ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ VE CALDERON-ZYGMUND SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Suna AY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Suna AY tarafından hazırlanan "**Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü Ve Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı**" adlı tez çalışması 19/10/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matematik Anabilim Dalı
Ankara Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü Ve Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (19/10/2022).

Suna AY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ VE CALDERON-ZYGMUND SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Suna AY

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Calderon-Zygmund singüler integral operatörü verilmiştir. Üçüncü bölümde, Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılıkları verilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılığı verilmiştir.

2022, 52 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Morrey Uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzayları, Calderon-Zygmund singüler integral operatörü, Hardy-Littlewood maksimal operatörü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

BOUNDEDNESS OF THE HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR AND THE CALDERON-ZYGMUND SINGULAR INTEGRAL OPERATORS IN THE GENERALIZED MORREY SPACES

Suna AY

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic concepts and definitions required in the following chapters and Hardy-Littlewood maximal operator, Calderon-Zygmund singular integral operator are given. In the third chapter, the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator and Calderon-Zygmund operator in Morrey spaces are given. In the fourth chapter, generalized Morrey spaces, the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator in generalized Morrey spaces and the boundedness of Calderon-Zygmund Singular Integral operator in generalized Morrey spaces are given.

2022, 52 pages

Keywords: Morrey spaces, Generalized Morrey spaces, Calderon-Zygmund singular integral operatör, Hardy-Littlewood maximal operatör.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren ve tüm bu süreçte manevi desteğini daima hissettiğim çok değerli ve gelecekteki hayatında çok daha başarılı olacağına inandığım kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli ve tüm bu süreçte maddi ve manevi desteğini daima hissettiğim çok değerli hocam Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Yine çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Abbas Hussein Ahmed BAKAR'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Suna AY
Çankırı, Ekim 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1 Temel Tanım ve Teoremler **3**

2.2 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü **18**

2.3 Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörü **23**

3. $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ VE CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIKLARI **32**

3.1 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzayları **32**

3.2 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı **33**

3.3 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı **35**

4. $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖR VE CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI **38**

4.1 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları **38**

4.2 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı **41**

4.3 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı **45**

KAYNAKLAR **50**

ÖZGEÇMİŞ **52**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Reel Öklid uzayı
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\|f\|$	f nin normu
L_p	Lebesgue Uzayı
L_p^{loc}	Lokal integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı
WL_p	Zayıf Lebesgue Uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mu(A)$	A kümesinin ölçüsü
$Q(x,r)$	x merkezli kenar uzunluğu r olan küp
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
L_p^*	L_p uzayının duali
Tf	f nin singüler integrali
Δf	f nin Laplace operatörü
$\hat{f}$	f nin Fourier dönüşümü
$\mathrm{s}uppf$	f nin desteği
$f * g$	f ile g nin konvolüsyonu
$\mathbb{S}^{n-1}$	n-boyutlu birim küre
ν_n	Birim yuvarın hacmi
ω_{n-1}	Birim kürenin yüzey alanı

1. GİRİŞ

Harmonik analizde klasik operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki norm eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. Maksimal fonksiyon, Hardy-Littlewood (Hardy and Littlewood 1930) tarafından $\mathbb{R}$ üzerinde bir boyutlu olarak ortaya konulmuş ve Wiener tarafından 1939 yılında $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayına genelleştirilmiştir. f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere $Mf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

ile tanımlanan M operatörüne Hardy-Littlewood maksimal operatörü denir.

Singüler integraller Mihlin, Calderon ve Zygmud'un çalışmaları ile başlamış ve son yıllarda çok ilerlemeler olmuştur. Singüler integraller konusu, kısmi diferensiyel denklemler, operatör teorisi, çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisi, Fourier serileri, matematiksel fizik ve daha birçok alanlarda uygulamaları bulunan popüler bir konudur. İki tür singüler integral operatörü vardır: Konvolüsyon tipli olanlar ve konvolüsyon tipte olmayanlar. Bu çalışmada konvolüsyon tipli singüler integralleri inceleyeceğiz. Tf Calderon-Zygmund singüler integrali, $f \in L_p$ ve K Calderon-Zygmund çekirdeği olmak üzere

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(y)f(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanır. Calderon-Zygmund singüler integral operatörü Riesz ve Hilbert dönüşümlerinin bir genelleştirmesidir. Hilbert dönüşümü singüler integrallerin ilk örneği olup üst yarı düzlemde analitik fonksiyonların sınır değer problemlerinde kullanılmaktadır. Singüler integral operatörlerinin, çeşitli fonksiyon uzaylarında sınırlılık koşullarının belirlenmesi bu alandaki çalışmaların en önemli problemlerinden birisidir. Bu konu son yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bugüne kadar B. Muckenhoupt, R. Wheeden, C. Fefferman, R.R. Coifman, K.F. Anderson, D.S. Kurtz, S. Samko, V. Burenkov, V. Kokilashvili, V. Guliyev, A. Meskhi, Y. Ding, S.Z. Lu gibi matematikçiler bu sahada çalışmışlardır.

$M_{p,\lambda}$ Morrey uzayı C.B. Morrey tarafından tanımlamıştır, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ olmak üzere

$$M_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ f \in L_p(\Omega) : \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonların uzayıdır, burada $B(x,t)$, x merkezli t yarıçaplı yuvarı belirtmektedir (Morrey 1938).

Morrey uzaylarında, Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılık koşulları, F. Chierenza, M. Frasca (Chiarenza and Frasca 1987) ve V.S. Guliyev (Guliyev 2009) tarafından elde edilmiştir. Morrey uzaylarında, Riesz potansiyelinin sınırlılık koşulları ise, Adams (Adams 1975), Spanne (Peetre 1966) ve V.S. Guliyev (Guliyev 1999) tarafından ispatlanmıştır. V.S. Guliyev doktora, tezinde ortaya koyduğu yeni bir metot ile harmonik analizin integral operatörleri için Lie gruplarında ve $\mathbb{R}^n$ de sınırlılıkları elde edilmiştir. V.S. Guliyev ile birlikte V.I. Burenkov, H.V. Guliyev, S. Samko, H. Hasanov, A. Şerbetçi ve T. Tararykova gibi araştırmacılar Morrey tipli uzaylar başta olmak üzere diğer fonksiyon uzaylarında da yeni sonuçlar elde etmiştir. (Guliyev 1999; Burenkov and Guliyev 2004; Burenkov, Guliyev and Guliyev 2007).

2009 yılında V.S. Guliyev, matematik literatüründe büyük öneme sahip olan $M_{p,w}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarının normalleştirilmiş normunu tanımlayarak, bu uzayda harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını incelemiştir.

Bu çalışmada önce $M_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılıkları Guliyev metodu kullanılarak verilecektir. Daha sonra genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin sınırlılığı Guliyev metodu kullanılarak ispatlanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmamızın ikinci bölümünde ileride gerekli olan bazı önemli bilgiler verilmiştir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 K bir cisim ve X, K üzerinde vektör uzayı olsun. Eğer $\|x\| : X \to \mathbb{R}_+$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde **norm** denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine **normlu uzay** denir.

N3) şartı bir $C > 1 \; için \; \|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ olacak şekilde sağlanıyorsa dönüşüme **quasi norm** denir.

Tanım 2.1.2 $X \; ve \; Y$ aynı cisim üzerinde iki vektör uzayı olsun. $D(T)$ tanım bölgesi, $R(T)$ değer bölgesi olmak üzere bir $T: D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ dönüşümüne operatör denir.

Örneğin bir $T: C[a, b] \to C[a, b]$ integral operatörünü

$$Tf(x) = \int_a^x f(y)dy\,, \qquad x \in [a, b]$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Bir $T: D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ operatörü için $\forall \, x, y \, \in D(T)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$T(x + y) = T(x) + T(y)$ ve $T(\alpha x) = \alpha T x$ oluyorsa, T operatörüne lineer operatör denir.

T operatörü için $T(x + y) \leq T(x) + T(y)$ oluyorsa, T operatörüne alt lineer operatör denir.

T operatörün için $c, C > 0$ f ve g den bağımsız sabitler olmak üzere h.h.y.

$|T(\lambda f)(x)| \leq c|\lambda||Tf(x)|$ ve $|T(f+g)(x)| \leq C(|Tf(x)| + |Tg(x)|)$ oluyorsa, T operatörüne yarı lineer operatör denir. (Hao 2012)

$T: X \to Y$ lineer operatör ve $\forall\, x, y \in D(T)$için $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ olacak şekilde $C > 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayılarının en küçük alt sınırına T sınırlı lineer operatörünün normu denir ve

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

biçiminde verilir. (Musayev ve Alp 2000)

Tanım 2.1.3 Bir $T: X \to Y$ operatörü için $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in D(T)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa T operatörüne $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir.

Teorem 2.1.4 $T: X \to Y$ operatörü $D(T)$ de süreklidir ancak ve ancak T operatörü $D(T)$ de sınırlı ise.

Tanım 2.1.5 Bir X kümesinin altkümelerinin bir sınıfı Σ olsun Eğer Σ aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu durumda Σ sınıfına ***σ*–cebir** (σ–cisim) adı verilir.

a) $X \in \Sigma$;

b) $S \in \Sigma \implies \mathrm{X}\backslash\mathrm{S} = S^c \in \Sigma$;

c) $S_n \in \Sigma, \mathrm{n} = 1,2, \ldots \implies \cup_{n=1}^{\infty} S_n \in \Sigma$.

Bu durumda bir $S \in \Sigma$ kümesine **ölçülebilir küme** denir.

Tanım 2.1.6 X kümesi verilsin ve Σ, X in altkümelerinin bir σ–cebiri olsun. Eğer bir $\mu: \Sigma \to [0,\infty]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu taktirde μ ye **ölçüm** denir:

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) Eğer $S_j \in \Sigma, j = 1,2, \ldots$, ikişer ikişer ayrık kümeler ise bu taktirde

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j).$$

(X, Σ, μ) üçlüsüne **ölçüm uzayı** denir. (X, Σ) ikilisine ise, ölçü uzayı denir.

μ pozitif ölçü olmak üzere; Eğer $A, B \in \Sigma$ ve $A \subset B$ ise, bu durumda $\mu(A) \leq \mu(B)$ dir.

Eğer $A_j \in \Sigma, j = 1,2, \ldots$ ve $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, ise, o zaman $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, A \subset \mathbb{R}\right\}$$

sayısına A kümesinin Lebesgue **dış ölçüsü** denir.

$E \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

oluyorsa E kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir.

Teorem 2.1.7 (Lebesgue ölçüsünün varlığı) Aşağıdaki özelliklere sahip $\mathbb{R}^n$ nin altkümelerinin bir Σ σ-cebiri ve Σ üzerinde bir pozitif μ ölçüsü vardır:

(i) $\mathbb{R}^n$de her açık küme Σ ya aittir.

(ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, o zaman $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$ olur.

(iii) Eğer $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1,2, \ldots, n\}$ ise, bu taktirde $A \in \Sigma$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

(iv) Eğer $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Sigma$ ise, $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Sigma$ ve $\mu(x + A) = \mu(A)$ olur (öteleme değişmezliği).

Σ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue anlamında ölçülebilir altkümeler denir. μ fonksiyonuna ise, $\mathbb{R}^n$de **Lebesgue anlamında ölçü** denir. Lebesgue ölçüsü, $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$) teki hacmin (uzunluğun, alanın) genellemesi olduğundan $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$, A kümesinin hacmi (uzunluğu, alanı) yerine **A kümesinin ölçüsü** olarak adlandırılır. (Adams ve Fournier 2003).

Tanım 2.1.8 Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ve $\mu(B) = 0$ olmak üzere herhangi bir koşul B^c üzerinde sağlanıyorsa A üzerinde **hemen her yerde** doğrudur (h.h.y.) denir. (Adams ve Fournier 2003).

Tanım 2.1.9 (X, Σ_1, μ_1) ve (X, Σ_2, μ_2) ölçüm uzay olsun. Eğer $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ fonksiyonu için $A \subset \Sigma_2$ iken $f^{-1}(A) \subset \Sigma_1$ oluyorsa X üzerinde **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Teorem 2.1.10 (X, Σ, μ)ölçüm uzayı olsun. $f: X \to [0, \infty]$ fonksiyonuna her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \Sigma$ özelliğini sağlıyorsa ölçülebilir fonksiyondur. Örneğin sabit fonksiyonlar ölçülebilir fonksiyondur.

Tanım 2.1.11 $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonuna A kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir.

Tanım 2.1.12 Bir $s: X \subset \mathbb{R}^n \to \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$,

$$s = \sum_{J=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x), \qquad A_j = \{x \in \mathbb{R}^n: s(x) = a_j\} \subset X$$

ile tanımlı s fonksiyonuna **basit fonksiyon** denir.

Teorem 2.1.13 Aşağıdaki fonksiyonlar ve kümeler ölçülebilir olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

a) f fonksiyonu A da sınırlı ve $\mu(A) < \infty$ ise, $f \in L_1(A)$.

b) Eğer her $x \in A$ için $a \leq f(x) \leq b$ ve $\mu(A) < \infty$ ise,

$$a\mu(A) \leq \int_A f(x)dx \leq b\mu(A).$$

c) Eğer $f \in L_1(A)$ ise, o zaman $|f| \in L_1(A)$ ve

$$\left| \int_A f(x)\, dx \right| \leq \int_A |f(x)|\, dx$$

dir.

d) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, o zaman

$$\int_A f(x)\, dx = 0$$

Tanım 2.1.14 $1 < p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ile q iki reel sayısına **eşlenik indis** denir.

Teorem 2.1.15 (Young Eşitsizliği).

$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır. (Brezis 2010).

Tanım 2.1.16 $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayında bir vektör (nokta) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere x in normu $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$ ile verilir. $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçüsünü $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ de f fonksiyonun Lebesgue integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

biçiminde verilir.

Küresel koordinatlarda $r = |x|$ olmak üzere $\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx$ integralinin hesabı için

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi,\ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

$$x_1 = r\cos\theta_1$$

$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$$

$$x_3 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots . \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}$$

$$x_n = r \sin\theta_1 \dots . \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}$$

alınır. Burada Jakobiyen

$$J(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(r)\, J(r,\theta) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \int_0^{\infty} r^{n-1} f(r) dr \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^{\infty} r^{n-1} f(r) dr$$

elde edilir. Genel olarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r \sin\theta_1, \dots, \sin\theta_{n-1})\, r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,\theta) r^{n-1} d\sigma dr$$

biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ birim küresi üzerinde dx tarafından belirlenen yüzeyi alanı elemanını belirtmektedir. $\mathbb{R}^n$ de birim kürenin yüzey alanı

$$\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}| = n v_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ile verilir. Ayrıca $0 < x < \infty$ olmak üzere gama fonksiyonu $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} dt$ ile tanımlanır.

Tanım 2.1.17 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_\Omega |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

kümesine p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayındaki bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde verilir bu normla birlikte L_p ye Lebesgue uzayı adı verilir. (Hao 2012, Stein 1970, Adams and Fournier 2003, Barttle 1995).

Tanım 2.1.18 (Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonların Uzayı)

$$L_p^{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : K \subset \Omega \text{ kompakt}, f \text{ ölçülebilir ve } \int_K |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

$1 \leq p \leq \infty$ için $L_p(\Omega) \subset L_p^{loc}(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega)$ olur.

Örnek 2.1.19 $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. $f \in L_1^{loc}\big((0,1)\big)$ $fakat$ $f \notin L_1\big((0,1)\big)$ ve $f \notin L_1^{loc}(\mathbb{R})$ dir.

Tanım 2.1.20 $p = \infty$ durumunda

$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to R : f$ ölçülebilir ve $|f(x)| < C$ h. h. y. $x \in \Omega$ için $C > 0$ vardır$\}$ uzayı $\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \underset{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \mu(\Omega)=0}}{\text{ess sup}} |f(x)| < \infty$ normu ile tanımlı sınırlı fonksiyonların uzayına denir.

Lemma 2.1.21 $f \in L_\infty(\Omega)$ ve f sürekli ise, $\|f\|_{L_\infty} = \sup|f(x)|$. Eğer f sürekli değilse $f(x) > \|f\|_{L_\infty}$ olan bütün x lerin kümesi, sıfır kümesidir.

Örnek 2.1.22 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ olsun. h.h.y. $|f(x)| \leq 1$ olduğundan ess sup $|f(x)| = 1$ Böylece $f \in L_\infty(\Omega)$ elde edilir.

Lebesgue Uzayının Özellikleri

1) $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L_p bir vektör uzaydır.

2) $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L_p bir Banach uzayıdır.

3) L_p refleksif bir uzaydır. Gerçekten, $1 < p < \infty$ iken $\left(L_p^*\right)^* = L_p$ olduğundan L_p refleksif bir uzaydır.

4) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p ayrılabilir bir uzaydır. Gerçekten, $1 \leq p < \infty$ için $C_c(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur. $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n), \forall \varepsilon > 0$ için $\|f - f_n\|_{L_p} < \varepsilon$ olacak şekilde $(f_n) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ vardır. (Brezis 2010, Guliyev 1994) Sonuç olarak $C_c(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L_p(\mathbb{R}^n)$ de yoğun ve sayılabilir olduğundan $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.1.23 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ölçülebilir f fonksiyonları için $\|f\|_{WL_p(\Omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \infty$ yarı normuna sahip uzaya zayıf Lebesgue uzayı denir. $WL_\infty(\Omega)$ veya $L_{p,\infty}(\Omega)$ şeklinde gösterilir.

L_p normunun üçgen eşitsizliği yardımıyla $\|f + g\|_{WL_p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{WL_p} + \|g\|_{WL_p}\right)$ elde ederiz. Bu yüzden WL_p yarı normlu uzaydır (Hao 2010).

Teorem 2.1.24 $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\Omega) \subset WL_p(\Omega)$ ve $\|f\|_{WL_p} \leq \|f\|_{L_p}$ sağlanır.

Örnek 2.1.25 $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ olmak üzere $f(x) \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ fakat $f(x) \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Gerçekten, $p = 1$ iken $f(x) = |x|^{-n}$dir. $f \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ fakat $f \in WL_1(\mathbb{R}^n)$ olur:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n}\,dx = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1}t^{-n}dtd\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma \int_0^{\infty} t^{-1}dt = |\mathbb{S}^{n-1}|\ \ln t\,|_0^{\infty} = \infty,\ \ f \notin L_1(\mathbb{R}^n)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|^{-n}| > t\}) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|^{-n}>t\}} dx = \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|< t^{-\frac{1}{n}}\right\}} dx = \int_{B(0,t^{-\frac{1}{n}})} dx =$$

$= \mu\left(B(0,t^{-\frac{1}{n}})\right) = v_n\left(t^{-\frac{1}{n}}\right)^n = v_n t^{-1}$ olduğundan

$$\| |x|^{-n}\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0}\ t\,\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|^{-n}| > t\}) = \sup_{t>0} t v_n t^{-1} = \sup_{t>0} v_n = v_n < \infty$$

ve buradan $f \in WL_1(\mathbb{R}^n)$elde edilir.

Tanım 2.1.26 $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir f fonksiyonu olsun. $f_*: [0,\infty) \to [0,\infty]$,

$f_*(\lambda) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > \lambda\}),\quad \lambda \geq 0$

fonksiyonuna f nin **dağılım fonksiyonu** denir.

Dağılım Fonksiyonun Temel Özellikleri:

1. $|f(x)| \leq |g(x)| \implies f_*(\lambda) \leq g_*(\lambda)$

2. $0 < p < \infty$ ve $\lambda > 0$ için

$$f_*(\lambda) \leq \lambda^{-p} \int_{\{x:\ |f(x)|\geq\lambda\}} |f(x)|^p\,dx \leq \lambda^{-p}\|f\|_p^p$$

3. $1 \leq p < \infty, f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p f_*(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^p f_*(\lambda) = 0$$

Teorem 2.1.27 (Markov Eşitsizliği)

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.28 Markov eşitsizliğinin özel hali olarak eğer $f \geq 0$ ise,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

eşitsizliğine Chebyshev eşitsizliği denir.

Teorem 2.1.29 $f(x)$ $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir fonksiyon olsun. O zaman

1) $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\})\, dt = p \int_0^\infty t^{p-1} f_*(t)\, dt$$

sağlanır. (Hao 2012, Cruz-Uribe and Fiorenza 2013)

2) $\|f\|_\infty = \inf\{t: f_*(t) = 0\}$ dir.

Teorem 2.1.30

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f$$

sağlanır. (Grafakos 2004)

Teorem 2.1.31 (Hölder Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ile q iki reel sayı olsun.

Eğer $f_1 \in L_p(\Omega)$ ve $f_2 \in L_q(\Omega)$ ise bu durumda $f_1 f_2 \in L_1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |f_1 f_2|\, dx = \|f_1 f_2\|_1 \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_q$$

dir. (Brezis 2010)

Teorem 2.1.32 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$, $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} |f_1(x) \dots f_n(x)| dx \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_n\|_{p_n}$$

sağlanır.

Teorem 2.1.33 (Minkowski Eşitsizliği)

p ile $q, 1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olsun. Eğer $f_1, f_2 \in L_p(\Omega)$ ise, $f_1 + f_2 \in L_p(\Omega)$ dedir, ayrıca

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

dir. (Brezis 2010)

Teorem 2.1.34 (Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği (Minkowsky integral eşitsizliği)) (X, Σ_1, μ_1) ve (Y, Σ_2, μ_2) ölçüm uzayları ve $F: X \times Y \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\left(\int_Y \left| \int_X F(x,y) d\mu_1 \right|^p d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |F(x,y)|^p d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1$$

sağlanır, $p > 1$ için eşitsizliğin her iki tarafı sonludur.

Tanım 2.1.35 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir f fonksiyonu için h.h.y. $|f(x)| < C$ olacak şekilde bir $C \geq 0$ sabit sayısı varsa, Ω üzerinde h.h.y. **esas sınırlıdır** denir. C sabit sayılarının en büyük alt sınırına Ω üzerinde $|f|$ in **esas supremumu** denir.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\\ \mu(\Omega)=0}}|f(x)| = \inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\\ \mu(\Omega)=0}}\{\, C : |f(x)| \le C \,\}$$

veya ess sup $|f(x)| = \inf\{\, C : \mu(\{\, x : |f(x)| > C \,\}) = 0\}$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımdan Ω üzerinde h.h.y. $|f(x)| \le \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega\\ \mu(\Omega)=0}}|f(x)|$ elde edilir.

Tanım 2.1.36 $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $z = (z_1, \dots, z_n)$ olmak üzere $B = B(x,t) = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - z| < t\}$ ile x merkezli t yarıçaplı açık yuvarı ve ${}^cB(x,t)$ ifadesi ile de bu açık yuvarın tümleyenini göstereceğiz.

Açık olarak

$$\int_{B(x,t)} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_{B(x,t)}\,dy$$

ifade etmektedir.

$B(x,t)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü $\mu\big(B(x,t)\big) = |B(x,t)|$ ve $\mathbb{R}^n$ de birim yuvarın hacmi

$$v_n = \mu\big(B(0,1)\big) = |B(0,1)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$|B(x,t)| = |B| = \int_B dx = v_n t^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} t^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{n}|\mathbb{S}^{n-1}|t^n$$

dir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$Q = Q(x,t) = \{y \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|) \le t\}$$

x merkezli, kenar uzunluğu t olan kübü ifade etmektedir. $Q(x,t)$ küpünün ölçüsü

$$|Q(x,t)| = |Q| = \int_Q dx$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.1.37 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı kümenin kapanışına, yani $supp\ f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ kümesine ***f* nin desteği** denir.

Eğer $supp\ f$ kümesi kompakt ise, f ye **kompakt destekli fonksiyon** denir.

Tanım 2.1.38 $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega): K \text{ kompakt ve } \forall\, x \in \Omega \setminus K\ için\ f(x) = 0\}$ kompakt destekli bütün sürekli fonksiyonların uzayını ifade etmektedir. (Guliyev 1994)

$C^k(\Omega)$ uzayı ise, $k \geq 0$ olmak üzere Ω üzerinde k kez sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon uzayını ifade etmektedir.

Tanım 2.1.39 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ her mertebeden kısmi türevi sürekli olan f fonksiyonuna **düzgün fonksiyon** denir. $f \in C_\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir ve açık olarak

$$C_\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C_k(\Omega)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.40 (X, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonları için

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x \in X\ ,\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **düzgün yakınsaktır** denir.

$\forall \varepsilon > 0, x \in X\ \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **noktasal yakınsaktır** denir.

$\exists\, M \subset X, \mu(M) = 0$ olsun. $\forall \varepsilon > 0,\ x \in X \setminus M : \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **h.h.y. yakınsaktır** denir.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ \|f_n - f\|_p = (\int |f_n - f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$
oluyorsa
$(f_n) \in L_p$ dizisi $f \in L_p$ fonksiyonuna $\boldsymbol{L_p}$ **yakınsaktır** denir.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ \|f_m - f_n\|_p = (\int |f_m - f_n|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ oluyorsa $(f_n) \in L_p$ dizisine $\boldsymbol{L_p}$ **Cauchy dizisidir** denir.

$\forall \lambda > 0$ için $\lim_{n\to\infty} |\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}| = 0$ oluyorsa (f_n) dizisi f e **ölçüsel yakınsaktır** denir.

$\forall \lambda > 0$ için $\lim_{m,n\to\infty} |\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \lambda\}| = 0$ oluyorsa (f_n) dizisine **ölçüsel Cauchy dizisidir** denir. (Bartle 1995)

Örnek 2.1.41 $(f_n) = n^{-\frac{1}{p}}\chi_{[0,n]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. L_p yakınsak değildir.

$(f_n) = \chi_{[\,n,n+1\,]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna her yerde yakınsaktır. Ama ölçüsel yakınsak değildir.

$(f_n) = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna h.h.y. yakınsaktır ve ölçüsel yakınsaktır. (Bartle 1995)

Tanım 2.1.42 T bir alt lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $T: L_p(\mathbb{R}^n) \to WL_q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ise bu takdirde T ye zayıf (p, q) tipli operatör adı verilir.

Başka bir deyişle T zayıf (p, q) tipli operatör ise $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve λ pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q$$

olan bir $C > 0$ sabiti mevcuttur.

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için bir $C > 0$ sabiti bulunabiliyorsa öyle ki $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ sağlanıyorsa T operatörü sınırlıdır ve kuvvetli (p, q) tipli olarak adlandırılır. (Musayev ve Alp 2000)

$p = q$ iken zayıf tipli veya kuvvetli tipli sağlanır ve T zayıf (p, p) tipi olarak da adlandırılır. Bir T operatörü kuvvetli (p, q) tipli iken açık olarak T zayıf (p,q) tiplidir. Tersi her zaman doğru değildir. Eğer $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}$ alınırsa,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| = \int_{E_\lambda} d\mu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\mu \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q$$

elde edilir.

Tanım 2.1.43 $x = (x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

operatörüne $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü denir.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun. Bu durumda

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

denklemine Laplace denklemi veya potansiyel denklemi denir. Bu denklemin çözümlerine potansiyel fonksiyonlar veya harmonik fonksiyonlar denir.

Tanım 2.1.44 $f_1 \; ve \; f_2$ $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$h(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x - y)\, f_2(y) dy$$

biçiminde verilen h fonksiyonuna f_1 ve f_2 nin konvolüsyonu denir.

Örnek 2.1.45 $\mathbb{R}$ üzerinde $0 < b \leq a$ olmak üzere $f = \chi_{(-a,a)}$ ve $g = \chi_{(-b,b)}$ olsun.

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 2b, & |x| \leq a - b \\ a + b - |x|, & a - b \leq |x| \leq a + b. \\ 0, & a + b \leq |x| \end{cases}$$

Teorem 2.1.46 (Young Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_1(\Omega)$ ve $f * g \in L_p(\Omega)$ olsun.

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Tanım 2.1.47 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ iç çarpımı olmak üzere

$\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi \rangle}\, dx$$

ile tanımlı fonksiyona f in Fourier dönüşümü denir.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri:

$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

1. $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$
2. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$
3. $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Teorem 2.1.48 (Hausdorf-Young eşitsizliği)

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $2 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\left\|\hat{f}\right\|_p \leq C_p \|f\|_q$ gerçekleşir. (Grafakos 2004)

Tanım 2.1.49 f ve $\hat{f}$ integrallenebilir olmak üzere

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x,\xi \rangle}\, d\xi$$

ile tanımlı fonksiyona f in ters Fourier dönüşümü denir.

2.2 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu fonksiyonların diferensiyellenebilirlik özellikleri, singüler integraller ve kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir rol

oynar. Genellikle bu alandaki problemlerin anlaşılmasında diğer yöntemlerden daha derin bir yaklaşım sağlar.

f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ de tanımlı ve integrallenebilir bir fonksiyon iken

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz\,, x \in [a,b] \text{ ve } F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

elde edilir. $h > 0$, $I = (x, x+h)$ ve $|I|$ bu aralığın ölçüsü olmak üzere

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy$$

ifadesi I aralığında f fonksiyonunun ortalama değeridir.

$|I| \to 0$ iken uygun x noktaları için limit $f(x)$ e yakınsar:

$$\lim_{\substack{x\in I \\ |I|\to 0}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy = f(x).$$

Daha yüksek boyutlarda ise, bir boyuttaki aralıklar yerine x merkezli r yarıçaplı $B(x,r)$ yuvarı alınır. Lebesgue diferensiyelleme teoremine göre, h.h. x için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \tag{2.1}$$

ifadesi geçerlidir.

f fonksiyonu x noktasında sürekli iken limiti $f(x)$ olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 : |x-y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur.

$$f(x) - \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} (\,f(x) - f(y)\,)\,dy$$

olduğundan $r < \delta$ yarıçaplı bir $B(x,r)$ yuvarı bulduğumuzdan

$$\left| f(x) - \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy \right| \le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\,dy < \varepsilon$$

elde ederiz.

(2.1) denkleminde lim yerine sup ve f yerine $|f|$ alınarak (merkezil) maksimal fonksiyon tanımlanır. (Hao 2012)

Maksimal fonksiyon, 1930 yılında $\mathbb{R}^n$ üzerinde tek boyutlu olarak Hardy-Littlewood tarafından ilk defa ortaya konulmuştur ve Wiener tarafından 1939 yılında n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

Tanım 2.2.1 Eğer $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise, f in maksimal fonksiyonu $Mf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır. $M: f \to Mf$ operatörü Hardy-Littlewood maksimal operatörü olarak adlandırılır.

Maksimal fonksiyon için yuvar yerine küp alınarak tanımlanabilir:

$Q(x,r)$, $[x-r, x+r]^n$ küpü olmak üzere, $M'f$

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q(x,r)} |f(z)|dz, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır. Açık olarak $n = 1$ için M ve M' maksimal operatörleri çakışır.

$n > 1$ olduğunda

$$c_n M'f(x) \le Mf(x) \le C_n M'f(x)$$

eşitsizliği sağlanır, burada c_n ve C_n, n ye bağlı sabitlerdir. Daha genel olarak maksimal fonksiyonu şöyle tanımlayabiliriz:

$$M''f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)|dz, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Burada supremum, x noktasını içeren bütün küpler üzerinden alınır.

Bu tanıma alternatif olarak merkezil olmayan maksimal fonksiyon tanımı verilmiştir.

$$\widetilde{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Burada supremum x noktasını içeren $\mathbb{R}^n$ deki B yuvarları üzerinden alınır. (Hao 2012)

Örnek 2.2.2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ olmak üzere $Mf(x), M'f(x), \widetilde{M}f(x), M''f(x)$ fonksiyonlarını ifade ediniz.

$$Mf(x) = M'f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & x > 1, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{2(1-x)}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0, \end{cases}$$

bulunur. $x > 1$ için

$$Mf(x) = M'f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\sup_{x-h>0} \frac{1-x+h}{2h}, \sup_{x-h\le 0} \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{2x},$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = \sup_{h_1,h_2>0} \frac{1}{h_1+h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_2} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\sup_{0<x-h_1<1} \frac{1-x+h_1}{h_1}, \sup_{x-h_1\le 0} \frac{1}{h_1} \right) = \frac{1}{x},$$

$0 \le x \le 1$ için

$$Mf(x) = M'f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\sup_{0<x-h<x+h<1} \frac{2h}{2h}, \sup_{0<x-h<1\le x+h} \frac{1-x+h}{2h}, \sup_{x-h\le 0<x+h<1} \frac{x+h}{2h}, \sup_{x-h\le 0<1\le x+h} \frac{1}{2h} \right)$$

$$= max\left(1,1,1, \frac{1}{2} min\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x} \right) \right) = 1 ,$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = \sup_{h_1,h_2>0} \frac{1}{h_1+h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_2} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= \max\left(\sup_{0<x-h_1<x+h_2<1} \frac{h_1+h_2}{h_1+h_2}, \sup_{x-h_1<0<x+h_2<1} \frac{x+h_2}{h_1+h_2}, \sup_{0<x-h_1<1<x+h_2} \frac{1-x+h_1}{h_1+h_2}, \right.$$

$$\left. \sup_{x-h_1<0<1<x+h_2} \frac{1}{h_1+h_2} \right) = 1 ,$$

$x < 0$ için

$$Mf(x) = M'f(x) = \max\left(\sup_{0<x+h<1,h>0} \frac{x+h}{2h}, \sup_{x+h\geq 1} \frac{1}{2h}\right) = \frac{1}{2(1-x)} ,$$

$$\tilde{M}f(x) = M''f(x) = \max\left(\sup_{h_1,h_2>0,0<x+h_2<1} \frac{x+h_2}{h_1+h_2}, \sup_{h_1>0,x+h_2\geq 1} \frac{1}{h_1+h_2}\right) = \frac{1}{1-x} .$$

elde edilir. (Hao 2012)

Özellik 2.2.3 $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere maksimal fonksiyonun temel özellikleri:

i) Pozitiflik: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) \geq 0$.

ii) Altlineerlik: $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$

iii) Homojenlik: $M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x), \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $\forall\, f$ ve h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $|f(x)| \leq Mf(x)$.

v) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sıfıra denk değilse, o zaman $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$.

vi) Eğer $f \in L_\infty \mathbb{R}^n$ ise, o zaman $Mf \in L_\infty \mathbb{R}^n$ ve $\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty$ (Cruz-Uribe and Fiorenza 2013).

Aşağıdaki teorem ile Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığı verilmektedir.

Teorem 2.2.4 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

a) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise, o zaman Mf h.h.y. sonludur.

b) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise, o zaman her $\alpha > 0$ için

$$|\{x: (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx$$

sağlanır, burada A sabiti sadece n boyutuna bağlıdır.

c) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise, o zaman $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

sağlanır, burada A_p sabiti sadece n ve p ye bağlıdır. (Stein 1970)

Sonuç 2.2.5 Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty]$ ise, o zaman $\|f\|_p \leq \|Mf\|_p \leq A_p\|f\|_p$.

(Hao 2012).

2.3 Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörü

Singüler integral operatörleri birçok uygulamaları olan oldukça popüler bir konudur. Calderon-Zygmund operatörü Riesz ve Hilbert dönüşümlerinin genelleştirilmesidir. Hilbert dönüşümü singüler integrallerin ilk örneği olup üst yarı düzlemde analitik fonksiyonların sınır değer problemlerinin çalışmalarında kullanılmaktadır. Riesz dönüşümü ikinci mertebeden eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. B. Muckenhoupt, R. Wheeden, C. Fefferman, D. S. Kurtz, S. Samko, V. Burenkov, V. Kokilashvili, V.S. Guliyev, Y. Ding, S.Z. Lu gibi meşhur matematikçilerin bu sahada çalışmaları vardır.

Tanım 2.3.1 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$Hf(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

dönüşümüne **Hilbert dönüşümü** denir.

$$R_j f(x) = p.v.C_n \int_{\mathbb{R}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy, \qquad 1 \leq j \leq n \ , \ C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

biçiminde tanımlı $R_j f$ dönüşümlerine de, **Riesz dönüşümleri** denir. (Grafakos 2004)

Riesz dönüşümleri $(1 < p < \infty)$ kuvetli (p,p) tipli ve zayıf $(1,1)$ tiplidirler.

Hilbert dönüşümü 1 boyutlu Riesz dönüşümü olduğundan $(1 < p < \infty)$ kuvetli (p,p) tipli ve zayıf $(1,1)$ tiplidir.

Tanım 2.3.2 Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^{\alpha} K(x)$ ise, $K(x)$ çekirdeğine α dereceden **homojen fonksiyon** denir.

$x \neq 0$ olmak üzere birim yuvarda x in izdüşümünü x' ile gösterelim. Yani $x' = \frac{x}{|x|}$ olur. $K(x)$ α dereceli homojen ise,

$$K(x) = |x|^{\alpha} K\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{\alpha} K(x')$$

$\Omega(x) = K\left(\frac{x}{|x|}\right), \Omega(x) = \Omega(x')$ sıfır dereceli homojen fonksiyondur. $\Omega(x)$ fonksiyonu bazen $K(x)$ çekirdeğinin karakteristiği olarak adlandırılır.

f $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve ölçülebilir fonksiyon $K(x)$, $-\alpha$ negatif dereceli homojen çekirdek olsun.

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy$$

f ve K nın konvolüsyonu olan h fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer

1) $0 < \alpha < n$ ise, h fonksiyonuna zayıf singüler integral,

2) $\alpha = n$ ise, h fonksiyonuna singüler integral,

3) $\alpha > n$ ise, h fonksiyonuna hiper singüler integral denir

Newton potansiyelleri $n > 2$, $f * |x|^{-n+2}$ ve daha genel olarak Riesz potansiyelleri $0 < \alpha < n$, $f * |x|^{-\alpha}$ zayıf singüler örnekleridir. (Neri 1971)

Tanım 2.3.3 (Calderon-Zygmund Çekirdeği) $K(x) \in L_1^{loc}\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)$ olsun. Eğer $K(x)$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu durumda K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir:

i.) $|K(x)| \le C|x|^{-n}$, $\forall\ x \neq 0$

ii.) $\int_{r \le |x| \le R} K(x)dx = 0$, $\forall\ 0 < r < R < \infty$

iii.) $\int_{r \le |x| \le R} |K(x-y) - K(x)| dx \le C$, $\forall\ y \neq 0$,

burada C sabiti χ ve y den bağımsızdır. *iii.*) koşuluna Hörmander koşulu denir.

Teorem 2.3.4 K Calderon-Zygmund çekirdeği ve $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman

$$T_{\varepsilon} f(x) = \int_{y \ge \varepsilon} K(x-y) f(y) dy$$

operatörü için aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

i.) A_p, ε ve f den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|T_\varepsilon f\|_p \le A_p \|f\|_p$$

dir.

ii.) Herhangi $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için L_p anlamında $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ vardır ve

$$Tf(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\,dy$$

şeklindedir.

iii.) $\|Tf\|_p \le A_p \|f\|_p$ dir.

Not. *ii.*) şıkkında verilen T operatörü Calderon-Zygmund singüler integral operatörü ve T_ε ise T nin kesilmiş operatörü olarak adlandırılır (Lu, Ding and Yan 2007).

İspat. $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|\ge\varepsilon\}}(x)$ alalım. O zaman $T_\varepsilon f(x) = K_\varepsilon * f(x)$ dir. Önce T_ε un (2,2) tipli olduğunu ve $\{T_\varepsilon\}$ dizisinin $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında düzgün sınırlı olduğunu göstereceğiz. K_ε un *i.*) ve *ii.*) yi $\varepsilon > 0$ a göre düzgün olarak sağladığı açıktır. Daha sonra K_ε nun *iii.*) durumunu düzgün olarak sağladığını göstereceğiz. Aslında herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n, y \ne 0$ ve $|x| \ge 2|y|$ olmak üzere eğer χ ile $x-y$ noktalarının $B(0,\varepsilon)$ içinde olması durumunda $K_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x-y) = 0$ dır. Eğer χ ile $x-y$ noktalarının $B(0,\varepsilon)^C$ da olması durumunda $K_\varepsilon(x) = K(x)$, $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$ elde edilir. O zaman K_ε *iii.*) koşulunu sağlayacaktır. Eğer $|x| > \varepsilon$ ve $|x-y| < \varepsilon$ ise bu durumda $\frac{|x|}{2} \le |x-y| < \varepsilon$ ve $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$ dir. Dolayısıyla,

$$\int_{|x|\ge 2|y|} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x)|dx \le \int_{\varepsilon\le|x|\le 2\varepsilon} |K_\varepsilon(x)|dx \le CB$$

elde edilir, burada C sabiti ε dan bağımsızdır. Aynı şekilde $|x| < \varepsilon$ ve $|x-y| > \varepsilon$ olduğunda K_ε un *iii.*) durumunu ε a göre düzgün olarak sağladığını gösterebiliriz.

Şimdi $\{T_\varepsilon\}$ dizisinin $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayında ε a göre düzgün sınırlı olduğunu gösterelim. Gerçekten, herhangi $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için, Plancherel teoreminden, bir $C > 0$ sabitinin bulunacağını ispat etmek yeter öyle ki herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| K_\varepsilon(\xi) \right| \le CB \tag{2.2}$$

dir. Aslında $\xi \in \mathbb{R}^n$ için,

$$K_\varepsilon(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\le R} e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{|x|\le \frac{\alpha}{|\xi|}} e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x)\,dx + \int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\le R} e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x)\,dx \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)$$

dir. *i*.) ve *ii*.) şartlarından şu sonuç çıkar:

$$|\mathrm{I}_1| = \int_{|x|\le \frac{\alpha}{|\xi|}} \left(e^{-2\pi i x\xi} - 1\right) K_\varepsilon(x)\,dx$$

$$\le C|\xi| \int_{|x|\le \frac{\alpha}{|\xi|}} |x| \left| K_\varepsilon(x) \right| dx$$

$$\le C\alpha B$$

Şimdi I_2 ye bakalım. $y = \dfrac{\xi}{2|\xi|^2}$ alırsak $e^{2\pi i y\xi} = -1$ olur. Böylece

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x-y|\le R} e^{-2\pi i (x-y)\xi} K_\varepsilon(x-y)\,dx$$

$$= -\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x-y|\le R} e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x-y)\,dx$$

$$= -\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x|\le R} e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x-y)\,dx + J,$$

olur, burada

$$J = \left(\int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\le R} - \int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x-y|\le R} \right) e^{-2\pi i x\xi} K_\varepsilon(x-y)\,dx$$

dir. Buradan

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\le R}\left[K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)\right]e^{-2\pi i x\xi}dx+\frac{J}{2}$$

bulunur. $|y|=\frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha>1$ iken,

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x|\le R}\left[K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)\right]e^{-2\pi i x\xi}dx\right| \le \int_{|x|\ge 2|y|}\left|K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)\right|dx \le CB$$

olur, burada C ve B,ε ve ξ den bağımsızdır. Diğer taraftan eğer $\left\{x\,|\,\frac{\alpha}{|\xi|}<|x|\le R\right\} ve \left\{x\,|\,\frac{\alpha}{|\xi|}<|x-y|\le R\right\}$ kümelerinin simetrik farkına E dersek bu durumda

$$|J| \le \int_E |K_\varepsilon(x-y)|dx$$

olur. O halde $|y|=\frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha>1$ alınırsa

$$\mathrm{E}\subset\left\{x:\frac{\alpha}{2|\xi|}\le|x|\le\frac{2\alpha}{|\xi|}\right\}\cup\left\{x:\frac{R}{2}\le|x|\le 2R\right\}$$

elde edilir. Böylece $i.)$ den dolayı

$$|J| \le \left|\int_{\frac{\alpha}{2|\xi|}\le|x|\le\frac{2\alpha}{|\xi|}}|K_\varepsilon(x-y)|dx\right| + \int_{\frac{R}{2}\le|x|\le 2R}|K_\varepsilon(x-y)|dx \le CB$$

şeklinde olur, burada C ve B,ε ve ξ den bağımsızdır. Yukarıdakileri toparladığımızda (2.2) ü elde ederiz, dolayısıyla T_ε $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ε a göre düzgün sınırlıdır.

T_ε (1,1) zayıf tiplidir:

Her $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda>0$ için bir fonksiyonun Calderon-Zygmund ayrışım teoreminden örtüşmeyen $\{Q_j\}$ küplerini ve iki *g*, *b* fonksiyonunu elde ederiz öyle ki $f=g+b$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $\|g\|_2^2 \le C\lambda\|f\|_1$, $|g(x)|\le 2^n\lambda$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$;

(b) $\lambda \le \frac{1}{Q_j}\int_{Q_j}|f(x)|dx \le 2^n\lambda,\ \forall\, Q_j$;

(c) $\sum_j |Q_j| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$;

(d) $b(x) = \sum_j b_j(x)$, $\int_{Q_j} b_j dx = 0$, $\operatorname{supp} b_j \subset Q_j$ ve $\|b_j\|_1 \le 2\int_{Q_j} |f(x)|dx$

dir. $T_\varepsilon f(x) = T_\varepsilon g(x) + T_\varepsilon b(x)$ den

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon f(x)| > \lambda\right\}\right| \le \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

olur. İlk adım ve (a) dan

$$\mathrm{I}_1 \le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |T_\varepsilon g(x)|^2 dx \le \frac{4C}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \le \frac{4C}{\lambda}\|f\|_1$$

elde edilir. I_2 için, $Q_j^* = 2\sqrt{n}Q_j$ merkezi Q_j ile aynı ve kenarı Q_j nin $2\sqrt{n}$ katı olan küpü gösterelim. $E^* = U_j Q_j^*$ denirse (c) şıkkından

$$|E^*| \le \sum_j |Q_j^*| \le \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1$$

olur. Böylece

$$\mathrm{I}_2 \le |E^*| + \left|\left\{x \notin E^* : |T_\varepsilon b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \le \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n/E^*} |T_\varepsilon b(x)|dx$$

olur. $|T_\varepsilon b(x)| \le \sum_j |T_\varepsilon b_j(x)|$ olduğuna dikkat ederiz,

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^n/E^n} |T_\varepsilon b_j(x)|dx \le C\|f\|_1 \qquad (2.3)$$

olduğunu ispat etmek yeterli olacaktır. $y_j Q_j$ nin merkezini y_j ile gösterelim, bu durumda *iii.*) den dolayı (b) ve (c) nin ikisi birlikte (2.3) sağladığından

$$\int_{\mathbb{R}^n/E^n} |T_\varepsilon b_j(x)|dx \le \int_{\mathbb{R}^n/Q_j^*}\int_{Q_j} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j)||b_j(y)|dydx \le \int_{Q_j} |b_j(y)|\int_{\mathbb{R}^n/Q_j^*} |K_\varepsilon(x-y) - K_\varepsilon(x-y_j)|dxdy$$

$$\leq CB\int_{Q_j}\left|b_j(y)\right|dy \leq 2CB\int_{Q_j}\left|f(y)\right|dy$$

ifadesini elde ederiz. Buradan T_ε, (1,1) zayıf tipindendir ve onun sınırı ε veya f den bağımsızdır.

Şimdi de T_ε operatörünün (p,p) $(1<p<\infty)$ tipinden olduğunu göstereceğiz. Marcinkiewiz interpolasyon teoreminin uygulanmasından T_ε un $(p,p)\,(1<p<2)$ tipinden olduğunu ve onun sınırının ε veya f den bağımsız olduğunu biliyoruz. Şimdi $2<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olduğunu kabul edelim, o zaman $1<p'<2$ olur. $\tilde{T}_\varepsilon$ operatörü T_ε operatörünün duali olmak üzere $T_\varepsilon f(x)=K_\varepsilon * f(x)$ elde ederiz, burada $K_\varepsilon(x)=\overline{K_\varepsilon(-x)}$ dir. Açık olarak $K_\varepsilon, K_\varepsilon$ un sağladığı tüm şartları sağlar. Buradan $\tilde{T}_\varepsilon$, (p',p') tipindendir. Böylece herhangi $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon f\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x)\,g(x)\,dx\right| \\ &= \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,T_\varepsilon g(x)\,dx\right| \\ &\leq \|f\|_p \sup_{\|g\|_{p'}\leq 1}\left\|T_\varepsilon g\right\|_{p'} \\ &\leq \mathrm{A}_p\|f\|_p\end{aligned}$$

dir, burada A_p f veya ε dan bağımsızdır. Böylece (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

Daha sonra herhangi bir $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ için Kf nin var ve L^p de $\{T_\varepsilon f\}$ nin limiti olduğunu göstereceğiz. Önce $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Herhangi bir y $(y\neq 0)$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x-y)-f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C|y| \qquad (2.4)$$

elde etmek istiyoruz. Gerçekten

$$\frac{d}{dt}f(x-ty)=\langle\nabla f,-y\rangle(x-ty)$$

den

$$f(x-y)-f(x)=\int_0^1\frac{d}{dt}f(x-ty)\,dt$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty)\, dt$$

$$= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy)\, ds$$

olur, burada $y' = \dfrac{y}{|y|}$ dir. Dolayısıyla

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy')\, ds \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_0^{|y|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy') \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds$$

$$\leq |y| \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p$$

olur. $0 < \eta < \varepsilon$ olduğunda (2.4) ve *i*.) den dolayı

$$\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p \leq \int_{\eta < |y| \leq \varepsilon} |K_y| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$\leq C \int_{\eta < |y| \leq \varepsilon} |y| \left| K(y) \right| dy$$

$$\leq CB\varepsilon \to 0 \ (\eta, \varepsilon \to 0)$$

bulunur. Bu da gösterir ki $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ daki her *f* fonksiyonu için $\{T_\varepsilon f\}$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında Cauchy dizisidir buradan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0$$

olacak şekilde $Tf \in L^p$ vardır. Buradan hemen görülür ki

$$\|Tf\|_p \leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + \|T_\varepsilon f\|_p$$

$$\leq \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + A_p \|f\|_p$$

dir böylece $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ olduğu görülür. Herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta > 0$ için $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vardır öyle ki $f = g + h$ ve $\|h\|_p < \delta$ dır. Buradan $0 < \eta < \varepsilon$ iken

$$\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p \leq \|T_\eta (f - g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + \|T_\varepsilon (g - f)\|_p$$

$$\leq A_p \|(f - g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + A_p \|g - f\|_p$$

$$\to 2\mathrm{A}_p\delta,\ (\eta,\ \varepsilon \to 0)$$

dır. δ keyfi olduğu için herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $\{T_\varepsilon f\}$ nin $L^p(\mathbb{R}^n)$ de daima bir Cauchy dizisi olduğunu gösterdik. Böylece $Tf \in L^p$ vardır öyle ki

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|Tf - T_\varepsilon f\| = 0$$

ve

$$\|Tf\|_p \le \mathrm{A}_p \|f\|_p$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ VE CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIKLARI

3.1 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzayları

Klasik $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında (Morrey 1938) tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra bu uzaylarının birçok önemli uygulamalarının olduğu görülmüştür. Riesz potansiyelleri ve singüler integrallerin özellikleri kullanılarak eliptik ve hipoeliptik (quazieliptik) kısmi türevli denklemlerin çözümleri için ön eşitsizlikler bulunabilmektedir.

Tanım 3.1.1 $0 \le \lambda < n$ ve $1 \le p < \infty$ olsun. $\|f\|_{M_{p,\lambda}} = \sup_{r>0, x\in\mathbb{R}^n} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$ normu sonlu olacak şekildeki $f \in L_p^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonlarının sınıfına Morrey uzayı denir.
$\|f\|_{M_{p,\lambda}}$ normu $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında yarı normdur (f sabit olduğunda $\|f\|_{M_{p,\lambda}} = 0$ olur). Morrey uzayındaki fonksiyonlar sabit farkıyla eşit fonksiyonlar olarak gözönüne alındığında $\|f\|_{M_{p,\lambda}}$ normu ile $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$f \in WL_p^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} = \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0, x\in\mathbb{R}^n} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm fonksiyonların uzayına da zayıf Morrey uzayı adı verilir, burada WL_p zayıf L_p uzayını göstermektedir.

Açık olarak $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \le \|f\|_{M_{p,\lambda}}$ dir.

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayının bazı özellikleri

1.) $\lambda = 0$ iken $M_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Gerçekten, $\lambda = 0$ ve $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\|f\|_{M_{p,0}} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ dir.

2.) $\lambda < 0$ ve $\lambda > n$ iken $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ dır, burada Θ, $\mathbb{R}^n$ deki sıfıra eşdeğer olan tüm fonksiyonların kümesidir.

3.) $\lambda = n$ ve $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir.

Örnek 3.1.1 $\lambda > 0$ olmak üzere $f(x) = |x|^{\frac{\lambda-n}{p}} \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Örnek 3.1.2 $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \chi_{B(0,1)}$ olsun. Bu durumda $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ fakat $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Çözüm. $f(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{n}{p}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ olsun.

$$\sup_{s>0, x\in\mathbb{R}^n} s^{-\lambda} \int_{B(x,s)} |f(z)|^p \, dz \leq \sup_{s>0} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\lambda} \int_{B\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\subset B(0,1)} |z|^{-n} \, dz = \sup_{s>0} n^\lambda \left|S^{n-1}\right| \ln s \Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} < \infty$$

sağlanır. Dolayısıyla $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dır.

Diğer taraftan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \int_{B(0,1)} |x|^{-n} \, dx = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} t^{-n} dt d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma \int_0^1 t^{-n} dt = \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \ln t \Big|_0^1 = \infty$$

olduğundan $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

3.2 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Bu kesimde $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı V.S. Guliyev (Guliyev 2009) tarafından verilen ve "Guliyev eşitsizliği" denilen eşitsizlik kullanılarak elde edilecektir.

Teorem 3.2.1 (Guliyev Eşitsizliği) $1 \le p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,s))} \le C\, s^{\frac{n}{p}} \int_s^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr \tag{3.1}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,s))} \le C\, s^n \int_s^\infty r^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))}\, dr \tag{3.2}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir, burada C sabiti f, x ve $s > 0$ dan bağımsızdır (Guliyev 2009).

Teorem 3.2.2 $1 \le p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. $1 < p < \infty$ için C f den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|Mf\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{WM_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

dir (Guliyev 2009).

İspat. (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{s>0, x\in\mathbb{R}^n} s^{-\frac{\lambda}{p}} \|Mf\|_{L_p(B(x,s))} \\
&\le C \sup_{s>0, x\in\mathbb{R}^n} s^{-\frac{\lambda}{p}} s^{\frac{n}{p}} \int_s^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr \\
&\le C \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{s>0, x\in\mathbb{R}^n} s^{\frac{n-\lambda}{p}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} r^{\frac{\lambda}{p}} dr \\
&\le C \|f\|_{M_{p,\lambda}(B(x,r))} \sup_{s>0, x\in\mathbb{R}^n} s^{\frac{n-\lambda}{p}} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda-n}{p}} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \Big|_s^a \\
&\le C \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

olur.

$p = 1$ ve $f \in M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda (3.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{WM_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{r>0,\,x\in\mathbb{R}^n} s^{-\lambda}\|Mf\|_{WL_1(B(x,s))}\\ &\le C\sup_{t>0,\,x\in\mathbb{R}^n} s^{n-\lambda}\int_s^{\infty} r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}\,dr\\ &\le C\|f\|_{M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\sup_{r>0,\,x\in\mathbb{R}^n} s^{n-\lambda}\int_t^{\infty} r^{\lambda-n-1}dr\\ &\le C\|f\|_{M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 3.3.1 (Calderon-Zygmund Operatörü için Guliyev Eşitsizliği)

$1\le p<\infty$ ve $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p>1$ için

$$\|Tf\|_{L_p(B(x,s))}\le C\,s^{\frac{n}{p}}\int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \tag{3.5}$$

ve $p=1$ için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x,s))}\le Cs^{n}\int_t^{\infty} r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}\,dr \tag{3.6}$$

dir, burada C, f, $x\in\mathbb{R}^n$ ve $s>0$ a bağlı değildir (Guliyev 2009).

İspat. f yi

$$f=f_1+f_2,\quad f_1(y)=f(y)\chi_{B(x,2s)}(y),\quad f_2(y)=f(y)\chi_{C_{B(x,2s)}}(y),\quad s>0$$

biçiminde gösterelim. Bu durumda

$$\|Tf\|_{L_p(B(x,s))}\le\|Tf_1\|_{L_p(B(x,s))}+\|Tf_2\|_{L_p(B(x,s))}$$

olur. T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olduğundan $1<p<\infty$ için $\|Tf_1\|_{L_p(B(x,s))}\le\|Tf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$

ve dolayısıyla

$$\|Tf_1\|_{L_p(B(x,s))}\le C\|f\|_{L_p(B(x,2s))}$$

sağlanır.

$$\|f\|_{L_p(B(x,s))} \le Cs^{\frac{n}{p}} \int_{2s}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr$$

eşitsizliğinden

$$\|Tf_1\|_{L_p(B(x,s))} \le Cs^{\frac{n}{p}} \int_{s}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr \tag{3.7}$$

elde ederiz. $\|Tf_2\|_{L_p(B(x,s))}$ için

$$|Tf_2(z)| \le C \int_{{}^{C}B(x,2s)} \frac{|f(y)|}{|y-z|^n} dy$$

eşitsizliğini gözönüne alırız. $\frac{1}{2}|z-y| \le |x-y| \le \frac{3}{2}|z-y|$ olduğundan

$$\|Tf_2\|_{L_pB(x,s)} \le \int_{{}^{C}B(x,2s)} |x-y|^{-n} |f(y)| \left\|\chi_{B(x,s)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} dy$$

dir ve (3.3) eşitsizliğinden

$$\|Tf_2\|_{L_pB(x,s)} \le C s^{\frac{n}{p}} \int_{2s}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_pB(x,r)}\, dr \tag{3.8}$$

elde ederiz. Buradan (3.7) ve (3.8) den (3.5) bulunur.

$p=1$ olsun. Açık olarak herhangi bir $B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x,s))} \le \|Tf_1\|_{WL_1(B(x,s))} + \|Tf_2\|_{WL_1(B(x,s))}$$

sağlanır. T nin $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olmasından dolayı C_x ve S ye bağlı olmayan bir sabit olmak üzere

$$\|Tf_1\|_{WL_1(B(x,s))} \le C\|f\|_{L_1(B(x,2s))}$$

dir. (3.8) eşitsizliğinin $p=1$ için de sağlandığını göstermek kolaydır. Dolayısıyla (3.6) eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.2 $1 \le p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p>1$ için T operatörü $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır. $p=1$ için T $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $WM_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. $1< p <\infty$ ve $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.3.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,\lambda}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{-\frac{\lambda}{p}} \|Tf\|_{L_p(B(x,s))} \\ &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{\frac{n-\lambda}{p}} \int_s^\infty t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, dt\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_{p,\lambda}} &= C\|f\|_{M_{p,\lambda}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{\frac{n-\lambda}{p}} \int_s^\infty t^{\frac{\lambda-n}{p}} \frac{dt}{t} \\ &\le C\|f\|_{M_{p,\lambda}}\end{aligned}$$

olur.

$p=1$ ve $f \in M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.3.1 den

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WL_1(B(x,s))} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{-\lambda} \|Tf\|_{WL_1(B(x,s))} \\ &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{n-\lambda} \int_s^\infty t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,t))}\, dt\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{WM_{1,\lambda}} &= C\|f\|_{M_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, s>0} s^{n-\lambda} \int_s^\infty t^{\lambda-n} \frac{dt}{t} \\ &\le C\|f\|_{M_{1,\lambda}}\end{aligned}$$

olur ki böylece ispat tamamlanır.

4. $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖR VE CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Bu bölümde ilk olarak $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları tanıtılacak daha sonra Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığı verilecektir.

4.1 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Tanım 4.1.1 $w(x,s)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ ölçülebilir olmak üzere $M_{p,w} \equiv M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ $1 \le p < \infty$, genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\|f\|_{M_{p,w}} \equiv \|f\|_{M_{p,w}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w(x,s)^{-1} |B(x,s)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,s))} < \infty$$

olacak biçimindeki tüm $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfına denir (Guliyev 2009).

Ayrıca $WM_{p,w} \equiv WM_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,w}} \equiv \|f\|_{WM_{p,w}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w(x,s)^{-1} |B(x,s)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,s))} < \infty$$

normuna sahip tüm $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ lerin sınıfına da zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı denir. Burada $WL_p(B(x,s))$ ile

$$\|f\|_{WL_p(B(x,s))} \equiv \|f\chi_{B(x,s)}\|_{WM_{p,w}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

biçimindeki tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının zayıf L_p uzayı belirtilmektedir.

Ayrıca tabii topoloji ile donatılmış $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayları, herbir $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f\chi_B \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_B \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ biçimindeki tüm f fonksiyonlarının uzayıdır.

Buna göre $w(x,s)=s^{\frac{\lambda-n}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda}=M_{p,w}\Big|_{w(x,s)=s^{\frac{\lambda-n}{p}}} \text{ ve } WL_{p,\lambda}=WM_{p,w}\Big|_{w(x,s)=s^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

Tanım 4.1.2 Eğer bir C sabiti varsa öyle ki herhangi bir $x\in\mathbb{R}^n$ ve bir $t>0$ için

$$p\in(0,\infty) \text{ iken } \left(\int_t^{\infty}\left(\frac{ess\inf_{r<s<\infty} w_1(x,s)}{r^m}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{dr}{r}\right)^p \le C\frac{w_2(x,t)}{t^m}$$

ve

$$p=0 \text{ iken } ess\sup_{t<r<\infty}\frac{ess\inf_{r<s<\infty} w_1(x,s)}{r^m}\le C\frac{w_2(x,t)}{t^m}$$

oluyorsa bu durumda $(w_1,w_2)\in \mathfrak{Z}_{p,m},\ p\in[0,\infty),\ m>0$ olduğunu söyleriz (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

Tanım 4.1.3 Eğer bir C sabiti varsa öyle ki herhangi bir $x\in\mathbb{R}^n$ ve bir $t>0$ için

$$p\in(0,\infty) \quad \text{iken} \quad \left(\int_t^{\infty}\left(\frac{w_1(x,s)}{r^m}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{dr}{r}\right)^p \le C\frac{w_2(x,t)}{t^m}$$

ve

$$p=0 \quad \text{iken} \quad ess\sup_{t<r<\infty}\frac{w_1(x,s)}{r^m}\le C\frac{w_2(x,t)}{t^m}$$

Oluyorsa bu durumda $(w_1,w_2)\in \tilde{\mathfrak{Z}}_{p,m},\ p\in[0,\infty),\ m>0$ olduğunu söyleriz (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

Hatırlatalım ki $p\in[0,\infty),\ m>0$ için $\tilde{\mathfrak{Z}}_{p,m}\subset\mathfrak{Z}_{p,m}$ dir.

$p\in[0,\infty),\ m>0$ olmak üzere $\mathfrak{Z}_{p,m}$ sınıfları için aşağıdaki gömme bağıntısı geçerlidir.

Lemma 4.1.1 $\bigcup_{0<p<\infty} \mathfrak{Z}_{p,m} \subset \mathfrak{Z}_{0,m}$ bağıntısı sağlanır (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. Bir $p \in (0,\infty)$ için $(w_1, w_2) \in \mathfrak{Z}_{p,m}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi bir $s \in (t,\infty)$ için

$$C\frac{w_2(x,t)}{t^m} \geq \left(\int_t^\infty \left(\frac{ess\inf_{r<\tau<\infty} w_1(x,\tau)}{r^m} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} \right)^p$$

$$\geq \left(\int_s^\infty \left(\frac{ess\inf_{r<\tau<\infty} w_1(x,\tau)}{r^m} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} \right)^p$$

$$\geq ess\inf_{s<\tau<\infty} w_1(x,\tau) \left(\int_s^\infty \frac{dr}{r^{\frac{m}{p+1}}} \right)^p$$

$$\approx \frac{ess\inf_{s<\tau<\infty} w_1(x,\tau)}{s^m}.$$

Böylece

$$C\frac{w_2(x,t)}{t^m} \geq ess\sup_{t<s<\infty} \frac{ess\inf_{s<\tau<\infty} w_1(x,\tau)}{s^m}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.1 $w(t) = t^n$ olsun. Bu durumda $(w,w) \in \mathfrak{Z}_{0,n}$ dir fakat herhangi bir $p \in (0,\infty)$ için $(w,w) \notin \mathfrak{Z}_{p,n}$ olur.

Teorem 4.1.1 $1 \leq p < \infty$ olsun ve bir w pozitif ölçülebilir fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın: Bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$0 < r \leq t \leq 2r \Rightarrow C^{-1}w(r) \leq w(t) \leq Cw(r)$$

ve $(w,w)\in\tilde{\mathfrak{Z}}_{1,n}$ olsun. Bu durumda $1<p<\infty$ için M ve T operatörleri $M_{p,w}$ den $M_{p,w}$ ye sınırlıdır ve $p=1$ için M ve T operatörleri $M_{1,w}$ den $WM_{1,w}$ ye sınırlıdır (Nakai 1994).

Teorem 4.1.2 $(w_1,w_2)\in\tilde{\mathfrak{Z}}_{p,m}$, $p\in[1,\infty)$, $n>0$ olsun. Bu durumda $1<p<\infty$ için M ve T operatörleri M_{p,w_1} den M_{p,w_2} ye sınırlıdır ve $p=1$ için M ve T operatörleri M_{1,w_1} den WM_{1,w_2} ye sınırlıdır (Guliyev 2009)

4.2 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Tanım 4.2.1 f ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L_{\infty,v}(0,\infty)$ ile

$$\|f\|_{L_{\infty,v}(0,\infty)}=ess\sup_{t>0}v(t)f(t)<\infty$$

olacak biçimdeki tüm f fonksiyonlarının uzayını gösteririz. Özel olarak $L_{\infty}(0,\infty)=L_{\infty,1}(0,\infty)$ alırız (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

$(0,\infty)$ üzerinde tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesini $M(0,\infty)$ ve $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayanların oluşturduğu alt kümeyi de $M^+(0,\infty)$ ile gösterelim.

$M^+(0,\infty)$ kümesindeki $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan ve $\mathbb{A}=\left\{\varphi\in M^+(0,\infty):\lim_{t\to 0+}\varphi(t)=0\right\}$ olan tüm fonksiyonların konisini de $M^+(0,\infty;\uparrow)$ ile gösterelim.

u fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $g\in M(0,\infty)$ üzerinde $\overline{S}_u$ supremal operatörünü

$$\left(\overline{S}_u g\right)(s)=\|ug\|_{L_\infty(s,\infty)},\ s\in(0,\infty)$$

ile tanımlarız.

Teorem 4.2.1 $t>0$ olmak üzere v_1, v_2 negatif olmayan iki fonksiyon, $0<\|v_1\|_{L_\theta(t,\infty)}<\infty$ ve u $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. O zaman $\overline{S}_u$ operatörü $\mathbb{A}$ konisi üzerinde $L_{\infty,v_1}(0,\infty)$ den $L_{\infty,v_2}(0,\infty)$ ye sınırlıdır ancak ve ancak

$$\left\|v_2\overline{S}_u\left(\|v_1\|^{-1}_{L_\infty(.,\infty)}\right)\right\|_{L_\infty(0,\infty)}<\infty$$

ise (Burenkov, Gogatishvili, Guliyev and Mustafayev 2010).

Lemma 4.2.1 (Guliyev Eşitsizliği) $1<p<\infty$ olsun, $\mathbb{R}^n$ deki herhangi bir $B=B(x,s)$ yuvarı ve $\forall f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,s))}\le C\left(\|f\|_{L_p(B(x,2s))}+s^{\frac{n}{p}}\sup_{t>2s}t^{-n}\|f\|_{L_1(B(x,s))}\right) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, $\forall f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,s))}\le C\left(\|f\|_{L_1(B(x,2s))}+s^{n}\sup_{t>2s}t^{-n}\|f\|_{L_1(B(x,s))}\right) \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. $1<p<\infty$ olsun, aşikar olarak herhangi bir $B=B(x,s)$ yuvarı için

$$\|Mf\|_{L_p(B)}\le\left\|M(f\chi_{(2B)})\right\|_{L_p(B)}+\left\|M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})\right\|_{L_p(B)}$$

eşitsizliği sağlanır. $M:L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n),1<p<\infty,$ operatörünün sürekliliğinden dolayı

$$\left\|M(f\chi_{(2B)})\right\|_{L_p(B)}\le C\|f\|_{L_p(2B)}$$

sağlanır. $y \in B$ keyfi bir nokta olsun. Eğer $B(y,t) \cap \left\{ \mathbb{R}^n \setminus (2B) \right\} \neq \varnothing$ ise bu durumda $t > s$ dir. Gerçekten, eğer $z \in B(y,t) \cap \left\{ \mathbb{R}^n \setminus (2B) \right\}$ ise bu durumda $|x-z| \leq |y-z| + |x-y| < t+s < 2t$ sağlanır. Buradan

$$M(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)})(y) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t) \cap \left\{ \mathbb{R}^n \setminus (2B) \right\}} |f(z)|\,dz$$

$$\leq 2^n \sup_{t>s} \frac{1}{|B(x,2t)|} \int_{B(x,2t)} |f(z)|\,dz$$

$$= 2^n \sup_{t>2s} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|\,dz$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall y \in B$ için

$$M\left(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)} \right)(y) \leq 2^n \sup_{t>2s} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|\,dz \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\|Mf\|_{L_p(B)} \leq C\left(\|f\|_{L_p(2B)} + |B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2s} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|\,dz \right) \right)$$

olur, böylece (4.1) eşitsizliği elde edilir.

$p = 1$ olsun. Aşikar olarak herhangi bir $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Mf\|_{WL_1(B)} \leq \|M(f\chi_{(2B)})\|_{WL_1(B)} + \|M(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)})\|_{WL_1(B)}$$

sağlanır. Bu durumda (4.3) den dolayı (4.2) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2.2 $1 < p < \infty$ olsun. $\mathbb{R}^n$ deki bir $B = B(x,s)$ yuvarı ve $\forall f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,s))} \leq Cs^{\frac{n}{p}} \sup_{t>2s} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, $\forall f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,s))} \leq Cs^n \sup_{t>2s} t^{-n} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. $1<p<\infty$ olsun,

$$\mathfrak{M}_1=|B|^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t>2s}\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|f(u)|du\right)$$
$$\mathfrak{M}_2=\|f\|_{L_p(2B)}$$

diyelim. Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\mathfrak{M}_1\le C|B|^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t>2s}\frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{B(x,t)}|f(u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$|B|^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t>2s}\frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{B(x,t)}|f(u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}}\right)\ge C|B|^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t>2s}\frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}}\|f\|_{L_p(2B)}\right)\approx\mathfrak{M}_2$$

dir. Lemma 4.2.1 den

$$\|Mf\|_{L_p(2B)}\le\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$$

olur, buradan (4.4) elde edilir. Eğer $p=1$ alınırsa bu durumda (4.5) eşitsizliği (4.2) den direkt olarak görülür.

Teorem 4.2.2 $p\in[1,\infty)$ ve $(w_1,w_2)\in\mathfrak{Z}_{0,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p>1$ için M Hardy-Littlewood operatörü $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye ve $p=1$ için $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. Lemma 4.2.2 ve Teorem 4.2.1 den, eğer $p\in(1,\infty)$ ise

$$\|Mf\|_{M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)}\le C\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n,s>0}w_2(x,s)^{-\frac{1}{p}}s^{\frac{n}{p}}\left(\sup_{t>s}t^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)\right)$$
$$\le C\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n,s>0}w_1(x,s)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)=C\|f\|_{M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)}$$

ve eğer $p=1$ ise

$$\|Mf\|_{WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w_2(x,r)^{-1} r^n \left(\sup_{t>r} t^{-n}\|f\|_{L_1(B(x,t))}\right)\right)$$
$$\le C\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w_1(x,r)^{-1}\|f\|_{L_1(B(x,t))}\right) = C\|f\|_{M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)}$$

elde ederiz.

Sonuç 4.2.1 $p\in[1,\infty]$ ve $w:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu artan olmak üzere $t\to\frac{w(t)}{t^n}$ dönüşümünün hemen hemen azalan (yani, bir c sabiti vardır öyle ki $s<t$ için $\frac{w(s)}{s^n}\ge c\frac{w(t)}{t^n}$ sağlanır) olduğunu kabul edelim. O zaman eğer $1<p\le\infty$ ise

$$\|Mf\|_{M_{p,w}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{M_{p,w}(\mathbb{R}^n)}$$

ve eğer $p=1$ ise

$$\|Mf\|_{WM_{1,w}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{M_{1,w}(\mathbb{R}^n)}$$

olacak biçimde bir C sabiti vardır.

4.3 $M_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı

$(Hg)(t)=\frac{1}{t}\int_0^t g(s)ds,\ 0<t<\infty,$ Hardy operatörünü gözönüne alalım. Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılığını ispat ederken Hardy operatörünün sınırlılığını kullanacağız.

Teorem 4.3.1 g fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde artmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s>0} w(s)Hg(s) \le c\operatorname*{ess\,sup}_{s>0} v(s)g(s)$$

eşitsizliğinin sağlanır ancak ve ancak

$$B=\sup_{s>0}\frac{1}{s}\int_0^s\frac{dt}{ess\sup_{0<y<t}v(y)}<\infty$$

ve $c\approx A$ ise (Carro, Pick, Soria and Stepanov 2001).

Lemma 4.3.1. $p\in[1,\infty]$, $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $x_0\in\mathbb{R}^n$ için

$$\int_1^\infty s^{-\frac{n}{p-1}}\|f\|_{L_p(B(x_0,s))}\,dt<\infty$$

olsun. Bu durumda $Tf(x)$ Calderon-Zygmund integrali hemen her $x\in\mathbb{R}^n$ için vardır ve herhangi bir $x_0\in\mathbb{R}^n$, $s>0$ ve $p\in(1,\infty)$ için

$$\|Tf\|_{L_p(B(x_0,s))}\le Cr^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^\infty t^{-\frac{n}{p-1}}\|f\|_{L_p(B(x_0,s))}\,ds$$

sağlanır, burada $C>0$ sabiti x_0,r ve f ye bağlı değildir.

Üstelik, herhangi bir $x_0\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ ve $p=1$ için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x_0,s))}\le Cr^n\int_{2r}^\infty s^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x_0,s))}\,ds \tag{4.6}$$

sağlanır, burada $C>0$ sabiti x_0,r ve f ye bağlı değildir (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. $p\in(1,\infty)$ olsun. Keyfi bir $x_0\in\mathbb{R}^n$ için $B=B(x_0,r)$ ile x_0 merkezli r yarıçaplı yuvarı gösterelim. $f_1=f\chi_{2B}$ ve $f_2=f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)}$ olmak üzere $f=f_1+f_2$ yazalım. $f_1\in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $Tf_1(x)$ hemen her $x\in\mathbb{R}^n$ için vardır ve T nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$\|Tf_1\|_{L_p(B)}\le\|Tf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=C\|f\|_{L_p(2B)}$$

sağlanır, burada $C>0$ sabiti f den bağımsızdır. Şimdi singüler olmayan $Tf_2(x)$ integralinin her $x\in B$ için varlığını ispat edelim. Açık olarak $x\in B$, $y\in\mathbb{R}^n\setminus(2B)$

olması $\frac{1}{2}|x_0-y| \le |x-y| \le \frac{3}{2}|x_0-y|$ olmasını gerektirir. $|Tf_2(x)| \le 2^n \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy$ olduğunu biliyoruz. Fubini teoreminden

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \approx |f(y)| \int\limits_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{ds}{s^{n+1}} dy$$

$$\approx \int\limits_{2r}^{\infty} \int\limits_{2r \le |x_0-y| < s} |f(y)| dy \frac{ds}{s^{n+1}}$$

$$\le C \int\limits_{2r}^{\infty} \int\limits_{B(x_0,s)} |f(y)| dy \frac{ds}{s^{n+1}}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus (2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \le C \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}}$$

olur. Dolayısıyla her $x \in B$ için $Tf_2(x)$ vardır. $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{r>0} B(x_0,r)$ olduğundan hemen her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $Tf(x)$ in varlığını elde ederiz.

Üstelik, her $p \in [1,\infty)$ için

$$\|Tf_2\|_{L_p(B)} \le C r^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}} \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \le C \left(\|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}} \right)$$

dir. Diğer taraftan

$$\|f\|_{L_p(2B)} \approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(2B)} \int\limits_{2r}^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}} \le C r^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}}$$

dir. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \le C r^{\frac{n}{p}} \int\limits_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p+1}}}$$

olur. $p=1$ olsun. T nin $(1,1)$ zayıf sınırlılığı gerektirir ki

$$\|Tf_1\|_{WL_1(B)} \le \|Tf_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \le C\|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_1(2B)}$$

sağlanır, burada $C>0$ sabiti f den bağımsızdır. Bu durumda (4.7) den dolayı (4.6) bulunur.

Teorem 4.3.2 $p\in[1,\infty)$ ve $(w_1,w_2)\in \mathfrak{Z}_{p,n}$ olsun. Bu durumda $Tf(x)$ Calderon-Zygmund singüler integrali hemen her $x\in\mathbb{R}^n$ için vardır. Ayrıca T operatörü her $p>1$ için $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye ve $p=1$ için $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır. Üstelik,

$p>1$ için

$$\|Tf\|_{M_{p,w_2}} \le C\|f\|_{M_{p,w_1}}$$

ve $p=1$ için

$$\|Tf\|_{WM_{1,w_2}} \le C\|f\|_{M_{1,w_1}}$$

sağlanır (Akbulut, Guliyev and Mustafayev 2012).

İspat. Lemma 4.3.1 and Teorem 4.3.1 den $p>1$ için

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)} &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,r)^{-\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x,s))} \frac{ds}{s^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\approx C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,r)^{-\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}} \int_0^{r^{-\frac{n}{p}}} \|f\|_{L_p(B(x,s^{-\frac{p}{n}}))}\, dt \\
&= C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,s^{-\frac{p}{n}})^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{r}\int_0^r \|f\|_{L_p(B(x,s^{-\frac{p}{n}}))}\, dt \\
&\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_1(x,s^{-\frac{p}{n}})^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r^{-\frac{p}{n}}))} = \|f\|_{M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

ve $p=1$ için

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)} &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,r)^{-1} r^n \int_r^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x,s))} \frac{ds}{s^{n+1}} \\
&\approx C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,r)^{-1} r^n \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_1(B(x,s^{-n}))}\, ds \\
&= C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_2(x,s^{-\frac{1}{n}})^{-1} \frac{1}{r} \int_0^{r} \|f\|_{L_1(B(x,s^{-\frac{1}{n}}))}\, dt \\
&\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} w_1(x,s^{-\frac{1}{n}})^{-1} \|f\|_{L_1(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))} = \|f\|_{M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem ispatlanmış oldu.

Sonuç 4.3.1 $p\in[1,\infty)$ ve $(w_1,w_2)\in\tilde{\mathfrak{Z}}_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere T operatörü $p>1$ için $M_{p,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye ve $p=1$ için $M_{1,w_1}(\mathbb{R}^n)$ den $WM_{1,w_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

KAYNAKLAR

Adams, D. R. 1975. A note on Riesz potentials. Duke Math., 42: 765–778.

Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces, Second Edition, Elsevier Academic Press, 317 pages, Amsterdam.

Akbulut, A., Guliyev, V. S. and Mustafayev, R. 2012. On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces. Math. Bohem., 137(1): 27-43.

Barttle, R. G. 1995. The elements of integration and Lebesgue measure, Wiley Classics Library Edition, John Wiley and Son, Inc., 192 pages, New York.

Brezis, H. 2010. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, 600 pages, New York.

Burenkov, V. I. and Guliyev, H. V. 2004. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces. Studia Mathematica, 163(2): 157-176.

Burenkov, V. I., Guliyev, H. V. and Guliyev, V.S. 2007. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces. J. Comput. Appl. Math., 208: 280–301.

Burenkov, V. I., Gogatishvili, A., Guliyev, V. S. and Mustafayev, R. 2010. Boundedness of the fractional maximal operator in Morrey-type spaces. Complex Var. Elliptic Equ., 55: 739-758.

Carro, M., Pick, L., Soria, J. and Stepanov, V. D. 2001. On embeddings between classical Lorentz spaces. Math. Ineq. and Appl., 4: 397-428.

Chiarenza, F. and Frasca., M. 1987. Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function. Rend. Math., 31(2): 1-39.

Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. 2013. Variable Lebesgue spaces, Birkhauser, 321 pages, London.

Grafakos, L. 2004. Classical and modern Fourier analysis, Pearson Education Inc. Upper Saddle River, 931 pages, New Jersey.

Guliyev, V. S. 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in R^n, Doctoral dissertation, Mat. Inst. Steklov, 329 pages, Moscow.

Guliyev, V. S. 1999. Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, Some applications, Elm., 332 pages, Baku.

Guliyev, V. S., 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morreys spaces. Mathematica Scandianavica., 197: 285-304

Hao, C. 2012. Lecture notes on introduction to harmonic analysis, Institute of Mathematics, AMSS, CAS, 186 pages, Beijing.

Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. 1930. A maximal theorem with function-theoretic applications. Act. Math., 54: 81-116.

Lu, S., Ding Y. and Yan D. 2007. Singular integrals and related topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 280 pages, Singapore.

Mizuhara, T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, In: Harmonic Analysis (S. Igari, ed.). ICM 90 Satellite Proceedings, Springer, pp. 183–189, Tokyo.

Morrey, C. B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 43(1): 126-166.

Musayev, B. ve Alp, M. 2000. Fonksiyonel analiz, Balcı Yayınları, 470 sayfa, Kütahya.

Nakai, E. 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr., 166: 95–103.

Neri, U. 1971. Singular integrals, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 272 pages, New York.

Peetre, J. 1966. On convolution operators leaving $L_{p,\lambda}$ spaces invariant. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 72: 295–304.

Stein, E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 304 pages, New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Suna AY

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020 - 2022
Lisans	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü	2011 - 2019