ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Tuğba AYDIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Tuğba AYDIN tarafından hazırlanan **"Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan Operatörleri için Asimptotik Formüller"** adlı tez çalışması 00/00/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matematik Anabilim Dalı
Ankara Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan Operatörleri için Asimptotik Formüller**"" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (19/10/2022).

Tuğba AYDIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN
OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Tuğba AYDIN

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Bu yüksek lisans tezi beş kısımdan meydana gelmektedir. İlk kısım giriş bölümüne aittir. İkinci kısımda yaklaşımlar teorisinin temel tanımlarına, özelliklerine, teoremlerine ve yardımcı teoremlerine yer verilmiştir. Üçüncü kısımda genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörleri tanıtılarak ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özellikleri incelenmiştir ve sonraki bölümde kullanılacak olan teoremler verilerek merkezi moment hesaplamaları yapılmıştır. Dördüncü kısımda ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla Voronovskaja ve Gruss tipli Voronovskaja teoremleri elde edilerek klasik Szász-Mirakjan operatörleri için özel durumlar sunulmuştur. Son kısımda ise tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2022, 44 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü, Voronovskaja teoremi, Gruss tipli Voronovskaja teoremi, Ağırlıklı süreklilik modülü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ASYMPTOTIC FORMULAS
FOR GENERALIZED SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATORS

Tuğba AYDIN

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

This master's thesis is divided into five sections. The first section is the introductory part. The second section provides the basic definitions, properties, theorems and auxiliary theorems of the theory of approaches. The third section introduces generalized Szász-Mirakjan operators, examines approximation properties in weighted spaces, and performs central moment calculations by providing the theorems to be used in the following section. The quantitative Voronovskaja and quantitative Gruss-Tip-Voronovskaja theorems are obtained using the weighted continuity module in the fourth section, and spatial cases for the classical Szász-Mirakjan operators are presented. The results of the thesis are discussed in the final section.

2022, 44 pages

Keywords: Generalized Szász-Mirakjan operator, Quantitative Voronovskaja theorem, Gruss-Type-Voronovskaja theorem, Weighted modulus of continuity

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

“Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan Operatörleri için Asimptotik Formüller” isimli bu çalışma Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne “Yüksek Lisans Tezi” olarak sunulmuştur. Bu çalışmanın amacı genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörleri için daha ileri yaklaşım özellikleri sunmaktır.

Ders dönemimde ve tez konumun belirlenmesinden çalışmamın son aşamasına kadar bana yardım ve rehberlik eden, her anında ilgisini koruyan ve iletişim kuran, bilimsel ve manevi katkılarını sağlayan değerli tez danışmanım Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA’ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitim yoluna çıktığımdan bu yana yoğunluklarımı hoş karşılayan değerli aileme ve arkadaşlarıma; kalbime dokunan, bana öğrenmeyi sevdiren kıymetli öğretmenlerime, hedeflerime ulaşma aşamasında anlayışlarını esirgemeyen, süreci kolaylaştıran ve kararlarımın yanında olan herkese şükranlarımla.

Tuğba AYDIN
Çankırı, Ekim 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

1.1 Çalışmanın Amacı **2**

1.2 Kaynak Özeti **2**

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER **3**

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ **7**

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER **28**

5. SONUÇ VE ÖNERİLER **40**

KAYNAKLAR **41**

ÖZGEÇMİŞ **44**

SİMGELER DİZİNİ

$B_k(f;\chi)$	Bernstein operatörü
$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$\|f\|_\rho = sup_{\chi\geq 0}\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ normuna sahip olan lineer normlu bir uzay
B_ρ	f fonksiyonunun ağırlıklı uzayı
$C[a,b]$	$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayındaki bütün sürekli fonksiyonların alt uzayı
$C_\varphi^*(\mathbb{R}^+)$	$\lim_{\chi\to\infty}\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ ifadesinin sonlu olduğu $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun alt uzayı
$f_k \rightrightarrows f$	f_k dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$L(f;\chi)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$L_k(f;\chi)$	Operatör dizisi
$\|L\|$	Operatör normu
M_f	Yalnızca f'ye bağlı bir sabit
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçel sayılar kümesi
$S_k(f;\chi)$	Klasik Szász-Mirakjan operatörü
$S_k^\rho(f;\chi)$	Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü
$U_\varphi(\mathbb{R}^+)$	f/φ düzgün sürekli olacak biçimde $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun alt uzayı
α	Alfa
β	Beta
γ	Gama
δ	Delta
$\rho(\chi)$	Ağırlık fonksiyonu
ξ	Xi
φ	Phi
$\omega(f;\ \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_\rho(f;\delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$\Omega_2(f;\delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Bir fonksiyonu mevcut diğer fonksiyonlar aracılığıyla daha elverişli hale getirmeyi hedefleyen yaklaşım teorisinin ilerleme sürecinde, Karl Weierstrass'ın ispat çalışması, gerçel değişkenli fonksiyonlara yaklaşım teorisinde önemli bir adım olmuştur. Weierstrass ispatında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu sonlu aralıkta düzgün yaklaşan bir polinomun olacağını göstermiştir (Weierstrass 1885).

Sergej N. Bernstein, kendi ismiyle anılan polinomlar dizisini kullanarak Weierstrass teoremini daha kolay ve etkin bir biçimde ispat etmiştir. Bernstein, bu polinomun $C[0,1]$ uzayında olan fonksiyonlara düzgün yaklaştığını göstermiştir (Bernstein 1912). Bernstein polinomu yerine üzerinde çalışılması daha kolay olan lineer operatör dizileri seçildiğinde bu operatörlerin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için gerekli şartların neler olduğuna ilişkin çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan birisi Bernstein'in yaptığı ispattan hareketle ortaya koyulan Korovkin tipli yaklaşım teorisidir.

Lineer operatör dizileri üzerine yapılan araştırmaların artmasıyla Bernstein polinomları pozitif gerçel eksene genişletilmiştir ve Szász-Mirakjan operatörü ortaya çıkmıştır (Mirakjan 1941, Szász 1950). Daha sonra genel bir Szász-Mirakjan lineer operatör dizisi tanıtılarak ağırlıklı fonksiyonlar uzayında $\{1, \rho, \rho^2\}$ biçimindeki Korovkin kümesi ve uygun koşulları sağlayan ρ fonksiyonu seçilerek ağırlıklı yaklaşım üzerine pek çok makalede çalışmalar yapılmıştır (Aral *et al.* 2014).

Yakınsaklık oranını tanımlayarak yakınsama hatasına üst sınır sunmayı amaçlayan Voronovskaja teoremi üzerine de çalışmalar yapılmıştır (Tachev 2008, Gonska and Raşa 2009, Gonska and Păltănea 2010, Tachev 2012, Acar *et al.* 2014, Acar and Aral 2015). Söz konusu teoremlerin tamamı Bernstein polinomları ve türevlerinin yanında kompakt aralıkları etkileyen operatörler içindir ve sınırsız aralıklarda çalışılan operatörlerde klasik süreklilik modülü kullanılamamaktadır. Bu yüzden lineer pozitif operatörlerin genellemeleri ağırlıklı süreklilik modülü ile birlikte çalışılmıştır (Acar *et al.* 2016).

Gonska ve Gal, Gruss eşitsizliğini Bernstein polinomları için ilk kez kullanarak Voronovskaja teoremini elde etmişlerdir ve bu teorem Gruss tipli Voronovskaja teoremi olarak isimlendirilmiştir (Gal and Gonska 2014).

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında Szász-Mirakjan operatörlerinin bir genelleştirmesi incelenecektir. ρ ağırlık fonksiyonuna bağlı olan Szász-Mirakjan operatör dizisi oluşturulacak ve bu fonksiyon hem bu genelleştirilmiş operatöre hem de ağırlıklı uzaylarda $\{1, \rho, \rho^2\}$ test fonksiyonu için Korovkin teoremine karakterize edilecektir. Daha sonra Voronovskaja teoremi ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla Gruss tipli Voronovskaja teoremi verilerek yakınsama hızı ve hatası elde edilecektir.

1.2 Kaynak Özeti

Bu çalışmanın ana kaynağı Acar tarafından 2015 yılında yapılan 'Asymptotic Formulas for Generalized Szász-Mirakjan Operators' adlı makale çalışmasıdır.

Temel kavramlar için genel olarak Hacısalihoğlu ve Hacıyev (1995) yazarlarına ait 'Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı' adlı kitaptan yararlanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Yaklaşımlar teorisinin temel tanımlarına, özelliklerine, teoremlerine ve yardımcı teoremlerine bu bölümde yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Operatör) X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere X'den alınan bir f fonksiyonunu Y'de bir g fonksiyonuna götüren L dönüşümüne operatör denir. $L: X \to Y$ olmak üzere $f \to L\,(f) = g$ şeklinde gösterilen bu dönüşüm için fonksiyonun χ noktasında aldığı değere bağlı olarak $L(f) = g$ yerine $L(f(t);\chi) = g(\chi)$ yani $L(f;\chi)$ gösterimi kullanılacaktır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.2 (Lineer Operatör) X ve Y doğrusal fonksiyon uzayları ve $L: X \to Y$ bir operatör olsun. $\forall f_1, f_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere L operatöründe
$L(\alpha.f_1 + \beta.f_2, \chi) = \alpha L(f_1, \chi) + \beta L(f_2, \chi)$ şartının gerçeklenmesine operatörün lineerliği denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.3 (Pozitif Operatör) X uzayında tanımlı lineer L operatörü X uzayından alınan pozitif f fonksiyonunu yine pozitif bir fonksiyona dönüştürüyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Bu takdirde pozitif operatör $f \geq 0\ için\ L(f;\chi) \geq 0$ şartını sağlar (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.4 (Lineer Pozitif Operatör) 2.2 ve 2.3 tanımlarında verilen lineer operatör ve pozitif operatör koşullarını sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.5 (Operatör Dizisi) k doğal sayılar kümesinin elemanı olan bir alt indis olmak üzere $L_k(f;\chi)$ ifadesine operatör dizisi denir ve (L_k) biçiminde ifade edilir (Ayar 2011).

Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri: f, g ve $|f|$ fonksiyonları X uzayının elemanları olmak üzere $L: X \to Y$ lineer pozitif operatörü için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Şimşek 2019).

$L(f) \leq L(g)$ oluyorsa operatör monotondur.

$|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği gerçeklenir.

Tanım 2.6 (Operatörün Sınırlılığı) $L: X \to Y$ biçiminde lineer operatör tanımlansın. $\|L(f,\chi)\|_y \leq C\|f\|_\chi$ eşitsizliğini sağlayan operatör sınırlıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.7 (Operatör Normu) Tanım 2.6 da verilen C sabitlerinin en küçüğü L lineer operatörünün normudur ve $\|L\|$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.8 (Düzgün Yakınsama) $k = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere f_k, $f_k: X \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. X kümesinden alınan bütün χ elemanları, $\forall \varepsilon > 0$ için χ' e bağlı olmayan bir N sayısı varsa ve $\forall k > N$ sayısı için $|f_k(\chi) - f(\chi)| < \varepsilon$ oluyorsa f_k dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar ve bu düzgün yakınsama $f_k \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir (Yazar 2007).

Teorem 2.1 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi) $\forall \varepsilon > 0$ için $f \in C[a,b]$ keyfi bir fonksiyon olarak alınırsa $f - p < \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen bir p polinomu bulunur (Rivlin 1981). Bu yaklaşım teoreminin bir sonucu olarak f fonksiyonuna düzgün yaklaşan p_k^* polinomu vardır (Yazar 2007).

Tanım 2.9 (Bernstein Polinomu) Bernstein tarafından [0,1] kapalı aralığında tanımlı olan sınırlı ve sürekli bir fonksiyona yaklaşan bir polinom tanımlanmıştır. Tanımlanan bu polinoma Bernstein Polinomlar Dizisi adı verilir. $k \in \mathbb{N}$ ve $\forall \chi \in [0,1]$ olarak alınmak üzere Bernstein Polinomu aşağıdaki biçimde gösterilir (Bernstein 1912).

$$B_k(f;\chi) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \chi^r (1-\chi)^{k-r} f\binom{r}{k}$$

Bu polinomda $\chi^r(1-\chi)^{k-r} \geq 0$ olacağından $B_k(f;\chi) \geq 0$ olur ve $B_k(f;\chi)$ bir lineer pozitif operatördür (Karakuş 2009).

Teorem 2.2 (Korovkin Teoremi) $L_k(f;\chi)$ lineer operatör dizisi ve $\alpha_k(\chi)$, $\beta_k(\chi)$ ve $\gamma_k(\chi)$ $[a,b]$ aralığında düzgün olarak 0' a yakınsayan diziler olup $\forall \chi \in [a,b]$ için $L_k(f;\chi)$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün bir şekilde yakınsaması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibidir.

$L_k(1;\chi) = 1+\alpha_k(\chi)$

$L_k(t;\chi) = \chi+\beta_k(\chi)$

$L_k(t^2;\chi) = \chi^2+\gamma_k(\chi)$

Bu yakınsama $a \leq \chi \leq b$ olmak üzere $L_k(f;\chi) \rightrightarrows f(\chi)$ şeklinde ifade edilir. Burada verilen f fonksiyonu reel eksenin tamamında sınırlı olup $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olmakla birlikte a da soldan sürekli, b de ise sağdan sürekli bir fonksiyondur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.10 (Süreklilik Modülü) f fonksiyonu $C[a,b]$ fonksiyon uzayının elemanı olsun. $\forall \delta > 0$ gerçel sayısı için f fonksiyonuna ait süreklilik modülü aşağıdaki biçimdedir (Donner 2006).

$$\omega(f;\ \delta) = \sup_{\substack{t,\chi\in[a,b] \\ |t-\chi|<\delta}} |f(t)-f(\chi)|$$

Tanım 2.11 (Ağırlık Fonksiyonu) $\forall \chi \in \mathbb{R}$ için gerçel sayılar üzerinde sürekli olan ρ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa ρ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olarak isimlendirilir (Çulha 2007).

i) $\lim_{|\chi|\to\infty} \rho(\chi) = \infty$

ii) $\rho(\chi) \geq 1$

Tanım 2.12 (Ağırlıklı Uzaylar) ρ ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\forall \chi \in \mathbb{R}$ için $|f(\chi)| \leq M_f . \rho(\chi)$ koşulunu gerçekleyen $\mathbb{R}$ de tanımlanan f fonksiyonunun uzayı ağırlıklı uzaydır ve bu uzay B_ρ biçiminde gösterilir. M_f, f fonksiyonuna bağlı ve sabittir (Çulha 2007).

Tanım 2.13 (Klasik Szász-Mirakjan Operatörü) $k \in \mathbb{N}$, $\chi \in [0, \infty)$ ve $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere Szász-Mirakjan operatörü

$$S_k(f; \chi) = (S_k)f(\chi) = \sum_{r=0}^{\infty} S_{k,r}(\chi)\, f\left(\frac{r}{k}\right)$$

şeklinde tanımlı operatördür. Burada Szász taban fonksiyonunun

$$S_{k,r}(\chi) = e^{-k\chi} \frac{(k\chi)^r}{r!}$$

biçiminde tanımlı olduğu dikkate alınmıştır (Kasana et al. 1985). O halde Szász-Mirakjan operatörü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir ve lineer pozitiftir (Yılmaz 2016).

$$S_k(f; \chi) = e^{-k\chi} \sum_{r=0}^{\infty} f\left(\frac{r}{k}\right) \frac{(k\chi)^r}{r!}$$

Teorem 2.3 (Klasik Szász-Mirakjan Operatörü için Voronovskaja Teoremi) $[0, A]$ aralığında sınırlı ve bu aralıktaki bir χ noktasında ikinci mertebeden türevi olan bir f fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir (Voronovskaja 1932).

$$\lim_{k \to \infty} k[S_k(f; \chi) - f(\chi)] = \frac{\chi}{2} f''(\chi)$$

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörleri tanıtılarak ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özellikleri incelenerek merkezi moment hesaplamaları yapılmıştır ve sonraki bölüme temel kaynak olan özellikler, teoremler ve yardımcı teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1 (Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan Operatörü) ρ fonksiyonu [0,∞) arasında diferansiyellenebilen, sürekli ve $\rho(0) = 0$ ve $inf_{\chi\in\mathbb{R}^+}\rho'(\chi) \geq 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanır (Aral *et al.* 2014).

$$S_k^{\rho}(f;\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} f\left(\rho^{-1}\left(\frac{r}{k}\right)\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} \tag{3.1}$$

ρ fonksiyonu için aşağıdaki durumlar da dikkate alınmalıdır:

a) M_f yalnızca f 'ye bağlı ve sabit olmak üzere $\varphi(\chi) = 1 + \rho^2(\chi)$ ve $B_{\varphi}(\mathbb{R}^+) = \{f : |f(\chi)| \leq M_f\varphi(\chi)\}$ olarak alınmıştır.

b) $C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ uzayı $B_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ uzayı içindeki bütün sürekli fonksiyonların alt uzayını karşılamaktadır.

c) $C_{\varphi}^*(\mathbb{R}^+)$ ile $\lim_{\chi\to\infty} \frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ ifadesinin sonlu olduğu $f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun alt uzayı ifade edilmektedir.

d) $U_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ ise f/φ düzgün sürekli olacak biçimde $f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun alt uzayını ifade etmektedir.

e) $B_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ uzayı $\|f\|_{\rho} = sup_{\chi\geq 0} \frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ normuna sahip olan lineer normlu bir uzaydır.

Ağırlıklı Süreklilik Modülü İle Yakınsaklık Hızının Elde Edilmesi: Ağırlıklı süreklilik modülünü kullanarak yaklaşım hızına ulaştıran teorem için tanım 2.10 da verilen ifade yerine $|\rho(y)-\rho(\chi)| \leq \delta$ ifadesinin supremumu daha uygun sonuçlara ulaştıracaktır.

Tanım 3.2 (Ağırlıklı Süreklilik Modülü) $\forall f \in C_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ ve $\forall \delta > 0$ için ağırlıklı süreklilik modülü

$$\omega_{\rho}(f;\delta) = sup_{\substack{\chi,y\geq 0 \\ |\rho(y)-\rho(\chi)|\leq\delta}} \frac{|f(y)-f(\chi)|}{\varphi(y)+\varphi(\chi)}$$

şeklinde tanımlanır (Holhos 2008).

$\omega_{\rho}(f;\delta)$ ile ifade edilen ağırlıklı süreklilik modülünün birtakım özelliklerini belirtelim:

Lemma 3.1 $\forall f \in U_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ için $\lim_{\delta\to 0} \omega_{\rho}(f,\delta) = 0$ ve

$$|f(y)-f(\chi)| \leq \big(\varphi(y)+\varphi(\chi)\big).\left(2+\frac{|\rho(y)-\rho(\chi)|}{\delta}\right)\omega_{\rho}(f,\delta) \qquad (3.2)$$

olur.

Açıklama 3.1 $\rho(\chi)=\chi$ alınması halinde ω_{ρ} ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega_{2}(f;\delta) = \sup_{\substack{\chi,y\geq 0 \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(\chi+h)-f(\chi)|}{(1+h^{2})(1+\chi^{2})}$$

ifadesine dönüşür (Ispir 2001).

Ağırlıklı Korovkin Tipli Teorem İle Yakınsaklığın Gösterilmesi: Bu kısımda ağırlıklı korovkin tipli teorem aracılığıyla operatörün düzgün yakınsaması incelenerek sonraki bölümlerde kullanılacak olan merkezi momentlerin hesaplamaları yapılmıştır.

Lemma 3.2 ρ, tanım 2.14 te verilen özellikleri sağlayan bir ağırlık fonksiyonu ve Genelleştirilmiş Szász Mirakjan Operatörü [0,∞) arasında tanımlı bir operatör olmak üzere bu operatör f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

$\chi \in [0,\infty)$ olup bu yakınsama $S_k^{\rho}(f;\chi) \rightrightarrows f(\chi)$ şeklinde gösterilir.

İspat: $S_k^{\rho}(f;\chi)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermek için operatörün lineerlik ve pozitiflik şartını gerçeklediğini gösterelim.

Operatörün Lineerliğinin Gösterilmesi: $\forall f_1, f_1 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $S_k^{\rho}(f;\chi)$ operatöründe

$$S_k^{\rho}(\alpha.f_1 + \beta.f_2,\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\alpha f_1\left(\frac{r}{k}\right) + \beta f_2\left(\frac{r}{k}\right)\right] \frac{(k\rho(\chi))^r}{r!}$$

$$= \alpha e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} f_1\left(\frac{r}{k}\right) \frac{(k\rho(\chi))^r}{r!} + \beta e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} f_2\left(\frac{r}{k}\right) \frac{(k\rho(\chi))^r}{r!}$$

olup

$$S_k^{\rho}(\alpha.f_1 + \beta.f_2,\chi) = \alpha S_k^{\rho}(f_1,\chi) + \beta S_k^{\rho}(f_2,\chi)$$

koşulu sağlanmış olur. O halde $S_k^{\rho}(f;\chi)$ operatörü lineerdir.

Operatörün Pozitifliğinin Gösterilmesi: r doğal sayılar kümesinin bir elemanı ve f fonksiyonu X uzayından alınan pozitif bir fonksiyon olmak üzere bu durumda

$$e^{-k\rho(\chi)} \frac{(k\rho(\chi))^r}{r!} \geq 0$$

olup

$f \geq 0$ için $S_k^{\rho}(f;\chi) \geq 0$ koşulu sağlanmış olur. O halde $S_k^{\rho}(f;\chi)$ operatörü pozitiftir.

Düzgün Yakınsaklığının Gösterilmesi: Teorem 2.2 yardımıyla ve operatörün lineerliğini ve pozitifliğini kullanarak

1) $S_k^{\rho}(1;\chi) = 1$ (3.3)

2) $S_k^{\rho}(\rho;\chi) = \rho(\chi)$ (3.4)

3) $S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = \rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}$ (3.5)

olduğunu göstermek yakınsamayı ispatlar.

1) $S_k^{\rho}(1;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(1;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} = e^{k\rho(\chi)}\right)$$

$$S_k^{\rho}(1;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.e^{k\rho(\chi)}$$

$$= 1$$

O halde $S_k^{\rho}(1;\chi) = 1$ bulunur.

2) $S_k^{\rho}(\rho;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k}.\frac{k^r.\left(\rho(\chi)\right)^r}{r.(r-1)!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k^{-1}.k^r.\left(\rho(\chi)\right)^r}{(r-1)!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k^{r-1}.\rho(\chi).\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho;\chi) = \rho(\chi).e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k^{r-1}.\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

olup r yerine $r+1$ yazılırsa

$$S_k^{\rho}(\rho;\chi) = \rho(\chi).e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k^r.\left(\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi).e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi).e^{-k\rho(\chi)}.e^{k\rho(\chi)}$$

$$= \rho(\chi).1$$

$$= \rho(\chi)$$

olur. O halde $S_k^{\rho}(\rho;\chi) = \rho(\chi)$ bulunur.

3) $S_k^{\rho}(\rho^2;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^2.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r)^2}{(k)^2}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

olup $r^2 = r.(r-1)+r$ olarak alınırsa

$$S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r.(r-1)+r}{(k)^2}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r.(r-1)}{(k)^2}+\frac{r}{(k)^2}\right).\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r.(r-1)}{(k)^2}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{(k)^2}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r.(r-1).(k)^{-2}.(k)^r.\rho^r(\chi).\rho^2(\chi).\rho^{-2}(\chi)}{r.(r-1).(r-2)!}$$

$$+ e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k.k}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \left(\rho(\chi)\right)^2.\ e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{1}{k}.e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right).\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

olur. (3.4) ten

$$S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = \rho^2(\chi)\,.\, e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \frac{1}{k}.\rho(\chi)$$

$$= \rho^2(\chi).e^{-k\rho(\chi)}e^{k\rho(\chi)} + \frac{\rho(\chi)}{k}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = \rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}$$

olur. Böylece (3.3), (3.4) ve (3.5) şartları bulunarak ispat tamamlandı.

Lemma 3.3 $S_k^{\rho}(f;\chi)$ operatörünün merkezil momentleri

$$M_{k,m}^{\rho}(\chi) = S_k^{p}\left(\left(\rho(t)-\rho(\chi)\right)^m;\chi\right)$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$\boldsymbol{i})\ M_{k,0}^{\rho}(\chi) = 1$ (3.10)

$\boldsymbol{ii})\ M_{k,1}^{\rho}(\chi) = 0$ (3.11)

$\boldsymbol{iii})\ M_{k,2}^{\rho}(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{k}$ (3.12)

$\boldsymbol{iv})\ M_{k,3}^{\rho}(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{k^2}$ (3.13)

$\boldsymbol{v})\ M_{k,4}^{\rho}(\chi) = \frac{3\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}$ (3.14)

$\boldsymbol{vi})\ M_{k,6}^{\rho}(\chi) = \frac{15\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{25\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$ (3.15)

İspat: Lemma 3.3 ispatı için gerekli olan ifadeler aşağıdaki gibidir.

1) $S_k^{\rho}(1;\chi) = 1$ (3.3)

2) $S_k^{\rho}(\rho;\chi) = \rho(\chi)$ (3.4)

3) $S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) = \rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}$ (3.5)

4) $S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) = \rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}$ (3.6)

5) $S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) = \rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}$ (3.7)

6) $S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = \rho^5(\chi) + \frac{10\rho^4(\chi)}{k} + \frac{25\rho^3(\chi)}{k^2} + \frac{15\rho^2(\chi)}{k^3} + \frac{\rho(\chi)}{k^4}$ (3.8)

7) $S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho^6(\chi) + \frac{15\rho^5(\chi)}{k} + \frac{65\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{90\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{31\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$ (3.9)

(3.10), (3.11) ve (3.12) momentlerinin ispatı için (3.3), (3.4) ve (3.5) yeterli olacaktır. (3.13), (3.14) ve (3.15) momentlerinin ispatı için ek olarak ihtiyacımız olan (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) ifadelerini gösterelim.

4) $S_k^{\rho}(\rho^3;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^3.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r)^3}{(k)^3}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r)^2}{(k)^2}\frac{k^{r-1}\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

olup r yerine $r+1$ yazılırsa

$$S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r+1}{k}\right)^2\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)\left[e^{-k\rho(\chi)}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r^2+2r+1}{k^2}\right)\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right)\right]$$

$$= \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^2\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)\frac{2}{k}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho(\chi)\frac{1}{k^2}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) + \rho(\chi)\frac{2}{k}S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho(\chi)\frac{1}{k^2}S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho(\chi)\rho^2(\chi) + \rho(\chi)\frac{\rho(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{2\rho(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{1}{k^2}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) = \rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}$$

bulunur.

5) $S_k^{\rho}(\rho^4;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^4.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r)^4}{(k)^4}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r)^3}{(k)^3}\frac{k^{r-1}\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

olup r yerine $r+1$ yazılırsa

$$S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r+1}{k}\right)^3\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)\left[e^{-k\rho(\chi)}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r^3+3r^2+3r+1}{k^3}\right)\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right)\right]$$

$$= \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^3\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)\frac{3}{k}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^2\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho(\chi)\frac{3}{k^2}e^{-n\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)\frac{1}{k^3}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) + \rho(\chi)\frac{3}{k}S_k^{\rho}(\rho^2;\chi)$$

$$+\rho(\chi)\frac{3}{k^2}S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho(\chi)\frac{1}{k^3}S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) = \rho(\chi)\rho^3(\chi) + \rho(\chi)\frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{\rho(\chi)}{k^2}$$

$$+\rho(\chi)\frac{3}{k}\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right) + \rho(\chi)\frac{3}{k^2}\left(\rho(\chi)\right) + \rho(\chi)\frac{1}{k^3}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) = \rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}$$

bulunur.

6) $S_k^{\rho}(\rho^5;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^5.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r)^5}{(k)^5}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r)^4}{(k)^4}\frac{k^{r-1}\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

olup r yerine $r+1$ yazılırsa istenilen ifade bulunur.

$$S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r+1}{k}\right)^4\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)\left[e^{-k\rho(\chi)}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r^4+4r^3+6r^2+4r+1}{k^4}\right)\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right)\right]$$

$$S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^4\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)\frac{4}{k}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^3\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho(\chi)\frac{6}{k^2}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^2\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)\frac{4}{k^3}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r}{k}\frac{\left(n\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho(\chi)\frac{1}{k^4}e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = \rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) + \rho(\chi)\frac{4}{k}S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) + \rho(\chi)\frac{6}{k^2}S_k^{\rho}(\rho^2;\chi)$$

$$+\rho(\chi)\frac{4}{k^3}S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho(\chi)\frac{1}{k^4}S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho(\chi)\rho^4(\chi) + \rho(\chi)\frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \rho(\chi)\frac{\rho(\chi)}{k^3}$$

$$+\rho(\chi)\frac{4}{k}\left(\rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}\right) + \rho(\chi)\frac{6}{k^2}\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right)$$

$$+\rho(\chi)\frac{4}{k^3}\left(\rho(\chi)\right) + \rho(\chi)\frac{1}{k^4}$$

$$= \rho(\chi)\rho^4(\chi) + \rho(\chi)\frac{10\rho^3(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{25\rho^2(\chi)}{k^2}$$

$$+\rho(\chi)\frac{15\rho(\chi)}{k^3} + \rho(\chi)\frac{1}{k^4}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) = \rho^5(\chi) + \frac{10\rho^4(\chi)}{k} + \frac{25\rho^3(\chi)}{k^2} + \frac{15\rho^2(\chi)}{k^3} + \frac{\rho(\chi)}{k^4}$$

7) $S_k^{\rho}(\rho^6;\chi)$ ifadesini bulalım.

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^6.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)}.\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r)^6}{(k)^6}.\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r)^5}{(k)^5}\frac{k^{r-1}\left(\rho(\chi)\right)^{r-1}}{(r-1)!}$$

olup r yerine $r+1$ yazılırsa

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r+1}{k}\right)^5\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= \rho(\chi)\left[e^{-k\rho(\chi)}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r^5+5r^4+10r^3+10r^2+5r+1}{k^5}\right)\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right)\right]$$

$$= \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^5\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\frac{5}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^4\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{k!}$$

$$+\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\frac{10}{k^2}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^3\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\frac{10}{k^3}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^2\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\frac{5}{k^4}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r}{k}\right)^1\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} + \rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)}\frac{1}{k^5}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) + \rho(\chi)\frac{5}{k}S_k^{\rho}(\rho^4;\chi)$$

$$+\rho(\chi)\frac{10}{k^2}S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) + \rho(\chi)\frac{10}{k^3}S_k^{\rho}(\rho^2;\chi)$$

$$+\rho(\chi)\frac{5}{k^4}S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho(\chi)\frac{1}{k^5}S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho(\chi)\rho^5(\chi) + \rho(\chi)\frac{10\rho^4(\chi)}{k} + \rho(\chi)\frac{25\rho^3(\chi)}{k^2} + \rho(\chi)\frac{15\rho^2(\chi)}{k^3}$$

$$+\rho(\chi)\frac{\rho(\chi)}{k^4} + \rho(\chi)\frac{5}{k}\left(\rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}\right)$$

$$+\rho(\chi)\frac{10}{k^2}\left(\rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}\right) + \rho(\chi)\frac{10}{k^3}\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right)$$

$$+\rho(\chi)\frac{5}{k^4}\left(\rho(\chi)\right) + \rho(\chi)\frac{1}{k^5}$$

$$= \rho^6(\chi) + \frac{10\rho^5(\chi)}{k} + \frac{25\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{15\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{5\rho^5(\chi)}{k}$$

$$+\frac{30\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{35\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{5\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{10\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{30\rho^3(\chi)}{k^3}$$

$$+\frac{10\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{10\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{10\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{5\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$$

$$S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) = \rho^6(\chi) + \frac{15\rho^5(\chi)}{k} + \frac{65\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{90\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{31\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$$

olur. İstenilen bütün değerler bulunduğuna göre hesaplamalar yapılabilir:

(i) $M_{k,0}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,0}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^{0} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!}$$

$$= S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$M_{k,0}^{\rho}(\chi) = 1$ bulunur.

(ii) $M_{k,1}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,1}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^{1} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty} \rho(\chi) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!}\right]$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!} - e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \rho(\chi) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^{r}}{r!}$$

$$= S_k^{\rho}(\rho;\chi) - \rho(\chi).S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho(\chi) - \rho(\chi).1$$

$M_{k,1}^{\rho}(\chi) = 0$ olur.

(iii) $M_{k,2}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,2}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\left(\frac{r}{k}\right)^2 - 2\frac{r}{k}\rho(\chi) + \rho^2(\chi)\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right]$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} 2\frac{r}{k}\rho(\chi) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \rho^2(\chi) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 2\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r}{k} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho^2(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) - 2\,\rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho^2(\chi)S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k} - 2\,\rho(\chi)\rho(\chi) + \rho^2(\chi)$$

$$M_{k,2}^{\rho}(\chi) = \rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k} - 2\rho^2(\chi) + \rho^2(\chi)$$

$$= \frac{\rho(\chi)}{k}$$

olur.

$$M_{k,2}^{\rho}(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{k}$$

olduğu görülür.

(iv) $M_{k,3}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,3}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^3 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\left(\frac{r}{k}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{k}\right)^2 \rho(\chi) + 3\left(\frac{r}{k}\right)\rho^2(\chi) - \rho^3(\chi)\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}\right]$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^3 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} 3\rho(\chi)\left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+ e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} 3\,\rho^2(\chi)\left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \rho^3(\chi) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^3 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 3\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+3\rho^2(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - \rho^3(\chi)\, e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$M_{k,3}^{\rho}(\chi) = S_k^{\rho}(\rho^3;\chi) - 3\rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) + 3\rho^2(\chi)S_k^{\rho}(\rho;\chi) - \rho^3(\chi)S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2} - 3\rho(\chi)\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right) + 3\rho^2(\chi)\rho(\chi) - \rho^3(\chi)$$

$$= \rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2} - 3\rho^3(\chi) - \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + 3\rho^3(\chi) - \rho^3(\chi)$$

$$= \frac{\rho(\chi)}{k^2}$$

olur. O halde

$$M_{k,3}^{\rho}(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{k^2}$$

olduğu görülür.

(v) $M_{k,4}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,4}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^4 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^4 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 4\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^3 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+6\rho^2(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 4\,\rho^3(\chi) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho^4(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$M_{k,4}^{\rho}(\chi) = S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) - 4\rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^3;\chi)$$

$$+6\rho^2(\chi)S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) - 4\rho^3(\chi)S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho^4(\chi)$$

$$= \rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3} - 4\rho(\chi)\left(\rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}\right)$$

$$+6\rho^2(\chi)\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right) - 4\rho^3(\chi)\rho(\chi) + \rho^4(\chi)$$

$$= \rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3} - 4\rho^4(\chi) - \frac{12\rho^3(\chi)}{k} - \frac{4\rho^2(\chi)}{k^2}$$

$$+6\rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} - 4\rho^4(\chi) + \rho^4(\chi)$$

$$M_{k,4}^{\rho}(\chi) = \frac{3\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}$$

bulunur.

(vi) $M_{k,6}^{\rho}(\chi)$ ifadesini bulalım.

$$M_{k,6}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k} - \rho(\chi)\right)^6 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$M_{k,6}^{\rho}(\chi) = e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^6 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 6\rho(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^5 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+15\rho^2(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^4 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 20\rho^3(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^3 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+15\rho^4(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right)^2 \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!} - 6\rho^5(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{r}{k}\right) \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$+\rho^6(\chi)e^{-k\rho(\chi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(k\rho(\chi)\right)^r}{r!}$$

$$= S_k^{\rho}(\rho^6;\chi) - 6\rho(\chi)S_k^{\rho}(\rho^5;\chi) + 15\rho^2(\chi)S_k^{\rho}(\rho^4;\chi) - 20\rho^3(\chi)S_k^{\rho}(\rho^3;\chi)$$

$$+15\rho^4(\chi)S_k^{\rho}(\rho^2;\chi) - 6\rho^5(\chi)S_k^{\rho}(\rho;\chi) + \rho^6(\chi)S_k^{\rho}(1;\chi)$$

$$= \rho^6(\chi) + \frac{15\rho^5(\chi)}{k} + \frac{65\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{90\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{31\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$$

$$-6\rho(\chi)\left(\rho^5(\chi) + \frac{10\rho^4(\chi)}{k} + \frac{25\rho^3(\chi)}{k^2} + \frac{15\rho^2(\chi)}{k^3} + \frac{\rho(\chi)}{k^4}\right)$$

$$+15\rho^2(\chi)\left(\rho^4(\chi) + \frac{6\rho^3(\chi)}{k} + \frac{7\rho^2(\chi)}{k^2} + \frac{\rho(\chi)}{k^3}\right)$$

$$-20\rho^3(\chi)\left(\rho^3(\chi) + \frac{3\rho^2(\chi)}{k} + \frac{\rho(\chi)}{k^2}\right)$$

$$+15\rho^4(\chi)\left(\rho^2(\chi) + \frac{\rho(\chi)}{k}\right) - 6\rho^5(\chi)\rho(\chi) + \rho^6(\chi)$$

$$M_{k,6}^{\rho}(\chi) = \rho^6(\chi) + \frac{15\rho^5(\chi)}{k} + \frac{65\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{90\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{31\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$$

$$-6\rho^6(\chi) - \frac{60\rho^5(\chi)}{k} - \frac{150\rho^4(\chi)}{k^2} - \frac{90\rho^3(\chi)}{k^3} - \frac{6\rho^2(\chi)}{k^4}$$

$$+15\rho^6(\chi) + \frac{90\rho^5(\chi)}{k} + \frac{105\rho^4(\chi)}{k^2} + \frac{15\rho^3(\chi)}{k^3}$$

$$-20\rho^6(\chi) - \frac{60\rho^5(\chi)}{k} - \frac{20\rho^4(\chi)}{k^2}$$

$$+15\rho^6(\chi) + \frac{15\rho^5(\chi)}{k} - 6\rho^6(\chi) + \rho^6(\chi)$$

olur. Böylece

$$M_{k,6}^{\rho}(\chi) = \frac{15\rho^3(\chi)}{k^3} + \frac{25\rho^2(\chi)}{k^4} + \frac{\rho(\chi)}{k^5}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1 (Voronovskaja Teoremi) Klasik Szász Mirakyan operatörü için tanımlanan Voronovskaja teoremini (3.1) de seçtiğimiz operatör için ifade edelim.

$f \circ \rho^{-1}$ işlevi ρ noktasında birinci ve ikinci mertebeden türeve sahip olsun. $f \in C(\mathbb{R}^+)$ ve $\chi \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki şekilde asimptotik formül elde edilir (Çor 2017).

$$\lim_{k\to\infty} k[S_k(f;\chi) - f(\chi)] = \frac{\rho(\chi)}{2}(f \circ \rho^{-1})''(\rho(\chi))$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ SZÁSZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Bu kısımda Voronovskaja teoreminin yanında yeni bir noktasal yakınsama sonucunu ihtiva eden Gruss tipli Voronovskaja teoremi ağırlıklı süreklilik modülü ile nicel formda verilerek sonuçları incelenmiş ve yakınsamanın hızı ve hatası elde edilmiştir.

Teorem 4.1

ρ fonksiyonu tanım 3.1 de verilen şartları sağlasın.

$f''/(\rho')^2$, $f'.\rho''/(\rho')^3 \in C_\varphi\mathbb{R}^+$ ve $\chi \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left|k\left[S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi)\right] - \frac{\rho(\chi)D^2(f\circ\rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)}{2}\right|$$

$$\leq 6(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\big(1+\rho(\chi)\big)\left\{\omega_\rho\left(\frac{f''}{(\rho')^2},\delta_k^\rho(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^\rho(\chi)\right)\right\}$$

olur.

Burada

$$\delta_k^\rho(\chi) = \frac{\sqrt[4]{15\rho^3(\chi)+25\rho^2(\chi)+\rho(\chi)}}{\sqrt{k}}$$

dir (Acar 2015).

İspat: $\chi < \xi < u$ ve $\chi \in \mathbb{R}^+$ için $f \circ \rho^{-1}$ fonksiyonunun Taylor açılımını

$$f \circ \rho^{-1}\big(\rho(u)\big) = (f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big) + D(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)$$

$$+ \frac{D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)^2}{2}$$

$$+ h(u,\chi)\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)^2 \tag{4.1}$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada

$$h(u,\chi) = \frac{D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\xi)\big) - D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)}{2}$$

biçimindedir. (4.1) de verilen eşitliğin iki tarafına operatörü uygularsak

$$\left| S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi) - \frac{D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)}{2} M_{k,2}^\rho(\chi) \right| \leq S_k^\rho\left(|h(u,\chi)|\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)^2;\chi\right)$$

elde edilir. Lemma 3.3 kullanılarak

$$\left| S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi) - \frac{\rho(\chi) D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)}{2\mathrm{k}} \right| \leq S_k^\rho\left(|h(u,\chi)|\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)^2;\chi\right)$$

yazılır.

İspatı tamamlamak için $S_k^\rho\left(|h(u,\chi)|\big(\rho(u) - \rho(\chi)\big)^2;\chi\right)$ ifadesini bulalım.

$$(f \circ \rho^{-1})''\rho\big((t)\big) = \frac{\mathrm{f}''(t)}{\big(\rho'(t)\big)^2} - \mathrm{f}'(t)\frac{\rho''(t)}{\big(\rho'(t)\big)^3}$$

ifadesi ve (3.2) ile

$$\frac{(f \circ \rho^{-1})''\big(\rho(\xi)\big) - (f \circ \rho^{-1})''\big(\rho(\chi)\big)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{f''(\xi)}{\big(\rho'(\xi)\big)^2} - f'(\xi)\frac{\rho''(\xi)}{\big(\rho'(\xi)\big)^3} - \frac{f''(\chi)}{\big(\rho'(\chi)\big)^2} + f'(\chi)\frac{\rho''(\chi)}{\big(\rho'(\chi)\big)^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{f''(\xi)}{\big(\rho'(\xi)\big)^2} - \frac{f''(\chi)}{\big(\rho'(\chi)\big)^2} + f'(\chi)\frac{\rho''(\chi)}{\big(\rho'(\chi)\big)^3} - f'(\xi)\frac{\rho''(\xi)}{\big(\rho'(\xi)\big)^3}\right\}$$

$$\leq \big(\varphi(u) + \varphi(\chi)\big)\left(2 + \frac{|\rho(u) - \rho(\chi)|}{\delta}\right)\left\{\omega_\rho\left(\frac{f''}{(\rho')^2};\ \delta\right) + \omega_\rho\left(\frac{f'.\rho''}{(\rho')^3};\delta\right)\right\}$$

yazarız.

Diğer yandan

$$\varphi(t) + \varphi(\chi) \leq \delta^2 + 2\rho^2(\chi) + 2\rho(\chi)\delta + 2$$

olduğundan dolayı $|\rho(u) - \rho(\chi)| < \delta$ olması halinde

$$|h(u;\chi)| \leq 3(\delta^2 + 2\rho^2(\chi) + 2\rho(\chi)\delta + 2)\left\{\omega_\rho\left(\frac{f''}{(\rho')^2};\delta\right) + \omega_\rho\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^3};\delta\right)\right\} \qquad (4.2)$$

yazılır.

$$\varphi(u)+\varphi(\chi)\leq\left(\frac{\rho(u)-\rho(\chi)}{\delta}\right)^{2}\left(\delta^{2}+2\rho^{2}(\chi)+2\rho(\chi)\right)+2$$

olduğu için $|\rho(u)-\rho(\chi)|<\delta$ olması durumunda

$$|h(u;\chi)|\leq 3\left(\frac{\rho(u)-\rho(\chi)}{\delta}\right)^{4}(\delta^{2}+2\rho^{2}(\chi)+2\rho(\chi)+2)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f''}{(\rho')^{2}},\delta\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^{3}};\ \delta\right)\right\}$$

şeklinde (4.3) ifadesi yazılır.

(4.2) ile (4.3) arasında bağlantı kurulup $\delta<1$ olarak alınırsa

$$|h(u;\chi)|\leq 6(\rho^{2}(\chi)+\rho(\chi)+2)\left(\left(\frac{\rho(u)-\rho(\chi)}{\delta}\right)^{4}+1\right)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f''}{(\rho')^{2}},\delta\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^{3}};\ \delta\right)\right\}$$

olduğu sonucuna varırız. Böylece (3.12), (3.13) ve (3.15) ifadelerini kullanarak

$$\left|k\left[S_{k}^{\rho}(f;\chi)-f(\chi)\right]-\frac{\rho(\chi)D^{2}(f\circ\rho^{-1})(\rho(\chi))}{2}\right|$$

$$\leq 6k(\rho^{2}(\chi)+\rho(\chi)+2)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f''}{(\rho')^{2}},\delta\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^{3}};\ \delta\right)\right\}\times\left\{M_{k,2}^{\rho}(\chi)+\frac{1}{\delta^{4}}M_{k,6}^{\rho}(\chi)\right\}$$

$$=6(\rho^{2}(\chi)+\rho(\chi)+2)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f''}{(\rho')^{2}},\delta\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^{3}};\ \delta\right)\right\}$$

$$\times\left\{\rho(\chi)+\frac{1}{\delta^{4}}\left(\frac{15\rho^{3}(\chi)}{k^{2}}+\frac{25\rho^{2}(\chi)}{k^{3}}+\frac{\rho(\chi)}{k^{4}}\right)\right\}$$

$$\left|k\left[S_k^{\rho}(f;\chi)-f(\chi)\right]-\frac{\rho(\chi)D^2(f\circ\rho^{-1})\left(\rho(\chi)\right)}{2}\right|$$

$$\leq 6(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f^{''}}{(\rho^{'})^2},\delta\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f^{'}\rho^{''}}{(\rho^{'})^3};\ \delta\right)\right\}$$

$$\times\left\{\rho(\chi)+\frac{1}{\delta^4}\left(\frac{15\rho^3(\chi)+25\rho^2(\chi)+\rho(\chi)}{k^2}\right)\right\}$$

sonucuna ulaşırız.

$$\delta_k^{\rho}(\chi)=\frac{\sqrt[4]{15\rho^3(\chi)+25\rho^2(\chi)+\rho(\chi)}}{\sqrt{k}}$$

şeklinde seçilmesi halinde, ispatı tamamlayan

$$\left|k\left[S_k^{\rho}(f;\chi)-f(\chi)\right]-\frac{\rho(\chi)D^2(f\circ\rho^{-1})\left(\rho(\chi)\right)}{2}\right|$$

$$\leq 6k(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\left(1+\rho(\chi)\right)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f^{''}}{(\rho^{'})^2},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f^{'}\rho^{''}}{(\rho^{'})^3};\ \delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç: Yukarıdaki ispat göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

i) $f^{''}\in C_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ olarak alınırsa ve Teorem 4.1'de $\rho(\chi)=\chi$ olarak seçilirse Klasik Szász-Mirakjan operatörleri için aşağıda gösterilen formda nicel Voronovskaja teoremi vardır.

$$\left| k[S_k(f;\chi) - f(\chi)] - \frac{\chi f''(\chi)}{2} \right| \leq 12(1+\chi)^3 \Omega_2(f''; \delta_k(\chi))$$

Burada $\delta_k(\chi) = \sqrt[4]{15\chi^3 + 25\chi^2 + \chi}/\sqrt{k}$ biçiminde alınmıştır.

ii) $f''/(\rho')^2$, $f'.\rho''/(\rho')^3 \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve Teorem 1'de $k \to \infty$ olacak şekilde alınan limitle Aral *et al.* (2014) çalışmalarında elde edilen Voronovskaja teoremine ulaşılır.

$$\lim_{k\to\infty} k\left[S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi)\right] = \frac{\rho(\chi) D^2(f \circ \rho^{-1})\big(\rho(\chi)\big)}{2}$$

iii) $f''/(\rho')^2$, $f'.\rho''/(\rho')^3 \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve Teorem 1'de $\rho(\chi) = \chi$ seçimiyle ve $k \to \infty$ olacak şekilde limit alınırsa, Klasik Szász-Mirakjan operatörleri için aşağıda gösterilen formda Voronovskaja teoremi elde edilir.

$$\lim_{k\to\infty} k[S_k(f;\chi) - f(\chi)] = \frac{\chi.f''(\chi)}{2}$$

Teorem 4.2

$$\frac{(fg)'.\rho''}{(\rho')^3}, \frac{(fg)''}{(\rho')^2} \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$$

olmak üzere

$$f, g, \frac{f'.\rho''}{(\rho')^3}, \frac{g'.\rho''}{(\rho')^3}, \frac{f''}{(\rho')^2}, \frac{g''}{(\rho')^2} \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$$

ise $\chi \in \mathbb{R}^+$ noktasında

$$k\left|S_k^{\rho}(fg;\chi)-S_k^{\rho}(f;\chi)S_k^{\rho}(g;\chi)-\frac{\rho(\chi)}{k(\rho'(\chi))^2}\left\{g'(\chi)f'(\chi)-\frac{\rho''(\chi)(fg)(\chi)}{(\rho'(\chi))}\right\}\right|$$

$$\leq 6\left(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)\right)\left\{\omega_\rho\left(\frac{(fg)''}{(\rho')^2},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{(fg)'}{(\rho')^3},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

$$+6||f||_{\varphi}(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\left(1+\rho(\chi)\right)^2\left\{\omega_\rho\left(\frac{g''}{(\rho')^2},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{g'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

$$+6||g||_{\varphi}(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\left(1+\rho(\chi)\right)^2\left\{\omega_\rho\left(\frac{f''}{(\rho')^2},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

$$+kI_k(f)I_k(g)$$

olduğu sonucuna varılır. Burada $I_k(g)$ ifadesi

$$I_k(f)=\frac{\varphi(\chi)||(f\circ\rho^{-1})''||_{\varphi}}{2}\left\{2M_{k,2}^{\rho}(\chi)+\frac{2\rho(\chi)}{\varphi(\chi)}M_{k,3}^{\rho}(\chi)+\frac{1}{\varphi(\chi)}M_{k,4}^{\rho}(\chi)\right\}$$

ile eştir (Acar 2015).

İspat:

$\chi \in \mathbb{R}^{+}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olduğunda

$$S_k^{\rho}(fg;\chi) - S_k^{\rho}(f;\chi)S_k^{\rho}(g;\chi) - M_{k,2}^{\rho}(\chi)\frac{g'(\chi)f'(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)^2}$$

$$-M_{k,2}^{\rho}(\chi)\frac{g(\chi)f'(\chi)\rho''(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)^3} - M_{k,2}^{\rho}(\chi)\frac{g'(\chi)f(\chi)\rho''(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)^3}$$

$$= S_k^{\rho}(fg;\chi) - f(\chi)g(\chi) - \frac{M_{k,2}^{\rho}(\chi)}{2}(fg\circ\rho^{-1})''\left(\rho(\chi)\right)$$

$$-f(\chi)\left[S_k^{\rho}(g;\chi) - g(\chi) - \frac{M_{k,2}^{\rho}(\chi)}{2}(g\circ\rho^{-1})''\left(\rho(\chi)\right)\right]$$

$$-g(\chi)\left[S_k^{\rho}(f;\chi) - f(\chi) - \frac{M_{k,2}^{\rho}(\chi)}{2}(f\circ\rho^{-1})''\left(\rho(\chi)\right)\right]$$

$$+\left(g(\chi) - S_k^{\rho}(g;\chi)\right).\left(S_k^{\rho}(f;\chi) - f(\chi)\right)$$

yazılır. (3.12) kullanılarak

$$\left|S_k^{\rho}(fg;\chi) - S_k^{\rho}(f;\chi)S_k^{\rho}(g;\chi) - \frac{\rho(\chi)}{k\left(\rho'(\chi)\right)^2}\left\{g'(\chi)f'(\chi) - \frac{\rho''(\chi)(fg)(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)}\right\}\right|$$

$$\leq |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|$$

yazılır.

Teorem 4.1 vasıtasıyla

$|I_1|$

$$\leq 6(\rho^2(\chi) + \rho(\chi) + 2)\left(1 + \rho(\chi)\right)\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{(fg)''}{(\rho')^2}, \delta_k^{\rho}(\chi)\right) + \omega_{\rho}\left(\frac{(fg)'\rho''}{(\rho')^3}, \delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

$|I_2|$

$$\leq 6\|f\|_{\varphi}(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\big(1+\rho(\chi)\big)^2\left\{\omega_\rho\left(\frac{g''}{(\rho')^2},\delta_k^\rho(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{g'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^\rho(\chi)\right)\right\}$$

$|I_3|$

$$\leq 6\|g\|_{\varphi}(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\big(1+\rho(\chi)\big)^2\left\{\omega_\rho\left(\frac{f''}{(\rho')^2},\delta_k^\rho(\chi)\right)+\omega_\rho\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^\rho(\chi)\right)\right\}$$

ifadelerine ulaşılır. Öte yandan aynı teoremin varsayımlarıyla

$$S_k^\rho(f;\chi)-f(\chi)=(f\circ\rho^{-1})'\big(\rho(\chi)\big)M_{k,1}^\rho(\chi)$$

$$+\frac{1}{2}S_k^\rho\left((f\circ\rho^{-1})''\big(\rho(\xi)\big)\big(\rho(t)-\rho(\chi)\big)^2;\chi\right)$$

eşitliği yazılabilir.

Dolayısıyla (3.11) kullanıldığında

$$\left|S_k^\rho(f;\chi)-f(\chi)\right|\leq\frac{1}{2}S_k^\rho\left(\left|(f\circ\rho^{-1})''(\xi)\right|\big(\rho(t)-\rho(\chi)\big)^2;\chi\right)$$

$$\leq\left\|(f\circ\rho^{-1})''\right\|_{\varphi}\frac{1}{2}S_k^\rho\left(\big(1+\rho^2(\xi)\big)\big(\rho(t)-\rho(\chi)\big)^2;\chi\right),$$

ifadesine ulaşılır ve burada ξ sayısı t ile χ arasındadır.

Eğer $t<\xi<\chi$ ise o halde $1+\rho^2(\xi)\leq 1+\rho^2(\chi)$ olur.

$$\left|S_k^\rho(f;\chi)-f(\chi)\right|\leq\frac{\left\|(f\circ\rho^{-1})''\right\|_{\varphi}\varphi(\chi)}{2}M_{k,2}^\rho(\chi)$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer $\chi < \xi < t$ ise o halde $1 + \rho^2(\xi) \leq 1 + \rho^2(t)$ olur.

$$\left|S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi)\right| \leq \frac{\left\|(f \circ \rho^{-1})''\right\|_\varphi}{2} S_k^\rho\left((1+\rho(t)^2) - \left(\rho(t) - \rho(\chi)\right)^2; \chi\right)$$

$$= \frac{\left\|(f \circ \rho^{-1})''\right\|_\varphi}{2}\left(\left(1+\rho^2(\chi)\right)M_{k,2}^\rho(\chi) + 2\rho(\chi)M_{k,3}^\rho(\chi) + M_{k,4}^\rho(\chi)\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu yüzden $\rho(\xi)$ ifadesinin iki durumu için

$$\left|S_k^\rho(f;\chi) - f(\chi)\right| \leq \frac{\left\|(f \circ \rho^{-1})''\right\|_\varphi \varphi(\chi)}{2}$$

$$\times\left\{2M_{k,2}^\rho(\chi) + \frac{2\rho(\chi)}{\varphi(\chi)}M_{k,3}^\rho(\chi) + \frac{1}{\varphi(\chi)}M_{k,4}^\rho(\chi)\right\}$$

$$:= I_k(f)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$k\left|S_k^\rho(fg;\chi) - S_k^\rho(f;\chi)S_k^\rho(g;\chi) - \frac{\rho(\chi)}{k\left(\rho'(\chi)\right)^2}\left\{g'(\chi)f'(\chi) - \frac{\rho''(\chi)(fg)(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)}\right\}\right|$$

$$\leq 6(\rho^2(\chi)|\rho(\chi)|2)\left(1 \mid \rho(\chi)\right)\left\{\omega_\rho\left(\frac{(fg)''}{(\rho')^2}, \delta_k^\rho(\chi)\right) + \omega_\rho\left(\frac{(fg)'\rho''}{(\rho')^3}, \delta_k^\rho(\chi)\right)\right\}$$

$$+6\|f\|_\varphi(\rho^2(\chi) + \rho(\chi) + 2)\left(1+\rho(\chi)\right)^2\left\{\omega_\rho\left(\frac{g''}{(\rho')^2}, \delta_k^\rho(\chi)\right) + \omega_\rho\left(\frac{g'\rho''}{(\rho')^3}, \delta_k^\rho(\chi)\right)\right\}$$

$$+6\|g\|_{\varphi}(\rho^2(\chi)+\rho(\chi)+2)\big(1+\rho(\chi)\big)^2\left\{\omega_{\rho}\left(\frac{f''}{(\rho')^2},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)+\omega_{\rho}\left(\frac{f'\rho''}{(\rho')^3},\delta_k^{\rho}(\chi)\right)\right\}$$

$$+kI_k(f)I_k(g)$$

olup istenen duruma ulaşılır.

Sonuç: Yukarıdaki ispat göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

i) $(fg)''\in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere $f,g,f'',g''\in C_{\varphi}(\mathbb{R}^+)$ olsun. Teorem 4.2 de $\rho(\chi)=\chi$ seçimiyle Klasik Szász-Mirakjan operatörleri için aşağıda gösterilen formda nicel Voronovskaja teoremi elde edilir.

$$k\left|S_k(fg;\chi)-S_k(f;\chi)S_k(g;\chi)-\frac{\chi}{k}g'(x)f'(\chi)\right|$$

$$\leq 6(\chi^2+\chi+2)(1+\chi)\Omega_{\mathbf{2}}\left((fg)'';\delta_k(\chi)\right)$$

$$+6||f||_{\varphi}(\chi^2+\chi+2)(1+\chi)^2\Omega_{\mathbf{2}}\left(g'';\delta_n(\chi)\right)$$

$$+6||g||_{\varphi}(\chi^2+\chi+2)(1+\chi)^2\Omega_{\mathbf{2}}\left(f'';\delta_k(\chi)\right)+kI_k(f)I_k(g)$$

Burada $\delta_k(\chi)=\sqrt[4]{15\chi^3+25\chi^2+\chi/\sqrt{k}}$ biçimindedir ve $I_k(f)$

$$I_k(f)=\frac{||f||_2(1+\chi^2)}{2}\left\{\frac{2\chi}{k}+\frac{2\chi^2}{(1+\chi^2)k^2}+\frac{1}{1+\chi^2}\left(\frac{3\chi^2}{k^2}+\frac{\chi}{k^3}\right)\right\}$$

sonucuna indirgenir.

ii) $(fg)'' U_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ olmak üzere $f, g, f'', g'' \in U_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ olsun. Teorem 4.2 de $k \to \infty$ olacak şekilde alınan limitle S_k^{ρ} için Gruss tipli Voronovskaja teoremi

$$\lim_{k\to\infty} k\left[S_k^{\rho}(fg;\chi) - S_k^{\rho}(f;\chi)S_k^{\rho}(g;\chi)\right] = \frac{\rho(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)^2}\left\{g'(\chi)f'(\chi) - \frac{\rho''(\chi)(fg)'(\chi)}{\left(\rho'(\chi)\right)}\right\}$$

dir.

iii) $(fg)'' U_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ olmak üzere $f, g, f'', g'' \in U_{\varphi}(\mathbb{R}^{+})$ olsun. Teorem 4.2 de $\rho(\chi) = \chi$ seçimiyle ve $k \to \infty$ olacak şekilde Klasik Szász-Mirakjan operatörleri için Gruss tipli Voronovskaja teoremi

$$\lim_{k\to\infty} k[S_k(fg;\,\chi) - S_k(g;\,\chi)] = \chi g'(\chi)f'(\chi)$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

4. bölümde verilen teoremlerin ana sonuçları neticesinde klasik Szász-Mirakjan operatörü için nicel Voronovskaja teoremine; genellenmiş Szász-Mirakjan operatörü için Voronovskaja teoremine ulaşılmıştır. Szász-Mirakjan operatörleri ve modifikasyonları için (Butzer and Karsli 2009, Örkcü and Doğru 2011, Örkcü 2013) ve kaynaklarına bakılabilir.

KAYNAKLAR

Acar, T. 2015. Asymptotic formulas for generalized Szász–Mirakyan operators. Applied Mathematics and Computation., 263: 233-239.

Acar, T. and Aral, A. 2015. On pointwise convergence of q-Bernstein operators and their q-derivatives. Numerical Functional Analysis and Optimization, 36(3); 287-304.

Acar, T., Aral, A. and Rasa, I. 2014. Modified Bernstein-Durrmeyer operators. Gen. Math, 22(1); 27-41.

Acar, T., Aral, A. and Rasa, I. 2016. The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces. Positivity, 20(1); 25-40.

Aral, A., Inoan, D. and Rasa, I. 2014. On the generalized Szász-Mirakyan operators. Results Math., 65: 441-452.

Ayar, K. 2011. Ağırlıklı uzaylarda iki değişkenli lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, 68 s., Kırıkkale.

Bernstein, S.N. 1912. Dèmonstration du thèorème de Weierstrass fondèe sur le calcul de probabilitès. Commununications of the Kharkov Mathematical Society, 13(2); 1-2.

Butzer, P. L. and Karsli, H. 2009. Voronovskaya-type theorems for derivatives of the Bernstein-Chlodovsky polynomials and the Szász-Mirakyan operator. Commentationes Mathematicae, 49(1); 33-58.

Çor, C. 2017. Genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörleri. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, 57 s., Kırıkkale.

Çulha, Ç. 2007. Pozitif lineer operatör dizilerinin A-istatistiksel yakınsaklığı. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, 38 s., Ankara.

Donner, K. 2006. Extension of positive operators and Korovkin theorems, Springer, 904: 182 p., New York.

Gal, S. and Gonska, H. 2014. Gruss and Gruss-Voronovskaya-type estimates for some Bernstein-type polynomials of real and complex variables. arXiv preprint arXiv:1401.6824.

Gonska, H. and Păltănea, R. 2010. General Voronovskaya and asymptotic theorems in simultaneous approximation. Mediterranean journal of mathematics, 7(1); 37-49.

Gonska, H. and Raşa, I. 2009. Asymptotic behaviour of differentiated Bernstein polynomials. Matematički Vesnik, 61(235); 53-60.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları: 31, 100 s., Ankara.

Holhos, A. 2008. Quantitative estimates for positive linear operators in weighted spaces. Gen. Math, 16(4); 99-110.

Ispir, N. 2001. On modified Baskakov operators on weighted spaces. Turkish Journal of Mathematics, 25(3); 355-365.

Karakuş, S. 2009. Pozitif lineer operatörlerin eş-istatistiksel yakınsaklığı ve Korovkin tipi teoremler, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 54 s., Samsun.

Kasana, H. S., Prasad, G., Agrawal, P. N. and Sahai, A. 1988. Modified Szâsz operators. In Mathematical Analysis and its Applications. Pergamon, p. 29-41.

Mirakjan, G. M. 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials. In Dokl. Akad. Nauk SSSR., 31: 201-205.

Örkcü, M. 2013. Szász-Mirakyan-Kantorovich operators of functions of two variables in polynomial weighted spaces. In abstract and applied analysis, hindawi. Art. ID 823803

Örkcü, M. and Doğru, O. 2011. Weighted statistical approximation by Kantorovich type q-Szász–Mirakjan operators. Applied Mathematics and Computation, 217(20); 7913-7919.

Rivlin, T. J. 1981. An ıntroduction to the approximation of functions. Dover Publications, 149 p., New York.

Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards., 45: 239-245.

Şimşek, E. 2019. Yaklaşım teorisinde q-pozitif lineer operatör dizilerinin genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Mersin Üniversitesi, 82 s., Mersin.

Tachev, G. T. 2008. Voronovskaja's theorem revisited. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 343(1); 399-404.

Tachev, G. 2012. New estimates in Voronovskaja’s theorem. Numerical Algorithms, 59(1); 119-129.

Voronovskaya, E. 1932. Determination de la forme asymptotiqued'approximation des fonctions par les polynomez de M.Bernstein. C R Academia Science URSS, 79-85.

Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin., 2: 633-639, 789-805.

Yazar, M.İ. 2007. Sonlu elemanlı kümelerde fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, 98 s., Kars.

Yılmaz, O. 2016. Farklı Dağılımlar Üzerindeki İntegral Operatörlerinin Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, 71 s., Kayseri.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Tuğba AYDIN

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-Halen
	Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ölçme ve Değerlendirme Anabilim Dalı	2020-2021
Lisans	Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2013-2017

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2022-Halen	Bursa İnegöl Ertuğrulgazi Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2018-2022	Van Çaldıran Kuskunkıran Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2017-2018	Artvin Borçka Atatürk Ortaokulu	Matematik Öğretmeni