002 yılında bu bölümden mezun olmuştur. 2003 senesinde Kontrol ve Otomasyon Bölümünde yüksek lisans yapmaya hak kazanmıştır.