İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞAHİN ÇEVİK

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

OCAK 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞAHİN ÇEVİK

(504091120)

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU

OCAK 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün **504091120** numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Şahin ÇEVİK**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yrd.Doç.Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hakan TEMELTAŞ** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd.Doç.Dr. Aydemir ARISOY .....
Hava Harp Okulu

Teslim Tarihi : 17 Aralık 2012
Savunma Tarihi : 22 Ocak 2013

Sevgili aileme ve tüm bilim insanlarına…

ÖNSÖZ

Robotik alanında hazırlamış olduğum bu tez çalışmam ileriki hayatımda bana ilham kaynağı olacak yeni ufuklar kazandırmıştır. Çalışmamda desteğini ve değerli vaktini esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. *S. Murat YEŞİLOĞLU*' na, çalışmalarımda pek çok konuda ortak çalıştığım çok değerli arkadaşım *Süleyman YİĞİT*" e, tezin ilerlemesi ve gelişmesi konusunda desteklerinden dolayı Arş. Gör. Musa YAZAR' a, desteklerinden dolayı sevgili arkadaşım Arş. Gör. Ali ÜNLÜTÜRK' e moral ve motivasyonumu yüksek tutan, her zaman arkamda olan kız arkadaşım *Duygu ŞİMŞİR*' e ve verdikleri maddi-manevi desteklerden dolayı *sevgili AİLEME* teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ocak 2013 Şahin Çevik

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
KISALTMALAR ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
SEMBOL LİSTESİ ..... **xvii**
ÖZET ..... **xxi**
SUMMARY ..... **xxiii**
1.GİRİŞ **1**
1.1. Motivasyon 1
1.2. Literatür Taraması 2
1.3. Tez Organizasyonu 3
2. UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ **5**
2.1. Uzaysal Operatör Cebrine Giriş 5
2.1.1. Rijid hareket 5
2.1.2. Rotasyon matrisi 7
2.1.2.1. Özel durumlar 8
2.1.2.2. Rotasyon matrisinin özellikleri 9
2.1.3. Skew-simetrik matrisler 9
2.1.4. R^3 de rijid hareket 10
2.1.5. Rotasyon için üstel koordinatlar 11
2.1.6. Homojen gösterim 13
2.2. Kinematik Modelleme 14
2.2.1. Seri manipülatör kinematik modeli 14
2.2.1.1. Eklem tipleri 15
2.2.1.2. Rijid cisim kinematiği 17
2.2.1.3. İleri kinematik 20
2.2.1.4. Ters kinematik 21
2.2.2. Paralel manipülatör kinematik modeli 21
2.2.3. Mobil platform üzerinde seri manipülatör kinematik modeli 23

2.2.4. Mobil platform üzerinde paralel manipülatör kinematik modeli 24
2.3. Dinamik Modelleme 26
2.3.1. Seri Manipülatör Dinamik Modeli 26
2.3.2. Mobil platform üzerinde seri manipülatör dinamik modeli 27
2.3.3. Mobil platform üzerinde paralel manipülatör dinamik modeli 30
2.3.3.1. $\dot{J}\dot{\theta}$ ifadesinin hesaplanması 33
2.3.3.2. Uç nokta kuvvetlerinin hesaplanması 33
2.3.4. Sözde Eklem Tekniği 35
3. İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ 37
3.1. İnsan Anatomisi 37
3.1.1. İskelet sistemi 37
3.1.1.1. Aksiyel iskelet 37
3.1.1.2. Apendiküler iskelet 38
3.1.2. Eklemler 39
3.2. İnsan İskeletinin Robotiğe Uyarlanması 42
3.3. Model Tabanlı Kuvvet Dağılımının İncelenmesi 43
3.4. Benzetim Sonuçları 45
SONUÇ VE ÖNERİLER 63
KAYNAKLAR 65
ÖZGEÇMİŞ 67

KISALTMALAR

SO(n) **:** Special Orthogonal

SOA **:** Spatial Operator Algebra

DOF **:** Degrees of Freedom

UOC **:** Uzaysal Operatör Cebri

SD **:** Serbestlik Derecesi

VRML : Virtual Reality Modeling Language

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1: Vücuttaki eklem tipleri ve özellikleri 41
Çizelge 3.2: Parça ismine göre kütle değerleri 46
Çizelge 3.3: Eklemlere göre link vektörleri 47
Çizelge 3.4: Sağ ve sol bacakların başlangıç konfigürasyon açıları 49
Çizelge 3.5: Sağ ve sol kolların başlangıç konfigürasyon açıları 49
Çizelge 3.6: Sağ ve sol bacakların başlangıç konfigürasyon açıları 56
Çizelge 3.7: Sağ ve sol kolların başlangıç konfigürasyon açıları 56

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Rijid bir cismin zamanla yer değiştirmesi 5
Şekil 2.2 : Aynı orjine sahip iki farklı eksen takımı 7
Şekil 2.3 : Sabit A vektör setine göre hareketli B vektör setinin tanımlanması 11
Şekil 2.4 : Katı cismin bir eksen etrafında dönmesi 11
Şekil 2.5: n adet linke sahip seri manipülatör mekanizması 14
Şekil 2.6: Dönel eklemin yapısı 15
Şekil 2.7: Prizmatik eklemin yapısı 15
Şekil 2.8: Silindirik eklemin yapısı 15
Şekil 2.9: Silindirik eklemin yapısı 16
Şekil 2.10: Planar eklemin yapısı 16
Şekil 2.11: Küresel eklemin yapısı 16
Şekil 2.12: Seri bağlı iki linkli bir yapı 17
Şekil 2.13: İki seri manipülatörden oluşan paralel manipülatör yapısı 22
Şekil 2.14: Mobil platform üzerinde seri manipülatör yapısı 23
Şekil 2.15: Mobil platform üzerinde paralel manipülatör yapısı 24
Şekil 2.16: Ortak yükü tutan paralel manipülatör 34
Şekil 3.1: Aksiyel ve apendiküler iskelet kemikleri 38
Şekil 3.2: Yüzey eklem ve modeli 39
Şekil 3.3: Dönel eklem ve modeli 39
Şekil 3.4: Silindirik eklem ve modeli 39
Şekil 3.5: Elips eklem ve modeli 40
Şekil 3.6: Eyer eklem ve modeli 40
Şekil 3.7: Küresel eklem ve modeli 40
Şekil 3.8: İnsan iskeletinin eklemlere göre modellenmesi 42
Şekil 3.9: Sol bacağı bükülmüş model ve duvarı itme modeli 43
Şekil 3.10: Bağlantısal model 43
Şekil 3.11: Simülasyon modeli 45
Şekil 3.12: CATIA model parça çizimleri 46
Şekil 3.13: 1. Başlangıç konfigürasyonu 48

Şekil 3.14: Senaryo 1'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 51
Şekil 3.15: Senaryo 2'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 53
Şekil 3.16: Senaryo 3'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 55
Şekil 3.17: 2. Başlangıç konfigürasyonu 56
Şekil 3.18: Senaryo 1'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 58
Şekil 3.19: Senaryo 2'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 60
Şekil 3.20: Senaryo 3'e göre eklemlere etkiyen kuvvetler 62

SEMBOL LİSTESİ

I_3 : 3x3 birim matris

0_3 : 3x3 sıfır matris

$\boldsymbol{R}$: Rotasyon matrisi

$\boldsymbol{R}^{-1}$: Rotasyon matrisinin tersi

$\boldsymbol{R}^{T}$: Rotasyon matrisinin transpozu

$e^{\widehat{w}\theta}$: Üstel koordinatlarda rotasyon matrisi

$\vec{\vartheta}_k$: k. linkin lineer hız vektörü

$\vec{\omega}_k$: k. linkin açısal hız vektörü

$\vec{l}_{k-1,k}$: iki link arasındaki link vektörü

$\dot{\theta}$: iki link arasındaki eklem açısının değişim hızı

$\underline{\dot{\Theta}}$: bir manipülatörün tüm eklem açılarını içeren vektör

$\ddot{\theta}_k$: iki link arasındaki eklemin ivmesi

$\underline{\ddot{\theta}}$: bir manipülatörün eklem ivmelerini içeren vektör

$\vec{h}_k$: k. linkin dönme eksen yönünü gösteren vektör

$\vec{\vec{H}}_k$: k. linkin dönme eksen takımını matrisi

H^i : i. manipülatörün tüm linklerini içeren dönme eksen matrisi

H : sistem dönme eksen matrisi

$\vec{\vec{V}}_k$: k. linkin uzaysal hızlar vektörü

$\vec{\vec{V}}_t$: uç noktanın uzaysal hızlar vektörü

$\vec{\vec{V}}_b$: tabanın uzaysal hızlar vektörü

$\vec{\vec{V}}_c$: ortak yükün uzaysal hızlar vektörü

$\underline{V^i}$: i. manipülatörün tüm eklemlerinin uzaysal hızlarını içeren vektör

$\underline{V}$: sistem uzaysal hızlar vektörü

$\varphi_{k-1,k}$: iki link arasındaki propagasyon matrisi

$\varphi_{t,c}$: uç noktadan ortak yüke olan propagasyon matrisi

$\varphi_{t,b}$: uç noktadan tabana olan propagasyon matrisi

φ_{b} : tabandan ilk linke olan propagasyon matrisi

φ_{t} : uç noktadan son linke olan propagasyon matrisi

$\emptyset^{i}$: i. manipülatörün propagasyon matrisi

$\emptyset$: sistem propagasyon matrisi

$\mathcal{J}^{i}$: i. manipülatörün jakobiyen matrisi

$\mathcal{J}$: sistem jakobiyen matrisi

$\mathcal{J}^{\#}$: jakobiyen matrisinin pseudo inverse matrisi

$\vec{\dot{a}}_{k}$: k. linkin uzaysal ivme artık vektörü

$\vec{\dot{a}}_{b}$: tabanın uzaysal ivme artık vektörü

$\underline{\dot{a}}^{i}$: i. manipülatörün artık uzaysal ivme vektörü

$\underline{\dot{a}}$: sistem artık uzaysal ivme vektörü

$\vec{\dot{b}}_{k}$: k. linkin artık uzaysal kuvvet vektörü

$\vec{\dot{b}}_{b}$: tabanın artık uzaysal kuvvet vektörü

$\underline{\dot{b}}^{i}$: i. manipülatörün artık uzaysal kuvvet vektörü

$\underline{\dot{b}}$: sistem artık uzaysal kuvvet vektörü

$\vec{f}_{k}$: k. linkin kuvvet vektörü

$\vec{\mathcal{T}}_{k}$: k. linkin tork vektörü

$\underline{\mathcal{T}}$: sistem tork vektörü

$\vec{\mathrm{F}}_{k}$: k. linkin uzaysal kuvvetler vektörü

$\vec{\mathrm{F}}_{b}$: tabanın uzaysal kuvvetler vektörü

$\underline{\mathrm{F}}^{i}$: i. manipülatörün uzaysal kuvvetler vektörü

$\underline{\mathrm{F}}$: sistem uzaysal kuvvetler vektörü

m_{k} : k. linkin kütlesi

M_k : k. linkin kütle matrisi

M_b : taban kütle matrisi

M_c : ortak yükün kütle matrisi

$\mathcal{M}^i$: i. manipülatörün genelleştirilmiş kütle matrisi

$\mathcal{M}$: sistem genelleştirilmiş kütle matrisi

$\underline{\mathrm{C}}^i$: i. manipülatörün Coriolis ve yer çekimi içeren artık vektörü

$\underline{\mathrm{C}}$: sistemin Coriolis ve yer çekimi içeren artık vektörü

S : sözde eklemlere göre düzenlenmiş birim matris

$\ddot{\theta}_p$: sözde eklemlerin açısal ivme vektörü

$\ddot{\theta}_r$: sözde eklem olmayan diğer eklemlerin açısal ivme vektörü

$\overline{\mathcal{T}}_p$: sözde eklemlerin tork vektörü

İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bilim dünyasının insansı robot üretilmesi konusuna ilgisinin bir hayli fazla olması nedeniyle günümüzde insansı robotların gelişiminde önemli mesafe kat edilmiştir. Çok geniş konular içeren robotik dünyasında çalışmalar birden fazla alana yayılmıştır. Bunlar duruş, dengede durma, taklit etme vb. gibi alanlardır. Bu tezde yapılan çalışmada, modellenen bir duruş şekline göre vücuttaki kuvvetlerin dağılımının dinamik analizini yapılmaktadır. Bu konu oldukça önemlidir. Yapılan literatür incelemelerinde insan dışında pek çok model için dinamik analiz yapıldığı fakat insan duruşu üzerinde bu tarz bir çalışmaya rastlanmamıştır. İnsanın duruşuna göre (ayakta, yatarken, otururken vb. gibi) yere yaptığı baskıyı inceleyen birkaç çalışma bulunmaktadır ki bunlarda genellikle ölçüm yöntemiyle analiz yapmaktadırlar. Bu çalışmada, herhangi bir duruş anındaki insan vücudu üzerinde kuvvetlerin ne şekilde dağıldığının incelenmesi amacıyla bilgisayar üzerinde bir insan modeli oluşturulmuş ve dinamik analiz yöntemi ile analizi yapılmıştır. İnsan vücudu her bir kolda yedi serbestlik derecesi, her bacakta altı serbestlik derecesi ve gövdede altı serbestlik derecesi olmak üzere 32 serbestlik dereceye sahiptir. Bilgisayar ortamında tasarlanan insan modeli ortalama bir insan ağırlığına sahip olup 32 serbestlik derecesi sayesinde insan ile aynı hareket kabiliyetine sahiptir. Modelleme yöntemi olarak Uzaysal Operatör Cebri yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin özyinelemeli yapısı, kararlılığı ve hızlı olması nedeniyle bir robot manipülatörünün hem kinematik analizi hem dinamik analizi oldukça doğru sonuçlar verecek şekilde yapılabilir. Bu yöntem ile insan benzeri modelin dinamik denklemleri çıkartılmış ve hazırlanan algoritma ile bilgisayar ortamında benzetimi yapılmıştır. Benzetimde iki farklı duruş pozisyonu için tüm eklemlerin serbest olduğu, bacak eklemlerinin kilitli olduğu ve kol eklemlerinin kilitli olduğu üç farklı senaryo çalıştırılmıştır. Benzetim anında vücuttaki bütün eklemlerin üzerine düşen tork ve kuvvetler anlık olarak gözlemlenebilmiştir. Model oldukça gerçeğe yakın davranışlar sergilemiş ve sonuçlar doğru bir şekilde elde edilmiştir

Tüm bunları yaparken kullandığımız dinamik analiz yöntemi temelleri 1980' lerde atılan Uzaysal Operatör Cebri (UOC) yöntemidir. Newton-Euler tabanlı özyinelemeli bu metot hesap yükünü azaltması, hızlı olması ve dinamik olarak bir modeli anlamada oldukça kolaylık sağlaması yönünden avantajlıdır.

Öncelikle bir insan iskeleti, link ve eklemleri ile temel bir model oluşturulmuş, linklerin ağırlıkları ve uzunlukları tanımlanmış olup UOC yöntemi ile modelin çözümlemesi yapılarak sonuçlar MATLAB ortamında gösterilmiştir.

DYNAMICAL ANALYSIS OF MODEL-BASED FORCES ON HUMAN BODY

SUMMARY

Human body is the most mysterious phenomenon of all times. Lots of researches has been made on the human behavior, reactions and acts to make human like robots (humanoids) with the advances in technology and robotic. In order to make humanoids, mimicking the posture of human has a great importance. Because of that, there is an increasing rate of researches on the posture prediction. Force distribution over the human body decides the posture so that, in this thesis, we will make a study on human posture and force distribution. Also force distribution in other words knowing where to apply and which amount of force is required for a specific posture is important to design mechanical prosthesis like mechanical legs or arms for disabled or design support equipment like wearable mechanical sheath for paralyzed persons.

There exist some conventional methods like Denavit-Hartenberg method to model serial and parallel manipulators, robots or human body posture. Spatial operator's algebra (SOA) which is a recent and more efficient method is used as mathematical and computing method throughout this work. It is named as spatial because angular and linear vectors are defined together. SOA has many advantages over the conventional methods like, complex topologies of manipulators and robotic systems can be easily modelled with SOA. Because the algorithm of the method based on the Newton-Euler calculations, we can obtain the force or velocity information of any link or joint at any instance. Another important advantage of SOA is that it is a recursive algorithm so the algorithm makes O(n) calculations n degrees like the other recursive algorithms do. While kinematic calculations of robotic systems usually increases with the cube of the number of generalized coordinates which is n, it is increased linearly with recursive algorithms like SOA. With the light of all these advantages of being recursive we can say that it is faster than the former algorithms especially when it is used with the complex topologies like human body.

Thesis starts with the SOA and its derivation for solid body motion, then with the use of derived equations, first kinematic then dynamic modelling is introduced. Basically there are two types of modelling which are kinematic and dynamic. We use

generalized matrix representation for the kinematic and dynamic models. In kinematic modelling , both linear and angular velocities of joints are determined for a desired end-point trajectory, in addition to all of these, in dynamic modelling, forces and moments over the joints are determined for a desired or applied force on the end-point. Because of that we used dynamic modelling with SOA to determine the posture and force distribution over the body joints.

Modelling of human body starts with determining the joints and related the degrees of freedoms (DOFs), in this thesis we determine a total of 32 DOFs where seven for each arms, six for each legs and a six for the body. In this structure arms and legs can be thought as parallel cooperative manipulators. With the utilization of the dynamic model of SOA over this structure, a sample application which includes force distribution on a human body who tries to push a wall is also introduced at the end of the thesis. In this structure, we assume that end points of the arms and legs are fixed to the base in other words the velocities are zero at that points in this way, the upper and lower parts of the body can be thought as two moving bases. We approach the problem at this perspective because the mathematical model and calculations of close chained two moving bases are much more efficient and easier than the four open and arms and legs. After the modelling and simulation of this example we show the results and make the comments of these results.

Due to this project's application is a human who tries to push a wall, the hands' and feet's end points' velocities of the model will be zero because they hold a common load. The equations were rearranged and calculated for this scenario and the forces which make the end points' velocities zero. Then the calculated values were applied to the model and the results were analyzed.

CATIA drawing software was used for modeling in the project. The torso, arms, legs, hands, feet and skull which are the main parts leads the motion was designed with CATIA. It was paid attention for all these parts to have some specifications like height and weight. Then the drawings of these parts were combined and prepared for simulation in MATLAB/ V-REALM BUILDER environment. Coordinate systems in other words frames are located on the joints of the body, which are shoulders, elbows, wrists, hip, knees and ankles, to this newly formed model. Torso was assumed as base so fixed coordinate system, in other words fixed frame, was located

in the middle of the torso. Hereafter, link vectors of the joints were formed with respect to the previous joint. Some data which are required for the initialization of the model like mass and moment of inertia matrices were calculated in the CATIA. The data which include mass, moment of inertia and link vectors were used as initial values for the algorithm written in MATLAB environment. The behavior of the V-REALM BUILDER model was observed by running of developed MATLAB algorithm, which was developed with the dynamical analyses equations of the cooperative manipulators on a mobile platform with SOA method. The forces which occur on every single joints of the model were given graphically at CONCLUTIONS part.

This study and its results can be a reference for the future posture prediction studies. One of the major problem with humanoid robots is the balance which is directly related to posture so this study can also be used for humanoid posture prediction. Another possible usage can be force prediction of wearable mechanical sheath for paralyzed person.

1. GİRİŞ

Robotiğin tarihi hayal dünyasını gerçeğe dönüştüren bir ilham kaynağı olarak ele alınır. Bundan dolayı; sinematik yaratıcılık, bilimsel beceri ve girişimci vizyonu ile birlikte robotiğin zengin bir geçmişi vardır. Robotik sistemler, birden fazla linkin eklemler ile birbirine bağlandığı ve bu eklemler vasıtasıyla linklerin birbirini etkilediği, bir yazılım aracılığıyla yönetilen ve yararlı bir amaç için iş ve değer üreten karmaşık makinelerdir. Bu sistemler robotikte manipülatörler olarak da adlandırılmaktadırlar. Bir manipülatörün analizi yapılırken iki türlü yol izlenir. Bunlardan ilki kinematik analiz, ikincisi ise dinamik analiz yöntemidir. Mekaniğin alt dalı olan kinematik analizde hareketin uzaysal ve zamansal özellikleri ile ilgilenilir. Mevcut mekanizmanın hız, ivme, konum vb. gibi kinematik parametrelerinin incelenmesi, kinematik analizin temelidir. Gerçek hayatta harekete neden olan kütle, kuvvet vb. gibi nicelikler kinematik analizin ilgi alanı değildir. İkinci bir yöntem olan dinamik analiz yönteminde ise bir mekanizmanın dinamik davranışını etkileyen kuvvet, tork, hız, ivme gibi parametrelerin zamanla değişimi incelenir. Gerçek hayatta ki uygulamaları çözümlemede daha gerçekçi olan bu analiz yöntemi bu çalışmanın temelidir.

Bu çalışmada dinamik analiz yöntemi olarak kullanılan uzaysal operatör cebri (SOA), Newton-Euler formülasyonu temeline dayanan, kompleks sistemlerin dinamik analizini yapmada kullanılan etkin ve modern bir yöntemdir. Çalışmanın ilk bölümünde uzaysal operatör cebrinin temelleri anlatılmış ve dinamik analize temel oluşturan kinematik analiz ele alınmış ardından dinamik analiz yöntemi ile modelleme yöntemi verilmiştir. İkinci kısımda ise insan iskeleti üzerindeki kuvvet dağılımı problemini ele almak için basit bir insan modeli oluşturulup, bu insanın farklı duruşlardaki dinamik incelemesi bu model üzerinden yapılmıştır.

1.1. Motivasyon

21. yüzyılda robotik konusuna duyulan ilginin arttığı bir gerçektir. Özellikle insan benzeri (*humanoid*) robot tasarlamak ve benzer bir duruşu sergiletmek isteği bu ilginin en çok yoğunlaştığı konudur. Teknolojinin hızla ilerlemesiyle birlikte 20.

yüzyılda hayal gibi görünen bu istek günümüzde gerçeğe hiç olmadığı kadar yakındır. Bilim dünyasında bu konularda pek çok çalışma bulunmaktadır. Özellikle insan duruşu anındaki denge problemi robotlar üzerinde yapılan çalışmalarda üzerinde en çok durulan konulardan biridir. Yük altındaki bir insanının kas ve iskelet sistemi dengede kalabilmek için üzerine gelen kuvveti tüm vücuda dağıtır. Bu dağılımın duruş şekli ile de alakalı olduğu bilinen bir gerçektir. Bu dağılımı bilmek denge problemleri için önem arz etmektedir. Örneğin, yürürken vücudun hangi kısımları kuvvete daha fazla maruz kalıyor, bir güreş sporcusu ayakta rakibine sarıldığı anda ayaklarını hangi pozisyonda tutarsa rakibine daha fazla kuvvet uygulayabilir vb. gibi durumların yanında insansı robotlarda kasların optimal enerji sarfiyatı için eklemlerin kinematik ve dinamik bilgilerinin her hareket için hesaplanması gerekmektedir. Bu çalışma bu ve benzeri çalışmalara destek olacaktır.

1.2. Literatür Taraması

Uzaysal operatör cebri çok kısımlı sistemlerin uzaysal vektörlerini hesaplamaya dayanan bir yöntemdir. Uzaysal kavramı açısal ve doğrusal vektörlerin bir arada kullanılmasından dolayı kullanılmaktadır. Uzaysal nicelikler pek çok yıldır biliniyor. Örneğin, 20. yüzyılın başında Ball [3], vida teorisi üzerinde bu nicelikleri kullanmıştır. 1983'te Featherstone [5], uzaysal cebirden faydalanarak türetilmiş olan tahrikli cisim eylemsizlikleri metodunu kullanarak O(n) metodunu geliştirdi. Bu metot açık zincir sistemleri için uygulanabilir olup Armstrong'un [2] metodundan daha verimlidir. 1987'de Guillermo Rodriguez [16] iki nokta sınır değer problemi gibi rijid cisim dinamiklerini çözmek için uzaysal niceliklerden faydalandı. Newton-Euler tabanlı çok kısımlı dinamiklerin O(n) formülasyonu üzerine ilk çalışmalardan biri de Walker ve Orin'in çalışmasıdır [23]. Onların bu çalışmasında rijid cisim denklemlerini hesaplama yöntemleri karşılaştırıldı ve özyinelemeli işlemlerin hesap yükünü azaltmada önemli bir katkı sağladığı bildirildi. Daha sonra Anderson ve Critchley [1] kendi O(n) algoritması metotlarını geliştirdiler. O(n) algoritması üzerine pek çok çalışma yapıldı bunlardan biri de Jain'in çalışmasıdır [7]. Rodriguez [16] Kalman filtresi ve Bryson-Frazier ayrık zamanlı smoothing algoritmasını kullanarak robot dinamiklerini hesaplamak için yeni bir metot geliştirdi. Bu verimli hesaplama metodu uzaysal operatör cebrinin temeli oldu ve bu metodu açık ve kapalı zincir sistemlere uyguladı [17,19]. Rodriguez, Jain ve Kreutz-Delgado [7] uzaysal vektör cebrini pek çok tipte çok kısımlı sistemlerin dinamiklerini incelemede bu

metodu kullandı. Jain ve Rodriguez' in başka bir araştırması [11], uzaysal operatör tabanlı rijid cisimli sistemlerin duyarlılık analizi üzerine oldu. Yeşiloğlu [24] doktora çalışmasında bu metodu kullandı ve bu metoda sözde eklem olarak nitelendirdiği bir katkı sağladı.

Bu metotla insan vücudunun dinamik analizi, yapılan literatür taramalarında bulunamadı. Ölçüm yöntemiyle kuvvetlerin dağılımını inceleme üzerine [12] birkaç çalışma bulundu fakat izlenen yöntem bu çalışmayla paralellik göstermemektedir.

1.3. Tez Organizasyonu

Bu çalışmada 4 ana bölümden oluşmaktadır.

1. bölüm giriş niteliğinde olup yapılan çalışmayla ilgili genel bir değerlendirme yapılmakta olup çalışmanın amacından bahsedilmiştir. Benzer konularda yapılan çalışmalar "**Literatür Taraması**" adı altında özetlenmiştir.

2. bölümde dinamik modellemede kullanılan yöntem olan *Spatial Operator Algebra (SOA)* tanıtılmış, konu ile ilgili altyapı "**UZAYSAL VEKTÖR CEBRİ**" adı altında verilmiştir. Seri ve paralel manipülatörlerin SOA yöntemiyle kinematik olarak modellenmesi, ileri ve ters kinematik denklemlerin elde edilmesi ile ilgili matematiksel işlemler **"Kinematik Modelleme"** adı altında verilmiştir. Yine seri ve paralel manipülatörlerin SOA yöntemiyle dinamik olarak modellenmesi konusu işlenmiş, sabit tabanlı ve hareketli platform üzerindeki durumlar için analiz yapılması ve model elde edilmesi ile ilgili kısımlar **"Dinamik Modelleme"** adı altında verilmiştir.

3. bölümde insan anatomisine giriş yapılmış ardından insan vücudundaki eklemlerin robotiğe uyarlanması işlemi anlatılmıştır. Bu bölümde bir insan iskeleti robot olarak modellenmiş, SOA yöntemi ile elde edilen dinamik modelleme bu model üzerine uyarlanmıştır. Bu konular "**İNSAN VÜCUDUNUN MODEL TABANLI KUVVET DAĞILIMININ DİNAMİK ANALİZİ**" başlığı altında irdelenmiştir. MATLAB Simulink ortamında yapılan benzetim sonuçları bu bölümde verilmiştir.

Tezin geleceğine yönelik öneriler **"SONUÇ VE ÖNERİLER"** kısmında verilmiştir.

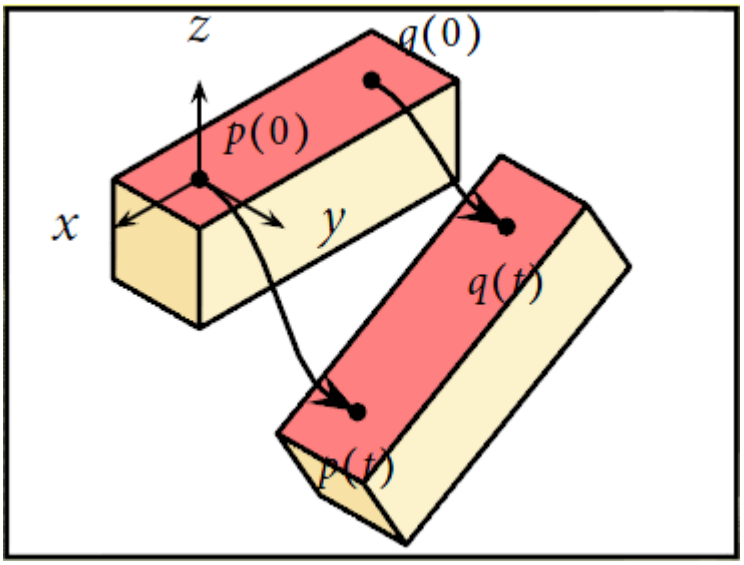
2. UZAYSAL OPERATÖR CEBRİ

2.1. Uzaysal Operatör Cebrine Giriş

2.1.1. Rijid hareket

Bir nesnenin rijid hareketi Şekil 2.1'de olduğu gibi o nesnenin iki noktası arasındaki farkı koruyarak yaptığı harekettir. Rijid cisim hareketinin incelenmesi, robot kinematiği, dinamiği, ve kontrolü için önemlidir. Rijid cisim sert, katı esnemeyen cisim olarak da ifade edilebilir.

Vida (Screw) Teorisi: Aynı anda hem dönme (*rotation*) hem de ötelenme (*translation*) içeren harekettir.



Şekil 2.1: Rijid bir cismin zamanla yer değiştirmesi.

Öklid uzayında bir partikülün hareketi, sabit bir kartezyen koordinat yapısına göre partikülün anlık lokasyonunu vermesiyle tanımlanır. Robotikte, bir robot kolu linkinde olduğu gibi partiküllerin bireysel hareketiyle değil, partikül setinin toplam hareketiyle ilgileniriz. Bu amaçla rijid cisim tamamen burkulmayan mükemmel bir katı cisim olarak tanımlanır. Tüm bunlardan yola çıkarak formal bir tanım yaparsak;

Rijid cisim kendisine uygulanan kuvvetleri göz ardı eden, herhangi iki noktası arasındaki farkı sabit olan bir partiküller toplamıdır. Rijid hareketten yola çıkarak, rijid cismin bir lokasyondan başka bir lokasyona net hareketine 'rijid yer değiştirme' (*displacement*) denir.

$$||p(0) - q(0)|| = ||p(t) - q(t)|| \tag{2.1}$$

Bu yer değiştirme genelde dönme ve ötelenmeyi aynı anda içerir. p ve q iki nokta, v ise bu iki noktayı bağlayan bir vektör olsun;

$$v = q - p$$

Rijid hareketi tanımlayan bir $g : O \rightarrow R(3)$ haritalaması için gerek şart aradaki farkın korunmasıdır. Bu şart iç yansımalara izin verebildiği için yeterli değildir. Örneğin;

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z).$$

Burada fark korunmuş ama oryantasyon korunmamıştır. Bu ihtimali yok etmek için aynı zamanda vektörel çarpımda korunmalıdır. Tüm bu gereklilikleri bir araya getirip bir tanım yapılırsa;

$g : R(3) \rightarrow R(3)$ aşağıda ki iki özellikleri sağlamalıdır:

$$|g(p) - g(q)| = |p - q| \quad ve\ tüm\ p, q \in R(3)$$

$$(v \times w) = g(v) \times g(w) \quad \text{ve tüm } v, w \in R(3)$$

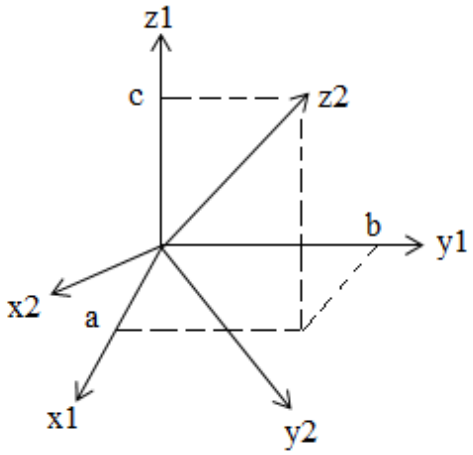
Rijid cisim üzerinde bazı noktalara kartezyen koordinatlar yerleştirip, koordinat eksen takımının (*frame*) sabit eksen takımına göre hareketi takip edilecektir. Yerleştirilen koordinat eksen takımının *sağ –el* kuralına göre olmasına dikkat edilmelidir.

$$x, y, z \in R(3) \text{ ortanormal vektörler}$$

$$z = x \times y \text{ sağlanmalı dır.}$$

2.1.2. Rotasyon matrisi

Bir baz vektöründen başka bir baz vektörüne geçiş rotasyon matrisi ile olur. Rotasyon matrisi bir vektör etrafında bir açı kadar dönmeyi ifade eder.



Şekil 2.2 : Aynı orjine sahip iki farklı eksen takımı.

$$\overrightarrow{z_2} = a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{z_1} \tag{2.2}$$

$$a = x_1 . z_2 \tag{2.3}$$

$$b = y_1 . z_2 \tag{2.4}$$

$$c = z_1 . z_2 \tag{2.5}$$

Denklem (2.3), (2.4) ve (2.5) kullanılarak;

$$\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{z_1} \tag{2.6}$$

$$\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{z_1} \tag{2.7}$$

$$\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{z_1} \tag{2.8}$$

Elde edilir. (2.6), (2.7) ve (2.8) denklemleri matris haline getirilirse

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2} & \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{x_2} & \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{y_2} & \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{y_2} & \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{z_2} & \overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{z_2} & \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{z_2} \end{bmatrix}}_{\text{Rotasyon matrisi}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

2.1.2.1. Özel durumlar

x_1 etrafında θ açısı kadar dönme durumu

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\theta & -Sin\theta \\ 0 & Sin\theta & Cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

y_1 etrafında θ açısı kadar dönme:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta & 0 & -Sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ Sin\theta & 0 & Cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

z_1 etrafında θ açısı kadar dönme:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

x_2, y_2, z_2 vektör setinden x_1, y_1, z_1 vektör setinin elde edilmesi yani ters rotasyon işlemi yapılmak istenirse;

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{z_2} \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{y_1}\,\overrightarrow{z_2} \tag{2.10}$$

$$\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{z_2} \tag{2.11}$$

Elde edilir. (2.9), (2.10) ve (2.11) denklemleri matris haline getirilirse

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{y_1} & \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{y_1} & \overrightarrow{z_1}\,\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{z_1} & \overrightarrow{y_2}\,\overrightarrow{z_1} & \overrightarrow{z_2}\,\overrightarrow{z_1} \end{bmatrix}}_{\text{Ters Rotasyon Matrisi}} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Rotasyon matrisinin tersinin aslında rotasyon matrisinin transpozu olduğu görülebilir.

$$\boldsymbol{R^{-1} = R^T} \tag{2.12}$$

2.1.2.2. Rotasyon matrisinin özellikleri

$\boldsymbol{R} \in R^{3x3}$ bir rotasyon matrisi ve kolonları $r_1, r_2, r_3 \in R^3$ olsun.

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Bu özellik şu şekilde yazılabilir;

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = I$$

Buradan anlaşılır ki;

$$det\boldsymbol{R} = \pm 1 \tag{2.13}$$

$\boldsymbol{R}$'nin işaretini belirlemek için lineer cebir hatırlanırsa;

$$det\boldsymbol{R} = r_1^T(r_2 x r_3)$$

Koordinat eksen takımı *sağ-el* kuralına göre yazıldığından $(r_2 x r_3) = r_1$ olur.

$$r_1^T r_1 = 1$$

Daha genel olarak, R^{nxn} de rotasyon matris uzayını;

$$\boldsymbol{SO}(n) = \{\boldsymbol{R} \in R^{nxn} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = I\,, det\boldsymbol{R} = +1\} \tag{2.14}$$

Şeklinde tanımlayabiliriz.

Rotasyon matrisleri çarpılarak yeni rotasyon matrisine dönüştürülebilir. Örneğin, bir A eksen takımından, B eksen takımına rotasyonu gösteren rotasyon matris $\boldsymbol{R}_{ab}$ olsun, B eksen takımından C eksen takımına ilişkin rotasyonu gösteren matris de $\boldsymbol{R}_{bc}$ olsun. Bu iki matris çarpılarak A eksen takımından, C eksen takımına olan rotasyon bulunabilir. Bu özelliğe rotasyon matrisinin *kompozisyon kuralı* denir.

$$\boldsymbol{R}_{ab} x \boldsymbol{R}_{bc} = \boldsymbol{R}_{ac} \tag{2.15}$$

2.1.3. Skew-simetrik matrisler

Transpozu negatifine eşit olan matrise skew-simetrik matris denir. Genel bir ifadeyle nxn skew-simetrik bir matrisin uzayı;

$$\boldsymbol{so}(n) = \{S \in R^{nxn} : S^T = -S\}$$

$\overrightarrow{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olsun;

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ve } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}x\vec{b} = (\vec{a}x)\vec{b}$$

$$\vec{a}x = \hat{a} \tag{2.16}$$

$\hat{a}$ skew-simetrik bir matristir.

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}b = \vec{a}x\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

eşitliğin sağlandığı yukarıdan görülebilir.

2.1.4. R^3 'de rijid hareket

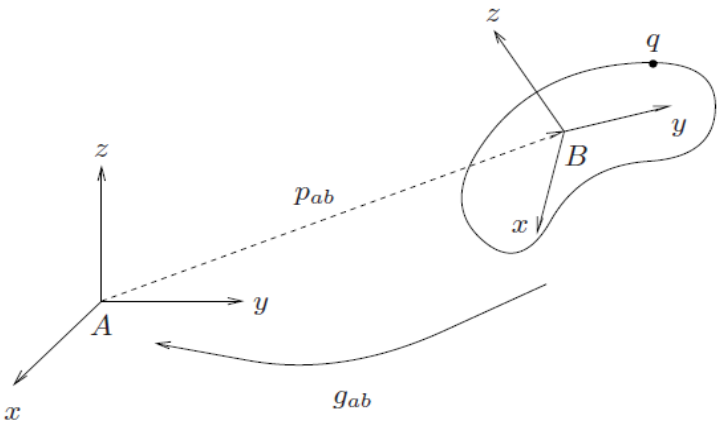
Katı bir cisim hem dönüyor hem de öteleniyor olsun. Şekil 2.3' de olduğu gibi duran bir A vektör seti ve hareketli bir B vektör seti var. Bu durumda zamanla değişen bir p_{ab} var. Katı cismin içerisinde tanımlanan bir q noktası olsun.

$\vec{q}_b$: B vektör setinin 0 noktasından q noktasına olan uzaklığını gösteren vektör.

$\vec{q}_a$: A vektör setinin 0 noktasından q noktasına olan uzaklığını gösteren vektör.

$\vec{p}_{ab}$: A vektör setinin 0 noktasından B vektör setinin 0 noktasına olan uzaklığı gösteren vektör.

$\boldsymbol{R}_{ab}$: B vektör setinin A vektör setine rotasyonunu veren rotasyon matrisi.

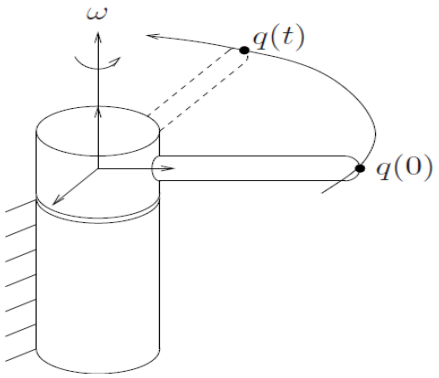


Şekil 2.3 : Sabit A vektör setine göre hareketli B vektör setinin tanımlanması [13].

$$\vec{q}_a = \vec{p}_{ab} + \boldsymbol{R}_{ab}\vec{q}_b \tag{2.17}$$

2.1.5. Rotasyon için üstel koordinatlar

Robotikte karşılaşılan yaygın hareketlerden biri bir eksen etrafında cismin dönmesidir (Şekil 2.4). Burada $w \in R^3$ ve dönme yönünü gösteren birim vektör olsun. $\theta \in R$ ve radyan cinsinden dönme açısını göstersin. Rotasyon matrisi θ *ve* w cinsinden yazılmak istenir. Dönen cismin üzerinde bir q noktası olsun. Cisim w ekseni etrafında sabit birim hızda döndürülürse q noktasının hızı $\dot{q}$ olacaktır ve şu şekilde yazılabilir.



Şekil 2.4 : Katı cismin bir eksen etrafında dönmesi [13].

$$\dot{q}(t) = wxq(t) = \hat{w}q(t) \tag{2.18}$$

Lineer zamanla değişmeyen diferansiyel denklemlerden hatırlanmalıdır ki,

$$q(t) = e^{\hat{w}t}q(0) \tag{2.19}$$

$q(0),\ t = 0$ anında ki noktanın konumudur, $e^{\hat{w}t}$ ise üstel bir matristir.

$$e^{\hat{w}t} = I + \hat{w}t + \frac{(\hat{w}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{w}t)^3}{3!} + \cdots$$

Eğer cisim w ekseni etrafında θ birim açısıyla döndürülürse rotasyon matrisi,

$$\boldsymbol{R}(w, \theta) = e^{\hat{w}\theta}$$

fonksiyonu ile verilir.

Kuram:

$$\hat{a}^2 = aa^T - \|a\|^2 I \tag{2.20}$$

$$\hat{a}^3 = -\|a\|^2 \hat{a} \tag{2.21}$$

(2.20) ve (2.21) özellikleri kullanılarak,

$a = w\theta$ ve $\|w\| = 1$ için denklemler şu hale gelir;

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \hat{w}\theta + \frac{\theta^2}{2!}\hat{w}^2 + \frac{\theta^3}{3!}\hat{w}^3 + \cdots$$

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)\hat{w} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)\hat{w}^2$$

$$Sin\theta = \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right), \quad 1 - Cos\theta = \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)$$

Sonuç olarak,

$$e^{\hat{w}\theta} = I + \hat{w}Sin\theta + \hat{w}^2(1 - Cos\theta) \tag{2.22}$$

Haline gelir ki bu formüle *Rodriguez* formülü adı verilir ve üstel denklemi hesaplamada etkili bir formüldür. Bu denkleme göre dönmeyi belirten bir açı (θ) ve bir dönme ekseni (w) verilirse bunlar kullanılarak bir rotasyon matrisi elde edilebilir. Bu formül nümerik olarak oldukça doğru çözümler veriyor.

$$\left(e^{\hat{w}\theta}\right)^{-1} = e^{-\hat{w}\theta} = e^{\hat{w}^T\theta} = \left(e^{\hat{w}\theta}\right)^T$$

Bu eşitliklerden de görülüyor ki (2.12) eşitliği ile verilen rotasyon matrisinin tersi o matrisin transpozuna eşittir ifadesi doğrudur.

Rodriguez formülünde $\theta = 0$ için, yani dönme yokken rotasyon matrisi;

$$e^{\widehat{w}\theta} = \mathrm{I}$$

birim matris olur.

Rodriguez formülünde $\|w\| \neq 1$ olursa denklem şu hale gelir.

$$e^{\widehat{w}\theta} = \mathrm{I} + \frac{\widehat{w}}{\|w\|} Sin(\|w\|\theta) + \frac{\widehat{w}^2}{\|w\|^2}(1 - Cos(\|w\|\theta))$$

2.1.6. Homojen gösterim

Hem dönmeyi hem de ötelenmeyi aynı anda gösteren bir gösterime ihtiyaç duyulur. Burada q noktası homojen koordinatlarla tanımlanır.

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu yeni tanıma göre birkaç kural ortaya çıkar.

1- İki vektörün toplamı veya farkı bir vektör
2- Bir vektör ve bir noktanın toplamı bir nokta
3- İki noktanın farkı bir vektör
4- İki noktanın toplamı anlamsız

Denklem (2.17)' den hatırlanacağı gibi

$$\overrightarrow{q_a} = \overrightarrow{p_{ab}} + \boldsymbol{R}_{ab}\overrightarrow{q_b}$$

eşitliği verilmişti. Burada yeni tanıma göre $\overrightarrow{q_a}$ vektörü matris formuna göre düzenlenirse;

$$\overrightarrow{q_a} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{q_a} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{ab} & \vec{P}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{q_b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu yeni homojen gösterimde homojen transformasyon matrisi dönme ve ötelemeyi içeren matristir.

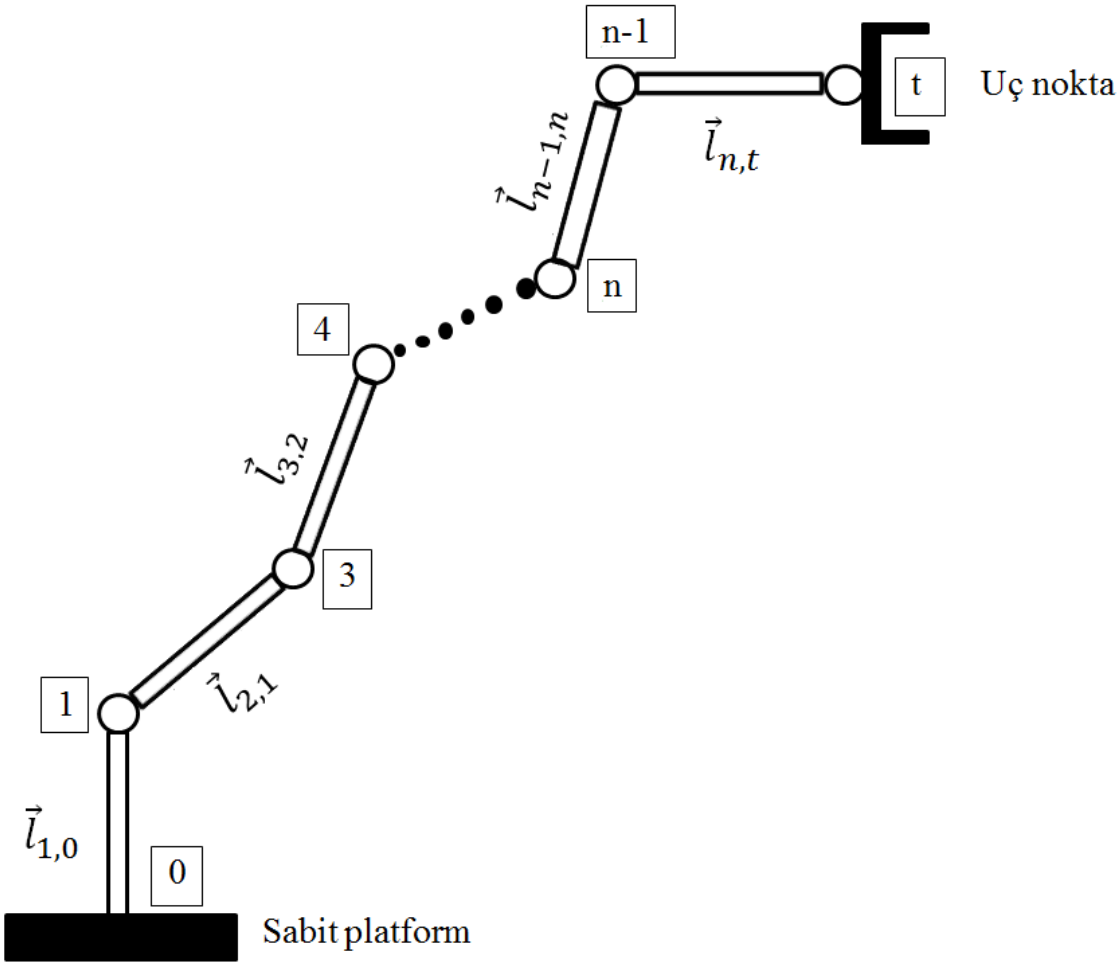
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{ab} & \vec{P}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Kinematik Modelleme

Bir robot manipülatörünün kinematiği, manipülatörü oluşturan eklemlerin hareketleri arasındaki ilişki olarak tanımlanır.

2.2.1. Seri manipülatör kinematik modeli

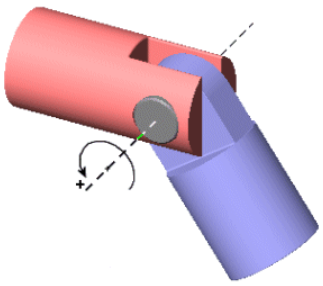
Seri manipülatörler, uç noktası bağımsız olup kapalı bir zincir oluşturmayan açık topolojik yapıya sahip mekanizmalardır. Örnek, Şekil 2.5



Şekil 2.5: n adet linke sahip seri manipülatör mekanizması.

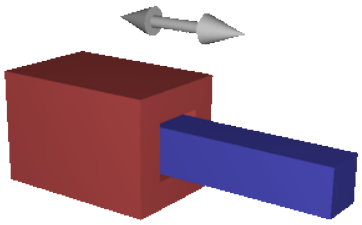
2.2.1.1. Eklem tipleri

1- Dönel (*Revolute*) Eklem: Tek yönde dönebilen eklem tipidir. Örnek olarak kapı menteşesi verilebilir. Dolayısıyla tek serbestlik derecesine sahiptir. (Şekil 2.6) (DOF=1)



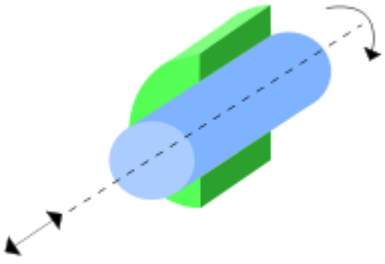
Şekil 2.6: Dönel eklemin yapısı [26].

2- Prizmatik Eklem: Tek yönde öteleme yapabilen eklem tipidir. Tek serbestlik derecesine sahiptir. (Şekil 2.7) (DOF=1)



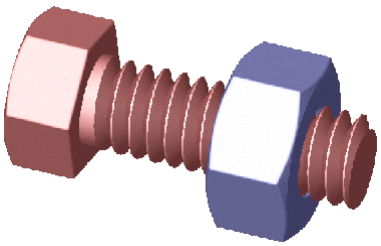
Şekil 2.7: Prizmatik eklemin yapısı [27].

3- Silindirik Eklem: Tek yönde dönebilen, tek yönde ötelenebilen eklem tipidir. İki serbestlik derecesine sahiptir. (Şekil 2.8) (DOF=2)



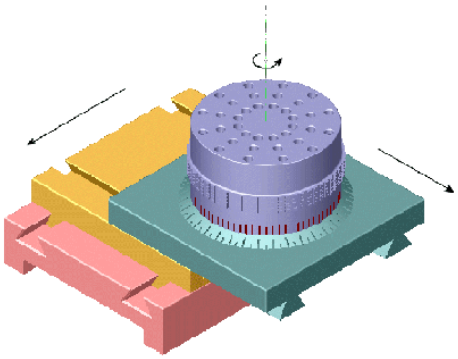
Şekil 2.8: Silindirik eklemin yapısı [28].

4- Vida Eklem: Tek yönde dönebilen ve dönerken aynı anda ötelenen eklem tipidir. Birbirine bağımlı iki hareket var. (Şekil 2.9) (DOF=1)



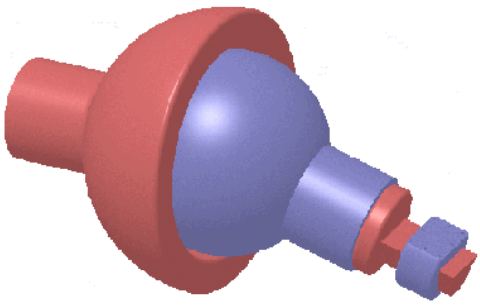
Şekil 2.9: Silindirik eklemin yapısı [29].

5- Planar Eklem: İki yönde ötelenebilen, tek yönde dönebilen eklem tipidir. (Şekil 2.10) (DOF=3)



Şekil 2.10: Planar eklemin yapısı [30].

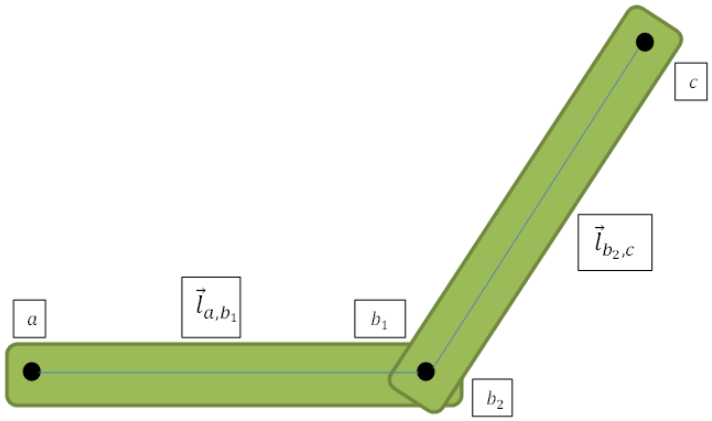
6- Küresel Eklem: Üç yönde dönme yapabilen eklem tipidir. (Şekil 2.11) (DOF=3)



Şekil 2.11: Küresel eklemin yapısı [31].

2.2.1.2. Rijid cisim kinematiği

Birbirine tek bir noktadan dönel eklem ile bağlı Şekil 2.12' deki gibi iki rijid cisim için,



Şekil 2.12: Seri bağlı iki linkli bir yapı.

a noktasının lineer ve açısal hızları

$$\vec{\vartheta}_a = 0 \tag{2.23}$$

$$\vec{\omega}_a = \dot{\theta}\vec{h} \tag{2.24}$$

b1 noktasının lineer ve açısal hızları

$$\vec{\vartheta}_{b1} = \vec{\vartheta}_a + \vec{\omega}_a x \vec{l}_{ab1} = \vec{\vartheta}_a - (\vec{l}_{ab1} x)\vec{\omega}_a \tag{2.25}$$

$$\vec{\omega}_{b1} = \vec{\omega}_a = \dot{\theta}\vec{h} \tag{2.26}$$

b2 noktasının lineer ve açısal hızları;

$$\vec{\vartheta}_{b2} = \vec{\vartheta}_{b1} = \vec{\vartheta}_b \tag{2.27}$$

$$\vec{\omega}_{b2} = \vec{\omega}_{b1} + \dot{\theta}\vec{h} \tag{2.28}$$

c noktasının lineer ve açısal hızları;

$$\vec{\vartheta}_c = \vec{\vartheta}_b + \vec{\omega}_{b2} x \vec{l}_{bc} \tag{2.29}$$

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_{b2} \tag{2.30}$$

Dönel eklem için bu denklemler matris haline getirilirse;

$$\begin{bmatrix}\vec{\omega}_b\\ \vec{\vartheta}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{I}_3 & 0_3\\ -\hat{l}_{ab} & \mathrm{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\omega}_a\\ \vec{\vartheta}_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{h}\\ 0\end{bmatrix}\dot{\theta}_b$$

genel olarak matris formu oluşturulmuş olur.

$$\vec{\vec{V}}_b = \varphi_{b,a}\vec{\vec{V}}_a + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_b\dot{\theta}_b$$

$$\vec{\vec{V}}_b = \begin{bmatrix}\vec{\omega}_b\\ \vec{\vartheta}_b\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\varphi_{b,a} = \begin{bmatrix}\mathrm{I}_3 & 0_3\\ -\hat{l}_{ab} & \mathrm{I}_3\end{bmatrix} \in R^{6x6}$$

$$\vec{\vec{V}}_a = \begin{bmatrix}\vec{\omega}_a\\ \vec{\vartheta}_a\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\vec{\vec{\mathrm{H}}}_b = \begin{bmatrix}\vec{h}\\ 0\end{bmatrix} \in R^6$$

$\vec{\vec{V}}_a, \vec{\vec{V}}_b$ uzaysal hız vektörleri

$\vec{\vec{\mathrm{H}}}_b$ dönme eksen matrisi

$\varphi_{b,a}$ linkler arası propagasyon matrisi

Örnek olarak 4-linkli bir manipülatör için yukarıdaki denklem kullanılırsa;

$$\vec{\vec{V}}_0 = 0 \tag{2.31}$$

$$\vec{\vec{V}}_1 = \varphi_{1,0}\vec{\vec{V}}_0 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\dot{\theta}_1 = \vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\dot{\theta}_1 \tag{2.32}$$

$$\vec{\vec{V}}_2 = \varphi_{2,1}\vec{\vec{V}}_1 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_2\dot{\theta}_2 = \varphi_{2,1}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\dot{\theta}_1 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_2\dot{\theta}_2 \tag{2.33}$$

$$\vec{\vec{V}}_3 = \varphi_{3,2}\vec{\vec{V}}_2 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_3\dot{\theta}_3 = \varphi_{3,2}\varphi_{2,1}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\dot{\theta}_1 + \varphi_{3,2}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_2\dot{\theta}_2 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_3\dot{\theta}_3 \tag{2.34}$$

$$\vec{\vec{V}}_4 = \varphi_{4,3}\vec{\vec{V}}_3 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_4\dot{\theta}_4 = \varphi_{4,3}\varphi_{3,2}\varphi_{2,1}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\dot{\theta}_1 + \varphi_{4,3}\varphi_{3,2}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_2\dot{\theta}_2 + \varphi_{4,3}\vec{\vec{\mathrm{H}}}_3\dot{\theta}_3 + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_4\dot{\theta}_4 \tag{2.35}$$

(2.31), (2.32), (2.33), (2.34) ve (2.35) denklemleri matris haline getirilirse;

$$\begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_1 \\ \vec{\vec{V}}_2 \\ \vec{\vec{V}}_3 \\ \vec{\vec{V}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{H}}_1 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \varphi_{2,1}\vec{\vec{H}}_1 & \vec{\vec{H}}_2 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \varphi_{3,1}\vec{\vec{H}}_1 & \varphi_{3,2}\vec{\vec{H}}_2 & \vec{\vec{H}}_3 & \vec{\vec{0}} \\ \varphi_{4,1}\vec{\vec{H}}_1 & \varphi_{4,2}\vec{\vec{H}}_2 & \varphi_{4,3}\vec{\vec{H}}_3 & \vec{\vec{H}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

Burada dönme eksen matrisi ve link propagasyon matrisi ayrı ayrı yazalırsa;

$$\begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_1 \\ \vec{\vec{V}}_2 \\ \vec{\vec{V}}_3 \\ \vec{\vec{V}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{2,1} & \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{3,1} & \emptyset_{3,2} & \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{4,1} & \emptyset_{4,2} & \emptyset_{4,3} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\vec{H}}_1 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_2 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_3 & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_1 \\ \vec{\vec{V}}_2 \\ \vec{\vec{V}}_3 \\ \vec{\vec{V}}_4 \end{bmatrix} \in R^{24}$$

$$\emptyset = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{2,1} & \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{3,1} & \emptyset_{3,2} & \mathrm{I} & \vec{\vec{0}} \\ \emptyset_{4,1} & \emptyset_{4,2} & \emptyset_{4,3} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \in R^{24x24}$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{H}}_1 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_2 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_3 & \vec{\vec{0}} \\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_4 \end{bmatrix} \in R^{24x4}$$

$$\underline{\dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \in R^4$$

Tüm bu matris çarpımları kompakt bir denklem olarak yazılacak olursa,

$$\underline{V} = \emptyset \, \mathrm{H} \, \underline{\dot{\Theta}} \tag{2.36}$$

$\underline{V} \in R^{6n}$ → manipülatör uzaysal hız vektörü

$\emptyset \in R^{6nx6n}$ → manipülatör propagasyon matrisi

H $\in R^{6nxn}$ → manipülatör dönme eksen matrisi

$\underline{\dot{\Theta}} \in R^{n}$ → manipülatör eklem hız vektörü

$\underline{V}$ vektörü her eklemin uzaysal hız bilgilerini içerir. Robotikte uç noktanın (*tip point*) pozisyonu ile ilgilenildiğinden, sadece uç noktanın hızını bilmek diğer bilgilerle uğraşmamak yeterlidir. Bu yüzden, aşağıdaki gibi bir $\emptyset_t$ matrisi tanımlamaya ihtiyaç duyulur.

$$\emptyset_t = [0_{6x6} \quad 0_{6x6} \quad \dots \quad 0_{6x6} \quad \varphi_{t,n}]$$

$$\vec{\vec{V}}_t = \varphi_{t,n}\vec{\vec{V}}_n \tag{2.37}$$

$$\vec{\vec{V}}_t = [0_{6x6} \quad 0_{6x6} \quad \dots \quad 0_{6x6} \quad \varphi_{t,n}] \begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_1 \\ \vec{\vec{V}}_2 \\ \dots \\ \vec{\vec{V}}_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{\vec{V}}_t = \emptyset_t \emptyset \text{ H } \underline{\dot{\Theta}} \tag{2.38}$$

2.2.1.3. İleri kinematik

İleri kinematik de eklemlerin açıları ($\underline{\dot{\Theta}}$) biliniyor. Jakobiyen matrisi hesaplanarak bilinen $\underline{\dot{\Theta}}$ matrisi ile çarpılırsa uç noktanın olması gereken hız bilgisi ($\vec{\vec{V}}_t$) elde edilmiş olur.

Jakobiyen matrisi şu şekilde tanımlanır;

$$\mathcal{J} = \emptyset_t \emptyset \text{ H} \tag{2.39}$$

$$\vec{\vec{V}}_t = \mathcal{J}\underline{\dot{\Theta}} \tag{2.40}$$

2.2.1.4. Ters kinematik

Robotikte en çok karşılaşılan problem, uç noktanın istenilen yörüngeyi takip etmesi adına hesaplanan uç noktanın hızını ($\vec{V}_t$) elde edebilmek için eklemler hangi hızlarda hareket etmelidir. Bu yöntem ileri kinematiğe göre daha kullanışlıdır. Çünkü robotikte uç noktanın istenilen amaca yönelik hareket etmesi en çok istenilen durumdur. İleri kinematikte elde edilen (2.40) denklemine göre bilinenler bir tarafa bilinmeyenler diğer tarafa toplanırsa;

$$\underline{\dot{\theta}} = \mathcal{J}^{-1}\vec{V}_t \tag{2.41}$$

elde edilmiş olur. Bu durumda Jakobiyen matrisinin tersi alınması gerektiğinden, Jakobiyenin tersi *pseudo inverse* yöntemiyle alınır.

$$\mathcal{J} \in R^{nxm}$$

1- Eğer $n > m$ ise $\quad \mathcal{J}^{\#} = (\mathcal{J}^T\mathcal{J})^{-1}\mathcal{J}^T$

2- Eğer $m > n$ ise $\quad \mathcal{J}^{\#} = \mathcal{J}^T(\mathcal{J}\mathcal{J}^T)^{-1}$

Birinci durumda $\mathcal{J}$ ile sağdan çarpım yapılırsa $\mathcal{J}^{\#}\mathcal{J} = (\mathcal{J}^T\mathcal{J})^{-1}(\mathcal{J}^T\mathcal{J}) = I$

İkinci durumda $\mathcal{J}$ ile soldan çarpım yapılırsa $\mathcal{J}\mathcal{J}^{\#} = (\mathcal{J}\mathcal{J}^T)(\mathcal{J}\mathcal{J}^T)^{-1} = I$

$$\underline{\dot{\theta}} = \mathcal{J}^{\#}\vec{V}_t \tag{2.42}$$

2.2.2. Paralel manipülatörlerin kinematik modeli

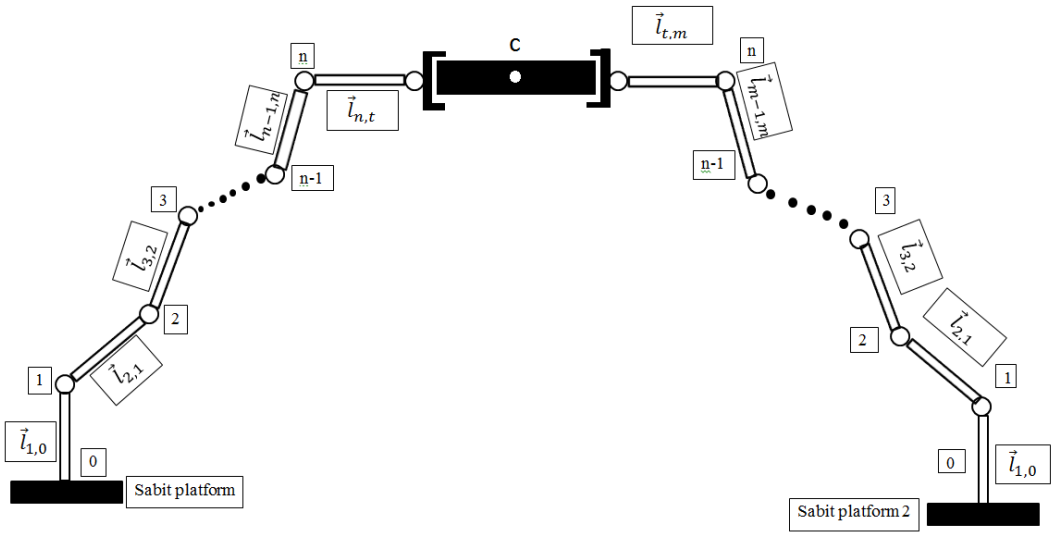
İki veya daha fazla seri manipülatörün ortak bir yükü tutması sonucu kapalı bir zincir oluşturan mekanizmalar paralel manipülatörlerdir.(Şekil 2.13)

$$\vec{V}_c = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\omega_c} \\ \overrightarrow{\vartheta_c} \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_t^i = \mathcal{J}^i\theta^i \tag{2.43}$$

$$\vec{V}_t^i = \varphi_{tc}^i\vec{V}_c \tag{2.44}$$

$$\vec{V}_t^j = \varphi_{tc}^j\vec{V}_c \tag{2.45}$$



Şekil 2.13: İki seri manipülatörden oluşan paralel manipülatör yapısı.

$$\varphi_{tc}^{i} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_3 & 0_3 \\ -\hat{l}_{ci} & \mathrm{I}_3 \end{bmatrix} \qquad \varphi_{tc}^{j} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_3 & 0_3 \\ -\hat{l}_{cj} & \mathrm{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_t^{\,i} \\ \vec{\vec{V}}_t^{\,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{tc}^{i} \\ \varphi_{tc}^{j} \end{bmatrix} \vec{\vec{V}}_c$$

$$\underline{\vec{\vec{V}}_t} = \underline{\varphi}_{tc} \vec{\vec{V}}_c \tag{2.46}$$

İkiden fazla birlikte çalışan manipülatörler için denklemler genelleştirilirse;

$$\begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_t^{\,1} \\ \vec{\vec{V}}_t^{\,2} \\ \vdots \\ \vec{\vec{V}}_t^{\,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{J}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\theta}}^1 \\ \underline{\dot{\theta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\dot{\theta}}^p \end{bmatrix}$$

(2.43) ve (2.46) denklemleri kullanılarak ,

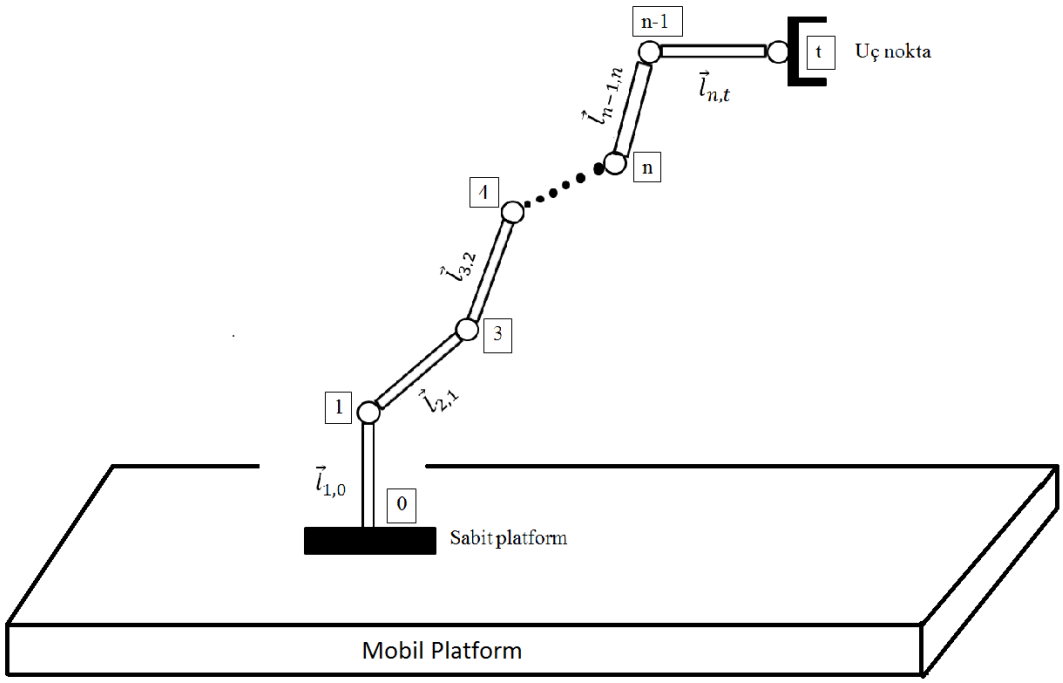
$$\underline{\varphi}_{tc} \vec{\vec{V}}_c = \mathcal{J} \underline{\dot{\theta}}$$

Ters kinematik için $\underline{\dot{\theta}}$ yalnız bırakılırsa;

$$\underline{\dot{\theta}} = (\mathcal{J}^{\#} \underline{\varphi}_{tc}) \vec{\vec{V}}_c \tag{2.47}$$

2.2.3. Mobil platform üzerinde seri manipülatör kinematik modeli

Şekil 2.14'de mobil platform üzerinde seri manipülatör yapısı temsil edilmektedir.



Şekil 2.14: Mobil platform üzerinde seri manipülatör yapısı.

Sabit platformlu topolojilerde ilk eklemin uzaysal hız vektörü $\vec{\vec{V}}_0 = 0$ dır.

Mobil platformda,

$$\vec{\vec{V}}_0 = \vec{\vec{V}}_b \tag{2.48}$$

$$\vec{\vec{V}}_1 = \varphi_{1,0}\vec{\vec{V}}_b + \vec{\vec{H}}_1\dot{\theta}_1 \tag{2.49}$$

$$\vec{\vec{V}}_2 = \varphi_{2,1}\vec{\vec{V}}_1 + \vec{\vec{H}}_2\dot{\theta}_2 = \varphi_{2,0}\vec{\vec{V}}_b + \varphi_{2,1}\vec{\vec{H}}_1\dot{\theta}_1 + \vec{\vec{H}}_2\dot{\theta}_2 \tag{2.50}$$

$$\vec{\vec{V}}_3 = \varphi_{3,2}\vec{\vec{V}}_2 + \vec{\vec{H}}_3\dot{\theta}_3 = \varphi_{3,0}\vec{\vec{V}}_b + \varphi_{3,1}\vec{\vec{H}}_1\dot{\theta}_1 + \varphi_{3,2}\vec{\vec{H}}_2\dot{\theta}_2 + \vec{\vec{H}}_3\dot{\theta}_3 \tag{2.51}$$

$$\vdots$$

$$\vec{\vec{V}}_t = \varphi_{t,n}\vec{\vec{V}}_n + \vec{\vec{H}}_n\dot{\theta}_n = \cdots \tag{2.52}$$

$$\emptyset_b = \begin{bmatrix} \varphi_{1,0} \\ 0_{6x6} \\ \vdots \\ 0_{6x6} \end{bmatrix} \in R^{6nx6}$$

$$\vec{\vec{V}}_t = \emptyset_t \emptyset (\mathrm{H}\dot{\underline{\theta}} + \emptyset_b \vec{\vec{V}}_b) \tag{2.53}$$

$$\mathcal{J} = \emptyset_t \emptyset \mathrm{H} \tag{2.54}$$

$$\emptyset_{tb} = \emptyset_t \emptyset \emptyset_b \tag{2.55}$$

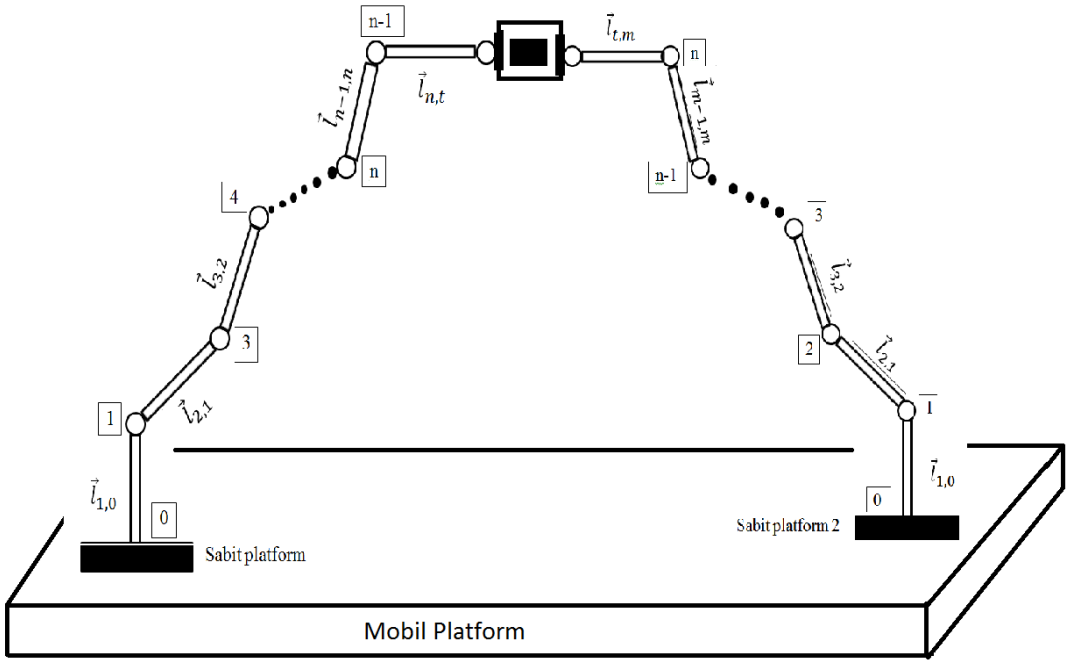
$$\vec{\vec{V}}_t = \mathcal{J}\dot{\underline{\theta}} + \emptyset_{tb} \vec{\vec{V}}_b \tag{2.56}$$

Ters kinematik denklemi elde etmek için $\dot{\underline{\theta}}$ yalnız bırakılırsa,

$$\dot{\underline{\theta}} = \mathcal{J}^{\#}(\vec{\vec{V}}_t - \emptyset_{tb} \vec{\vec{V}}_b) \tag{2.57}$$

2.2.4. Mobil platform üzerinde paralel manipülatör kinematik modeli

Şekil 2.15'de mobil platform üzerinde seri manipülatör yapısı temsil edilmektedir.



Şekil 2.15: Mobil platform üzerinde paralel manipülatör yapısı.

Hareketli platform üzerinde seri manipülatörün kinematik denklemi (2.58) denklemi ile elde edilmişti. Şimdi birden fazla manipülatör için bu denklemler temel oluşturacaktır.

$$\vec{\vec{V}}_t^1 = \mathcal{J}^1 \underline{\dot{\Theta}}^1 + \emptyset_{tb}^1 \vec{\vec{V}}_b \tag{2.58}$$

$$\vec{\vec{V}}_t^2 = \mathcal{J}^2 \underline{\dot{\Theta}}^2 + \emptyset_{tb}^2 \vec{\vec{V}}_b \tag{2.59}$$

$$\vdots$$

$$\vec{\vec{V}}_t^p = \mathcal{J}^p \underline{\dot{\Theta}}^p + \emptyset_{tb}^p \vec{\vec{V}}_b \tag{2.60}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_t^1 \\ \vec{\vec{V}}_t^2 \\ \vdots \\ \vec{\vec{V}}_t^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{J}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\theta}}^1 \\ \underline{\dot{\theta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\dot{\theta}}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset_{tb}^1 \\ \emptyset_{tb}^2 \\ \vdots \\ \emptyset_{tb}^3 \end{bmatrix} \vec{\vec{V}}_b$$

$$\underline{\dot{\Theta}} = \mathcal{J}^{\#} (\underline{\varphi}_{tc} \vec{\vec{V}}_c - \emptyset_{tb} \vec{\vec{V}}_b) \tag{2.61}$$

Dinamik modellemede daha kullanışlı olacağından dolayı yeni bir gösterime ihtiyaç duyulur.

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_b \\ \underline{V}^1 \\ \underline{V}^1 \\ \vdots \\ \underline{V}^p \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_b \\ \underline{\dot{\Theta}}^1 \\ \underline{\dot{\Theta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\dot{\Theta}}^p \end{bmatrix}$$

$$\emptyset = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \emptyset^1 \emptyset_b^1 & \emptyset^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \emptyset^2 \emptyset_b^2 & 0 & \emptyset^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset^p \emptyset_b^p & 0 & 0 & \cdots & \emptyset^p \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{H}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{H}^p \end{bmatrix}$$

$$\emptyset_t = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset_t^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_t^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \emptyset_t^p \end{bmatrix}$$

Bu yeni gösterim ile Jakobiyen matrisi yeniden düzenlenirse,

$$\mathcal{J} = \emptyset_t \emptyset \mathrm{H} = \begin{bmatrix} \emptyset_{tb}^1 & \mathcal{J}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \emptyset_{tb}^2 & 0 & \mathcal{J}^2 & \ldots & 0 \\ \emptyset_{tb}^3 & 0 & 0 & \mathcal{J}^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{tb}^p & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{J}^p \end{bmatrix}$$

$$V_t = \mathcal{J}\dot{\underline{\theta}} \tag{2.62}$$

Ters kinematik elde edilmek istenirse,

$$\dot{\underline{\theta}} = \mathcal{J}^{\#} V_t \tag{2.63}$$

2.3. Dinamik Modelleme

Dinamik modellemede manipülatörün uzaysal kuvvetleri kullanılacağından uzaysal hızların türevleri olan uzaysal ivmelerden faydalanılır. Kinematik modelde hesaplanan çizgisel ve açısal hız bilgileri yerine dinamik modellemede kuvvet ve kuvvetin döndürme etkisi olan tork hesaplanacaktır.

2.3.1. Seri manipülatör dinamik modeli

Bu bölümde çizgisel ve açısal ivme gerekli olduğundan dolayı (2.10) ve (2.11) denklemlerinin türevleri alınmalıdır.

$$\dot{\vec{\omega}}_k = \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k + \vec{\omega}_k x \vec{h}_k \dot{\theta}_k$$

$$\dot{\vec{\omega}}_k = \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k - \vec{\omega}_k x (\vec{\omega}_k - \vec{\omega}_{k-1})$$

$$\dot{\vec{\omega}}_k = \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{h}_k \ddot{\theta}_k + \vec{\omega}_{k-1} x \vec{\omega}_k \tag{2.64}$$

$$\dot{\vec{\vartheta}}_k = \dot{\vec{\vartheta}}_{k-1} + \dot{\vec{\omega}}_{k-1} x \vec{l}_{k-1,k} + \vec{\omega}_{k-1} x (\vec{\omega}_{k-1} x \vec{l}_{k-1,k})$$

$$\dot{\vec{\vartheta}}_k = \dot{\vec{\vartheta}}_{k-1} - \vec{l}_{k-1,k} x \dot{\vec{\omega}}_{k-1} + \vec{\omega}_{k-1} x (\vec{\omega}_{k-1} x \vec{l}_{k-1,k}) \tag{2.65}$$

Denklem (4.1) ve (4.2) matris haline getirilirse,

$$\begin{bmatrix}\dot{\vec{\omega}}_k \\ \dot{\vec{\vartheta}}_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{I}_3 & 0_3 \\ -l_{k-1,k} & \mathrm{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\vec{\omega}}_{k-1} \\ \dot{\vec{\vartheta}}_{k-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{h}_k \\ 0\end{bmatrix}\ddot{\theta}_k + \begin{bmatrix}\vec{\omega}_{k-1}x\vec{\omega}_k \\ \vec{\omega}_{k-1}x(\vec{\omega}_{k-1}x\vec{l}_{k-1,k})\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_k = \emptyset_{k-1,k}\dot{\vec{\vec{V}}}_{k-1} + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_k\ddot{\theta}_k + \vec{\vec{a}}_k \tag{2.66}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_k = \begin{bmatrix}\dot{\vec{\omega}}_k \\ \dot{\vec{\vartheta}}_k\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\emptyset_{k-1,k} = \begin{bmatrix}\mathrm{I}_3 & 0_3 \\ -l_{k-1,k} & \mathrm{I}_3\end{bmatrix} \in R^{6x6}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_{k-1} = \begin{bmatrix}\dot{\vec{\omega}}_{k-1} \\ \dot{\vec{\vartheta}}_{k-1}\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\vec{\vec{\mathrm{H}}}_k = \begin{bmatrix}\vec{h}_k \\ 0\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\ddot{\theta}_k = \begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6\end{bmatrix} \in R^6$$

$$\vec{\vec{a}}_k = \begin{bmatrix}\vec{\omega}_{k-1}x\vec{\omega}_k \\ \vec{\omega}_{k-1}x(\vec{\omega}_{k-1}x\vec{l}_{k-1,k})\end{bmatrix} \in R^6$$

2.3.2. Mobil platform üzerinde seri manipülatör dinamik modeli

Sabit platformda taban hareketsiz olduğundan bu linke ait uzaysal hızlar sıfırdı. Bu bölümde taban da hareketli olduğundan $\dot{\vec{\vec{V}}}_b$ gibi uzaysal bir hız değerine sahiptir. Örnek olarak 4 adet linke sahip seri bir manipülatör için,

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_0 = \dot{\vec{\vec{V}}}_b \tag{2.67}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_1 = \emptyset_{1,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \vec{\vec{\mathrm{H}}}_1\ddot{\theta}_1 + \vec{\vec{a}}_1 \tag{2.68}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_2 = \emptyset_{2,1}\dot{\vec{\vec{V}}}_1 + \vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \vec{\vec{a}}_2 = \emptyset_{2,1}\left(\emptyset_{1,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \vec{\vec{a}}_1\right) + \vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \vec{\vec{a}}_2$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_2 = \emptyset_{2,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \emptyset_{2,1}\vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \emptyset_{2,1}\vec{\vec{a}}_1 + \vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \vec{\vec{a}}_2 \tag{2.69}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_3 = \emptyset_{3,2}\dot{\vec{\vec{V}}}_2 + \vec{\vec{H}}_3\ddot{\theta}_3 + \vec{\vec{a}}_3$$

$$= \emptyset_{3,2}\left(\emptyset_{2,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \emptyset_{2,1}\vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \emptyset_{2,1}\vec{\vec{a}}_1 + \vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \vec{\vec{a}}_2\right) + \vec{\vec{H}}_3\ddot{\theta}_3 + \vec{\vec{a}}_3$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_3 = \emptyset_{3,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \emptyset_{3,1}\vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \emptyset_{3,1}\vec{\vec{a}}_1 + \emptyset_{3,2}\vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \emptyset_{3,2}\vec{\vec{a}}_2 + \vec{\vec{H}}_3\ddot{\theta}_3 + \vec{\vec{a}}_3 \tag{2.70}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_4 = \emptyset_{4,3}\dot{\vec{\vec{V}}}_3 + \vec{\vec{H}}_4\ddot{\theta}_4 + \vec{\vec{a}}_4$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_4 = \emptyset_{4,3}\left(\emptyset_{3,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \emptyset_{3,1}\vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \emptyset_{3,1}\vec{\vec{a}}_1 + \emptyset_{3,2}\vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \emptyset_{3,2}\vec{\vec{a}}_2 + \vec{\vec{H}}_3\ddot{\theta}_3 + \vec{\vec{a}}_3\right)$$

$$+\vec{\vec{H}}_4\ddot{\theta}_4 + \vec{\vec{a}}_4$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_4 = \emptyset_{4,0}\dot{\vec{\vec{V}}}_b + \emptyset_{4,1}\vec{\vec{H}}_1\ddot{\theta}_1 + \emptyset_{4,1}\vec{\vec{a}}_1 + \emptyset_{4,2}\vec{\vec{H}}_2\ddot{\theta}_2 + \emptyset_{4,2}\vec{\vec{a}}_2 + \emptyset_{4,3}\vec{\vec{H}}_3\ddot{\theta}_3 + \emptyset_{4,3}\vec{\vec{a}}_3$$

$$+\vec{\vec{H}}_4\ddot{\theta}_4 + \vec{\vec{a}}_4 \tag{2.71}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\vec{\vec{V}}}_1\\ \dot{\vec{\vec{V}}}_2\\ \dot{\vec{\vec{V}}}_3\\ \dot{\vec{\vec{V}}}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}}\\ \emptyset_{2,1} & I & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}}\\ \emptyset_{3,1} & \emptyset_{3,2} & I & \vec{\vec{0}}\\ \emptyset_{4,1} & \emptyset_{4,2} & \emptyset_{4,3} & I\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\vec{\vec{H}}_1 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}}\\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_2 & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}}\\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_3 & \vec{\vec{0}}\\ \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{0}} & \vec{\vec{H}}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\\ \ddot{\theta}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{\vec{a}}_1\\ \vec{\vec{a}}_2\\ \vec{\vec{a}}_3\\ \vec{\vec{a}}_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\emptyset_{1,0}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\dot{\vec{\vec{V}}}_b\right)$$

$$\underline{\dot{V}} = \emptyset(H\underline{\ddot{\theta}} + \underline{a} + \emptyset_b\dot{\vec{\vec{V}}}_b) \tag{2.70}$$

Bu noktadan sonra kinematik analizden farklı olarak her bir linkin tork ve kuvvet propagasyonu ile ilgilenilecektir.

$$\vec{\mathcal{T}}_k = \vec{\mathcal{T}}_{k+1} + \vec{l}_{k,k+1} x \vec{f}_{k+1} + \vec{l}_{k,c} x \dot{\vec{\vartheta}}_k m_k + \frac{d}{dt}(I_k \vec{\omega}_k) \tag{2.71}$$

$$\vec{f}_k = \vec{f}_{k+1} + m_k \frac{d}{dt}(\vec{\vartheta}_k + \vec{\omega}_k x \vec{l}_{k,c}) \tag{2.72}$$

$$\vec{\vec{\mathrm{F}}}_k = \emptyset_{k+1,k} \vec{\vec{\mathrm{F}}}_{k+1} + \mathrm{M}_k \dot{\vec{\vec{V}}}_k + \vec{\vec{b}}_k \tag{2.73}$$

Burada,

$\vec{\vec{\mathrm{F}}}_k$; link uzaysal kuvvetler vektörü, M_k; link kütle matrisi, $\vec{\vec{b}}_k$; link uzaysal kuvvetler artık ifadesidir.

$$\vec{\vec{\mathrm{F}}}_k = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{T}}_k \\ \vec{f}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}_k = \begin{bmatrix} I_k & m_k \hat{l}_{k,c} \\ -m_k \hat{l}_{k,c} & \mathrm{I}_{3x3} m_k \end{bmatrix}$$

$$\vec{\vec{b}}_k = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_k x I_k \vec{\omega}_k \\ m_k \vec{\omega}_k x (\vec{\omega}_k x \vec{l}_{k,c}) \end{bmatrix}$$

(2.73) denklemi kullanılarak

$$\underline{\mathrm{F}} = \emptyset^T (\mathrm{M} \dot{\underline{V}} + \underline{b} + \emptyset_t^T \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t) \tag{2.74}$$

denklemi elde edilir.

(2.70) denklemi (2.73) de yerine yazılırsa;

$$\underline{\mathrm{F}} = \emptyset^T (\mathrm{M}\emptyset\mathrm{H}\ddot{\underline{\theta}} + \mathrm{M}\emptyset\underline{a} + \mathrm{M}\emptyset\emptyset_b \dot{\vec{\vec{V}}}_b + \underline{b} + \emptyset_t^T \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t) \tag{2.75}$$

Aslında fark edilmelidir ki uygulanan torklar, dönme ekseni boyunca link uzaysal hız kuvvetlerinin bir yansımasıdır. Yani matematiksel olarak, bulunan $\underline{\mathrm{F}}$ kuvvetini sol-ön çarpım ile H eksen matrisi ile çarparsak;

$$\underline{\mathcal{T}} = \mathrm{H}^T \underline{\mathrm{F}} \tag{2.76}$$

$$\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{M} \ddot{\underline{\theta}} + \underline{\mathrm{C}} + \mathcal{M}_b \dot{\vec{\vec{V}}}_b + \mathcal{J}^T \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t \tag{2.77}$$

$$\mathcal{M} = \mathrm{H}^T \emptyset^T \mathrm{M} \emptyset \mathrm{H} \tag{2.78}$$

$$\underline{\mathrm{C}} = \mathrm{H}^T \emptyset^T (\mathrm{M} \emptyset \underline{a} + \underline{b}) \tag{2.79}$$

$$\mathcal{M}_b = \mathrm{H}^T \emptyset^T \, \mathrm{M} \emptyset \emptyset_b \tag{2.80}$$

$$\mathcal{J}^T = \mathrm{H}^T \emptyset^T \emptyset_t^T \tag{2.81}$$

$\mathcal{M}$, genelleştirilmiş kütle matrisidir. $\underline{\mathrm{C}}$, coriolis kuvvetlerini içeren sapma ifadesidir. $\mathcal{M}_b$, taban ile herhangi bir link arasındaki etkileşime ilişkin kütle matrisidir.

2.3.3. Mobil platform üzerinde paralel manipülatörlerin dinamik modellenmesi

Tabanın kütle matrisi, link uzaysal kuvvetleri ve link uzaysal kuvvetlerinin artık matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathrm{M}_b = \begin{bmatrix} I_b & m_b \hat{l}_{b,c} \\ -m_b \hat{l}_{b,c} & \mathrm{I}_{3x3} m_b \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{F}}_b = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{T}}_b \\ \vec{f}_b \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_b = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_b x I_b \vec{\omega}_b \\ m_b \vec{\omega}_b x (\vec{\omega}_b x \vec{l}_{b,c}) \end{bmatrix}$$

Eğer platformun kütle merkezi ile tabanın merkezleri çakışıyorsa $\hat{l}_{b,c}$ skew-simetrik matrisi sıfır matrisi olur. Kinematik modelde tabanın uzaysal hızlarını içeren bilgiler yeni bir gösterimle diğer matrislerin içine sokulmuştu. Bu gösterimin dinamik modellemede daha çok işe yarayacağı önceki bölümde vurgulanmıştı. Yeni gösterime göre,

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_b \\ \underline{V}^1 \\ \underline{V}^1 \\ \vdots \\ \underline{V}^p \end{bmatrix},\ \underline{\dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} \vec{V}_b \\ \underline{\dot{\Theta}}^1 \\ \underline{\dot{\Theta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\dot{\Theta}}^p \end{bmatrix},\ \emptyset = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \emptyset^1\emptyset_b^1 & \emptyset^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \emptyset^2\emptyset_b^2 & 0 & \emptyset^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset^p\emptyset_b^p & 0 & 0 & \cdots & \emptyset^p \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{H}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{H}^p \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta}_k = \begin{bmatrix} \vec{\dot{V}}_b \\ \underline{\ddot{\theta}}^1 \\ \underline{\ddot{\theta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\ddot{\theta}}^p \end{bmatrix}, \underline{a} = \begin{bmatrix} \vec{\ddot{a}}_b \\ \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \vdots \\ \underline{a}^p \end{bmatrix},\quad \vec{\ddot{a}}_b = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{g} \end{bmatrix},\quad \vec{g}: yerçekimi\ ivme\ vektörü$$

Tüm linkler için uzaysal kuvvet propagasyonu (2.74) denklemi ile bulunmuştu,

$$\underline{\mathrm{F}} = \emptyset^T(\mathrm{M}\underline{\dot{V}} + \underline{b} + \emptyset_t^T\vec{\vec{\mathrm{F}}}_t)$$

$$\underline{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{F}}_b \\ \underline{\mathrm{F}}^1 \\ \underline{\mathrm{F}}^1 \\ \vdots \\ \underline{\mathrm{F}}^p \end{bmatrix},\quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \vec{b}_b \\ \underline{b}^1 \\ \underline{b}^2 \\ \vdots \\ \underline{b}^p \end{bmatrix},\quad \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t = \begin{bmatrix} \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t^1 \\ \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t^2 \\ \vdots \\ \vec{\vec{\mathrm{F}}}_t^p \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{M}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{M}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{M}^p \end{bmatrix},\quad \emptyset_t = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset_t^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_t^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \emptyset_t^p \end{bmatrix}$$

(2.74) denklemi, (2.76) denkleminde yerine yazılırsa

$$\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{M}\underline{\ddot{\theta}} + \underline{\mathrm{C}} + \mathcal{J}^T\vec{\vec{\mathrm{F}}}_t \qquad (2.82)$$

denklemi elde edilir. Görüldüğü gibi $\mathcal{M}_b\vec{\dot{\vec{V}}}_b$ ifadesi denklemden çıkmış oldu.

Burada;

$$\mathcal{M} \triangleq \mathrm{H}^T \emptyset^T \mathrm{M} \emptyset \mathrm{H} \tag{2.83}$$

$$\mathcal{M}_b^b = \mathcal{M}_b + \sum_{i=1}^{p} \emptyset_b^{i\,T} \emptyset^{i\,T} \mathrm{M}^i \emptyset^i \emptyset_b^i \tag{2.84}$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_b^b & \mathcal{M}_b^{1\,T} & \mathcal{M}_b^{2\,T} & \cdots & \mathcal{M}_b^{p\,T} \\ \mathcal{M}_b^1 & \mathcal{M}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathcal{M}_b^2 & 0 & \mathcal{M}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{M}_b^p & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{M}^p \end{bmatrix}$$

$$C \triangleq \mathrm{H}^T \emptyset^T \mathrm{M} \emptyset a + \mathrm{H}^T \emptyset^T b \tag{2.85}$$

$$C = \begin{bmatrix} \underline{C}_b \\ \underline{C}^1 \\ \underline{C}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}^p \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_b = \mathcal{M}_b \vec{\ddot{a}}_b + \vec{\overline{b}}_b + \sum_{i=1}^{p} \emptyset_b^{i\,T} \emptyset^{i\,T} (\mathrm{M}^i \emptyset^i \left(\emptyset_b^i \vec{\ddot{a}}_b + \underline{a}^i \right) + \underline{b}^1) \tag{2.86}$$

ve Jakobiyen matrisi,

$$\mathcal{J} \triangleq \emptyset_t \emptyset \mathrm{H} \tag{2.87}$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \emptyset_{tb}^1 & \mathcal{J}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \emptyset_{tb}^2 & 0 & \mathcal{J}^2 & \ldots & 0 \\ \emptyset_{tb}^3 & 0 & 0 & \mathcal{J}^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset_{tb}^p & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{J}^p \end{bmatrix}$$

Bu noktada ileri dinamik denklemi elde edildi. Şimdi ters dinamik denklemi elde etmek için $\underline{\ddot{\theta}}$ ifadesi yalnız bırakılırsa;

$$\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{M}^{-1} (\underline{\mathcal{T}} - \underline{\mathrm{C}} - \mathcal{J}^T \underline{\mathrm{F}}_t) \tag{2.88}$$

denklemi elde edilir. Genelleştirilmiş kütle matrisi pozitif tanımlı olduğundan her zaman tersi alınabilir.

2.3.3.1. $\dot{\mathcal{J}}\dot{\theta}$ ifadesinin hesaplanması

Uç noktanın hızı daha önce $\vec{\vec{V}}_t = \emptyset_t \vec{\vec{V}}$ ifadesi ile verilmişti. Burada,

$$\vec{\vec{V}}_t = \begin{bmatrix} \vec{\vec{V}}_t^1 \\ \vec{\vec{V}}_t^2 \\ \vdots \\ \vec{\vec{V}}_t^p \end{bmatrix}$$

Denklemin zamana göre türevi alınırsa,

$$\dot{\underline{V}}_t = \emptyset_t \dot{\underline{V}} + \dot{\emptyset}_t \underline{V} \tag{2.89}$$

$\dot{\underline{V}} = \emptyset(\mathrm{H}\ddot{\underline{\theta}} + \underline{a})$ ifadesi denklemde yerine konulursa,

$$\dot{\underline{V}}_t = \emptyset_t \emptyset\left(\mathrm{H}\ddot{\underline{\theta}} + \underline{a}\right) + \dot{\emptyset}_t \underline{V} \tag{2.90}$$

$$\dot{\underline{V}}_t = \mathcal{J}\ddot{\underline{\theta}} + \emptyset_t \emptyset \underline{a} + \dot{\emptyset}_t \emptyset \mathrm{H}\dot{\underline{\theta}} \tag{2.91}$$

(2.62) denklemiyle verilen $\underline{V}_t = \mathcal{J}\dot{\underline{\theta}}$ ifadesinin de zamana göre türevi alınırsa,

$$\dot{\underline{V}}_t = \mathcal{J}\ddot{\underline{\theta}} + \dot{\mathcal{J}}\dot{\underline{\theta}} \tag{2.92}$$

(2.91) ve (2.92) denklemleri birbirine eşitlenerek,

$$\dot{\mathcal{J}}\dot{\underline{\theta}} = \emptyset_t \emptyset \underline{a} + \dot{\emptyset}_t \emptyset \mathrm{H}\dot{\underline{\theta}} \tag{2.93}$$

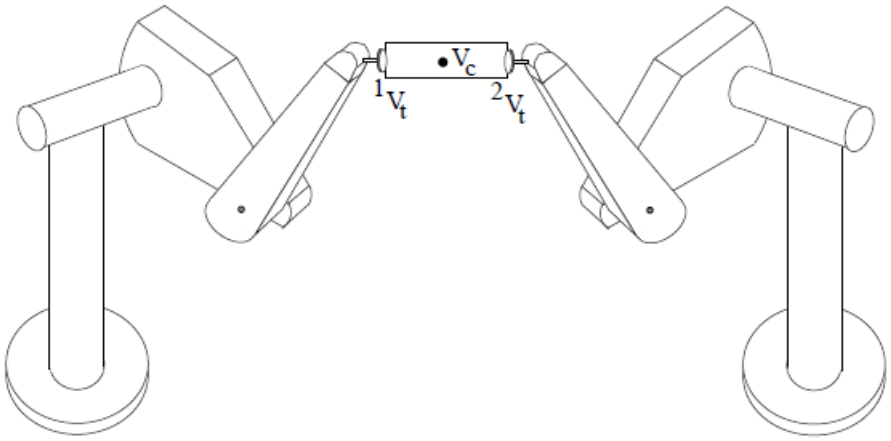
İfadesi bulunur.

2.3.3.2. Uç noktanın kuvvetlerinin hesaplanması

Birlikte çalışan manipülatörlerin dinamik modelini elde ederken ortak bir yükü tutan birden fazla manipülatörün kapalı bir kinematik zincir oluşturduğuna dikkat edilmelidir.

$\underline{V}_t = \mathcal{J}\dot{\underline{\theta}} = A\vec{\vec{V}}_c$ denklemi ile verilen kinematik kısıt dinamik tarafta ikili bir çifte sahiptir.

$$A^T \underline{\mathrm{F}}_t = \vec{\vec{F}}_c \tag{2.94}$$



Şekil 2.16: Ortak yükü tutan paralel manipülatör [24].

$\vec{\vec{F}}_c$ ifadesi kütle, ivme ve sapma kuvvetlerine sahip ortak bir yüke göre yazılmış uzaysal kuvvet vektörüdür.

$$\vec{\vec{F}}_c = \mathrm{M}_c\dot{\vec{\vec{V}}}_c + \vec{\vec{b}}_c \tag{2.95}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_c = \mathrm{M}_c{}^{-1}A^T\underline{\mathrm{F}}_t - \mathrm{M}_c{}^{-1}\vec{\vec{b}}_c \tag{2.96}$$

$$\underline{\dot{V}_t} = \mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} + \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}} = \mathrm{A}\dot{\vec{\vec{V}}}_c + \vec{\vec{a}}_c \tag{2.97}$$

Burada $\vec{\vec{a}}_c$ ifadesi ortak yükün uzaysal ivme bias ifadesidir.

$$\mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} = A\mathrm{M}_c{}^{-1}A^T\underline{\mathrm{F}}_t - A\mathrm{M}_c{}^{-1}\vec{\vec{b}}_c + \vec{\vec{a}}_c - \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}} \tag{2.98}$$

$$\mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T\underline{\mathrm{F}}_t \tag{2.99}$$

Her iki denklem yardımıyla,

$$\Omega\underline{\mathrm{F}}_t = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T - A\mathrm{M}_c{}^{-1}\vec{\vec{b}}_c + \vec{\vec{a}}_c - \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}} \tag{2.100}$$

$$\Omega = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T + A\mathrm{M}_c{}^{-1}A^T \tag{2.101}$$

Burada Ω matrisi tam rank matris olmalıdır.

Tüm türetilen denklemlerden ileri hareket denklemi kompakt bir şekilde yazılırsa,

$$\underline{\ddot{\theta}} = D\overline{\mathcal{T}} + E \tag{2.102}$$

$$D = \mathcal{M}^{-1} - \mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^{T}\Omega^{-1}\mathcal{J}\mathcal{M}^{-1} \tag{2.103}$$

$$E = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^{T}\Omega^{-1}(A\mathrm{M}_{c}{}^{-1}\vec{b}_{c} - \vec{\dot{a}}_{c} + \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}}) \tag{2.104}$$

Hareketli platform üzerinde birlikte çalışan manipülatörlerin dinamik modeli kompakt bir gösterim ile denklem (2.102) de verilmiş oldu.

2.3.4. Sözde eklem tekniği

İnsan vücudundaki eklemler bazı durumlarda kitlenerek hareket etmezler. Bu durumda eklem hareket etmediği için kuvvet bir sonraki linke aktarılır. Örneğin, bir insanın duvarı ittiği durum göz önüne alınsın. Bu durumda dirsekler kitlenerek uygulanması gereken kuvvet için tüm vücuttan destek alınmış olur.

Hareketli bir eklemin sözde eklem tekniği ile kilitlenmesi için Yeşiloğlu [24] doktora çalışmasında sözde eklem diye tanımladığı bir teknik geliştirmiştir. Örnek olarak 7 adet ekleme sahip olan bir yapı düşünülsün. Burada 3. ve 5. eklemler kilitlenmek istenirse,

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S matrisi birim matrisin 3. ve 5. satırlarının en sona getirilerek yeniden düzenlenmiş halidir. Birim matrisin satırlarının yer değiştirmesi ortagonallik özelliğine etki etmeyeceğinden S matrisi de ortagonal bir matristir.

7 ekleme sahip bir manipülatörün $\ddot{\theta}$ vektörü ve S ile çarpılmak suretiyle normal ve sözde eklemlerin vektör içinde birbirinden ayrılmış hale getirildiği vektör aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} \rightarrow S\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix}$$

Hareketli platform üzerinde birlikte çalışan manipülatörlerin dinamik modeli kompakt gösterimi denklem (2.102) verilmişti.

$$\underline{\ddot{\theta}} = D\overline{\mathcal{T}} + E$$

$$S\ddot{\theta} = (SDS^T)S\overline{\mathcal{T}} + SE \tag{2.105}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{T}} \\ \overline{\mathcal{T}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

$$\ddot{\theta}_r = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix}, \qquad \ddot{\theta}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

Sözde eklemlerin açısal ivmeleri olmayacağından $\ddot{\theta}_p = 0$ olur. Denklem (2.106) kullanılarak eşitlikler yazılırsa,

$$\ddot{\theta}_p = d_3\overline{\mathcal{T}} + d_4\overline{\mathcal{T}}_p + e_2 = 0 \tag{2.107}$$

$$\overline{\mathcal{T}}_p = -{d_4}^{-1}d_3\overline{\mathcal{T}} - {d_4}^{-1}e_2 \tag{2.108}$$

$$\ddot{\theta}_r = d_1\overline{\mathcal{T}} + d_2\overline{\mathcal{T}}_p + e_1 \tag{2.109}$$

Denklem (2.108)'de bulunan $\overline{\mathcal{T}}_p$ ifadesi (2.109)'da yerine yazılırsa,

$$\ddot{\theta}_r = \left(d_1 - d_2{d_4}^{-1}d_3\right)\overline{\mathcal{T}} + e_1 - d_2{d_4}^{-1}e_2 \tag{2.110}$$

Denklem (2.110)'da d_4 matrisi tam rank olmalıdır ki tersi alınabilsin.

3. İNSAN VÜCUDU ÜZERİNDE MODEL TABANLI KUVVETLERİN DİNAMİK ANALİZİ

3.1. İnsan Anatomisi

İnsan gelişmiş bir omurgalı canlı olarak oldukça kompleks bir anatomiye sahiptir. Kimyasal yapıdaki atomlar hücreleri, hücreler birleşerek dokuları, dokuların bir araya gelmesi ile organlar, organların birleşmesi ile sistemler ve sistemleri organize olmasıyla da organizmalar meydana gelir. Bu şekilde en küçükten en büyüğe doğru olan sıralama ile insan vücudu 6 temel seviyeden meydana gelir [23]. İnsansı robotların davranışları ile ilgili araştırmalar genelde hareket sistemiyle ilgilidir. Bu tezde insan vücuduna uygulanan bir kuvvetin iskelet sistemindeki eklemlere dağılımı inceleneceğinden, çok geniş bir kavram olan insan anatomisi konusunda sadece kas ve iskelet sistemine değinilecektir.

Vücuda şeklini veren yapı iskelet sistemidir. Yani herhangi bir canlının ne şekilde göründüğü, nasıl hareket edebildiği, hareket kabiliyeti tamamen onun kas ve iskelet yapısıyla ilgilidir. İskelet sistemi, kemiklerden ve bu kemikleri birbirine bağlayan, kemiklerin hangi serbestlik derecesiyle hareket edeceğini belirleyen eklemlerden oluşur. Kas sistemi ise iskelet sistemini hareket ettirmek için gerekli kuvveti sağlayan, kasılma ve büzülme hareketleri yaparak iskelet sistemini hareket ettiren yapıdır. Bu kısımda iskelet sisteminin yapısı, bölümleri ve eklem tipleri incelenecektir.

3.1.1. İskelet sistemi

İnsan anatomisi ile ilgili bilimsel kaynaklarda yetişkin bir insan vücudunda 206 adet kemik olduğu söylenmekte ve bu kemiklerin oluşturduğu iskelet sistemi aksiyel iskelet ve apendiküler iskelet olmak üzere iki temel kısma ayrılmaktadır.

3.1.1.1. Aksiyel iskelet (*axial skeleton*)

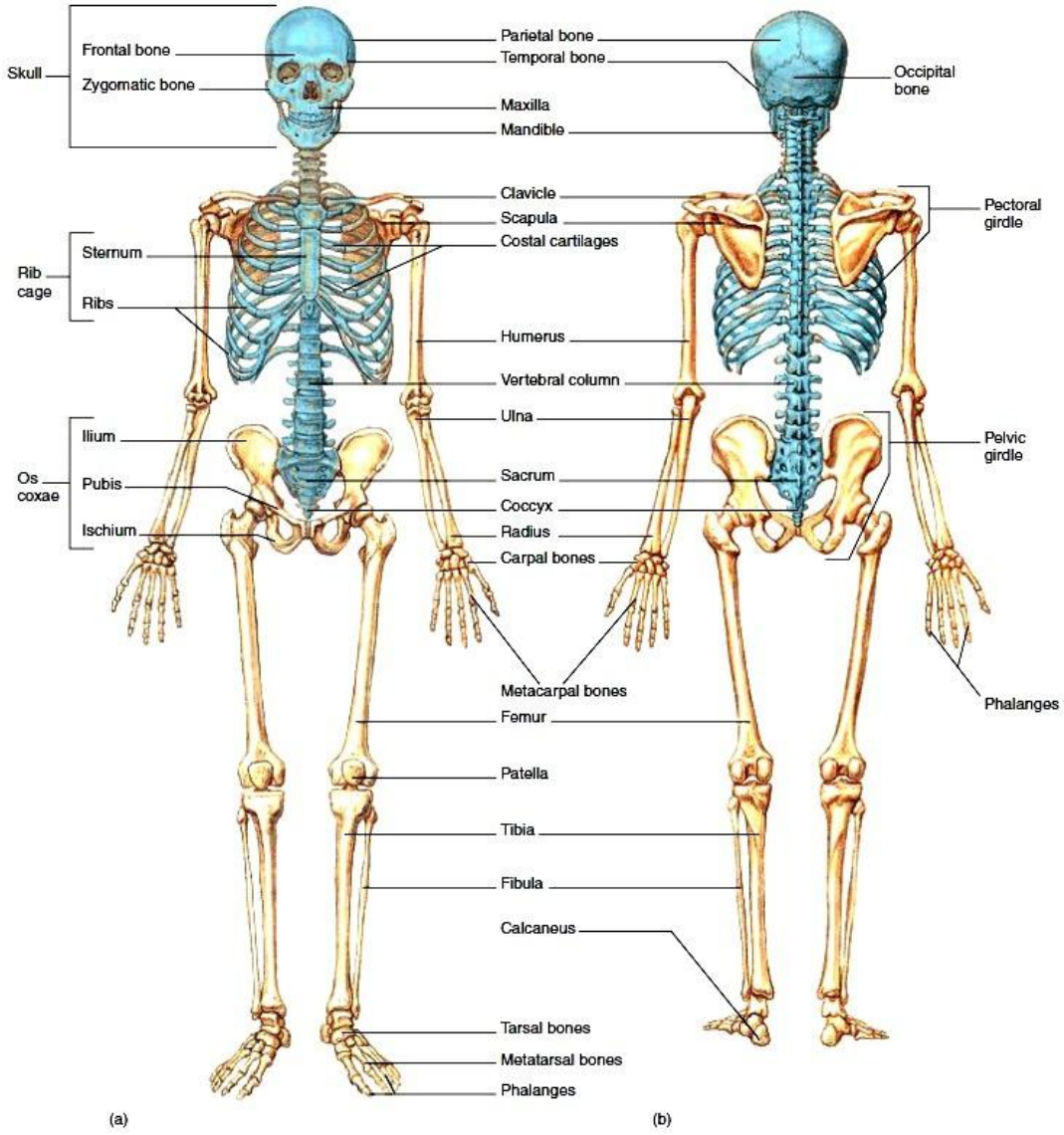
Baş, omurga, kaburga gibi toplam 80 adet kemikten meydana gelmektedir.

Vücut ayaklardan başa doğru bir eksene oturtulduğu zaman eksene yakın olan iskelet olduğu için bu isim verilmiştir.

3.1.1.2.Apendiküler iskelet (*appendicular skeleton*)

Kollar, bacaklar, leğen kemiği ile omuz ve bacakları destekleyen ve aksiyel iskelete bağlayan kuşaklardan oluşur. Toplam 126 kemik içerir.

Şekil 3.1'de her iki iskelet sistemini oluşturan kemikler görünmektedir.



Şekil 3.1: Aksiyel ve apendiküler iskelet kemikleri [22].

Mavi renkli gösterilen kısımlar aksiyel iskelet kısımları sarı renkle gösterilen kısımlar apendiküler iskelet kısımlarıdır.

3.1.2. Eklemler

İnsan vücudundaki eklemler yapısal olarak üç türe ayrılır.[] Bunlar lifli eklemler, kıkırdaklı eklemler ve sinoviyal eklemlerdir. Lifli eklemler katı bir bağ yapısı oluşturduğundan dolayı kafatası gibi hareketsiz olan kemiklerin birleştiği yerlerde bulunur. Kıkırdaklı eklemler de lifli eklemler gibi hareketsiz olan bölgelerde veya çok az hareket eden bölgelerde bulunur. Dolayısıyla bu iki eklem tipinin hareket mekanizmasında pek bir etkisi yoktur. Üçüncü tip olan sinoviyal eklemler kollar, bacaklar gibi vücudun en hareketli bölgelerinde bulunur. Hareket kabiliyetleri çok fazla olduğu için ters hareketlerde incinme riskleri yüksektir. Bu bölümde hareket sisteminin önemli bir kısmını oluşturan sinoviyal eklem tipleri incelenecektir.

1- Yüzey (*plane joint*) eklem:



Şekil 3.2: Yüzey eklem ve modeli [25].

2- Dönel (*hinge joint*) eklem:



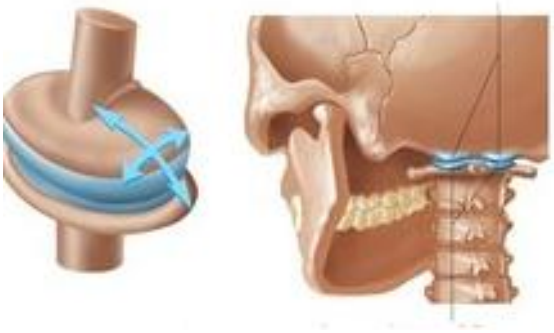
Şekil 3.3: Dönel eklem ve modeli [25].

3- Silindirik (*pivot joint*) eklem:



Şekil 3.4: Silindirik eklem ve modeli [25].

4- Elips (*condyloid joint*) eklem:



Şekil 3.5: Elips eklem ve modeli [25].

5- Eyer (*saddle joint*) eklem:



Şekil 3.6: Eyer eklem ve modeli [25].

6- Küresel (*ball-socket joint*) eklem:



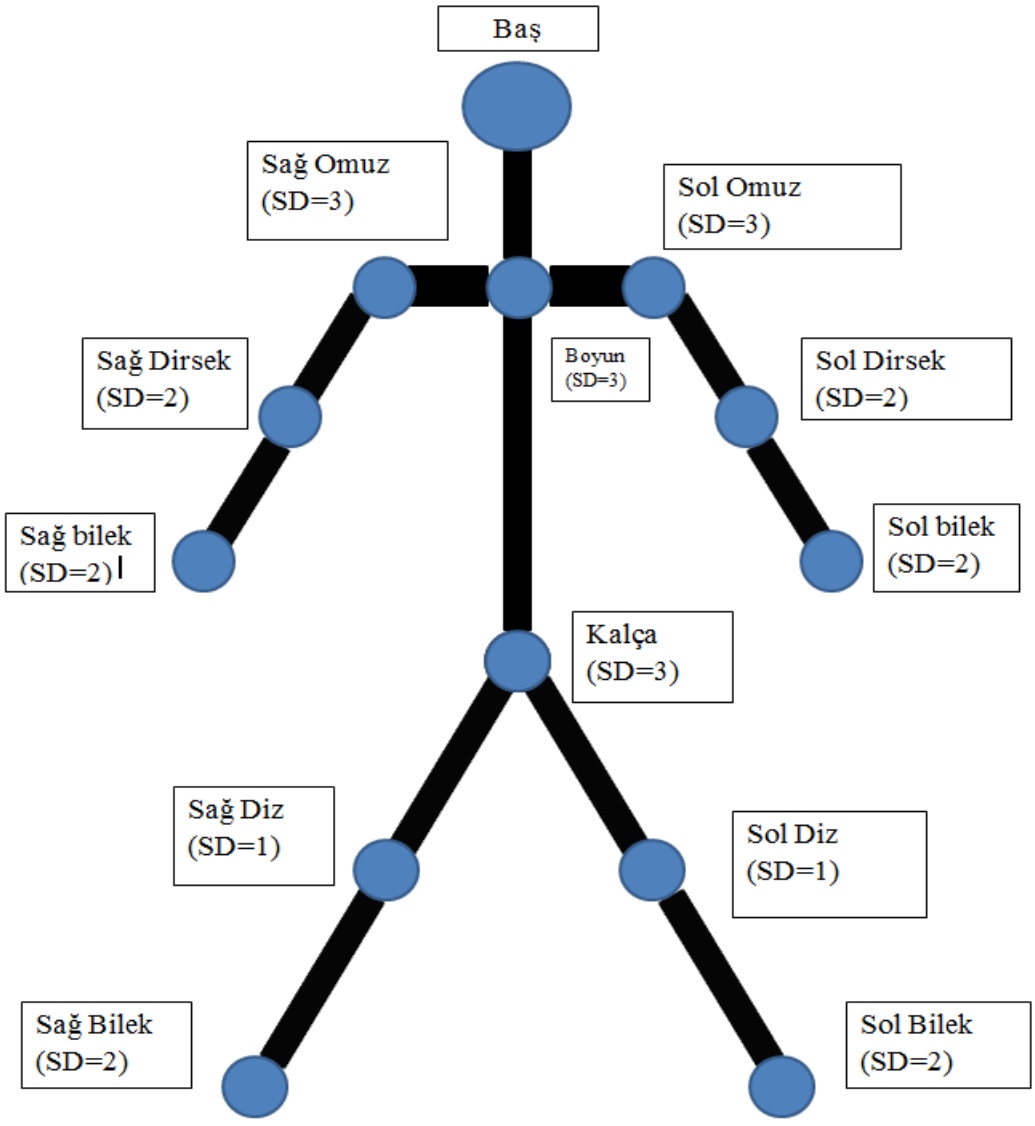
Şekil 3.7: Küresel eklem ve modeli [25]

Çizelge 3.1: Eklemlerin yapısına, tipine ve özelliğine göre ayrılması [22]

Eklem Tipi	Tanımı	Hareket Yeteneği	Örnek
Plane	Düz veya hafif kavisli yüzeyli eklem tipidir.	Sağdan sola veya önden arkaya doğru iki yönde hareket edebilir.	El ve ayakta iç kısımlar ve omurgalar arasında bulunur.
Hinge	Bir iç bükey yüzeyin bir dış bükey yüzeyin içine oturduğu eklem tipidir.	Tek eksen de dönebilen bu eklem bükülmeler yaparak hareket eder.	Diz, dirsek, bilekler gibi bükülme hareketi yapan yerlerde bulunur.
Pivot	Kısmen bağ ve kemikten oluşmuş bir halkanın içine oturmuş yüzeyin oluşturduğu eklemdir.	Sadece tek yönde dönme yapabilir.	Özellikle boyun bölgesinde bulunur.
Condyloid	Elips şekilli bir çıkıntı yüzey ve yine elips şekilli bir çukur yüzeyin oluşturduğu eklem tipidir.	Yaklaşma ve uzaklaşma hareketleri yaparak ileri geri hareket edebilir.	Ayak ve boyun bölgesinde bulunur.
Saddle	Eyer şekilli iki yüzeyin üst üste oturduğu eklem tipidir. Condyloid ekleme yapıca benzer.	Yaklaşma ve uzaklaşma hareketleri yaparak ileri geri hareket edebilir.	Ayak ve el parmakları arasında bulunur.
Ball-socket	Top benzeri bir yüzeyin kepçe benzeri bir yüzeyin içine girmesiyle oluşan eklem tipidir.	Üç yönde dönme yapabilir.	Omuz ve kalça eklemleri

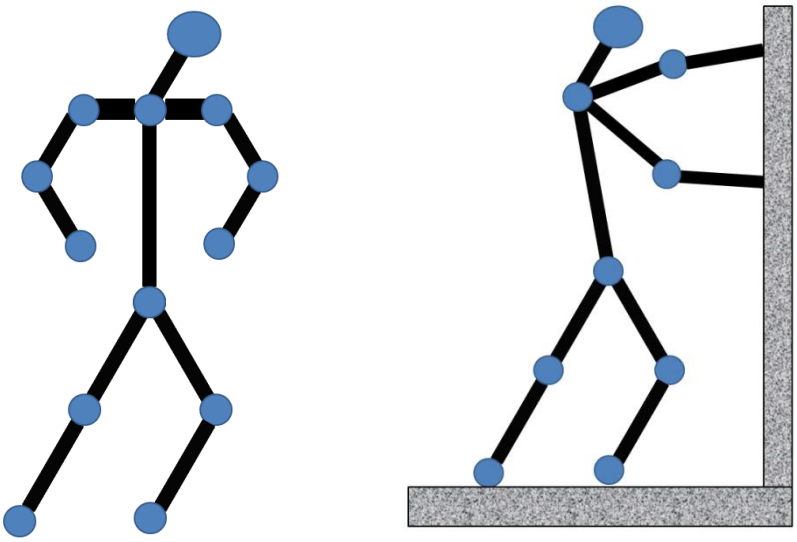
3.2. İnsan İskeletinin Robotiğe Uyarlanması

İskelet sistemini oluşturan kemikler mekanik değişimlere karşı eklemler vasıtasıyla ve kasların itme ve çekme kuvvetleriyle cevap vererek hareketi sağlarlar. Kas ve iskelet sistemini oluşturan kemikler, kaslar ve eklemler bir bütün içinde hareket etmemizi sağlarlar. Bu tezde incelenecek olan insan vücuduna uygulanan bir kuvvetin dağılımı, kemiklerin eklemler aracılığıyla birbirini ne şekilde etkilediği ile ilgilidir. Örneğin, kollarımızla bir nesneyi ittiğimizde, nesneden bize yansıyan tepki kuvveti ayaklara ne şekilde yansır? Bu ve benzeri soruları incelemek için giriş kısmında iskelet sistemi hakkında bilgi verilip eklem tipleri tanıtıldı. Tüm bu tanımlanan yapılarla bir insan Şekil 3.8' de ki şekilde modellenebilir.



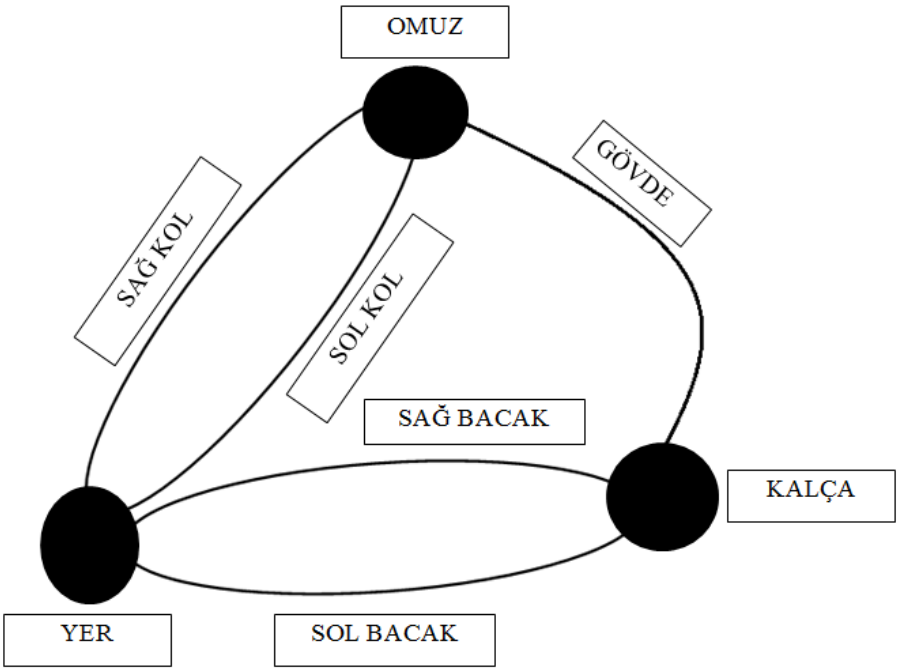
Şekil 3.8: İnsan iskeletinin eklemlere göre modellenmesi.

3.3. Model Tabanlı Kuvvet Dağılımının İncelenmesi



Şekil 3.9: Sol bacağı bükülmüş model ve duvarı itme modeli.

Modeli gövde hareketli platform, kol ve bacaklar ise bu platforma bağlı manipülatörler olarak düşünebiliriz.



Şekil 3.10: Bağlantısal model.

Özellikle simülasyon ortamına aktarılan duvarı itme modelinde kapalı bir zincir yapısı oluşmuştur. Uç noktalar duvar ve zemine sabit olduğundan uç noktaların hızı sıfır olur.

Denklem (2.92)'den

$$\underline{\dot{V}_t} = \mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} + \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}}$$

denklemin de $\underline{\dot{V}_t}$ ifadesi sıfıra eşit olmalıdır.

$$\underline{\dot{V}_t} = \mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} + \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}} = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} = -\dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}}$$

Yine denklem (2.88)'den hatırlayalım ki

$$\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{M}^{-1}(\underline{\mathcal{T}} - \underline{\mathrm{C}} - \mathcal{J}^T\underline{\mathrm{F}_t})$$

Burada $\underline{\mathcal{T}} - \underline{\mathrm{C}} \triangleq \overline{\mathcal{T}}$ denirse ve her iki taraf da $\mathcal{J}$ ile soldan çarpılırsa;

$$\mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}(\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J}^T\underline{\mathrm{F}_t}) \tag{3.2}$$

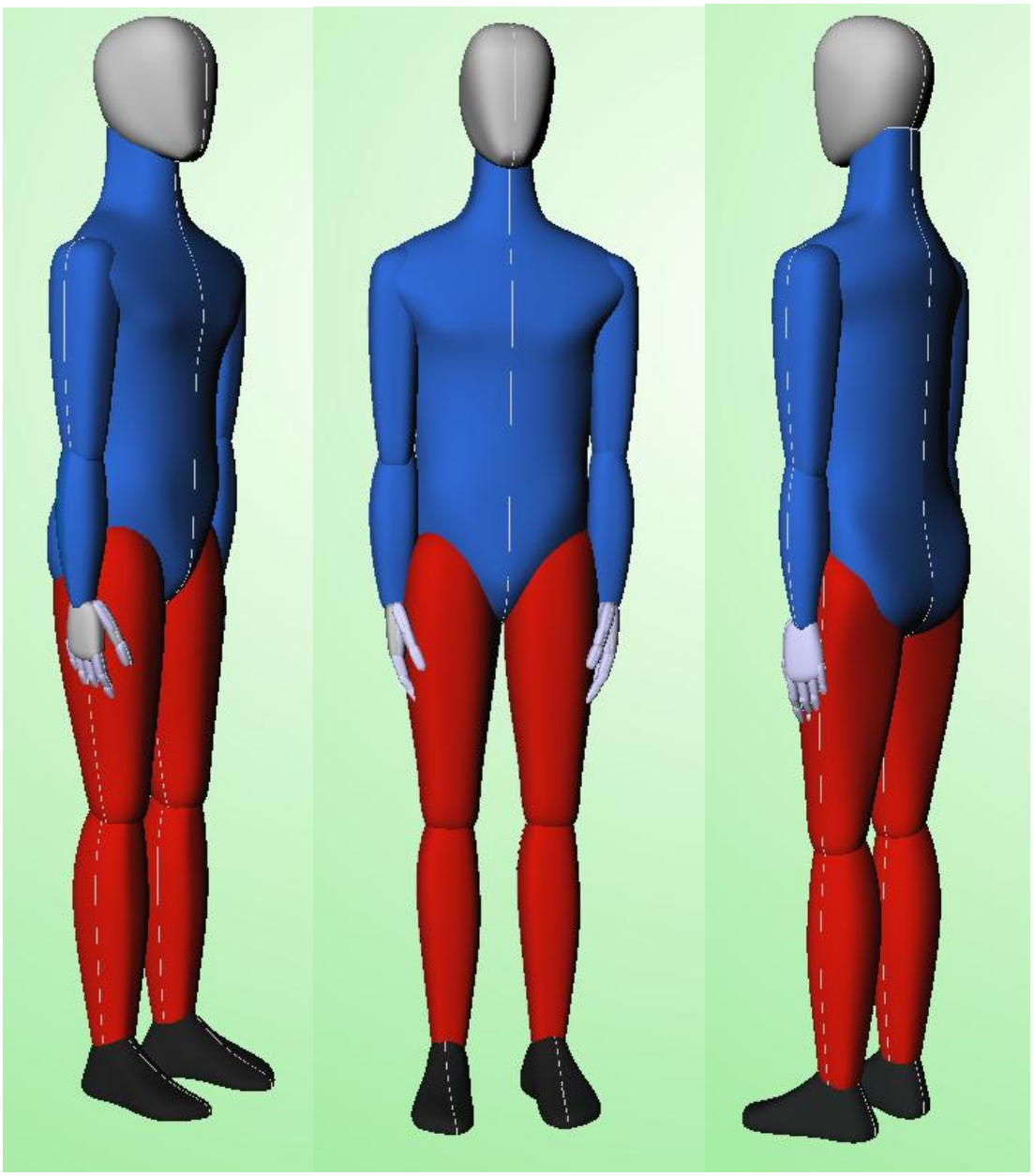
$$\mathcal{J}\underline{\ddot{\theta}} = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T\underline{\mathrm{F}_t}$$

$$-\dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}} = \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T\underline{\mathrm{F}_t} \tag{3.3}$$

$$\underline{\mathrm{F}_t} = (\mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}^T)^{-1}(\mathcal{J}\mathcal{M}^{-1}\overline{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{J}}\underline{\dot{\theta}}) \tag{3.4}$$

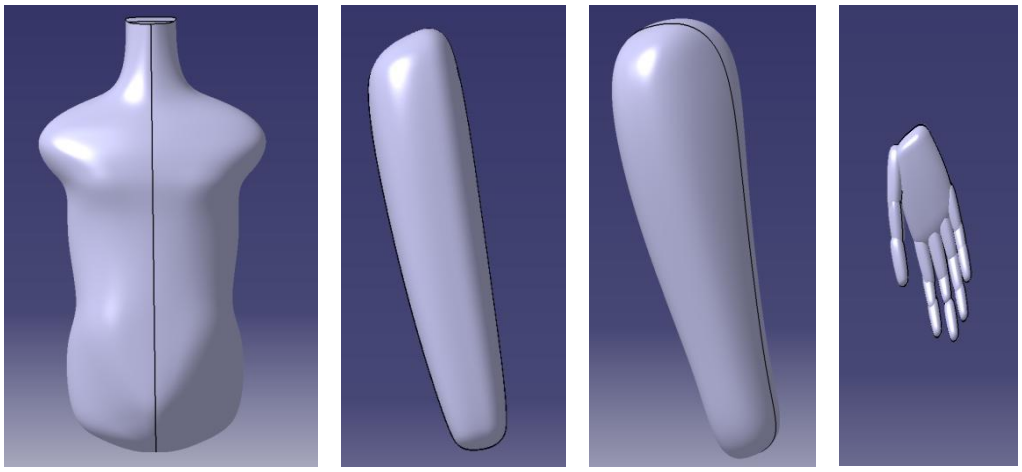
3.4. Benzetim Sonuçları

Benzetim çalışmalarında kullanılan model Catia çizim programında tasarlanmış olup kütle bilgisi ve eylemsizlik matrisleri CATIA programından alınmıştır.

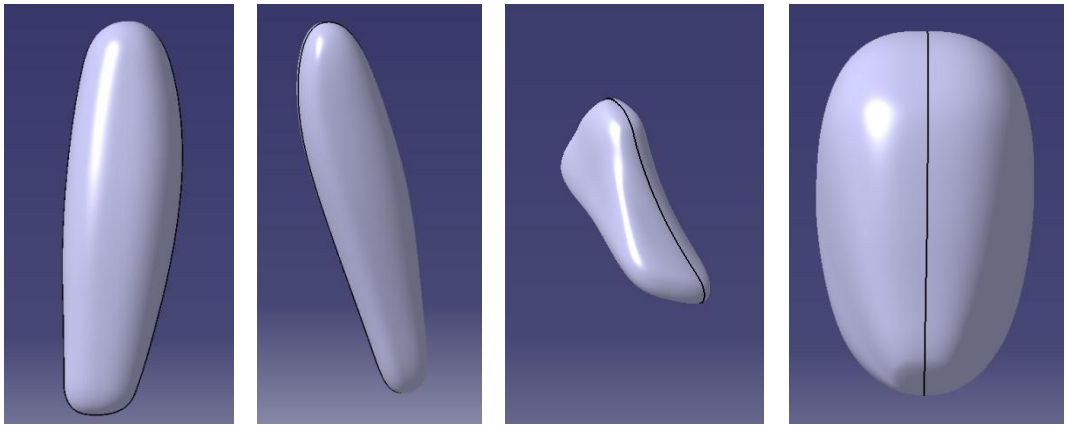


Şekil 3.11: Simülasyon modeli

Simülasyon modelini oluşturan parçalar Catia çizim programında çizilmiş olup MATLAB-VRML Editöründe bir araya getirilmiştir. Catia çizim programında tasarlanan model parçaları, özellikleriyle beraber verilmiştir.



a) **b)** **c)** **d)**



e) **f)** **g)** **h)**

Şekil 3.12: CATIA model parça çizimleri **a)** Gövde, **b)** Üst kol, **c)** Üst bacak, **d)** El, **e)** Alt bacak, **f)** Alt kol, **g)** Ayak, **h)** Kafa tası

Çizelge 3.2: Parça ismine göre kütle değerleri.

Parça İsmi	Kütle (kg)
Gövde	28,684
Üst Kol	2,317
Üst Bacak	8,686
El	0,150
Alt Bacak	3,288
Alt Kol	1,012
Ayak	1,281
Kafatası	4,358

Model parçalarının kütle değerleri Çizelge 3.2'de verilmiştir. Çizelge 3.3'de eklemlerin bir önceki koordinat eksen takımına göre x-y-z düzlemlerindeki koordinatlarını içeren link vektörleri verilmiştir. İlk çıkış noktası taban olarak kabul edilen gövdenin orta noktasıdır.

Çizelge 3.3: Eklemlere göre link vektörleri.

Eklem	Link Vektörü
Sağ Omuz	[0,19 0 0,22]
Sağ Dirsek	[0 0 -0,32]
Sağ Bilek	[0 0 -0,26]
Sol Omuz	[-0,19 0 0,22]
Sol Dirsek	[0 0 -0,32]
Sol Bilek	[0 0 -0,26]
Sağ Kalça	[0,11 0 -0,28]
Sağ Diz	[0 0 -0,45]
Sağ Ayak Bileği	[0 0 -0,40]
Sol Kalça	[-0,11 0 -0,28]
Sol Diz	[0 0 -0,45]
Sol Ayak Bileği	[0 0 -0,40]

Modeli oluşturan tüm parçaların eylemsizlik moment matrisleri $kgxm^2$ cinsinden şu şekildedir.

$$I_{gövde} = \begin{bmatrix} 1{,}129 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}239 & -0{,}04 \\ 0 & -0{,}04 & 0{,}264 \end{bmatrix} \qquad I_{üst_kol} = \begin{bmatrix} 0{,}021 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}003 \end{bmatrix}$$

$$I_{alt_kol} = \begin{bmatrix} 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I_{üst_bacak} = \begin{bmatrix} 0{,}155 & -0{,}001 & 0{,}003 \\ -0{,}001 & 0{,}153 & 0{,}008 \\ 0{,}003 & 0{,}008 & 0{,}028 \end{bmatrix}$$

$$I_{alt_bacak} = \begin{bmatrix} 0{,}040 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}039 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}005 \end{bmatrix} \qquad I_{ayak} = \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}002 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}006 \end{bmatrix}$$

$$I_{el} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I_{kafa_tası} = \begin{bmatrix} 0{,}023 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}018 & 0{,}001 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}016 \end{bmatrix}$$

2. bölümde bahsedilen kinematik ve dinamik modelleme yöntemlerine göre Şekil 3.8' de verilen modelin dinamik denklemleri, eklemler arası link uzunluklarına göre $\vec{l}_{k-1,k}$ vektörleri, link vektörlerinden oluşan $\varphi_{k-1,k}$ propagasyon matrisleri ve sistem propagasyonu matrisi olan $\emptyset$, her bir eklemin serbestlik derecesine göre H eksen takımları matrisi, linklerin kütleleri olan m_k değerleri ve bunların oluşturduğu genelleştirilmiş kütle matrisi $\mathcal{M}$, torklar ve kuvvetler matlab ortamında hesaplanarak bulunmuştur. Bulunan dinamik modelin benzetimi farklı iki başlangıç konfigürasyonu için MATLAB ortamında yapılmış ve elde edilen sonuçlar verilmiştir.



Şekil 3.13: 1. Başlangıç konfigürasyonu.

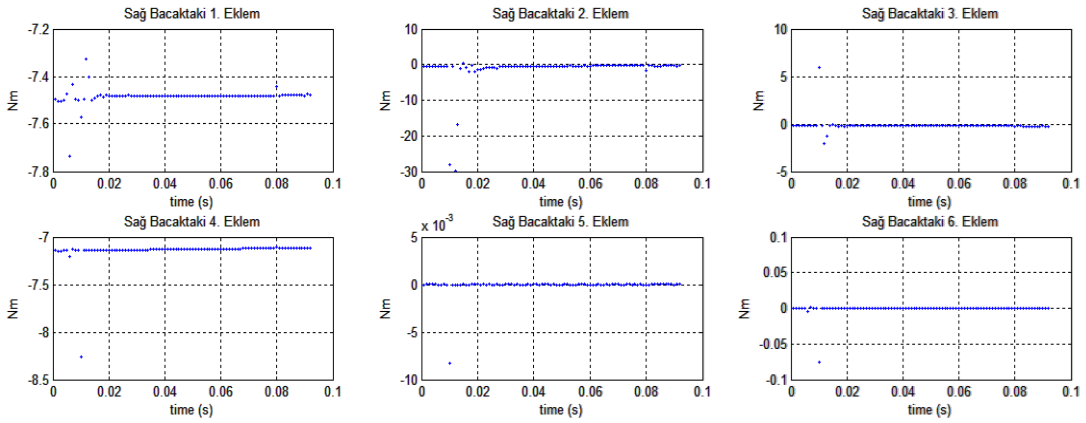
Çizelge 3.4: Sağ ve sol bacakların başlangıç konfigürasyon açıları.

Eklem Sağ Bacak	Eklem Açısı	Eklem Sol Bacak	Eklem Açısı
1.Eklem	18°	1.Eklem	-18°
2.Eklem	0°	2.Eklem	0°
3.Eklem	0°	3.Eklem	0°
4.Eklem	-36°	4.Eklem	-36°
5.Eklem	0°	5.Eklem	0°
6.Eklem	0°	6.Eklem	0°

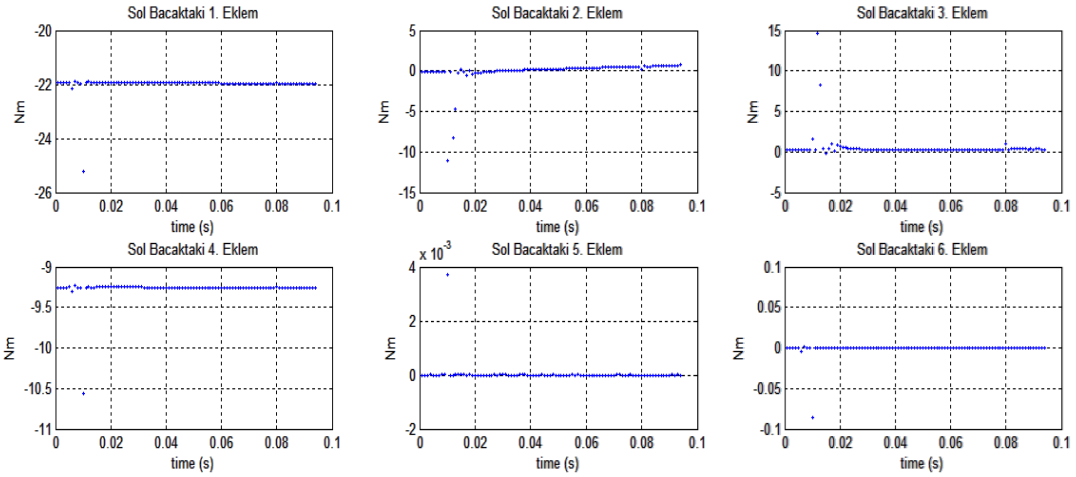
Çizelge 3.5: Sağ ve sol kolların başlangıç konfigürasyon açıları.

Eklem Sağ Kol	Eklem Açısı	Eklem Sol Kol	Eklem Açısı
1.Eklem	90°	1.Eklem	90°
2.Eklem	0°	2.Eklem	0°
3.Eklem	0°	3.Eklem	0°
4.Eklem	18°	4.Eklem	18°
5.Eklem	0°	5.Eklem	0°
6.Eklem	-60°	6.Eklem	-60°
7.Eklem	18°	7.Eklem	-18°

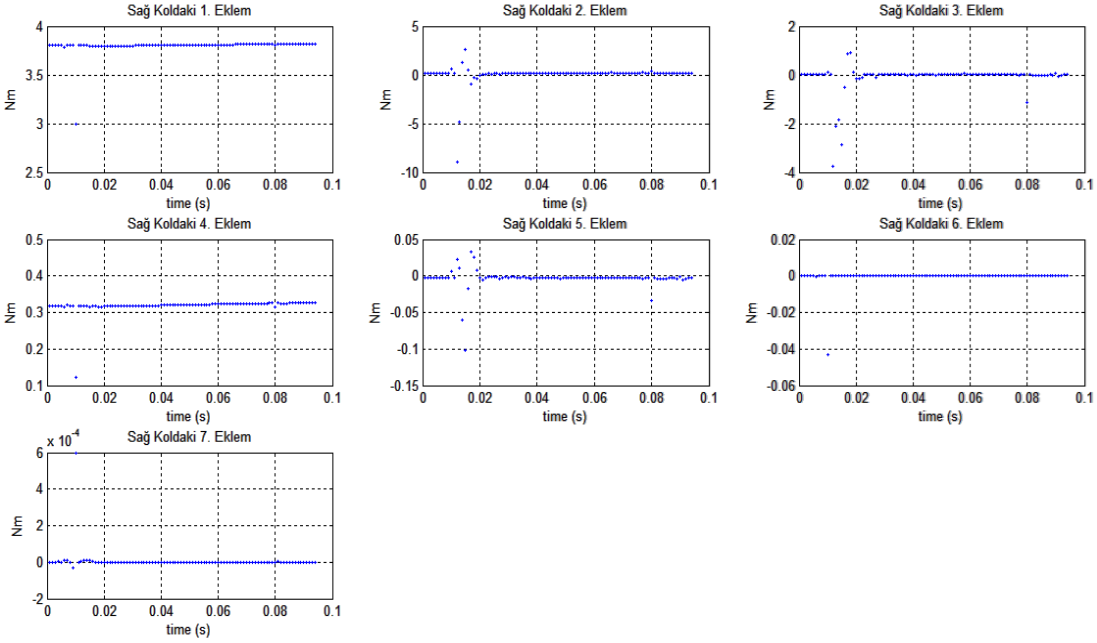
1. başlangıç konfigürasyonu için uygulanan üç farklı senaryonun grafikleri Şekil 3.14, Şekil 3.15, Şekil 3.16 ‘da verilmiştir.



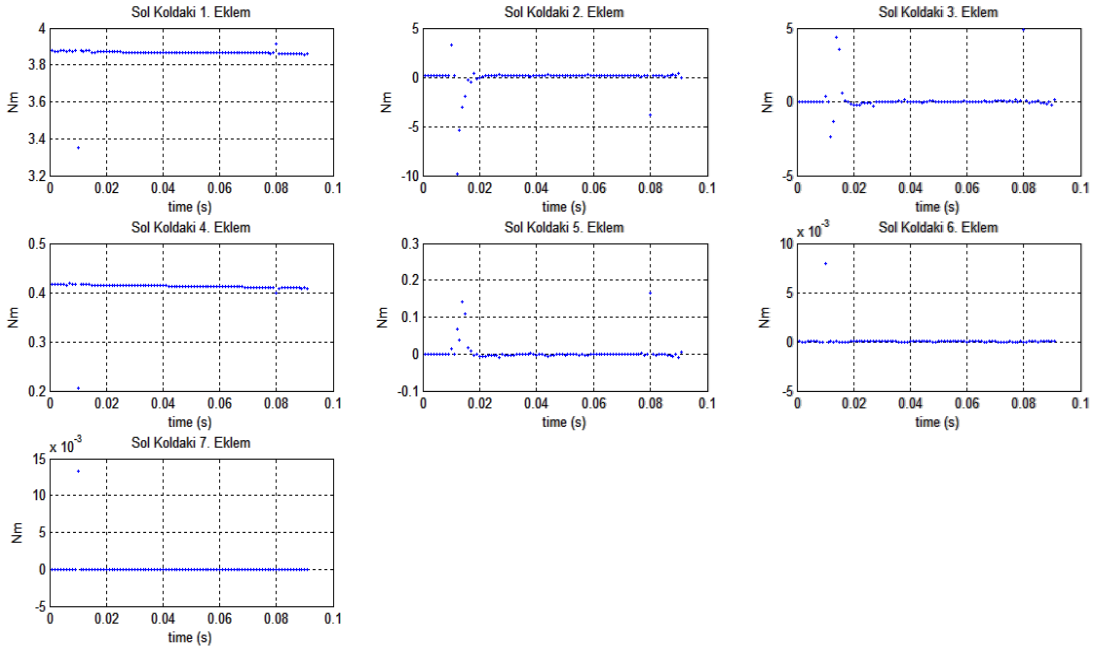
a)


Sol Bacaktaki 1. Eklem
Sol Bacaktaki 2. Eklem
Sol Bacaktaki 3. Eklem
Sol Bacaktaki 4. Eklem
Sol Bacaktaki 5. Eklem
Sol Bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3

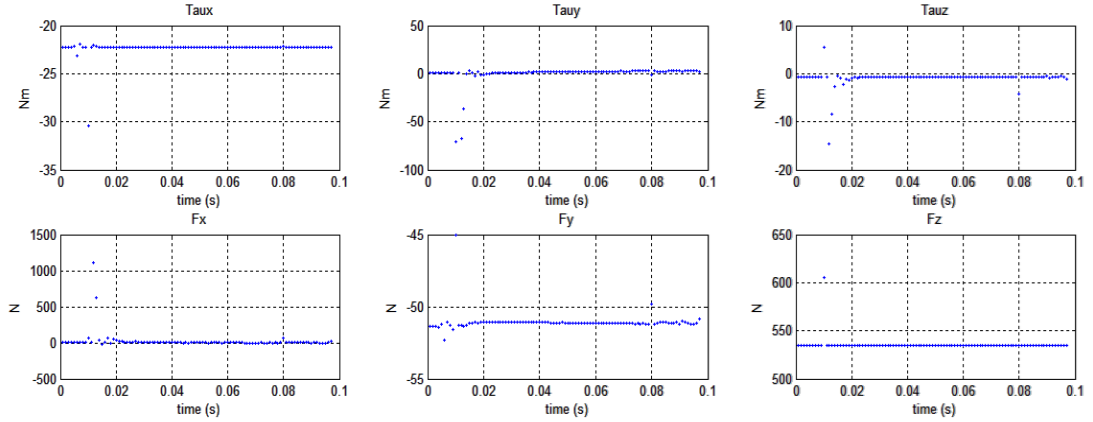
b)


Sağ Koldaki 1. Eklem
Sağ Koldaki 2. Eklem
Sağ Koldaki 3. Eklem
Sağ Koldaki 4. Eklem
Sağ Koldaki 5. Eklem
Sağ Koldaki 6. Eklem
Sağ Koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-4

c)

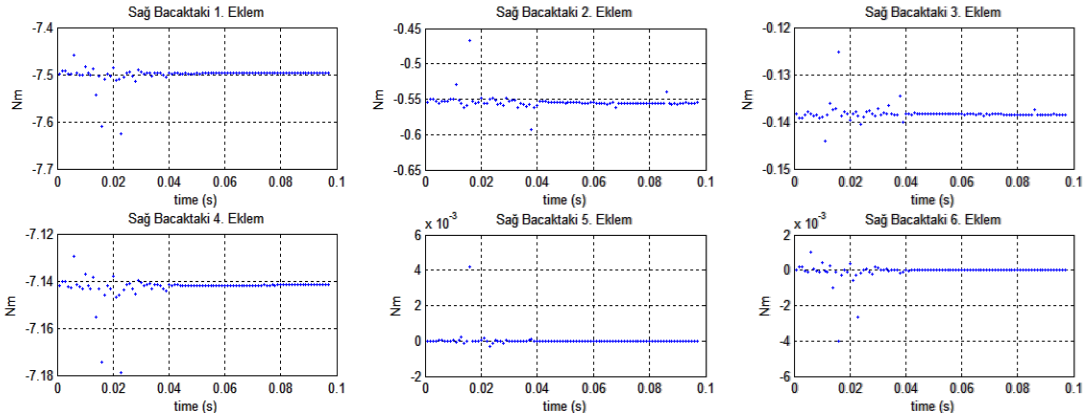


d)

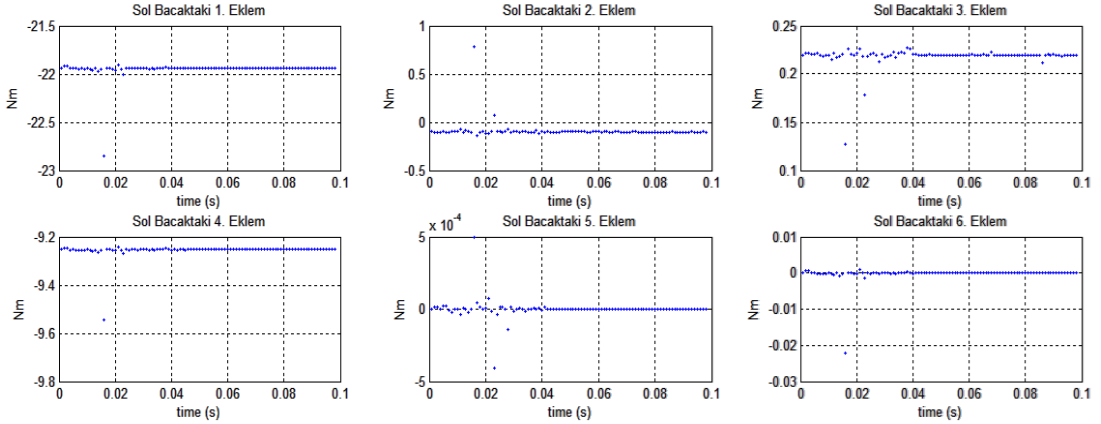


e)

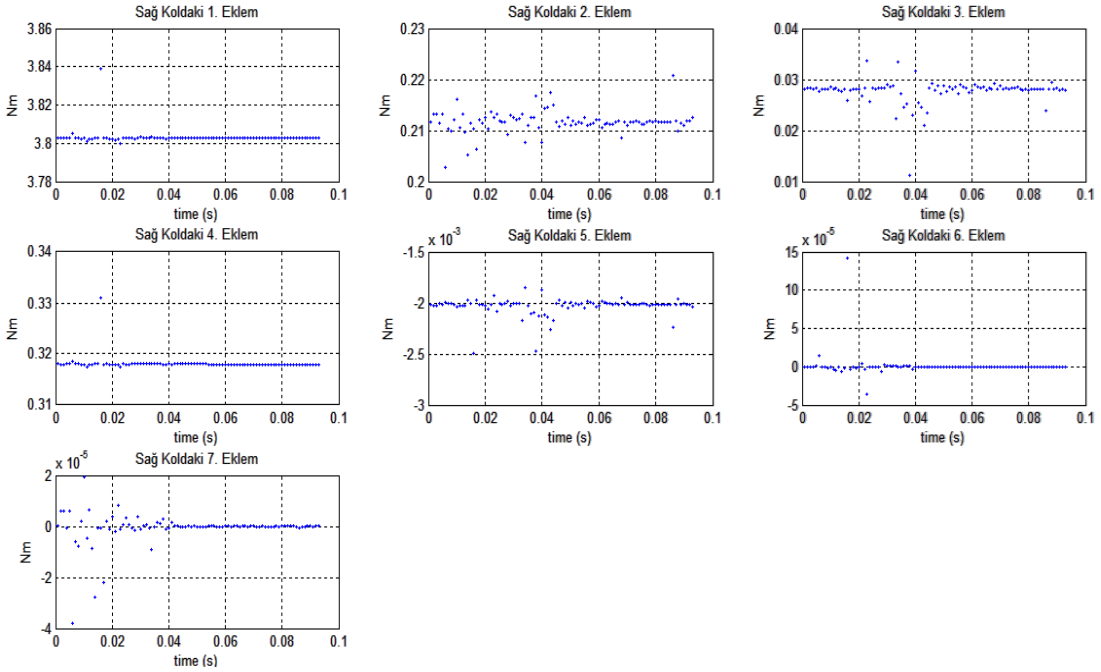
Şekil 3.14: Senaryo 1, bacaklar x dönme yönünde kilitli kollar serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemleri, **e)** gövdeye etkiyen kuvvetler


Sağ Bacaktaki 1. Eklem
Sağ Bacaktaki 2. Eklem
Sağ Bacaktaki 3. Eklem
Sağ Bacaktaki 4. Eklem
Sağ Bacaktaki 5. Eklem
Sağ Bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3

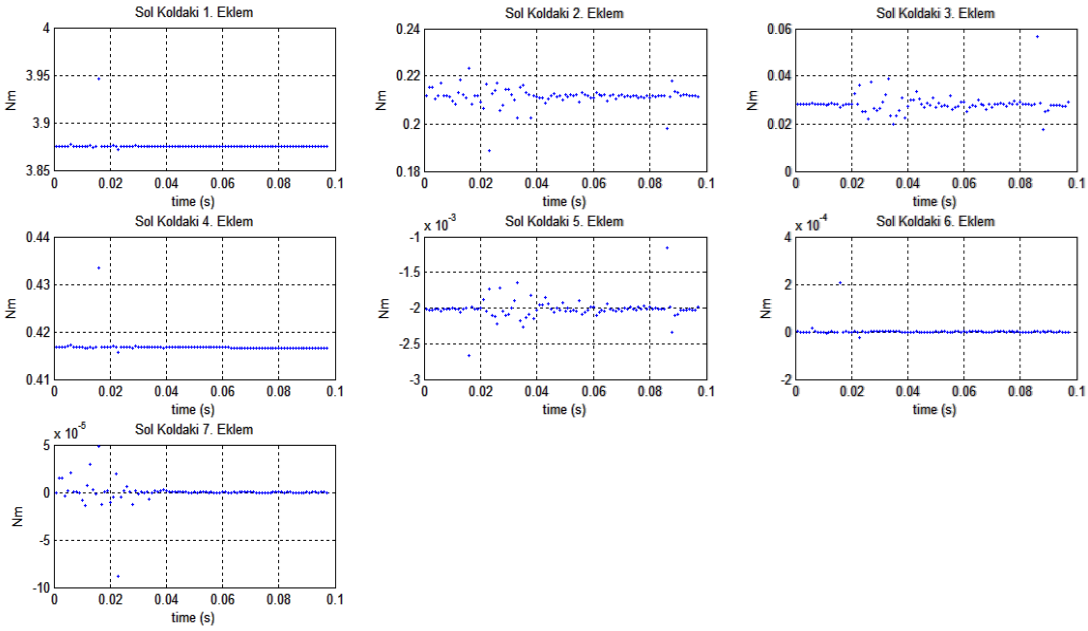
a)


Sol Bacaktaki 1. Eklem
Sol Bacaktaki 2. Eklem
Sol Bacaktaki 3. Eklem
Sol Bacaktaki 4. Eklem
Sol Bacaktaki 5. Eklem
Sol Bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-4

b)

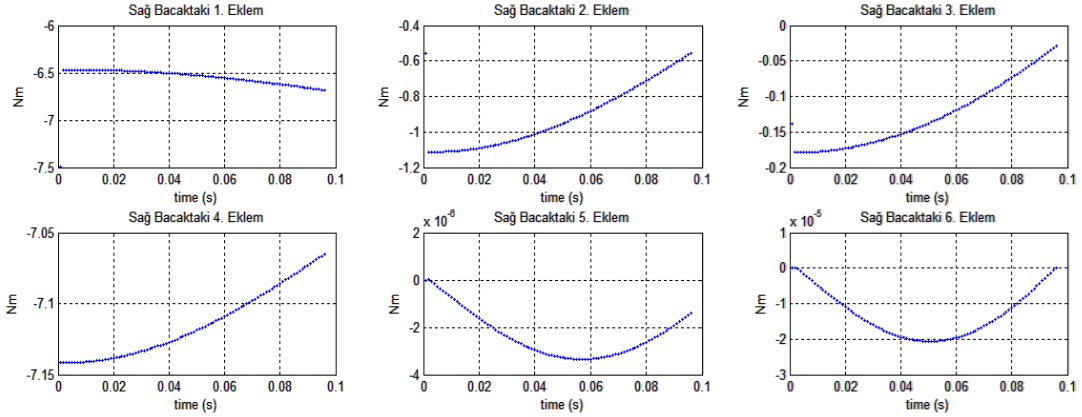

Sağ Koldaki 1. Eklem
Sağ Koldaki 2. Eklem
Sağ Koldaki 3. Eklem
Sağ Koldaki 4. Eklem
Sağ Koldaki 5. Eklem
Sağ Koldaki 6. Eklem
Sağ Koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3
x 10^-5

c)

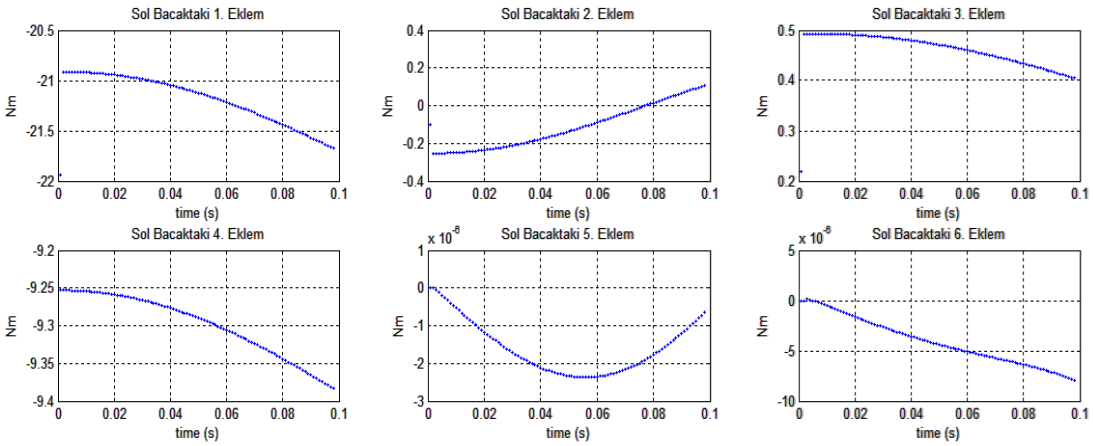


d)

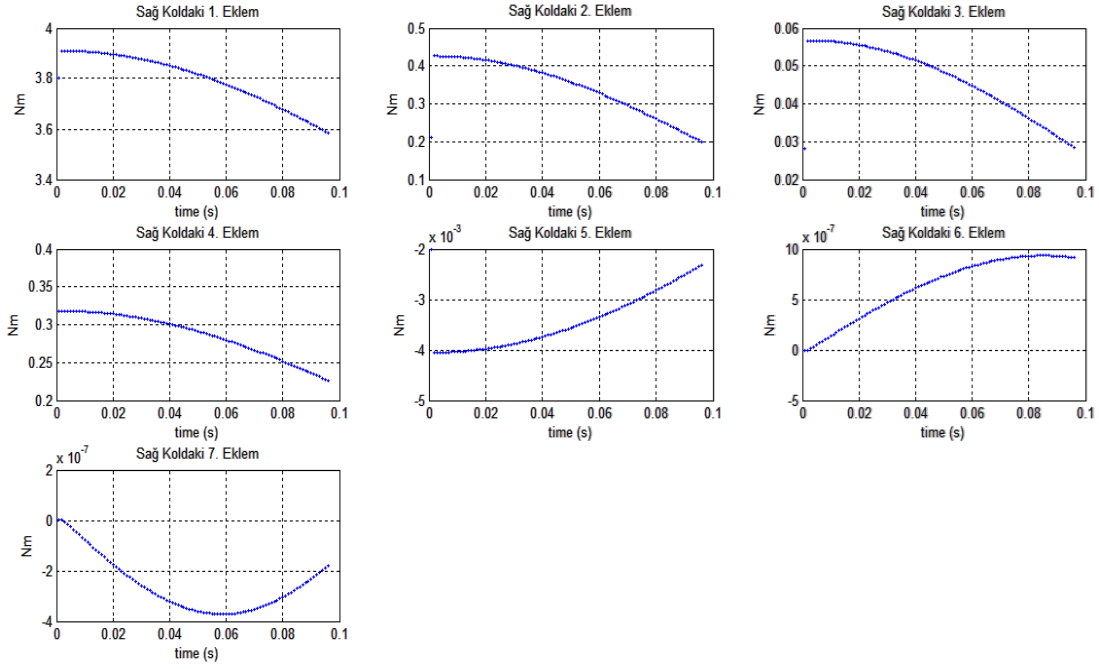
Şekil 3.15: Senaryo 2, kollar x dönme yönünde kilitli bacaklar serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemlerine etkiyen kuvvetler



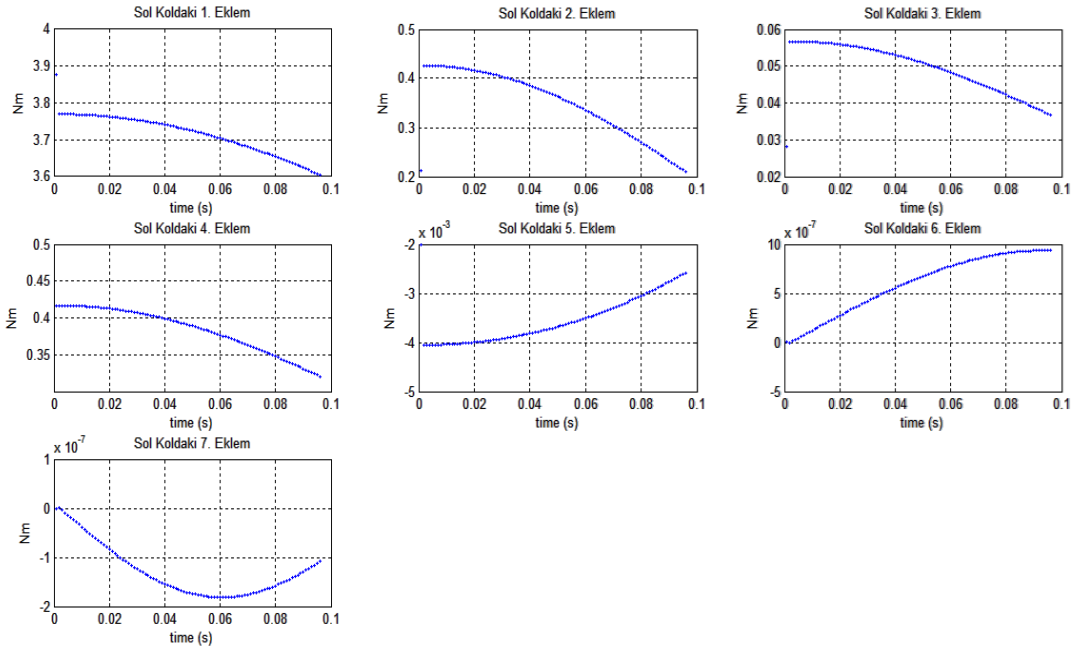
a)


Sol Bacaktaki 1. Eklem
Sol Bacaktaki 2. Eklem
Sol Bacaktaki 3. Eklem
Sol Bacaktaki 4. Eklem
Sol Bacaktaki 5. Eklem
Sol Bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-6

b)


Sağ Koldaki 1. Eklem
Sağ Koldaki 2. Eklem
Sağ Koldaki 3. Eklem
Sağ Koldaki 4. Eklem
Sağ Koldaki 5. Eklem
Sağ Koldaki 6. Eklem
Sağ Koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3
x 10^-7

c)



d)

Şekil 3.16: Senaryo 3, tüm eklemler serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemlerine etkiyen kuvvetler



Şekil 3.17: 2. Başlangıç konfigürasyonu.

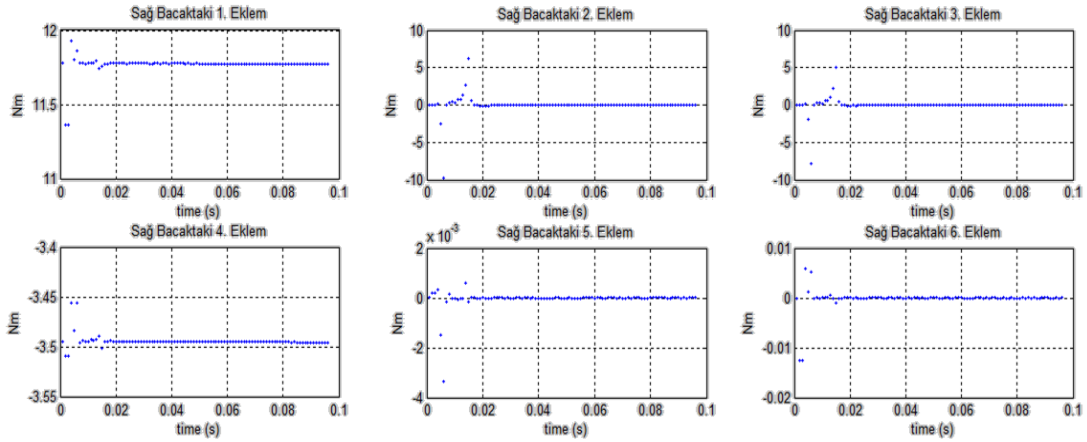
Çizelge 3.6: Sağ ve sol bacakların başlangıç konfigürasyon açıları.

Eklem Sağ Bacak	Eklem Açısı	Eklem Sol Bacak	Eklem Açısı
1.Eklem	45°	1.Eklem	60°
2.Eklem	0°	2.Eklem	0°
3.Eklem	0°	3.Eklem	0°
4.Eklem	-120°	4.Eklem	-120°
5.Eklem	0°	5.Eklem	0°
6.Eklem	60°	6.Eklem	60°

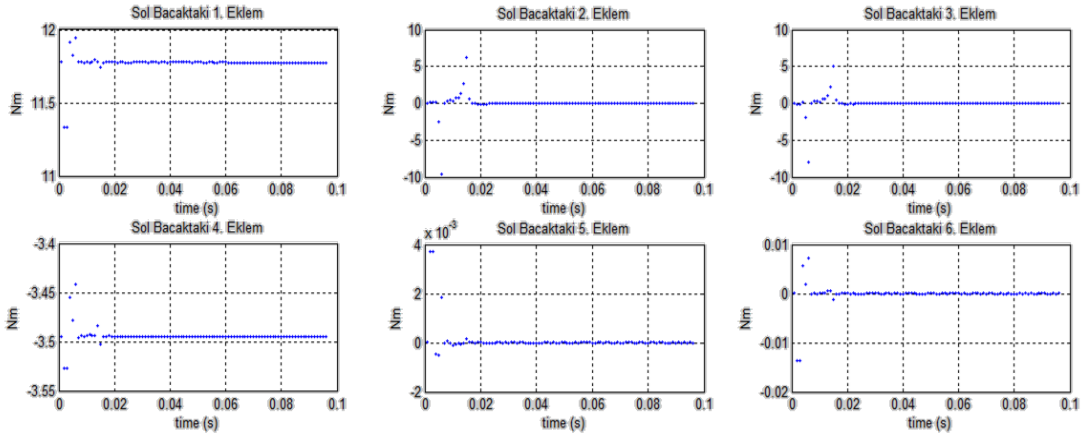
Çizelge 3.7: Sağ ve sol kolların başlangıç konfigürasyon açıları.

Eklem Sağ Kol	Eklem Açısı	Eklem Sol Kol	Eklem Açısı
1.Eklem	75°	1.Eklem	75°
2.Eklem	0°	2.Eklem	0°
3.Eklem	0°	3.Eklem	0°
4.Eklem	18°	4.Eklem	18°
5.Eklem	0°	5.Eklem	0°
6.Eklem	-60°	6.Eklem	-60°
7.Eklem	18°	7.Eklem	-18°

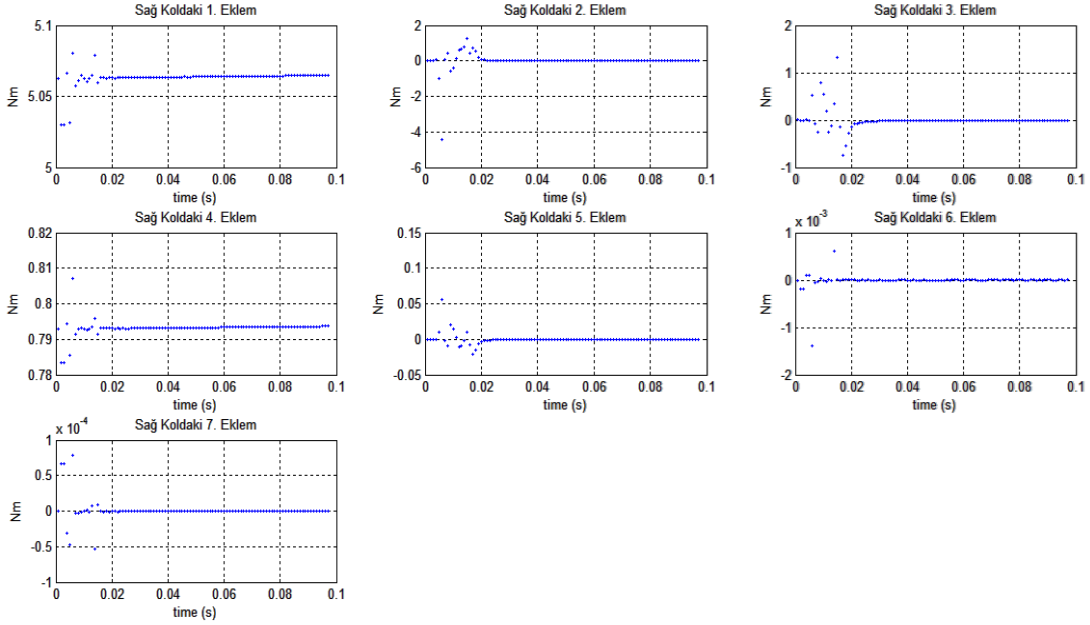
2. başlangıç konfigürasyonu için uygulanan üç farklı senaryonun grafikleri Şekil 3.18, Şekil 3.19, Şekil 3.20 ‘de verilmiştir.



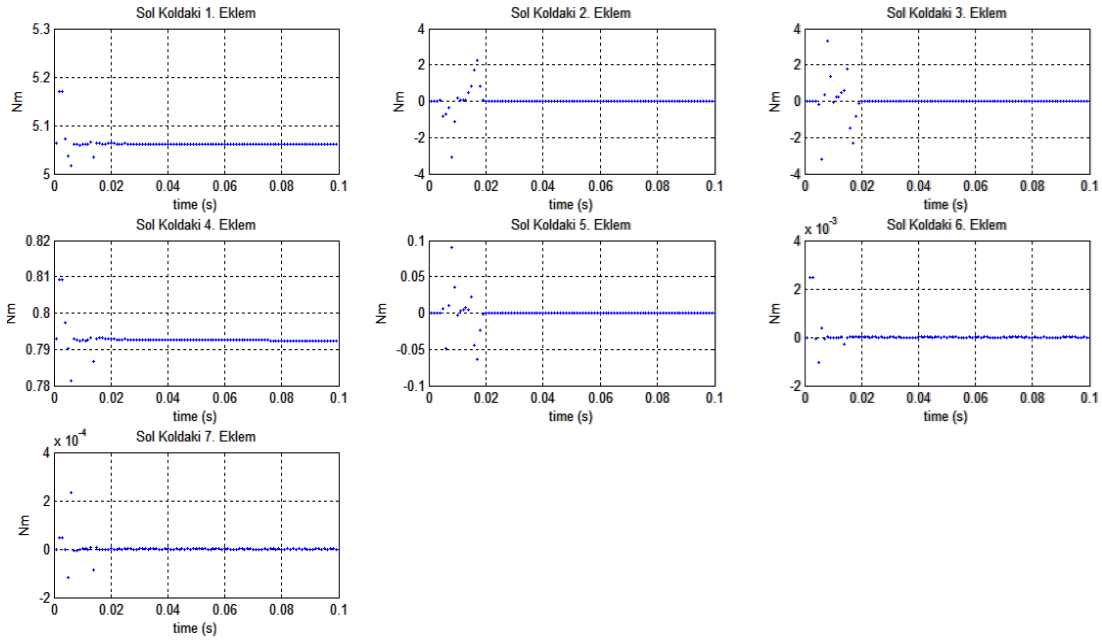
a)


Sol Bacaktaki 1. Eklem
Sol Bacaktaki 2. Eklem
Sol Bacaktaki 3. Eklem
Sol Bacaktaki 4. Eklem
Sol Bacaktaki 5. Eklem
Sol Bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3

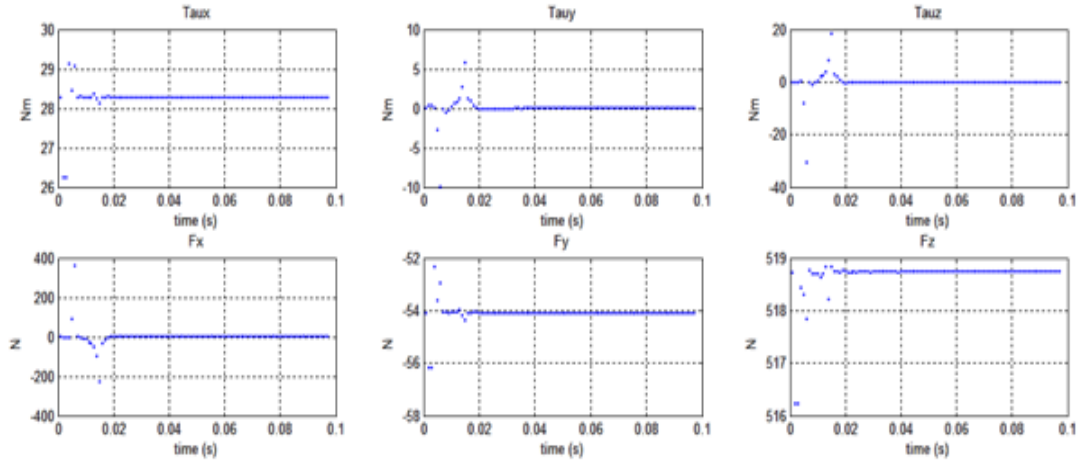
b)


Sağ Koldaki 1. Eklem
Sağ Koldaki 2. Eklem
Sağ Koldaki 3. Eklem
Sağ Koldaki 4. Eklem
Sağ Koldaki 5. Eklem
Sağ Koldaki 6. Eklem
Sağ Koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-3
x 10^-4

c)

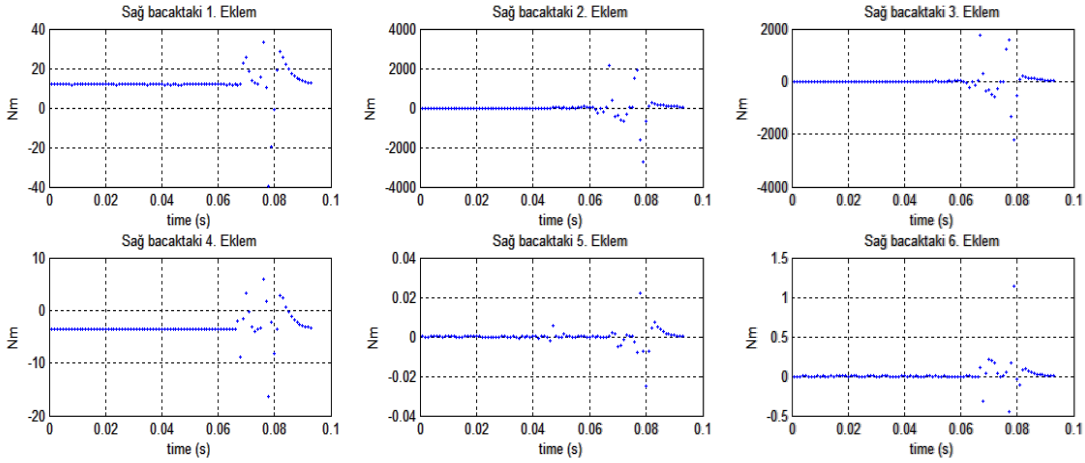


d)

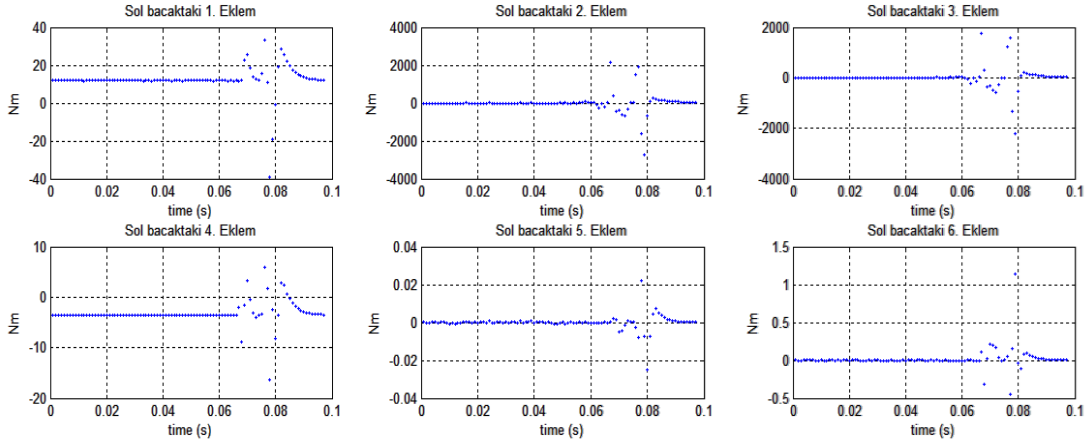


e)

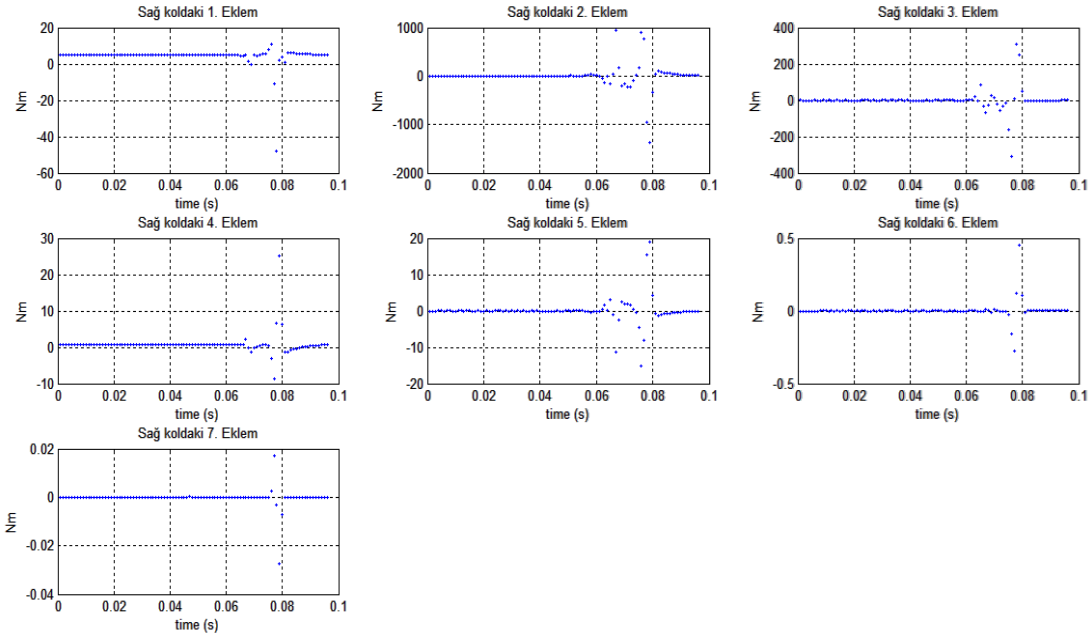
Şekil 3.18: Senaryo 1, bacaklar x dönme yönünde kilitli kollar serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemleri, **e)** gövdeye etkiyen kuvvetler


Sağ bacaktaki 1. Eklem
Sağ bacaktaki 2. Eklem
Sağ bacaktaki 3. Eklem
Sağ bacaktaki 4. Eklem
Sağ bacaktaki 5. Eklem
Sağ bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)

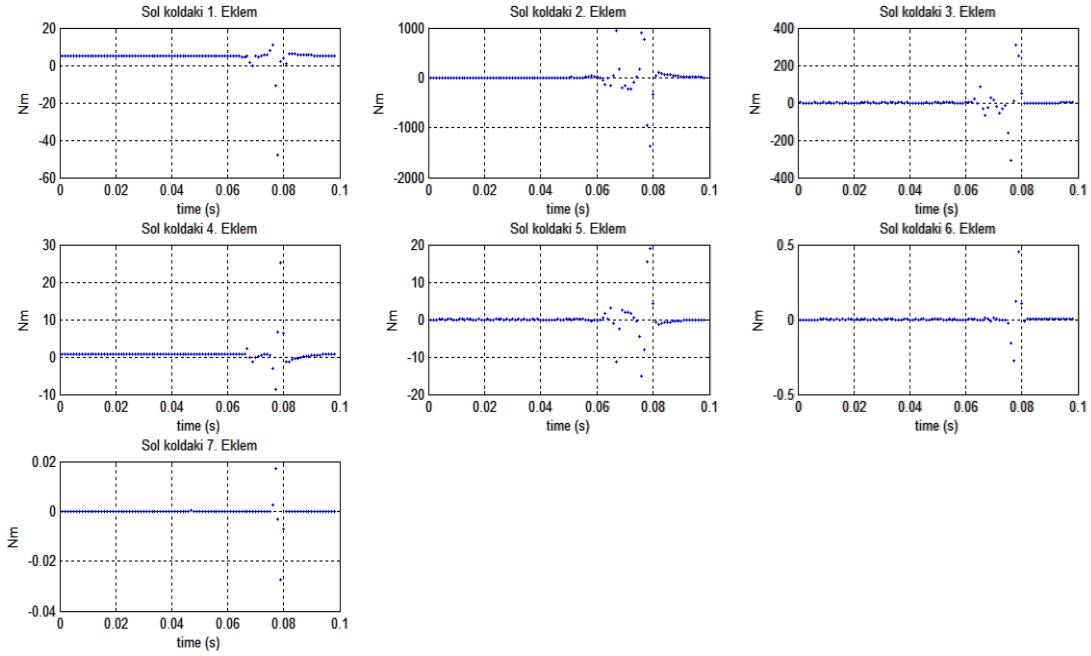
a)


Sol bacaktaki 1. Eklem
Sol bacaktaki 2. Eklem
Sol bacaktaki 3. Eklem
Sol bacaktaki 4. Eklem
Sol bacaktaki 5. Eklem
Sol bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)

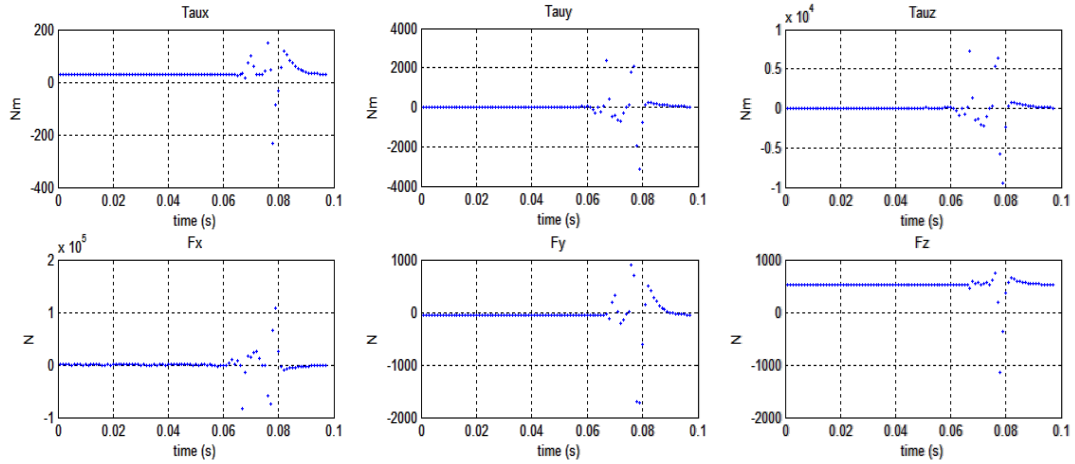
b)


Sağ koldaki 1. Eklem
Sağ koldaki 2. Eklem
Sağ koldaki 3. Eklem
Sağ koldaki 4. Eklem
Sağ koldaki 5. Eklem
Sağ koldaki 6. Eklem
Sağ koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)

c)

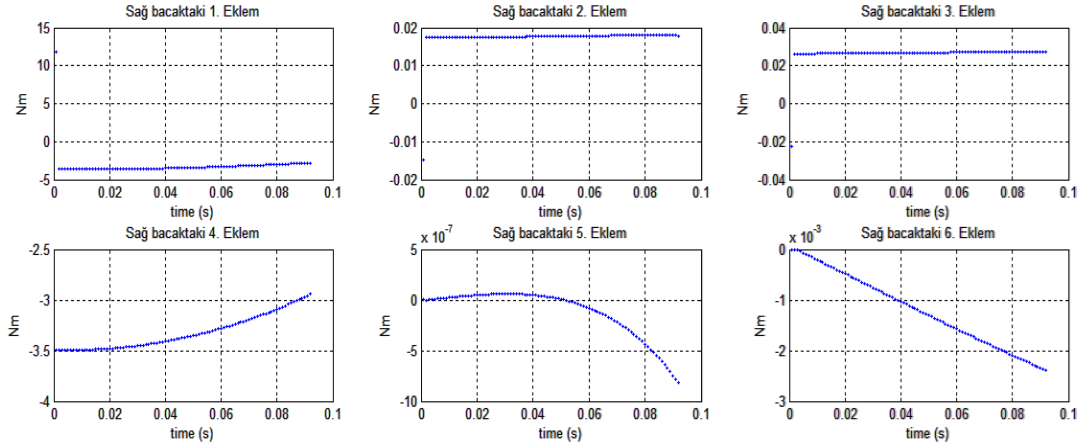


d)

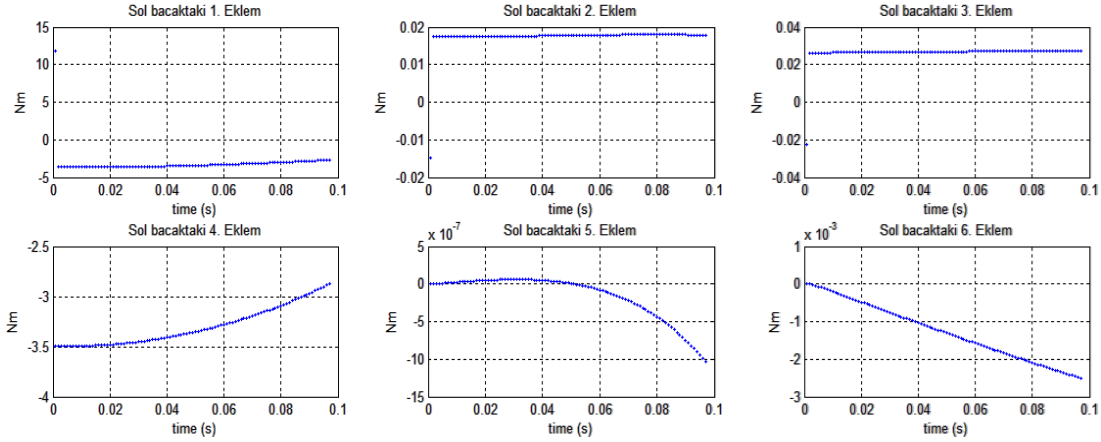


e)

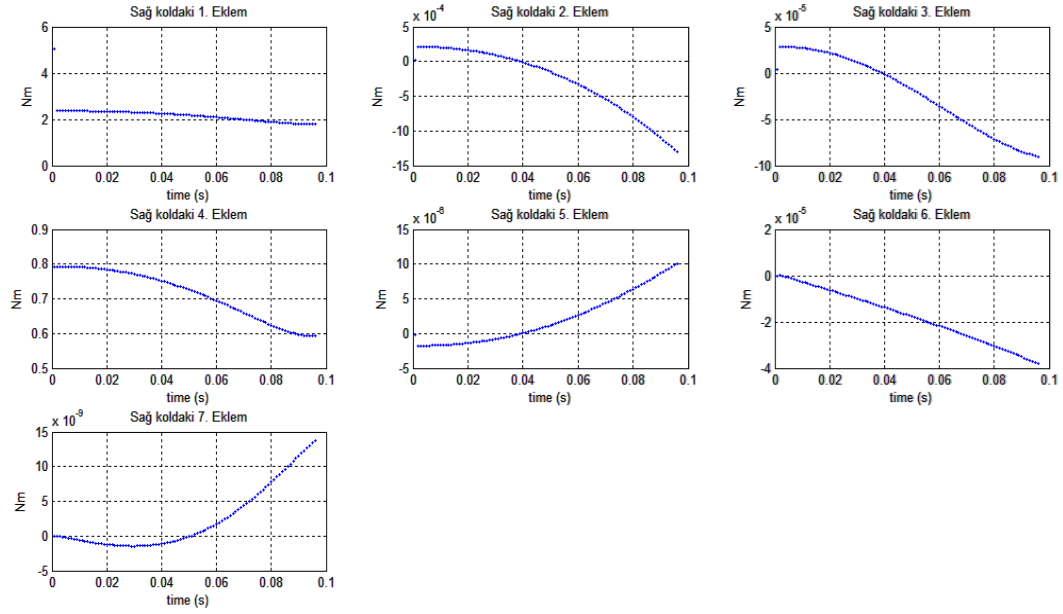
Şekil 3.19: Senaryo 2, kollar x dönme yönünde kilitli bacaklar serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemleri, e) gövdeye etkiyen kuvvetler


Sağ bacaktaki 1. Eklem
Sağ bacaktaki 2. Eklem
Sağ bacaktaki 3. Eklem
Sağ bacaktaki 4. Eklem
Sağ bacaktaki 5. Eklem
Sağ bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-7
x 10^-3

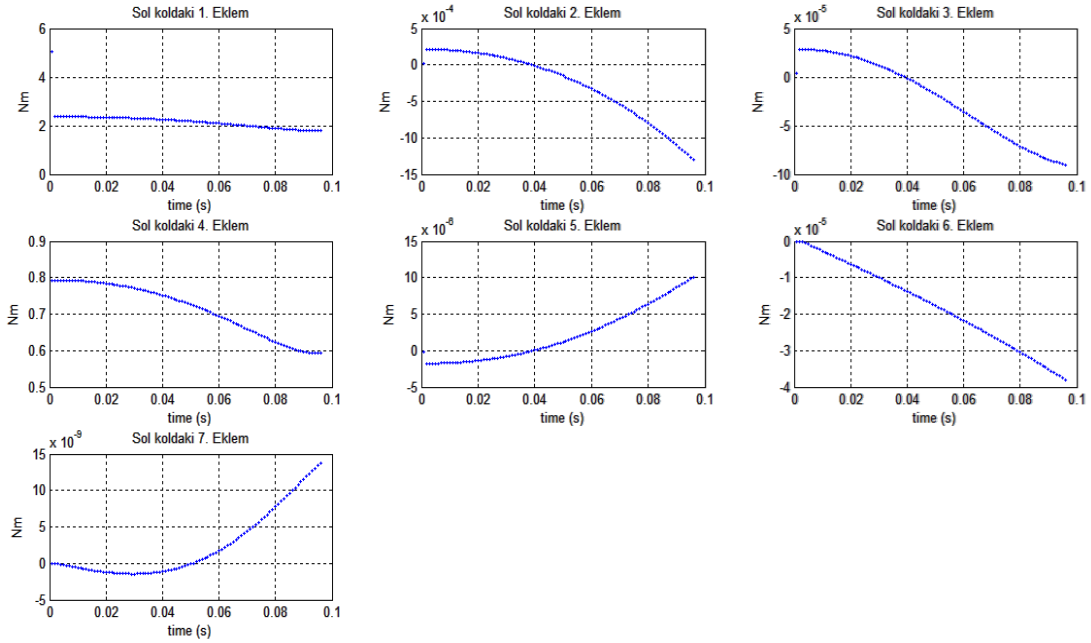
a)


Sol bacaktaki 1. Eklem
Sol bacaktaki 2. Eklem
Sol bacaktaki 3. Eklem
Sol bacaktaki 4. Eklem
Sol bacaktaki 5. Eklem
Sol bacaktaki 6. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-7
x 10^-3

b)


Sağ koldaki 1. Eklem
Sağ koldaki 2. Eklem
Sağ koldaki 3. Eklem
Sağ koldaki 4. Eklem
Sağ koldaki 5. Eklem
Sağ koldaki 6. Eklem
Sağ koldaki 7. Eklem
Nm
time (s)
x 10^-4
x 10^-5
x 10^-8
x 10^-9

c)



d)

Şekil 3.20: Senaryo 3, tüm eklemler serbest. **a)** sağ bacak eklemleri, **b)** sol bacak eklemleri, **c)** sağ kol eklemleri, **d)** sol kol eklemlerine etkiyen kuvvetler

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan tez çalışmasında uzaysal vektör cebri yöntemi ile dinamik analizi yapılan model kütle uzunluk gibi fiziksel özellikleriyle ortalama bir insan özelliklerindedir. Bir önceki bölümde de verilen grafiklerden görüleceği gibi yapılmış olan dinamik analiz ile insan vücudunda bulunan eklemlere her bir hareket anı için etki eden tork ve kuvvetler elde edilebilmektedir. Benzetim çalışmalarında farklı iki başlangıç anı için model bilgisayar ortamında izlenmiş ve oldukça doğru sonuçlar elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında eklemlerde herhangi bir kontrol olmadan üzerlerine gelen tork ve kuvvetlere ne şekilde cevap verdiği gözlemlenmiştir. Grafiklerde ilk zamanlarda oluşan pikler geçici durumlarla alakalı olup zamanla kararlı bir hal aldığı görülmektedir. Ayrıca sözde eklem tekniği olarak bahsedilen konu da benzetim çalışmasında gösterilmiştir. Bu yöntemle kilitlenen eklemlerin hareket etmediği vücudun kalan kısımlarının ise bu yeni duruma göre davrandığı ve bu davranışların gerçekle çok yakın olduğu gözlemlenmiştir. Bu kadar gerçeğe yakın sonuçları elde etmede uzaysal vektör cebri yönteminin özyinelemeli yapısı, hızlı ve kararlı cevaplar vermesi etkili olmuştur.

Geleceğe yönelik olarak yapılan bu çalışma ilerletilebilir ve engelli insanların hareket edebilmesi, insansı robotların hareket kontrolü gibi denge problemlerinde vücudun herhangi bir yerindeki maruz kalınan kuvvet hesaplanabilir. Yapay kasların optimal enerji sarfiyatı için gerekli olan tahrik miktarı bu hesaplamalarla yapılabilir. Özetle bu çalışma insansı robotların denge problemlerini çözmede, insan benzeri hareketler sergiletmede ve engelli insanlar için engelini ileri düzeyde ortadan kaldıran çalışmalara katkı sağlayabilir.

KAYNAKLAR

[1] Anderson, K. S. and Critchley, J. H., 2003. Improved order-n performance algorithm for the simulation of constrained multi – rigid - body *Multibody Systems Dynamics*, sayfa 9**,** 185– 212.

[2] Armstrong,W.W., 1979. Recursive solutions to the equations of motion of an n-link manipulator, In *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Montreal, sayfa 1342–1346.

[3] Ball, R. S., 1900. A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge University Press.

[4] Featherstone, R. ve **D. Orin**, 2000. Robot Dynamics: equations and algorithms, Proceeding 2000 ICRA. Millenium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation, sayı 1, sayfa 826-834.

[5] Featherstone, R., 1983. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias, *The International Journal of Robotics Research*, 2**,** 13–30.

[6] Featherstone, R., 2008. Rigid Body Dynamics Algorithms. Boston, MA, Springer US.

[7] Jain, A., 1991. Unified formulation of dynamics for serial rigid multibody systems, *Journal of Guidance*, 14**,** 531–542.

[8] Jain, A. and Rodriguez, G., 1993. An analysis of the kinematics and Dynamics of under-actuated manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **9,** 411–422.

[9] Jain, A. and Rodriguez, G., 1992. Spatial Operator Algebra for Multibody System Dynamics, Journal of the Astronautical Sciences, 40, sayı Ocak-Mart, sayfa 27-50.

[10] Jain, A., 2004. Robot and Multibody Dynamics Analysis and Algorithms.

[11] Jain, A., Rodriguez, G., 1999. Sensivity Analysis of Multibody Dynamics Using Spatial Operators , International Conference Scientific Computation and Differantial Equations, Avustralya.

[12] McLean, S., Erdemir, A., Herzog, W., Bogert, A., 2006. Model - based Estimation of muscle forces exerted during movements.

[13] Murray, R. M., Z. Li, S. S. Sastry, 1994. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press.

[14] Roberts, A., 2010. The Complete Human Body, 1. Baskı.

[15] Rodriguez, G., **Jain, A.**, **and Kreutz, K.**, 1992. Spatial operator algebra for Multibody systems dynamics , *The Journal of the Astronautical Sciences*, sayfa 40**,** 27–50.

[16] Rodriguez, G., 1987. Kalman filtering , smoothing and recursive robot arm forward and inverse Dynamics , *IEEE Journal of Robotics and Automation*.

[17] Rodriguez, G., 1989. Recursive forward dynamics for multiple robot arms moving a common task object, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.

[18] Rodriguez, G., **Kreutz-Delgado, K.**, **and Jain, A.**, 1991. Spatial operatör Algebra for manipulator modeling and control,*International Journal* of *Robotics Research*,**10,** 371–381.

[19] Rodriguez, G., 1990. Random field estimation approach to robot dynamics, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **20,** 1081–1093.

[20] Rodriguez, G., Kreutz - Delgado, K., 1992. Spatial Operator Factorization and Inversion of the Manipulator Mass Matrix , IEEE Transactions on Robotics and Automation, 8, sayı 1, sayfa 65-76.

[21] Siciliano, B., Khatib, O., 2008. Handbooks of Robotics, Springer.

[22] Tortora, G. J., Nielsen, M. T., 2012. Principles of Human Anatomy , 12. Baskı, John Wiley & Sons yayınları.

[23] Walker, M., Orin, D., 1982. Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, Journal of Dynamic Systems, Measurment and Control, sayı 104, sayfa 205-211.

[24] Yeşiloğlu, S. M., 2007. High Performance Dynamical Modeling of Complex Topology Systems, PhD Thesis. İstanbul Teknik Üniversitesi.

[25] Url-1, http://quizlet.com/16350355/types-of-synovial-joints-flash-cards/, alındığı tarih: 10.12.2012.

[26] Url-2, http://www.mathworks.com/help/physmod/sm/mech/ref/ revolute.html, alındığı tarih: 10.12.2012.

[27] Url-3, http://virtualphysics.imrc.kist.re.kr/classvp_p_joint.html, alındığı tarih: 10.12.2012

[28] Url-4, http://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_joint, alındığı tarih: 10.12.2012

[29] Url-5, http://www.mathworks.com/help/physmod/sm/mech/ref/ screw.html, alındığı tarih: 10.12.2012.

[30] Url-6, http://www.mathworks.com/help/physmod/sm/mech/ref/ planar.html, alındığı tarih: 10.12.2012.

[31] Url-7, http://www.mathworks.com/help/physmod/sm/mech/ref/ spherical.html, alındığı tarih: 10.12.2012.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Şahin ÇEVİK
Doğum Tarihi : 12/07/1988
E-mail : sahincevik.tr@gmail.com
Tel : 0505 746 68 87

Ehliyet : B sınıfı

Askerlik Durumu : Tecilli

Adres : Fevzi Çakmak Mh. Mehmet Akif Cd.
Değerli Sk. No: 12 Darıca/KOCAELİ

EĞİTİM DURUMU
Lisans: Elektrik-Elektronik Mühendisliği (Atatürk Üniversitesi 2004-2008)

Yüksek Lisans: Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği (İstanbul Teknik Üniversitesi 2009-2013)

İŞ DENEYİMLERİ
Araştırma Görevlisi – Gümüşhane Üniversitesi (2010-2011)

İşletme ve Bakım Mühendisi – TEİAŞ (2011)

YABANCI DİL
İngilizce