İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ KADEMELİ VLASOV TİPİ ZEMİN MODELİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Mehmet BALCI

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ KADEMELİ VLASOV TİPİ ZEMİN MODELİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Mehmet BALCI
(501021029)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : Prof.Dr. M. Ertaç ERGÜVEN
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Gülay ALTAY (B.Ü.)
Yrd.Doç.Dr. Abdullah GEDİKLİ (İ.T.Ü.)

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Başta değerli hocam Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN olmak üzere, çalışmalarım esnasında problemin teori ve programa kısımlarındaki desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ'ye teşekkür ederim.

Bu çalışmayı, öğrenim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ithaf ediyorum.

Mayıs, 2005 Mehmet BALCI

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ v
SEMBOL LİSTESİ vii
ÖZET viii
SUMMARY ix

1 GİRİŞ 1
1.1 Temel-Zemin Etkileşim Problemi 1
1.2 Konu ile İlgili Yapılmış Çalışmalar 6
1.3 Çalışmanın Kapsamı ve Amacı 8

2 ELASTİK ZEMİN MODELLERİ 10
2.1 Tek Parametreli Zemin Modeli 10
2.1.1 Winkler modeli 10
2.2 İki Parametreli Zemin Modelleri 12
2.2.1 Filonenko-Borodich modeli 12
2.2.2 Hetenyi modeli 13
2.2.3 Pasternak modeli 13
2.2.4 Vlasov modeli 15
2.2.5 Reissner modeli 15

3 ELASTİSİTEDE VARYASYONEL YÖNTEMİN KULLANILMASI 16
3.1 İki Boyutlu Elastisite Problemlerinde Varyasyonel Yöntemin Kullanılması 16

4 İKİ PARAMETRELİ ZEMİNLERİN DÜZLEM MODELLEMESİ 24
4.1 Kirişsiz Zemin Problemleri 25
4.1.1 Tek katmanlı zeminler 25
4.1.1.1 Tekil yük durumu 27
4.1.1.2 Yayılı yük durumu 29
4.1.2 İki katmanlı sistemler 31
4.2 Kirişlerin Elastik Zeminlerdeki Eğilme Problemleri 36
4.2.1 Tek tabakalı kiriş modellemesi 36
4.2.2 İki tabakalı kiriş modellemesi 37
4.3 Eğik Tabanlı Zemin Modeli 38
4.4 Dağılım Fonksiyonları ve γ Parametresi 40
4.5 Vlasov Modelinin Matris Formda Toplu Halde Gösterimi 47

5 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN PROBLEME UYGULANMASI 52

6 UYGULAMALAR **57**
6.1 Zemin Modellemesinde Katman Sayısının Lineer Dağılım Fonksiyonları Kullanılarak Etkisinin İncelenmesi 58
6.2 Dağılım Fonksiyonlarının Yer Değiştirmelerdeki Etkisinin İncelenmesi 59
6.3 Sonlu Elemanlar Yönteminin Probleme Uygulanması 61
6.3.1 Yarı sonsuz uzunluklu zemin örneği 61
6.3.2 Eğik tabanlı zemin örneği 62
6.4 Kademeli Vlasov Zemin Modeli Uygulamaları 64
6.4.1 Sınırlı uzunluktaki kiriş modeli 64
6.4.2 Kademeli modelin farklı yükleme durumları için incelenmesi 65
6.4.3 Aynı yükleme durumu için katman etkisinin incelenmesi 66

7 SONUÇLAR **67**

KAYNAKLAR **69**

ÖZGEÇMİŞ **71**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Problemin Şematik Gösterimi……..……... 8
Şekil 2.1 : Winkler Zemin Modeli……...……. 10
Şekil 2.2 : Filonenko-Borodich Modeli……..……. 12
Şekil 2.3 : Pasternak Modeli…..... 14
Şekil 3.1 : Düzlem Gerilme Durumundaki Levha…….……... 16
Şekil 3.2 : Kirişin Katmanlı Olarak Modellenmesi…….……. 19
Şekil 4.1 : Tekil Yükleme Durumu……..……. 27
Şekil 4.2 : Yayılı Yük Durumu 29
Şekil 4.3 : İki Katmanlı Yayılı Yük Durumu…….……... 31
Şekil 4.4 : Tek Tabakalı Kiriş Modeli…….……. 36
Şekil 4.5 : İki Tabakalı Kiriş Modeli…….……... 37
Şekil 4.6 : Eğik Tabanlı Zemin Örneği…….…… 38
Şekil 4.7 : Vlasov Modelinde Kiriş Problemi……...…… 41
Şekil 4.8 : Katmanlı Vlasov Zemin Parçası……...……... 47
Şekil 5.1 : Kirişsiz Sonlu Eleman Örneği ……..…….. 52
Şekil 6.1 : Tekil Yük Etkisindeki Farklı Katman Sayısına Sahip Zemin Parçası…….. 58
Şekil 6.2 : Farklı Katman Sayısı Durumlarının Lineer Dağılım Fonksiyonları için Yer Değiştirme Eğrileri…….…… 59
Şekil 6.3 : γ Parametresine Bağlı Olan Hiperbolik Dağılım Fonksiyonlarının Seçilmesi Halinde 6.1 Uygulamasında Oluşan Çökme Eğrileri…….……... 59
Şekil 6.4 : Lineer ve Hiperbolik Dağılım Fonksiyonlarının Birlikte Gösterimi……..…….. 60
Şekil 6.5 : 6.1 Uygulamasındaki Tekil Yük Etki Noktasındaki Çökme Değerinin, Derinlikle Değişiminin Dağılım Fonksiyonlarına Bağlı Olarak Gösterimi……..…….. 60
Şekil 6.6 : Yarı Sonsuz Uzunluktaki Zemin Ortamının Sonlu Elemanlar Modellemesi…… 61
Şekil 6.7 : Sonlu Elemanlar ile İki Tabakalı Vlasov Çözümünün Karşılaştırılması……... 61
Şekil 6.8 : Eğik Tabanlı Zemin Örneği…….…… 62
Şekil 6.9 : Lineer Dağılım Fonksiyonu ile Farklı Eğim Durumları için Oluşan Zemin Yüzeyi Çökme Eğrileri…….……... 62
Şekil 6.10 : Eğimin ½ Olması Halinde Sonlu Elemanlar, Lineer ve

Hiperbolik Dağılım Fonksiyonların Çözümünü Gösteren Eğriler .. 63
Şekil 6.11 : Dört Bölgeden Oluşan Kademeli Zemin Tipi…….. 64
Şekil 6.12 : y = 0 Yüzeyine Ait Çökme Eğrisi……... 64
Şekil 6.13 : Farklı Yükleme Durumundaki Kademeli Zemin Modeli…… 65
Şekil 6.14 : Yükleme Durumları için Zemin Yüzeyine Ait Çökme Eğrileri…. 65
Şekil 6.15 : Kademeli, Tek ve İki Katmanlı Zemin Örneği…… 66
Şekil 6.16 : Katman Durumlarının Çökme Eğrileri……..…….. 66

SEMBOL LİSTESİ

∇^2	: Laplace diferansiyel operatörü
π	: Potansiyel enerji
ψ_t, ψ_k	: γ parametresine bağlı sabitler
[A], [B]	: Vlasov diferansiyel denklem takımlarının katsayılar matrisleri
[d]	: Düzlem gerilme durumu için malzeme sabiti matrisi
[q]	: yükleme vektörü
[S*]	: Rijitlik matrisi
[V]	: Yer değiştirmeler vektörü
{D*}	: Yer değiştirme vektörü
{F*}	: Yük vektörü
{Q*}	: Yük vektörünün düğüm noktasına etkiyen bileşeni
$\{Q_q^*\}$	: Düğüm noktasına indirgenen yük vektörü bileşeni
$\{\sigma\}$	: Düzlem gerilme vektörü
C_1, C_2	: Diferansiyel denklem sabitleri, Reissner modeli sabitleri
D	: Plaka eğilme mukavemeti
EI, EJ, E_bI_b	: Kiriş eğilme rijitliği
E_s, E_o	: Zemin Elastisite modülü
F(x)	: Diferansiyel denklem sayısının azaltılması sonucu oluşan fonksiyon
G_x, G_y, G_s	: Kayma şekil değiştirme sabitleri
k	: Zemin yatak katsayısı
k, t	: Vlasov modeli sabitleri
p(x,y), q(x,y)	: Yayılı dış yükler
P, M	: Tekil yük
r_{ij}, s_{ij}	: Dağılım fonksiyonlarının integralleri şeklindeki sabitler
T	: Filonenko-Borodich modeli sabiti
T(x), S(x)	: Eksenel ve enine genelleştirilmiş kuvvetler
U, V	: Genelleştirilmiş yer değiştirme fonksiyonları
U, V	: İç ve dış enerji
u, v, w	: Kartezyen koordinatlarda yer değiştirme fonksiyonları
V_1, V_2, V_3, V_4	: Düğüm noktası yer değiştirmeleri
X, W, T, K,Q	: Sırasıyla x, w, t, k, q'e bağlı boyutsuz sabitler
γ	: Dağılım fonksiyonu parametresi
γ_{xz}, γ_{xy}, γ_{yz}	: Kayma şekil değiştirmeleri
δ	: Dikkate alınan zemin genişliği
α	: k ve t' ye bağlı sabit
ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}	: Düzlem şekil değiştirme bileşenleri
ϕ_t, ϕ_k, ϕ_α	: Dağılım fonksiyonuna bağlı sabitler
ϕ, φ	: Dağılım fonksiyonları
ν, ν_s,ν_0	: Poisson oranı
σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}	: Düzlem gerilme bileşenleri

İKİ PARAMETRELİ KADEMELİ VLASOV TİPİ ZEMİN MODELİNİN İNCELENMESİ

ÖZET

Winkler, zemini tek parametreye bağlı olarak modellemiştir. Bu modelde zemin, birbirinden bağımsız dikey duran yay sistemi olarak kabul edilmiştir. Daha sonraki çalışmalar ise, Winkler modelinin eksik kalan yer değiştirme sürekliliğini sağlamak amacıyla, Winkler modelinde yapılması önerilen değişiklikler ile varyasyonel hesaba dayanarak iki boyutlu sistemi tek boyuta düşürerek çözüme ulaşmayı amaçlayan çalışmalardan oluşmaktadır. Bu çalışmalar iki değere bağlı olarak ifade edildikleri sebebiyle iki parametreli zemin modelleri olarak adlandırılır. İki değişkenli bir fonksiyon , biri belirlenen (dağılım fonksiyonları) diğeri ise bulunması gereken şeklinde seriye açıldığı takdirde, fonksiyon tek değerli hale indirgenmiştir. Bu ise çözümde büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu kabul Vlasov modelinde, Lagrange Virtüel İş Prensibi uygulanması halinde iki parametreli zeminlerin denge şartları elde edilebilmektedir. Dağılım fonksiyonları problemin çözümünde önemli bir etkendir. Hangi tip fonksiyonların seçilmesi gerektiği zeminin fiziksel durumu göz önüne alınarak karar verilmelidir. Vlasov modelinde dağılım fonksiyonları sığ kısımlarda lineer, derin kısımlarda ise hiperbolik alınması önerilmiştir. Hiperbolik dağılım fonksiyonları içerdiği γ parametresine bağlı olarak problemi etkilemektedir. Bu parametrenin artan değerleri lineer dağılım fonksiyonlarına yaklaşmaktadır. Katman sayısının fazla alınması halinde ise hiperbolik fonksiyonların çözümüne yaklaşılmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin ilgili diferansiyel denklemin çözümünden elde edilmesi nedeniyle uygun sonuçlar elde edilebilmektedir. Katman veya bölge sayısının artması diferansiyel denklem sabitlerinin artması nedeni ile bilgisayar kullanılmasını gerekli kılmaktadır.

THE STUDY ON THE TWO-PARAMETER VLASOV MODEL ON STEPPED SOIL SHAPE

SUMMARY

Winkler model is based on one parameter. In this model, idealization of the soil medium consists of a system of mutually independent spring elements. The new observations on the soil are divided in two distinct lines. The aim of the first approach is providing of continuity of deformation by mechanical interaction between spring elements. The other one obtains the solution of system by using variational method by reducing of two-degree of problem to one degree. Since new models are depends on the two parameters, they are therefore called two-parameter soil models. If a function with two independent parameters is written in two distinct-parameter functions with one of them is known (distribution function) , it is said that the degree of problem is decreased to one dimension. This gives easiness to solve the problems with Lagrange Virtual Method to obtain equilibrium conditions. Distribution functions are effective for the solutions. The physical properties of soil medium should be considered to assume the distribution functions. The distribution function in Vlasov model should be taken linear in shallow layers, and hyperbolic in deep layers. These functions effect the results according to γ parameter. The higher value of this parameter, the closer results with the linear distribution functions. It is possible to get reliable values from the finite element method, when the shape functions are obtained by the related differential equations. When the number of layers and zones of the Vlasov model increases, the computer aided study will be needed.

1 GİRİŞ

1.1 Temel - Zemin Etkileşim Problemi

Zemin üzerine yapılan inşaat yapıları, insanların bu sürekli ortam hakkında bilgi edinme ihtiyacına neden olmuştur. Yapı temelleri, yol inşaatı bu alanda incelenen belli başlı mühendislik konuları olarak gösterilebilir. Cisimler arası etkileşim problemlerinin özel bir durumu olan bu problemler, uygulamalı matematik ve mühendislik problemlerinde önemli bir yer tutmaktadır. Elastik analiz çözüm için çoğunlukla kullanılan bir yol olmasına karşın, doğrusal olmayan elastik ve zamana bağlı analizlerin hesapta dikkate alınması giderek yaygınlaşmaktadır.

Yapı ile etki içinde olan doğal zeminin mekanik özellikleri

i) zemin partiküllerin şekline, boyutuna ve mekanik özelliklerine,
ii) zeminin katmanlaşmasına,
iii) partiküller arası gerilmelere,
iv) nem miktarı, doygunluk derecesi ve zeminin su geçirimliliğine

bağlıdır. Bu faktörler önemli ölçüde doğrusal olmayan, tersinir olmayan ve zamana bağlı özellik gösteren gerilme-şekil değiştirme bağıntıları ile izotrop ve homojen özellik göstermeyen zeminin özelliklerini etkilemektedir. Bu nedenle, zemin ile zeminle etkileşimde olan elemanların oluşturduğu sistemi çözmek için bu faktörleri dikkate almak, oldukça zor çalışmaları zorunlu kılmaktadır. Bu durum, temel-zemin problemlerinde anlamlı ve güvenilir sonuç elde etmek için zemini, belli açılardan idealleştirmek gerektiği sonucuna götürmektedir. En basit zemin modellemesi zeminin lineer elastik davranış gösterdiği kabulüdür. Bu kabulle, zemin yer değiştirmesinin lineer ve tersinir olduğu kabulü, gerçek zemini tam olarak modelleyememesine karşın, çözüm elde etmek ve zemin mühendisliği açısından pratik uygulamalarda kullanışlı veriler sunmaktadır.

Elastik zemin modellemesi en basit anlamda ilk olarak Winkler tarafından incelenmiştir (1867). Winkler'e göre zemin yüzeyindeki çökme değerleri, sadece göz önüne alınan noktaya etkiyen gerilme ile lineer bağlantılı, o noktaya sonsuz yakın bile olsa diğer kuvvet veya gerilmeden ise tamamen bağımsızdır. Dolayısıyla bu model fiziksel olarak zemini, yan yana dizilmiş ayrık yaylar olarak temsil etmektedir. Bu modelin en önemli yanı, zemin yüzeyindeki çökme değerlerinin sürekliliğini sağlayamamasıdır. Gibson (1967) tarafından sıkışmayan, homojen olmayan elastik ortam incelemesi Winkler modelini desteklemektedir.

Rijit eleman etkileşimi altında homojen, izotrop, elastik yarı uzaydaki gerilme durumunun incelenmesi ilk olarak Boussinesq tarafından 1885'de potansiyel enerji metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Ekseni doğrultusunda tekil yük etkisindeki çembersel plağın ara yüzeylerinde kayma gerilmemesi oluşmaması altında Boussinesq'in elde ettiği ifadelerin bir kısmı Love (1929, 1939) tarafından nümerik olarak elde edilmiştir. Bu çalışmayı takiben Leonev (1940), Lur'e (1941), Harding ve Hodge (1958), Korenev (1960), Galin (1947), Green ve Zerna (1968) tarafından bu tür problemler için alternatif yöntemler geliştirilmiştir.

Winkler modelinin ilk uygulaması Hertz (1884) tarafından gerçekleştirilmiştir. Hertz, bu çalışmasında tekil yüke maruz yüzen sonsuz elastik plak problemini incelemiştir. Hertz, bu çalışmasında plağın maksimum çökme değeri için ifade elde etmiş ve gözlemlerinde, plakların yükü boşalması halinde bile bir miktar battığını, plağın boyut ve eğilme özelliklerine bağlı olarak yükün limit değerine kadar yüzdüğünü gözlemlemiştir. Winkler zeminindeki kiriş ve plaklar üzerinde gelişmiş çalışmalar Zimmermann (1888) , Schleichter (1926) , ve Hetenyi tarafından gerçekleştirilmiştir.

Diğer bir zemin modellemesi ise elastik yarı-uzaydaki zemin sürekliliği göz önüne alan modeldir. Zeminin sürekliliğin incelenmesi zemini daha gerçekçi olarak tanımlamasına karşın, problem matematik acısından kompleks hale gelmektedir. Winkler modelinde yönetici denklem diferansiyel formda olmasına karşın sürekli ortam modellemesinde integral veya diferansiyel denklemlerin integrali formundaki ifadelerin çözümü gerekmektedir. Elastik yarı uzay ortamdaki tekil yüke maruz sonsuz kiriş problemi Hogg (1938) ve Holl (1938) tarafından gerçekleştirilen bağımsız çalışmalarla geliştirilmiştir.

Elastik model ve sürekli ortam modeli zemin davranışının iki uç noktası olarak algılanabilir. Teorik ve deneysel çalışmalar bu iki modelin karışımı olarak zemin davranışının modellemesinin uygun olacağını göstermektedir. Şöyle ki, Winkler modeli yer değiştirme sürekliliği sağlamamakta, sürekli ortam modeline kıyasla gerçek yer değiştirme değerleri daha hızlı düşüş göstermektedir. Filonenko-Borodich (1940), Hetenyi (1950), Pasternak (1954), Reissner (1954) ve Vlasov ve Leontiev (1966) tarafından geliştirilen iki parametreli zemin modelleri bu iki yaklaşımda oluşan tutarsızlığı gidermek amacıyla öne sürülmüştür. İki parametreli bu modeller probleme yaklaşım açısından iki kısma ayrılmaktadır. Birinci yaklaşımda (Filonenko-Borodich, Hetenyi ve Pasternak) Winkler modelindeki yaylar arasındaki etkileşimi mekanik olarak sağlamaktadır. Diğer yaklaşımda ise, (Reissner ve Vlasov ve Leontiev) gerilme ve şekil değiştirmenin elastik ortam yüksekliğince dağılımı baştan belirlenip bilinmeyen fonksiyonunda bağımsız değişken sayısı azaltılmıştır.

Etkileşim problemini tam olarak ifade edebilmek için temel-zemin etkileşim yüzeyinin mekanik davranışını önceden belirlemek gerekir. Eğer sürtünme etkisi hesaba katılmak istenirse Euler kiriş teorisinin, ara yüzeylerde sürtünmeden oluşan membran gerilmesini hesaba katmak açısından yeniden uyarlanması gerekir.

Temel-zemin etkileşim problemlerinde ara yüzeydeki durumun başlangıçtan belirlenmesi zordur. Bir çok yapı temellerinde ara yüzeylerde sürtünme etkisi görülmektedir. Zemin mukavemeti neticesinde oluşacak sürtünme kuvveti sınırlı bir değer almaktadır. Gözeneklerde oluşan su basıncı, sürtünme kuvvetinin şiddeti ve dağılımını konsolidasyon sürecinde değiştirebilmektedir. Bunun yanında dış yükün zemin üzerindeki dağılımı, temelin eğilme rijitliği ve zamana bağlı etkiler ara yüzeylerdeki durumu önemli ölçüde etkilemektedir. Etkileşim yüzeyinin tamamen sürtünmesiz veya sürtünmeli olması hallerini dikkate alarak sürtünmenin etkisi hakkında yorumda bulunulabilir. Temellerin eğilme serbestisinin de dikkate alınması kompleks bir matematik problemidir. Araştırmaların önemli kısmı elastik yarı uzaydaki rijit temeller üzerinde yoğunlaşmıştır (Mossakovski (1954), Galin (1961), Keer (1967), Spence (1968,1975), Pater ve Kalker (1975)). Örneğin çembersel rijit temelin eksenel simetrik Boussinesq problemi altında izotrop elastik yarı uzayda sürtünme etkileşimi Mossakovski (1954), Keer (1967), ve Spence (1968) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada $\nu_s \rightarrow ½$ poisson oranı için sürtünmenin rijit çökmede bir

etkisinin olmadığı görülmüştür. Poisson oranı ,ν_s, sıfıra yaklaştığında ise çökme değeri sürtünmesiz durumdan daha az olmaktadır. Genel olarak sürtünmenin, diğer bir deyişle adezyonun, çökme değerlerinde azalmaya neden olduğu sonucu Shield ve Anderson (1966) tarafından çıkartılmıştır. Temel rijitliğinin azalması sünekliliğinin artması durumunda ise sürtünmenin çökme değerlerindeki etkisi baskın olmaktadır. Bu nedenle yüksek şekil değiştirebilen elemanlar incelenirken bu durum dikkate alınmalıdır. Ara yüzeylerde sürtünmenin yanında ayrılma veya yarılma durumu da dikkate alınması gereken diğer etkenlerdir. Sürtünmesiz yüzeylerin sadece basınca çalıştığını söylemek uygun olur. Temel zemin etkileşiminin formüle edilmesindeki zorluk, gözlemsel verilere dayanılarak halledilebilir. Sürtünmenin dikkate alınmayarak elde edilen sonuçlara ise ilk yaklaşım olarak bakılabilir. Bu çalışmada ise ara yüzeylerin sürtünmesiz olduğu ve ara yüzeylerde normal gerilmenin oluştuğu kabulü yapılmaktadır.

Sürtünmesiz yüzey kabulü, etki yüzeyinde sadece normal gerilme oluşacağı basitleştirmesine götürür. Etki yüzeyindeki gerilmeler bulunduktan sonra temel ve zeminde çökme ve gerilme değerleri idealleştirilmiş durum için bulunabilir. Etki alanındaki gerilme dağılımı

i) analitik yöntem,
ii) süperpozisyon metodu,
iii) yaklaşık analitik teknikler,
iv) varyasyonel metot veya
v) nümerik metotla

elde edilebilir. Analitik yöntem ile, sonsuz plakların düzlem şekil değiştirme durumu, sonlu kalınlıklı sonsuz kirişlerin üç boyutlu problemleri, sonsuz plakların eksenel simetri problemlerin çözümleri geliştirilmiştir. Bütün bu problemlerde plak ve kirişlerin çökme, eğilme momenti, kayma ve etki gerilmesi, sınırları sonsuz olan integrallerle ifade edilebilir. Winkler veya iki parametreli zemin modelleri özel örneklerinde bu integraller basit formda özel fonksiyonlarla ifade edilebilir. Süperpozisyon tekniğinde, analitik yöntemle bulunmuş basit sistemlerden yararlanılarak lineer davranış kabulü altında değişik yüklemelere geçiş yapılabilmektedir. Yaklaşık analitik tekniklerde ise kiriş ve sonlu plakların etki bölgelerindeki gerilme dağılımı, üniform gerilme bölgeleri cinsinden oluşan tahmine

dayanır. Diğer bir yaklaşım olarak gerilme dağılımı kartezyen koordinatlar cinsinden seri şeklinde açılır. Etki gerilmesi temel ve zeminin etki yüzeylerindeki süreklilik ile zeminin bütünü acısından kuvvet dengesine dayanılarak elde edilebilir. Varyasyonel metotta, zemin çökme fonksiyonunun kartezyen koordinatlar cinsinden belli bazı sabitler cinsinden ifade edilebileceği kabulüne göre sistemi çözmektedir. Seçilen fonksiyonlar sınır şartını sağlaması gerekir. Temel zemin probleminde potansiyel enerjinin minimize edilmesi sonucu elde edilen takım denklemler, başlangıçta ele alınan sabitlerin çözümünü vermektedir. Nümerik metot ise temelin daha çok dikdörtgen, kare, çember gibi basit formda olması durumu ile zeminin özelliklerinin değişmemesi durumunda uygun olmaktadır. Bu nedenle nümerik analiz temel geometrisinin karışık olması ile zemin özelliklerinin değişim göstermesi durumunda güvenilir sonuç vermemektedir. Sonlu farklar metodu ve sonlu eleman tekniği gibi diğer yaklaşım teknikleri, bu tür etkileşim problemlerinde başarılı sonuçlar verebilmektedir.

Zemin ve zemin şartlarının değişimi sebebi ile her tip zemin için genelleştirilmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını tam olarak elde edebilmek pek mümkün görülmemektedir. Bu gerçek, zemin mekaniği üzerindeki çalışmaların, zemin özelliklerine göre birbirinden bağımsız ayrı çalışmalar olarak incelenmesine neden olmuştur. Bu durum, zemin mühendisliği çalışmaların çoğunlukla, zeminin gerilme-şekil değiştirme-zaman etkisi altında doğrusal ve tersinir olmayan incelenmesi üzerine kurulmasında etkili olmuştur. Arazi deneyleri ile bu bünye bağıntılarının elde edilmesi bazı çalışmalarda kullanılmasına karşın, bu bağıntıların zemin temel sınır değer etkileşim problemlerinin analitik ve nümerik olarak çözülmesinde kullanılması önemli zorluklar içermektedir.

Zeminin kendine özgü kompleks davranış göstermesi gerçeği, özellikle zemin temel etkileşim problemlerinde zemini idealleştiren bir çok metodun gelişmesine neden olmuştur. Bu yaklaşım metotlarda elde edilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları, gerçek bağıntılarla farklılıklar gösterebilmekle birlikte, bu tür zemin modellemesi için söylenebilecek en doğru şey, bu tür modellerin bu modellere yakın zeminler için sınırlı ve yararlı tanımlar verebilmekte olmasıdır. Zemin mekaniğindeki kompleks sınır değer problemlerinin analitik çözümünde zeminin fiziksel ve matematiksel acısından idealleştirilmesi yarar sağlamaktadır.

Zemin modellerinin zemin-temel etkileşiminde faydalı olduğu görülmektedir. Uygun zemin modelinin seçiminde zemin cinsi, zemin durumu, temelin özelliği ve dış yükler dikkate alınmalıdır. Bununla birlikte yapının kullanım ömrü, ekonomik durum da ayrıca göz önüne alınması gerekir.

Bu çalışmada iki parametreli ve varyasyonel hesaba dayalı Vlasov tipi zemin modeli üzerinde durulacaktır.

1.2 Konu İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu çalışmanın temel kaynağı niteliğindeki V. Z. Vlasov ve N. N. Leont'ev tarafından 1960' da yayınlanan kitapta **[1]**, bu modelin Lagrange Virtüel İş Prensibine dayanılarak nasıl oluşturulduğu üzerinde durulmuştur. Kartezyen koordinatlar cinsinden ifade edilen yer değiştirme bileşenlerinin seri şeklinde açılımı ile düşey doğrultudaki yer değiştirme bileşeninin dağılımının başlangıçtan ifade edilmesine dayanılarak problemin çözümü teşkil edilmiştir. Dağılım fonksiyonların derin zeminlerde γ parametresine bağlı olarak ifade edildiği bu çalışmada, iki ve üç boyutlu zemin problemleri için çeşitli durumlar incelenmiştir.

A. P. S. Selvadurai'nin (1979) kitabında **[2]** ise zemin modellerinin genel yaklaşım farklılıkları incelenmiş, çeşitli örnek problemlerde bu modellerin çözümleri verilmiştir. Winkler ve diğer modelleri temsil eden parametreler ile rijit pabuç temeller, eğilebilen kirişler, radye temellerin zemin etkileşim yüzeyinde oluşan etki gerilmelerin deney ve arazi çalışmalarından elde edilmesi üzerinde durulup, hangi tip zemin modelinin seçilmesi konusunda önerilerde bulunulmuştur.

Vlasov modelindeki Lagrange Virtüel İş Prensibine dayanılarak oluşturulan diferansiyel denklem takımlarının, aynı bölgedeki katmanlar için çıkarılan diferansiyel denklemlerin toplanması ile elde edilmesi şeklindeki diğer bir yaklaşım ise, Toyoaki Nogami, M. Asce, Yoon C. Lam tarafından 1987'de yayınlanan araştırmalarında **[3]** matris formda toplu olarak gösterilmektedir.

Vlasov modelinde, tahmine dayanılarak değer verilen yer değiştirmenin enine doğrultudaki dağılımını gösteren γ parametresinin, zemin üzerindeki elastik kiriş özel durumu için ardışık yaklaşım yöntemi ile nasıl elde edileceği, C. V. Girija

Vallabhan, Y. C. Das tarafından 1988'de yapılan çalışmada **[4]** incelenmiştir. Potansiyel enerjinin minimum kuralına bağlı olarak, Vlasov modeline ait diferansiyel denklemlerin diğer bir yol olarak nasıl elde edildiği gösterilmekle birlikte, dağılım fonksiyonunun diferansiyel denklemi sınır koşulu ile oluşturulmaktadır.

İki parametreli zeminler için bir örnek niteliğinde olan dairesel plak ve basık küresel kabuk tabanlı silindirik tank problemi, Bahattin Kimençe'nin 1989 **[5]** tarihli yüksek lisans tezinde anlatılmaktadır. Radyal eğilme momenti ve yer değiştirmelerin H/R (tank yüksekliğinin taban yarı çapına oranı) ile γ arasındaki değişimine bağlı olarak nasıl değiştiği üzerinde durulmuştur.

Zemin üzerindeki kiriş problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çözülmesinde, şekil fonksiyonlarının yük terimi içermeyen diferansiyel denklemlerden elde edilmesi, yakınsaklık bakımından daha az elemanın incelenmesi kolaylığını getirmektedir. 1991 tarihli A. Ghani Razaqpur ve K. R. Shah çalışması **[6]** bu tür yaklaşımla kiriş problemini incelemektedir. Kiriş diferansiyel denkleminin yapısı gereği üç tür yer değiştirme ifadeleri oluşmaktadır. Adı geçen çalışmada bunlardan ikisine ait durumlar farklı yükleme durumları için incelenmekte olup, genel yer değiştirme ifadesinin oluşturulması aşamasında, birim deplasman sabitleri bulunurken elde edilen yer değiştirme terimlerine, ankastre mesnetli kirişe etkiyen yük terimleri neticesinde ilave edilmesi gereken ifadeler oluşturulmuştur.

İki parametreli zemine oturan plakların kayma şekil değiştirmesinin göz önüne alınıp sonlu eleman yöntemi ile 12, 16 serbestlik dereceli elemanların farklı yükleme ve temel durumları altında çözümleri, Mecit Çelik'in (1996) doktora tezinde **[7]** anlatılmaktadır.

Zemin özelliğinin derinlikle lineer olarak değiştiği tabakalı Vlasov tipi zemin modelinin sonlu eleman yöntemi ile incelenmesi, C. V. Girija Vallabhan, A. Turhan Daloğlu'nun 1999 tarihli çalışmasında **[8]** konu alınmıştır. Bu çalışmada ele alınan düzlemsel sonlu elemanın rijitlik matrisinin, plağa, zeminin düşey yer değiştirmesine ve kayma deformasyonuna bağlı olarak üç kısımdan oluştuğu gösterilmiştir.

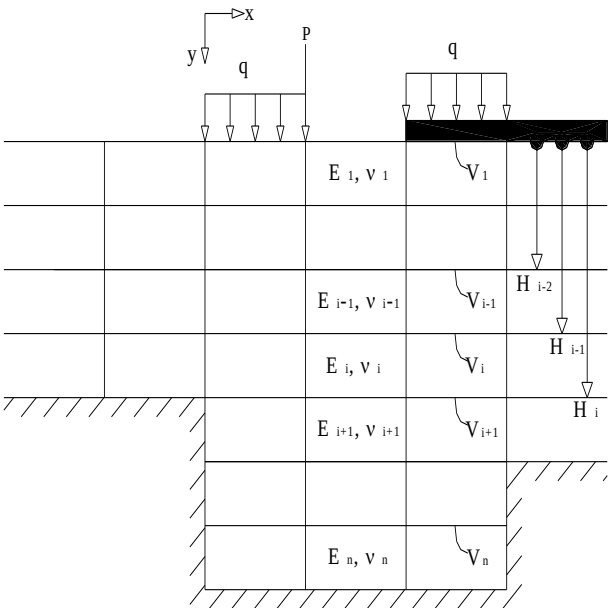
Vlasov modelinde k enine yer değiştirme katsayısı, zeminin ve üzerindeki plağın fiziksel özelliklerini içermesi nedeniyle aynı tanımlı Winkler sabiti, bu k parametresi

kullanılarak daha doğru olarak hesaplanabilir. C. V. Girija Vallabhan, A. Turhan Daloğlu'nun 2000 tarihli araştırmasında **[9],** Vlasov diferansiyel denklemini, boyutsuz sabitler cinsinden ifade ederek sabit bir poisson değeri altında, sabit yayılı yük ve plağın ortasına, kenarına etkiyen tekil yük durumları için plağın karakteristik boyunun zemin derinliğine oranına bağlı olarak, Winkler sabitini veren ifadeler elde edilmiştir.

Tek katmanlı iki parametreli zeminlere oturan kirişlerin kayma etkisinin de göz önüne alarak sistem yönetici denklemden nasıl çıkarıldığı G. Onu tarafından (2000)'de **[10]** incelenmiştir.

Zemin tabanı ile rijit kaya tabakasının birleşim yüzeyinin eğik olması halinde, Vlasov modelinin karışık sonlu elemanlar yöntemi ile kiriş ve zeminin sıkı olması değişik durumları için incelenmesi, Tekin Seyrek'in 2004 tarihli yüksek lisans tezinde **[11]** incelenmiştir.

1.3 Çalışmanın Kapsamı ve Amacı



Şekil 1.1: Problemin Şematik Gösterimi

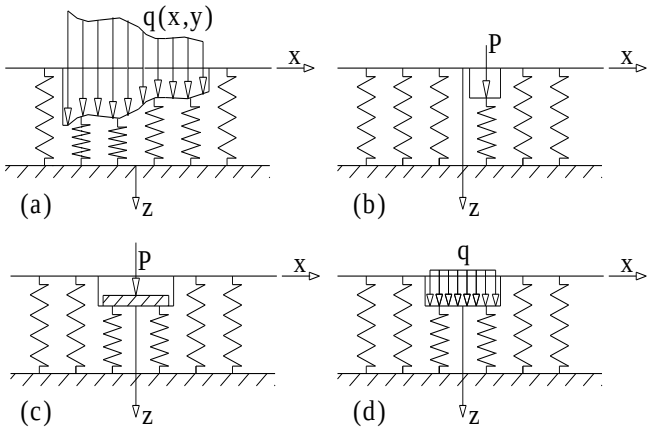
Bu çalışmada, Vlasov modeli genel olarak incelendikten sonra, Şekil 1.1 deki bölge ve katman sayısının birden fazla olması halinde, zemin ile rijit kaya katmanları ile etki yüzeyinin basamaklı olduğu durum için analitik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözüm elde etmek amaçlanmaktadır.

2 ELASTİK ZEMİN MODELLERİ

Zemin problemlerinde dikkate alınması gereken faktörlerin fazlalığı ile bu faktörlerin hesaba katılmasındaki zorluklar, zemini belli yaklaşımlardan idealleştiren modellerin gelişmesinde etken olmuştur. Bu modellerin ilki, zemini tek parametreye bağlı olarak ifade eden Winkler'e aittir. Daha sonra geliştirilen modeller ise, Winkler'in yer değiştirme süreksizliğini gidermek amacıyla iki farklı kategoride ele alınabilir. Problemi iki parametreye bağlı olarak ifade eden birinci tip modelin ikinci parametresi, Winkler yer değiştirmesinin sürekliliğini sağlamak amacıyla sisteme ilave edilen mekanik etkenin özelliğini içermektedir. Bu sınıftaki çalışmalar, bu mekanik etkenin farklılıkları ile birbirinden ayrılır. Bu modellerin ikinci sınıfı ise, varyasyonel prensip kurallarına dayanılarak problemi bağımsız olarak incelemektedir. Burada şunu belirtmek gerekir ki bu modeller, zemini oluşturan partiküller için değil, zeminin bütünü göz önüne alınarak çıkarılmıştır.

2.1 Tek Parametreli Zemin Modeli

2.1.1 Winkler modeli



Şekil 2.1: Winkler Zemin Modeli

Winkler modeline göre, zemin ortamının herhangi bir noktasındaki çökme değerleri, sadece o noktaya gelen gerilme ile doğru orantılı, diğer noktalara gelen gerilmelerden ise bağımsızdır.

$$Q(x,y) = k * w(x,y) \quad \textbf{(2.1)}$$

Burada Q: zemin yüzeyine gelen gerilme değerini, w: zemin yüzeyinin çökmesini, k: zemin katsayısını göstermektedir. İfadedeki k nın boyutu gerilme/uzunluk cinsindendir. Winkler'in bu modeli, Şekil 2.1 den de görüldüğü gibi yan yana sıralanmış birbirinden etkilenmeyen yay elemanlar sistemi olarak algılanabilir.

Bu model, zemin üzerine geliştirilen ilk model olması nedeniyle üzerinde durulacaktır. Çökme, zemine karşı yapılan bir etki olması nedeniyle, zeminin bu etkiye karşı davranışında zeminin fiziksel özellikleri önemli bir etkendir. Elastisite modülü, poisson oranı zemin özelliklerini yansıtan belli başlı parametrelerdir. Deneyler göstermiştir ki, bu etki bölgelerindeki gerilme ile yer değiştirmeler arasındaki oran, noktadan noktaya değişmektedir. Eksenel simetri yüklemesine maruz rijit temelin her noktasında çökme değerleri aynı olmasına karşın, tepki gerilme değerlerinde farklılıkların olduğu gözlenmiştir. Diğer bir deyişle, kirişin yayılı yük altında çökme değerleri merkezden kiriş kenarına doğru azalma göstermektedir

Deneylerden elde edilen diğer bir sonuç ise, yayılı yük durumu ile sıralanmış tekil yük uygulanması aşamasında, göz önüne alınan bölgede, yayılı yük durumundaki ortalama çökme değeri, tekil yük durumuna göre daha fazla olduğu şeklindedir.

Temel tip ve boyutunun farklı olması halinde elde edilen çökme değerlerinin farklılığı, bu parametrenin sadece zemin özelliğine bağlı olmadığını göstermiştir. Genel olarak temel boyu ile k parametresinin orantılı olarak azaldığı görülmektedir.

Yükleme durumu ile k arasındaki ilişki ise, yükün artan değerleri karşısında zeminin çökmeye karşı mukavemetinde artış görüldüğü dolayısıyla, k sabitinin de arttığı şeklindedir.

Katman derinliği ile zemin yatak katsayısı arasında ters orantı söz konusudur **[9]**.

Modelin tek sabiti olan k parametresinin belirlenmesi aşamasında farklı teknikler uygulanabilir. Örnek vermek gerekirse, rijit bir kütlenin zemin üzerinde gezdirilmesi sonucu elde edilen çökme değerlerinin kütlenin gerilme değerine bölümünün ortalamasının alınması, blok bir kütlenin dolaştırılması yerine belli aralıklarla dizilmiş noktasal sabit gerilme altında ortalama çökme değerinin bulunması ile bu parametre elde edilebilir **[12]**.

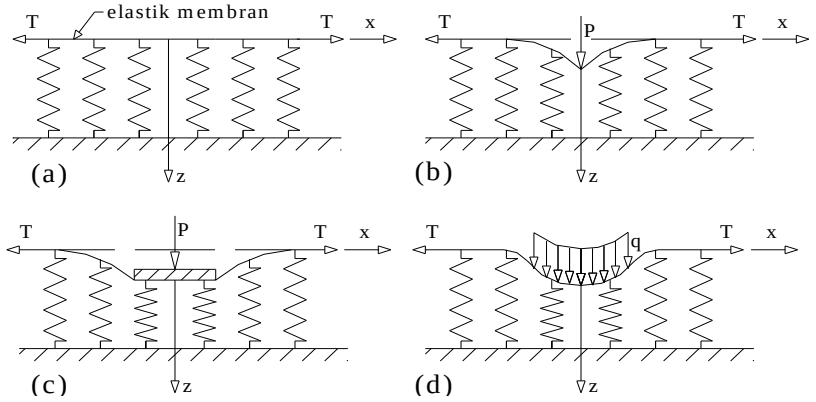
K parametresinin elde edilmesinde, temel boyut ve malzeme sabitlerinin zemin fiziksel özellikleri ile birlikte dikkate alındığı amprik ifadeler de bulunmaktadır **[9]**.

2.2 İki Parametreli Zemin Modelleri

Winkler'in eksik kalan zemin sürekliliğinin giderilmesi amacını güden ve bu amaçla öneride bulunan bilim adamları Filonenko-Borodich, Hetenyi, Pasternak ve Kerr'dir. Diğer yaklaşımlar ise elastik ortamın modellenmesinden başlar ve gerek gerilme gerekse çökme değerlerinin yayılışı için basitleştirilmiş kabuller adı altında şartlar ortaya koyan Reissner , Vlasov ve Leontiev'in çalışmalarıdır.

2.2.1 Filonenko-Borodich modeli

Bu modelle ortamın sürekliliği, yüzeye sabit gerilme altında ince elastik membran ile sağlanmaktadır. Membran-yay sisteminin dengesinden zemin çökme değerini veren ifadenin üç boyutlu problemlerde;



Şekil 2.2: Filonenko – Borodich Modeli

$$q(x, y) = kw(x, y) - T\nabla^2 w(x, y) \quad \textbf{(2.2)}$$

iki boyutlu problemlerde ise;

$$q(x) = kw(x) - \frac{Td^2 w(x)}{dx^2} \quad \textbf{(2.3)}$$

olduğu görülür. Burada $\nabla^2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$'i göstermektedir. 2.2 ve 2.3 ifadelerinden görüldüğü gibi bu modelin parametreleri k ve T' dir.

2.2.2 Hetenyi modeli

Bu model zemin üzerinde üç boyutlu problemlerde elastik plaka, iki boyutlu problemlerde ise elastik kiriş ilave ederek çökme dağılımını sağlamaktadır.İlgili diferansiyel denklem;

$$q(x, y) = kw(x, y) - D\nabla^4 w(x, y) \quad \textbf{(2.4)}$$

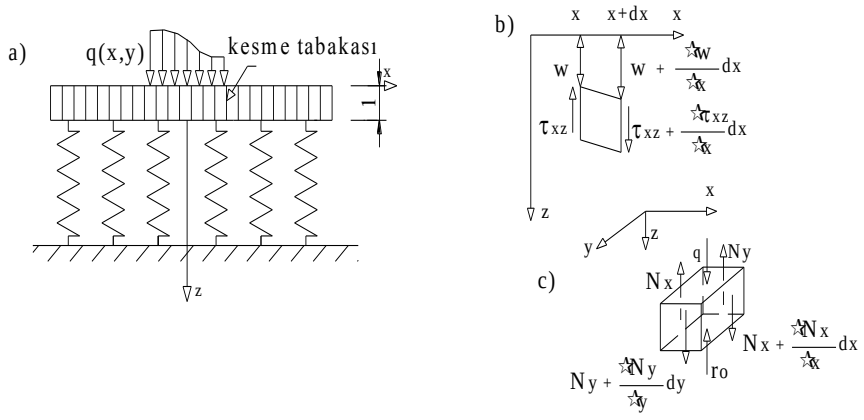
olarak gösterilebilir. Burada D $(\frac{E_p h^3}{12(1-\nu_p^2)})$ plaka eğilme mukavemetini göstermektedir. İki boyutlu sistemlerde 2.4 ifadesi;

$$q(x) = kw(x) - D\frac{d^4 w(x, y)}{dx^4} \quad \textbf{(2.5)}$$

şeklini alır.

2.2.3 Pasternak modeli

Pasternak, bu modelinde yay elemanları arasında kayma gerilmesinin varlığını, yayların üzerine sıkışmayan , sadece yatay olarak kayma şekil değiştirmesi yapan düşey eleman koyarak sağlamıştır (Şekil 2.3). Kayma elemanındaki yer değiştirme ve kuvvet dengesi şekilde gösterilmektedir. Kayma elemanını x, y ekseninde izotrop olduğu kabul edilmesi halinde $G_x = G_y = G_p$ alınabilir. Buna bağlı olarak



Şekil 2.3: Pasternak Modeli

$$\tau_{xy} = G_p \gamma_{xz} = G_p \frac{dw}{dx}; \tau_{yz} = G_p \gamma_{yz} = G_p \frac{dw}{dy} \qquad \textbf{(2.6)}$$

şeklinde kayma gerilmeleri elde edilir. Kayma elemanının birim boyu için toplam kesme kuvveti,

$$N_x = \int_0^1 \tau_{xy} dz = G_p \frac{dw}{dx}; N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G_p \frac{dw}{dy} \qquad \textbf{(2.7)}$$

olmak üzere, z ekseni üzerinde kuvvet dengesi aşağıda gösterildiği gibi yazılıp;

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q - r_0 = 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

$r_0 = kw$, 2.6 ile 2.8 dikkate alınırsa, probleme ait diferansiyel denklem elde edilebilir.

$$q(x, y) = kw(x, y) - G_p \nabla^2 w(x, y) \qquad \textbf{(2.9)}$$

Pasternak ve Filonenko-Borodich modelleri T, G_p parametre farkı vardır ve her iki model birbirine yakın zemin yüzeyi çökme değerleri vermektedir.

2.2.4 Vlasov modeli

Vlasov modeli ikinci tip iki parametreli zemin modellemesine girdiği önceden belirtilmişti. Varyasyonel metodun bir uygulaması şeklinde olan bu yaklaşım, lineer elastik, izotrop ortamın dağılım fonksiyonlarına bazı şartları uygulatarak yer değiştirmelerin sürekliliğini amaçlamaktadır. Bu çalışmanın konusu olan Vlasov tipi zemin modeli, diğer bölümlerde ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

2.2.5 Reissner modeli

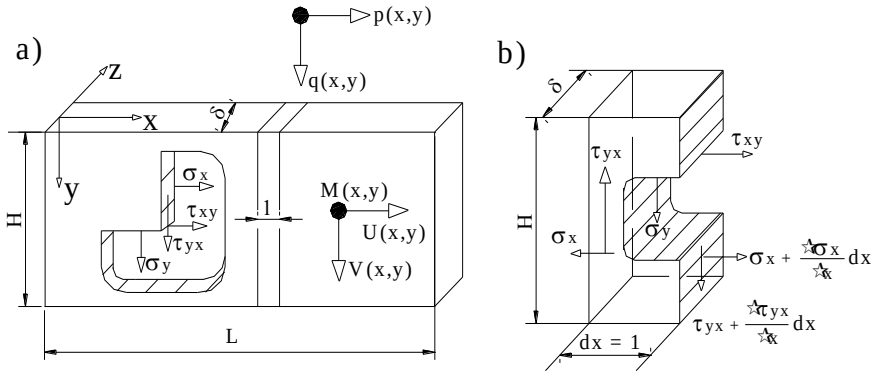
Reissner modeli, lineer elastik ortamdaki yer değiştirme ve gerilmeler üzerinde getirilen sınırlandırmalar ile ifade edilebilir. Gerilme bakımından sınırlandırma x-y düzleminde bulunan gerilme bileşenlerinin katman derinliği boyunca ihmal edilebilir düzeyde olması şeklindedir $(\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0)$. Sırasıyla x, y, z doğrultusundaki u, v, w yer değiştirme fonksiyonlarının z = H için u = v = w = 0, z = 0 için ise u = v = 0 şartlarını sağladığı kabul edilmektedir. Bu durumlar altında w zemin yüzeyinin çökme değerini, q dış yükü göstermek üzere yönetici denklem,

$$c_1 w - c_2 \nabla^2 w = q - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 q \qquad \textbf{(2.10)}$$

şeklinde ifade edilebilir. 2.10 daki c_1, c_2 sabitleri, zemin davranışını belirtmektedir. $c_1 = E_s/H$, $c_2 = HG_s/3$. Gerilmenin sabit olduğu veya lineer değiştiği özel durumunda $c_1 = k$, $c_2 = Gp$ olarak yazıldığında bu ifade Filonenko-Borodich veya Pasternak modelindeki denklemlerle aynı olduğu görülebilir. $(\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0)$ alınması nedeniyle τ_{xz}, τ_{yz} kayma gerilmeleri z koordinatından bağımsız olmaktadır **[2]**.

3 ELASTİSİTEDE VARYASYONEL YÖNTEMİN KULLANILMASI

3.1 İki Boyutlu Elastisite Problemlerinde Varyasyonel Yöntemin Kullanılması



Şekil 3.1: Düzlem Gerilme Durumundaki Levha

Düzlemi doğrultusunda yüklü bir ince dikdörtgen levha düşünüldüğünde, levhanın eğilme yapmadan şekil değiştirmesi sonucu gerilme durumu, σ_x, σ_y, ve τ_{xy} gerilme bileşenleri ile tayin edilebilir (Şekil 3.1). Levha kalınlığının ince olduğu ve gerilmenin z ekseninden bağımsız olduğu bu tür problemlere elastisite teorisinde, düzlem gerilme problemi olarak adlandırılır. Düzlem gerilme problemleri gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirmelerin x ve y eksenine bağlı olması nedeniyle iki boyutludur. Düzlemsel analizler, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$, $\tau_{yx}(x,y)$ gerilmeleri bilinmeyen olarak alıp, bunların yer değiştirme süreklilik denklemlerinin sağlanması ile belirlenmesini amaçlayan gerilme ile, bilinmeyenler olarak u(x,y), v(x,y) yer değiştirmeleri esas alan, elastik sistemin kuvvet dengesinden yer değiştirme fonksiyonları elde eden, şekil değiştirme problemleri olarak iki farklı yolla çözülebilir. Vlasov modeli çözüme, bu yaklaşımlardan ikincisiyle ulaşmaktadır. Burada u(x,y), v(x,y) sırasıyla eksenel ve enine yer değiştirme fonksiyonları olup pozitif yönleri Şekil 3.1 de gösterilmiştir.

İki boyutlu sistemlerde gerilme-şekil değiştirme bağıntıları genel anlamda aşağıda belirtildiği gibidir.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.1)}$$

burada;

E : elastisite modülü,

υ : poisson oranı,

$\varepsilon_{xx}(x, y)$, $\varepsilon_{yy}(x, y)$: sırasıyla yatay ve düşey şekil değiştirmeleri,

$\varepsilon_{xy}(x, y)$: kayma şekil değiştirmesini

göstermektedir. Şekil değiştirmelerin bilinmeyen yer değiştirme bağıntıları arasındaki ilişki ise;

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{du}{dx} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{dv}{dy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

şeklinde gösterilebilir. U(x,y) ile v(x,y) yer değiştirmelerin bulunması sonucunda (3.1), (3.2) ifadeleri ile düzlemde gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirmeler arasında dönüşümler sağlanabilir.

Yaklaşık bir çözüm bulmak için, bilinmeyen u(x,y), v(x,y) fonksiyonları, bilinen ve bilinmeyen kısımlarından oluşan sonlu sayıdaki seri şeklinde açılabilir.

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{i=1}^{m} U_i(x)\varphi_i(\mathrm{y}) \quad (\mathrm{i} = 1,2,3,\ldots,\mathrm{m}) \\ v(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} V_k(x)\phi_k(\mathrm{y}) \quad (\mathrm{k} = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n}) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3)}$$

3.3 deki $\varphi_i(\mathrm{y}), \phi_k(\mathrm{y})$ terimleri baştan belirlenir, U(x), V(x) fonksiyonları ise çözüm ile bulunur. U(x), V(x) sırasıyla x, y ekseni doğrultusundaki genelleştirilmiş yer değiştirmeleri, $\varphi_i(\mathrm{y}), \phi_k(\mathrm{y})$ fonksiyonları ise, bu genelleştirilmiş fonksiyonlarının her x değerinin, y ekseni doğrultusunda değişimini gösteren dağılım fonksiyonlarıdır. 3.3 deki $\varphi_i(\mathrm{y}), \phi_k(\mathrm{y})$ terimleri boyutsuz, U(x), V(x) fonksiyonları ise uzunluk boyutundadır. Belirlenen boyutsuz $\varphi_i(\mathrm{y}), \phi_k(\mathrm{y})$ fonksiyonları kullanmak problemin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. İki değişkenli bir fonksiyonun iki ayrı değişkenli fonksiyonlar şeklinde yazılıp, bu fonksiyonlardan bir tanesinin bilinmesi, problemi tek boyutlu hale indirgemektedir. Buradaki dağılım fonksiyonlarının lineer bağımsız olmasının yanında, problemin enine doğrultudaki şekil değiştirme durumunu yansıtması nedeniyle değişik şekilde seçilebilir. Bu nedenle hangi tip dağılım fonksiyonunu seçmenin uygun olduğu incelenen elemanın fiziksel özellikleri dikkate alınarak baştan belirlenmelidir.

Eğilme etkisindeki serbest uçlu dar kiriş örneğinde, kesitin düzlem kalması ve düşey doğrultuda şekil değiştirmenin ($\varepsilon_{yy} = 0$) olması şartlarını sağlayan dağılım fonksiyonları , y ekseni kesitin ortasından alındığı dikkate alınarak 3.4 te belirtildiği gibi alınabilir.

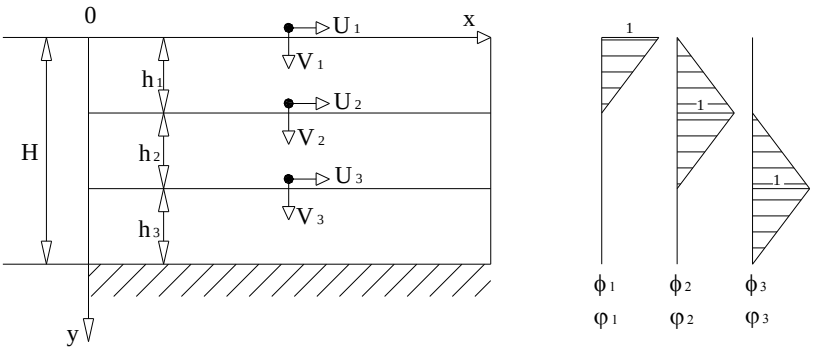
$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= U_1(x)\varphi_1(\mathrm{y}) = U_1(x) * y \\ v(x,y) &= V_1(x)\phi_1(\mathrm{y}) = V_1(x) * 1 \\ \varphi_1(\mathrm{y}) &= y \\ \phi_1(\mathrm{y}) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.4)}$$

3.4 ten anlaşıldığı üzere $U_1(x)$, kesitin eğim açısını, $V_1(x)$ ise, kirişin çökmesini temsil etmektedir. Göz önüne alınan problemin şekil değiştirme durumu 3.4 ile ifade edilmesinin yeterli olmadığı durumlarda 3.4 teki ifadeler arttırılabilir. Yükleme

durumunun x eksenine göre anti-simetrik olması halinde, kesitin düzlem kalması ve ($\varepsilon_{yy} = 0$) kabullerinin revize edilmesi amacıyla 3.4, ilave dağılım fonksiyonları ile

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= U_1(x) * y + U_2(x) * \sin\frac{2\pi y}{H} \\ v(x,y) &= V_1(x) * 1 + V_2(x) * \cos\frac{\pi y}{H} \\ \varphi_1(y) &= y, \quad \varphi_2(y) = \sin\frac{2\pi y}{H} \\ \phi_1(y) &= 1, \quad \phi_2(y) = \cos\frac{\pi y}{H} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.5)}$$

biçiminde problemin durumuna uygun olarak oluşturulabilir.



Şekil 3.2: Kirişin Katmanlı Olarak Modellenmesi

Dar kiriş örneği, Şekil 3.2 de gösterildiği gibi tabakalı olarak da modellenebilir. Kiriş alt yüzeyinin yatay ve düşey yer değiştirme açısından tutulu olduğu bu tür problemlerde dağılım fonksiyonların lineer seçilmesi, katman kesitlerinin düzlem kalmasını, enine şekil değiştirme bileşeninin ε_{yy} , dolayısıyla σ_y gerilme bileşeninin katman boyunca sabit değerli olması sonucuna götürmektedir. Şekil 3.2 den anlaşılacağı üzere dağılım fonksiyonları lineer bağımsız olmanın yanında, katman geçiş bölgelerindeki süreklilik denklemleri ile kiriş alt yüzeyi için geometrik sınır şartlarını sağlamaktadır. Üç tabakalı bu tip problemlerde 3.3 deki u, v fonksiyonları üç terime bağlı olarak temsil edilmektedir.

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= U_1(x)\varphi_1(\mathrm{y}) + U_2(x)\varphi_2(\mathrm{y}) + U_3(x)\varphi_3(\mathrm{y}) \\ v(x,y) &= V_1(x)\phi_1(\mathrm{y}) + V_2(x)\phi_2(\mathrm{y}) + V_3(x)\phi_3(\mathrm{y}) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.6)}$$

3.6 denklemi dikkate alınarak elde edilen çözümün doğruluğu, katman sayısının, dolayısıyla U, V fonksiyon sayısının artmasıyla artmakta, katman sayısının sonsuz limit değeri için elde edilen çözüm ise kesin çözümü vermektedir.

3.6 denklemi farklı fiziksel özelliklere sahip katmanlar için de uygulanabilmektedir. Bu ifadelerdeki $\varphi_i(y), \phi_k(y)$ fonksiyonları, probleme ve amaca göre lineer bağımsız olarak başka şekilde seçildiği metotlar da bulunmaktadır.

U(x) ve V(x) fonksiyonları, ortamdaki sabit bir x noktasından çıkarılan dx = 1 birim kalınlıklı bir şerit parçası üzerinde yazılan denge denklemleri sayesinde elde edilir (Şekil 3.1). Bu denge denklemi Lagrange Virtüel İş Prensibine dayanır. Bu prensibe göre, her hangi bir virtüel yer değiştirme durumundaki denge şartı, bu şerit parçasına etkiyen kuvvetler altında, ancak iç kuvvet ile dış kuvvetlerin oluşturduğu enerji toplamlarının birlikte sıfır sonucunu oluşturması halinde sağlanmaktadır.

3.3 ifadesi dikkate alındığında şerit parçası için yatay doğrultudaki virtüel yer değiştirmeleri $U_j = 1$ alınması durumunda, $\bar{u}_j = \varphi_j$ olmak üzere m değişik şekilde yazılabilir. Aynı şekilde enine doğrultudaki virtüel yer değiştirmeler, $V_k = 1$ için $\bar{v}_k = \phi_k$, n değişik şekilde yazılabilir. Sonuç olarak yatayda m, düşeyde n olmak üzere toplam (m+n) adet denklem yazılmaktadır.

Şerit üzerine etkiyen dış yükler, kirişin kalan kısmı ile şerit elemanın etkileşimi sonucu şerit yüzeyinde oluşan normal gerilme; $\sigma_x, \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ ve kayma gerilmesi $\tau_{yx}, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx$ ile verilen p(x,y), q(x,y) yayılı yüklerdir. Şerit içinde oluşan kuvvetler ise σ_y , τ_{xy} gerilmeleri neticesinde oluşmaktadır. Belirtilen gerilmeler ile Virtüel İş denklem takımları toplu olarak yatayda 3.7, düşeyde ise 3.8 olarak gösterilebilir.

$$\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\varphi_j dF - \int \tau_{xy}\varphi_j' dF + \int p(x,y)\varphi_j dy = 0 \quad (j = 1,2,3,...,m) \tag{3.7}$$

$$\int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\phi_h dF - \int \sigma_y \phi_h' dF + \int q(x,y)\phi_h dy = 0 \quad (h = 1,2,3,...,n) \tag{3.8}$$

3.7 ve 3.8 denklemlerindeki ilk terimler $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\varphi_j dF$, $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\phi_h dF$ dış kuvvetlerin şerit üzerinde yaptığı işi, ikinci terimler, $\tau_{xy}\varphi_j dF$, $\sigma_y \phi_h' dF$ iç kuvvetlerin yaptığı işi, $\int p(x,y)\varphi_j dy$, $\int q(x,y)\phi_h dy$ verilen yüklerin yaptığı işi göstermektedir.

2.2 ve 2.3 ifadeleri 2.1 de yerine koyulduğu zaman gerilmeler, genelleştirilmiş yer değiştirmeler cinsinden ifade edilmiş olmaktadır;

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i'\varphi_i + \nu\sum_{k=1}^{n} V_k\phi_k'\right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V_k\phi_k' + \nu\sum_{i=1}^{m} U_i'\varphi_i\right] \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\sum_{i=1}^{m} U_i\varphi_i' + \sum_{i=1}^{m} V_k'\phi_k\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

3.9 ifadeleri 3.7 ve 3.8 denklemlerine yerleştirildiğinde, sistemin sabit katsayılı diferansiyel denklem takımının, genelleştirilmiş yer değiştirmeler cinsinden kapalı formda oluşturulabilmektedir.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_{ji}U_i'' - \frac{1-\nu}{2}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}U_i + \sum_{k=1}^{n}(\nu t_{jk} - \frac{1-\nu}{2}c_{jk})V_k' + \frac{1-\nu^2}{E}p_j = 0 \quad (j = 1,..,m) \\
&-\sum_{i=1}^{m}(\nu t_{hi} - \frac{1-\nu}{2}c_{hi})U_i' + \frac{1-\nu}{2}\sum_{k=1}^{n} r_{hk}V_h'' - \sum_{k=1}^{n} s_{hk}V_k + \frac{1-\nu^2}{E}q_h = 0 \quad (h = 1,..,n)
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

3.10 daki dağılım fonksiyonlarına bağlı katsayıların integral formda açılımları ;

$$\left.\begin{aligned} a_{ji} &= a_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dF, \quad r_{hk} = r_{kh} = \int \phi_h \phi_k dF \\ b_{ji} &= b_{ij} = \int \varphi_i' \varphi_j' dF, \quad s_{hk} = s_{kh} = \int \phi_h' \phi_k' dF \\ c_{jk} &= \int \varphi_j' \phi_k dF, \qquad c_{hi} = \int \varphi_i' \phi_h dF \\ t_{jk} &= \int \varphi_j \phi_k' dF, \qquad t_{hk} = \int \varphi_k \phi_h' dF \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.11)}$$

şeklindedir. Bu ifadelerdeki integraller, şerit yüksekliğinin tamamı üzerinde alınır. 3.10 daki verilen p(x,y) ve q(x,y) yüklerinin yaptığı iş ile ilgili terimler ise

$$p_j = \int p(x,y)\varphi_j dy, \qquad q_h = \int q(x,y)\phi_h dy, \qquad \textbf{(3.12)}$$

şeklinde ifade edilebilir. P(x,y), q(x,y) yük değerlerinin yanında kiriş yüzeyine etkiyen normal ve kayma kuvvetlerin olması durumunda 3.12 ifadesi, 3.13'de belirtildiği şekilde genişletilebilir.

$$p_j = p(x)\varphi_j(0) + \int p(x,y)\varphi_j dy, \qquad q_h = q(x)\phi_h(0) + \int q(x,y)\phi_h dy, \qquad \textbf{(3.13)}$$

3.13 ifadesinden anlaşıldığı üzere, kuvvetin sadece x eksenine bağlı olması durumlarda yük terimleri sadece, dağılım fonksiyonun katman yüzeyindeki değerine bağlı durumuna gelmektedir. Bu değerin katman yüzeylerinde 1 değerini alması durumunda yük terimleri değişikliğe uğramadan diferansiyel denklem takımına girmektedir. Yükün sadece üst katmana etkimesi özel durumunda ise, üst katman dışındaki katmanlar için yazılmış dış yük terimleri sıfır değerini almaktadır.

Göz önüne alınan kesitte normal ($\sigma_x dF$) ve kesme ($\tau_{yx} dF$) kuvvetlerinin (m+n) serbestlik dereceli sistemdeki yaptıkları virtüel iş denklemleri ise;

$$\left.\begin{aligned} T_j(x) &= \int \sigma_x \varphi_j dF \qquad (j = 1,2,3,\ldots\ldots,m) \\ S_h(x) &= \int \tau_{xy} \phi_h dF \qquad (h = 1,2,3,\ldots\ldots,n) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.14)}$$

şeklinde yazılabilir. 3.14 deki integraller kesit yüksekliği boyunca alınmakta olup bu ifadeler, düzlemdeki sabit x noktası için genelleştirilmiş yatay ve düşey iç kuvvet

olarak adlandırılabilir. Bu ifadeler, aynı katman aralığında ve farklı bölgeler arasında yazılan kuvvet sınır şartları için kullanılmaktadır. 3.14 deki genelleştirilmiş kuvvet değerlerinin genelleştirilmiş yer değiştirme bileşenleri cinsinden ifadesi ise

$$\left.\begin{aligned} T_j(x) &= E\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} U_i^{'} + \nu \sum_{k=1}^{n} t_{jk} V_k\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m) \\ S_h(x) &= G\left(\sum_{i=1}^{m} c_{hi} U_i + \sum_{k=1}^{n} r_{hk} V_k^{'}\right) \qquad (h, k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.15)}$$

şeklinde olmaktadır **[1]**.

4 İKİ PARAMETRELİ ZEMİNLERİN DÜZLEM MODELLEMESİ

Bölüm 3 de varyasyonel yöntemin iki boyutlu elastisite problemleri için çıkarılan genel ifadeler, elastik zemin problemlerindeki kabuller sonucu, daha sade bir forma dönüşmektedir. Eksenel yer değiştirmenin enine yer değiştirmesine kıyasla daha küçük olduğu durumlarda ihmal edilmesi, 3.7 diferansiyel denklem takımının kendiliğinden sağlaması sonucuna götürmektedir. Hacimsel yüklerin zemin yüzeyine etkiyen yükler gibi dış yük olarak alınmaması diğer kabulü ise, 3.7 ve 3.8 denklemlerindeki yük terimlerini y koordinatından bağımsız hale getirmektedir.

Yer değiştirme fonksiyonlarının 3.3 deki terim sayısının sınırlı olarak alınması halinde sonuç, yaklaşık bir çözümü belirtmektedir. Denklemdeki terim sayısının arttırılması elastik zemin modellemesinde, zeminin katman sayısının ve dolayısıyla katman yüzey yer değiştirme fonksiyon sayısının artmasını göstermektedir. Bu nedenle katman sayısının artması elde edilen verilerin kesin çözüme yaklaşmasına neden olmaktadır. Buna karşın zemini katmanlara bölmek, diferansiyel denklem takımının fazlalaşmasına sebep olmaktadır. Deneysel veriler ile özenli teorik analiz sonucu dağılım fonksiyonlarının daha uygun olarak seçilmesi de modelin doğruluk derecesini arttırmaktadır.

Dağılım fonksiyonlarının lineer seçilmesi, enine gerilme bileşeninin sabit olması sonucunu çıkarmaktadır. Bu sonuç katman kalınlığının sığ olduğu durumlar için kabul edilebilmesine karşın, derinliğin artması durumunda gerilme değişimini de dikkate alan dağılım fonksiyonları seçmek gerekir. Vlasov modelinde γ parametresine bağlı olarak hiperbolik dağılım fonksiyonları önerilmiştir.

4.1 Kirişsiz Zemin Problemleri

4.1.1 Tek katmanlı zeminler

Zeminin sıkışabilir ve H yüksekliğinde tek tabakadan oluşmakla birlikte, eksenel doğrultudaki u(x,y) yer değiştirmesinin ihmal edilebildiği durumlarda, 3.3, 3.2 ve 3.9 ifadeleri sırasıyla aşağıdaki hale gelmektedir.

$$u(x,y) = 0, \qquad v(x,y) = V_1(x)\phi_1(y) \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= V_1(x)\phi_1'(y) \\ \varepsilon_{xy} &= V_1'(x)\phi_1(y) \\ \varepsilon_{xx} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} V_1(x)\phi_1'(y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} V_1'(x)\phi_1(y) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Düzlem şekil değiştirme durumunda, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında zemin karakteristikleri aşağıdaki şekilde alınmalıdır.

$$E_0 = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}, \qquad \nu_0 = \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \tag{4.4}$$

Burada E_s , ν_s sırasıyla zemin elastisite modülü ve poisson oranını göstermektedir.

4.3 deki gerilme bileşenleri 3.8 de yerlerine konulduğunda sistem diferansiyel denklemi tek bağımlı değişkene bağlı olarak elde edilebilir.

$$\frac{1-\nu_0}{2} r_{11} V_1' - s_{11} V_1 + \frac{1-\nu_0^2}{E_0} q_1 = 0 \tag{4.5}$$

4.5 denklemindeki serbest terim, zemin yüzeyi yayılı yükün , q(x) , yaptığı işi göstermektedir.

İfadedeki sabitler, sadece dağılım fonksiyonuna bağlıdır.

$$\left.\begin{aligned} r_{11} &= \int_0^H \phi_1^2(y)dF \\ s_{11} &= \int_0^H \phi_1'^2(y)dF \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

4.6'deki bütün terimler $\frac{E_0}{(1-\nu_0^2)}$ ile çarpılırsa denklemin yeni hali

$$2tV_1'' - kV_1 + q_1 = 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

şeklinde olup bu ifadedeki yeni sabitler 4.6 daki sabitler cinsinden

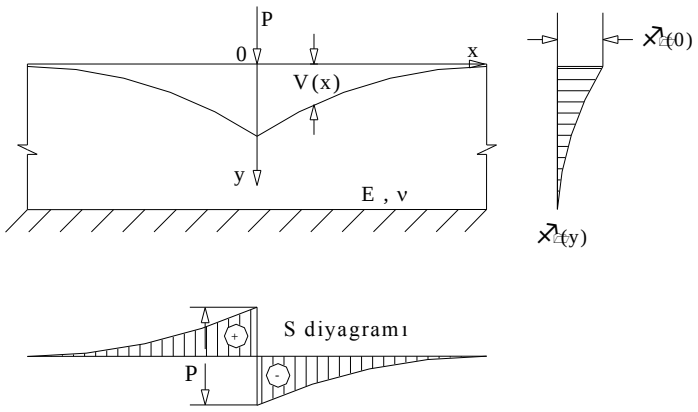
$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{E_0 s_{11}}{1-\nu_0^2} \\ t &= \frac{E_0 r_{11}}{4(1+\nu_0)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.8)}$$

olarak gösterilebilir. 4.8 diferansiyel denklemi yardımıyla, Vlasov ile Winkler modeli arasındaki farkın bu yükleme durumu için $2tV_1''$ terimi olduğu anlaşılır. Bu terim, zeminde kayma gerilmesinin oluşmasını , dolayısıyla yer değiştirmelerin gerilmenin etkidiği noktadan ortamın diğer kısımlarına doğru yayılmasını sağlamaktadır. İfadedeki k karakteri, elastik ortamın sıkışma şekil değiştirmesini göstermesi nedeniyle Winkler sabitine benzerdir. Diğer t karakteri ise zeminin kayma şekil değiştirmesini diğer bir deyişle yük dağılım kapasitesini göstermektedir.

4.7 diferansiyel denklemin çözümü için sınır şartlarının genelleştirilmiş kuvvet cinsinden oluşturulması gerekir. 4.1 göz önüne alındığında genelleştirilmiş normal ve kesme kuvvetin integral formda ifadeleri aşağıda belirtildiği gibi olmaktadır.

$$\left.\begin{aligned} T_j &= \int \sigma_x \varphi_j dF = 0 \\ S_1 &= \int \tau_{xy}\phi_1 dF = \frac{E_0\delta}{2(1+\nu_0)} V_1' \int \phi_1 dy = 2tV_1' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.9)}$$

4.1.1.1 Tekil yük durumu



Şekil 4.1: Tekil Yükleme Durumu

Bu yükleme durumu için sistemin diferansiyel denklemi, 4.7 ifadesinde q_1=0 alınarak elde edilebilir.

$$2tV_1'' - k_1V_1 = 0 \qquad \textbf{(4.10)}$$

Yukarıdaki homojen diferansiyel denklemin çözümü ;

$$\left.\begin{aligned} V_1(x) &= C_1e^{-\alpha x} + C_2e^{\alpha x} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{k}{2t}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.11)}$$

şeklinde olup, c_1 ve c_2 katsayıları sınır şartlarından bulunur. Simetri dolayısıyla problemin yarısı üzerinden işlemler yapılabilir. Yer değiştirme cinsinden birinci sınır şartı;

$$x \to \infty \quad \text{için} \quad V_1(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad \textbf{(4.12)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Genelleştirilmiş kuvvet cinsinden yazılacak olan ikinci sınır şartı

$$-S_1(0) = \frac{P}{2}\phi_1(0) \qquad \textbf{(4.13)}$$

ise $x = 0$ noktasında kuvvetlerin yaptığı iş dengesini göstermektedir. Bu ifadede $S_1(0)$, $x = 0$ kesitindeki iç kuvvetlerin $v(x, y) = 1.\phi_1(y)$, $V_1(x) = 1$ yer değiştirme altında yaptıkları toplam işi göstermektedir. Problemin simetrik olması nedeniyle 4.13 denkleminin sağındaki ifadede , $P/2$, yük değeri alınmıştır. Sözü edilen ifadedeki eksi işareti ise kuvvet ile yer değiştirmenin aynı yönlü olmaması nedeninden ileri gelmektedir. 4.9 ve 4.13 denklemlerinden

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha \mathrm{t} C_1 &= \frac{P}{2}\phi_1(y=0) \\ C_1 &= \frac{P}{4}\frac{\phi_1(y=0)}{\alpha \mathrm{t}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.14)}$$

ikinci sabit bulunmuş olmaktadır. 4.14, 4.11 de yerine konulduğunda tekil yük etkisindeki sistemin yer değiştirme fonksiyonu

$$v(x, y) = P\frac{\phi_1(0)}{4\alpha \mathrm{t}} e^{-\alpha x}\phi_1(y) \qquad \textbf{(4.15)}$$

elde edilebilmektedir. Dağılım fonksiyonunun lineer seçilmesi halinde, 4.15 deki sabitler açık formda yazıldığında bu özel duruma ait çökme ifadesi oluşturulabilir.

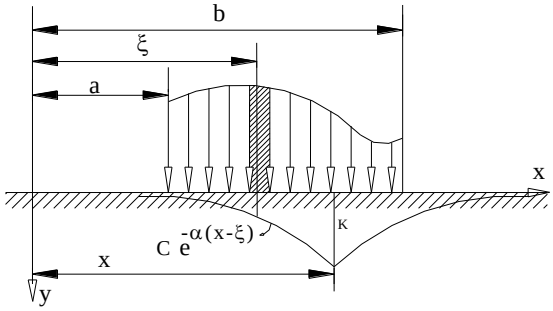
$$v(x, y) = \frac{3(1-\nu_0^2)}{\sqrt{6(1-\nu_0)}}\frac{P}{E_0\delta} \quad e^{-\alpha x} \quad \frac{H-y}{H} \qquad \textbf{(4.16)}$$

4.11 de k ve t nin yerine konulması ile α sabiti,

$$\alpha = \frac{1}{H}\frac{\sqrt{6(1-\nu_0)}}{(1-\nu_0)} \qquad \textbf{(4.17)}$$

zemin özelliklerine bağlı olarak gösterilebilir. 4.16 ifadesi dikkate alındığında, orijindeki çökme değerinin katman yüksekliğinden bağımsız olduğu görülmektedir.

4.1.1.2 Yayılı yük durumu



Şekil 4.2: Yayılı Yük Durumu

Yayılı yük durumunun genel yer değiştirme fonksiyonu, 4.7 ifadesi ile çıkarılabilmekle birlikte, ikinci bir yol olarak, yayılı yükün sürekli tekil yüklerden oluştuğu mantığı gereği, tekil yük için çıkarılmış 4.16 denklemi kullanılarak da elde edilebilir. Aynı yaklaşım, yayılı yükün fonksiyon olarak ifade edilmesinin zor olduğu problemlerde tekil yüke çevrildiği durumlarda da kullanılmaktadır. Tekil yükün birim değerleri için oluşturulan tesir çizgilerinin süper pozisyonu, istenilen noktanın yer değiştirmesini vermektedir. Eğer uygulanan q(ξ) yayılı yük fonksiyonu, koordinat ekseninden ξ kadar uzaklıktaki değeri biliniyorsa, K noktasındaki yer değiştirme fonksiyonu (Şekil 4.2) 4.14 deki C_1 sabiti

$$C_1 = \frac{\phi_1(0)}{4\alpha \mathrm{t}} \qquad \textbf{(4.18)}$$

olmak üzere ,

$a \le x \le b$ aralığında;

$$V_1(x) = C_1 \left[\int_a^x q(\xi) e^{-\alpha(x-\xi)} d\xi + \int_x^b q(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} d\xi \right] \qquad \textbf{(4.19)}$$

$x > b$ bölgesinde;

$$V_1(x) = C_1 \int_a^b q(\xi) e^{-\alpha(x-\xi)} d\xi \qquad \textbf{(4.20)}$$

$x < a$ için;

$$V_1(x) = C_1 \int_a^b q(\xi) e^{\alpha(x-\xi)} d\xi \qquad \textbf{(4.21)}$$

şeklinde elde edilir. Yayılı yük değerinin sabit olması özel durumunda 4.19 ifadesi

$a \le x \le b$ için;

$$V_1(x) = \frac{qC_1}{\alpha}\left[2 - e^{-\alpha(x-a)} - e^{\alpha(x-b)}\right] \qquad \textbf{(4.22)}$$

şeklini almaktadır. Dağılım fonksiyonunu derinlikle lineer olarak azaldığı

$$\phi_1(y) = \frac{H - y}{H} \qquad \textbf{(4.23)}$$

durum ile 4.8 deki t değeri açık olarak yazılırsa 4.18 ifadesi

$$C_1 = \frac{3(1+\nu_0)}{\alpha E \delta H} \qquad \textbf{(4.24)}$$

olarak bulunur. Bu sabit değer 4.22 de yerine konulduğunda denklemin yeni formu ;

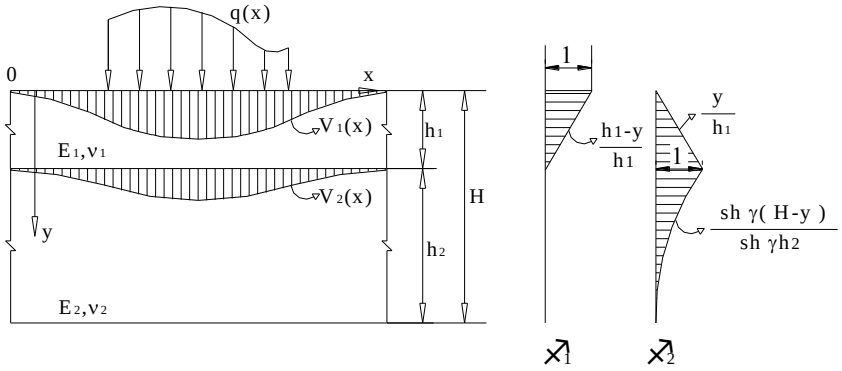
$$k = \frac{E\delta}{H(1-\nu_0^2)} \qquad \textbf{(4.25)}$$

olmak üzere

$$V_1(x) = \frac{q}{2k}\left[2 - e^{-\alpha(x-a)} - e^{\alpha(x-b)}\right] \qquad \textbf{(4.26)}$$

şeklinde elde edilmektedir.

4.1.2 İki katmanlı sistemler



Şekil 4.3: İki Katmanlı Yayılı Yük Durumu

Yükseklikleri h_1 ve h_2 olan farklı elastisite ve poisson oranlarına sahip iki tabakadan oluşmuş düzlem sistemlerin yer değiştirme fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \\ v(x,y) &= V_1(x)\phi_1(y) + V_2(x)\phi_2(y) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.27)}$$

olarak alınabilir. Tabakalı sistemlerde dağılım fonksiyonları tabaka kalınlığınla bağlantılıdır. Tabaka kalınlığının az olması durumunda lineer dağılım fonksiyonları , derinliğin fazla olması hallerinde ise hiperbolik fonksiyonları probleme uygun düşmektedir. Bu nedenle üst tabakanın ince, alt tabakanın ise derin olduğu durumlarda dağılım fonksiyonları

$$\left.\begin{aligned} 0 \le y \le h_1 \text{ için} \quad & \phi_1 = \frac{h_1 - y}{h_1}, \quad \phi_2 = \frac{y}{h_1} \\ h_1 \le y \le H\,(h_1 + h_2) \text{için} \quad & \phi_1 = 0 \quad , \quad \phi_2 = \frac{sh\gamma(H - y)}{sh\gamma h_2} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.28)}$$

şeklinde seçilebilir. Bu ifadedeki γ; yer değiştirmenin derinlikle değişimini belirleyen bir katsayıdır. Tabaka sayısının birden fazla olduğu bu durum için V_1, V_2 çökme değerlerinin tabaka yüzeylerindeki genelleştirilmiş yer değiştirmeleri

göstermektedir (Şekil 4.3). 4.28 ve 4.29 dikkate alındığında n = 2 için 3.8 den iki bilinmeyenli iki diferansiyel denklem aşağıda gösterildiği şekilde elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1-\nu_1}{2}(r_{11}+r_{12}V_1^{"})-(s_{11}V_1+s_{12}V_2)+\frac{1-\nu_1^2}{E_1}q=0 \\ &\frac{E_1}{2(1+\nu_1)}r_{12}V_1^{"}+\left[\frac{E_1}{2(1+\nu_1)}r_{22}+\frac{E_2}{2(1+\nu_2)}r_{22}^{'}\right]V_2^{"}-\frac{E_1}{1-\nu_1^2}s_{12}V_1-\left[\frac{E_1}{1-\nu_1^2}s_{22}-\frac{E_2}{1-\nu_2^2}s_{22}^{'}\right]V_2=0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.29)}$$

4.29 daki sabitlerin 4.28 deki dağılım fonksiyonlara bağlı açılımları aşağıda belirtildiği şekildedir.

$$\left.\begin{aligned} &r_{11}=\int_0^{h_1}\phi_1^2dF=\frac{\delta h_1}{3} \qquad s_{11}=\int_0^{h_1}\phi_1^{'2}dF=\frac{\delta}{h_1} \\ &r_{12}=\int_0^{h_1}\phi_1\phi_2dF=\frac{\delta h_1}{6} \qquad s_{12}=\int_0^{h_1}\phi_1^{'}\phi_2^{'}dF=-\frac{\delta}{h_1} \\ &r_{22}=\int_0^{h_1}\phi_2^2dF=\frac{\delta h_1}{3} \qquad s_{22}=\int_0^{h_1}\phi_2^{'2}dF=\frac{\delta}{h_1} \\ &r_{22}^{'}=\int_{h_1}^{H}\phi_2^2dF=\frac{\delta h_2}{3}\phi_t \qquad s_{22}^{'}=\int_{h_1}^{H}\phi_2^{'2}dF=\frac{\delta}{h_2}\phi_k \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.30)}$$

4.30 daki sabitlerin değerleri, 4.29 da yerlerine konulduğunda zaman sistem diferansiyel denklemleri;

$$\left.\begin{aligned} &2t_1V_1^{"}-k_1V_1+t_1V_2^{"}+k_1V_2+q=0, \\ &t_1V_1^{"}+k_1V+2(t_1+t_2)V_2^{"}-(k_1+k_2)V_2=0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.31)}$$

olarak bulunur. İfadedeki katsayılar ise aşağıda belirtildiği gibi açık olarak gösterilebilir.

$$k_1=\frac{E_1\delta}{h_1(1-\nu_1^2)}, \qquad t_1=\frac{E_1h_1\delta}{12(1-\nu_1)} \quad \textbf{(4.32)}$$

$$k_2=\frac{E_2\delta}{h_2(1-\nu_2^2)}\phi_k, \qquad t_2=\frac{E_2h_2\delta}{12(1+\nu_2)}\phi_t \quad \textbf{(4.33)}$$

4.33 de γ parametresine bağlı sabitler bulunmaktadır.

$$\left.\begin{aligned}\phi_k &= \frac{\gamma H}{2}\frac{sh\gamma H\ \mathrm{ch}\gamma H + \gamma H}{sh^2\gamma H}\\ \phi_t &= \frac{3}{2}\frac{1}{\gamma H}\frac{sh\gamma H\ \mathrm{ch}\gamma H - \gamma H}{sh^2\gamma H}\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.34)}$$

4.31 deki k_1 ve k_2 alt indisler katmanı belirtmek üzere katmanların enine (ε_{yy}) , t_1 ve t_2 ise kayma (ε_{xy}) şekil değiştirmesini belirleyen katsayılardır.

4.31 deki iki diferansiyel denklemin çözümüne , denklem sayısını bire düşürülerek ulaşılabilir. Bu durumda V_1 ve V_2 yeni bir F fonksiyonu cinsinden öyle ifade edilmeli ki, 4.31 in ikinci denkleminde yerlerine konulduğunda eşitlik kendiliğinden sağlasın. Bu şartı gerçekleştirmek için V_1 ve V_2 , yeni bir F fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde seçilebilir.

$$\left.\begin{aligned}V_1(x) &= (k_1 + k_2)F(x) - 2(t_1 + t_2)F''(x)\\ V_2(x) &= k_1F(x) + t_1F''(x)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.35)}$$

4.35, 4.31 de yerlerine konulduğunda sıfırdan farklı olan birinci denklem,

$$t_1(3t_1 + 4t_2)F^{IV} - 2(3t_1k_1 + t_1k_2 + t_2k_1)F'' + k_1k_2F = q(x) \qquad \textbf{(4.36)}$$

şeklinde denklem sayısının azaltılması sonucu mertebesi ikiden dörde yükselmektedir. Bu diferansiyel denklemin çözümünde kullanılacak sınır şartlarının da F fonksiyonu cinsinden ifade edilmesi gerekir. Kayma gerilmesi, birinci ve ikinci katmanda

$$\left.\begin{aligned}0 \le y \le h_1 \qquad \tau_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}\left(V_1'\frac{h_1 - y}{h_1} + V_2'\frac{y}{h_1}\right)\\ h_1 \le y \le \mathrm{H} \qquad \tau_{yx} &= \frac{E_2}{2(1+\nu_2)}V_2'\frac{sh\gamma(H - y)}{sh\gamma h_2}\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.37)}$$

olarak bulunabilir.

3.14 deki genelleştirilmiş kesme kuvveti ifadesinin, genelleştirilmiş yer değiştirmelerin ayrı ayrı birim değerleri ve bu problemde n = 2 özel durumu için integral formda yazımı aşağıda gösterildiği gibi olmaktadır.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \int_0^H \tau_{xy}\phi_1 dF \\ S_2 &= \int_0^H \tau_{xy}\phi_2 dF \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.38)}$$

4.38 ifadesi genelleştirilmiş yer değiştirme fonksiyonları cinsinden

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= t_1(2V_1' + V_2'), \\ S_2 &= t_1 V_1' + 2(t_1 + t_2)V_2' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.39)}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklemle 4.35 birlikte düşünüldüğünde, genelleştirilmiş kesme kuvvetlerinin F fonksiyonu cinsinden elde edilebilir.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= t_1\left[-(3t_1 + 4t_2)F''' + (3k_1 + 2k_2)F'\right] \\ S_2 &= (3t_1k_1 + t_1k_2 + 2t_2k_1)F' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.40)}$$

Dört elastik karakteristikli iki katmanlı bu model, iki karakteristikli tek katmanlıya oranla daha doğru sonuç vermektedir. Farklı zemin durumlarına göre bu parametreler değişik şekilde irdelenebilir. Üst katmanın derinliğinin az ve elastisite modülünün değerinin de daha aşağıdaki tabakaya kıyasla daha az olması halinde, üst katman için 4.32 den

$$t_1 = 0, \qquad k_1 = K \qquad \textbf{(4.41)}$$

olarak alınabilir. Bu kabuller altında üst katman, Winkler tipi sadece eksenel basınç şekil değiştirmesi yaparken, alt katman ise hem eksenel hem de kayma şekil değiştirmesi yapmaktadır. Bu özel durum için 4.35 ve 4.40 yeniden yazılabilir.

$$V_1 = (K + k_2)F - 2t_2F'', \quad V_2 = KF; \qquad \textbf{(4.42)}$$

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = S = 2t_2V_2'' = 2Kt_2F' \qquad \textbf{(4.43)}$$

İndirgenmiş 4.36 diferansiyel denklemi ise

$$-2t_2F''+k_2F=\frac{q(x)}{K} \qquad \textbf{(4.44)}$$

şeklinde sadeleşir. Tekil yükleme durumu halinde 4.44, homojen diferansiyel denklem formunu alır.

$$-2t_2F''+k_2F=0 \qquad \textbf{(4.45)}$$

Bu ifade 4.10 ile aynıdır. Bu durumda 4.15 ifadesinin y ekseninden bağımsız şekline eşit olan 4.45 in çözümü F(x) fonksiyonu,

$$F(x)=\frac{3(1-\nu_2^2)}{\sqrt{6(1-\nu_2)}}\frac{1}{\phi_t\phi_\alpha}\frac{P}{E_2\delta K}e^{-\alpha_2 x} \qquad \textbf{(4.46)}$$

şeklinde olup bu ifadedeki sabitlerin açılımı ise aşağıda belirtildiği gibidir.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2&=\sqrt{\frac{k_2}{2t_2}}=\frac{1}{h_2}\frac{\sqrt{6(1-\nu_2)}}{(1-\nu_2)}\phi_\alpha\\ \phi_t&=\frac{3}{2}\frac{1}{\gamma H}\frac{sh\gamma H-ch\gamma H-\gamma H}{sh^2\gamma H}\\ \phi_\alpha&=\gamma H\sqrt{\frac{1}{3}\frac{sh\gamma Hch\gamma H+\gamma H}{sh\gamma Hch\gamma H-\gamma H}}\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.47)}$$

4.46 , 4.42 de yerine konulduğu zaman;

$$V_2=\frac{3(1-\nu_2^2)}{\sqrt{6(1-\nu_2)}}\frac{1}{\phi_t\phi_\alpha}\frac{P}{E_2\delta}e^{-\alpha_2 x} \qquad \textbf{(4.48)}$$

ifadesi ile kuvvetin etkidiği nokta dışında;

$V_1=V_2$ **(4.49)**

eşitliğinin sağladığı görülmektedir.

Yayılı yük halinde, tekil yük için çıkarılmış F fonksiyonunda, P = 1 alınarak elde edilen tesir çizgileri aracılığıyla çözüme gitmek mümkün olmaktadır. Şekil 4.2 nin iki katmanlı durumu için yardımcı F fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x \le b \quad &\text{için} \quad F = \frac{q}{2Kk_2}\left[2 - e^{-\alpha_2 x} - e^{-\alpha_2 (x-b)}\right] \\ x > b \quad &\text{için} \quad F = \frac{q}{2Kk_2}\left[e^{-\alpha_2 (x-b)} - e^{-\alpha_2 x}\right] \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.50)}$$

4.42 de yerlerine konulduğunda çökme değerlerine varılabilir.

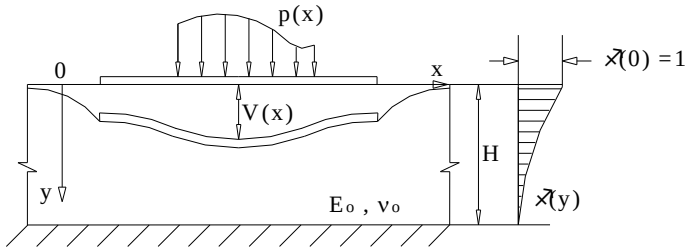
$$\left.\begin{aligned} 0 \le x \le b \quad V_1 &= \frac{q(K + k_2)}{Kk_2} - \frac{q}{Kk_2}(e^{-\alpha_2 x} + e^{\alpha_2 (x-b)}) \\ V_2 &= \frac{q}{k_2} - \frac{q}{2k_2}(e^{-\alpha_2 x} + e^{\alpha_2 (x-b)}) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.51)}$$

$$x > b \qquad V_1 = V_2 = \frac{q}{2k_2}(e^{\alpha_2 (x-b)} - e^{-\alpha_2 x}) \qquad \textbf{(4.52)}$$

4.41 deki kabullerin sonucu olarak elde edilen 4.52 ifadesi, üst katmanda yükleme bölgesi dışında şekil değiştirmenin oluşmadığını göstermektedir. 4.51 ve 4.52 den V_1 in yükün başlangıç ve bitiş kısımlarında süreksiz olduğu, V_2 in ise her iki bölgede sürekli olduğu sonucuna varılabilir.

4.2 Kirişlerin Elastik Zeminlerdeki Eğilme Problemleri

4.2.1 Tek tabakalı kiriş modellemesi



Şekil 4.4: Tek Tabakalı Kiriş Modeli

Zemin üzerindeki kiriş probleminin, kiriş ile zemin etkileşim yüzeyinde sürtünmenin ihmal edilmesi halinde diferansiyel denklemi, p(x) kiriş üzerine etkiyen yayılı yükü , q(x) zeminin kirişe olan tepkisini göstermek üzere (Şekil 4.4) ,

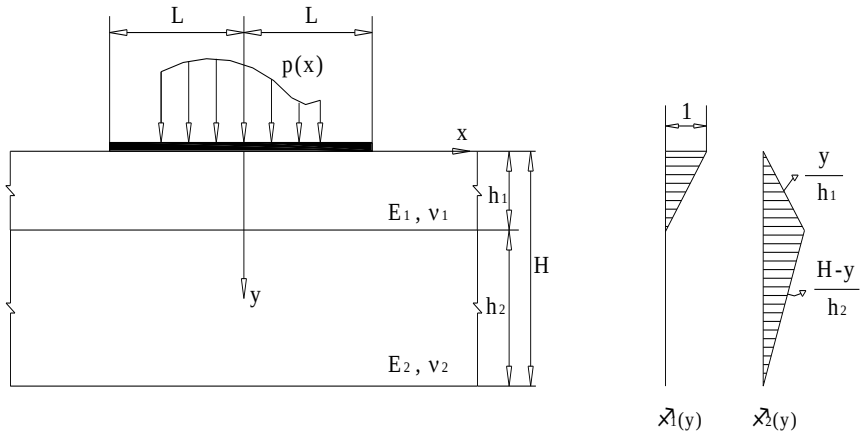
$$EJV^{IV}(x) = p(x) - q(x) \qquad \textbf{(4.53)}$$

şeklinde yazılabilir. 4.53 deki V(x), zemin yüzeyi ile kiriş yer değiştirme fonksiyonunu göstermesi nedeni ile bu denklemden q(x) çekilip 4.5 te yerine konulduğunda

$$EJV^{IV}(x) - 2tV'' + kV = p(x) \qquad \textbf{(4.54)}$$

kiriş etkisini göz önüne alan arttırılmış sistem diferansiyel denklemi elde edilmiş olur.

4.2.2 İki tabakalı kiriş modellemesi



Şekil 4.5: İki Tabakalı Kiriş Modeli

4.53 ün 4.31 de yerine konulması ile iki tabakalı kirişli sistemin diferansiyel denklemleri oluşturulabilir.

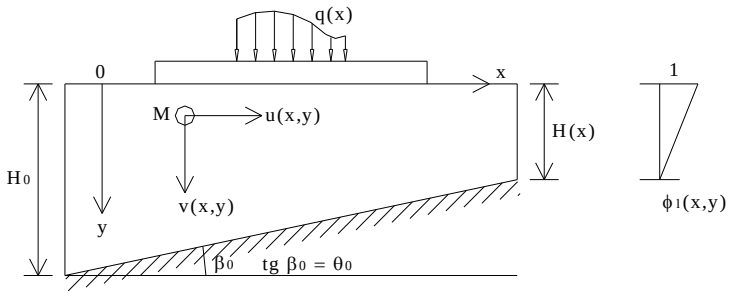
$$\left.\begin{aligned} &EJV_1^{IV}(x) - 2t_1V_1'' - t_1V_2'' + k_1V_1 - k_1V_2 - p(x) = 0 \\ &t_1V_1'' + (2t_1 + 2t_2)V_2'' + k_1V_1 - (k_1 + k_2)V_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.55)}$$

4.55 teki ikinci ifade 4.31 deki ile aynı olması nedeniyle 4.35 denklemi bu problem için de kullanılabilmektedir. Bu durumda indirgenmiş ama mertebesi artmış diferansiyel denklem

$$\left.\begin{aligned} &F^{vi}(x)\left[-2EJ(t_1+t_2)\right]+F^{iv}(x)[EJ(k_1+k_2)+3t_1^2+4t_1t_2]+ \\ &F^{''}(x)\left[-6t_1k_1-2t_1k_2-2k_1t_2\right]+F(x)k_1k_2+p(x)=0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.56)}$$

şeklinde değişir. Sabit katsayılı ve altıncı dereceden olan 4.56 diferansiyel denkleminin çözülmesi için genelleştirilmiş yer değiştirmeler ile kesme kuvvetlerinin yanında kiriş için yazılan statik denge şartları da $\sum M = 0$, $\sum T = 0$ sınır koşulları olarak kullanılmalıdır. Kiriş ile zemin yüzeyinin aynı çökme değeri yaptığı sonucuna dayanılarak oluşturulan bu denklemlerden anlaşılacağı üzere kirişli sistemler, sistemin mertebesini iki derece arttırmaktadır. Mertebenin artması sonucu alınması gereken ilave sınır şartları kiriş üzerinde yazılmalıdır **[5].**

4.3 Eğik Tabanlı Zemin Modeli



Şekil 4.6: Eğik Tabanlı Zemin Örneği

İki boyutlu problemlerde, zemin ile rijit kaya tabakasının kesişimi eğik olması halinde katman derinliğinin x ekseni boyunca değişimi nedeni ile dağılım fonksiyonu, x koordinat eksenine de bağlı duruma gelmektedir. Zemin içindeki M noktasının yer değiştirmesi 4.1 den farklı olarak

$$u(x,y)=0, \quad v(x,y)=V_1(x)\phi_1(x,y) \qquad \textbf{(4.57)}$$

şeklinde gösterilmelidir.

Yer değiştirmenin sabit x değeri için y ekseni doğrultusunda değişimi lineer olarak alınırsa,

$$\phi_1(x,y) = \frac{H - y}{H} \qquad \textbf{(4.58)}$$

4.57 deki H ifadesi θ_0, zemin eğimini göstermek üzere

$$H = H_0 - \theta_0 x \qquad \textbf{(4.59)}$$

şeklinde tanımlanabilir. 4.57, 4.58, 4.59 dikkate alınıp 3.9 daki gerilme değerleri 3.9 da yerine konulduğunda

$$\frac{1-\nu_0}{6}\delta H(x)V'' - \frac{1-\nu_0}{6}\delta\theta_0 V' - \frac{\delta}{H(x)}\left[1 + \frac{\theta_0^2(1-\nu_0)}{6}\right]V + \frac{1-\nu_0^2}{E_0}q = 0 \qquad \textbf{(4.60)}$$

diferansiyel denklemi elde edilmektedir. 4.60 da dağılım fonksiyon durumu altında kayma şekil değiştirme ve gerilmesinin genelleştirilmiş yer değiştirme fonksiyonunun birinci türevine bağlı olarak ifade edilmesi nedeniyle farklı dereceli türev içeren ifade sayısı artmıştır. Bu durum için kayma gerilmesi

$$\tau_{yx} = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\frac{dv}{dx} = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\left[V_1'\frac{H-y}{H} - \frac{\theta_0 y}{H^2}V_1\right] \qquad \textbf{(4.61)}$$

şeklinde, genelleştirilmiş kesme kuvveti ise aşağıda belirtildiği gibi ifade edilir.

$$S_1 = \frac{E_0}{12(1+\nu_0)}\left[2H(x)V_1' - \theta_0 V_1\right] \qquad \textbf{(4.62)}$$

Şekil 4.6 da gösterildiği gibi zemin yüzeyinde kiriş olması durumunda 4.53 den elde edilen q(x) değerinin 4.60 da yerine konmasıyla kirişli sistemin diferansiyel denklemi aşağıda belirtildiği gibi elde edilir **[1].**

$$\frac{1-\nu_0^2}{E_0}EJV^{IV} - \frac{1-\nu_0}{6}\delta H(x)V'' + \frac{1-\nu_0}{6}\delta\theta_0 V' + \frac{\delta}{H(x)}\left[1 + \frac{\theta_0^2(1-\nu_0)}{6}\right]V - \frac{1-\nu_0^2}{E_0}p(x) = 0 \qquad \textbf{(4.63)}$$

4.4 Dağılım Fonksiyonları ve γ Parametresi

Yer değiştirme ve enine gerilme bileşeninin dağılımını belirleyen $\phi(y)$ dağılım fonksiyonlarının dar katman için lineer, katman derinliğinin fazla olduğu durumlarda ise hiperbolik fonksiyonlar cinsinden seçilmesi gerektiği önceki bölümlerde belirtilmişti. Buna karşın, farklı elastik özelliklere sahip katmanların oluşturduğu sonsuz düzlem problemlerinde $(H \to \infty)$, lineer dağılım fonksiyonu kullanmak istendiğinde, zemini tek tabakalı, sabit derinlikli ve yeni zemin karakteristikleri ile modelleyebilmek gerekir. Bu idealleştirmede 4.7 ifadesinden yer değiştirme değeri ile gerçek yer değiştirmenin değerlendirilmesi sonucu eşdeğer derinlik bulunabilir. Belirtilen kabullerin uygun olmadığı, gerilme bileşeninin hızlı değişim gösterdiği problemlerde lineer fonksiyon yerine 4.28 de gösterildiği gibi

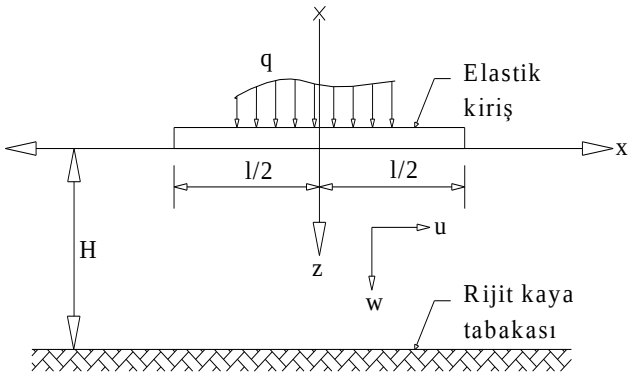
$$\phi(y) = \frac{sh\,\gamma(H - y)}{sh\,\gamma \mathrm{H}} \qquad \textbf{(4.64)}$$

fonksiyonu kullanılabilir. Derinliğin sonsuza gittiği durumda 4.32 deki k, t parametreleri sırasıyla sıfır ve sonsuza gitmesine karşın 4.64 koşulu altında aynı sabitler 4.33 ve 4.34 ten sabit değerler almaktadır.

Belirtilen iki tip dağılım fonksiyonu olmasına karşın deneysel çalışmalar ve elastisite teorisi sonucu, problemin durumuna bağlı olarak farklı fonksiyonlar da seçilebilmektedir. Aşağıda belirtildiği gibi üstel fonksiyonlar da gerilme ve yer değiştirme dağılımını temsil edebilmektedir.

$$\phi(y) = e^{-\gamma y} \qquad \textbf{(4.65)}$$

Vlasov modelinde zemin derinliğinin artması durumunda dağılım fonksiyonunun 4.64 ve 4.65 te belirtilen şekilde ifade etmenin çökme ve gerilme cinsinden gerçeğe daha uygun olacağını belirtilmesine karşılık, γ parametresinin de devreye girmesiyle problem üç parametreye bağlı olarak ifade edilir hale gelmiştir. Vlasov'da bu yeni parametreye tahmine dayanılarak değer verilmesine karşılık Vallabhan **[4]** tarafından yapılan çalışmada kiriş, zemin ve yükleme durumlarını göz önüne alınarak oluşturulan boyutsuz parametreler sayesinde, ardışık yaklaşım metodu ile bu parametrenin değerinin bulunabileceği gösterilmiştir.



Şekil 4.7: Vlasov Modelinde Kiriş Problemi

Şekil 4.7 deki b kalınlıklı kiriş sisteminin potansiyel enerjisi

$$\pi = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{E_b I_b}{2}\left(\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{H} \frac{b}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)dzdx - \int_{-l/2}^{l/2} q(x)\bar{w}dx \qquad \textbf{(4.66)}$$

olmaktadır. Düzlem şekil değiştirme durumunda bünye denklemleri

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \nu/1-\nu & 0\\ \nu/1-\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu/2(1-\nu)\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial w/\partial z\\ \partial u/\partial z + \partial w/\partial x\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.67)}$$

şeklinde toplu olarak yazılabilir. X doğrultusundaki yer değiştirme fonksiyonunun y doğrultusuna göre ihmal edilebilir düzeyde olduğu kabul edilebilir.

$$u(x,z) = 0, \quad w(x,z) = \bar{w}(x)\phi(z) \qquad \textbf{(4.68)}$$

4.67 ve 4.68, 4.66 da gerilmelerin yerine konulduğunda potansiyel enerji denklemi genelleştirilmiş yer değiştirme ve dağılım fonksiyonu cinsinden

$$\pi = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{E_b I_b}{2}\left(\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{Esb}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{H}\left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\bar{w}^2\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2\phi^2\right]dzdx - \int_{-l/2}^{l/2} q(x)\bar{w}dx \qquad \textbf{(4.69)}$$

elde edilmiş olmaktadır. Üstteki ifadede $\bar{w}$ ve ϕ üzerinde varyasyonel kuralı uygulanırsa,

$$\left.\begin{aligned}\delta\pi = &\int_{-l/2}^{l/2}\frac{d^2}{dx^2}(E_bI_b\frac{d^2\bar{w}}{dx^2})\delta\bar{w}dx - \int_{-\infty}^{\infty}2t\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\delta\bar{w}dx + \int_{-\infty}^{\infty}k\bar{w}\delta\bar{w}dx - \int_{-l/2}^{l/2}q(x)\delta\bar{w}dx + \\ &\int_0^H\left\{-m\frac{d^2\phi}{dx^2}+n\phi\right\}\delta\phi dz + \left[E_bI_b\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\delta\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right) - \frac{d}{dx}(E_bI_b\frac{d^2\bar{w}}{dx^2})\delta\bar{w}\right]_0^l + \\ &m\left[\frac{d\phi}{dx}\delta\phi\right]_0^H + 2t\left[\frac{d\bar{w}}{dx}\delta\bar{w}\right]_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.69a)}$$

denklemi elde edilir. 4.69a daki yeni sabitler açık olarak yazılabilir.

$$t = \int_0^H \frac{E_s b}{2(1+\nu)}\phi^2 dz \quad \textbf{(4.69b)}$$

$$k = \int_0^H \frac{E_s b(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dz \quad \textbf{(4.69c)}$$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_s b(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\bar{w}^2 dx \quad \textbf{(4.69d)}$$

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_s b}{2(1+\nu)}\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2 dx \quad \textbf{(4.69e)}$$

4.69a dan $\delta\bar{w}$ terim ortak parantezine alındığında ;

* $-l/2 < x < l/2$ aralığındaki kiriş denklemi

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E_bI_b\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right) - 2t\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} + k\bar{w} = q(x) \quad \textbf{(4.70)}$$

olarak yazılabilir. Moment ve kesme kuvvetlerinin x = -l/2 ve l/2 deki sınır şartları sırasıyla takip eden formlarda oluşturulabilir.

$$E_bI_b(\frac{d^2\bar{w}}{dx^2})\delta\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right) = 0 \quad \textbf{(4.71)}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(E_bI_b\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right) - 2t\frac{d\bar{w}}{dx}\right]\delta\bar{w} = 0 \quad \textbf{(4.72)}$$

* $-\infty < x < -l/2$ ve $l/2 < x < \infty$ arasındaki yüksüz bölgenin diferansiyel denklemi

$$-2t\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}+k\bar{w}=0 \qquad \textbf{(4.73)}$$

ile , $x=-\infty,\infty,-l/2,l/2$ deki genelleştirilmiş kesme kuvveti sınır şartı ise

$$2t\frac{d\bar{w}}{dx}\delta\bar{w}=0 \qquad \textbf{(4.74)}$$

şeklinde gösterilebilir.

* Aynı şekilde $\delta\phi$ ortak parantezine alındığı takdirde dağılım fonksiyonu

$$-m\frac{d^2\phi}{dz^2}+n\phi=0 \qquad \textbf{(4.75)}$$

diferansiyel denklemi bulunmuş olur. Bu aşamada yeni bir γ parametresi 4.76 daki gibi tanımlanıp

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2=\frac{n}{m}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)^2dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\bar{w}^2dx} \qquad \textbf{(4.76)}$$

4.75 de yerine konulduğunda diferansiyel denklemin yeni durumu

$$\frac{d^2\phi}{dz^2}-\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2\phi=0 \qquad \textbf{(4.77a)}$$

haline dönüşmektedir. Sınır değeri ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\left[\frac{d\phi}{dx}\delta\phi\right]_0^H=0 \qquad \textbf{(4.77b)}$$

ϕ fonksiyonu için $\phi(y=0)=1,\ \phi(y=H)=0$ değerleri başlangıçtan tanımlandığından dolayı, değişkenlerin bilinen değerlerinde varyasyonunun sıfır

olması gerektiği nedeni ile $\delta\phi$ varyasyon değeri, y nin bu değerleri için sıfır değerini sağlamaktadır. 4.77a nın 4.77b sınır şartı altında çözümü

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma(1 - \frac{z}{H})}{\sinh \gamma} \qquad \textbf{(4.78)}$$

şeklindedir. 4.64 ile 4.78 incelendiğinde bu iki ifadede ki γ sabitinin boyutunu 4.67 deki σ_y nin dağılım fonksiyonu cinsinden ifadesinde boyut kontrolü yapılarak bulunabilir. Bu kontrolde 4.64 teki Vlasov modelindeki γ parametresinin 1/uzunluk cinsinden olduğu, 4.15 ifadesinde ise bu parametrenin boyutsuz olduğu görülür.

Şekil 4.7 den görüldüğü gibi, üç bölgeden oluşan bu sistemde bölgelerin birleşim noktalarının diğer bir deyişle düğüm noktalarındaki denge denklemleri, aşağıdaki şekilde açıklanabilir; $l/2 < x < \infty$ için sistem diferansiyel denklemi 4.9 un $w(x = \infty) = 0$, sınır şartı altında çözümü ;

$$\bar{w}(x) = \bar{w}(\frac{l}{2}) e^{-\sqrt{(k/2t)}(x - l/2)} \qquad \textbf{(4.79)}$$

şeklinde ifade edildiğinde, üçüncü bölge için x = l/2 de oluşan genelleştirilmiş kesme kuvveti değeri $-2t\bar{w}(x)'$ ifadesinden

$$V_f\Big|_{x=l/2} = -\sqrt{2kt}.\bar{w}(\frac{l}{2}) \qquad \textbf{(4.80)}$$

olarak bulunur. P, M düğüm noktasına etkiyen tekil yük ve moment değerleri olmak üzere x = l/2 deki kesme ve moment kuvvetleri 4.81 ve 4.82 de belirtildiği gibi olmaktadır.

$$\left[\frac{d}{dx}\left(E_b I_b \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right) - 2t\frac{d\bar{w}}{dx} - \sqrt{2kt}\bar{w} + P\right]_{x=l/2} = 0 \qquad \textbf{(4.81)}$$

$$\left[\left(E_b I_b \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right) + M\right]_{x=l/2} = 0 \qquad \textbf{(4.82)}$$

Aynı denge denklemleri x = -l/2 için de aynı şekilde çıkarılabilmekle birlikte, üç bölge yerine sadece kirişin olduğu bölgenin hesaplanması istendiğinde, diğer kısımların bu bölgeye olan kesme ve moment sınır değerlerinin dış yük gibi dikkate alınması gerektiği sonucu çıkarılabilir.

Kiriş özelliğinin değişmediği kabulü altında aşağıdaki boyutsuz parametreler kullanılarak;

$$X = \frac{x}{l} \tag{4.83}$$

$$W = \frac{\overline{w}}{l} \tag{4.84}$$

4.70 denklemi yeniden yazılabilir.

$$\frac{d^4W}{dX^4} - 2T\frac{d^2W}{dX^2} + KW = Q \tag{4.85}$$

Bu ifadedeki yeni terimlerin açılımları

$$2T = \frac{2tl^2}{E_b I_b} \tag{4.86}$$

$$K = \frac{kl^4}{E_b I_b} \tag{4.87}$$

$$Q = \frac{ql^3}{E_b I_b} \tag{4.88}$$

şeklinde olup 4.86 ve 4.87 nin ϕ (z) cinsinden açılımları;

$$2T = \frac{E_s b l^2 H}{2(1+\nu)E_b I_b} \cdot \frac{1}{\gamma}\psi_t = \frac{6}{(1+\nu)}\left(\frac{E_s}{E_b}\right)\left(\frac{l}{d}\right)^3\left(\frac{H}{l}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\psi_t\right) \tag{4.89}$$

$$K = \frac{12(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{E_s}{E_b}\right)\left(\frac{l}{d}\right)^3\left(\frac{l}{H}\right)(\gamma\psi_k) \tag{4.90}$$

4.89 ve 4.90 ifadelerindeki sabitler ise aşağıda gösterilmektedir.

$$\psi_t = \frac{\sinh\gamma\cosh\gamma - \gamma}{2\sinh^2\gamma} \tag{4.91}$$

$$\psi_k = \frac{\sinh\gamma\cosh\gamma + \gamma}{2\sinh^2\gamma} \tag{4.92}$$

4.85 diferansiyel denkleminin sonucunun 4.91 ve 4.92 dikkate alındığında γ parametresine bağlı olduğu görülür. Diğer taraftan 4.76 denkleminin bu probleme uyarlanması sonucu aşağıda belirtilen formda denklem elde edilmektedir.

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)l^2}\frac{\int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx + \sqrt{\frac{K}{2T}}\left[w^2_{-l/2} + w^2_{l/2}\right]}{\int_{-l/2}^{l/2} w^2 dx + \sqrt{\frac{2T}{K}}\left[w^2_{-l/2} + w^2_{l/2}\right]} \tag{4.93}$$

Burada kullanılan ardışık yaklaşım tekniği şu şekilde açıklanabilir. 4.91 ve 4.92 denklemlerindeki γ parametresine başlangıçtan değer verilir. Bu değere bağlı olan 4.86 ve 4.87 aracılığıyla 4.85 diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen W boyutsuz parametresi bulunur. 4.84 denkleminden çökme fonksiyonuna geçiş yapılıp 4.93 de yerine konulur ve ilk verilen γ değeri ile yakınsaklığı irdelenir. Ardışık iki adımda bulunan γ değerleri farkının 0,001 in altında değer olması durumunda ardışık yaklaşıma son verilir.

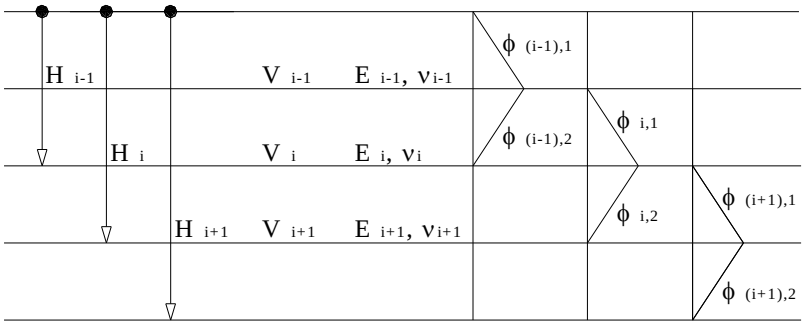
$$\left\|\gamma_{i+1} - \gamma_i\right\| < .001 \tag{4.94}$$

Bu kısımda görüldüğü gibi, Vlasov tarafından Lagrange Virtüel İş Prensibine dayanılarak çıkarılan diferansiyel denklemlerin potansiyel enerjiden diğer bir yol olarak nasıl elde edilebileceği, γ parametresinin bulunması için geliştirilmiş bir yol ile birlikte incelenmiştir. Boyutsuz bu parametrelerin kullanılarak Winkler zemin katsayısı (k) nın elde edilişi hakkında yapılan bir çalışma ise şu şekilde bir görüş sunmaktadır. Sabit bir poisson değerinde, plağın ortasında, köşesinde, kenar ortasında yüklenmesi halleri için plağın altındaki maksimum çökme değeri Vlasov modeline göre çözülür. 4.87 deki K parametresinden k elde edilir ve bu değer için Winkler modeline göre maksimum yer değiştirme bulunur. Yer değiştirmelerin oranı

ile K değeri çarpılıp yeni yatak katsayısı bulunur. Çökme değerlerinin yeter derecede eşitliği sağlanıncaya kadar adıma devam edilir. Bu yolla bulunan Winkler sabiti , yükleme ve boyut etkisini içermektedir **[9].**

4.5 Vlasov Modelinin Matris Formda Toplu Halde Gösterimi

Önceki bölümlerde, en fazla iki katmanlı zeminlerin alt yüzeyinin eğik olmadığı durumlar için çıkarılan diferansiyel denklemler, katman sayısının fazla olduğu hallerde toplu olarak matris formda ifade edilebilir. Tek bir bölge için oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümü sonucu oluşan sabitler, bölgeler arası yer değiştirme ve kuvvet sınır şartları sonucu belirlenebilir.



Şekil 4.8: Katmanlı Vlasov Zemin Parçası

Şekil 4.8 de gösterilen katmanlı duruma ait Vlasov diferansiyel denklemler sabit katsayılıdır. İlgili sabitler, zemin elastisite modülü, poisson oranı ile dağılım fonksiyonların çarpımlarının integrallerine bağlıdır. Katman numarası i olan yüzeye ait virtüel yer değiştirme durumunda, sadece i-1 ve i+1 numaralı komşu yüzey yer değiştirmeleri etkilenmektedir. Dolayısıyla oluşturulacak katsayılar matrisinin bant genişliği üç olmaktadır. Verilen farazi yer değiştirme durumu ile ilgili diferansiyel denklem 3.9 daki gerilme bağıntılarının 3.8 de yerine konulması ile 4.95 de belirtildiği gibi bulunabilir. Ara yüzeylerde yük durumunun olmaması nedeniyle verilen yüklerin etkisi ilk yüzey harici denklemlerde sıfır olmaktadır.

$$\left.\begin{aligned}
&V_{i-1}^{"}\frac{E_{i-1}}{2(1+\nu_{i-1})}\int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}}\phi_{(i-1),2}\phi_{i,1}dy+V_i^{"}[\frac{E_{i-1}}{2(1+\nu_{i-1})}\int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}}\phi_{i,1}\phi_{i,1}dy+\frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\int_{H_{i-1}}^{H_i}\phi_{i,2}\phi_{i,2}dy\\
&V_{i+1}^{"}\frac{E_{i+1}}{2(1+\nu_{i+1})}\int_{H_{i-1}}^{H_i}\phi_{(i+1),1}\phi_{i,2}dy-V_{i-1}\frac{E_{i-1}}{1-\nu_{i-1}^2}\int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}}\phi_{(i-1),2}^{'}\phi_{i,1}^{'}dy\\
&-V_i[\frac{E_{i-1}}{1-\nu_{i-1}^2}\int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}}\phi_{i,1}^{'}\phi_{i,1}^{'}dy+\frac{E_i}{1-\nu_i^2}\int_{H_{i-1}}^{H_i}\phi_{i,2}^{'}\phi_{i,2}^{'}dy]-V_{i+1}\frac{E_{i+1}}{1-\nu_{i+1}^2}\int_{H_{i-1}}^{H_i}\phi_{(i+1),1}^{'}\phi_{i,2}^{'}dy=0
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.95)}$$

4.95 ten yararlanılarak bölge bazında diferansiyel denklemler toplu halde

$$[A][V]"-[B][V]+[q]=0 \quad \textbf{(4.96)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki x e bağlı alt indislerin katman yüzeyinin yer değiştirmesini gösteren bilinmeyen yer değiştirme vektörü

$$[V]=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\u_n\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.97)}$$

şeklinde, sadece zemin üst yüzeye etkiyen y koordinatından bağımsız dış yük vektörü ise

$$[q]=\begin{bmatrix}q_1(x)\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.98)}$$

katman ara yüzeylerinde dış yük olmaması nedeniyle tek elemanlıdır.

Bant genişliği katman sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda üç olan A, B matrisleri, dağılım fonksiyonları ve malzeme sabitlerine bağlı olarak oluşturulabilir.

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= \int_0^{H_1} \delta G_1 \phi_{1,2} \phi_{1,2} dy \\
A_{ii} &= G_{i-1} \int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}} \delta\phi_{i,1}\phi_{i,1} dy + G_i \int_{H_{i-1}}^{H_i} \delta\phi_{i,2}\phi_{i,2} dy \\
A_{i,(i+1)} &= G_i \int_{H_{i-1}}^{H_i} \delta\phi_{i+1,1}\phi_{i,2} dy \\
A_{i,(i-1)} &= G_{i-1} \int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}} \delta\phi_{i-1,2}\phi_{i,1} dy
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.99)}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,1} &= T_1 \int_0^{H_1} \delta\phi'_{1,2}\phi'_{1,2} dy \\
B_{i,i} &= T_{i-1} \int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}} \delta\phi'_{i,1}\phi'_{i,1} dy + T_i \int_{H_{i-1}}^{H_i} \delta\phi'_{i,2}\phi'_{i,2} dy \\
B_{i,(i+1)} &= T_i \int_{H_{i-1}}^{H_i} \delta\phi'_{i+1,1}\phi'_{i,2} dy \\
B_{i,(i-1)} &= T_{i-1} \int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}} \delta\phi'_{i-1,2}\phi'_{i,1} dy
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.100)}$$

4.99 ve 4.100 deki katman fiziksel özelliklerini içeren malzeme sabitleri, alt indis ilgili katmanı belirtmek üzere

$$\left.\begin{aligned}
G_i &= \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \\
T_i &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2}
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.101)}$$

şeklinde simgesel olarak gösterilebilir.

Üst katman için bir, diğer katmanlar için iki kısımdan oluşan lineer dağılım fonksiyonları, katman yüksekliğine bağlı olarak değişmektedir. Bu ifadelerdeki H katman yüksekliği, ilgili katmanın en derin noktasının değerini göstermektedir

$$\left.\begin{aligned} \phi_{12} &= 1 - \frac{y}{H_1} \\ \phi_{11} &= 0 \\ \phi_{i2} &= 1 - \frac{y}{(H_i - H_{i-1})} \\ \phi_{i1} &= \frac{y}{(H_{i-1} - H_{i-2})} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.102)}$$

A, B matrislerinde i(i-1) alt indisli ifadelerinde i yerine i+1 yazıldığında elde edilen ifadelerin, i(i+1) alt indisli terimle aynı olduğu görülmektedir. Bu durumda A, B matrislerinin simetrik olduğu sonucuna varılabilir. Bu simetriğin nedeni, komşu yüzeylerin ara bölgelerinde alınan integrallerin aynı olmasından kaynaklanmaktadır. Lineer dağılım fonksiyonu kullanılması halinde A, B sırasıyla matris formda 4.103 ve 4.104 de belirtildiği şekilde ifade edilebilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & 2(a_1+a_2) & a_2 & & & \\ & a_2 & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & 2(a_{n-1}+a_n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.103)}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 & & & & \\ -b_1 & (b_1+b_2) & -b_2 & & & \\ & -b_2 & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & -b_{n-1} \\ & & & & -b_{n-1} & (b_{n-1}+b_n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.104)}$$

Katmanların elastisite modülü, poisson oranı ve derinliklerinin aynı olması bir diğer özel durumunda ise 4.103 ve 4.104 deki A, B matrislerindeki alt indislere gerek kalmamaktadır.

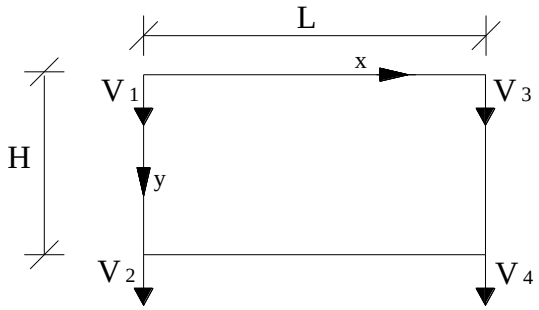
4.96 daki takım diferansiyel denklemlerinin çözümü sonucu oluşacak sabitlerin bulunmasında, aynı virtüel yer değiştirme altında ortak katman ve bitişik bölge ara yüzeylerde yazılan genelleştirilmiş kesme kuvveti ifadeleri ise 4.105 te olduğu şekilde yazılabilir. Diğer sınır şartı ise, yer değiştirmenin sürekliliği gereğince, katmanların yan bölge bağlantı noktalarında ortak değer alması ile yazılabilir.

$$\left.\begin{aligned} Sh_1 &= \int_0^{H_1} G_1\left[V_1^{'} * \phi_{1,2} * \phi_{1,2} + V_2^{'}\phi_{2,1} * \phi_{1,2}\right] dy \\ Sh_n &= \int_{H_{n-2}}^{H_{n-1}} G_{n-1}\left[V_{n-1}^{'} * \phi_{n-1,2} * \phi_{n,1} + V_n^{'}\phi_{n,1} * \phi_{n,1}\right] dy + \int_{H_{n-1}}^{H_n} G_n * \left[V_n^{'} * \phi_{n,2} * \phi_{n,2}\right] dy \\ Sh_i &= \int_{H_{i-2}}^{H_{i-1}} G_{i-1}\left[V_{i-1}^{'} * \phi_{i-1,2} * \phi_{i,1} + V_i^{'}\phi_{i,1} * \phi_{i,1}\right] dy + \int_{H_{i-1}}^{H_i} G_i * \left[V_i^{'} * \phi_{i,2} * \phi_{i,2} + V_{i+1}^{'} * \phi_{i+1,1} * \phi_{i,2}\right] dy \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.105)}$$

Zemin yüzeyinde kiriş olması durumunda, 4.96 daki A matrisinin kolon sayısı ile V vektörünün satır sayısı bir artmaktadır. Kiriş etkisinin ilk terimlerde göz önüne alınması halinde ilave kısımlara, [A] matrisinde 1x1 terime –EI, V vektöründe ise ilk terime V_1^{IV} gelmektedir. 4.105 genelleştirilmiş kuvvet denklemlerinde kirişin etkisinin de göz önüne alınması gerekir. Kirişin üst yüzeyde olması nedeni ile genelleştirilmiş kesme kuvvetine kiriş etkisi, kiriş kesme kuvvetine eşittir.

5 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN PROBLEME UYGULANMASI

İncelenen düzlem zemin problemlerinde sonlu eleman yönteminin uygulanması aşamasında ilgili diferansiyel denklemin çözümünden yararlanılabilir. Şekil 5.1 deki kirişsiz eleman, kirişli üst katman haricinde her yerde kullanılabilmektedir.



Şekil 5.1: Kirişsiz Sonlu Eleman Örneği

5.1 Kirişsiz Elemanın Rijitlik ve Yükleme Matrisinin Elde Edilmesi

Tek katmanlı zemin probleminin diferansiyel denklemi 5.1, ikinci mertebeden olması

$$2tV_1'' - kV_1 + q_1 = 0 \qquad \textbf{(5.1)}$$

nedeniyle iki sabite bağlı olarak ifade edilebilir. Birim deplasman sabitleri dış yükten bağımsız olarak elde edilmesi nedeniyle 5.1 de yükleme terimi sıfır alınmalıdır. Bu denklemin genel çözümü x' e bağlı fonksiyon ve sabitler cinsinden

$$v(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \qquad \textbf{(5.2)}$$

şeklinde olmaktadır. 5.2 deki sabitler, elemanın x = 0, ve x = L deki çökme değerlerinin V_1 ve V_3 olması koşulu ile bu bilinmeyenler cinsinden elde edilebilir. C_1 ve C_2 sabitlerinin 5.2 de yerlerine konulması sonucu yer değiştirme fonksiyonu düğüm noktası yer değiştirmelerine bağlı olarak elde edilmiş olmaktadır.

$$v(x) = V_1 f_1(x) + V_3 f_2(x) \tag{5.3}$$

5.3 deki x e bağlı fonksiyonlar, yer değiştirmelerin x ekseni boyunca değişimini göstermesi ve diferansiyel denklemin çözümünden elde edilmesi nedeniyle tam şekil fonksiyonu olarak adlandırılır. Tek katman için elde edilen şekil fonksiyonları, göz önüne alınan sonlu elemanın y = H durumu için de kullanıldığında sonlu elemanın üst ve alt yüzünü temsil eden yer değiştirme fonksiyonları aşağıdaki şekilde dört düğüm noktası çökme değerine bağlı olarak oluşturulabilir.

$$\begin{Bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & f_2(x) & 0 \\ 0 & f_1(x) & 0 & f_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

Dağılım fonksiyonu ile 5.4 denklemi kullanılarak eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirme fonksiyonu 5.5 te gösterildiği gibi elde edilebilir.

$$v(x,y) = \varphi_1(y) * [\, V_1 f_1(x) + V_3 f_2(x) \,] + \varphi_2(y) * [\, V_2 f_1(x) + V_4 f_2(x) \,] \tag{5.5}$$

5.5 ifadesi matris formda 5.6 da belirtildiği gibi yazılabilir.

$$v(x,y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y) f_1(x) & \varphi_2(y) f_1(x) & \varphi_1(y) f_2(x) & \varphi_1(y) f_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

Bundan sonraki adımlarda 5.6 terimlerinin aşağıda gösterilen kısa formları kullanılacaktır.

$$\{v\} = [L]\{D^*\} \tag{5.7}$$

Eksenel yer değiştirmenin ihmal edilmesi durumunda şekil değiştirmelerin düğüm noktası bilinmeyenleri cinsinden ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dv/dy \\ dv/dx \end{Bmatrix} = [B]\{D^*\} \tag{5.8}$$

Lineer elastik özelliğe sahip elemanın bünye bağıntıları ise genel olarak

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \tag{5.9}$$

şeklinde olup bilinmeyen yer değiştirmelere bağlı olarak matris formda oluşturulabilir.

$$\{\sigma\} = [d][B]\{D^*\} \tag{5.10}$$

Düzlem gerilme durumu için malzeme katsayıları matrisi 5.11 de gösterildiği gibidir.

$$[d] = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

5.8 ve 5.10 denklemleri kullanılarak eleman rijitlik matrisi ile yükleme vektörü potansiyel enerjinin minimize edilmesi sonucu bulunabilir. $\{Q^*\}$, düğüm noktasına etkiyen yükü, $\{q\}$ yayılı yükü göstermek üzere bu kuvvetler sonucu eleman üzerinde yapılan dış enerji,

$$V = -\{D^*\}^T \{Q^*\} - \int_F \{v\}^T \{q\}\, dF \tag{5.12}$$

ifadesine 5.7 yerleştirildiğinde 5.13 elde edilmektedir.

$$V = -\{D^*\}^T \{Q^*\} - \{D^*\}^T \int_F \{L\}^T \{q\}\, dF \tag{5.13}$$

Elemanın iç enerjisi ise şekil değiştirmelerin ilgili gerilme bileşenleri ile çarpılması sonucu elde edilir.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV \tag{5.14}$$

5.8 ve 5.10, 5.24 de yerine konulduğunda iç enerji bilinmeyen değerlere bağlı olarak ifade edilmiş olmaktadır.

$$U = \frac{1}{2}\{D^*\}^T \left(\int_V [B]^T [d][B] dV \right) \{D^*\} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Elemanın toplam potansiyel enerjisi, dış ve iç enerjinin toplamı şeklinde tanımlanmaktadır.

$$\phi = U + V \qquad \textbf{(5.16)}$$

5.13 ve 5.15, 5.16 da yerlerine konulduğunda

$$\phi = \frac{1}{2}\{D^*\}^T \left(\int_V [B]^T [d][B] dV \right) \{D^*\} - \{D^*\}^T \{Q^*\} - \{D^*\}^T \int_F [L]^T \{q\} dF \qquad \textbf{(5.17)}$$

düğüm noktası yer değiştirme sabitlerine bağlı ifade elde edilir. Sistemin dengede olma şartını gösteren potansiyel enerjinin minimum kuralı, 5.17 deki sabitlere göre alınan kısmi türevlerinin ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi şeklindedir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial D_1^*} \\ \frac{\partial \phi}{\partial D_2^*} \\ \text{M} \\ \frac{\partial \phi}{\partial D_n^*} \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \textbf{(5.18)}$$

5.17 ifadesinin kısmi türevlerinin bulunması için lineer cebirdeki bir kuraldan yararlanılabilir. Bu kurala göre,

$$U = \frac{1}{2}\{X\}^T [A]\{X\} + \{X\}^T \{B\} + \{C\} \qquad \textbf{(5.19)}$$

denkleminin $\{X\}, \{B\}, \{C\}$ n x 1 boyutunda vektör, $[A]$ n x n boyutunda simetrik matris olması koşulu ile $X_i \quad i = 1, 2, ..., n$ değerleri için kısmi türevi

$$\frac{\partial U}{\partial \{X\}} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial X_2} ..... \frac{\partial U}{\partial X_n} \right\} = [A]\{X\} + \{B\} \qquad \textbf{(5.20)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Belirtilen simetrik matris 5.17 de birim deplasman sabitlerini içeren matrisi göstermesi nedeniyle 5.20 denklemi kullanılabilmektedir.

$$\left(\int_V [B]^T [d][B] dV \right) \{D^*\} = \{Q^*\} + \int_F [L]^T \{q\} dF \qquad \textbf{(5.21)}$$

Elde edilen 5.21 ifadesi kısa formda aşağıdaki şekilde belirtilebilir.

$$[S^*]\{D^*\} = \{F^*\} \qquad \textbf{(5.22)}$$

Buradaki birim deplasman ve yükleme terimlerini gösteren sabitler sırasıyla

$$[S^*] = \int_V [B]^T [d][B] dV \qquad \textbf{(5.23)}$$

$$\{F^*\} = \{Q^*\} + \left\{Q_q^*\right\} \qquad \textbf{(5.24)}$$

olarak yazılır. 5.24 deki yayılı yükün düğüm noktasına indirgenen tekil yük bileşenleri

$$\left\{Q_q^*\right\} = \int_F [L]^T \{q\} dF \qquad \textbf{(5.25)}$$

olarak bulunur **[13]**.

Şekil fonksiyonlarının diferansiyel denklemlerin çözümü ile belirlenmesi, çözüme yakınsaklık hızının eleman sayısının fazla arttırılması gereğini ortadan kaldırmak amacıyla uygulanmıştır. Zemin alt yüzeyinin tutulu olduğu tek katmanlı durum için çıkarılan bu şekil fonksiyonları, eleman alt yüzeyi için de kullanılmıştır.

6 UYGULAMALAR

Konu ile ilgili uygulamalar, Matematica 5.0 programı kullanılarak oluşturulmuş, tezle birlikte sunulmuştur.

Kademeli Vlasov tipi zemin modeli incelenirken bazı kabuller yapmak gerekmektedir. Derinliğin ani değişim gösterdiği uç kısımlarda yer değiştirme farklılıkların oluşması, tekil noktalarının meydana gelmesine neden olmaktadır. Zemin sürekliliğin kaybolduğu bu kısımlar için çökme yer değiştirme bileşenlerinin sıfır olması kabulü ise zemin sürekliliğini sağlamaktadır.

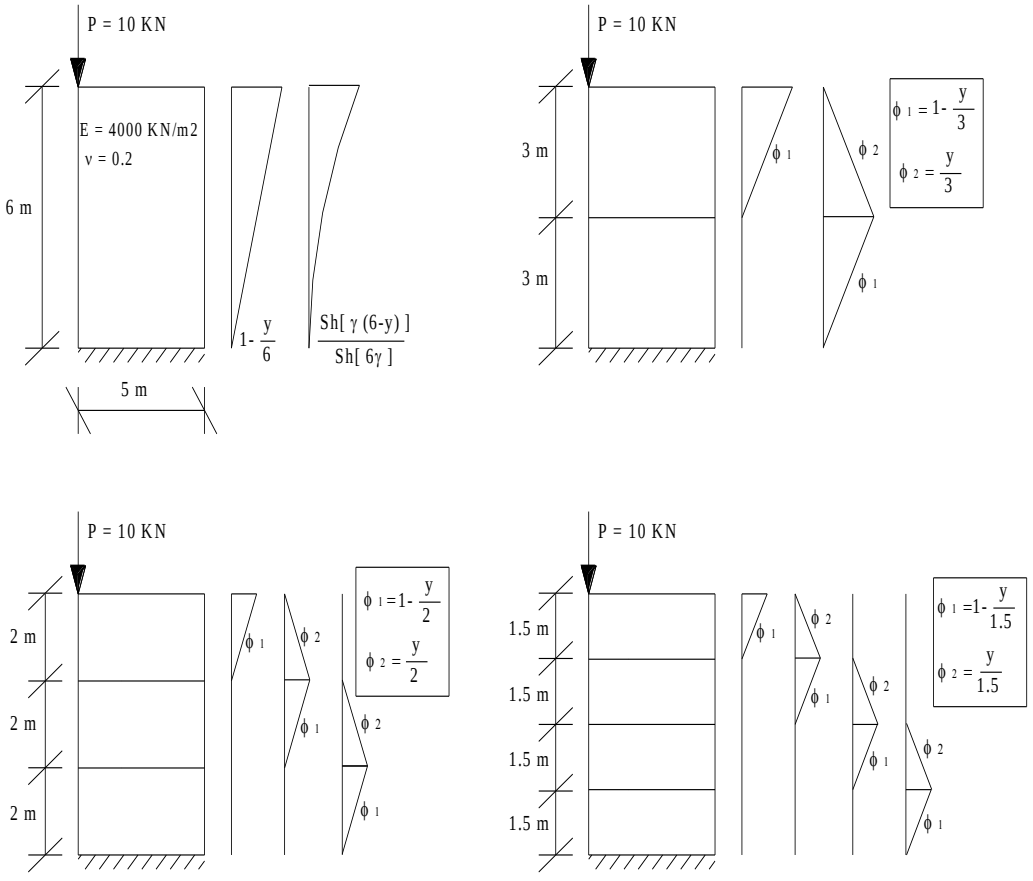
Sayısal çözümler neticesinde, problemlerle ilgili dikkat edilmesi gereken bazı noktaların bulunduğu görülmüştür. Vlasov modelinin yapısı gereği, zeminin katman ile bölge sayısının arttırılması sonucu, bilinmeyen diferansiyel denklem sabitleri sayısı önemli miktarda artmaktadır. Bilinmeyen sayısının artması neticesinde katsayılar matrisinin boyutu da aynı nispetle büyümektedir. Boyutu büyük olan matrisler üzerinde tersini alma gibi yapılan işlemlerde matris elemanlarının değerlerinin birbirine yakın değerler almaması, uygun sonuçların oluşmamasına neden olmaktadır. Bunun sebebinin yapılan uygulamalar sonucu iki nedene bağlı olduğu görülmüştür.

Sınır şartları, yer değiştirme ve kuvvetler üzerinde yazılmaktadır. Yer değiştirme süreklilik koşulunda sadece x yerine ilgili noktanın koordinatı girilirken, genelleştirilmiş kesme kuvveti ile moment dengesinde x koordinat değerine ilaveten malzeme sabiti çarpan olarak kendiliğinden denkleme girmektedir. Bu çarpan farklılıkları, katsayılar matrisinde önemli değer farklılıklarını oluşturmaktadır. Bu sorunun giderilmesi amacıyla, malzeme sabitlerinden bir tanesine bağlı olarak diğer fiziksel özelliklerin oluşturulması ve denklemin sağ tarafı olan sabitler matrisine referans olarak alınan değerin bölüm şeklinde geçirilmesinin yarar sağladığı görülmüştür.

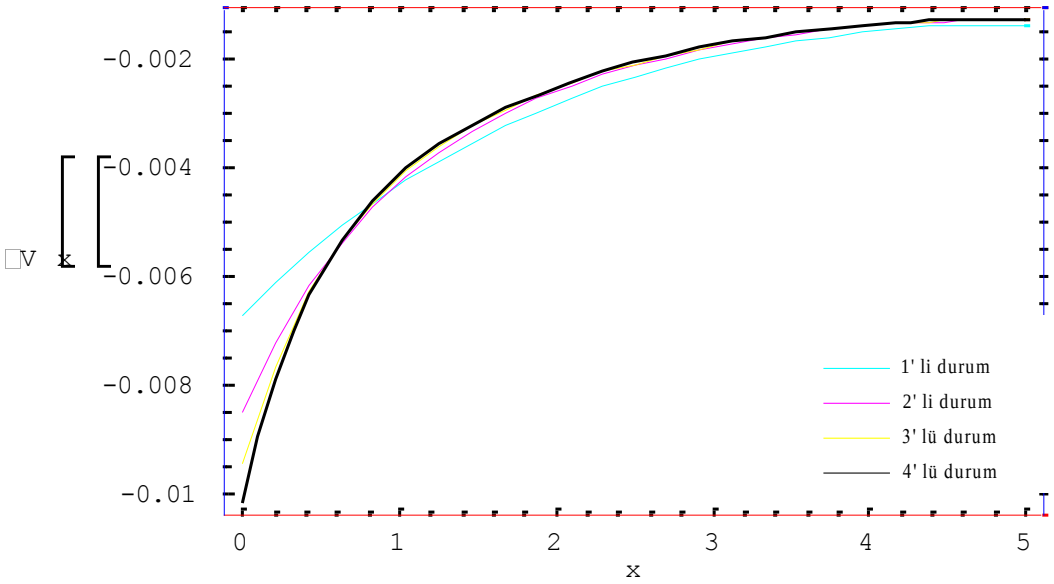
Global eksenler üzerinde işlemlerin yapılması, üstel ve trigonometrik fonksiyonlarının çarpımı şeklinde olan yer değiştirme bilinmeyeninin koordinatlar acısından daha hassas olması durumunu oluşturmaktadır. Bu nedenle dikkate alınan noktaların birbirinden uzak olması önemli değer değişiminde önemli etkendir. Eksenlerin bölge bazında lokal olarak alınması ile bölgelerin uzunluklarının birbirlerine yakın olması bu sorunun çözülmesinde kullanılabilir.

Belirtilen bu önerilerin yerine, oluşan katsayılar matrisinin son hali üzerinde düzenlemelerin yapılması da bir seçenek olarak görülebilir.

6.1 Zemin Modellemesinde Katman Sayısının Lineer Dağılım Fonksiyonları Kullanılarak Etkisinin İncelenmesi



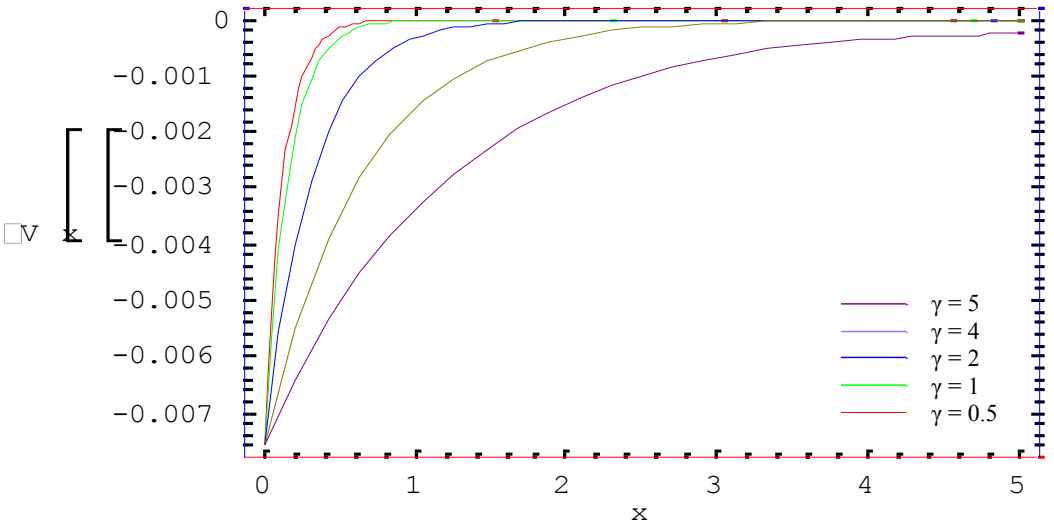
Şekil 6.1: Tekil Yük Etkisindeki Farklı Katman Sayısına Sahip Zemin Parçası



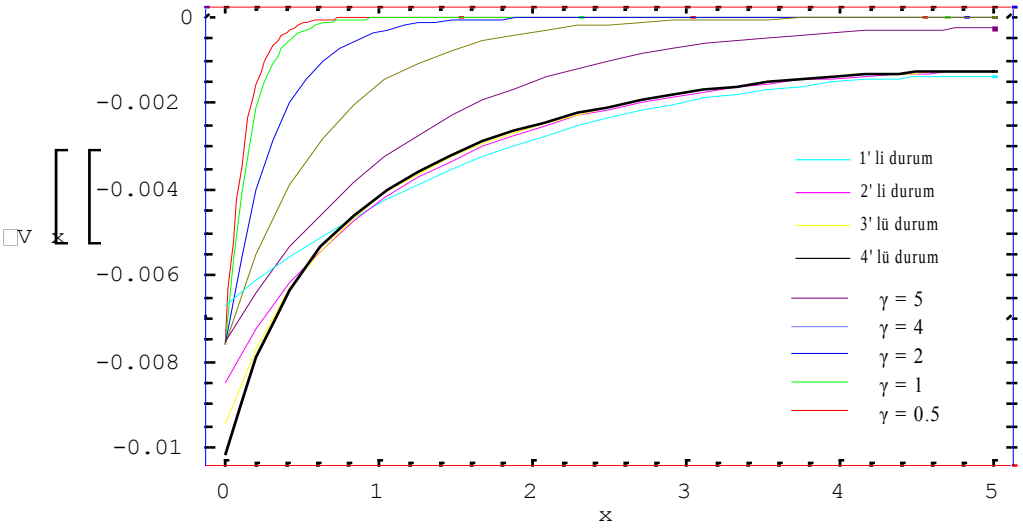
Şekil 6.2: Farklı Katman Sayısı Durumlarının Lineer Dağılım Fonksiyonları için Yer Değiştirme Eğrileri

Katman sayısının artması halinde, yer değiştirme eğrilerinin tekil yük etki noktasındaki farklılıklarının, x in artan değerleri için azaldığı Şekil 6.2 den görülebilmektedir.

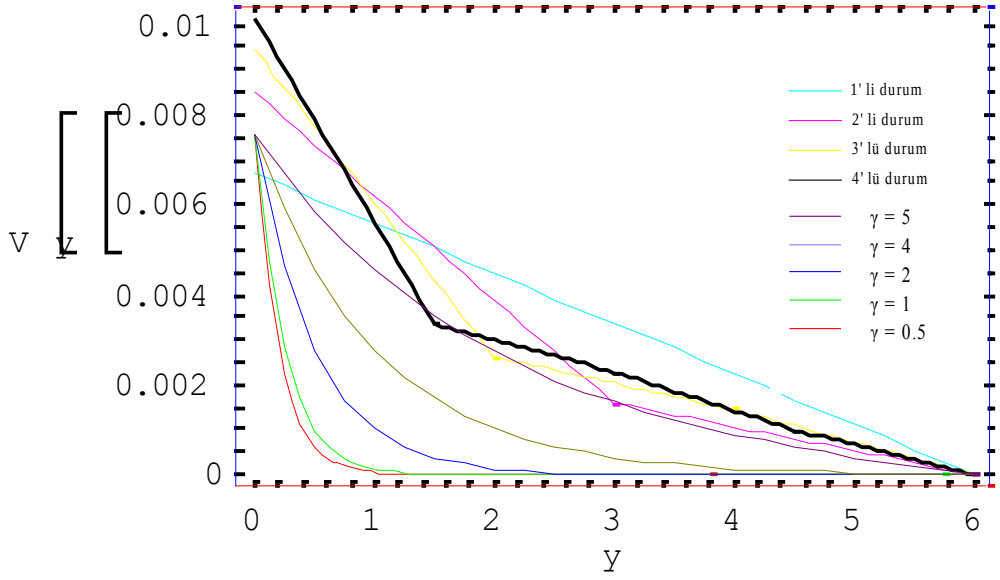
6.2 Dağılım Fonksiyonlarının Yer Değiştirmelerdeki Etkisinin İncelenmesi



Şekil 6.3: γ Parametresine Bağlı Olan Hiperbolik Dağılım Fonksiyonlarının Seçilmesi Halinde 6.1 Uygulamasında Oluşan Çökme Eğrileri



Şekil 6.4: Lineer ve Hiperbolik Dağılım Fonksiyonların Birlikte Gösterimi

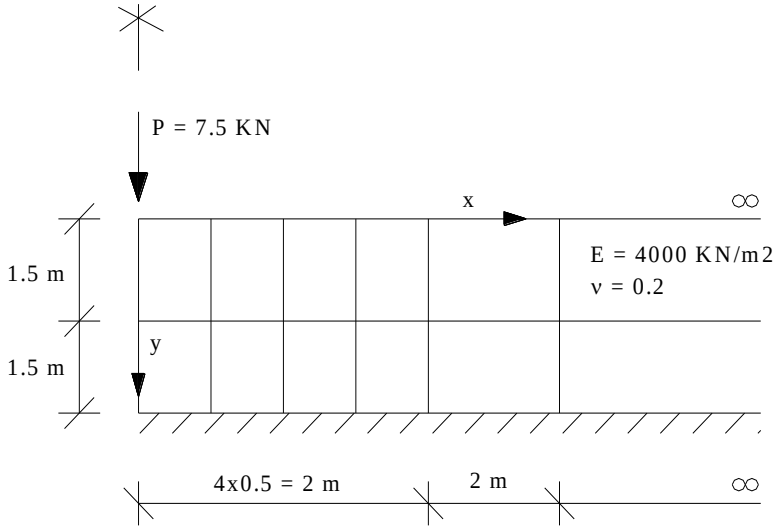


Şekil 6.5: 6.1 Uygulamasındaki Tekil Yük Etki Noktasındaki Çökme Değerinin, Derinlikle Değişiminin Dağılım Fonksiyonlara Bağlı Olarak Gösterimi

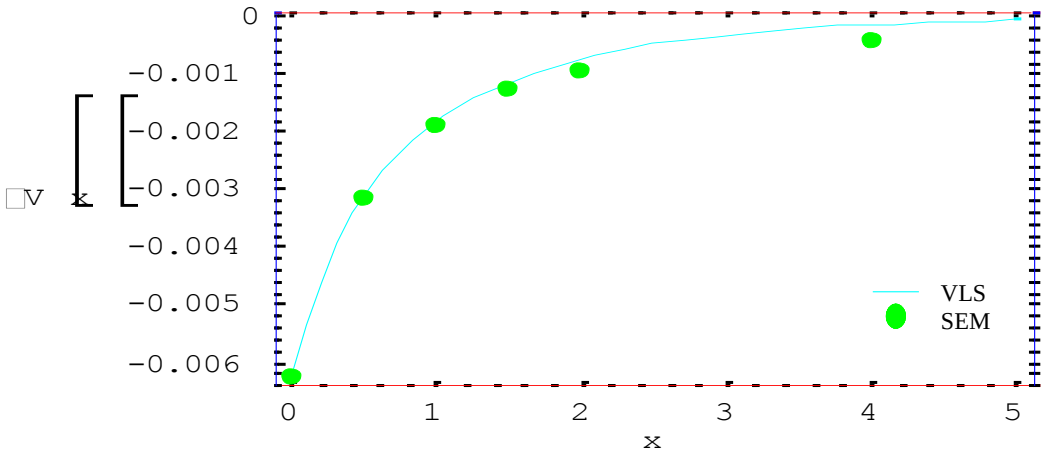
Şekil 6.4 ve Şekil 6.5 den γ parametresinin azalan değerlerinin zeminin sıkı olması durumunu, artan değerleri için ise, yer değiştirme eğrilerinin lineer dağılım fonksiyonlarına yakınsadığı görülebilmektedir.

6.3 Sonlu Elemanlar Yönteminin Probleme Uygulanması

6.3.1 Yarı sonsuz uzunluklu zemin örneği



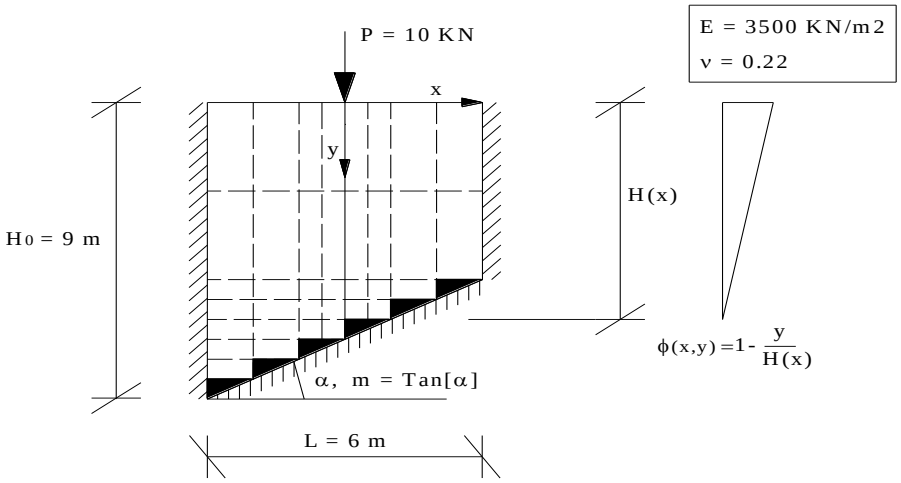
Şekil 6.6: Yarı Sonsuz Uzunluktaki Zemin Ortamının Sonlu Elemanlar Modellemesi



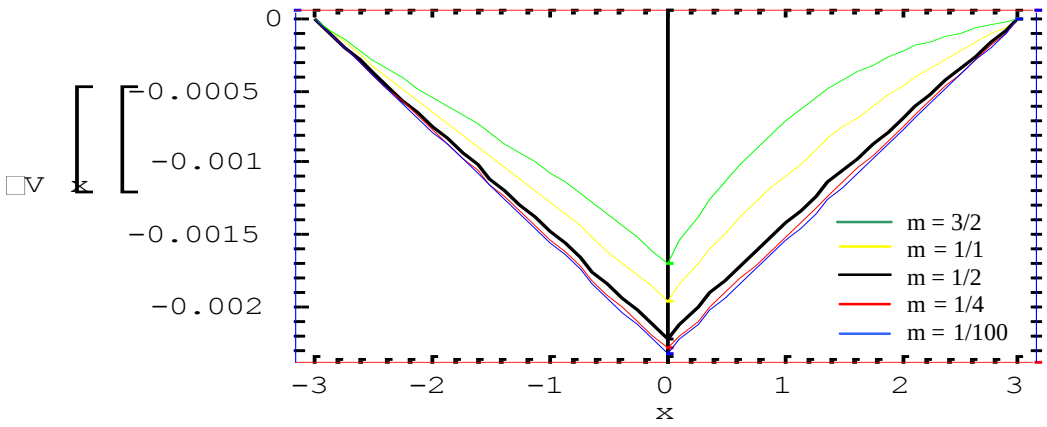
Şekil 6.7: Sonlu Elemanlar ile İki Tabakalı Vlasov Çözümünün Karşılaştırılması

Bölüm 6.1 deki katman sayısının zemin üzerindeki etkisi göz önüne alınarak, Şekil 6.6 daki örnek, iki katmanlı yarı sonsuz uzunluklu Vlasov modeli ile karşılaştırma yapılmıştır.

6.3.2 Eğik tabanlı zemin örneği

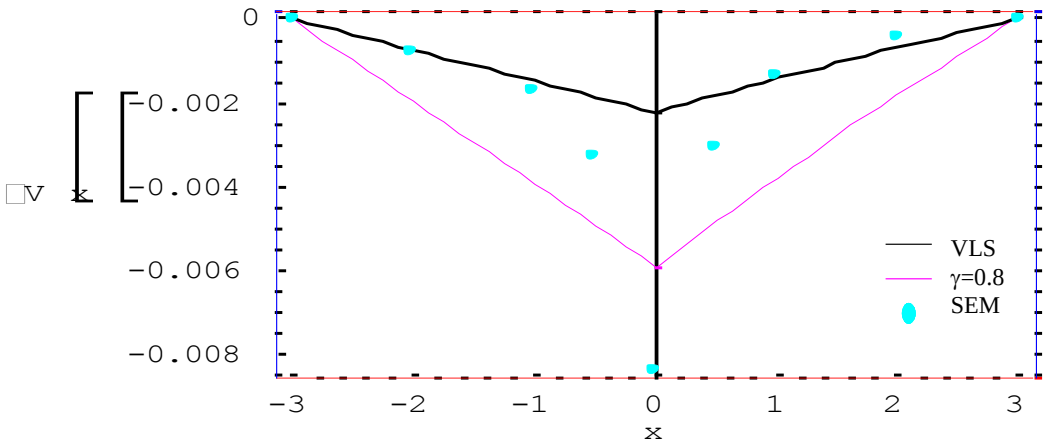


Şekil 6.8: Eğik Tabanlı Zemin Örneği



Şekil 6.9: Lineer Dağılım Fonksiyonu ile Farklı Eğim Durumları için Oluşan Zemin Yüzeyi Çökme Eğrileri

Sonlu elemanlar yönteminin, eğik tabanlı zemin problemi için irdelenmesinden önce, kama şekilli tek parçalı zemin, lineer dağılım fonksiyonları kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Bu durum için, zemin eğiminin artması sonucu olarak yer değiştirmelerdeki simetrinin bozulduğu Şekil 6.9 dan görülmektedir.

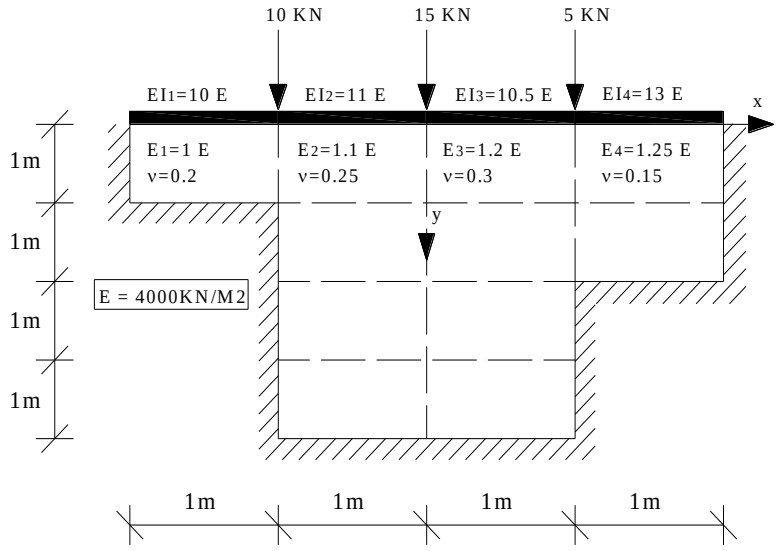


Şekil 6.10: Eğimin ½ Olması Halinde Sonlu Elemanlar, Lineer ve Hiperbolik Dağılım Fonksiyonların Çözümünü Gösteren Eğriler

Şekil 6.8 deki sistemin katman ve bölge sayısının artması durumu için analitik olarak çözülmesi istendiğinde, aynı problemin sonlu elemanlar olarak çözülmesi aşamasında harcanan dikkat ve özen daha fazla olacaktır. Bu nedenle sonlu eleman yönteminin doğruluğu oranınca, sistem analitik olarak gerçekçi olarak irdelenmiş demektir.

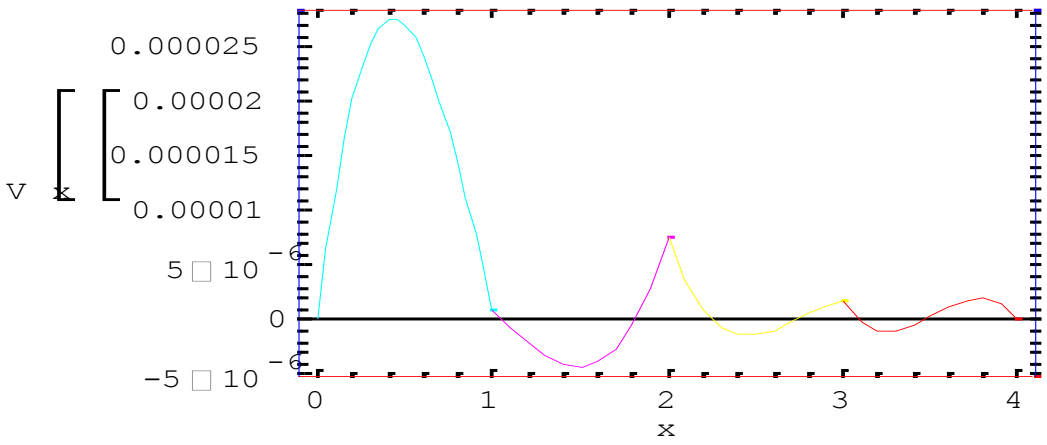
6.4 Kademeli Vlasov Zemin Modeli Uygulamaları

6.4.1 Sınırlı uzunluktaki kiriş modeli



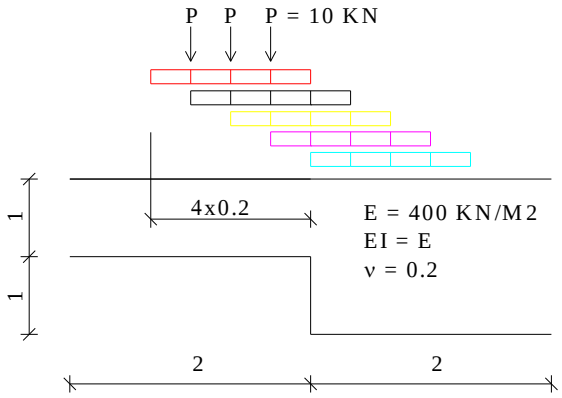
Şekil 6.11: Dört Bölgeden Oluşan Kademeli Zemin Tipi

Şekil 6.11 de gösterildiği gibi, kademeli ve bölgesel olarak farklı zemin parametreleri ile kiriş eğilme rijitliğine sahip zemine ait yüzey yer değiştirme eğrileri Şekil 6.12 de gösterilmiştir.



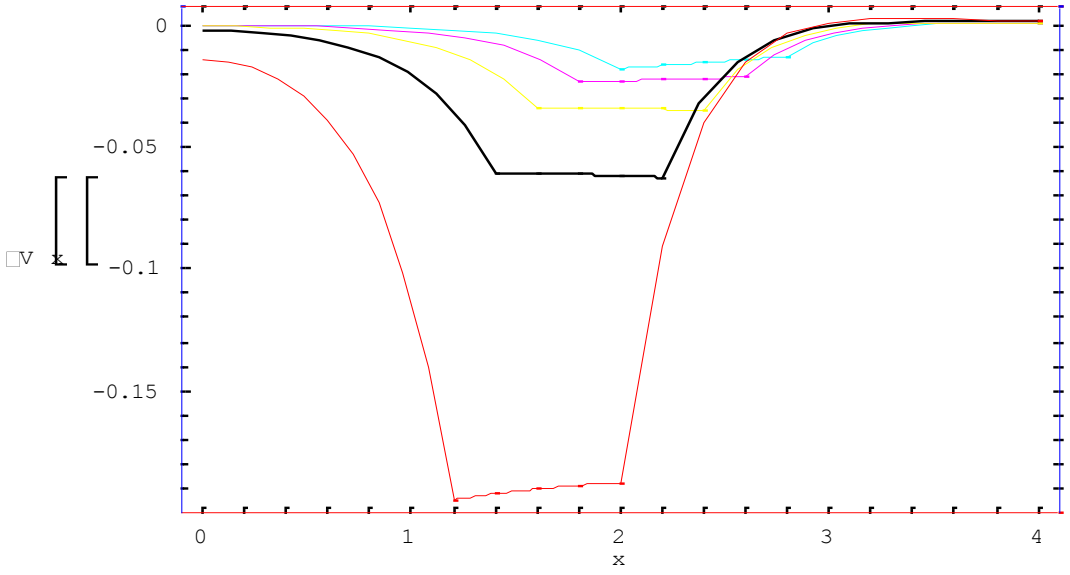
Şekil 6.12: y = 0 Yüzeyine Ait Çökme Eğrisi

6.4.2 Kademeli modelin farklı yükleme durumları için incelenmesi



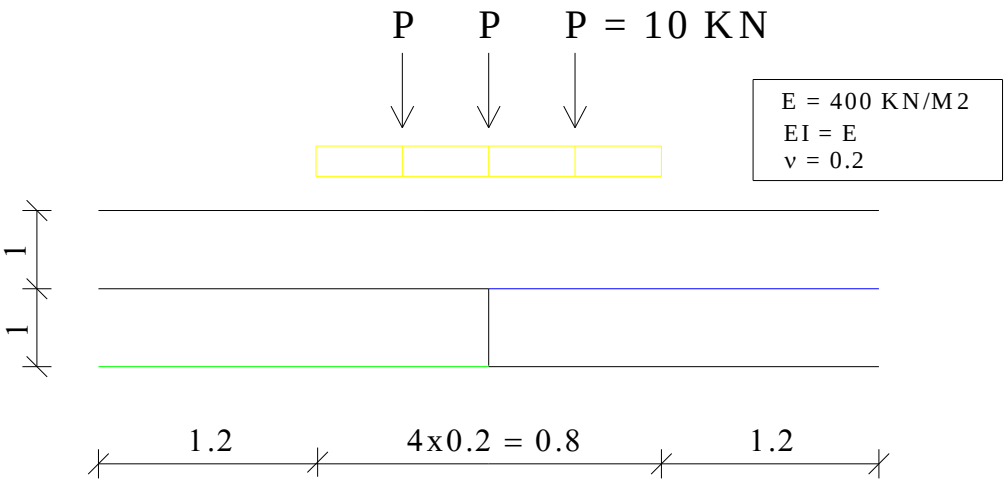
Şekil 6.13: Farklı Yükleme Durumundaki Kademeli Zemin Modeli

Şekil 6.13 de gösterilen kademeli zemin parçasının yükleme halinin yerinin değişikliğine bağlı olarak oluşan çökme durumu, Şekil 6.14 de gösterilmiştir.



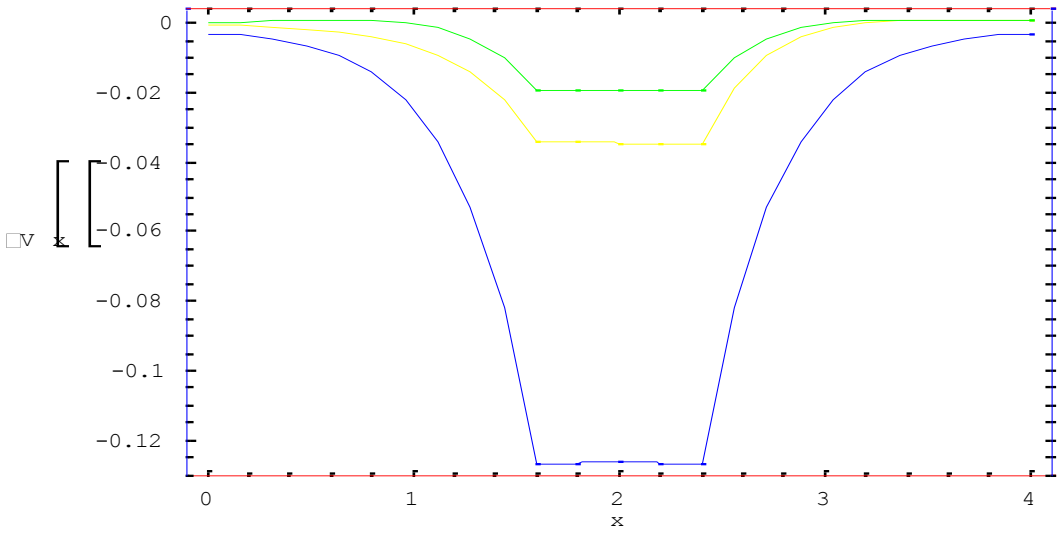
Şekil 6.14: Yükleme Durumları İçin Zemin Yüzeyine Ait Çökme Eğrileri

6.4.3 Aynı yükleme durumu için katman etkisinin incelenmesi



Şekil 6.15: Kademeli, Tek ve İki katmanlı Zemin Örneği

Şekil 6.16 da, zeminin kademeli olması durumu ile kademenin başlangıcı ve bitiminden itibaren alınan tek ve iki katmanlı modellerin (Şekil 6.15) yer değiştirme eğrileri toplu olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.16: Katman Durumlarının Çökme Eğrileri

7 SONUÇLAR

Vlasov ve Leont'ev zemini (bölümün ilerleyen kısımlarında kısaca "model" olarak adlandırılacaktır) konu başlığı adı altında oluşturulan bu çalışmada, konunun genel hatları ile incelenmesi ve yapılan uygulamalar neticesinde aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

- Modelin çözümünde dağılım fonksiyonları önemli bir rol oynamaktadır. Lineer dağılım fonksiyonları seçilmesi durumunda, modelin üst yüzünü ait çökme eğrilerinin x ekseni boyunca etki mesafesinin daha büyük olduğu gözlenmiştir. Tekil yükleme özel durumunda, etki noktasının çökme sayısal değerinin hiperbolik fonksiyonlarda daha az olduğu görülmektedir. Sabit x değeri için yer değiştirmenin y ekseni (enine) doğrultusunda değişimi, hiperbolik fonksiyonlar kullanıldığında, derinlik etki boyunun daha az olması ile birlikte sıfıra daha kısa mesafede yaklaşmaktadır. Modelin uygulanması aşamasında γ parametresine bağlı olan hiperbolik fonksiyonlar, parametrenin artan değerleri için lineer fonksiyonlara yakınsamaktadır. Bu nedenle ilgili γ nın azalması, zeminin yer değiştirmeye karşı daha mukavemetli olduğunu, artması ise yer değiştirme serbestisinin daha fazla olması anlamına gelmektedir. Sonuç olarak, hangi tip dağılım fonksiyonunun kullanılması ile γ nın sayısal ölçütünün verilmesi aşamasında, zeminin özelliklerinin dikkate alınması gerekmektedir.

- Lineer dağılım fonksiyonunun farklı katman sayısı durumunda modelde farklılıklar oluşmaktadır. Adından da anlaşıldığı gibi lineer değişime sahip fonksiyonlar, katman içinde sabit enine gerilme değeri vermektedir. Derinliğin fazla olması durumunda bu kabulün uygun olmaması nedeniyle, ya lineer olmayan fonksiyonlar seçilmeli, ya da modeli katmanlara bölerek, enine gerilmenin en azından farklı katmanlar için değişimi sağlatılmalıdır. Bununla birlikte aynı tip lineer fonksiyonlar seçilse bile, katman etkisi nedeni

ile hiperbolik fonksiyonların çözümüne yakın değerler elde edilmektedir. Katman olarak problemin modellemenin diğer bir avantajı ise zeminin fiziksel özelliklerinin değişiminin hesaba katılmasını sağlamasıdır. Bu durumda enine yer değiştirme eğrileri kırıklı çizgilerden oluşmakla birlikte, etki noktasındaki çökme değeri daha fazla olup derinlikle ve x ekseni doğrultusunda daha hızlı azalma görülmektedir.

- Modelden çıkarılan dikdörtgen zemin elemanının rijitlik matrisinin elde edilmesi sonucu bulunan değerler, modelin katmanlara bölünmesi sonucu oluşan verilere, matrisin doğruluğu oranınca yakındır. Bölge sayısının da devreye girmesiyle ilgili diferansiyel denklemlerinin sayısı önemli oranda arttığı göz önüne alınırsa, sonlu eleman yöntemi hem daha sistematik hem de daha takip edilebilir olması nedeniyle önemli avantaj sağlamaktadır. Sonlu elemanın şekil fonksiyonları tek tabakalı modelin diferansiyel denkleminin çözümünden alınması sonucu yakın değerler elde edilmiştir. Dikdörtgen sonlu eleman ile modelin tabakalı ve eğik tabanlı problemlerin çözümü de mümkün olmaktadır.

- Zemin tabanının kademeli olması hali yer değiştirme bakımından, kademenin başlangıcı ve bitişinden alınan tek ve iki katmanlı zemin modelinin arasında değer almaktadır. Katman kalınlığının az olması nedeniyle zemin, Winkler modeline yakınsadığından, tek katmanlı model en büyük yer değiştirme yapan sistem olmaktadır. Katman kalınlığının fazla olması iki katmanlı durumda ise, modelin kayma etkisi yer değiştirmelerin azalmasına neden olmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Vlazov, V.Z. and Leont'ev, N.N.,** 1979. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, GIFL, Moscow

[2] **Salvadurai, A.P.S.,** 1979. Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, *Elsevier Sci. Pub. Comp.*

[3] **Nogami, Toyoaki. and Lam C. Y.,** 1987. Two-parameter Layer Model for Analysis of Slab on Elastic Foundation, *Journal of Engineering Mechanics,***113**, 1279-1291.

[4] **Vallabhan, C.V.G. and Das Y. C.,** 1988. Parametric Study of Beams on Elastic Foundations, *Journal of Engineering Mechanics,***114**, 2072-2082.

[5] **Kimençe, B.,** 1989. İki Parametreli Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak ve Basık Küresel Tabanlı Silindirik Tank, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[6] **Razaqpur, A.G. and Shah K. R.,** 1989. Exact Analysis of Beams on Two-Parameter Elastic Foundations, *Journal of Solid Structures,* **27**, 435-454.

[7] **Çelik, Meçit.,** 1996. Plak Sonlu Elemanlarda Kayma Şekil Değiştirmelerinin Göz Önüne Alınması ve İki Parametreli Zemine Oturan Plakların Hesabı için Bir Yöntem , *Doktora Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[8] **Vallabhan, C.V.G. and Daloğlu A. T.,** 1999. Consistent FEM-Vlasov Model for Plates on Layered Soil, *Journal of Structural Engineering,* **125**, 108-113.

[9] **Daloğlu A.T., and Vallabhan, C.V.G.,** 2000. Values of k for Slab on Winkler Foundation, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,* **126**, 463-471.

[10] **Onu G.,** 2000. Shear Effect in Beam Finite Element on Two-Parameter Elastic Foundation, *Journal of Structural Engineering*, **126**, 1104-1107.

[11] **Seyrek, Tekin,** 2004. Eğik Tabanlı Vlasov Zemini Üzerine Oturan Kirişlerin Sonlu Elemanlar ile İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[12] **Terzaghi, Karl,** 1959. Theoretical Soil Mechanics, John Wiley and Sons Inc., New York

[13] **Ghali, A., Neville A.M., and Cheung Y.K.,** 1986. Structural Analysis, a Unified Classical and Matrix Approach , Ankara University Printing House, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1979 Trabzon doğumlu olan Mehmet BALCI, 1997 yılında Kartal Anadolu İmam Hatip Lisesini bitirdikten sonra aynı yıl, İ.T.Ü İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümüne girmiştir. Endüstri yapıları üzerinde bitirme çalışması yapan ve 2002 yılında lisans öğrenimini bitirdikten sonra Yapı Mühendisliği Ana Bilim Dalı'na kabul alan tez sahibi, 2004 yılında özel bir şirkette başladığı görevine devam etmektedir.