KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

BANU PAZAR VAROL

KOCAELİ 2012

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

BANU PAZAR VAROL

Prof.Dr. Halis AYGÜN **Danışman, Kocaeli Üniv.**	.....
Yrd.Doç.Dr. Ali DEMİR **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	.....
Yrd.Doç.Dr. A. Arzu ARI **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	.....
Prof.Dr. Refik KESKİN **Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.**	.....
Yrd.Doç.Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU **Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**	.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 01.11.2012

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olan "esnek küme teorisi" kavramı Molodtsov (1999) tarafından verilmiştir. Bir esnek küme, evrensel kümenin alt kümelerinin parametrik ailesidir. X evrensel küme, E parametrelerin kümesi olmak üzere X üzerindeki bir esnek küme $F: E \to 2^X$ $(2^X \coloneqq \mathcal{P}(X))$ dönüşümüdür. Esnek küme kavramı hem uygulamalı matematik alanında hem de teorik matematik alanında çalışan araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Bu ilgi, esnek küme kavramının bulanık küme ve daha genel olarak çok değerli küme gibi modern matematiksel kavramlar ile koordineli olmasından ileri gelmektedir. Esnek sistemler, parametrelerin katılımı ile çok genel bir çerçeve sağlamıştır.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN' e yoğun çalışmaları arasında bana göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı teşekkür eder saygılarımı sunarım. Tez çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen meslektaşlarım Sayın Yard. Doç. Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU' na, Sayın Arş. Gör. Vildan ÇETKİN' e teşekkür ederim. Ayrıca hayatım boyunca beni destekleyen aileme ve eşim Serkan VAROL' a sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Kasım – 2012 Banu PAZAR VAROL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
SİMGELER DİZİNİ iv
ÖZET vi
ABSTRACT vii
GİRİŞ 1
1. ÖN BİLGİLER 4
1.1. Latis Teoride Temel Kavramlar 4
1.2. Kategoriler ve Funktorlar 9
1.3. L-Bulanık Kümeler 14
1.4. L-Bulanık Topolojik Uzaylar 17
2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 22
2.1. Esnek Kümeler 22
2.2. Genişletilmiş Esnek Kümeler 25
2.3. Esnek Topolojik Uzaylar 29
2.4. Esnek Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları 33
3. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 40
3.1. Bulanık Esnek Kümeler 40
3.2. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar 47
3.3. Bulanık Esnek Topolojik Uzayların Komşuluk Yapıları 52
3.4. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar ve Çarpım Topolojisi 63
4. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARA FARKLI BİR YAKLAŞIM 70
4.1. Esnek Topolojik Uzaylar 70
4.2. L-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar 74
5. TOPOLOJİK UZAYLARA ESNEK YAPILARLA YAKLAŞIM 80
5.1. Esnek Komşuluk Yapıları 80
5.2. L-Bulanıklaştırılmış Esnek Komşuluk Yapıları 87
5.3. L-Esnek Komşuluk Yapıları 89
5.4. L-Bulanık Esnek Komşuluk Yapıları 91
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 93
KAYNAKLAR 94
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER 97
ÖZGEÇMİŞ 99

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Dağılımlı latis 5
Şekil 1.2. (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis 6

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\subseteq$	: Alt küme
$\cap$ ($\cup$)	: Arakesit (Birleşim)
$\in$	: Eleman
$X, Y, \ldots$	: Klasik kümeler
$f, g, \ldots$	: Bulanık kümeler
α_X	: α değerli sabit bulanık küme
χ_A	: A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
I	: [0,1] kapalı aralığı
L	: Latis (kafes, örgü)
I^X	: Bulanık kümeler ailesi
L^X	: L-Bulanık kümeler ailesi
$\vee$ ($\wedge$)	: Supremum (İnfimum)
$\varphi, \psi, \ldots$	: Fonksiyonlar
0_L (1_L)	: L latisinin en küçük (en büyük) elemanı
$'$	: Sırayı tersine koruyan üst alma operatörü
M_0	: $M - \{0\}$
$M(L)$	: L' nin 0 dan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi
$Pr(L)$	: L' nin 1 den farklı asal elemanlarının kümesi
$\mathcal{P}(X)$	: X' in güç kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak
$\Gamma, \Lambda, \mathrm{J}$	: İndis kümesi
$\mathbb{K}, \mathbb{L}, \ldots$	: Kategoriler
$Ob\mathbb{K}$	: $\mathbb{K}$ kategorisinin objelerinin sınıfı
$Mor(X, Y)$	: X' den Y' ye tanımlı morfizmler kümesi
$\circ$	: Bileşke işlemi
F, G	: Funktorlar
x_α, x_t	: Bulanık nokta
$Pt(L^X)$	: Bulanık noktaların kümesi
$\varphi(f)$	: f bulanık kümesinin φ altındaki görüntüsü
$\varphi^{-1}(f)$	: f bulanık kümesinin φ altındaki ters görüntüsü
τ, τ'	: Bulanık topoloji, bulanık kotopoloji
$(F, A), (G, B), \ldots$	: Esnek kümeler
$F_A, G_B, \ldots$	: Genişletilmiş esnek kümeler
Φ	: Boş esnek küme
$\tilde{E}$	: Evrensel esnek küme
$\tilde{A}$	: Yerel evrensel esnek küme
$S(X, E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$(\varphi, \psi), (\gamma, \delta), \ldots$	: Esnek dönüşümler

$\mathcal{B}$	: Bir esnek topolojinin tabanı
$\mathcal{S}$	: Bir esnek topolojinin alttabanı
$f_A, g_B, \ldots$	: Bulanık esnek kümeler
$\tilde{0}_E$	: Boş bulanık esnek küme
$\tilde{1}_E$	: Evrensel bulanık esnek küme
$\tilde{\alpha}_E$	: α-Evrensel bulanık esnek küme
$F(X,E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi
$(f_A)^o$	: f_A bulanık esnek kümesinin içi
$\overline{f_A}$	: f_A bulanık esnek kümesinin kapanışı
x_A^α, y_B^β	: Bulanık esnek nokta
$P(X,E)$	: X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların ailesi
$\mathcal{U}(x_A^\alpha)$	: x_A^α bulanık esnek noktasının tüm komşuluklarının ailesi
$Q(x_A^\alpha)$	: x_A^α bulanık esnek noktasının tüm Q-komşuluklarının ailesi
(X,τ)	: Bulanık esnek topolojik uzay
$(X,\mathcal{T},E)$	: Parametre kümesine göre açık olan bulanık esnek topolojik uzay
$L(X,E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm L-bulanık esnek kümelerin ailesi
$(\mathcal{U},X,2^X)$	: Parametre kümesi X olan 2^X üzerindeki esnek yapı

BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

ÖZET

Bu tezin amacı bulanık esnek topolojik uzay kavramını tanımlamak ve bu uzaydaki süreklilik, taban, komşuluk yapıları gibi temel kavramları detaylarıyla vermektir. Ayrıca, esnek ve bulanık esnek topolojik uzayları farklı yaklaşımlarla ele alarak bu yapıların özelliklerini incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, latis teorisindeki ve kategori teorisindeki temel tanımlar ve kavramlar, bulanık kümeler ve bulanık topolojik uzaylar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle esnek kümeler ve esnek topolojik uzaylar özetlenmiş, esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarını üzerine çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde, bulanık esnek topolojik uzay kavramı Chang anlamında tanımlanmıştır. Taban ve süreklilik kavramları verilerek bulanık esnek topolojik uzaylarda komşuluk yapıları ve çarpım topolojisi kavramı tanımlanarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, esnek ve bulanık esnek topolojik uzaylar farklı bir yaklaşımla incelenmiş ve bu yaklaşıma göre esnek topoloji parametre kümesine göre açık olan, $2^X \coloneqq \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir esnek küme olarak göz önüne alınmıştır.

Beşinci bölümde, (bulanık) esnek kümelerin özel bir türü olarak (bulanık) esnek komşuluk yapıları tanımlanıp esnek kümelerin özel bir kategorisi olarak topolojik uzaylarla ilgili (crisp topolojik uzaylar, L-topolojik uzaylar, L-bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve L-bulanık topolojik uzaylar) kategoriler yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Esnek Küme, Bulanık Esnek Nokta, Bulanık Esnek Topoloji, Esnek Küme, Komşuluk Yapıları.

FUZZY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

The aim of this thesis is to introduce the concept of fuzzy soft topological spaces and to give the fundamental notions such as continuity, base and neighborhood systems in detail. Moreover, to investigate soft and fuzzy soft topological spaces by different approaches.

This thesis is divided into five chapters. In the first chapter, fundamental definitions and notions in lattice theory and category theory, fuzzy sets and fuzzy topological spaces are summarized.

In the second chapter, first of all, soft sets and soft topological spaces are covered and separation axioms in soft topological spaces are studied.

In the third section, the definition of fuzzy soft topological spaces in Chang sense is given. Fuzzy soft base of a fuzzy soft topology, continuity of a fuzzy soft mapping, product fuzzy soft topology and neighborhood structures in fuzzy soft topological spaces are defined and their basic properties are investigated.

In the fourth chapter, soft and fuzzy soft topological spaces are investigated in different approaches. With respect to this idea the soft topology is considered as a soft set on $2^X \coloneqq \mathcal{P}(X)$ which is open according to the parameter set.

In the fifth chapter, as special kinds of soft sets, namely soft, L-fuzzifying soft, L-soft and L-fuzzy soft neighborhood sets are defined and categories related to topological spaces (crisp topological, L-topological, L-fuzzifying topological, L-fuzzy topological spaces) are interpreted as special categories of soft sets.

Keywords: Fuzzy Soft Set, Fuzzy Soft Point, Fuzzy Soft Topology, Soft Set, Neighborhood Structures.

GİRİŞ

Sosyal bilimler, ekonomi, mühendislik, tıp ve çevre bilimlerindeki karmaşık problemleri çözmek için klasik yöntemler kullanılamaz. Bu tür problemlerin çözümleri belirsizliğe dayalı matematiksel prensipleri kullanmayı gerektirir. Bu nedenle, klasik küme teorisi belirsizliğin bu tür problemlerini ele almak için tam olarak uygun olmayabilir. Belirsizlikleri giderebilmek için geliştirilmiş birçok teori vardır. Bunlardan bazıları; olasılık teorisi, aralık (interval) matematiği, bulanık kümeler teorisi, aralık değerli bulanık kümeler teorisi, sezgisel bulanık kümeler teorisidir. Fakat bu yöntemlerin her birinin seçkin avantajlarının yanı sıra kendine özgün zorlukları vardır.

Olasılık teorisi, sadece tahmini sabit olgular için geçerlidir ve fazla sayıda deney yaparak sonuca ulaşılabilir. Böylece, bu yöntem her alanda kullanılmayı mümkün kılmaz. Aralık matematiği ise farklı belirsizlikler ile ilgili problemler için yeteri kadar uyumlu değildir.

Belirsizlik ile ilgili problemlerde şimdiye kadar en kullanışlı yöntem olan bulanık kümeler teorisi Zadeh (1965) tarafından verilmiştir. Bulanık küme ve bulanık mantık günlük yaşamdaki birçok probleme uygulanmıştır. Bir bulanık küme, klasik bir kümedeki her elemanı [0,1] aralığında bir sayıya götüren bir dönüşümdür ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Bazen, bulanık kümeler için üyelik değerini atamak çok zor olabilir.

Bu zorlukların ortaya çıkmasının nedeni muhtemel olarak parametrelendirme araçları ile mevcut teorilerin uyumsuzluğundan kaynaklanmaktadır. Bu sebeple, belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olan ve ayrıca mevcut yöntemlerdeki zorluklardan bağımsız olan “esnek küme” teorisi Molodtsov (1999) tarafından geliştirilmiştir.

Esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonunu kurma gibi bir problem olmadığı için bu küme teorisi çeşitli alanlara uygulanmıştır. Esnek kümeler ve uygulamaları ile ilgili çalışmalar çeşitli alanlarda hızla ilerlemektedir. Molodtsov (1999) ilk çalışmasında esnek kümeleri, Rieman integrali, oyun teorisi ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Daha sonra Maji ve diğ. (2002) esnek küme teorisi üzerine çalışmış ve karar verme problemlerinde (decision making problem) esnek kümelerin uygulamasını vermişlerdir. Pei ve diğ. (2005) esnek kümeler ile bilgi sistemleri (information systems) arasındaki ilişkileri inceleyerek, esnek kümelerin bilgi sistemlerinin özel bir sınıfı olduğunu göstermişlerdir.

Esnek küme teorisinin cebirsel yapısı son yıllarda birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Örneğin, Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını vererek özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca, esnek kümeler ile bulanık ve kaba kümeleri karşılaştırarak aralarındaki farklılıkları örneklerle açıklamışlardır. Feng ve diğ. (2008) esnek yarı-halka kavramı üzerine çalışmışlardır. Esnek halka kavramı ise 2010 yılında Acar ve diğ. (2010) tarafından verilmiştir. Nazmul ve Samanta (2010) esnek topolojik grup kavramını tanımlayarak normal esnek topolojik grup ve homomorfizm üzerine çalışmışlardır.

Bulanık küme ve esnek kümenin bir kombinasyonu olan bulanık esnek küme kavramı Maji ve diğ. (2001) tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında sezgisel bulanık esnek küme teorisi, belirsiz (vague) esnek küme teorisi, kaba (rough) esnek küme teorisi kavramları sırasıyla Maji ve diğ. (2001a), Xu ve diğ. (2010), Feng ve diğ. (2010) tarafından verilmiştir. Ahmad ve Kharal (2009a, 2009b) bulanık esnek küme teorisindeki bazı sonuçları genişleterek, bulanık esnek kümenin esnek dönüşüm altındaki görüntü ve ters görüntüsünün özelliklerini incelemişlerdir.

Esnek kümeler ve bulanık esnek kümeler ile ilgili çalışmalar son zamanlarda çok aktiftir ve teorik yönden de önemli sonuçlar elde edilmektedir. Bulanık esnek kümelerin ilk cebirsel uygulaması, t-norm kullanılarak bulanık esnek grup kavramı ile Aygünoğlu ve Aygün (2009) tarafından verilmiştir. Esnek topoloji kavramı ise ilk kez Shabir ve Naz (2011) tarafından verilmiştir. Esnek kapanış, esnek iç nokta, bir noktanın esnek komşuluğu gibi konuları ele almışlardır. Aygünoğlu ve Aygün (2011) esnek çarpım topolojisi, esnek kompaktlık kavramlarını tanımlamışlar ve Alexander

alt taban teoremi ile Tychonoff teoremini esnek topolojiye genellemişlerdir. Zorlutuna ve diğ. (2012) esnek topolojik uzaylarda bazı yeni kavramlar vererek iç nokta, süreklilik, kompaktlık gibi konuların bazı özellikleri üzerine çalışmışlardır.

Bulanık esnek kümelerin topolojik yapısı ilk olarak Tanay ve Kandemir (2011) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada, bir bulanık esnek kümenin komşuluğu, bulanık esnek alt uzay topolojisi gibi bulanık esnek topolojik uzayların yapısal özellikleri incelenmiştir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, latis teorisindeki ve kategori teorisindeki bazı temel tanımlar ve kavramlar, bulanık kümeler ve bulanık topolojik uzaylar özetlenmiştir.

1.1. Latis Teoride Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere;

(a) L nin sonlu her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir üst-yarı latis (join-semilattice) denir ve bu $(L, \vee, 0_L)$ ile gösterilir.

(b) L nin sonlu her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir alt-yarı latis (meet-semilattice) denir ve bu $(L, \wedge, 1_L)$ ile gösterilir.

(c) L nin sonlu her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve bu $L = (L, \vee, \wedge 0_L, 1_L)$ ile gösterilir.

Burada, $0_L = \bigvee \emptyset$ ve $1_L = \bigwedge \emptyset$ sırasıyla L nin en küçük ve en büyük elemanını ifade etmektedir. (Ying-Ming ve Mao-Kang 1997)

Özel olarak, $I := [0,1]$ kapalı birim aralık ve $2 := \{0,1\}$ iki noktalı kümesi birer latisdir.

Önerme 1.1.2: $L = (L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır. (Birkhoff 1967)

(i) $\forall\, a \in L$ için $a \vee a = a$ ve $a \wedge a = a$.

(ii) $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq a,\ \ b \leq a \vee b$.

(iii) $\forall\, a,b \in L$ için $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

(iv) $\forall\, a,b,c \in L$ için $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ve $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Önerme 1.1.3: $(L,\vee, 0_L)$ ve $(L,\wedge, 1_L)$ yarı-latisler olsunlar. Bu takdirde,

$(L,\vee,\wedge\, 0_L, 1_L)$ bir latisdir $\iff \forall\, a,b \in L$ için $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$ sağlanır. (Johnstone, 1992)

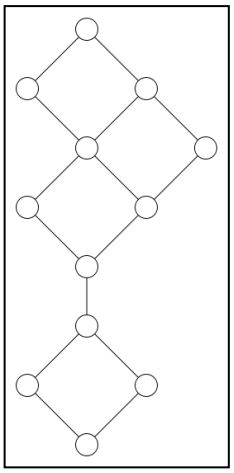
Önerme 1.1.4: L bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki koşullar denktir.

$\forall\, a,b,c \in L$ için,

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dir.

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ dir. (Johnstone, 1992)

Tanım 1.1.5: Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan bir L latisine dağılımlı latis (Şekil 1. 1) adı verilir. (Johnstone, 1992) (Birkhoff, 1967)



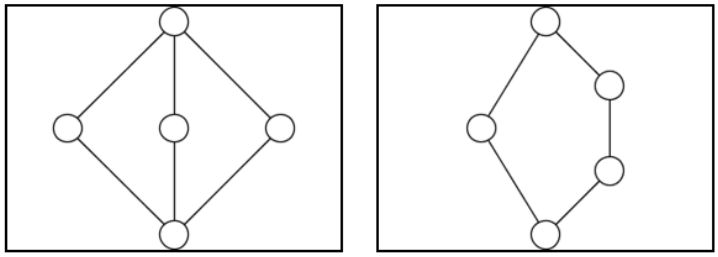
Şekil 1.1. Dağılımlı latis

Önerme 1.1.6: L bir latis olsun. Bu takdirde,

L dağılımlıdır $\iff \forall\, a,b,c \in L$ için $a \wedge c = b \wedge c$ ve $a \vee c = b \vee c$ ise $a = b$ sağlanır. (Birkhoff, 1967)

Dağılımlı olmanın diğer bir karakterizasyonu ise aşağıdaki teorem yardımıyla yapılmaktadır.

Teorem 1.1.7: Bir L latisi dağılımlıdır ancak ve ancak bu latis içerisinde dağılımlı olmayan köşegensel (Şekil 1.2 (a)) veya beşgen (Şekil 1.2 (b)) latisden birini içermez. (Terziler ve Öner, 2002)



(a) (b)

Şekil 1.2. (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis

Tanım 1.1.8: L kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde,

(i) L nin her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir tam üst-yarı latis (complete join-semilattice) denir.

(ii) L nin her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir tam alt-yarı latis (complete meet-semilattice) denir.

(iii) L nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir tam latis (complete lattice) denir. (Ying-Ming ve Mao-Kang 1997)

Tanım 1.1.9: L sonlu infimum ve keyfi supremum işlemleri altında kapalı bir latis olmak üzere, L ye bir çatı (frame) adı verilir : $\Leftrightarrow \forall a \in L, \{b_i\}_{i\in\Gamma} \subset L$ için

$a \wedge (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \wedge b_i)$ sağlanır. (Johnstone 1992)

Örnek 1.1.10: X bir topolojik uzay olmak üzere, $\Omega(X) \coloneqq \{G \subset X : G$ açık$\}$ ailesi bir çatıdır.

Tanım 1.1.11: L bir tam latis olsun. Eğer

(i) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B}(a \wedge b)$

(ii) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b\in B}(a \vee b)$

özellikleri sağlanıyorsa L ye sonsuz dağılımlı latis adı verilir. (Ying-Ming ve Mao-Kang 1997)

Tanım 1.1.12: L bir tam latis olsun. Eğer her $\{\{a_{i,j} \mid j \in J_i\} \mid i \in K\} \subset \mathcal{P}(L)\backslash\{\emptyset\}$, $(K \neq \emptyset)$ için

(CD1) $\bigwedge_{i\in K}(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigwedge_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$

(CD2) $\bigvee_{i\in K}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigvee_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$

özellikleri sağlanıyorsa L ye tam dağılımlı tam latis (completely distributive lattice) adı verilir. (Ying-Ming ve Mao-Kang 1997)

Tanım 1.1.13: L bir latis olsun. Eğer her $x \in L$ için $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$ olacak şekilde bir x' elemanı mevcutsa x' elemanına x' in tümleyeni denir.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $' : L \to L,\ x \to x'$ dönüşümüne sırayı tersine koruyan dönüşüm denir.

(a) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$

(b) $(a')' = a.$

Tanım 1.1.14: Sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı tam latis bir bulanık latis olarak adlandırılır ve bu $L = (L, \leq, \vee, \wedge, ')$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.15: $L = (L, \leq, \vee, \wedge, ')$ bir bulanık latis olsun. Her $x, y \in L$ için

(a) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

(b) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanıyorsa L' ye bir DeMorgan cebri denir.

Dikkat edilmesi gerekir ki, bir DeMorgan cebrinde $x \wedge x' = 0$ veya $x \vee x' = 1$ özelliklerinin sağlanması gerekmez. Eğer bu iki özellik sağlanıyorsa L' ye bir Bool cebri denir.

Tanım 1.1.16: L bir latis ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa α' ya L' nin bir indirgenemez elemanı (irreducible, coprime, molecule) denir.

L nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi,

$M(L) \coloneqq \{\alpha \in L \mid \alpha \neq 0$ ve $\forall a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b \implies \alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b\}$

ile gösterilir. (Gierz, et al. 1980)

Tanım 1.1.17: L bir latis ve $p \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa p' ye L' nin bir asal (prime) elemanı veya atom denir.

L nin birden farklı asal elemanlarının kümesi,

$Pr(L) \coloneqq \{p \in L \mid p \neq 1$ ve $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p \implies a \leq p$ veya $b \leq p\}$

ile gösterilir. (Gierz, et al. 1980)

Tanımlar karşılaştırıldığında, L bir bulanık latis olmak üzere

$\alpha \in M(L) \iff \alpha' \in \mathrm{Pr}\,(L)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 1.1.18: $L = (L, \vee, \wedge, ')$ bir tam DeMorgan cebri olsun. Eğer $D \subseteq L$ ve $\vee D \geq b$ eşitsizliği $d \geq a$ olacak şekilde bir $d \in D$ olmasını gerektiriyorsa a, b' nin üçgensel altındadır denir ve bu $a \lhd b$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.19: L tam dağılımlı bir latis olsun. Bu takdirde her $a \in L$ nin $\beta(a) = \{b \in L : b \lhd a\}$ ile gösterilen bir en büyük minimal ailesi ve $(a) = \{b \in L : b' \lhd a'\}$ ile gösterilen bir en büyük maksimal ailesi vardır. Bu durumda $\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L)$, a' nın bir minimal ailesi ve $\alpha^*(a) = \alpha(a) \cap P(L)$, a' nın bir maksimal ailesidir (Wang 1992).

Teorem 1.1.20: L bir tam dağılımlı tam latis olmak üzere, L' deki her eleman L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olarak yazılabilir. Benzer şekilde, L bir bulanık latis iken L' nin her elemanı bazı asal elemanlarının infimumu olarak yazılabilir. (Gierz, et al. 1980)

1.2. Kategoriler ve Funktorlar

Küme teorisinde, kümeler ve kümeler arasında tanımlanan fonksiyonlar göz önüne alınır. Topolojide bir topolojik uzaydan diğerine sürekli fonksiyonlar, grup teorisinde bir gruptan diğerine grup homomorfizmleri tanımlanır. Bunları ayrı ayrı birer çatı altında toplarsak, bu yapı bazı objelerden ve bir objeden diğerine gitmek için tanımlanan kurallar veya yollardan oluşur. İşte bu kavramlar kategorinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 1.2.1: Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:

(K1) Bir $Ob\mathbb{K}$ sınıfının elemanlarına $\mathbb{K}$ nın objeleri (nesneleri) denir.

(K2) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her (X,Y) ikilisi için bir $M(X,Y)$ kümesi karşılık getirilir ve bu kümenin elemanlarına X den Y ye morfizmler yada $\mathbb{K}$-morfizmler denir.

Her $X,Y,Z,W \in Ob\mathbb{K}$ için $(X,Y) \neq (Z,W)$ ise $M(X,Y) \cap M(Z,W) = \emptyset$ dir. (Yani, tanım ve değer bölgeleri tek türlü belirlidir.)

Bazen $M(X,Y)$ kümesi, $Mor(X,Y)$ yada $Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ile gösterilir.

(K3) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her X,Y,Z üçlüsü için bir $\circ$ dönüşümüdür. Bileşke adı verilen bu dönüşüm

$$\circ : M(X,Y) \times M(Y,Z) \longrightarrow M(X,Z), \quad \circ(f,g) \coloneqq g \circ f$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Bileşke asosyatiftir. Yani, $\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ ve $h \in Mor(Z,W)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.

(ii) $\mathbb{K}$ nın her X objesi için X in idantik (birim) morfizmi adı verilen bir $1_X \in Mor(X,X)$ elemanı, $\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ için $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$ olacak şekilde vardır.

Kategorideki objelerin sınıfının kümelerden oluşması gerekmez (o yalnızca bir sınıftır). Buna rağmen herhangi iki obje için birinden diğerine olan morfizmler bir küme formunda olmak zorundadır.

$X, Y \in Ob\mathbb{K}$ ve $f \in Mor(X,Y)$ için X kümesine f nin tanım bölgesi, Y ye ise değer bölgesi denir. X ve Y nin küme olmadığı durumlarda f nin de bir fonksiyon olması gerekmez. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

Örnek 1.2.2: (1) En önemli kategori örneklerinden birisi kümeler ve fonksiyonların oluşturduğu $\mathbb{SET}$ kategorisidir. Yani,

(a) $Ob(\mathbb{SET}) \coloneqq \{ X \mid X$ bir küme $\}$,

(b) $Mor(X,Y) \coloneqq \{ f \mid f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi,

(d) $X \in Ob(\mathbb{SET})$ için $1_X: X \longrightarrow X, 1_X(x) \coloneqq x$ özdeşlik fonksiyon.

Burada bütün kümeleri ya da bir kümeden diğerine tanımlı bütün fonksiyonları almak gerekli değildir. (K3) koşulu kaldığı müddetçe seçilen bazı fonksiyonlarla da (örneğin, bire-bir örten fonksiyonlar) bir kategori yapılabilir. Buna ileride alt kategori diyeceğiz.

(2) $\mathbb{TOP}$: Topolojik uzaylar ve bunlar arasındaki sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategori, yani

(a) $Ob(\mathbb{TOP}) \coloneqq \{ (X,T) \mid (X,T)$ bir topolojik uzay $\}$,

(b) $Mor\big((X,T),(Y,T^*)\big) \coloneqq \{ f \mid f: (X,T) \longrightarrow (Y,T^*)$ bir sürekli fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke dönüşümü sürekli fonksiyonların bileşkesi.

(3) $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir.

$$Ob\mathbb{K} \coloneqq \{ x \mid x \in X \}, \qquad \forall\, x, y \in Ob\mathbb{K} \qquad \text{için} \qquad Mor(x,y) \coloneqq \begin{cases} \{(x,y)\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

$\leq$ bağıntısının geçişme özelliği $\mathbb{K}$ nın her üç objesi için bir tek bileşke olduğunu, yansıma özelliği de idantik morfizmin varlığını garanti eder. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

(4) $\mathbb{Frm}$: Çatılar kategorisi, yani

(a) $Ob\mathbb{Frm} \coloneqq \{ L \mid L$ bir çatı (frame) $\}$,

(b) $Mor(L,K) \coloneqq \{ f \mid f$ sonlu infimum ve keyfi supremum koruyan dönüşüm$\}$.

(5) $\mathbb{G}$: Gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{R}$: Halkalar ve halka homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{Lat}$: Latisler ve latis homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{Bool}$: Boole cebirleri ve homomorfizmleri kategorisi. (Johnstone 1992)

Tanım 1.2.3: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki özellikleri sağlanıyorsa, $\mathbb{L}$' ye $\mathbb{K}$' nın bir alt kategorisi (subcategory) denir.

(a) $Ob\mathbb{L} \subset Ob\mathbb{K}$,

(b) $\forall\, X,Y \in Ob\mathbb{L}$ için $Mor_{\mathbb{L}}(X,Y) \subset Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$,

(c) $\forall\, X,Y,Z \in Ob\mathbb{L}$ ve $\forall\, f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{L}}(Y,Z)$ için

$g \circ f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Z) \implies g \circ f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Z)$,

(d) $\forall\, X \in Ob\mathbb{L}$ için $1_X \in Mor_{\mathbb{L}}(X,X) \implies 1_X \in Mor_{\mathbb{K}}(X,X)$.

Eğer yukarıda verilen (b) koşulu için eşitlik sağlanıyorsa $\mathbb{L}$ ye $\mathbb{K}$ nın bütünüyle alt kategorisi (full subcategory) denir. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

Örnek 1.2.4: (1) Objeleri kümeler, morfizmleri bire-bir örten fonksiyonlar olan kategori $\mathbb{SET}$ kategorisinin bir alt kategorisidir. Objeleri bütün sonlu kümeler ve morfizmleri fonksiyonlar olan kategori de $\mathbb{SET}$ kategorisinin bütünüyle alt kategorisidir.

(2) Objeleri kompakt (veya bağlantılı, Hausdorff vs.) topolojik uzaylar ve morfizmleri homeomorfizmler olan kategori $\mathbb{TOP}$ kategorisinin bir alt kategorisidir.

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $\mathbb{K}$ bir kategori ve $f: X \longrightarrow Y$, $\mathbb{K}$ da bir morfizm olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.2.5: $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise f' ye $\mathbb{K}$' da bir özdeşlik veya izomorfizm denir. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

Kolaylıkla görülebilir ki, $\mathbb{SET}$ kategorisinde izomorfizm bir bijeksiyon, $\mathbb{TOP}$ kategorisinde izomorfizm bir homeomorfizm ve $\mathbb{G}$ de ise bir grup izomorfizmine karşılık gelir.

Tanım 1.2.6: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan F' ye $\mathbb{K}$' dan $\mathbb{L}$' ye bir kovaryant (kontravaryant) funktor denir ve bu $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ biçiminde yazılır. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

(a) $\forall X \in Ob\mathbb{K}$ için $F(X) \in Ob\mathbb{L}$,

(b) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $F(f) \in Mor_{\mathbb{L}}\big(F(X), F(Y)\big)$

($\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $F(f) \in Mor_{\mathbb{L}}\big(F(Y), F(X)\big)$),

(c) $\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

($\forall f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$),

(d) $\forall X \in Ob\mathbb{K}$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Örnek 1.2.7: (1) Z sabit bir küme olmak üzere, $F: \mathbb{SET} \longrightarrow \mathbb{SET}$ dönüşümü $F(X) \coloneqq X \times Z$ ve $f : X \longrightarrow Y$ için $F(f): X \times Z \longrightarrow Y \times Z$, $F(f) := f \times 1_Z$ olarak tanımlanırsa F bir kovaryant funktordur.

(2) $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{TOP}$ ve $\mathbb{L} \coloneqq$ Halkalar kategorisi olmak üzere, $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ dönüşümü,

$F(X) \coloneqq C(X) = \{ \lambda : X \longrightarrow IR \mid \lambda$ sürekli fonksiyon $\}$ ve $F(f) \coloneqq f^*$

($\lambda \in C(Y)$ için $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$) olarak tanımlanırsa, F bir kontravaryant funktordur.

(3) $\Omega : \mathbb{TOP} \longrightarrow \mathbb{Loc},\ \Omega(X,\tau) \coloneqq \tau$ ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $f^{-1} : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ fonksiyonu olmak üzere $\Omega(f) \coloneqq f^{-1}$ olarak tanımlanan Ω bir kontravaryant funktordur.

Funktorlar bir kategori hakkındaki verileri diğer bir kategoriye taşır. Bazı kategorilerin objeleri diğer bir kategorinin objeleri üzerine ilave bazı yapılar koyularak elde edilirler. Örneğin, bir topolojik uzay bir küme (yani, $\mathbb{SET}$ kategorisinin bir objesi) üzerine topolojik yapı ilave edilmesi ile elde edilir. Bir halka bir Abel grubundan, bir Abel grubu da bir kümeden elde edilebilir. Bu durumların her birinde ilk kategoriden ikinci (yani, ilave özelliğin unutulduğu) kategoriye bir funktor tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan funktorlara unutkan (forgetful) funktor adı verilir.

Örneğin, $F : \mathbb{TOP} \longrightarrow \mathbb{SET}, F(X,\tau) := X$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir unutkan funktordur. Çünkü, X objesini ikinci tarafa götürürken üzerindeki τ topolojisini ve f morfizmini götürürken de sürekliliğini dikkate almıyor. Benzer şekilde, $\mathbb{G}$ gruplar kategorisinden ve $\mathbb{R}$ halkalar kategorisinden $\mathbb{SET}$ kümeler kategorisine unutkan funktorlar tanımlanabilir.

Unutkan funktorların tersine olarak, bir kategoriden diğer bir kategoriye ilk kategorinin objelerine daha fazla yapı ekleyecek şekilde funktorlarda tanımlanabilir. Örneğin, $F : \mathbb{SET} \longrightarrow \mathbb{TOP},\ F(X) := (X,\tau_D)$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir funktordur. Benzer şekilde, $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ diskret topoloji yerine $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ trivial topoloji de alınabilir. (Adamek, Herrlich ve Strecker 2004)

Tanım 1.2.8: Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\mathbb{K}$ kategorisine, $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{SET}$ kategorisine tanımlanan unutkan funktora göre bir topolojik kategori denir.

(TC1) Başlangıç yapının varlığı: Bir X kümesi, J sınıfı, $\{(X_j,\varphi_j)\}_{j\in J}$ $\mathbb{K}$-objelerin ailesi ve $\{f_j : X \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ dönüşümler ailesi için, X kümesi üzerinde $\{f_j : X \longrightarrow (X_j,\varphi_j)\}_{j\in J}$ kaynağına göre başlangıç olan bir tek φ $\mathbb{K}$-yapısı vardır. Bunun anlamı, bir (Y,ψ) $\mathbb{K}$-objesi için bir $g : (Y,\psi) \longrightarrow (X,\varphi)$ dönüşümü bir $\mathbb{K}$-morfizmdir ancak ve ancak her $j \in J$ için $f_j \circ g : (Y,\psi) \longrightarrow (X_j,\varphi_j)$ dönüşümleri bir $\mathbb{K}$-morfizmdir.

(TC2) Yapı (fibre) küçüklüğü: Herhangi bir X kümesi için $\mathbb{K}(X)$ ile gösterilen X in $\mathbb{K}$-fibresi, yani X üzerindeki tüm $\mathbb{K}$-yapıların sınıfı bir kümedir.

1.3. L-Bulanık Kümeler

Tanım 1.3.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir tam latis olmak üzere her $f : X \longrightarrow L$ fonksiyonuna X' in bir L-bulanık alt kümesi adı verilir. (Goguen 1973)

X' in tüm L-bulanık alt kümelerinin ailesi L^X ile gösterilir. Şu halde,

$L^X \coloneqq \{ f \mid f : X \longrightarrow L$ bir fonksiyon$\}$.

$x \in X$ ve $f \in L^X$ olmak üzere $f(x)$ değerine x noktasının f L-bulanık alt kümesine ait olma (üyelik) derecesi denir.

Özel olarak, $L = I$ olması halinde her $f : X \longrightarrow I$ fonksiyonu X' in bir bulanık alt kümesi olarak adlandırılır. X' in tüm bulanık alt kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir.

$\{ x \in X \mid f(x) > 0_L \} \subset X$ klasik alt kümesine f L-bulanık alt kümesinin desteği denir ve supp$f$ ile gösterilir.

Her $\alpha \in L$ için $\{ x \in X \mid f(x) \geq \alpha \} \subset X$ klasik alt kümesine f L-bulanık alt kümesinin α-seviyesi denir ve $(f)_\alpha$ notasyonu ile gösterilir.

$\alpha \in L$ olmak üzere her $x \in X$ için $f(x) \coloneqq \alpha$ olarak tanımlanan bulanık kümesi X' in sabit L-bulanık alt kümesi olarak adlandırılır ve α_X ile gösterilir.

Buna göre, $\forall\, x \in X$ için $0_X(x) \coloneqq 0_L$ ve $1_X(x) \coloneqq 1_L$ biçiminde tanımlanır.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi, A' nın karakteristik fonksiyonu olan $\chi_A : X \longrightarrow 2 \coloneqq \{0,1\}$

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile X in bir bulanık alt kümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla, her klasik küme bir bulanık kümedir. (Zadeh 1965)

Not 1.3.2: Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece X boştan farklı klasik bir kümeyi ve L ise bir bulanık latisi ifade edecektir.

Tanım 1.3.3: $f, g \in L^X$ olmak üzere,

(a) $f = g :\Leftrightarrow \forall\, x \in X$ için $f(x) = g(x)$ dir.

(b) $f \leq g :\Leftrightarrow \forall\, x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ dir.

(c) $f' : X \longrightarrow L, \forall\, x \in X$ için $f'(x) \coloneqq (\, f(x))'$ dir. ($L = I$ ise, $f'(x) \coloneqq 1 - f(x)$).

(d) f, g L-bulanık alt kümelerinin birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(f \vee g)(x) \coloneqq maks\{f(x), g(x)\}$ ve $(f \wedge g)(x) \coloneqq min\{f(x), g(x)\}$, $(\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

(e) Daha genel olarak, $\{f_i\}_{i\in\Gamma} \subset L^X$ ailesi için birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i)(x) \coloneqq \bigvee_{i\in\Gamma} f_i\,(x)$ ve $(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i)(x) \coloneqq \bigwedge_{i\in\Gamma} f_i\,(x)$, $(\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki işlemler ile L^X de bir bulanık latisdir. Ayrıca,

(i) $(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i)' = \bigwedge_{i\in\Gamma} f_i'$,

(ii) $(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i)' = \bigvee_{i\in\Gamma} f_i'$

De-Morgan kuralları da sağlanır. (Zadeh, 1965)

Tanım 1.3.4: $M(L)$, L nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde,

$M(L^X) = \{\, x_\alpha \mid x \in X, \alpha \in M(L)\,\}$

kümesinin elemanları x_α lar X' in L-bulanık noktaları olarak adlandırılır. Burada,

$x_\alpha : X \longrightarrow L$, $\forall\, y \in X$ için $x_\alpha(y) \coloneqq \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0_L, & y \neq x \end{cases}$

şeklinde tanımlanır.

Burada x'e x_α L-bulanık noktasının desteği, α değerine de x_α L-bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir ve sırasıyla $\text{supp}x_\alpha = x$ ve $h(x_\alpha) = \alpha$ ile gösterilir.

$x_\alpha \in M(L^X)$ olmak üzere $x_\alpha \in f :\Leftrightarrow \alpha \leq f(x)$ dir. (Dongsheng, 1987)

Uyarı 1.3.5: X üzerindeki her L-bulanık kümesi $M(L^X)$ deki bazı L-bulanık noktaların birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

Diğer bir deyişle, $f = \bigvee_{x_\alpha \in f} x_\alpha$ sağlanır.

Tanım 1.3.6: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $f \in L^X$ ve $g \in L^Y$ L-bulanık alt kümelerinin φ fonksiyonu altındaki görüntü ve ters görüntüsü sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi(f)(y) := \begin{cases} \bigvee\{ f(x): x \in X,\ y = \varphi(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}, \quad (\forall\, y \in Y)$$

ve

$$\varphi^{-1}(g)(x) := (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \quad (\forall\, x \in X).$$

Açık olarak, $\varphi^{-1}(g)$ ve $\varphi(f)$ sırasıyla X ve Y klasik kümelerinin birer L-bulanık alt kümeleridir. (Ying-Ming ve Mao-Kang 1997)

Önerme 1.3.7: $\varphi: X \longrightarrow Y$, $\psi: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon, $f, f_1, f_2 \in L^X$, $g, g_1, g_2 \in L^Y$ ve $h \in L^Z$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varphi(f))$.

(2) $(\psi \circ \varphi)^{-1}(h) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(h))$.

(3) $f \leq \varphi^{-1}(\varphi(f))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ bire-bir ise $f = \varphi^{-1}(\varphi(f))$ sağlanır.

(4) $g \geq \varphi(\varphi^{-1}(g))$. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ örten ise $g = \varphi(\varphi^{-1}(g))$ sağlanır.

(5) $f_1 \leq f_2 \implies \varphi(f_1) \leq \varphi(f_2)$.

(6) $g_1 \leq g_2 \implies \varphi^{-1}(g_1) \leq \varphi^{-1}(g_2)$.

(7) $\varphi(f') \geq (\varphi(f))'$.

(8) $\varphi^{-1}(g') = (\varphi^{-1}(g))'$.

(9) $\{f_i : i \in \Gamma\} \subset L^X$ ailesi için

$\varphi(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi(f_i)$

$\varphi(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i) \leq \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi(f_i)$.

(10) $\{ g_i \mid i \in \Gamma \} \subset L^Y$ ailesi için

$\varphi^{-1}(\bigvee_{i\in\Gamma} g_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi^{-1}(g_i)$

$\varphi^{-1}(\bigwedge_{i\in\Gamma} g_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi^{-1}(g_i)$. (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997)

Önerme 1.3.8: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x_\alpha \in M(L^X)$ ise $\varphi(x_\alpha) \in M(L^Y)$ ve $\varphi(x_\alpha) = (\varphi(x))_\alpha$ dir.

1.4. L-Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 1.4.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ' ya X üzerinde bir (Chang-Goguen) L-topoloji veya bulanık kümelerin bir topolojisi adı verilir.

(CT1) $0_X, 1_X \in \tau$,

(CT2) $f_1, f_2 \in \tau \implies f_1 \wedge f_2 \in \tau$,

(CT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} f_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine bir (Chang-Goguen) L-topolojik uzay adı verilir. τ' nun elemanlarına da açık L-bulanık alt kümeler adı verilir.

Eğer, $f' \in \tau$ ise f ye (X, τ)' da kapalı L-bulanık alt küme denir. (Chang, 1968)

Örnek 1.4.2: T, X kümesi üzerinde bir klasik topoloji ise $\tau = \chi_T \coloneqq \{ \chi_G : G \in T \}$ ailesi X üzerinde bir L-topolojidir. O halde, klasik anlamdaki her topoloji bir (Chang-Goguen) L-topolojidir.

Tanım 1.4.3: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-topolojik uzay ve $\varphi: (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(a) φ L-süreklidir : $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in \tau_2$ için $\varphi^{-1}(g) \in \tau_1$ dir.

(b) φ L-açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in \tau_1$ için $\varphi(f) \in \tau_2$ dir. (Chang, 1968)

Chang-Goguen anlamında L-topolojik uzaylar ile bunlar arasında tanımlı L-sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategori $\mathbb{CL} - \mathbb{TOP}$ ile gösterilir.

Uyarı 1.4.4: Açıkça görülebilir ki, klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde (Chang-Goguen) L-topolojik uzaylar arasında sabit fonksiyonların L-sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği L-topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen (Lowen 1976), L-topolojik uzay tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir. Ancak bu seferde L-topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeği kaybedilmiştir.

Tanım 1.4.5: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L^X$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ' ya X üzerinde bir (Lowen) L-topoloji denir.

(LT1) $\forall\, \alpha \in L$ için $\alpha_X \in \tau$,

(LT2) $f_1, f_2 \in \tau \implies f_1 \wedge f_2 \in \tau$,

(LT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in \tau \implies \bigvee_{i \in \Gamma} f_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de bir (Lowen) L-topolojik uzay adı verilir. (Lowen, 1976)

Lowen anlamındaki L-topolojik uzaylar ve bunlar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlar kategorisi $\mathbb{L} - \mathbb{TOP}$ ile gösterilir. Ayrıca, Lowen anlamındaki her L-

topolojik uzay Chang-Goguen anlamında bir L-topolojik uzaydır. Buna göre, $\mathbb{L}-\mathbb{TOP} \subset \mathbb{CL}-\mathbb{TOP}$ ifadesi sağlanır.

Tanım 1.4.6: X boştan farklı klasik bir küme olsun. Eğer bir $\tau: 2^X \to L$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bu τ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanıklaştırılmış topoloji denir.

(F1) $\tau(\emptyset) = \tau(X) = 1$

(F2) $\forall\, U, V \subset X$ için $\tau(U \cap V) \geq \tau(U) \wedge \tau(V)$

(F3) $\forall\, (U_i)_{i\in J} \subset X$ için $\tau\left(\bigcup_{i\epsilon J} U_i\right) \geq \bigwedge_{i\epsilon J} \tau\,(U_i)$.

(X,τ) ikilisine de L-bulanıklaştırılmış topolojik uzay denir. $\tau(U)$ değeri U' nun açıklık derecesini gösterir. (Höhle 1980, Ying 1991)

X üzerindeki bir τ L-topolojisi aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir $\tau: L^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak da göz önüne alınabilir.

(1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$, ($\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\alpha_X) = 1$),

(2) Eğer $\tau(f_1) = \tau(f_2) = 1$ ise $\tau(f_1 \wedge f_2) = 1$,

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\tau(f_i) = 1$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) = 1$.

Tanım 1.4.5' de ve yukarıda verilen her iki L-topolojinin tanımında da kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasiktir. Bu eksikliği gidermek ve bulanık kümelerin açıklığını derecelendirmek için Shostak (1985) aşağıdaki bulanık topoloji tanımı vermiştir.

Tanım 1.4.7: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau: L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir (Shostak) L-bulanık topoloji veya açıklığın bir derecelendirmesi veya smooth (pürüzsüz) topoloji denir.

(BT1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$,

(BT2) $\forall\, f_1, f_2 \in L^X$ için $\tau(f_1 \wedge f_2) \geq \tau(f_1) \wedge \tau(f_2)$,

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in L^X$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(f_i)$.

(X, τ) ikilisine de bir L-bulanık topolojik uzay veya smooth topolojik uzay denir. $f \in L^X$ olmak üzere $\tau(f)$ değerine de f L-bulanık alt kümesinin açıklık derecesi denir. (Shostak, 1985)

Uyarı 1.4.8: (1) Tanımlar karşılaştırıldığında; bir L-topoloji L-bulanık kümelerin klasik bir ailesi $(\tau \subseteq L^X)$ iken bir L-bulanık topoloji ise L-bulanık kümeler ailesinin bir L-bulanık alt kümesi $(\tau \in L^{L^X})$ dir.

(2) Aslında L ve M farklı bulanık latisler olmak üzere, bulanık topoloji $\tau : L^X \longrightarrow M$ biçiminde de tanımlanabilir. Ayrıca**,** Tanım 1.4.7 deki (BT1) aksiyomu yerine

(BT1)′ $\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\alpha_X) = 1$ aksiyomu alınırsa, (X, τ) ikilisine bir tabakalaşmış (stratified, laminated) L-bulanık topolojik uzay denir.

(3) Her klasik topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçektende T, X üzerinde klasik bir topoloji olmak üzere $T: 2^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa $T = \chi_T$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

(4) Her L-topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçekten, X üzerindeki bir τ L-topolojisi için $\tau: L^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa τ, X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

Önerme 1.4.9: $\{\tau_k : k \in \Lambda\}$ ailesi X üzerinde L-bulanık topolojilerin bir ailesi ise $\tau := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k$, $\tau(f) := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k(f)$ ile tanımlanan τ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topolojidir. (Ramadan, 1992)

Tanım 1.4.10: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau': L^X \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık kotopoloji (eş topoloji) veya kapalılığın bir derecelendirmesi denir.

(1) $\tau'(0_X) = \tau'(1_X) = 1$,

(2) $\forall\, f_1, f_2 \in L^X$ için $\tau'(f_1 \vee f_2) \geq \tau'(f_1) \wedge \tau'(f_2)$,

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in L^X$ ise $\tau'(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'(f_i)$.

$(X.\tau')$ ikilisine de bir L-bulanık kotopolojik uzay adı verilir. (Shostak, 1985)

Tanım 1.4.11: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

φ fonksiyonuna L-bulanık sürekli (veya kısaca, LB-sürekli) denir : $\Leftrightarrow$

$\forall\, g \in L^Y$ için $\tau_1(\varphi^{-1}(g)) \geq \tau_2(g)$ sağlanır. (Shostak, 1985)

Önerme 1.4.12: (X,τ_1), (Y,τ_2) ve (Z,τ_3) L-bulanık topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi: (X,\tau_1) \longrightarrow (Y,\tau_2)$ ve $\psi: (Y,\tau_2) \longrightarrow (Z,\tau_3)$ fonksiyonları LB-sürekli ise $\psi \circ \varphi: (X,\tau_1) \longrightarrow (Z,\tau_3)$ bileşkesi LB-süreklidir. (Shostak, 1985)

Objeleri L-bulanık topolojik uzaylar ve morfizmleri LB-sürekli fonksiyonlar olan kategori $\mathbb{L} - \mathbb{BTOP}$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.13: (X,τ_1') ve (Y,τ_2') iki L-bulanık kotopolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

φ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in L^Y$ için $\tau_1'(\varphi^{-1}(g)) \geq \tau_2'(g)$ sağlanır. (Shostak, 1985)

Tanım 1.4.14: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) φ LB-açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in L^X$ için $\tau_1(f) \leq \tau_2(\varphi(f))$ dir.

(b) φ LB-kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in L^X$ için $\tau_{\tau_1}^*(f) \leq \tau_{\tau_2}^*(\varphi(f))$ dir.

(c) φ LB-homeomorfizmdir : $\Leftrightarrow$ φ bijektif, LB-sürekli ve φ^{-1} LB-süreklidir.

(Ramadan, 1992)

2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle esnek küme kavramı tanıtılmış ve bu kümeleri temel alan esnek topolojik uzaylar tanımlanmıştır.

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1: (Molodtsov, 1999) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $\mathcal{P}(X)$, X' in güç kümesi olsun.

(F, E) çiftine X üzerinde bir esnek küme denir : $\Leftrightarrow F: E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Diğer bir deyişle, esnek küme X' in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen ailesidir.

Örnek 2.1.2: (Aktaş ve Çağman, 2007) (F, E) esnek kümesi, bir A kişisinin satın almayı düşündüğü evlerin özelliklerini tanımlasın.

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin kümesi ve

$E = \{\text{pahalı}, \text{güzel}, \text{ahşap}, \text{ucuz}, \text{bahçeli}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{e_i : i = \overline{1,5}\}$ karar parametrelerinin kümesi olsun.

F dönüşümünü düşünelim: Örneğin, $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır ve fonksiyon değeri $\{h \in X : h$ pahalı ev$\}$ kümesidir.

$F(e_1) = \{h_2, h_4\},\ F(e_2) = \{h_1, h_3\},\ F(e_3) = \emptyset,\ F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve

$F(e_5) = \{h_1\}$ olsun.

$(F, E) = \{(\text{pahalı ev}, \{h_2, h_4\}), (\text{güzel ev}, \{h_1, h_3\}), (\text{ahşap ev}, \emptyset),$
$(\text{ucuz ev}, \{h_1, h_3, h_5\}), (\text{bahçeli ev}, \{h_1\})$ dir.

Örnek 2.1.3: (Pei ve Miano, 2005) A, X üzerinde bir bulanık küme ve $E = [0,1]$ olsun. $F: E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$F(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$.

$F(\alpha)$, A bulanık kümesinin α-seviye kümesidir.

Buradan, bir bulanık kümenin bir esnek küme olarak gösterilebildiğini söyleriz.

Tanım 2.1.4: (Maji ve diğ., 2003) (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun.

(F, A)' ya (G, B)' nin alt kümesi denir : $\Leftrightarrow$ (1) $A \subset B$

(2) $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$ dir.

Alt küme $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: (Maji ve diğ., 2003) X üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine eşittir denir : $\Leftrightarrow (F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ve $(G, B) \sqsubseteq (F, A)$ sağlanır.

Tanım 2.1.6: (Maji ve diğ., 2003) $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. E kümesinin değili $\neg E$ ile gösterilir ve $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$' dir. Burada $\neg e_i$, her i için e_i' nin değiline eşittir.

Tanım 2.1.7: (Maji ve diğ., 2003) X üzerindeki (F, A) esnek kümesinin tümleyeni, $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $F^c: \neg A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ bir fonksiyon ve $\forall a \in \neg A$ için $F^c(a) = (F(\neg a))^c = X - F(\neg a)$' dır. F^c' ye F' nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $((F, A)^c)^c = (F, A)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.8: (Maji ve diğ., 2003) X üzerindeki (F, A) esnek kümesine boş esnek küme denir : $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ dir.

Boş esnek küme Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: (Maji ve diğ., 2003) X üzerindeki (F, A) esnek kümesine evrensel esnek küme denir : $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ için $F(a) = X$ dir.

Evrensel esnek küme $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10: (Maji ve diğ., 2003) X üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesidir : $\Leftrightarrow C = A \cup B$ ve $\forall c \in C$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c), & c \in A \backslash B \\ G(c), & c \in B \backslash A \\ F(c) \cup G(c) & c \in A \cap B \end{cases} \text{ dir.}$$

Birleşim $(F,A) \sqcup (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11: (Maji ve diğ., 2003) (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu esnek kümelerin kesişimi (h,C) esnek kümesidir
: $\Leftrightarrow C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ için $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir.
Kesişim $(F,A) \sqcap (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.1.12: (Maji ve diğ., 2003) $(F,A), (G,B)$ ve (H,C) X üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F,A) \sqcup (G,B) = (G,B) \sqcup (F,A)$
(2) $(F,A) \sqcup \big((G,B) \sqcup (H,C)\big) = \big((F,A) \sqcup (G,B)\big) \sqcup (H,C)$
(3) $(F,A) \sqsubseteq (F,A) \sqcup (G,B)$ ve $(G,B) \sqsubseteq (F,A) \sqcup (G,B)$
(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \sqcup (G,B) = (G,B)$.

Önerme 2.1.13: (Maji ve diğ., 2003) $(F,A), (G,B)$ ve (H,C) X üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F,A) \sqcap (F,A) = (F,A)$
(2) $(F,A) \sqcap (G,B) = (G,B) \sqcap (F,A)$
(3) $(F,A) \sqcap (G,B) \sqsubseteq (F,A)$ ve $(F,A) \sqcap (G,B) \sqsubseteq (G,B)$
(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \sqcap (G,B) = (F,A)$
(5) $\big((F,A) \sqcap (G,B)\big) \sqcap (H,C) = (F,A) \sqcap \big((G,B) \sqcap (H,C)\big)$.

Teorem 2.1.14: (Maji ve diğ., 2003) (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $[(F,A) \sqcup (G,B)]^c \sqsubseteq (F,A)^c \sqcup (G,B)^c$
(2) $(F,A)^c \sqcap (G,B)^c \sqsubseteq [(F,A) \sqcap (G,B)]^c$.

Teorem 2.1.15: (Maji ve diğ., 2003) (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F,A)^c \sqcap (G,B)^c \sqsubseteq [(F,A) \sqcup (G,B)]^c$

(2) $[(F,A) \sqcap (G,B)]^c \sqsubseteq (F,A)^c \sqcup (G,B)^c$.

Teorem 2.1.16: (Maji ve diğ., 2003) (F,A) ve (G,A) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F,A)^c \sqcap (G,A)^c = [(F,A) \sqcup (G,A)]^c$

(2) $[(F,A) \sqcap (G,A)]^c = (F,A)^c \sqcup (G,A)^c$.

2.2. Genişletilmiş Esnek Kümeler

X evrensel küme, E X için uygun olan tüm parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F,A), X üzerinde bir esnek küme $(F: A \longrightarrow \mathcal{P}(X))$ olmak üzere aşağıdaki düşünceyle (F,A) esnek kümesini $(\bar{F},E)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir:

$$\bar{F}: E \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \bar{F}(e) = \begin{cases} F(e),\ e \in A \\ \emptyset,\ e \notin A \end{cases}$$

Eğer F dönüşümü biliniyorsa her bir (F,E) esnek kümesi $F = \{F(e) : e \in E\}$ parametrelerle ifade edilmiş aile olarak karakterize edilebilir.

Esnek kümeleri (F,E) çifti yerine $F_A: E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümü olarak ele alınacaktır. Burada A indisi F_A dönüşümünün (esnek kümesinin) değerinin boştan farklı olduğu parametreler kümesini gösterir. Bu tarz kümelere "genişletilmiş-esnek küme" (g-e küme) denir.

X üzerindeki tüm g-e kümelerin ailesini $S(X,E)$ ile gösterelim. (Aygünoğlu, 2011)

Tanım 2.2.1: (Aygünoğlu, 2011) $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A' ye G_B' nin alt kümesi denir : $\Leftrightarrow \forall\, e \,\epsilon\, E$ için $F_A(e) \subseteq G_B(e)$ dir.

Alt küme $F_A \sqsubseteq G_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: (Aygünoğlu, 2011) $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B eşittir denir. : $\Leftrightarrow$ $F_A \sqsubseteq G_B$ ve $G_B \sqsubseteq F_A$ dir.

Tanım 2.2.3: (Aygünoğlu, 2011) $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B g-e kümelerin birleşimi H_C g-e kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cup G_B(e)$ dir.

Birleşim $H_C = F_A \sqcup G_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4: (Aygünoğlu, 2011) $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B g-e kümelerin kesişimi H_C g-e kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cap G_B(e)$ dir.

Kesişim $H_C = F_A \sqcap G_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.5: (Aygünoğlu, 2011) $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. $F_A \sqsubseteq G_B \Rightarrow F_A = F_A \sqcap G_B$ veya $G_B = F_A \sqcup G_B$' dır.

Tanım 2.2.6: (Aygünoğlu, 2011) Bir F_A g-e kümesinin tümleyeni F_A^c ile gösterilir. $F_A^c : E \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $F_A^c(e) = X - F_A(e)$ şeklinde tanımlanır.

F_A^c' ye F_A ' nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $(F_A^c)^c = F_A$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.7: (Aygünoğlu, 2011) X üzerindeki bir F_A g-e kümesine boş g-e küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F_A(e) = \emptyset$ dir.

Boş g-e küme Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8: (Aygünoğlu, 2011) X üzerindeki bir F_E g-e kümesine evrensel g-e küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F_E(e) = X$ dir.

Evrensel g-e küme $\tilde{E}$ ile gösterilir.

$(\tilde{E})^c = \Phi$ ve $(\Phi)^c = \tilde{E}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.9: (Aygünoğlu, 2011) X üzerindeki bir F_A g-e kümesine yerel evrensel g-e küme denir.

: $\Leftrightarrow \forall e \in A \subset E$ için $F_A(e) = X$ ve $\forall\, e \in E \backslash A$ için $F_A(e) = \emptyset$ dir.

Yerel evrensel g-e küme $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.10: (Aygünoğlu, 2011) J indeks kümesi ve $F_A, G_B, H_C, (F_A)_i, (G_B)_i \in S(X,E)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $F_A \sqcap F_A = F_A$, $F_A \sqcup F_A = F_A$

(2) $F_A \sqcap G_B = G_B \sqcap F_A$, $F_A \sqcup G_B = G_B \sqcup F_A$

(3) $F_A \sqcup (G_B \sqcup H_C) = (F_A \sqcup G_B) \sqcup H_C$, $F_A \sqcap (G_B \sqcap H_C) = (F_A \sqcap G_B) \sqcap H_C$

(4) $F_A \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in J}(G_B)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}(F_A \sqcap (G_B)_i)$,

$F_A \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in J}(G_B)_i\right) = \bigsqcap_{i\in J}(F_A \sqcup (G_B)_i)$

(5) $\Phi \sqsubseteq F_A \sqsubseteq \tilde{A} \sqsubseteq \tilde{E}$

(6) $(F_A^c)^c = F_A$

(7) $\left(\bigsqcap_{i\in J}(F_A)_i\right)^c = \bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i^c$, $(\bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i)^c = \bigsqcap_{i\in J}(F_A)_i^c$

(8) $F_A \sqsubseteq G_B \Rightarrow G_B^c \sqsubseteq F_A^c$.

Tanım 2.2.11: (Shabir ve Naz, 2011) $F_A \in S(X,E)$ ve $x \in X$ olsun. $x \,\widetilde{\in}\, F_A$ ifadesine x , F_A g-e kümesine aittir denir : $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ için $x \in F_A(e)$' dir.

Herhangi bir $e \in E$ için $x \notin F_A(e)$ ise $x \,\widetilde{\notin}\, F_A$' dır.

Tanım 2.2.12: (Shabir ve Naz, 2011) $x \in X$ olsun. Her $e \in E$ için $x_E(e) = \{x\}$ olarak tanımlanan x_E , X üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 2.2.13: (Aygünoğlu, 2011) $\varphi: X \to Y$, $\psi: E \to K$ iki fonksiyon ve E, K sırasıyla X ve Y için parametre evrensel kümeleri olsun. (φ, ψ) çiftine X' den Y' ye esnek fonksiyon denir.

(1) $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A' nin (φ, ψ) esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü (φ, ψ) (F_A), Y üzerinde bir g-e kümedir:

$\varphi(F_A)(k) = \bigcup_{\psi(e)=k} \varphi(F_A(e))$, $\forall\, k \in K$.

(2) $G_B \in S(Y,K)$ olsun. G_B' nin (φ, ψ) esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $(\varphi, \psi)^{-1}(G_B)$, X üzerinde bir g-e kümedir:

$(\varphi, \psi)^{-1}(G_B)(e) = \varphi^{-1}\left(G_B\left(\psi(e)\right)\right)$, $\forall\, e \in E$.

Eğer φ ve ψ bire-bir (örten) ise (φ, ψ) esnek dönüşümü de bire-birdir (örtendir).

Eğer φ sabit bir dönüşüm ise (φ, ψ) esnek dönüşümüne sabit esnek dönüşüm denir.

(φ,ψ) X' den Y' ye ve (γ,δ) Y' den Z' ye birer esnek fonksiyon olsun. Bu durumda (φ,ψ) ve (γ,δ) nın bileşke fonksiyonu $(\gamma,\delta)\circ(\varphi,\psi) \coloneqq (\gamma\circ\varphi,\delta\circ\psi)$ şeklinde tanımlanır.
$(id_X,id_E)\colon F_A \to F_A$ birim morfizmasıdır. Esnek kümeler ve aralarındaki esnek dönüşümlerin kategorisi $\mathbb{SOFSET}$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.2.14: (Aygünoğlu, 2011) X ve Y crisp kümeler ve $F_A,(F_A)_i \in S(X,E)$ ve $g_B,(g_B)_i \in S(Y,K)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F_A)_1 \sqsubseteq (F_A)_2 \Rightarrow (\varphi,\psi)((F_A)_1) \sqsubseteq (\varphi,\psi)((F_A)_2)$
(2) $(G_B)_1 \sqsubseteq (G_B)_2 \Rightarrow (\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_1) \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_2)$
(3) $F_A \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi,\psi)(F_A)\big)$, (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır.
(4) $(\varphi,\psi)\Big((\varphi,\psi)^{-1}(G_B)\Big) \sqsubseteq G_B$, (φ,ψ) örten ise eşitlik sağlanır.
(5) $(\varphi,\psi)\big(\sqcap_{i\in J}(F_A)_i\big) \sqsubseteq \sqcap_{i\in J}(\varphi,\psi)((F_A)_i)$, (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır.
(6) $(\varphi,\psi)\big(\sqcup_{i\in J}(F_A)_i\big) = \sqcup_{i\in J}(\varphi,\psi)((F_A)_i)$
(7) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\sqcup_{i\in J}(G_B)_i\big) = \sqcup_{i\in J}(\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_i)$
(8) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\sqcap_{i\in J}(G_B)_i\big) = \sqcap_{i\in J}(\varphi,\psi)^{-1}((G_B)_i)$
(9) $(\varphi,\psi)^{-1}(G_B^c) = \Big((\varphi,\psi)^{-1}(G_B)\Big)^c$
(10) $((\varphi,\psi)(F_A))^c \sqsubseteq (\varphi,\psi)(F_A^c)$
(11) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\tilde{E}_Y\big) = \tilde{E}_X$, $(\varphi,\psi)^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$
(12) (φ,ψ) örten ise $(\varphi,\psi)\big(\widetilde{E}_X\big) = \widetilde{E}_Y$
(13) $(\varphi,\psi)(\Phi_X) = \Phi_Y$.

Tanım 2.2.15: (İki esnek kümenin Kartezyen çarpımı) (Babitha ve Sunil, 2010) $F_A \in S(X_1,E_1)$ ve $G_B \in S(X_2,E_2)$ olsun. F_A ve G_B esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $F_A \times G_B$ olarak gösterilir. Burada her $(e,k) \in A\times B$ için $(F_A\times G_B)(e,k) = F_A(e)\times G_B(k)$ dir.

Bu tanıma göre $F_A \times G_B$ esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 2.2.16: (Aygünoğlu, 2011) Her $i\in\Delta$ için $(F_A)_i \coloneqq (F_i)_{A_i} \in S(X_i,E_i)$ olsun. $(F_A)_i$ bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ olarak gösterilir ve her $e=(e_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta}E_i$ için $(\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i)(e) \coloneqq \prod_{i\in\Delta}(F_A)_i(e_i)$ ile tanımlanır. Burada

$\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ bulanık esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta}X_i$ Kartezyen çarpımı üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Tanım 2.2.17: (Aygünoğlu, 2011) $p_j:\prod_{i\in\Delta}X_i\to X_j$ ve $q_j:\prod_{i\in\Delta}E_i\to E_j$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Esnek kümeler üzerindeki $(p,q)_j \coloneqq (p_j,q_j)$ izdüşüm fonksiyonları, $\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta}X_i$ üzerinde bir esnek küme olmak üzere $i\in\Delta$ için $(p,q)_j(\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i)=(F_A)_j$ şeklinde tanımlanır.

2.3. Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 2.3.1: (Shabir ve Naz, 2011) $X\neq\emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-e kümelerin bir ailesi ise (X,τ) çiftine esnek topolojik uzay denir.

(1) $\Phi,\tilde{E}\ \in\ \tau$
(2) $F_E,G_E\ \in\tau\ \Rightarrow F_E\sqcap G_E\in\tau$
(3) $\forall i\in J$ için $(F_i)_E\in\tau\ \Rightarrow\ \sqcup_{i\in J}(F_i)_E\in\tau$.

Tanım 2.3.2: (Aygünoğlu, 2011) $X\neq\emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-e kümelerin bir ailesi ise (X,τ) çiftine Lowen anlamında esnek topolojik uzay denir.

(1) Her $A\subseteq E$ için $\tilde{A}\ \in\ \tau$ ve $\Phi\in\ \tau$
(2) $F_A,G_B\ \in\tau\ \Rightarrow F_A\sqcap G_B\in\tau$
(3) $\forall i\in J$ için $(F_A)_i\in\tau\ \Rightarrow\ \sqcup_{i\in J}(F_A)_i\in\tau$.

τ' ya X üzerinde g-e kümelerin topolojisi denir. τ' nun her elemanına açıktır denir.
$G_B,(X,\tau)$' da kapalıdır : $\Leftrightarrow\ G_B^c\in\tau$ dir.
Klasik topolojide olduğu gibi g-e kümelerin trivial topolojisi Φ ve $\tilde{E}$' yi içerir. Diskret topoloji X' deki tüm g-e kümeleri içerir. Trivial topolojiyi τ^0 ile, diskret topolojiyi τ^1 ile gösterelim.
τ_1 esnek topolojisine τ_2 esnek topolojisinden daha zayıftır (kaba) denir : $\Leftrightarrow\ \tau_1\subset\tau_2$. Bu durumda, τ_2' ye τ_1' den daha güçlüdür (incedir) denir.

Örnek 2.3.3: (Aygünoğlu, 2011) IR reel sayılar olmak üzere $E = IR^{+}$ verilsin. Her $\lambda \in E$ için $(F_\lambda)_E \coloneqq \{(x, (x-\lambda, x+\lambda) : x \in IR)\}$ olmak üzere, $\tau \coloneqq \{(F_\lambda)_E : \lambda \in E\} \cup \{\Phi, \tilde{E}\}$ ailesi tanımlansın. Bu takdirde (IR, τ) bir esnek topolojik uzaydır.

Örnek 2.3.4: IR reel sayılar kümesi ve E sayılabilir bir küme olsun.
$\tau_* \coloneqq \{F_A : \cup_{e\in E}\ IR\backslash F_A(e)$ sayılabilir$\} \cup \{\Phi\}$ ailesi IR üzerinde bir esnek topolojidir.

Örnek 2.3.5: (Aygünoğlu, 2011) $\tau = \{(F_A)_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ olmak üzere (X, τ) esnek topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şekilde her bir parametreden topolojiler elde edebiliriz:

$\forall\ e_i \in E$ için $\tau_{e_i} = \{(F_A)_\lambda(e_i) :\ (F_A)_\lambda \in \tau\}$ olsun. τ_{e_i}, X üzerinde topolojidir.

Bu topolojiye X' deki bir esnek topolojinin "e_i-parametre topolojisi" denir.

Örnek 2.3.6: (X, T) bir klasik topolojik uzay ve E sabit parametre kümesi olsun.

Her $G \in T$ için $G_E \coloneqq \{(e, G) : e \in E\},\ (G_E(e) = G)$ olarak tanımlarsak

$\tau = \{G_E : G \in T\}$ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir. Böylece, klasik bir topolojiden esnek topoloji elde etmiş olduk.

Örnek 2.3.7: Örnek 2.1.3' de her bulanık kümenin, bir esnek küme olarak düşünülebileceğini görmüştük. Böylece, her bulanık topolojiyi bir esnek topoloji olarak düşünebiliriz.

Teorem 2.3.8: (Aygünoğlu, 2011) $\{\tau_i : i \in J\}$ ailesi X üzerinde g-e kümelerin esnek topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\sqcap \{\tau_i : i \in J\}$ X üzerinde esnek topolojik uzaydır.

Teorem 2.3.9: (Aygünoğlu, 2011) (X, τ) esnek topolojik uzay ve τ' tüm kapalı esnek kümelerin ailesini göstersin. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau'$
(2) $F_A, G_B \in \tau' \Rightarrow F_A \sqcup G_B \in \tau'$
(3) $\forall i \in J$ için $(F_A)_i \in \tau' \Rightarrow \sqcap_{i\in J}(F_A)_i \in \tau'$.

Tanım 2.3.10: (Aygünoğlu, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesine τ için bir tabandır denir $:\Leftrightarrow \tau$' nun her elemanı $\mathcal{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.11: (Aygünoğlu, 2011) (X,τ) ve (Y,τ^*) iki esnek topolojik uzay olsun.

(1) $(\varphi,\psi) : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ esnek fonksiyonuna süreklidir denir: $\Leftrightarrow \forall\, G_B \in \tau^*$ için $(\varphi,\psi)^{-1}(G_B) \in \tau$ dur.
(2) $(\varphi,\psi) : (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ esnek fonksiyonuna açıktır denir $:\Leftrightarrow \forall\, F_A \in \tau$ için $(\varphi,\psi)(F_A) \in \tau^*$ dır.

Eğer $(\varphi,\psi) : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ ve $(\varphi',\psi') : (Y,\tau_2) \to (Y,\tau_3)$ sürekli ise $(\varphi',\psi') \circ (\varphi,\psi)$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Tanım 2.3.12: (Aygünoğlu, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer bir $\mathcal{S} \subseteq S(X,E)$ ailesinin tüm elemanlarının sonlu arakesitleri τ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$' ye τ için bir alt tabandır denir.

Teorem 2.3.13: (Aygünoğlu, 2011) $\mathcal{S} \subseteq S(X,E)$ ve $\Phi, \tilde{E} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki τ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir.

$$\tau = \left\{ \sqcup_{i\in\Delta} \left(\sqcap_{j\in J_i} (F_A)_{i,j} \right) \mid (F_A)_{i,j} \in \mathcal{S}, \Delta - \text{keyfi}, J_i - \text{sonlu index kümesi} \right\}.$$

Tanım 2.3.14: (Aygünoğlu, 2011) X boştan farklı kümesi, her $i \in \mathrm{J}$ için (Y_i,τ_i) topolojik uzayları ve $(\varphi,\psi)_i$, X kümesinden (Y_i,τ_i) ye esnek fonksiyonları verilsin. X üzerinde $\mathcal{S} = \{(\varphi,\psi)_i^{-1}(F_A) : F_A \in \tau_i, i \in \mathrm{J}\}$ alttabanı yardımıyla üretilen τ esnek topolojisine $\{(\varphi,\psi)_i\}_{i\in\mathrm{J}}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç topolojisi denir.

Teorem 2.3.15: (Aygünoğlu, 2011) X üzerinde $\{(\varphi,\psi)_i\}_{i\in\mathrm{J}}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisi τ, her $i \in \mathrm{J}$ için $(\varphi,\psi)_i$ esnek fonksiyonlarını sürekli yapan en kapa topolojidir.

Tanım 2.3.16**:** (Aygünoğlu, 2011) $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\mathrm{J}}$ topolojik uzayları verilsin.

$X\left(=\prod_{i\in\mathrm{J}} X_i\right)$ üzerindeki $\{(p,q)_i\}_{i\in J}$ izdüşüm fonksiyonları yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisine X üzerindeki esnek çarpım topolojisi denir.

Tanım 2.3.17: (Zorlutuna ve diğ., 2012) (X,τ) bir esnek topolojik uzay, $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A' nın esnek iç kümesi $(F_A)^o = \sqcup \{G_B : G_B \text{ esnek açık küme ve } G_B \sqsubseteq F_A\}$ şeklinde tanımlanan bir esnek kümedir.

Önerme 2.3.18: (Zorlutuna ve diğ., 2012) (X,τ) bir esnek topolojik uzay, $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A esnek açık kümedir $\Leftrightarrow F_A = (F_A)^o$ dir.

Tanım 2.3.19: (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay, $F_A \in S(X,E)$ ve $x \in X$ olsun.
x' e F_A' nın esnek iç noktası denir : $\Leftrightarrow \exists\, G_B \in \tau$ öyle ki $x \,\tilde{\in}\, G_B \sqsubseteq F_A$ dir.

Tanım 2.3.20: (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay, $F_A \in S(X,E)$ ve $x \in X$ olsun.

F_A' ya x' in bir esnek komşuluğu denir : $\Leftrightarrow \exists\, G_B \in \tau$ öyle ki $x \,\tilde{\in}\, G_B \sqsubseteq F_A$ dır.

Bir x noktasının komşuluk sistemi tüm komşuluklarının ailesidir ve $\mathcal{N}_\tau(x)$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.21: (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{N}_\tau(x)$ komşuluk sistemi için aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her $x \in X$ noktasının bir esnek komşuluğu vardır.
(2) $F_A, G_B \in \mathcal{N}_\tau(x)$ ise $F_A \cap G_B \in \mathcal{N}_\tau(x)$ dir.
(3) $F_A \in \mathcal{N}_\tau(x)$ ve $F_A \sqsubseteq G_B$ ise $G_B \in \mathcal{N}_\tau(x)$ dir.

Tanım 2.3.22: (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ) bir esnek topolojik uzay ve $\emptyset \neq M \subset X$ olsun. $\tau_M = \{\tilde{E}_M \sqcap F_A : F_A \in \tau\}$ ailesi M üzerinde bir esnek topolojidir. Bu topolojiye M üzerinde esnek relatif topoloji, (M,τ_M) çiftine de (X,τ)' nun esnek alt uzayı denir.

Önerme 2.3.23: (Shabir ve Naz, 2011) (M,τ_M), (X,τ)' nun esnek altuzayı ve $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A, M' de açıktır $\Leftrightarrow \exists\, G_B \in \tau : F_A = \tilde{E}_M \sqcap G_B$ dir.

Tanım 2.3.24: (X,τ) bir esnek topolojik uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi ve $x_o \in X$ olsun. Eğer her $F_A \in \mathcal{N}_\tau(x_o)$ esnek komşuluğu için bir $n_o \in IN$ doğal sayısı; her $n \geq n_o$

için $x_n \,\tilde{\in}\, F_A$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine (X,τ) esnek topolojik uzayında x_o noktasına yakınsaktır denir.

Örnek 2.3.25: (IR,τ^0) trivial esnek topolojik uzay ve (x_n), bu topolojik uzayda x_o noktasına yakınsak olsun. (IR,τ^0)' da $\mathcal{N}(x_o)=\{\tilde{E}\}$ olduğundan, her $n\in IN$ için $x_n \,\tilde{\in}\, \tilde{E}$ olur. Böylece, trivial esnek topolojik uzayda her dizi her noktaya yakınsaktır.

Örnek 2.3.26: Örnek 2.3.4' de tanımlanan (IR,τ_*) esnek topolojik uzayını ele alalım. (x_n), bu esnek topolojik uzayda x_o noktasına yakınsak olsun. Böylece, her

$G_B \in \mathcal{N}(x_o)$ için bir $n_o \in IN$ doğal sayısı; her $n \geq n_o$ için $x_n \,\tilde{\in}\, G_B$ olacak şekilde vardır. F_A esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$F_A(e)=\{x_n : x_n \neq x_o\, , n\in IN\}\, , \forall e\in E.$

Buradan, $x_o \notin F_A(e)$ ve $x_o \in X\backslash F_A(e)$ olduğundan $x_o \,\tilde{\in}\, F_A^c \in \tau_*$ olur. Şu halde, $G_B \coloneqq F_A^c \in \mathcal{N}(x_o)$ dır. Dolayısıyla her $n \geq n_o$ için $x_n \,\tilde{\in}\, F_A^c$ ve $x_n \,\tilde{\notin}\, F_A$ elde edilir. Sonuç olarak, her $n \geq n_o$ için $x_n = x_o$ olur.

2.4. Esnek Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Tanım 2.4.1: (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ) esnek topolojik uzay olsun.

(a) Eğer her $x,y\in X\, , x\neq y$ için F_A esnek açık kümesi,
($x \,\tilde{\in}\, F_A\, , y \,\tilde{\notin}\, F_A$) veya ($x \,\tilde{\notin}\, F_A, y \,\tilde{\in}\, F_A$)
sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) esnek topolojik uzayına bir esnek T_0-uzayı denir.
(b) Eğer her $x,y\in X\, , x\neq y$ için F_A ve G_B gibi iki esnek açık küme,
($x \,\tilde{\in}\, F_A\, , y \,\tilde{\notin}\, F_A$) ve ($y \,\tilde{\in}\, G_B\, , x \,\tilde{\notin}\, G_B$)
sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) esnek topolojik uzayına bir esnek T_1-uzayı denir.
(c) Eğer her $x,y\in X\, , x\neq y$ için F_A ve G_B gibi iki esnek açık küme,

$x \,\tilde{\in}\, F_A\, , y \,\tilde{\in}\, G_B$ ve $F_A \sqcap G_B = \Phi$

sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) esnek topolojik uzayına bir esnek T_2-uzayı (veya esnek Hausdorff uzayı) denir.

Uyarı: (Shabir ve Naz, 2011) Tanımaları karşılaştırınca kolaylıkla görüleceği gibi, her esnek T_2-uzayı bir esnek T_1-uzayı ve her esnek T_1-uzayı bir esnek T_0-uzayıdır.

Örnek 2.4.2: $E = IR$ ve $(F_E)_y = \{(x,(x,y]) : x,y \in E \text{ ve } x < y\}$ olsun.

$\tau = \{(F_E)_y : y \in E\} \cup \{\Phi, \tilde{E}\}$ ailesini alalım. (IR,τ) çifti bir esnek topolojik uzay ve esnek Hausdorff uzayıdır.

Örnek 2.4.3: $E = IR^+$ olsun. Her $\lambda \in E$ için $(F_\lambda)_E \coloneqq \{(x,(x-\lambda,x+\lambda) : x \in IR)\}$ olmak üzere, $\tau \coloneqq \{(F_\lambda)_E : \lambda \in E\} \cup \{\Phi, \tilde{E}\}$ ailesi tanımlansın. Bu takdirde (IR,τ) bir esnek topolojik uzaydır (Aygünoğlu, 2011).
Aynı zamanda (IR,τ) bir esnek Hausdorff uzayıdır.

Tanım 2.4.4: $F_A \in S(X,E)$, $x \in X$ ve $A \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $(F_A)_\Delta$, $X \times X$ üzerinde bir esnek kümedir:

$(F_A)_\Delta : E \to P(X \times X)$, $e \in A$ için $(F_A)_\Delta(e) = \Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ ve $e \notin A$ için $(F_A)_\Delta(e) = \emptyset$ dir.

$(F_A)_\Delta$' ye A-diagonal esnek küme denir. Eğer $A = E$ ise, bu taktirde diagonal esnek küme denir.

Teorem 2.4.5: (X,τ) esnek Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$ $(F_A)_\Delta$ diagonal esnek kümesi kapalıdır.

İspat: (X,τ) esnek Hausdorff uzayı olsun. $(F_A)_\Delta^c$ esnek kümesinin açık olduğunu göstermeliyiz. $(x_1,x_2) \tilde{\in} (F_A)_\Delta^c$ alalım. Buradan, $(x_1,x_2) \tilde{\notin} (F_A)_\Delta$ ve $e \in E$ için $(x_1,x_2) \notin (F_A)_\Delta(e)$. Böylece, $x_1 \neq x_2$ olur. X esnek Hausdorff uzayı olduğundan, G_B ve H_C gibi iki esnek açık küme vardır öyle ki $x_1 \tilde{\in} G_B$, $x_2 \tilde{\in} H_C$ ve $G_B \sqcap H_C = \Phi$ dir. Böylece, her $e \in E$ için $x_1 \in G_B(e)$, $x_2 \in H_C(e)$ ve $G_B(e) \cap H_C(e) = \emptyset$ olur. Buradan, $(x_1,x_2) \in G_B(e) \times H_C(e)$ ve $\big(G_B(e) \times H_C(e)\big) \cap (F_A)_\Delta(e) = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak, $(x_1,x_2) \tilde{\in} G_B \times H_C \sqsubseteq (F_A)_\Delta^c$, yani $(F_A)_\Delta^c$ açık olur.

Tersine, $(F_A)_\Delta$ diagonal esnek kümesi $X \times X$' de kapalı olsun. $x,y \in X$ ve $x \neq y$ alalım. Buradan $(x,y) \tilde{\notin} (F_A)_\Delta$ ve $(x,y) \tilde{\in} (F_A)_\Delta^c$ olur. Esnek taban tanımından,

$G_B, H_C \in S(X,E)$ gibi taban elemanları vardır öyle ki $(x,y) \tilde{\in} G_B \times H_C \sqsubseteq (F_A)^c_\Delta$. Buradan, $G_B \times H_C \sqcap (F_A)_\Delta = \Phi$ elde edilir. Şu halde $G_B \sqcap H_C = \Phi$ olur. Ayrıca, $x \tilde{\in} G_B$, $y \tilde{\in} H_C$ ve G_B , H_C açık olduğundan (X,τ) bir esnek Hausdorff uzayıdır.

Teorem 2.4.6: (X,τ) esnek T_i-uzayı ve $(\varphi,\psi): (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ esnek dönüşümü bire-bir, örten ve açık ise (Y,τ^*) da esnek T_i-uzayıdır. (i=0,1,2)

İspat. İspatı i = 2 için yapalım.

$y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \neq y_2$ alalım. (φ,ψ) örten olduğundan

$\exists\, x_1, x_2 \in X : \varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ ve $x_1 \neq x_2$ olur.

(X,τ) esnek Hausdorff uzayı olduğundan F_A ve G_B gibi iki esnek açık küme vardır öyle ki $x_1 \tilde{\in} F_A$, $x_2 \tilde{\in} G_B$ ve $F_A \sqcap G_B = \Phi$. Böylece, her $e \in E$ için $x_1 \in F_A(e)$,

$x_2 \in G_B(e)$ ve $F_A(e) \cap G_B(e) = \emptyset$ olur. Buradan, $\varphi(x_1) = y_1 \in \varphi\big(F_A(e)\big)$,

$\varphi(x_2) = y_2 \in \varphi\big(G_B(e)\big)$ ve böylece $y_1 \tilde{\in} (\varphi,\psi)(F_A), y_2 \tilde{\in} (\varphi,\psi)(G_B)$ dir. (φ,ψ) açık olduğundan, $(\varphi,\psi)(F_A)$, $(\varphi,\psi)(G_B) \in \tau^*$ ve (φ,ψ) bire-bir olduğundan, $(\varphi,\psi)(F_A) \sqcap (\varphi,\psi)(G_B) = (\varphi,\psi)(F_A \sqcap G_B) = \Phi$ olur. Böylece, (Y,τ^*) bir esnek Hausdorff uzayıdır.

Teorem 2.4.7: (Shabir and Naz, 2011) Bir esnek T_i-uzayının her alt uzayı da bir esnek T_i-uzayıdır. (i=0,1,2)

Tanım 2.4.8: (X,τ) ve (Y,τ^*) iki esnek topolojik uzay olsun.

Eğer $(\varphi,\psi): (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ esnek dönüşümü bire-bir, örten, sürekli ve açık ise (φ,ψ) esnek dönümüne homeomorfizm denir.

Lemma 2.4.9: (X,τ) ve (Y,τ^*) iki esnek topolojik uzay olsun. Bu taktirde X ve Y,

$X \times Y$' nin bir altuzayına homeomorftur.

İspat: $(a_1,a_2) \in X \times Y$ ve $(e',k') \in E \times K$ olsun. X'den $X \times \{a_2\} \subseteq X \times Y$' ye tanımlanan (φ,ψ) esnek dönümünün bir homemorfizm olduğunu göstermeliyiz. Burada, $\varphi: X \to X \times \{a_2\}$ ve $\psi: E \to E \times \{k'\}$ dir.

φ ve ψ dönüşümleri bire-bir ve örtendir, böylece (φ,ψ) esnek dönümü bire-bir ve örtendir.

F_A esnek kümesi $X\times\{a_2\}$ altuzayında taban elemanı olsun. Altuzay tanımından, $G_B\times H_C\in S(X\times Y,E\times K)$ açık kümesi vardır öyle ki $F_A=(G_B\times H_C)\sqcap\tilde{E}_{X\times\{a_2\}}$ olur. $\psi(e)=(e',k')$ için

$$\varphi^{-1}(F_A)(e',k') = \varphi^{-1}\big((G_B\times H_C)\sqcap\tilde{E}_{X\times\{a_2\}}\big)(e',k')$$

$$=\varphi^{-1}\big((G_B\times H_C)\sqcap\tilde{E}_{X\times\{a_2\}}\big)\psi(e)$$

$$=\varphi^{-1}\Big(\big(G_B(e')\times H_C(k')\big)\cap X\times\{a_2\}\Big)$$

$$=\begin{cases}\varphi^{-1}(G_B(e')\times\{a_2\})\,, & a_2\in H_C(k')\\ \emptyset\,, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}G_B(e'),\ a_2\in H_C(k')\\ \emptyset\,, \quad \text{diğer}\end{cases}$$

Buradan, $(\varphi,\psi)^{-1}(F_A)=\begin{cases}G_B\,,\ a_2\,\widetilde{\in}\,H_C\\ \Phi\,, \quad \text{diğer}\end{cases}$ olur. Böylece, $(\varphi,\psi)^{-1}(F_A)$ açıktır, diğer bir ifadeyle (φ,ψ) esnek dönümü süreklidir.

Şimdi, (φ,ψ) esnek dönümünün açık olduğunu görelim. $F_A\in S(X,E)$ açık olsun.

$k\in K$ için

$$\varphi(F_A)(k)=\begin{cases}\bigcup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap A}\varphi\big(F_A(e)\big)\,, & \psi^{-1}(k)\cap A\neq\emptyset\\ \emptyset\,, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}F_A(e)\times\{a_2\}\,, & \psi^{-1}(k)\cap A\neq\emptyset\\ \emptyset\,, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(F_A(e)\times Y)\cap(X\times\{a_2\})\,, & \psi^{-1}(k)\cap A\neq\emptyset\\ \emptyset\,, & \text{diğer}\end{cases}$$

Böylece, $(\varphi,\psi)(F_A)=(F_A\times\tilde{E}_Y)\sqcap\tilde{E}_{X\times Y}$ altuzayda açık olur. Sonuç olarak, (φ,ψ) esnek dönümünün açıktır.

Teorem 2.4.10: X ve Y esnek T_i-uzayıdır $\Leftrightarrow$ $X \times Y$ esnek T_i-uzayıdır. (i=0,1,2)

İspat: İspatı i=2 için yapalım.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ ve $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ alalım. Buradan $x_1 \neq x_2$ veya $y_1 \neq y_2$ olur. $x_1 \neq x_2$ olarak alalım. X esnek Hausdorff uzayı olduğundan

$\exists\, F_A, G_B$ açık : $x_1 \tilde{\in} F_A, x_2 \tilde{\in} G_B$ ve $F_A \sqcap G_B = \Phi$' dir.

Bu taktirde, $F_A \times \tilde{E}_Y$ ve $G_B \times \tilde{E}_Y$, $X \times Y$ üzerinde esnek açık kümedir. Böylece, $(x_1, y_1) \tilde{\in} F_A \times \tilde{E}_Y$, $(x_2, y_2) \tilde{\in} G_B \times \tilde{E}_Y$ ve $\left(F_A \times \tilde{E}_Y\right) \sqcap \left(G_B \times \tilde{E}_Y\right) = \Phi$ olur.

Tersine, $X \times Y$ esnek Hausdorff uzayı olsun. Teorem 2.4.7' den ve Lemma 2.4.9' dan X ve Y esnek Hausdorff uzayı olur.

Teorem 2.4.11: (X, τ) esnek Hausdorff uzayıdır $\Leftrightarrow$

$x_E = \sqcap \{F_E : F_E \in \mathcal{N}(x)$ ve F_E kapalı$\}$' dır.

İspat: (X, τ) esnek Hausdorff uzayı olsun. $x_E \neq \sqcap \{F_E : F_E \in \mathcal{N}(x)$ ve F_E kapalı$\}$ olarak alalım. Bu taktirde,

$\exists y \in X : x \neq y$ ve $y \tilde{\in} \sqcap \{F_E : F_E \in \mathcal{N}(x)$ ve F_E kapalı$\}$ olur.

Buradan her $e \in E$ için $y \in \cap\, F_E(e)$. X esnek Hausdorff uzayı olduğundan G_E ve H_E gibi iki esnek açık küme vardır öyle ki $x_1 \tilde{\in} G_E, x_2 \tilde{\in} H_E$ ve $G_E \sqcap H_E = \Phi$. Buradan,

$G_E \sqcap y_E = \Phi$ ve $G_E(e) \cap y_E(e) = \emptyset$ olur. Bu ise $y \in \cap\, F_E(e)$ olması ile çelişir.

Tersine, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ alalım. $y \tilde{\notin} x_E = \sqcap \{F_E : F_E \in \mathcal{N}(x)$ ve F_E kapalı$\}$ olur. Böylece, $G_E \in \mathcal{N}(x)$ ve G_E esnek kapalı kümesi vardır öyle ki $y \tilde{\notin} G_E$ dir. Buradan $e \in E$ için $y \notin G_E(e)$ sağlanır ve $y \tilde{\in} G_E^c$, G_E^c açık olur. $G_E \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan

$\exists\, H_E \in \tau : x \tilde{\in} H_E \sqsubseteq G_E$ olur.

Böylece, $x \tilde{\in} H_E, y \tilde{\in} G_E^c$ ve $H_E \sqcap G_E^c = \Phi$ elde edilir. Sonuç olarak, (X, τ) bir esnek Hausdorff uzayıdır.

Teorem 2.4.12: Esnek Hausdorff uzayında yakınsak her dizi tek bir noktaya yakınsar.

İspat: $x \neq y$ olmak üzere (x_n) dizisi x ve y noktalarına yakınsasın. (X,τ) esnek Hausdorff uzayı olduğundan $x \,\tilde{\in}\, G_B$, $y \,\tilde{\in}\, H_C$ ve $G_B \sqcap H_C = \Phi$ olacak şekilde G_B ve H_C esnek açık kümeleri vardır. Buradan, her $e \in E$ için $x \in G_B(e)$, $y \in H_C(e)$ ve $G_B(e) \cap H_C(e) = \emptyset$ elde edilir.

(x_n) dizisi x noktasına yakınsak ve G_B, x noktasının esnek komşuluğu olduğundan

$\exists n_1 \in IN : \forall n \geq n_1$ için $x_n \,\tilde{\in}\, G_B$,

(x_n) dizisi y noktasına yakınsak ve H_C, y noktasının esnek komşuluğu olduğundan

$\exists n_2 \in IN : \forall n \geq n_2$ için $x_n \,\tilde{\in}\, H_C$

sağlanır. Eğer $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse : $\forall n \geq n_0$ için $x_n \,\tilde{\in}\, G_B$ ve $x_n \,\tilde{\in}\, H_C$

olur. Buradan, her $e \in E$ için $x_n \in G_B(e)$, $x_n \in H_C(e)$ ve $G_B(e) \cap H_C(e) \neq \emptyset$ olur. Böylece, $G_B \sqcap H_C \neq \Phi$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde varsayım yanlıştır, $x = y$ olmak zorundadır.

Uyarı 2.4.13: Teorem 2.4.12' nin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin, Örnek 2.3.4' de tanımlanan (IR, τ_*) esnek topolojik uzayında yakınsak her dizi tek bir noktaya yakınsar, fakat bu esnek topolojik uzay esnek Hausdorff değildir.

Tanım 2.4.14: (Aygünoğlu, 2011) (X,τ) esnek topolojik uzayı verilsin.

(1) $\{(F_A)_i : i \in \mathrm{J}\} \subset S(X,E)$ ailesi için $\bigsqcup_{i\in \mathrm{J}}(F_A)_i = \tilde{E}$ koşulunu sağlıyorsa bu aileye X' in bir esnek örtümüdür denir.
(2) (X,τ) esnek topolojik uzayının her açık örtümünün bir sonlu alt örtümü varsa bu topolojik uzaya esnek kompakttır denir.

Teorem 2.4.15: (X,τ) esnek Hausdorff uzay olsun. $F_A \in S(X,E)$ kompakt ise kapalıdır.

İspat: (X,τ) esnek Hausdorff uzay ve X üzerindeki F_A bulanık esnek kümesi kompakt olsun. F_A^c açık olduğunu göstermeliyiz. $x \,\tilde{\in}\, F_A^c$ alalım. Buradan her $e \in E$ için $x \in F_A^c(e) = X \setminus F_A(e)$ ve $x \notin F_A(e)$ olur. Her $y \in F_A(e)$ $(x \neq y)$ için (X,τ) esnek Hausdorff uzayı olduğundan $(G_B)_y$ ve $(H_C)_y$ gibi iki esnek açık küme

vardır öyle ki $x \widetilde{\in} (G_B)_y$, $y \widetilde{\in} (H_C)_y$ ve $(G_B)_y \sqcap (H_C)_y = \Phi$ dir. Buradan, her $e \in E$ için $x \in (G_B)_y(e)$, $y \in (H_C)_y(e)$ ve $(G_B)_y(e) \cap (H_C)_y(e) = \emptyset$ olur. O halde, $F_A(e) \subset (H_C)_y(e)$ ve böylece $F_A \sqsubseteq (H_C)_y$ dir. $\mathcal{C} = \{(H_C)_y : y \widetilde{\in} F_A\}$ ailesi F_A' nın bir açık örtümüdür. F_A kompakt olduğundan sonlu alt örtümü vardır.

$F_A \sqsubseteq \sqcup_{i=1}^{n} (H_C)_{y_i}$ olur. Buradan,

$\sqcup_{i=1}^{n} (H_C)_{y_i}$ ve $\sqcap_{i=1}^{n} (G_B)_{y_i} \in \tau$ ve $\left(\sqcup_{i=1}^{n} (H_C)_{y_i}\right) \sqcap \left(\sqcap_{i=1}^{n} (G_B)_{y_i}\right) = \Phi$ elde edilir.

$x \widetilde{\in} (G_B)_y$ olduğundan, $x \widetilde{\in} (G_B)_{y_i} \sqsubseteq \left(\sqcup_{i=1}^{n} (H_C)_{y_i}\right)^c \sqsubseteq F_A^c$ olur. Böylece, F_A^c açıktır.

3. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle bulanık esnek kümeler ve temel özellikleri özetlenmiştir. Daha sonra bulanık esnek topolojik uzay kavramı Chang anlamında tanımlanmıştır. Taban ve süreklilik kavramları tanımlanarak bulanık esnek topolojik uzaylar için başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi kavramları incelenmiştir. Bulanık noktanın bir genelleştirilmesi olarak bulanık esnek nokta kavramı verilerek bulanık esnek topolojik uzayların komşuluk yapıları üzerine çalışılmıştır.

3.1. Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 3.1.1: (Maji ve diğ., 2001) E parametrelerin kümesi ve $A \subset E$ olsun. (f, A) çiftine X üzerinde bir bulanık esnek küme denir : $\Leftrightarrow f: A \longrightarrow I^X$.

$\forall a \in A$ için $f(a) = f_a: X \to I$, X üzerinde bir bulanık kümedir.

Örnek 3.1.2: (f, E) bulanık esnek kümesi bir bayanın satın almayı düşündüğü elbiselerin özelliklerini tanımlasın. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ elbiselerin kümesi ve I^X, X'in tüm bulanık alt kümelerinin ailesi olsun.

$E = \{\text{uzun}, \text{pahalı}, \text{renkli}, \text{sade}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

$f_{e_1} = \{\frac{x_1}{1.0}, \frac{x_2}{0}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0.4}\}$, $\quad f_{e_2} = \{\frac{x_1}{0.5}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0}\}$,

$f_{e_3} = \{\frac{x_1}{0.2}, \frac{x_2}{1.0}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_4}{1.0}\}$, $\quad f_{e_4} = \{\frac{x_1}{0.1}, \frac{x_2}{0}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_4}{1.0}\}$

olarak alalım. Böylece, I^X' in $\{f_{e_i} : i = 1,2,3,4\}$ ailesi (f, E) bulanık esnek kümesidir.

Açık olarak, X üzerindeki (F, E) klasik esnek kümesini (f, E) bulanık esnek kümesi olarak düşünebiliriz:

$e \in E$ için e' nin f altındaki görüntüsü $F(e)$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olarak tanımlanır. Yani,

$f_e(a) = \chi_{F(e)}(a) = \begin{cases} 1\ , & a \in F(e) \\ 0\ , & a \notin F(e) \end{cases}$

Bir önceki bölümde "genişletilmiş esnek küme" kavramındaki düşünceye benzer olarak "genişletilmiş bulanık esnek küme" tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.1.3: (f, A), X üzerinde bulanık esnek küme olsun. (f, A) bulanık esnek kümesini $\bar{f}: E \longrightarrow I^X,\ \bar{f}(e) = \overline{f_e} = \begin{cases} f_e, & e \in A \\ 0_x, & e \notin A \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $(\bar{f}, E)$ bulanık esnek kümesi olarak düşünebiliriz.

$f_A: E \longrightarrow I^X$ bir dönüşüm olarak düşünülen bulanık esnek kümesine "genişletilmiş bulanık esnek küme" (g-be küme) denir.

X üzerindeki tüm g-be kümelerin ailesini $F(X, E)$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.4: $f_A, g_B \in F(X, E)$ olsun. f_A' ya g_B' nin bulanık esnek alt kümesi denir : $\Leftrightarrow \forall\ e \in E$ için $f_A(e) \leq g_B(e)$ dir.

Alt küme $f_A \sqsubseteq g_B$ ile gösterilir.
Eğer g_B, f_A' nın bulanık esnek alt kümesi ise, f_A' ya g_B' nin bulanık esnek süper kümesi denir ve bu $f_A \sqsupseteq g_B$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5**:** $f_A, g_B \in F(X, E)$ olsun. f_A ve g_B eşittir denir. : $\Leftrightarrow f_A \sqsubseteq g_B$ ve $g_B \sqsubseteq f_A$.

Tanım 3.1.6: $f_A, g_B \in F(X, E)$ olsun. f_A ve g_B g-be kümelerin birleşimi $h_{A \cup B}$ g-be kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $h_{A \cup B}(e) = f_A(e) \vee g_B(e)$ dir.

Birleşim $h_{A \cup B} = f_A \sqcup g_B$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.7: $f_A, g_B \in F(X, E)$ olsun. f_A ve g_B g-be kümelerin kesişimi $h_{A \cap B}$ g-be kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $h_{A \cap B}(e) = f_A(e) \wedge g_B(e)$ dir.

Kesişim $h_{A \cap B} = f_A \sqcap g_B$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.8: $f_A, g_B \in F(X, E)$ olsun. $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow f_A = f_A \sqcap g_B$ veya $g_B = f_A \sqcup g_B$'dır.

Tanım 3.1.9: Bir f_A g-be kümesinin tümleyeni ${f_A}^c$ ile gösterilir. ${f_A}^c: E \to I^X$ bir dönüşüm olmak üzere ${f_A}^c(e) = 1_X - f_A(e)$ şeklinde tanımlanır.

${f_A}^c$' ye f_A' nın bulanık esnek tümleyen fonksiyonu denir. $({f_A}^c)^c = f_A$ olduğu açıktır.

Tanım 3.1.10: $f_E \in F(X,E)$ olsun. f_E g-be kümesine boş g-be küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $f_E(e) = 0_X$ dir.

Boş g-be küme $\tilde{0}_E$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.11: $f_E \in F(X,E)$ olsun. f_E g-be kümesine evrensel g-be küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $f_E(e) = 1_X$ dir.

Evrensel g-be küme $\tilde{1}_E$ ile gösterilir.

$(\tilde{1}_E)^c = \tilde{0}_E$ ve $(\tilde{0}_E)^c = \tilde{1}_E$ olduğu açıktır.

Tanım 3.1.12: $f_A \in F(X,E)$ olsun. f_A g-be kümesine A-evrensel g-be küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in A$ için $f_A(e) = 1_X$ ve $\forall e \in E \backslash A$ için $f_A(e) = 0_X$.

A-evrensel g-be küme $\tilde{1}_A$ ile gösterilir.

α_X, X üzerinde sabit bulanık küme, yani her $x \in X$ ve $\alpha \in I$ için $\alpha_X(x) = \alpha$ olsun.

Tanım 3.1.13: $f_E \in F(X,E)$ olsun. f_E g-be kümesine α-evrensel g-be küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $f_E(e) = \alpha_X$ dir.

α-evrensel g-be küme $\tilde{\alpha}_E$ ile gösterilir.

$(\tilde{\alpha}_E)^c = (\widetilde{1-\alpha})_E$ olduğu açıktır.

Tanım 3.1.14: $f_A \in F(X,E)$ olsun. f_A g-be kümesine $\alpha - A$-evrensel g-be küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in A$ için $f_A(e) = \alpha_X$ ve $\forall e \in E \backslash A$ için $f_A(e) = 0_X$ dir.

$\alpha - A$-evrensel g-be küme $\tilde{\alpha}_A$ ile gösterilir.

Uyarı 3.1.15: $\tilde{\alpha}_A$ g-be kümesinin tümleyeni $\alpha - A$-evrensel g-be küme değildir. Gerçekten,

$$\tilde{\alpha}_A = \begin{cases} f_A(e) = \alpha_X\,, & \forall e \in A \\ f_A(e) = 0_X\,, & \text{diğer} \end{cases} \quad \Rightarrow \ (\tilde{\alpha}_A)^c = \begin{cases} f_A^c(e) = 1_X - \alpha_X\,, & \forall e \in A \\ f_A^c(e) = 1_X\,, & \text{diğer} \end{cases}$$

Önerme 3.1.16: J indeks kümesi ve $f_A, g_B, h_C, (f_A)_i,\ (g_B)_i \in \mathcal{F}(X,E), \forall i \in J$, olsun.

Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $f_A \sqcap f_A = f_A\,,\ f_A \sqcup f_A = f_A$

(2) $f_A \sqcap g_B = g_B \sqcap f_A\,,\ f_A \sqcup g_B = g_B \sqcup f_A$

(3) $f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$ ve

$f_A \sqcap (g_B \sqcap h_C) = (f_A \sqcap g_B) \sqcap h_C$

(4) $f_A \sqcap \left(\sqcup_{i\in J} (g_B)_i \right) = \sqcup_{i\in J} (f_A \sqcap (g_B)_i)$

$f_A \sqcup \left(\sqcap_{i\in J} (g_B)_i \right) = \sqcap_{i\in J} (f_A \sqcup (g_B)_i)$

(5) $\tilde{0}_E \sqsubseteq f_A \sqsubseteq \tilde{1}_A \sqsubseteq \tilde{1}_E$

(6) $(\sqcap_{i\in J} (f_A)_i)^c = \sqcup_{i\in J} (f_A)_i^c$ ve

$\left(\sqcup_{i\in J} (f_A)_i\right)^c = \sqcap_{i\in J} (f_A)_i^c$

(7) $f_A \sqsubseteq g_B \ \Rightarrow \ (g_B)^c \ \sqsubseteq \ (f_A)^c$

(8) $f_A \sqcap g_B \sqsubseteq f_A\,, g_B$ ve $f_A\,, g_B \sqsubseteq f_A \ \sqcup g_B$

İspat: (3), (4) ve (6)' nin ispatlarını verelim, diğerleri benzer şekilde yapılır.

(3) Birleşim tanımından ve $\forall e \in E$ için $f_A(e), g_B(e), h_C(e) \ \in I^X$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C)\right)(e) &= f_A(e) \vee \left(g_B \sqcup h_C\right)(e) \\ &= f_A(e) \vee (g_B(e) \vee h_C(e)) \\ &= (f_A(e) \vee g_B(e)) \vee h_C(e) \\ &= \left(f_A \sqcup g_B\right)(e) \vee h_C(e) \\ &= ((f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C)(e) \end{aligned}$$

Böylece, $f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$ elde edilir.

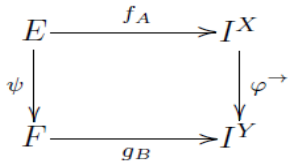
(4) Birleşim ve kesişim tanımlarından her $e \in E$ için

$$\begin{aligned}\left(f_A \sqcap \left(\sqcup_{i\in J}(g_B)_i\right)\right)(e) &= f_A(e) \wedge \left(\coprod_{i\in J}(g_B)_i\right)(e)\\ &= f_A(e) \wedge \left(\bigvee_{i\in J}(g_B)_i(e)\right)\\ &= \bigvee_{i\in J}(f_A(e) \wedge (g_B)_i(e))\\ &= \bigvee_{i\in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)\,(e)\\ &= \left(\coprod_{i\in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)\right)(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

(6) $e \in E$ için

$$\begin{aligned}\left(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i\right)^c(e) &= 1_X - \left(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i\right)(e)\\ &= 1_X - \left(\wedge_{i\in J}(f_A)_i(e)\right)\\ &= \bigvee_{i\in J}(f_A)_i^c(e)\\ &= \sqcup_{i\in J}(f_A)_i^c(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

Tanım 3.1.17: (Aygünoğlu ve Aygün, 2009) $F(X,E)$ ve $F(Y,K)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm g-be kümelerin ailesi ve $\varphi: X \to Y$, $\psi: E \to K$ iki fonksiyon olsun. (φ,ψ) çiftine X' den Y' ye bir bulanık esnek dönüşüm denir ve bu $(\varphi,\psi): F(X,E) \to F(Y,K)$ ile gösterilir.



Şekil 3.1

Diyagramda (Şekil 3.1) $f_A \in F(X,E)$, $g_B \in F(Y,K)$ ve $\varphi^{\rightarrow}: I^X \to I^Y$ güç kümeleri arasındaki dönüşümdür (Rodabaugh, 1999) ve her $h \in I^X$ için $\varphi^{\rightarrow}(h) \coloneqq \varphi(h)$' dır.

(φ,ψ) X' den Y' ye ve (φ',ψ') Y' den Z' ye iki bulanık esnek dönüşümünün bileşkesi $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ X' den Z' ye bir bulanık esnek dönüşümdür. Burada $\psi: E \to K$, $\psi': K \to G$ ve (id_X, id_E) çifti X' den X' e birim morfizmasıdır.

(1) $f_A \in F(X,E)$ olsun. f_A' nın (φ,ψ) bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $(\varphi,\psi)(f_A)$, Y üzerinde bir g-be kümedir:

$(\varphi,\psi)(f_A)(k) = \bigvee_{\psi(e)=k} \varphi(f_A(e))$, $\forall\, k \in F.$

Diğer bir ifadeyle,

$$\varphi(f_A)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\varphi(x)=y} \bigvee_{\psi(e)=k} f_A(e)(x), & x \in \varphi^{-1}(y) \\ 0 \ , & \text{diğer} \end{cases} \quad , \ \forall\, k \in \psi(E), \forall y \in Y.$$

(2) $g_B \in F(Y,K)$ olsun. g_B' nin (φ,ψ) bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$, X üzerinde bir g-be kümedir:

$(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)(e) = \varphi^{-1}\left(g_B\big(\psi(e)\big)\right)$, $\forall\, e \in E.$

Diğer bir ifadeyle,

$\varphi^{-1}(g_B)(e)(x) = g_B\big(\psi(e)\big)\big(\varphi(x)\big)$, $e \in \psi^{-1}(K)$, $\forall x \in X.$

Eğer φ ve ψ bire-bir (örten) ise (φ,ψ) bulanık esnek dönüşümü de bire-birdir (örtendir).

Eğer φ ve ψ sabit ise (φ,ψ) bulanık esnek dönüşümü de sabittir.

Önerme 3.1.18: X ve Y crisp kümeler, $f_A, (f_A)_i \in \mathcal{F}(X,E)$ ve $g_B, (g_B)_i \in \mathcal{F}(Y,K)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(f_A)_1 \sqsubseteq (f_A)_2 \ \Rightarrow \ (\varphi,\psi)(f_A)_1 \sqsubseteq (\varphi,\psi)(f_A)_2$

(2) $(g_B)_1 \sqsubseteq (g_B)_2 \ \Rightarrow \ (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)_1 \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)_2$

(3) $f_A \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}((\varphi,\psi)(f_A))$, (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $(\varphi,\psi)((\varphi,\psi)^{-1}(g_B)) \sqsubseteq g_B$, (φ,ψ) örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $(\varphi,\psi)\big(\sqcup_{i\in J}\,(f_A)_i\big) = \sqcup_{i\in J}\,(\varphi,\psi)(f_A)_i$

(6) $(\varphi,\psi)\left(\sqcap_{i\in J}\,(f_A)_i\right) \sqsubseteq \sqcap_{i\in J}\,(\varphi,\psi)(f_A)_i$, (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(7) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\sqcup_{i\in J}\,(g_B)_i\big) = \sqcup_{i\in J}\,(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)_i$

(8) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\sqcap_{i\in J}\,(g_B)_i\big) = \sqcap_{i\in J}\,(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)_i$

(9) $(\varphi,\psi)^{-1}((g_B)^c) = \big((\varphi,\psi)^{-1}(g_B)\big)^c$

(10) $\big((\varphi,\psi)(f_A)\big)^c \sqsubseteq (\varphi,\psi)((f_A)^c)$

(11) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\tilde{1}_K\big) = \tilde{1}_E$, $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\tilde{0}_K\big) = \tilde{0}_E$

(12) (φ,ψ) örten ise $(\varphi,\psi)\left(\tilde{1}_E\right)=\tilde{1}_K$

(13) $(\varphi,\psi)\left(\tilde{0}_E\right)=\tilde{0}_K$.

İspat: (3) ve (6)' nın ispatlarını verelim, diğerleri benzer şekilde yapılır.

(3) $e\in\psi^{-1}(F)$ ve $x\in X$ için

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi)(f_A)(e)\big)(x)&=\varphi^{-1}(\varphi(f_A)\psi(e)(x))\\&=\varphi(f_A)\psi(e)(\varphi(x))\\&=\bigvee_{\psi(e)=k}\bigvee_{\varphi(x)}f_A(e)(x)\\&\geq f_A(e)(x)\text{ dir.}\end{aligned}$$

(6) $k\in\psi(E)$ ve $y\in Y$ için

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)e\big(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i\big)_k(y)&=\bigvee_{\psi(e)=k}\bigvee_{\varphi(x)=y}\big(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i(e)\big)(x)\\&=\bigvee_{\psi(e)=k}\bigvee_{\varphi(x)=y}(\wedge_{i\in J}(f_A)_i(e)\,(x))\\&\leq\bigvee_{\psi(e)=k}\wedge_{i\in J}\,(\bigvee_{\varphi(x)=y}(f_A)_i(e)(x))\\&=\wedge_{i\in J}\,(\bigvee_{\psi(e)=k}\bigvee_{\varphi(x)=y}(f_A)_i(e)(x))\\&=\wedge_{i\in J}\,(\varphi,\psi)((f_A)_i\,)_k(y)\\&=\big(\sqcap_{i\in J}(\varphi,\psi)(f_A)_i\big)(y)\text{ dir.}\end{aligned}$$

Tanım 3.1.19: $f_A\in\mathcal{F}(X,E)$ ve $g_B\in\mathcal{F}(Y,K)$ olsun. $f_A\times g_B$ bulanık çarpımı $(f\times g)_{A\times B}$ olarak gösterilir ve her $(e,k)\in A\times B$ için

$(f\times g)_{A\times B}(e,k)=f_A(e)\times g_B(k)\in I^X\times I^Y\subseteq I^{X\times Y}$ olarak tanımlanır ve her $(x,y)\in X\times Y$ için $\big(f_A(e)\times g_B(k)\big)(x,y)=f_A(e)(x)\wedge g_B(k)(y)$' dir.

Bu tanıma göre $(f\times g)_{A\times B}$ bulanık esnek kümesi $X\times Y$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

$p_X\colon X\times Y\to X$, $q_E\colon E\times K\to E$ ve $p_Y\colon X\times Y\to Y$, $q_K\colon E\times K\to K$ projeksiyon çiftleri sırasıyla (p_X,q_E) $X\times Y$' den X' e ve (p_Y,q_K) $X\times Y$' den Y' ye morfizmleri belirler. Burada,

$(p_X,q_E)(f_A\times g_B)=p_X(f\times g)_{q_E(A\times B)}=f_A$ ve

$(p_Y,q_K)(f_A\times g_B)=p_Y(f\times g)_{q_K(A\times B)}=g_B$' dir.

3.2. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

Bulanık esnek topolojik uzayları detaylı olarak tanımlayabilmek için öncelikle bulanık topolojik uzayları hatırlayalım: Bir bulanık topoloji (X, δ) ikilisi ile gösterilir ve burada δ, klasik topolojideki gibi üç aksiyomu sağlayan bulanık kümelerin bir ailesidir.

Tanım 3.2.1: (Tanay ve Kandemir, 2011) $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-be kümelerin bir ailesi ise (X, τ) çiftine bulanık esnek topolojik uzay denir.

(T1) $\tilde{0}_E , \tilde{1}_E \in \tau$

(T2) $f_A , g_B \in \tau \Rightarrow f_A \sqcap g_B \in \tau$

(T3) $\forall i \in J$ için $(f_A)_i \in \tau \Rightarrow \sqcup_{i \in J} (f_A)_i \in \tau$.

Tanım 3.2.2: $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-be kümelerin bir ailesi ise (X, τ) çiftine Lowen anlamında bulanık esnek topolojik uzay denir.

(1) $\tilde{\alpha}_E \in \tau$

(2) $f_A , g_B \in \tau \Rightarrow f_A \sqcap g_B \in \tau$

(3) $\forall i \in J$ için $(f_A)_i \in \tau \Rightarrow \sqcup_{i \in J} (f_A)_i \in \tau$.

τ ' ya X üzerinde g-be kümelerin topolojisi denir. τ' nun her elemanına açıktır denir.
g_B, (X, τ)' da kapalıdır : $\Leftrightarrow$ ${g_B}^c \in \tau$ dur.
$\tau^0 = \{\tilde{0}_E , \tilde{1}_E\}$ ve $\tau^1 = \mathcal{F}(X, E)$, X üzerinde bulanık esnek topolojilerdir ve sırasıyla trivial ve diskret bulanık esnek topoloji olarak adlandırılırlar.
τ_1 bulanık esnek topolojisine τ_2 bulanık esnek topolojisinden daha zayıftır (kaba) denir : $\Leftrightarrow$ $\tau_1 \subset \tau_2$ dir. Bu durumda, τ_2' ye τ_1' den daha güçlüdür (incedir) denir.

Örnek 3.2.3: $\tau = \{(f_A)_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ olmak üzere (X, τ) bulanık esnek topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şekilde her bir parametreden bulanık topolojiler elde edebiliriz:

$\forall e_i \in E$ için $\tau_{e_i} = \{(f_A)_\lambda(e_i) : (f_A)_\lambda \in \tau\}$ olsun. τ_{e_i}, X üzerinde bulanık topolojidir. Gerçekten,

(1) $\tilde{0}_E , \tilde{1}_E \in \tau$ olduğundan $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \Delta : (f_A)_{\lambda_1}(e_i) = 1_X$ ve $(f_A)_{\lambda_2}(e_i) = 0_X$.

Buradan, $0_X, 1_X \in \tau_{e_i}$ elde edilir.

(2) $(f_A)_{\lambda_1}(e_i)$, $(f_A)_{\lambda_2}(e_i) \in \tau_{e_i}$ alalım. Buradan, $(f_A)_{\lambda_1}$, $(f_A)_{\lambda_2} \in \tau$ olur. τ bulanık esnek topoloji olduğundan $(f_A)_{\lambda_1} \sqcap (f_A)_{\lambda_2} \in \tau$ olur. Böylece,

$(f_A)_{\lambda_1}(e_i) \wedge (f_A)_{\lambda_2}(e_i) = \big((f_A)_{\lambda_1} \sqcap (f_A)_{\lambda_2}\big)(e_i) \in \tau_{e_i}$ elde edilir.

(3) Benzer şekilde, $\forall (f_A)_\lambda(e_i) \in \tau_{e_i}$ için $\bigvee_{\lambda\in\Delta}(f_A)_\lambda(e_i) \in \tau_{e_i}$ elde edilir.

Böylece, $\forall e_i \in E$ için τ_{e_i}, X üzerinde bir bulanık topolojidir. Bu topolojiye X' deki bir bulanık esnek topolojinin "e_i-parametre topolojisi" denir.

Örnek 3.2.4: Karakteristik fonksiyonlar yardımıyla F_A esnek kümesinin bir bulanık esnek küme olarak düşünebildiği biliniyor. Benzer yaklaşımla,

$\tau = \{F_A : F_A \in F(X, E)\}$ olmak üzere (X, τ) bir esnek topolojik uzay olsun.

$\tau^* = \{\chi_{F_A} : F_A \in \tau\}$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topoloji olur.

Teorem 3.2.5: $\{\tau_i : i \in J\}$ ailesi X üzerinde g-be kümelerin bulanık esnek topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\sqcap \{\tau_i : i \in J\}$ X üzerinde bulanık esnek topolojidir.

İspat: Açıktır.

Teorem 3.2.6: (X, τ) bulanık esnek topolojik uzay ve τ' tüm kapalı bulanık esnek kümelerin ailesini göstersin. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\tilde{0}_E , \tilde{1}_E \in \tau'$

(2) $f_A , g_B \in \tau' \Rightarrow f_A \sqcup g_B \in \tau'$

(3) $\forall i \in J$ için $(f_A)_i \in \tau' \Rightarrow \sqcap_{i\in J} (f_A)_i \in \tau'$.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.2.7: (X,τ) bulanıpk esnek topolojik uzay ve $f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. f_A' nın bulanık esnek kapanışı, f_A' nın tüm kapalı süper kümelerinin arakesitidir ve bu $\overline{f_A}$ ile gösterilir.

Açıktır ki $\overline{f_A}$, f_A' yı kapsayan en küçük bulanık esnek kapalı kümedir ve $\overline{f_A}$ kapalıdır.

Teorem 3.2.8: (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay ve f_A , $g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\overline{\tilde{0}_E} = \tilde{0}_E$ ve $\overline{\tilde{1}_E} = \tilde{1}_E$

(2) $f_A \sqsubseteq \overline{f_A}$

(3) $\overline{\overline{f_A}} = \overline{f_A}$

(4) $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow \overline{f_A} \sqsubseteq \overline{g_B}$

(5) f_A kapalıdır $\Leftrightarrow f_A = \overline{f_A}$

(6) $\overline{f_A \sqcup g_B} = \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$

İspat: (1) - (4): Kapanış tanımından açıktır.

(5) f_A kapalı bir bulanık esnek küme olsun. (2)' den $f_A \sqsubseteq \overline{f_A}$' dir. $\overline{f_A}$, f_A' yı kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $\overline{f_A} \sqsubseteq f_A$ olur. Böylece, $f_A = \overline{f_A}$ elde ederiz.

Tersine, $f_A = \overline{f_A}$ olsun. $\overline{f_A}$ kapalı olduğundan f_A da kapalı olur.

(6) (4)' den $\overline{f_A}$, $\overline{g_B} \sqsubseteq \overline{f_A \sqcup g_B}$' dir. Böylece, $\overline{f_A} \sqcup \overline{g_B} \sqsubseteq \overline{f_A \sqcup g_B}$ dır.

Tersine, (2)' den $f_A \sqcup g_B \sqsubseteq \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$. $\overline{f_A}$ ve $\overline{g_B}$ kapalı kümeler ve $\overline{f_A \sqcup g_B}$ en küçük kapalı küme olduğundan $\overline{f_A \sqcup g_B} \sqsubseteq \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$ olur. Böylece eşitlik sağlanır.

Tanım 3.2.9: (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay ve $f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. f_A' nın bulanık esnek içi, f_A' nın tüm açık alt kümelerinin birleşimidir ve bu ${f_A}^o$ ile gösterilir.

Açıktır ki ${f_A}^o$, f_A' nın içindeki en büyük açık kümedir ve ${f_A}^o$ açıktır.

Teorem 3.2.10: (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay ve $f_A, g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\left(\tilde{0}_E\right)^o = \tilde{0}_E$ ve $\left(\tilde{1}_E\right)^o = \tilde{1}_E$

(2) ${f_A}^o \sqsubseteq f_A$

(3) $({f_A}^o)^o = {f_A}^o$

(4) $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow {f_A}^o \sqsubseteq {g_B}^o$

(5) f_A açıktır $\Leftrightarrow f_A = {f_A}^o$

(6) $(f_A \sqcap g_B)^{\,o} = {f_A}^o \sqcap {g_B}^o$

İspat: Açıktır.

Teorem 3.2.11: (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay ve $f_A, g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $(f_A^o)^c = \overline{(f_A^c)}$

(2) $(\overline{f_A})^c = (f_A^c)^o$

İspat: (1) ${f_A}^o \sqsubseteq f_A$ olduğu açıktır. Önerme 3.1.16 (7)' den $f_A^c \sqsubseteq (f_A^o)^c$ elde edilir. $(f_A^o)^c$ kapalı küme olduğundan ve Teorem 3.2.8 (4)' den $\overline{(f_A^c)} \sqsubseteq \overline{(f_A^o)^c} = (f_A^o)^c$ elde edilir. Tersine, Teorem 3.2.8 (2)' den $f_A^c \sqsubseteq \overline{f_A^c}$' dir. Önerme 3.1.16 (7)' den

$(\overline{f_A^c})^{\,c} \sqsubseteq (f_A^c)^c = f_A$ olur. $\overline{f_A^c}$ kapalı olduğundan $(\overline{f_A^c})^{\,c}$ açıktır. İç tanımından, $(\overline{f_A^c})^{\,c} \sqsubseteq f_A^o$ olur ve tekrar Önerme 3.1.16 (7)' den $(f_A^o)^c \sqsubseteq ((\overline{f_A^c})^{\,c})^c = \overline{(f_A^c)}$ elde edilir.

Teorem 3.2.12: $i: \mathcal{F}(X,E) \to \mathcal{F}(X,E)$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm olsun.

(i1) $i\left(\tilde{1}_E\right) = \tilde{1}_E$

(i2) $\forall f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $i(f_A) \sqsubseteq f_A$

(i3) $\forall f_A, g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ için $i(f_A \sqcap g_B) = i(f_A) \sqcap i(g_B)$

(i4) $\forall f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $i\big(i(f_A)\big) = i(f_A)$

Bu taktirde, aşağıdaki şekilde bir bulanık esnek topoloji elde ederiz:

$\tau = \{f_A \in \mathcal{F}(X,E) : i(f_A) = f_A\}$

Bu τ bulanık esnek topolojisi ile her $f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için ${f_A}^o = i(f_A)$ sağlanır.

İspat: (T1) (i1)' den $\tilde{1}_E \in \tau$ olur. (i2)' den $i(0_E) \sqsubseteq \tilde{0}_E$, böylece $i(0_E) = \tilde{0}_E$ ve $\tilde{0}_E \in \tau$ elde edilir.

(T2) $f_A,\ g_B \in \tau$ alalım. τ' nun tanımından $i(f_A) = f_A$ ve $i(g_B) = g_B$ dir. (i3)' den $i(f_A \sqcap g_B) = i(f_A) \sqcap i(g_B) = f_A \sqcap g_B$ olur. Böylece, $f_A \sqcap g_B \in \tau$ elde edilir.

(T3) $\{(f_A)_j : j \in J\} \subset \tau$ alalım. (i3)' den i sırayı koruyan dönüşüm olduğundan ve birleşim tanımından, $(f_A)_k \sqsubseteq \sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\,, \forall k \in J$ ve $i(f_A)_k \sqsubseteq i\big(\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\big)$ olur.

τ' nun tanımından $i(f_A)_k = (f_A)_k$ ve $(f_A)_k = i(f_A)_k \sqsubseteq i\big(\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\big)$. Böylece,

$\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j \sqsubseteq i\big(\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\big)\,, \forall j \in J$ dir. Tersine, (i2)' den $i\big(\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\big) \sqsubseteq \sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j$ olur. Buradan, $i\big(\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j\big) = \sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j$ ve $\sqcup_{j\in J}\,(f_A)_j \in \tau$ elde edilir.

İkinci kısmın ispatı için $f_A \in \tau$ alalım. $f_A^o \in \tau$ olduğundan $i(f_A^o) = f_A^o$ olur. (i3)' den i sırayı koruyan bir dönüşümdür ve $f_A^o = i(f_A^o) \sqsubseteq i(f_A)$. Tersine, (i4)' den $i\big(i(f_A)\big) = i(f_A)$ ve buradan $i(f_A) \sqsubseteq \sqcup\,\{g_B \in \mathcal{F}(X,E) : i(g_B) = g_B \sqsubseteq f_A\} = f_A^o$ elde edilir. Sonuç olarak, $f_A^o = i(f_A)$ olur.

Not: Teorem 3.2.12' de tanımlanan i dönüşümüne bulanık esnek iç operatörü denir.

Teorem 3.2.10 (1), (2), (3), (6) ve Teorem 3.2.12' den, bir bulanık esnek iç operatörüden bulanık esnek topoloji elde edildiği ve tersine verilen bir bulanık esnek topolojiden bir bulanık esnek iç operatörü elde edilebildiği görülür.

Teorem 3.2.13: $c: \mathcal{F}(X,E) \to \mathcal{F}(X,E)$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm olsun.

(c1) $c(\tilde{0}_E) = \tilde{0}_E$

(c2) $\forall f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $f_A \sqsubseteq c(f_A)$

(c3) $\forall f_A, g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ için $c(f_A \sqcup g_B) = c(f_A) \sqcup c(g_B)$

(c4) $\forall f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $c(c(f_A)) = c(f_A)$

Bu taktirde, aşağıdaki şekilde bir bulanık esnek topoloji elde ederiz:

$\tau = \{f_A \in \mathcal{F}(X,E) : c(f_A) = f_A\}$

Bu τ bulanık esnek topolojisi ile her $f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $\overline{f_A} = c(f_A)$ sağlanır.

İspat: Açıkır.

Not: Teorem 3.2.13' de tanımlanan c dönüşümüne bulanık esnek kapanış operatörü denir. Teorem 3.2.8 (1), (2), (3), (6) ve Teorem 3.2.13' den bir bulanık esnek kapanış operatörüden bulanık esnek topoloji elde edildiği ve tersine verilen bir bulanık esnek topolojiden bir bulanık esnek kapanış operatörü elde edilebildiği görülür.

3.3. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Komşuluk Yapıları

Bu bölümde, bulanık esnek topolojik uzaylarda komşuluk yapısını kurmak için öncelikle bulanık noktanın bir genelleştirmesi olarak bulanık esnek nokta kavramı verilmiştir. Bir bulanık esnek noktanın bir bulanık esnek kümeye ait olması tanımı verilip ait olmanın bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, bulanık esnek noktanın klasik komşuluk ve Q-komşuluk yapısı incelenmiş ve bu komşuluk sistemleri kullanılarak bulanık esnek topoloji elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1: $f_A \in F(X,E)$ ve $\lambda: E \to I$ dönüşümüA' da sıfırdan farklı, $X\backslash A$' da sıfır olan bir dönüşüm olsun.

f_A g-be kümesine bulanık esnek nokta denir $:\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $f_A(e) = x_{\lambda(e)}$' dir. Burada $e \in A$ için $f_A(e) = x_{\lambda(e)}$ bir bulanık nokta ve $e \in X\backslash A$ için $\lambda(e) = 0$ olduğundan $f_A(e)$ boş bulanık kümedir.

$f_A(e)(y) = \begin{cases} \lambda(e), & x = y \\ 0\,, & x \neq \mathrm{y} \end{cases}$ olduğu açıktır.

Bulanık esnek nokta x_A^λ ile gösterilir. x_E^λ mutlak bulanık esnek nokta olarak adlandırılır. (x, A) çiftine de bulanık esnek noktanın desteği denir. Bir bulanık esnek nokta, bulanık noktanın parametrelerle ifade edilen bir ailesi olarak göz önüne alınabilir.

X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların kümesi $\mathcal{P}(X, E)$ ile gösterilecektir.

x_A^λ , y_B^μ bulanık esnek noktalarına ayrıktır denir $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ veya destekleri ayrıktır.

$\mathrm{x}_\mathrm{A}^\lambda$ bulanık esnek noktası g_B g-be kümesine aittir denir $:\Leftrightarrow x_A^\lambda \sqsubseteq g_B$' dir. Diğer bir ifadeyle, her $e \in A \subset B$ için $x_{\lambda(e)} \in g_B(e)$' dir.

Ait olma $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B$ ile gösterilir. $x \in X$ için $\lambda(e) \leq g_B(e)(x)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2: $g_B \in \mathcal{F}(X, E)$ olsun. g_B, tüm bulanık esnek noktalarının birleşimine eşittir. Diğer bir ifadeyle, $g_B = \sqcup_{x_A^\lambda \tilde{\in} g_B} x_A^\lambda$ dır.

İspat: $g_B = \tilde{0}_E$ ise ispat açıktır. $g_B \neq \tilde{0}_E$ olsun. $y \in X$ alalım. Her $e \in A \subseteq B$ için

$$\left(\left(\sqcup_{x_A^\lambda \tilde{\in} g_B} x_A^\lambda\right)(e)\right)(y) = \bigvee_{x_{\lambda(e)} \in g_B(e)} x_{\lambda(e)}(y) = sup\{x_{\lambda(e)}(y) : g_B(e)(x) \geq \lambda(e)\}$$

$$= sup\left\{\begin{cases} \lambda(e), & x = y \\ 0\,, & x \neq \mathrm{y} \end{cases} : g_B(e)(x) \geq \lambda(e)\right\}$$

$$= g_B(e)(y) \text{ dir.}$$

Önerme 3.3.3: $\mathcal{F}(X, E)$ ve $\mathcal{F}(Y, K)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm g-be kümelerin ailesi olsun. (φ, ψ), X' den Y' ye bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X, E)$ ise, $(\varphi, \psi)(x_A^\lambda) \in P(Y, K)$ ve $(\varphi, \psi)(x_A^\lambda) = x_{\psi(A)}^{\varphi(x_\lambda)} = x_{\psi(A)}^{\varphi(x)_\lambda}$, dir.

(2) $g_B \in \mathcal{F}(X, E)$ olmak üzere $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B$ ise, $(\varphi, \psi)(x_A^\lambda) \,\tilde{\in}\, (\varphi, \psi)(g_B)$' dir.

(3) $h_C \in \mathcal{F}(Y,K)$ olmak üzere $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, (\varphi,\psi)^{-1}(h_C)$ ise, $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda) \,\tilde{\in}\, h_C$' dir.

(4) $x_{A_1}^\lambda \,\tilde{\in}\, y_{A_2}^\beta \;\Leftrightarrow x = y$ ve $\lambda(e) \le \beta(e)\,, \forall e \in A_1$.

İspat: (1) Her $k \in \psi(e)$ ve $y \in Y$ için

$$\varphi(x_A^\lambda)(k)(y) = \begin{cases} \bigvee_{\varphi(z)=y} \bigvee_{\psi(e)=k} x_{\lambda(e)}(z)\,, & z \in \varphi^{-1}(y) \\ 0\,, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda(e)\,, & y = \varphi(x), \psi(e) \in \psi(A) \\ 0\,, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$= x_{\psi(A)}^{\varphi(x)_\lambda}(k)(y)$$

$$= x_{\psi(A)}^{\varphi(x_\lambda)}(k)(y)$$

Böylece, $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda) = x_{\psi(A)}^{\varphi(x_\lambda)}(k)(y)$ elde edilir.

(2) $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B$ olsun. Buradan, her $e \in A \subseteq B$ için $x_{\lambda(e)} \in g_B(e)$ ve $x \in X$ için

$\lambda(e) \le g_B(e)(x)$ olur.

$\lambda(e) \le g_B(e)(x) \le \bigvee_{\varphi(x)=\varphi(z)} \bigvee_{\psi(e)=k} g_B(e)(z)$

$$= \varphi(g_B(e))(\varphi(x))$$

$$= \varphi(g_B)\psi(e)\varphi(x), \forall e \in A \subseteq B.$$

Böylece, $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda) \,\tilde{\in}\, (\varphi,\psi)(g_B)$ dir.

(3) $(\varphi,\psi)((\varphi,\psi)^{-1}(h_C)) \sqsubseteq h_C$ olduğundan ve (2)' den $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda) \,\tilde{\in}\, h_C$ elde edilir.

(4) $x_{A_1}^\lambda \,\tilde{\in}\, y_{A_2}^\beta$ olsun. Buradan, her $e \in A_1 \subseteq A_2$ için $x_{\lambda(e)} \in y_{\beta(e)}$ olur. Bulanık esnek nokta tanımından $0 < \lambda(e) \le \beta(e)$ elde edilir ve $y_{A_2}^\beta$ bir bulanık esnek nokta olduğundan $y = x$ olmalıdır.

Tersine, $x = y$ ve $\lambda(e) \le \beta(e)$ olsun. Buradan, $x_{\lambda(e)} \le y_{\beta(e)}$ ve böylece $x_{A_1}^\lambda \,\tilde{\in}\, y_{A_2}^\beta$ olur.

Önerme 3.3.4: $x_A^\lambda , x_B^\mu \in \mathcal{P}(X,E)$ olsun. Bu takdirde, $x_A^\lambda \sqcup x_B^\mu = x_{A\cup B}^{\lambda\vee\mu}$ olur.

İspat: Açıktır.

Önerme 3.3.5: $\{(g_B)_i : i \in J\} \subset \mathcal{F}(X,E)$ ve $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ olsun. $x_A^\lambda \,\tilde{\in} \sqcap_{i\in J}\,(g_B)_i$ ise, her $i \in J$ için $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, (g_B)_i$' dir.

İspat: $x_A^\lambda \,\tilde{\in} \sqcap_{i\in J}\,(g_B)_i$ olsun. Buradan, her $e \in A \subseteq B_i$ için $x_{\lambda(e)} \in \bigwedge_{i\in J}\,(g_B)_i(e)$ ve $x \in X$ için $\lambda(e) \le \bigwedge_{i\in J}\,(g_B)_i(e)\,(x) \le\, (g_B)_i(e)(x)$ olur. Böylece, her $i \in J$ için

$x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, (g_B)_i$ elde edilir.

Örnek 3.3.6: $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B \sqcup h_C$ olması $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B$ veya $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, h_C$ olmasını gerektirmez. Örneğin, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. g_B, h_C kümelerini ve x_E^λ bulanık esnek noktasını aşağıdaki şekilde ele alalım:

$$g_B(e_1) = \left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0}\right\},\ g_B(e_2) = \left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_4}{0}\right\}, g_B(e_3) = \left\{\frac{x_1}{0}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_4}{1}\right\}$$

$$h_C(e_1) = \left\{\frac{x_1}{0}, \frac{x_2}{0}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_4}{1}\right\},\ h_C(e_2) = \left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{1}, \frac{x_4}{1}\right\}, h_C(e_3) = \left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0}\right\}$$

Buradan, $g_B \sqcup h_C = \tilde{1}_E$ ve $x_E^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B \sqcup h_C$ olur, fakat $x_E^\lambda \,\tilde{\notin}\, g_B$ ve $x_E^\lambda \,\tilde{\notin}\, h_C$' dir.

Teorem 3.3.7: $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ ve $g_B, h_C \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. Eğer $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B \sqcup h_C$ ise,

$x_A^\lambda = x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2}$ olacak şekilde $x_{A_1}^{\lambda_1} \,\tilde{\in}\, g_B$ ve $x_{A_2}^{\lambda_2} \,\tilde{\in}\, h_C$' dir.

İspat: $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, g_B \sqcup h_C$ olsun. Buradan, her $e \in A \subseteq B \cup C$ için

$x_{\lambda(e)} \in g_B(e) \vee h_C(e)$ ve $x \in X$ için $\lambda(e) \le g_B(e)(x) \vee h_C(e)(x)$' dir.

Buradan, bazı $e \in A$ için $\lambda(e) \le g_B(e)(x)$ ve bazı $e \in A$ için $\lambda(e) \le h_C(e)(x)$ olur.

$A_1 = \{e \in A : \lambda(e) \le g_B(e)(x)\} \cap B$, $A_2 = \{e \in A : \lambda(e) \le h_C(e)(x)\} \cap C$ ve

$$\lambda_1 : E \to I\,, \lambda_1(e) = \begin{cases} \lambda(e)\,, & e \in A_1 \\ 0\,, & e \notin A_1 \end{cases}\quad,\quad \lambda_2 : E \to I\,,\ \lambda_2(e) = \begin{cases} \lambda(e)\,, & e \in A_2 \\ 0\,, & e \notin A_2 \end{cases}$$

olarak seçelim.

Her $e \in A_1$ için $\lambda_1(e) \leq g_B(e)(x)$ olduğundan $x_{A_1}^{\lambda_1} \tilde{\in} g_B$ olur.

Her $e \in A_2$ için $\lambda_2(e) \leq h_C(e)(x)$ olduğundan $x_{A_2}^{\lambda_2} \tilde{\in} h_C$ olur.

Sonuç olarak, $A_1 \cup A_2 = A$ ve $x_A^{\lambda} = x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2}$' dir.

Tanım 3.3.8: $x_A^{\lambda} \in \mathcal{P}(X,E)$, $g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ ve (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay olsun. Eğer $x_A^{\lambda} \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $h_C \in \tau$ varsa, bu g_B g-be kümesine x_A^{λ} bulanık esnek noktasının komşuluğu denir.

g_B açık g-be küme ise, x_A^{λ}' nın açık komşuluğu denir.

x_A^{λ} bulanık esnek noktasının τ bulanık esnek topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan ailesi $\mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$, veya topolojiyi belirtmenin gerek olmadığı durumlarda $\mathcal{U}(x_A^{\lambda})$ ile gösterilir ve buna x_A^{λ}' nın komşuluk sistemi denir.

Bir bulanık esnek topolojik uzayda, bir bulanık esnek noktayı içeren her açık g-be küme o bulanık esnek noktanın bir komşuluğudur. Diğer yandan her komşuluk bir açık g-be küme içerdiğinden, bir bulanık esnek noktanın bütün komşulukları yerine sadece açık komşuluklarını ele almak yeterlidir.

Tanım 3.3.9: $x_A^{\lambda} \in \mathcal{P}(X,E)$ ve $\varepsilon: E \to I$ bir dönüşüm olsun. ε, her $e \in E$ için $0 \leq \varepsilon(e) \leq \lambda(e)$ şartını sağlıyorsa ε' a λ ile uyumludur denir.

Teorem 3.3.10**:** (X,τ) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $x_A^{\lambda} \in \mathcal{P}(X,E)$ ise, $\mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(N1) $\tilde{1}_E \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ dir ve $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ ise, $x_A^{\lambda} \tilde{\in} g_B$ dir.

(N2) $g_B, h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ ise, $g_B \sqcap h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ dir.

(N3) $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ ve $g_B \sqsubseteq h_C$ ise, $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ dır.

(N4) λ ile uyumlu her ε için $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda-\varepsilon})$ ise, $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda})$ dır.

(N5) $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_1}^{\lambda_1})$ ve $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_2}^{\lambda_2})$ ise, $g_B \sqcup h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2})$ dır.

(N6) $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ ise, öyle bir $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ vardır ki, her $y_D^\mu \,\tilde{\in}\, h_C$ için $h_C \sqsubseteq g_B$ ve $h_C \in \mathcal{U}_\tau(y_D^\mu)$ dır.

Tersine olarak, her x_A^λ bulanık esnek noktası için bir $\mathcal{U}(x_A^\lambda) \subset \mathcal{P}(X,E)$ ailesi (N1)-(N6) koşullarını sağlasın. Bu durumda X üzerinde öyle bir

$\tau = \{g_B \in \mathcal{F}(X,E) : g_B \in \mathcal{U}(y_D^\mu), \forall\, y_D^\mu \,\tilde{\in}\, g_B\}$ bulanık esnek topolojisi vardır ki, her x_A^λ için bu $\mathcal{U}(x_A^\lambda)$ ailesi, o bulanık esnek topoloji için x_A^λ bulanık esnek noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur.

İspat: (N1)-(N3) özellikleri komşuluk tanımından kolaylıkla elde edilir.

(N4) λ ile uyumlu her ε için $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^{\lambda-\varepsilon})$ olsun. Komşuluk tanımından, $x_A^{\lambda-\varepsilon} \,\tilde{\in}\, (h_C)_\varepsilon \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $(h_C)_\varepsilon \in \tau$ vardır. $h_C := \sqcup_\varepsilon (h_C)_\varepsilon$ olarak alalım. Buradan, $h_C \in \tau$ ve $h_C \sqsubseteq g_B$ sağlanır. Teorem 3.3.7' den ve tüm uyumlu $\varepsilon(e) > 0$ için $sup_{\varepsilon(e)}\{\lambda(e) - \varepsilon(e)\} = \lambda(e)$ olduğundan,

$\sqcup_\varepsilon x_A^{\lambda-\varepsilon} = x_A^\lambda \sqsubseteq \sqcup_\varepsilon (h_C)_\varepsilon = h_C \sqsubseteq g_B$ elde edilir. Böylece, $x_A^\lambda \,\tilde{\in}\, h_C \sqsubseteq g_B$ olur, diğer bir ifadeyle $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ dır.

(N5) $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_1}^{\lambda_1})$ ve $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_2}^{\lambda_2})$ olsun. Komşuluk tanımından, $x_{A_1}^{\lambda_1} \,\tilde{\in}\, k_{D_1} \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $k_{D_1} \in \tau$ ve $x_{A_2}^{\lambda_2} \,\tilde{\in}\, k_{D_2} \sqsubseteq h_C$ olacak şekilde bir $k_{D_2} \in \tau$ vardır.

$x_{A_1}^{\lambda_1} \,\tilde{\in}\, k_{D_1}$ olduğundan her $e \in A_1 \subseteq D_1$ için $x_{\lambda_1(e)} \in k_{D_1}(e)$ ve $x \in X$ için

$k_{D_1}(e)(x) \geq \lambda_1(e)$ olur.

$x_{A_2}^{\lambda_2} \,\tilde{\in}\, k_{D_2}$ olduğundan her $e \in A_2 \subseteq D_2$ için $x_{\lambda_2(e)} \in k_{D_2}(e)$ ve $x \in X$ için $k_{D_2}(e)(x) \geq \lambda_2(e)$ olur.

Buradan, her $e \in A_1 \cup A_2 \subseteq D_1 \cup D_2$ ve $x \in X$ için

$k_{D_1}(e)(x) \vee k_{D_2}(e)(x) \geq \lambda_1 \vee \lambda_2$ elde ederiz.

Böylece, $x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2} = x_{A_1 \cup A_2}^{\lambda_1 \vee \lambda_2} \,\tilde{\in}\, k_{D_1} \sqcup k_{D_2}$, $k_{D_1} \sqcup k_{D_2} \in \tau$ ve $k_{D_1} \sqcup k_{D_2} \sqsubseteq g_B \sqcup h_C$

olur. Sonuç olarak, $g_B \sqcup h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2})$ dir.

(N6) $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ alalım. Komşuluk tanımından, $x_A^\lambda \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $h_C \in \tau$ vardır. $h_C \in \tau$ olduğundan her y_D^μ bulanık esnek noktası için $h_C \in \mathcal{U}_\tau(y_D^\mu)$ olur. Aynı zamanda, $x_A^\lambda \tilde{\in} h_C$ olduğundan $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ dır. Böylece, $g_B \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ olduğundan $h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde $h_C \in \mathcal{U}_\tau(x_A^\lambda)$ ve her y_D^μ bulanık esnek noktası için $h_C \in \mathcal{U}_\tau(y_D^\mu)$ olur.

Teoremin ikinci kısmını göstermek için, her x_A^λ bulanık esnek noktası için (N1)-(N6) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{U}(x_A^\lambda) \subset \mathcal{P}(X,E)$ ailesinin verildiğini kabul edelim. Buna göre, $\tau := \{g_B \in \mathcal{F}(X,E) : g_B \in \mathcal{U}(y_D^\mu), \forall\, y_D^\mu \tilde{\in} g_B\}$ ailesinin istenen özelliği sağlayan bulanık esnek topoloji olduğunu gösterilebilir:

(T1) $\tilde{0}_E \in \tau$ olduğu açıktır. (N1)' den $\tilde{1}_E \in \tau$ elde edilir.

(T2) $g_B, h_C \in \tau$ ve $y_D^\mu \tilde{\in} (g_B \sqcap h_C)$ alalım. Önerme 3.3.5' den ve τ' nun tanımından

$g_B, h_C \in \mathcal{U}(y_D^\mu)$ olur. (N2)' ye göre $g_B \sqcap h_C \in \mathcal{U}(y_D^\mu)$ olduğundan $g_B \sqcap h_C \in \tau$ bulunur.

(T3) Her $i \in J$ için $(g_B)_i \in \tau$ olmak üzere $g_B := \sqcup_{i\in J} (g_B)_i$ ve $y_D^\mu \tilde{\in} g_B$ olsun. $x \in X$ ve her $e \in \bigcup_{i\in J} B_i$ için $\bigvee_{i\in J}(g_B)_i(e)(x) = \lambda(e)$ olarak alalım. $\lambda: E \to I$ bir dönüşüm ve $B = \bigcup_{i\in J} B_i$ olmak üzere $x_A^\lambda \in g_B$ olsun. λ ile uyumlu bir ε seçelim. $x_A^{\lambda-\varepsilon}$ bulanık esnek noktası ve $e \in E$ için $(g_B)_{i_e}(e)(x) > \lambda(e) - \varepsilon(e)$ olacak şekilde $i_e \in J$ vardır. Buradan, $x_A^{\lambda-\varepsilon} \tilde{\in} \sqcup_{i_e\in J} (g_B)_{i_e}$ olduğunu söyleriz. $h_C := \sqcup_{i_e\in J} (g_B)_{i_e}$ ve $y_D^\mu \tilde{\in} h_C$ olarak alalım. Böylece, $\mu(e) \le sup(g_B)_{i_e}(e)(y)$ ve buradan her $\gamma(e) > 0$ için

$\mu(e) - \gamma(e) < (g_B)_{i_{e_0}}(e)(y)$ olacak şekilde en az bir $i_{e_0} \in J$ vardır. Genelliği bozmadan, $\mu(e) - \gamma(e) < (g_B)_{i_e}(e)(y)$ alalım.

$\bar{\mu}(k) = \begin{cases} \mu(e), & k = e \in E \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ olmak üzere $y_D^{\bar{\mu}-\gamma} \tilde{\in} (g_B)_{i_e}$ olur. (N5)' e göre

$\sqcup_{e\in E}\, y_D^{\bar{\mu}(e)-\gamma(e)} \tilde{\in} \sqcup_{i_e\in J} (g_B)_{i_e}$ dir ve böylece $\vee\, \bar{\mu} = \mu$ olduğundan

$\sqcup_{i_e \in J} (g_B)_{i_e} \in \mathcal{U}(y_D^{\mu-\gamma})$ elde edilir. (N4)' den $\sqcup_{i_e \in J} (g_B)_{i_e} \in \mathcal{U}(y_D^{\mu})$ olur.

Her $y_D^{\mu} \tilde{\in} h_C$ için $h_C \in \mathcal{U}(y_D^{\mu})$ olacak şekilde h_C vardır ve $x_A^{\lambda-\varepsilon}$ için $x_A^{\lambda-\varepsilon} \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olur. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $g_B \in \mathcal{U}(x_A^{\lambda-\varepsilon})$ ve tekrar (N4)' den $\sqcup_{i \in J} (g_B)_i \in \mathcal{U}(x_A^{\lambda})$ olur. Sonuç olarak τ, X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir ve $\mathcal{U}(x_A^{\lambda})$ ailesi x_A^{λ} bulanık esnek noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur.

Tanım 3.3.11: (X, τ) bulanık esnek topolojik uzay ve $g_B \in \tau$ olsun. Eğer

$x_A^{\lambda} \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir h_C açık g-be kümesi varsa, x_A^{λ} bulanık esnek noktasına g_B' nin bir iç noktası denir.

g_B' nin tüm iç noktalarının birleşimine g_B' nin içi denir ve $(g_B)^o$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.12: (X, τ) bulanık esnek topolojik uzay ve $g_B \in \mathcal{F}(X, E)$ olsun. $(g_B)^o$ açıktır ve g_B' de içerilen en büyük açık g-be kümedir. g_B açıktır $\Leftrightarrow g_B = (g_B)^o$ dir.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.3.13: x_A^{λ} bulanık esnek noktasına g_B ile q-çakışımsıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her $e \in A \subseteq B$ için $x_{\lambda(e)} q g_B(e)$' dir.

Diğer bir ifadeyle, $x \in X$ için $\lambda(e) > 1 - g_B(e)(x)$ dir.

x_A^{λ} bulanık esnek noktasının g_B ile q-çakışımsı olması $x_A^{\lambda} \tilde{q} g_B$ ile gösterilir.

$f_A , g_B \in \mathcal{F}(X, E)$ olmak üzere f_A' ya g_B ile q-çakışımsıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her $e \in A \subseteq B$ için $f_A(e) q g_B(e)$' dir.

Diğer bir ifadeyle, $x \in X$ için $f_A(e)(x) + g_B(e)(x) > 1$ dir.

f_A' nın g_B ile q-çakışımsı olması $f_A \tilde{q} g_B$ ile gösterilir.

Önerme 3.3.14: (1) $g_B \sqsubseteq h_C \Leftrightarrow g_B, (h_C)^c$ ile q-çakışımsı değildir.

(2) $x_A^{\lambda} \tilde{\in} g_B \Leftrightarrow x_A^{\lambda} , (g_B)^c$ ile q-çakışımsı değildir.

Önerme 3.3.15: $\{(g_B)_i : i \in J\} \subset \mathcal{F}(X,E)$ ve $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ olsun. $x_A^\lambda \tilde{q} \sqcap_{i\in J} (g_B)_i$ ise, her $i \in J$ için $x_A^\lambda \tilde{q}(g_B)_i$' dir.

İspat: $x_A^\lambda \tilde{q} \sqcap_{i\in J} (g_B)_i$ olsun. Buradan, her $e \in A \subseteq B_i$ için $x_{\lambda(e)} q \bigwedge_{i\in J} (g_B)_i(e)$ ve $x \in X$ için $\lambda(e) > 1 - \bigwedge_{i\in J} (g_B)_i(e)(x)$ olur. $\bigwedge_{i\in J} (g_B)_i(e)(x) \leq (g_B)_i(e)(x)$ olduğundan, her $e \in A \subseteq B_i$ ve $x \in X$ için

$\lambda(e) > 1 - \bigwedge_{i\in J} (g_B)_i(e)(x) > 1 - (g_B)_i(e)(x)$ elde edilir. Böylece,

$\lambda(e) > 1 - (g_B)_i(e)(x)$ dir ve her $i \in J$ için $x_A^\lambda \tilde{q}(g_B)_i$ olur.

Uyarı: $x_A^\lambda \tilde{q} g_B \sqcup h_C$ olması $x_A^\lambda \tilde{q} g_B$ veya $x_A^\lambda \tilde{q} h_C$ olmasını gerektirmez. Örneğin, Örnek 3.3.6' yı ele alalım. Bu örnekte $g_B \sqcup h_C = \tilde{1}_E$ ve $x_E^\lambda \tilde{q}(g_B \sqcup h_C)$ dir, fakat x_E^λ , g_B ve h_C ile q-çakışımsı değildir.

Teorem 3.3.16: $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ ve $g_B, h_C \in \mathcal{F}(X,E)$ olsun. Eğer $x_A^\lambda \tilde{q}(g_B \sqcup h_C)$ ise,

$x_A^\lambda = x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2}$ olacak şekilde $x_{A_1}^{\lambda_1} \tilde{q} g_B$ ve $x_{A_2}^{\lambda_2} \tilde{q} h_C$' dir.

İspat: Teorem 3.3.7' nin ispatına benzer olarak yapılır.

Tanım 3.3.17: $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$, $g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ ve (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay olsun. Eğer $x_A^\lambda \tilde{q} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $h_C \in \tau$ varsa, bu g_B g-be kümesine x_A^λ bulanık esnek noktasının bir Q-komşuluğu denir.

x_A^λ bulanık esnek noktasının τ bulanık esnek topolojisine göre tüm Q-komşuluklarından oluşan ailesi $\mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ile gösterilir ve buna x_A^λ' nın Q-komşuluk sistemi denir.

Örnek 3.3.18: Bir bulanık esnek noktanın Q-komşuluğu, noktanın kendisini içermeyebilir. Örneğin, $E = \{e_1\}, X = \{x_1\}$ olsun.

$g_B(e_1) = \left\{\frac{x_1}{0.5}\right\}$ ve $\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g_B\}$ olarak tanımlayalım. Bu taktirde, (X,τ) bir bulanık esnek topolojik uzaydır.

$h_C(e_1) = \left\{\frac{x_1}{0.6}\right\}$ ve $x_{\lambda(e_1)} = \left\{\frac{x_1}{0.7}\right\}$ olarak tanımlayalım. $g_B \sqsubseteq h_C$ ve $x_A^\lambda \tilde{q} g_B$ olduğundan

$h_C \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ elde edilir. Fakat, $0.7 > 0.6$ olduğundan $x_A^\lambda \,\widetilde{\notin}\, h_C$ dir.

Teorem 3.3.19: (X, τ) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X, E)$ ise, $\mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ Q-komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(Q1) $\tilde{1}_E \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ dir ve $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ise, $x_A^\lambda \tilde{q} g_B$ dir.

(Q2) $g_B, h_C \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ise, $g_B \sqcap h_C \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ dir.

(Q3) $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ve $g_B \sqsubseteq h_C$ ise, $h_C \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ dır.

(Q4) $g_B \in \mathcal{Q}(x_{A_1}^{\lambda_1})$ ve $h_C \in \mathcal{Q}(x_{A_2}^{\lambda_2})$ ise, $g_B \sqcup h_C \in \mathcal{Q}(x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2})$ dır.

(Q5) $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ise, öyle bir $h_C \in \mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ vardır ki, her $y_D^\mu \tilde{q} h_C$ için $h_C \sqsubseteq g_B$ ve $h_C \in \mathcal{Q}(y_D^\mu)$ dır.

Tersine olarak, her x_A^λ bulanık esnek noktası için bir $\mathcal{Q}(x_A^\lambda) \subset \mathcal{P}(X, E)$ ailesi (Q1)-(Q5) koşullarını sağlasın. Bu durumda X üzerinde öyle bir

$\tau = \{ g_B \in \mathcal{F}(X, E) : g_B \in \mathcal{Q}(y_D^\mu), \forall\, y_D^\mu \tilde{q} g_B \}$ bulanık esnek topolojisi vardır ki, her x_A^λ için bu $\mathcal{Q}(x_A^\lambda)$ ailesi, o bulanık esnek topoloji için x_A^λ bulanık esnek noktasındaki Q-komşuluk ailesini oluşturur.

İspat: (Q1)-(Q3) özellikleri kolaylıkla elde edilir.

(Q4) $g_B \in \mathcal{Q}(x_{A_1}^{\lambda_1})$ ve $h_C \in \mathcal{Q}(x_{A_2}^{\lambda_2})$ alalım. Q-komşuluk tanımından, $x_{A_1}^{\lambda_1} \tilde{q} k_{D_1} \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $k_{D_1} \in \tau$ ve $x_{A_2}^{\lambda_2} \tilde{q} k_{D_2} \sqsubseteq h_C$ olacak şekilde bir $k_{D_2} \in \tau$ vardır.

$x_{A_1}^{\lambda_1} \tilde{q} k_{D_1}$ olduğundan her $e \in A_1 \subseteq D_1$ için $x_{\lambda_1(e)} q k_{D_1}(e)$ ve $x \in X$ için

$\lambda_1(e) > 1 - k_{D_1}(e)(x)$ olur.

$x_{A_2}^{\lambda_2} \tilde{q} k_{D_2}$ olduğundan her $e \in A_2 \subseteq D_2$ için $x_{\lambda_2(e)} q k_{D_2}(e)$ ve $x \in X$ için

$\lambda_2(e) > 1 - k_{D_2}(e)(x)$ olur.

Buradan, her $e \in A_1 \cup A_2 \subseteq D_1 \cup D_2$ ve $x \in X$ için

$\lambda_1 \vee \lambda_2 \geq \lambda_1(e) \wedge \lambda_2(e) > (1 - k_{D_1}(e)(x)) \wedge (1 - k_{D_2}(e)(x))$ elde ederiz. Böylece, $x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2} \tilde{q} k_{D_1} \sqcup k_{D_2}$, $k_{D_1} \sqcup k_{D_2} \in \tau$ ve $k_{D_1} \sqcup k_{D_2} \sqsubseteq g_B \sqcup h_C$ dir. Sonuç olarak, $g_B \sqcup h_C \in \mathcal{Q}(x_{A_1}^{\lambda_1} \sqcup x_{A_2}^{\lambda_2})$ elde ederiz.

(Q5) $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ alalım. Q-komşuluk tanımından, $x_A^{\lambda} \tilde{q} k_G \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $k_G \in \tau$ vardır. $h_C \coloneqq k_G$ olarak alabiliriz. Gerçekten, $x_A^{\lambda} \tilde{q} k_G$ ve $k_G \in \tau$ olduğundan $k_G \in \mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ olur ve her $y_D^{\mu} \tilde{q} k_G$ için $k_G \in \mathcal{Q}(y_D^{\mu})$ elde ederiz.

Teoremin ikinci kısmını göstermek için, her x_A^{λ} bulanık esnek noktası için (Q1)-(Q5) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{Q}(x_A^{\lambda}) \subset \mathcal{P}(X, E)$ ailesinin verildiğini kabul edelim. Buna göre, $\tau \coloneqq \{ g_B \in \mathcal{F}(X, E) : g_B \in \mathcal{Q}(y_D^{\mu}), \forall\, y_D^{\mu} \tilde{q} g_B \}$ ailesinin istenen özelliği sağlayan bulanık esnek topoloji olduğunu gösterilebilir:

(T1) $\tilde{0}_E \in \tau$ olduğu açıktır. (Q1)' den $\tilde{1}_E \in \tau$ elde edilir.

(T2) $g_B, h_C \in \tau$ ve $x_A^{\lambda} \tilde{q} (g_B \sqcap h_C)$ alalım. Önerme 3.3.15' den $x_A^{\lambda} \tilde{q} g_B$ ve $x_A^{\lambda} \tilde{q} h_C$ dir.

$g_B, h_C \in \tau$ olduğundan, her $x_A^{\lambda} \tilde{q} g_B$ için $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ ve her $x_A^{\lambda} \tilde{q} h_C$ için $h_C \in \mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ olur. (Q2)' ye göre $g_B \sqcap h_C \in \mathcal{Q}(y_D^{\mu})$ olduğundan $g_B \sqcap h_C \in \tau$ bulunur.

(T3) Her $i \in J$ için $(g_B)_i \in \tau$ olmak üzere $g_B \coloneqq \sqcup_{i \in J} (g_B)_i$ ve $x_A^{\lambda} \tilde{q} g_B$ olarak alalım.

$x_A^{\lambda} \tilde{q} g_B$ olduğundan, her $e \in A \subseteq B$ için $x_{\lambda(e)} q g_B(e)$ ve $x \in X$ için

$\lambda(e) + g_B(e)(x) > 1$ dir. Diğer bir ifadeyle $\lambda(e) + \bigvee_{i \in J} (g_B)_i\,(e)(x) > 1$ dir. Buradan, $x \in X$ için $\lambda(e) + (g_B)_{i_e}(e)(x) > 1$ olacak şekilde en az bir $i_e \in J$ var olduğunu söyleriz.

$h_C \coloneqq \sqcup_{i_e \in J} (g_B)_{i_e}$ ve $y_D^{\mu} \tilde{q} h_C$ olarak alalım. Her $k \in D \subseteq C$ ve $y \in X$ için $\mu(k) + h_C(k)(y) > 1$ olur. Böylece, $\mu(k) + (g_B)_{i_{e_k}}(k)(y) > 1$ olacak şekilde en az bir $i_{e_k} \in J$ vardır. Genelliği bozmadan, $\mu(k) + (g_B)_{i_e}(k)(y) > 1$ alalım.

$\bar{\mu}(e') = \begin{cases} \mu(e), & e' = e \in E \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ olmak üzere $y_D^{\bar{\mu}} \tilde{q} (g_B)_{i_e}$ ve $(g_B)_{i_e} \in \tau$ olduğundan $(g_B)_{i_e} \in \mathcal{Q}(y_D^{\bar{\mu}})$ olur.

(Q4)' den ve Teorem 3.3.16' dan $y_D^{\mu} = \sqcup_{e\in E}\, y_D^{\bar{\mu}}\tilde{q}\ \sqcup_{i_e\in J}\,(g_B)_{i_e} = h_C$ olur. Böylece, $\vee\,\bar{\mu} = \mu$ olduğundan $h_C = \sqcup_{i_e\in J}\,(g_B)_{i_e} \in \mathcal{Q}\big(y_D^{\mu}\big)$ elde edilir. Bu taktirde, her $y_D^{\mu}\tilde{q}h_C$ için $h_C \in \mathcal{Q}(y_D^{\mu})$ olacak şekilde h_C vardır ve x_A^{λ} için $x_A^{\lambda}\tilde{q}h_C$ ve $h_C \sqsubseteq g_B$ dir. Buradan, $g_B \in \mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ olur.

Sonuç olarak $\tau,\ X$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir ve $\mathcal{Q}(x_A^{\lambda})$ ailesi x_A^{λ} bulanık esnek noktasındaki Q-komşuluk ailesini oluşturur.

3.4. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar ve Çarpım Topolojisi

Bu bölümde, bulanık esnek dönüşümün sürekliliğini tanıtıp bulanık esnek süreklilik için bazı denklikler verilmiştir. Daha sonra, bulanık esnek çarpım topolojisi kavramı verilerek projeksiyon dönüşümlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.4.1: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki bulanık esnek topolojik uzay olsun.

(1) $(\varphi,\psi) : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bulanık esnek fonksiyonuna süreklidir denir $:\Leftrightarrow$ $\forall g_B\ \in \tau_2$ için $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \tau_1$ dir.
(2) $(\varphi,\psi) : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bulanık esnek fonksiyonuna açıktır denir : $\Leftrightarrow \forall\, f_A \in \tau_1$ için $(\varphi,\psi)(f_A) \in \tau_2$ dir.

Eğer $(\varphi,\psi) : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ ve $(\varphi',\psi') : (Y,\tau_2) \to (Z,\tau_3)$ sürekli ise

$(\varphi',\psi')\circ(\varphi,\psi)$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Gerçekten, her $e \in E$ için

$$\big((\varphi',\psi')\circ(\varphi,\psi)\big)^{-1}(f_A)(e) = (\varphi'\circ\varphi,\psi'\circ\psi)^{-1}(f_A)(e)$$

$$= (\varphi'\circ\varphi)^{-1}(f_A(\psi'(\psi(e))))$$

$$= (\varphi)^{-1}((\varphi')^{-1}(f_A(\psi'(\psi(e)))))$$

$$= (\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi',\psi')^{-1}(f_A)\big)(e)$$

Böylece, $\big((\varphi',\psi')\circ(\varphi,\psi)\big)^{-1}(f_A) = (\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi',\psi')^{-1}(f_A)\big)$ olur.

Örnek 3.4.2: Sabit bulanık esnek dönüşümlerin $(\varphi,\psi):(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$,

$\varphi(x)=y_0$, $\psi(e)=k_0$, $\forall x\in X,\forall e\in E$, sürekli olması gerekmez. Örneğin,

$X=Y=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ parametre kümesi için

$(\varphi,\psi):(X,\tau^0)\to(X,\tau^1)$ esnek dönüşümü her $x\in X$ için $\varphi(x)=x_1$ ve her $e\in E$ için $\psi(e)=e_1$ şeklinde tanımlansın.

$A=\{e_1,e_2\}$ olmak üzere $f_A(e_1)=\left\{\frac{x_1}{0.2},\frac{x_2}{0.5},\frac{x_3}{0}\right\}$, $f_A(e_2)=\left\{\frac{x_1}{0.6},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0}\right\}$,

$f_A(e_3)=\left\{\frac{x_1}{0},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0}\right\}$ olarak verilsin.

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_1)(x_1)=f_A\big(\psi(e_1)\big)\big(\varphi(x_1)\big)=f_A(e_1)(x_1)=0.2$ ve benzer şekilde,

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_1)(x_2)=(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_1)(x_3)=0.2$.

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_2)(x_1)=f_A\big(\psi(e_2)\big)\big(\varphi(x_1)\big)=f_A(e_1)(x_1)=0.2$ ve benzer şekilde,

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_2)(x_2)=(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_2)(x_3)=0.2$.

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_3)(x_1)=f_A\big(\psi(e_3)\big)\big(\varphi(x_1)\big)=f_A(e_1)(x_1)=0.2$ ve benzer şekilde,

$(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_3)(x_2)=(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)(e_3)(x_3)=0.2$ olur.

Bu taktirde, $f_A\in\tau^1$ iken $(\varphi,\psi)^{-1}(f_A)\notin\tau^0$ olur. Böylece, sabit (φ,ψ) dönüşümü sürekli değildir.

Teorem 3.4.3: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) Lowen anlamında iki bulanık esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde $(\varphi,\psi):(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$, $\varphi(x)=y_0$, $\psi(e)=k_0$ $\forall x\in X$,

$\forall e\in E$ sabit bulanık esnek dönüşümü süreklidir.

İspat: $g_B\in\tau_2$ ve her $e\in E$ için

$$(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)(e)(x)=g_B\big(\psi(e)\big)\big(\varphi(x)\big)$$

$$=\begin{cases}\alpha_X, & \psi(e)=k_0\in B \text{ ve } g_B(\psi(e))(y_0)\neq 0\\ 0_X, & \text{diğer}\end{cases}.$$

Buradan $\alpha = g_B\big(\psi(e)\big)(y_0)$ olmak üzere $k_0 \in B$ ise $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) = \tilde{\alpha}_E \in \tau_1$ ve $k_0 \notin B$ ise $\tilde{\alpha}_E \in \tau_1$ olur.

Teorem 3.4.4: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki bulanık esnek topolojik uzay ve

$(\varphi,\psi): (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir:

(1) (φ,ψ) süreklidir.

(2) $\forall g_B \in \mathcal{T}_2'$ için $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \mathcal{T}_1'$ dür.

(3) $\forall f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ için $(\varphi,\psi)\big(\overline{f_A}\big) \sqsubseteq \overline{(\varphi,\psi)(f_A)}$ dır.

(4) $\forall g_B \in \mathcal{F}(Y,K)$ için $\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)} \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(\overline{g_B})$ dır.

(5) $\forall g_B \in \mathcal{F}(Y,K)$ için $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B^o) \sqsubseteq ((\varphi,\psi)^{-1}(g_B))^o$ dir.

İspat: (1) ⇒ (2): Önerme 3.1.18 (9)' dan kolaylıkla görülür.

(2) ⇒ (3): $f_A \in \mathcal{F}(X,E)$ alalım.

$f_A \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi,\psi)(f_A)\big) \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big(\overline{(\varphi,\psi)(f_A)}\big) \in \mathcal{T}_1'$ ve buradan

$\overline{f_A} \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big(\overline{(\varphi,\psi)(f_A)}\big)$ olur. Önerme 3.1.18 (4)' den,

$(\varphi,\psi)\big(\overline{f_A}\big) \sqsubseteq (\varphi,\psi)(\varphi,\psi)^{-1}\big(\overline{(\varphi,\psi)(f_A)}\big) \sqsubseteq \overline{(\varphi,\psi)(f_A)}$ elde edilir.

(3) ⇒ (4): $g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ alalım. (3)' de f_A' nın yerine $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ yazarsak,

$(\varphi,\psi)\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)} \sqsubseteq \overline{(\varphi,\psi)((\varphi,\psi)^{-1}(g_B))} \sqsubseteq \overline{g_B}$ elde edilir Önerme 3.1.18 (3)' den, $\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)} \sqsubseteq (\varphi,\psi)(\varphi,\psi)^{-1}\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)} \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(\overline{g_B})$ olur.

(4)⇒ (5): $g_B \in \mathcal{F}(X,E)$ alalım. $\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B^c)} \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big(\overline{g_B^c}\big)$' dir.

Teorem 3.2.11' den ve Önerme 3.1.18 (9)' dan

$(((\varphi,\psi)^{-1}(g_B))^o)^c = \overline{(\varphi,\psi)^{-1}(g_B^c)} \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big(\overline{g_B^c}\big) = (\varphi,\psi)^{-1}(g_B^o)^c = ((\varphi,\psi)^{-1}(g_B^o))^c$ olur. Böylece, $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B^o) \sqsubseteq ((\varphi,\psi)^{-1}(g_B))^o$ elde edilir.

(5) ⇒ (1): $g_B \in \tau_2$ alalım. Bu taktirde, $g_B = g_B^o$' dir. Hipotezden,

$(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) = (\varphi,\psi)^{-1}(g_B^o) \sqsubseteq \left((\varphi,\psi)^{-1}(g_B)\right)^o \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ dir. Böylece,

$(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) = \left((\varphi,\psi)^{-1}(g_B)\right)^o$ olur. Buradan, $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ açıktır. Sonuç olarak, (φ,ψ) süreklidir.

Teorem 3.4.5: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki bulanık esnek topolojik uzay ve

$(\varphi,\psi): (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir:

(1) (φ,ψ) süreklidir.

(2) $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ için $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda)$ bulanık esnek noktasının her komşuluğunun (φ,ψ) altındaki ters görüntüsü x_A^λ' nın bir komşuluğudur.

(3) $x_A^\lambda \in \mathcal{P}(X,E)$ ve $(\varphi,\psi)(x_A^\lambda)$' nın her g_B komşuluğu için $(\varphi,\psi)(h_C) \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde x_A^λ' nın bir h_C komşuluğu vardır.

İspat: (1) ⇒ (2) $g_B \in \mathcal{U}_{\tau_2}\left((\varphi,\psi)\left(x_A^\lambda\right)\right)$ alalım. Komşuluk tanımından, $(\varphi,\psi)\left(x_A^\lambda\right) \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde $h_C \in \tau_2$ vardır. (φ,ψ) bulanık esnek dönüşümü sürekli olduğundan $(\varphi,\psi)^{-1}(h_C) \in \tau_1$ ve

$x_A^\lambda \tilde{\in} (\varphi,\psi)^{-1}(h_C) \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ olur.

(2) ⇒ (3) $g_B \in \mathcal{U}_{\tau_2}\left((\varphi,\psi)\left(x_A^\lambda\right)\right)$ olsun. Hipotezden, $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \mathcal{U}_{\tau_1}(x_A^\lambda)$ dır.

$h_C \coloneqq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \mathcal{U}_{\tau_1}(x_A^\lambda)$ olarak alalım.

Buradan, $(\varphi,\psi)(h_C) = (\varphi,\psi)\left((\varphi,\psi)^{-1}(g_B)\right) \sqsubseteq g_B$ elde edilir.

(3) ⇒ (1) $g_B \in \tau_2$ olsun. $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \tau_1$ olduğunu göstermeliyiz. $x_A^\lambda \tilde{\in} (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ alalım. Bu taktirde, $(\varphi,\psi)\left(x_A^\lambda\right) \tilde{\in} g_B$ ve $g_B \in \tau_2$ olduğundan $g_B \in \mathcal{U}_{\tau_2}\left((\varphi,\psi)\left(x_A^\lambda\right)\right)$ olur. Hipotezden, $(\varphi,\psi)(h_C) \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde

$h_C \in \mathcal{U}_{\tau_1}(x_A^\lambda)$ vardır. Böylece, $h_C \in \mathcal{U}_{\tau_1}(x_A^\lambda)$ için

$h_C \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}\big((\varphi,\psi)(h_C)\big) \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ dir. Sonuç olarak, $h_C \in \mathcal{U}_{\tau_1}(x_A^\lambda)$ için

$h_C \sqsubseteq (\varphi,\psi)^{-1}(g_B)$ ve $(\varphi,\psi)^{-1}(g_B) \in \tau_1$ elde edilir.

Tanım 3.4.6: (X,τ) bulanık esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesine τ için bir tabandır denir $:\Leftrightarrow \tau$' nun her elemanı $\mathcal{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılır.

Teorem 3.4.7: $(\varphi,\psi)\colon (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ bulanık esnek dönüşüm ve $\mathcal{B}$, τ^* için bir taban olsun. (φ,ψ) dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $f_A \in \mathcal{B}$ için $(\varphi,\psi)^{-1}(f_A) \in \tau$ dur.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.4.8: (X,τ) bir bulanık esnek topolojik uzay olsun. Eğer bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}(X,E)$ ailesinin tüm elemanlarının sonlu arakesitleri τ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$' ye τ için bir alt tabandır denir.

Teorem 3.4.9: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}(X,E)$ ve $\tilde{1}_E, \tilde{0}_E \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki τ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

J_i - keyfi, Δ – sonlu indeks kümesi için $\tau = \left\{\sqcup_{i\in \mathrm{J}} \left(\sqcap_{k\in\Delta_i} (f_A)_{i,k}\right) \mid (f_A)_{i,k} \in \mathcal{S}\right\}$.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.4.10: $\{(\varphi,\psi)_i\colon \mathcal{F}(X,E) \to (Y_i,\tau_i)\}_{i\in J}$ bulanık esnek dönüşümlerin ve $\{(Y_i,\tau_i)\}_{i\in J}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. X üzerinde

$\mathcal{S} = \{(\varphi,\psi)_i^{-1}(f_A) : F_A \in \tau_i, i \in \mathrm{J}\}$ alt tabanı yardımıyla üretilen τ bulanık esnek topolojisine $\{(\varphi,\psi)_i\}_{i\in \mathrm{J}}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç topolojisi denir.

Teorem 3.4.11: X üzerinde $\{(\varphi,\psi)_i\}_{i\in \mathrm{J}}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç bulanık esnek topolojisi τ, her $i \in \mathrm{J}$ için $(\varphi,\psi)_i$ bulanık esnek fonksiyonlarını sürekli yapan en kapa topolojidir.

İspat: Açıktır.

Tanım 3.4.12: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in \mathrm{J}}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. $p_{X_i}\colon \prod_{i\in \mathrm{J}} X_i \to X_i$ ve $q_{E_i}\colon \prod_{i\in \Delta} E_i \to E_i$ olmak üzere $X\left(=\prod_{i\in \mathrm{J}} X_i\right)$ üzerindeki $\left\{\left(p_{X_i}, q_{E_i}\right)_i\right\}_{i\in J}$ izdüşüm fonksiyonları yardımıyla üretilen başlangıç bulanık esnek topolojisine X üzerindeki bulanık esnek çarpım topolojisi denir.

Teorem 3.4.13: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in \mathrm{J}}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi ve τ, $X\left(=\prod_{i\in \mathrm{J}} X_i\right)$ üzerinde bulanık esnek çarpım topolojisi olsun. (Y,τ^*) bir bulanık esnek topolojik uzay ve $(\varphi,\psi)\colon (Y,\tau^*)\to(X,\tau)$ bulanık esnek dönüşüm olmak üzere (φ,ψ) süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i\in \mathrm{J}$ için $\left(p_{X_i}, q_{E_i}\right)\circ(\varphi,\psi)\colon (Y,\tau^*)\to(X_i,\tau_i)$ süreklidir.

İspat: Açıktır.

Sonuç 3.4.14: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in \mathrm{J}}, \{(Y_i,\tau_i^*)\}_{i\in \mathrm{J}}$ bulanık esnek topolojik uzayların ailesi ve $(X,\tau),(Y,\tau^*)$ sırasıyla bu uzayların bulanık esnek çarpım topolojik uzayları olsun. Her $i\in \mathrm{J}$ için $(\varphi,\psi)_i\colon (X_i,\tau_i)\to(Y_i,\tau_i^*)$ bulanık esnek dönüşüm olsun. Eğer $(\varphi,\psi)_i$ sürekli ise $x_i\to\varphi_i(x_i),\ e_i\to\psi(e_i)$ olmak üzere

$(\varphi,\psi)=\prod_{i\in \mathrm{J}}(\varphi,\psi)_i : (X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ çarpım dönüşümü süreklidir.

İspat: $x=x_i$, $e=e_i$ olmak üzere (φ,ψ) dönüşümü $x\to\varphi_i(p_{X_i}(x))$ ve

$e\to\psi_i(q_{E_i}(e))$ olarak yazılabilir ve bir önceki teoremden (φ,ψ) sürekli olur.

Teorem 3.4.15: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{n}, \{(Y_i,\tau_i^*)\}_{i=1}^{n}$ bulanık esnek topolojik uzayların ailesi ve $(X,\tau),(Y,\tau^*)$ sırasıyla bu uzayların bulanık esnek çarpım topolojik uzayları olsun. Her $i\in \mathrm{J}$ için $(\varphi,\psi)_i\colon (X_i,\tau_i)\to(Y_i,\tau_i^*)$ bulanık esnek dönüşüm olsun. Eğer her $i=\overline{1,n}$ için $(\varphi,\psi)_i$ açık ise

$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\left(\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_n(x_n)\right),\ \psi(e_1,\dots,e_n)=(\psi_1(e_1),\dots,\psi_n(e_n))$ olmak üzere $(\varphi,\psi)=\prod_{i\in \mathrm{J}}(\varphi,\psi)_i : (X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ dönüşümü açıktır.

İspat: $f_A\in\tau$ alalım. $i=1,2,\dots,n$ ve $j\in\Delta$ için $(f_A)_{i_j}\in\tau_i$ vardır öyle ki

$f_A=\sqcup_{j\in\Delta}\prod_{i=1}^{n}(f_{A_{i_j}})$ dir.

$$\varphi(f_A)(k)(y) = \varphi\left(\sqcup_{j\in\Delta} \prod_{i=1}^{n}\left(f_{A_{i_j}}\right)\right)(k)(y)$$

$$= \bigvee_{j\in\Delta} \bigvee_{\varphi(x)=y} \bigvee_{\psi(e)=k} \left(\sqcup_{j\in\Delta} \prod_{i=1}^{n}\left(f_{A_{i_j}}\right)\right)(e)(x)$$

$$= \bigvee_{j\in\Delta} \bigvee_{\varphi_1(x_1)=y_1} \bigvee_{\psi_1(e_1)=k_1} \dots \bigvee_{\varphi_n(x_n)=y_n} \bigvee_{\psi_n(e_n)=k_n} ((f_A)_{1_j}(e_1)(x_1) \wedge$$
$$\dots (f_A)_{n_j}(e_n)(x_n))$$

$$= \bigvee_{j\in\Delta}\left(\varphi_1(f_A)_1(k_1)(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi_n(f_A)_n(k_n)(y_n)\right)$$

$$= (\sqcup_{j\in\Delta} \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\,(f_A)_i)(k)(y)$$

Böylece, $(\varphi,\psi)(f_A) = \sqcup_{j\in\Delta} \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\,(f_A)_i$ dir. $(f_A)_{i_j} \in \tau_i$ ve $(\varphi,\psi)_i$ bulanık esnek açık olduğundan (φ,ψ) açık olur.

4. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARA FARKLI BİR YAKLAŞIM

4.1. Esnek Topolojik Uzaylar

Bu bölümde, bir esnek topoloji parametre kümesine göre açık olan ve $2^X \coloneqq \mathcal{P}(X)$ üzerinde bir esnek küme olarak göz önüne alınacaktır.

Tanım 4.1.1: X kümesi üzerinde E parametresine göre bir esnek topoloji her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_e \in 2^{2^X}$, X kümesi üzerinde bir klasik topoloji olmak üzere

$\mathcal{T}: E \to 2^{2^X}$ dönüşümüdür.

Esnek topoloji $\mathcal{T}(X, E)$ ile esnek topolojik uzay ise $(X, \mathcal{T}, E)$ ile gösterilir.

Örnekler 4.1.2: (1) $E = \{*\}$ ve $(\mathcal{T}, \{*\})$, 2^X üzerinde bir esnek küme olsun, yani

$\mathcal{T}: \{*\} \to 2^{2^X}$. Eğer $\mathcal{T}(*) \subset 2^X$, X üzerinde bir topoloji ise bu taktirde $\mathcal{T}$, $\{*\}$' a göre X üzerinde bir esnek topolojidir.

(2) $E = \{0,1\}$ ve $(\mathcal{T}, \{0,1\})$, 2^X üzerinde bir esnek küme olsun, $\mathcal{T}: \{0,1\} \to 2^{2^X}$. Eğer $\mathcal{T}(0)$ ve $\mathcal{T}(1)$, X üzerinde iki topoloji ise bu taktirde $\mathcal{T}$, $\{0,1\}'$ e göre X üzerinde bir esnek topolojidir.

(3) $E = [0,1] = I$ ve $(\mathcal{T}, I)$, 2^X üzerinde bir esnek küme olsun, $\mathcal{T}: I \to 2^{2^X}$. Eğer her $\alpha \in I$ için $\mathcal{T}(\alpha)$, X üzerinde bir topoloji ise bu taktirde $\mathcal{T}$, I' ya göre X üzerinde bir esnek topolojidir.

Tanım 4.1.3: $(X, \mathcal{T}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $F_E \in S(X, E)$ olsun.

F_E esnek kümesine açık esnek küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F_E(e) \in \mathcal{T}(e)$ dir.

F_E esnek kümesine kapalı esnek küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $X \backslash F_E(e) \in \mathcal{T}(e)$ dir.

Tanım 4.1.4: $\mathcal{T}(X,E)$ esnek topolojisine $\mathcal{T}^*(X,E)$ esnek topolojisinden daha kaba denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $\mathcal{T}(e) \subset \mathcal{T}^*(e)$ dir.

Tanım 4.1.5: $(X,\mathcal{T},E)$ bir esnek topolojik uzay ve $F_E \in S(X,E)$ olsun.

(1) F_E esnek kümesinin kapanışı $\overline{F_E}$ ile gösterilir ve F_E' in tüm kapalı esnek süper kümelerinin arakesitidir.

$\overline{F_E} = \{\overline{F_E(e)} : e \in E\} = \cap \{K \subset X : K, \mathcal{T}(e)'$de kapalı ve $F_E(e) \subset K\}$ dır.

$\overline{F_E}$, F_E esnek kümesini kapsayan en küçük kapalı esnek kümedir.

(2) F_E esnek kümesinin içi $(F_E)^o$ ile gösterilir ve F_E' in tüm açık esnek alt kümelerinin birleşimidir.

$(F_E)^o = \{(F_E(e))^o : e \in E\} = \cup \{G \subset X : G, \mathcal{T}(e)'$de açık ve $G \subset F_E(e)\}$ dir.

$(F_E)^o$, F_E esnek kümesinin alt kümesi olan en büyük açık esnek kümedir.

$\overline{F_E}$ kapalı esnek küme, $(F_E)^o$ açık esnek kümedir ve

(1) F_E kapalı esnek kümedir $\Leftrightarrow \overline{F_E} = F_E$

(2) F_E açık esnek kümedir $\Leftrightarrow (F_E)^o = F_E$ sağlanır.

Teorem 4.1.6: $(X,\mathcal{T},E)$ bir esnek topolojik uzay, $F_E, G_E \in S(X,E)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\widetilde{\overline{\Phi}} = \widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\overline{\mathrm{E}}} = \widetilde{\mathrm{E}}$ ve $\left(\widetilde{\Phi}\right)^o = \widetilde{\Phi}$, $\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right)^o = \widetilde{\mathrm{E}}$

(2) $(F_E)^o \sqsubseteq F_E \sqsubseteq \overline{F_E})$

(3) $F_E \sqsubseteq G_E$ ise $(F_E)^o) \sqsubseteq (G_E)^o$ ve $\overline{F_E} \sqsubseteq \overline{G_E}$ sağlanır.

(4) $((F_E)^o)^o = (F_E)^o$ ve $\overline{\overline{F_E}} = \overline{F_E}$

(5) $(F_E \sqcap G_E)^o = (F_E)^o \sqcap (G_E)^o$ ve

$(F_E \sqcup G_G)^o \sqsubseteq (F_E)^o \sqcup (G_E)^o$

(6) $\overline{F_E \sqcup G_E} = \overline{F_E} \sqcup \overline{G_E}$ ve

$\overline{F_E \sqcap G_E} \sqsubseteq \overline{F_E} \sqcap \overline{G_E})$

(7) $\overline{(F_E)^c} = ((F_E)^o)^c$ ve $((F_E)^c)^o = (\overline{F_E})^c$

Tanım 4.1.7: $(X,\mathcal{T},E)$ ve $(Y,\mathcal{T}^*,K)$ iki esnek topolojik uzay olsun.

$(\varphi,\psi): (X,\mathcal{T},E) \to (Y,\mathcal{T}^*,K)$ esnek dönüşümüne esnek süreklidir denir : $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $k = \psi(e)$ için $\varphi: \left(X,\mathcal{T}(e)\right) \to (Y,\mathcal{T}^*(k))$ dönüşümü süreklidir.

Burada $\mathcal{T}(e)$ ve $\mathcal{T}^*(k)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki topolojilerdir.

Önerme 4.1.8: $(X,\mathcal{T}_1,E_1)$, $(Y,\mathcal{T}_2,E_2)$ ve $(Z,\mathcal{T}_3,E_3)$ esnek topolojik uzaylar olsun. Eğer $(\varphi_1,\psi_1):(X,\mathcal{T}_1,E_1)\to(Y,\mathcal{T}_2,E_2)$ ve $(\varphi_2,\psi_2):(Y,\mathcal{T}_2,E_2)\to(Z,\mathcal{T}_3,E_3)$ esnek dönüşümleri esnek sürekli ise $(\varphi_2,\psi_2)\circ(\varphi_1,\psi_1)=(\varphi_2\circ\varphi_1,\psi_2\circ\psi_1)$ bileşkesi de esnek süreklidir.

İspat. Her $e_1\in E_1$ ve $e_2=\psi(e_1)$ için (φ_1,ψ_1) dönüşümü esnek sürekli olduğundan

$\varphi_1:(X,\mathcal{T}_1(e_1))\to(Y,\mathcal{T}_2(e_2))$ süreklidir.

Her $e_2\in E_2$ ve $e_3=\psi(e_2)$ için (φ_2,ψ_2) dönüşümü esnek sürekli olduğundan

$\varphi_2:\big(Y,\mathcal{T}_2(e_2)\big)\to(Z,\mathcal{T}_3(e_3))$ süreklidir.

Böylece $\varphi_2\circ\varphi_1$ sürekli, yani $(\varphi_2,\psi_2)\circ(\varphi_1,\psi_1)$ esnek süreklidir.

Teorem 4.1.9: Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) $(\varphi,\psi):(X,\mathcal{T},E)\to(Y,\mathcal{T}^*,K)$ esnek süreklidir.
(2) Her $G_K\in S(Y,K)$ için $(\varphi,\psi)^{-1}((G_K)^o)\sqsubseteq((\varphi,\psi)^{-1}(G_K))^o$ dir.
(3) Her $G_K\in S(Y,K)$ için $\overline{(\varphi,\psi)^{-1}(G_K)}\sqsubseteq(\varphi,\psi)^{-1}(\overline{G_K})$ dır.

Tanım 4.1.10: $(X,\mathcal{T},E)$ esnek topolojik uzay ve $(\mathcal{B},E)$, 2^X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e\in E$ için $\mathcal{B}(e)\subset\mathcal{T}(e)$ alt ailesi $\mathcal{T}(e)$ topolojisi için bir taban oluyorsa, bu takdirde, $\mathcal{B}(X,E)$' ye $\mathcal{T}(X,E)$ için esnek tabandır denir.

Tanım 4.1.11: $(X,\mathcal{T},E)$ esnek topolojik uzay ve $(\mathcal{S},E)$, 2^X üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e\in E$ için $\mathcal{S}(e)\subset\mathcal{T}(e)$ alt ailesi $\mathcal{T}(e)$ topolojisi için bir alt taban oluyorsa, bu taktirde, $\mathcal{S}(X,E)$' ye $\mathcal{T}(X,E)$ için esnek alt tabandır denir.

Tanım 4.1.12: [Esnek Topolojik Uzayların Çarpım Yapısı]

$(X,\mathcal{T},E)$ ve $(Y,\mathcal{T}^*,K)$ esnek topolojik uzaylarının çarpımı $(X\times Y,\mathcal{T}\times\mathcal{T}^*,E\times K,)$ üçlüsüdür ve $\mathcal{T}\times\mathcal{T}^*:E\times K\to 2^{2^{X\times Y}}$ dönüşümü

$$(\mathcal{T}\times\mathcal{T}^*)(e,k)=\mathcal{T}(e)\times\mathcal{T}^*(k)\in 2^{2^X}\times 2^{2^Y}\subseteq 2^{2^X\times 2^Y}\subseteq 2^{2^{X\times Y}}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mathcal{T}(e)$ ve $\mathcal{T}^*(k)$ sırasıyla X ve Y üzerinde klasik topolojilerdir.

$p_E: E \times K \to E$, $(q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow}: 2^{2^{X\times Y}} \to 2^{2^X}$ ve $p_K: E \times K \to K$, $(q_Y^{\rightarrow})^{\rightarrow}: 2^{2^{X\times Y}} \to 2^{2^Y}$ projeksiyon çiftleri aşağıdaki morfizmleri belirler:

$(p_E, (q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}^*, E \times K) \to (X, \mathcal{T}, E)$ ve

$(p_K, (q_Y^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}^*, E \times K) \to (Y, \mathcal{T}^*, K)$.

Tanım 4.1.13: $\{(X_i, \mathcal{T}_i, E_i)\}_{i\in J}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\{(p_{E_i}, q_{X_i})\}_{i\in J}$ ailesi tarafından üretilen $X(=\prod_{i\in J} X_i)$ üzerindeki başlangıç esnek topolojisine X üzerinde çarpım esnek topoloji denir.

Tanım 4.1.14: $(X, \mathcal{T}, E)$ esnek topolojik uzayına esnek kompakttır (esnek yakın kompakt, esnek hemen hemen kompakt) denir $:\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ için $(X, \mathcal{T}(e))$ klasik topolojik uzayı kompakttır (yakın kompakt, hemen hemen kompakt).

Tanımlar karşılaştırıldığında aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

Esnek kompakt ⇒ esnek yakın kompakt ⇒ esnek hemen hemen kompakt.

Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.1.15: $E = \{*\}$ ve $(X, \mathcal{T}, E)$ bir önceki bölümde verilen örnekteki esnek topolojik uzay olsun. Diğer bir ifadeyle $\mathcal{T}(*)$, X üzerinde bir topoloji olsun. Klasik topolojik uzaylarda yukarıdaki ifade her zaman sağlanmaz.

Tanım 4.1.16: $(X, \mathcal{T}, E)$ bir esnek topolojik uzay ve $F_E \in S(X, E)$ olsun. F_E esnek kümesine esnek kompakttır denir $:\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ için $F_E(e)$, X üzerinde kompakt kümedir.

Teorem 4.1.17: $(X, \mathcal{T}, E)$, $(Y, \mathcal{T}^*, K)$ esnek topolojik uzaylar ve $(\varphi, \psi): (X, \mathcal{T}, E) \to (Y, \mathcal{T}^*, K)$ esnek sürekli ve örten bir esnek dönüşüm olsun. Eğer $(X, \mathcal{T}, E)$ esnek kompakt (esnek yakın kompakt, esnek hemen hemen kompakt) ise, bu taktirde $(Y, \mathcal{T}^*, K)$ esnek kompakttır (esnek yakın kompakt, esnek hemen hemen kompakt).

İspat. $(X,\mathcal{T},E)$ esnek kompakt uzay olsun. Bu taktide her $e\in E$ için $(X,\mathcal{T}(e))$ klasik topolojik uzayı kompakttır. (φ,ψ) esnek sürekli olduğundan $\psi(e)=k$ için $\varphi\colon\big(X,\mathcal{T}(e)\big)\to(Y,\mathcal{T}^*(k))$ süreklidir. Klasik topolojik uzaylarda kompaktlık sürekli ve örten dönüşüm altında korunduğundan $(Y,\mathcal{T}^*(k))$ topolojik uzayı kompakttır. Sonuç olarak $(Y,\mathcal{T}^*,K)$ esnek kompakttır.

Teorem 4.1.18: $(X,\mathcal{T},E)$ kompakt esnek topolojik uzay ve F_E kapalı esnek küme olsun. Bu taktirde F_E esnek kompakt kümedir.

Teorem 4.1.19: $\{(X_i,\mathcal{T}_i,E_i)\}_{i\in J}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\{(X_i,\mathcal{T}_i,E_i)\}_{i\in J}$ esnek kompakt uzaydır $\Leftrightarrow$ $(\prod_{i\in J}X_i\,,\prod_{i\in J}\mathcal{T}_i\,,\prod_{i\in J}E_i)$ çarpım esnek topolojik uzayı esnek kompakttır.

İspat. $\mathcal{S}(E,X)$ çarpım esnek topolojisinin alt tabanı olsun. Diğer bir ifadeyle, her $e\in E$ için $\mathcal{S}(e)\subset\mathcal{T}(e)$ ailesi $\mathcal{T}(e)$ için bir alt tabandır. Alexander Alt Taban Teoremi'nden $X=\prod_{i\in J}X_i$' nin $\mathcal{S}(e)$' deki her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü vardır. Dolayısıyla $(X,\mathcal{T}(e))$ kompakttır.

Tersine, $(p_{E_i},\overrightarrow{(q_{X_i})})\colon\big(\prod_{i\in J}X_i\,,\prod_{i\in J}\mathcal{T}_i\,,\prod_{i\in J}E_i\big)\to(X_i,\mathcal{T}_i,E_i)$ projeksiyon dönüşümü esnek sürekli olduğundan bir önceki teoremden $(X_i,\mathcal{T}_i,E_i)$ esnek topolojik uzayının esnek kompakt olduğunu söyleriz.

4.2. L-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

$L=(L,\leq,\vee,\wedge,')$ bir bulanık latis olsun. Diğer bir ifadeyle, sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı tam latis olsun. 1_X ve 0_X sırasıyla L' nin en büyük ve en küçük elemanları olsun. L^X, X üzerindeki tüm L-bulanık kümelerin ailesini göstersin.

Tanım 4.2.1: (Aygünoğlu, 2011) X boştan farklı bir küme olsun. $f_E\colon E\to L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık esnek küme denir.

$\forall e\in E$ için $f_e:=f_E(e)\colon X\to L$, X üzerinde bir L-bulanık kümedir.

$f_E\colon E\longrightarrow L^X$ dönüşümü (E,X) çifti üzerindeki bulanık esnek yapı olarak düşünülecektir.

X üzerindeki tüm L-bulanık esnek kümelerin ailesini $L(X, E)$ ile gösterelim.

$L = I = [0,1]$ olarak aldığımızda $A \subset E$ için f_A Maji anlamında (Maji ve diğ., 2001) X üzerinde bulanık esnek küme olur.

Tanım 4.2.2: $f_1 : E \longrightarrow L^X$ ve $f_2 : E \longrightarrow L^X$, X üzerinde iki bulanık esnek yapı olsun. Eğer her $e \in E$ için $f_1(e) \leq f_2(e)$ ise f_1'e f_2'den daha zayıftır denir.

$f_1 \preccurlyeq f_2$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.3: (Aygünoğlu, 2011) $f_E , g_E \in L(X, E)$ olsun. f_E' ye g_E' nin L-bulanık esnek alt kümesi denir :⇔ Her $e \in E$ için $f_e \leq g_e$ dir.

Alt küme $f_E \sqsubseteq g_E$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.4: (Aygünoğlu, 2011) f_E ve g_E L-bulanık esnek kümelerine eşittir denir :⇔ $f_E \sqsubseteq g_E$ ve $g_E \sqsubseteq f_E$ sağlanır.

Tanım 4.2.5: (Aygünoğlu, 2011) f_E ve g_E L-bulanık esnek kümelerinin birleşimi k_E L-bulanık esnek kümesidir :⇔ Her $e \in E$ için $k_e = f_e \vee g_e$ dir.

Birleşim $k_E = f_E \sqcup g_E$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.6: (Aygünoğlu, 2011) f_E ve g_E L-bulanık esnek kümelerinin kesişimi k_E L-bulanık esnek kümesidir :⇔ Her $e \in E$ için $k_e = f_e \wedge g_e$ dir.

Kesişim $k_E = f_E \sqcap g_E$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.7: (Aygünoğlu, 2011) f_E L-bulanık esnek kümesinin tümleyeni, ${f_E}^c$ ile gösterilir ve ${f_E}^c : E \to L^X$ dönüşümü her $e \in E$ için $f_e^c = (f_e)'$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.8: (Aygünoğlu, 2011) f_E L-bulanık esnek kümesine boş L-bulanık esnek küme denir :⇔ Her $e \in E$ için $f_e = 0_X$ dir. Boş L-bulanık esnek küme $\tilde{0}_E$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.9: (Aygünoğlu, 2011) f_E L-bulanık esnek kümesine evrensel L-bulanık esnek küme denir :⇔ Her $e \in E$ için $f_e = 1_X$ dir. L-bulanık evrensel esnek küme $\tilde{1}_E$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.10: $\mathcal{M}$, $\preccurlyeq$ kısmi sıralaması ile (E,X) üzerindeki tüm bulanık esnek yapıların kümesi olsun. Bu taktirde, $\{f_i : i \in J\}$ ailesinin supremum, infimum ve sırayı koruyan dönüşümü sırasıyla $\bigvee_{i\in J} f_i(e)$, $\bigwedge_{i\in J} f_i(e)$ ve $f_i'(e) = \big(f_i(e)\big)'$ şeklinde tanımlandığında $(\mathcal{M}, \preccurlyeq)$ bir tam latistir. Özel olarak $\mathcal{M}$ latisinin en küçük ve en büyük elemanları sırasıyla her $e \in E$ için $\mathcal{M}_\perp(e) = 0_X$ ve $\mathcal{M}_\top(e) = 1_X$ şeklindedir.

Tanım 4.2.11: (Aygünoğlu, 2011) $\psi: E \to K$, $\varphi: X \to Y$ iki fonksiyon ve $f_E \in L(X,E)$, $g_K \in L(Y,K)$ olsun. (φ,ψ) çiftine X'den Y'ye bir bulanık esnek dönüşüm denir.

(1) $f_E \in L(X,E)$ olsun. f_E' nin (φ,ψ) bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $(\varphi,\psi)(f_E)$, Y üzerinde bir L-bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi(f)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\varphi(x)=y} \bigvee_{\psi(e)=k} f_e(x), & x \in \varphi^{-1}(y) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}, \quad \forall k \in \psi(E), \forall y \in Y.$$

(2) $g_K \in L(Y,K)$ olsun. g_K' nın (φ,ψ) bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $(\varphi,\psi)^{-1}(g_K)$, X üzerinde L-bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi^{-1}(g)_k(x) = g_{\psi(k)}\big(\varphi(x)\big), \qquad \forall k \in \psi^{-1}(K), \forall x \in X.$$

$L = I$ olarak alırsak bu tanım (Aygünoğlu ve Aygün, 2009) anlamında olur.

İki bulanık esnek dönüşümün bileşkesi tanımı esnek dönüşümlerin bileşkesi tanımıyla benzerdir.

Tanım 4.2.12: X kümesi üzerinde E parametresine göre bir L-esnek topoloji

$\mathcal{T}: E \to 2^{L^X}$ dönüşümüdür öyle ki her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_e \in 2^{L^X}$, $\mathcal{T}(e): L^X \to 2$, X kümesi üzerinde bir L-topolojidir.

Burada, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e)$ Chang-Goguen anlamında L-topolojidir. (Chang, 1968), (Goguen, 1967).

Tanım 4.2.13: X kümesi üzerinde E parametresine göre bir L-bulanıklaştırılmış esnek topoloji, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_e \in L^{2^X}$, $\mathcal{T}(e): 2^X \to L$, X kümesi üzerinde bir L- bulanıklaştırılmış topoloji olmak üzere $\mathcal{T}: E \to L^{2^X}$ dönüşümüdür.

Burada, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e)$ Ying anlamında L- bulanıklaştırılmış topolojidir (Ying, 1991).

Tanım 4.2.14: X kümesi üzerinde E parametresine göre bir L-bulanık esnek topoloji, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_e \in L^{L^X}$, $\mathcal{T}(e): L^X \to L$, X kümesi üzerinde bir L-bulanık topoloji olmak üzere $\mathcal{T}: E \to L^{L^X}$ dönüşümüdür.

Burada, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e)$ Shostak anlamında L-bulanık topolojidir (Shostak, 1985).

L-bulanık esnek topoloji $\mathcal{T}(X, E)$ ile L-bulanık esnek topolojik uzay ise $(X, \mathcal{T}, E)$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.15: (1) $(X, \mathcal{T}, E)$ esnek topolojik uzay olsun.

Eğer her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) \coloneqq \chi_{\mathcal{T}(e)}: 2^X \to 2$ olarak tanımladığımızda $(X, \mathcal{T}, E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay olarak göz önüne alınabilir.

(2) $(X, \mathcal{T}, E)$ L-esnek topolojik uzay olsun.
Eğer her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) \coloneqq \chi_{\mathcal{T}(e)}: L^X \to 2$ olarak tanımladığımızda $(X, \mathcal{T}, E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 4.2.16: $(X, \mathcal{T}, E)$ ve $(Y, \mathcal{T}^*, K)$ iki L-bulanık esnek topolojik uzay olsun.

$(\varphi, \psi): (X, \mathcal{T}, E) \to (Y, \mathcal{T}^*, K)$ esnek dönüşümüne bulanık esnek süreklidir denir : $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $k = \psi(e)$ için $\varphi: \big(X, \mathcal{T}(e)\big) \to (Y, \mathcal{T}^*(k))$ dönüşümü bulanık süreklidir.

Burada, $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}_e: L^X \to L$, $\mathcal{T}^*(k) = \mathcal{T}_k^*: L^Y \to L$ ve her $e \in E$ ve $k = \psi(e)$ için $\varphi: \big(X, \mathcal{T}(e)\big) \to (Y, \mathcal{T}^*(k))$ bulanık süreklidir ancak ve ancak her $g \in L^Y$ için $\mathcal{T}_e(\varphi^{-1}(g)) \geq \mathcal{T}_k^*(g)$ dir.

Önerme 4.2.17: $(X,\mathcal{T}_1,E_1),(Y,\mathcal{T}_2,E_2)$ ve $(Z,\mathcal{T}_3,E_3)$ L-bulanık esnek topolojik uzaylar olsun. Eğer $(\varphi_1,\psi_1)\colon(X,\mathcal{T}_1,E_1)\to(Y,\mathcal{T}_2,E_2)$ ve $(\varphi_2,\psi_2)\colon(Y,\mathcal{T}_2,E_2)\to(Z,\mathcal{T}_3,E_3)$ esnek dönüşümleri bulanık esnek sürekli ise $(\varphi_2,\psi_2)\circ(\varphi_1,\psi_1)=$

$(\varphi_2\circ\varphi_1,\psi_2\circ\psi_1)$ bileşkesi de bulanık esnek süreklidir.

İspat. Her $e_1\in E_1$ ve $e_2=\psi(e_1)$ için (φ_1,ψ_1) dönüşümü bulanık esnek sürekli olduğundan $\varphi_1\colon(X,\mathcal{T}_1(e_1))\to(Y,\mathcal{T}_2(e_2))$ bulanık süreklidir.

Her $e_2\in E_2$ ve $e_3=\psi(e_2)$ için (φ_2,ψ_2) dönüşümü bulanık esnek sürekli olduğundan $\varphi_2\colon\big(Y,\mathcal{T}_2(e_2)\big)\to(Z,\mathcal{T}_3(e_3))$ bulanık süreklidir.

Böylece $\varphi_2\circ\varphi_1$ bulanık sürekli, yani $(\varphi_2,\psi_2)\circ(\varphi_1,\psi_1)$ bulanık esnek süreklidir.

Tanım 4.2.18: $(X,\mathcal{T},E)$ L-bulanık esnek topolojik uzayına bulanık esnek kompakttır (bulanık esnek yakın kompakt, bulanık esnek hemen hemen kompakt) denir $:\Leftrightarrow$ Her $e\in E$ için $(X,\mathcal{T}(e))$ L-bulanık topolojik uzayı bulanık kompakttır (bulanık yakın kompakt, bulanık hemen hemen kompakt).

Burada, her $e\in E$ için $(X,\mathcal{T}(e))$ Aygün (Aygün ve diğ., 1997) anlamında bulanık kompakttır ve Ramadan (Ramadan ve Abbas, 2001) anlamında bulanık yakın (bulanık hemen hemen) kompakttır.

$(X,\mathcal{T},E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay ve $f_E\in L(X,E)$ olsun. f_E'ye bulanık esnek kompakt küme denir $:\Leftrightarrow$ Her $e\in E$ için $f_E(e)$ bulanık kompakt kümedir.

Teorem 4.2.19: $(X,\mathcal{T},E)$, $(Y,\mathcal{T}^*,K)$ L-bulanık esnek topolojik uzaylar ve $(\varphi,\psi)\colon(X,\mathcal{T},E)\to(Y,\mathcal{T}^*,K)$ bulanık esnek sürekli ve örten bir esnek dönüşüm olsun. Eğer $(X,\mathcal{T},E)$ bulanık esnek kompakt (bulanık esnek yakın kompakt, bulanık esnek hemen hemen kompakt) ise, bu taktirde $(Y,\mathcal{T}^*,K)$ bulanık esnek kompakttır (bulanık esnek yakın kompakt, bulanık esnek hemen hemen kompakt).

İspat. $(X,\mathcal{T},E)$ bulanık esnek kompakt uzay olsun. Bu taktide her $e\in E$ için $(X,\mathcal{T}(e))$ L-bulanık topolojik uzayı bulanık kompakttır. (φ,ψ) bulanık esnek sürekli olduğundan $\psi(e)=k$ için $\varphi\colon\big(X,\mathcal{T}(e)\big)\to(Y,\mathcal{T}^*(k))$ bulanık süreklidir. Bulanık topolojik uzaylarda kompaktlık sürekli ve örten dönüşüm altında korunduğundan

$(Y, \mathcal{T}^*(k))$ L-bulanık topolojik uzayı kompakttır. Sonuç olarak $(Y, \mathcal{T}^*, K)$ bulanık esnek kompakttır.

Teorem 4.2.20: $(X, \mathcal{T}, E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay ve $f_E, g_E \in L(X, E)$ olsun. Eğer f_E ve g_E bulanık esnek kompakt (bulanık esnek yakın kompakt, bulanık esnek hemen hemen kompakt) kümeler ise $f_E \sqcup g_E$ bulanık esnek kompakttır (bulanık esnek yakın kompakt, bulanık esnek hemen hemen kompakt).

İspat. f_E , g_E bulanık esnek kompakt kümeler olsun. Yani, $f, g: E \to L^X$ ve her $e \in E$ için $f_e, g_e \in L^X$ bulanık kompakt kümelerdir. L-bulanık esnek kümelerin birleşim tanımından, her $e \in E$ için $k_e = f_e \vee g_e$ olmak üzere $f_E \sqcup g_E = k_E$' dir. f_e ve g_e bulanık kompakt kümeler olduğundan (Ramadan ve Abbas, 2001)' den

$k_e = f_e \vee g_e$ bulanık kompakttır. Böylece, $f_E \sqcup g_E$ bulanık esnek kompakt kümedir.

Teorem 4.2.21: $(X, \mathcal{T}, E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay olsun. Eğer X sonlu ise $(X, \mathcal{T}, E)$ bulanık esnek kompakt uzaydır.

İspat. $(X, \mathcal{T}, E)$ L-bulanık esnek topolojik uzay olsun. Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{T}: E \to L^{L^X}$

ve her $e \in E$ için $(X, \mathcal{T}(e))$ L-bulanık topolojik uzaydır. X sonlu olduğundan $(X, \mathcal{T}(e))$ bulanık kompakt uzaydır. Sonuç olarak, $(X, \mathcal{T}, E)$ bulanık esnek kompakt uzaydır.

5. TOPOLOJİK UZAYLARA ESNEK YAPILARLA YAKLAŞIM

Bu bölümün amacı esnek kümelerin özel bir kategorisi olarak topolojik uzaylarla ilgili (crisp topolojik uzaylar, L-topolojik uzaylar, L-bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ve L-bulanık topolojik uzaylar) kategorileri yorumlamaktır.

5.1. Esnek Komşuluk Yapıları

Bu bölümde, $\mathbb{SOFSET}$ kategorisinin bir alt kategorisi olarak $\mathbb{TOP}$ topolojik uzaylar kategorisi karakterize edilecektir. Esnek yapı $2^X \coloneqq \mathcal{P}(X)$ üzerinde kurulacak ve X kümesi parametre kümesi olarak ele alınacaktır. Böylece, tüm esnek kümeler F_X olarak düşünülecektir. Bu bölümde, yapının daha kolay anlaşılması için esnek kümeler $(F, X, 2^X)$ üçlüsü olarak ele alınacaktır. Yani, $F: X \to 2^{2^X}$ bir dönüşüm olacaktır.

Tanım 5.1.1: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ bir esnek küme olsun, $\mathcal{U}: X \to 2^{2^X}$. Eğer her $x \in X$ için

$\mathcal{U}(x) \coloneqq \mathcal{U}_x \in 2^{2^X}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{U}: X \to 2^{2^X}$ dönüşümüne X üzerinde bir esnek komşuluk dönüşümü ve $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ üçlüsüne de bir esnek komşuluk yapısı denir:

(N1) $U \in \mathcal{U}(x)$ ise $x \in U$;

(N2) $U \in \mathcal{U}(x)$ ve $U \subset V$ ise $V \in \mathcal{U}(x)$;

(N3) $U, V \in \mathcal{U}(x)$ ise $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;

(N4) $U \in \mathcal{U}(x)$ ise öyle bir $V \in \mathcal{U}(x)$ vardır öyle ki her $y \in V$ için $U \in \mathcal{U}(y)$' dir.

Objeleri esnek komşuluk yapıları, morfizmleri esnek dönüşümler olan esnek komşuluk yapılarının kategorisi $\mathbb{NSOFSET}$ ile gösterilsin. $\mathbb{NSOFSET}$, esnek kümelerin ve esnek dönüşümün $\mathbb{SOFSET}$ kategorisinin tam alt kategorisidir.

Teorem 5.1.2: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathfrak{U}_x$ bu uzayda bir x noktasının komşuluklarının ailesi olsun. $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}: X \to 2^{2^X}$ dönüşümünü $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) = \mathfrak{U}_x$ olarak tanımlarsak $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X, 2^X)$ bir esnek komşuluk yapısıdır.

$\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ esnek komşuluk dönüşümüne $\mathcal{T}$ topolojisi tarafından üretilen esnek dönüşüm denir. $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısına da $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı tarafından üretilen esnek komşuluk yapısı denir.

Tersine, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ bir esnek komşuluk yapısı olsun. X' in alt kümelerinin $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ailesini $x \in \mathcal{U}$ ve her $U \subseteq X$ için $U \in \mathcal{U}(x)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, X üzerinde bir topolojidir ve $\{\mathcal{U}(x): x \in X\}$ ailesi bu uzayda bir x noktasının tüm komşuluklarının ailesidir.

$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ topolojisine $\mathcal{U}$ esnek yapısı tarafından üretilen topoloji denir. $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ topolojik uzayına da $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı tarafından üretilen topolojik uzay denir.

Ayrıca, X üzerindeki $\mathcal{U}$ esnek komşuluk yapısı için $\mathcal{U}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}$ ve X üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojisi için $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$ olur.

$\mathcal{U}: X \to 2^{2^X}$ esnek komşuluk dönüşümü için $\preccurlyeq$ sıralamasını kullanacağız. Bu nedenle, bu özel yapıda $\preccurlyeq$ bağıntısını inceleyeceğiz.

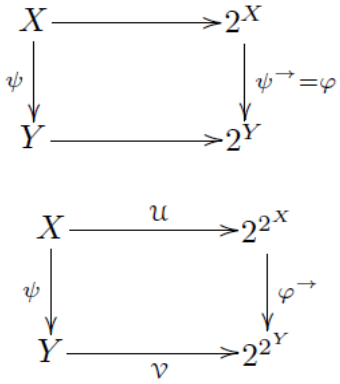
$\mathfrak{U}(X) := \{\mathcal{U} |\, \mathcal{U}: X \to 2^{2^X}\}$ esnek komşuluk yapısı üzerinde $\preccurlyeq$ bağıntısı aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir:

$\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall V_x \in \mathcal{V}_x$ için $\exists U_x \in \mathcal{U}_x$ öyle ki $U_x \subseteq V_x$.

Bir önceki Teoreme dayanarak $\psi: (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ dönüşümünün sürekliliği esnek komşuluk yapısına göre (Şekil 5.1) aşağıdaki şekilde karakterize edilir:

$\mathcal{U} := \mathcal{U}_{\mathcal{T}_X}$ ve $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\mathcal{T}_Y}$ için $(\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow} \circ \mathcal{U} \succcurlyeq \mathcal{V} \circ \psi$.

Buradan, $(\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}\big(\mathcal{U}(x)\big) \subseteq \mathcal{V}\big(\psi(x)\big),\ \forall x \in X$ olduğu görülür.



Şekil 5.1

Teorem 5.1.3: $(X,\mathcal{T}_X)$ ve $(Y,\mathcal{T}_Y)$ iki topolojik uzay olsun. $\psi\colon(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ dönüşümü süreklidir ($\mathbb{TOP}$ kategorisinde bir morfizmdir) ancak ve ancak

$(\psi,(\psi^{\to})^{\to})\colon\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_X},X,2^X\right)\to\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_Y},Y,2^Y\right)$ ilgili esnek komşuluk yapılarının bir esnek dönüşümüdür. Böylece, bu dönüşüm $\mathbb{NSOFSET}$ kategorisinde bir morfizmdir.

Son iki teoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 5.1.4: $\Phi\colon\mathbb{TOP}\to\mathbb{NSOFSET}$ funktoru $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayını $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}},X,2^X)$ üretilmiş esnek komşuluk yapısına ve $\psi\colon(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ sürekli dönüşümünü

$(\psi,(\psi^{\to})^{\to})\colon\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_X},X,2^X\right)\to\left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_Y},Y,2^Y\right)$ esnek dönüşümüne atayan bir izomorfizmdir.

Φ funktorunun tersini $\Psi\colon\mathbb{NSOFSET}\to\mathbb{TOP}$ ile göstereceğiz.

Bir topolojik uzayın bir esnek komşuluk yapısı olarak tanımlandığı bir önceki sonucu ve esnek kümelerin çarpım ve alt küme tanımlarını dikkate alırsak aşağıdaki iki önermeyi elde ederiz:

Önerme 5.1.5: $(\mathcal{U},X,2^X)$ esnek komşuluk yapısı ve $A\subseteq X$ olsun. Her $a\in A$ için $\mathcal{U}_A(a)=A\cap\mathcal{U}(a)$ olarak tanımlanan $\mathcal{U}_A\colon A\to 2^{2^A}$ dönüşümünü ele alalım. $\mathcal{U}_A(x)=\{A\cap\mathcal{U}(x)\ :\ x\in A\}$ ailesi (N1)-(N4) koşullarını sağlar ve $(\mathcal{U}_A,A,2^A)$, $(\mathcal{U},X,2^X)$ esnek komşuluk yapısının esnek komşuluk alt kümesi olarak adlandırılır.

Önerme 5.1.6: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ iki esnek komşuluk yapısı olsun. Bu esnek komşuluk yapılarının çarpımı $(\mathcal{W}, X \times Y, 2^{X\times Y})$ $\mathbb{NSOFSET}$ kategorisinde bir esnek komşuluk yapısıdır ve bu çarpıma karşılık gelen topolojik uzay $(X \times Y, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})$, $\mathbb{TOP}$ kategorisinde $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ ve $(Y, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ topolojik uzaylarının çarpımıdır.

Örnek 5.1.7: $(\mathcal{U}, IR, 2^{IR})$ esnek komşuluk yapısı ve $A \subset IR$ olsun. $(\mathcal{U}, IR, 2^{IR})$ esnek komşuluk yapısının $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ esnek komşuluk alt kümesi, $A \subset IR$ alt uzayına uyumludur. $(\mathcal{U}, IR, 2^{IR}) \times (\mathcal{U}, IR, IR)$ esnek komşuluk yapılarının çarpımının topolojik karşılığı IR^2 üzerindeki topoloji olan bir esnek komşuluk yapısıdır.

Esnek komşuluk yapılarının görüntü ve ters görüntü tanımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X, 2^X) \rightarrow (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ bir esnek dönüşüm olsun. (Bu dönüşüm $\mathbb{NSOFSET}$ kategorisinde bir morfizmdir).

(1) $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısının $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow})$ esnek dönüşümü altındaki görüntüsü 2^Y üzerinde bir esnek komşuluk yapısıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow})(\mathcal{U}, X, 2^X) = ((\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}(\mathcal{U}), \psi(X), 2^Y)$.

Burada, $((\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}(\mathcal{U}))(y) = \cup_{\psi(x)=y} \psi\big(\mathcal{U}(x)\big)$, $\forall y \in Y$' dir.

(2) $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk yapısının $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow})$ esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü 2^X üzerinde bir esnek komşuluk yapısıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow})^{-1}(\mathcal{V}, Y, 2^Y) = ((\psi^{\rightarrow})^{\leftarrow} \circ \mathcal{V} \circ \psi, \psi^{-1}(Y), 2^X)$.

Burada $\psi^{\leftarrow}$, $\psi: X \rightarrow Y$ dönüşümü ile üretilen ters görüntü operatörüdür. Her

$x \in X$ için $((\psi^{\rightarrow})^{\leftarrow} \circ \mathcal{V} \circ \psi)(x) = (\psi^{\rightarrow})^{\leftarrow}\Big(\mathcal{V}\big(\psi(x)\big)\Big)$ olduğu açıktır.

Tanım 5.1.8: [Esnek Komşuluk Yapılarının Çarpımı]

$(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk yapılarının çarpımı

$(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, X \times Y, 2^X \times 2^Y)$ üçlüsüdür ve $\mathcal{U} \times \mathcal{V}: X \times Y \rightarrow 2^{2^X \times 2^Y}$ dönüşümü

$(\mathcal{U} \times \mathcal{V})(x,y) = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(y) \in 2^{2^X} \times 2^{2^Y} \subseteq 2^{2^X \times 2^Y} \subseteq 2^{2^{X \times Y}}$ şeklinde tanımlanır.

$p_X : X \times Y \to X$, $(q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow} : 2^{2^{X \times Y}} \to 2^{2^X}$ ve $p_Y : X \times Y \to Y$, $(q_Y^{\rightarrow})^{\rightarrow} : 2^{2^{X \times Y}} \to 2^{2^Y}$ projeksiyon çiftleri aşağıdaki morfizmleri belirler:

$(p_X, (q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow}) : (\mathcal{U} \times \mathcal{V}, X \times Y, 2^X \times 2^Y) \to (\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve

$(p_Y, (q_Y^{\rightarrow})^{\rightarrow}) : (\mathcal{U} \times \mathcal{V}, X \times Y, 2^X \times 2^Y) \to (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$.

$\mathbb{NSOFSET}$ kategorisinde $(p_X, (q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow}) : (\mathcal{W}, X \times Y, 2^X \times 2^Y) \to (\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve

$(p_X, (q_X^{\rightarrow})^{\rightarrow}) : (\mathcal{W}, X \times Y, 2^X \times 2^Y) \to (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ morfizmleri için $\mathcal{W}$,$(X \times Y, 2^{2^X \times 2^Y})$ üzerinde tüm W esnek yapılarının ailesi olsun. $W_0 = \wedge \mathcal{W}$ olarak alırsak bu taktirde $(W_0, X \times Y, 2^{2^X \times 2^Y})$ $\mathbb{NSOFSET}$ kategorisinde $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk kümelerinin çarpımıdır.

$\mathbb{TOP}$ ve $\mathbb{NSOFSET}$ kategorileri arasında Ψ izomorfizmi olduğundan aşağıdaki genel tanımı verebiliriz:

Tanım 5.1.9: $\mathcal{P}$ bir topolojik özellik olsun. $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir denir $:\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}}) = \Psi(\mathcal{U}, X, 2^X)$ topolojik uzayı $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir.

Bununla birlikte bazı durumlarda, $\mathbb{NSOFSET}$ terminolojisinde esnek komşuluk yapıların topolojik özelliklerinin "güzel" karakterizasyonlarını $\mathbb{TOP}$ kategorisindeki karşılıklarını kullanmadan da elde etmek mümkündür. Buna ilk örnek olarak aşağıdaki teoremde esnek komşuluk yapılarında ayırma aksiyomlarını karakterize ediyoruz:

Teorem 5.1.10: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı olsun. Bu takdirde,

(1) $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ T_0-esnek komşuluk yapısıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y)$' dir.
(2) $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ T_1-esnek komşuluk yapısıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\mathcal{U}(x) \backslash \mathcal{U}(y) \neq \emptyset$' dir.
(3) $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ T_2-esnek komşuluk yapısıdır $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için

$U_x \in \mathcal{U}(x)$ ve $U_y \in \mathcal{U}(y)$ vardır öyle ki $U_x \cap U_y = \emptyset$' dir.

Teorem 5.1.11: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ bir T_i-esnek komşuluk yapısı (i=0,1,2), $A \subset X$ ve $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$' in esnek komşuluk alt kümesi olsun. Bu taktirde, $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ alt kümesi de T_i-esnek komşuluk yapısıdır (i=0,1,2).

Teorem 5.1.12: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ iki esnek komşuluk yapısı olsun. Boş kümeden farklı $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, X \times Y, 2^X \times 2^Y)$ çarpım esnek komşuluk yapısı T_i-esnek komşuluk yapısıdır (i=0,1,2) ancak ve ancak $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk yapıları T_i-esnek komşuluk yapısıdır (i=0,1,2).

Esnek komşuluk yapıları açısından kompaktlık kavramını karakterize etmek için bir

$(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısında bir seçim fonksiyonu kavramını vermek uygun olacaktır. Diğer bir ifadeyle her $x \in X$ için $c(x) \in \mathcal{U}(x)$ olmak üzere

$c: X \to 2^X$ fonksiyonu ele alınacaktır.

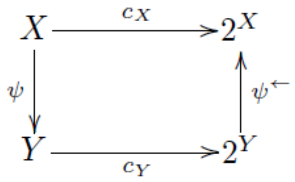
$A \subseteq X$ alt kümesi için $c(A) = \bigcup_{x \in A} c(x)$ ile gösterilir. Açıktır ki her seçim fonksiyonu için $c(X) = X$' dir.

Esnek komşuluk yapılarında kompaktlık aşağıdaki şekilde karakterize edilir:

Teorem 5.1.13: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $c: X \to 2^X$ seçim fonksiyonu için $c(X_c) = X$ olacak şekilde $X_c = \{x_1, \dots, x_n\}$ sonlu kümesi vardır.

Teorem 5.1.14: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk yapıları ve $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ kompakt olsun. Eğer $\psi: X \to Y$ örten ve $(\psi, (\psi^{\to})^{\to}): (\mathcal{U}, X, 2^X) \to (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ bir esnek dönüşüm ise $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ kompakttır.

İspat: $c_Y: Y \to 2^Y$, $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ esnek komşuluk yapısında bir seçim fonksiyonu olsun. $c_X: X \to 2^X$ fonksiyonunu $c_X(x) := \psi^{\leftarrow} \circ c_Y \circ \psi(x)$ olarak tanımlayarak aşağıdaki diyagramı (Şekil 5.2) elde ederiz:



Şekil 5.2

$(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X, 2^X) \rightarrow (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ bir esnek dönüşüm ve her $y \in Y$ için $c_Y(y) \in \mathcal{V}(y)$ olduğundan $c_X(x) := \psi^{\leftarrow} \circ c_Y \circ \psi(x) = \psi^{\leftarrow}\big(c_Y(y)\big) \in \mathcal{U}(x)$ sonucunu elde ederiz. Böylece c_X, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$' de bir seçim fonksiyonudur.

$(\mathcal{U}, X, 2^X)$ kompakt olduğundan $c_X(X_c) = X$ olacak şekilde $X_c \subseteq X$ sonlu alt kümesi vardır. $Y_c = \psi(X_c)$ alalım. ψ dönüşümü örten olduğundan

$c_Y(Y_c) = c_Y\big(\psi(X_c)\big) = (\psi^{\rightarrow} \circ c_X \circ \psi^{\leftarrow})\big(\psi(X_c)\big) = Y$ elde edilir. Böylece, $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ kompakttır.

Teorem 5.1.15: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı ve $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$' in esnek komşuluk alt kümesi olsun. $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ kompakttır ancak ve ancak her $a \in A$ için $c_A \in \mathcal{U}_A(a)$ olmak üzere her $c_A: A \rightarrow 2^A$ seçim fonksiyonu için $c_A(A_c) = A$ olacak şekilde $A_c = \{a_1, \dots, a_n\}$ sonlu kümesi vardır.

Teorem 5.1.16: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ kompakt esnek komşuluk yapısı ve $A \subset X$ kapalı olsun. Bu takdirde, $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ esnek komşuluk alt kümesi kompakttır.

(Burada $A \subset X$ kapalı olması, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısı tarafından elde edilen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ topolojisine göre kapalı olmasıdır.)

İspat: $c_A: A \rightarrow 2^A$, $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ esnek komşuluk alt kümesinde bir seçim fonksiyonu ve her $a \in A \subset X$ için $c_A(a) \in \mathcal{U}_A(a) = A \cap \mathcal{U}(a)$ olsun. Böylece, $a \in A$ için $c_A(a) \in \mathcal{U}(a)$ olur.

$A \subset X$ kapalı olduğundan her $x \in X \backslash A$ için $X \backslash A \in \mathcal{U}(x)$ olur.

$c_X: X \rightarrow 2^X$ fonksiyonunu $\mathcal{U}(a) = c_A(a) \cap \mathcal{U}(x)$ olmak üzere

$c_X(x) = \begin{cases} \mathcal{U}(a) \,, x \in A \\ X \backslash A \;\; , x \notin A \end{cases}$ olarak tanımlayalım.

Buradan $c_X(x) \in \mathcal{U}(x)$ ve c_X' in $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ esnek komşuluk yapısında bir seçim fonksiyonu olduğunu söyleriz. $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ kompakt olduğundan $c_X(\{x_1, \dots, x_n\}) = X$ olacak şekilde $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ sonlu alt kümesi vardır. $x_i \in A \,, i = \overline{1,n}$ için $c_A(\{x_1, \dots, x_n\}) = c_X(\{x_1, \dots, x_n\}) \cap A = X \cap A = A$ olur ve böylece $(\mathcal{U}_A, A, 2^A)$ kompakt olur.

5.2. L-Bulanıklaştırılmış Esnek Komşuluk Yapıları

Bu bölümde ve bundan sonraki iki bölümde $L = (L, \leq, \vee, \wedge, ')$ bulanık latisi göz önüne alınacaktır. Diğer bir ifadeyle, sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı tam latis ile çalışılacaktır. 1_L ve 0_L sırasıyla L' nin en büyük ve en küçük elemanları olsun. L^X, X üzerindeki tüm L-bulanık kümelerin ailesi olsun.

L-bulanık esnek yapı 2^X üzerinde kurulacak ve X kümesi parametre kümesi olarak ele alınacaktır.

Tanım 5.2.1: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ bir L-bulanık esnek küme olsun. Diğer bir ifadeyle,

$\mathcal{U}: X \to L^{2^X}$, 2^X üzerinde L-bulanık esnek yapı olsun. Eğer her $x \in X$ için

$\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_x : 2^X \to L\}$ fonksiyonlar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{U}: X \to L^{2^X}$ dönüşümüne bir L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk dönüşümü ve $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ üçlüsüne de bir L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısı denir:

(N1) $\mathcal{U}_x(A) > 0$ ise $x \in A$;

(N2) $A \subseteq B$ ise $\mathcal{U}_x(A) \leq \mathcal{U}_x(B)$;

(N3) $\mathcal{U}_x(A \cap B) = \mathcal{U}_x(A) \wedge \mathcal{U}_x(B)$;

(N4) $\mathcal{U}_x(A) = \bigvee_{x \in A \subseteq B} \bigwedge_{y \in B} \mathcal{U}_y(B)$, $\forall x \in X, A, B \in 2^X$.

$\mathbb{NFSOFSET}(2)$ ile objeleri L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapıları, morfizmleri esnek dönüşümler olan kategoriyi göstereceğiz.

Aşağıdaki teoremde L-bulanıklaştırılmış topolojik uzaylar ((Ying 1991),(Höhle, 1980)) L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapıları aracılığıyla karakterize edilecektir:

Teorem 5.2.2: $(X,\mathcal{T})$ L- bulanıklaştırılmış topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ ve $A \subseteq X$ için $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}: X \to L^{2^X}$ dönüşümünü $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)(A) = \bigvee_{x \in B \subseteq A} \mathcal{T}(B)$ olarak tanımlarsak $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X, 2^X)$ bir L- bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısıdır. $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısına $\mathcal{T}$ L-bulanıklaştırılmış topolojisi tarafından üretilen esnek dönüşüm ve $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X, 2^X)$ üçlüsüne de $(X,\mathcal{T})$ L-bulanıklaştırılmış topolojik uzayı tarafından üretilen L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısı denir.

Tersine, $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ bir L- bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısı olsun. Her $A \subseteq X$ için $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}: 2^X \to L$ dönüşümünü $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(A) = \bigwedge_{x \in A} \mathcal{U}_x(A)$ olarak tanımlarsak $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, X üzerinde bir L-bulanıklaştırılmış topoloji olur. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ topolojisine $\mathcal{U}: X \to L^{2^X}$ L-bulanıklaştırılmış esnek dönüşümü tarafından üretilen L-bulanıklaştırılmış topoloji denir.

Ayrıca, X üzerindeki $\mathcal{U}$ L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısı için $\mathcal{U}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}$ ve X üzerindeki $\mathcal{T}$ L-bulanıklaştırılmış topolojisi için $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$ olur.

Önerme 5.2.3: $(\mathcal{U}, X, 2^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ iki L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısı olsun. $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X, 2^X) \to (\mathcal{V}, Y, 2^Y)$ bir bulanık esnek dönüşümdür $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ ve $V \in 2^Y$ için $\mathcal{U}_x(\psi^{\rightarrow})^{\leftarrow}(V) \geq \mathcal{V}_{\psi(x)}(V)$ dir.

Teorem 5.2.4: $\Phi: \mathbb{FTOP}(2) \to \mathbb{NFSOFSET}(2)$ funktoru $(X,\mathcal{T})$ L- bulanıklaştırılmış topolojik uzayını $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X, 2^X)$ üretilmiş L-bulanıklaştırılmış esnek komşuluk yapısına ve $\psi: (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ sürekli dönüşümünü $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): \left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_X}, X, 2^X\right) \to \left(\mathcal{U}_{\mathcal{T}_Y}, Y, 2^Y\right)$ bulanık esnek dönüşümüne atayan bir izomorfizmdir.

Φ funktorunun tersini $\Psi: \mathbb{NFSOFSET}(2) \to \mathbb{FTOP}(2)$ ile göstereceğiz.

5.3. L-Esnek Komşuluk Yapıları

$M(L)$, L' deki tüm sıfırdan farklı indirgenemez elemanların kümesini göstersin. Diğer bir ifadeyle, $\lambda \in M(L) \Leftrightarrow \lambda'$ asal eleman ve $\lambda' \neq 1_L$' dir.

X kümesi üzerinde L-bulanık nokta, desteği $x \in X$ ve değeri $\lambda \in L$ olan $x_\lambda : X \to L$ dönüşümüdür öyle ki $x_\lambda = \begin{cases} \lambda\,, & x = y \\ 0\,, & x \neq y \end{cases}$.

Tüm bulanık noktaların kümesi $Pt(L^X)$ ile gösterilir. Açıktır ki $Pt(L^X) = X \times M(L)$' dir.

Tanım 5.3.1: (Liu ve Luo, 1998) $x_\lambda \in Pt(L^X)$ ve $u \in L^X$ olsun. $u'(x) = \big(u(x)\big)'$ olmak üzere $\lambda \not\leq u'(x)$ ise x_λ' ya u ile q-çakışımsıdır denir ve bu $x_\lambda \hat{q} u$ ile gösterilir.

Her $x_\lambda \in Pt(L^X)$ için $\overrightarrow{x_\lambda} = \{u \in L^X : x_\lambda \hat{q} v\}$' dir.

$x_\lambda \hat{q} u$ olan $u \in L^X$ için $\{v \in L^X : v \leq u$ ve $x_\lambda \hat{q} v\}$ ailesi $\overrightarrow{x_\lambda}|u$ ile gösterilir.

(X, T) L-topolojik uzay ve x_λ bu topolojik uzayda bir L-bulanık nokta olsun.

$u \in L^X, x_\lambda$ bulanık noktasının q-komşuluğudur denir $: \Leftrightarrow \exists\, v \leq u : v \in T$ ve $x_\lambda \hat{q} v$. ((Pu ve Liu, 1980), (Liu ve Luo, 1998)).

Bu bölümde, esnek yapı L^X üzerinde kurulacak ve $X \times M(L)$ kümesi parametre kümesi olarak ele alınacaktır.

Tanım 5.3.2: $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ bir esnek küme olsun. Diğer bir ifadeyle,

$\mathcal{U} : X \times M(L) \to 2^{L^X}$, L^X üzerinde esnek yapı olsun. Eğer $\{\mathcal{U}(x_\lambda) \mid x_\lambda \in Pt(L^X)\} \subseteq 2^{L^X}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{U} : X \times M(L) \to 2^{L^X}$ dönüşümüne X üzerinde bir L-esnek komşuluk dönüşümü ve $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ üçlüsüne de bir L-esnek komşuluk yapısı denir:

(N1) $u \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ise $x_\lambda \hat{q} u$;

(N2) $u \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ve $u \leq v$ ise $v \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$;

(N3) $u, v \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ise $u \wedge v \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$;

(N4) $u \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ için öyle bir $v \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ vardır öyle ki $y_\alpha \hat{q} v$ için $v \leq u$ ve $v \in \mathcal{U}_{y_\alpha}$' dır.

$\mathbb{NSOFSET}$(L) ile objeleri L-esnek komşuluk yapıları, morfizmleri esnek dönüşümler olan ve $\mathbb{SOFSET}$ kategorisinin (tam) alt kategorisi olan kategoriyi göstereceğiz.

Aşağıdaki teoremde L-topolojik uzaylar ((Chang, 1968), (Goguen, 1967)) L-esnek komşuluk yapıları aracılığıyla karakterize edilecektir.

Teorem 5.3.3: $(X, \mathcal{T})$ L-topolojik uzay, $x_\lambda \in Pt(L^X)$ ve $\mathcal{Q}_{x_\lambda}$ bu uzayda x_λ bulanık noktasının tüm q-komşuluklarının bir ailesi olsun. $\mathcal{U}_\mathcal{T}: X \times M(L) \to 2^{L^X}$ dönüşümünü $\mathcal{U}_\mathcal{T}(x_\lambda) = \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$

bir L-esnek komşuluk yapısıdır. $\mathcal{U}_\mathcal{T}$ L-esnek komşuluk dönüşümüne $\mathcal{T}$ L-topolojisi tarafından üretilen esnek dönüşüm denir.

Tersine, $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ bir L-esnek komşuluk yapısı olsun. $u \in L^X$ için X üzerindeki $\mathcal{T}_\mathcal{U}$ ailesini $x_\lambda \hat{q} u$ olmak üzere $u \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ olarak tanımlarsak $\mathcal{T}_\mathcal{U}$, X üzerinde bir L-topoloji olur ve $\{\mathcal{U}(x_\lambda): x_\lambda \in Pt(L^X)\}$, $\mathcal{T}_\mathcal{U}$ L-topolojisi için q-komşuluk sistemidir. $(X, \mathcal{T}_\mathcal{U})$ L-topolojik uzayına $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ L-esnek komşuluk yapısı tarafından üretilen L- topolojik uzay denir.

Ayrıca, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ olur.

Önerme 5.3.4: $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ iki L-esnek komşuluk yapısı olsun. $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X \times M(L), L^X) \to (\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ bir bulanık esnek dönüşümdür $\Leftrightarrow x_\lambda \in Pt(L^X)$ ve $u \in \mathcal{V}(\psi^{\rightarrow}(x_\lambda))$ için $(\psi^{\rightarrow})^{\leftarrow}(u) \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ dir.

Burada, $\psi^{\rightarrow}(x_\lambda) = \psi^{\rightarrow}(x)_\lambda$ dır.

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki özelliği elde ederiz:

Teorem 5.3.5: $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X \times M(L), L^X) \to (\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ bir bulanık esnek dönüşümdür $\Leftrightarrow$ Uygun L-topolojik uzaylar arasındaki $\psi: (X, \mathcal{T}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{V})$ dönüşümü süreklidir.

Teorem 5.3.6: L latisi sabit olsun. $(X,\mathcal{T})$ L-topolojik uzayını $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, X\times M(L), L^X)$ L-esnek komşuluk yapısına ve $\psi:(X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}})\to(Y,\mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ sürekli dönüşümünü $(\psi,(\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}):(\mathcal{U},X\times M(L),L^X)\ \to(\mathcal{V},Y\times M(L),L^Y)$ esnek dönüşümüne atayan ve

L-topolojik uzayların $\mathbb{TOP}(\mathrm{L})$ kategorisi ile L-esnek komşuluk yapılarının $\mathbb{NSOFSET}(\mathrm{L})$ kategorisi arasında bir izomorfizm kuran $\Phi:\mathbb{TOP}(\mathrm{L})\to\mathbb{NSOFSET}(\mathrm{L})$ funktorunu elde ederiz.

Φ funktorunun tersini $\Psi:\mathbb{NSOFSET}(\mathrm{L})\ \to\mathbb{TOP}(\mathrm{L})$ ile göstereceğiz.

5.4. L-Bulanık Esnek Komşuluk Yapıları

Bu bölümde, L-bulanık esnek yapı L^X üzerinde kurulacak ve $X\times M(L)$ kümesi parametre kümesi olarak ele alınacaktır.

Tanım 5.4.1: $(\mathcal{U},X\times M(L),L^X)$ bir L-bulanık esnek küme olsun. Diğer bir ifadeyle,

$\mathcal{U}:X\times M(L)\to L^{L^X}$, L^X üzerinde L-bulanık esnek yapı olsun. Eğer $x_\lambda\in Pt(L^X)$ için $\mathcal{U}(x_\lambda)=\mathcal{U}_{x_\lambda}\in L^{L^X}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{U}:X\times M(L)\to L^{L^X}$ dönüşümüne bir L-bulanık esnek komşuluk dönüşümü ve $(\mathcal{U},X\times M(L),L^X)$ üçlüsüne de bir L-bulanık esnek komşuluk yapısı denir:

(N1) $\mathcal{U}_{x_\lambda}\neq 0_X$ ise $x_\lambda\hat{q}u$;

(N2) $u\leq v$ ise $\mathcal{U}_{x_\lambda}(u)\leq\mathcal{U}_{x_\lambda}(v)$;

(N3) $\mathcal{U}_{x_\lambda}(u\wedge v)=\mathcal{U}_{x_\lambda}(u)\wedge\mathcal{U}_{x_\lambda}(v)$;

(N4) $\mathcal{U}_{x_\lambda}(u)=\bigvee_{v\in\overrightarrow{x_\lambda}|u}\bigwedge_{y_\alpha\hat{q}v}\mathcal{U}_{y_\alpha}(v)$, $\forall x\in X,u,v\in L^X$.

L-bulanık esnek komşuluk yapılarının kategorisi $\mathbb{NFSOFSET}(\mathrm{L})$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teoremde L-bulanık topolojik uzaylar ((Shostak, 1985), (Shostak, 1989), (Kubiak, 1985)) L-bulanık esnek komşuluk yapıları aracılığıyla karakterize edilecektir:

Teorem 5.4.2: $(X,\mathcal{T})$ L-bulanık topolojik uzay olsun. Her $x_\lambda \in Pt(L^X)$ ve $u \in L^X$ için $\mathcal{U}_\mathcal{T}: X \times M(L) \to L^{L^X}$ dönüşümünü $\mathcal{U}_\mathcal{T}(x_\lambda)(u) = \begin{cases} \bigvee_{v \in \overrightarrow{x_\lambda}|u} \mathcal{T}(v), & x_\lambda \hat{q} u \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $(\mathcal{U}_\mathcal{T}, X \times M(L), L^X)$ bir L-bulanık esnek komşuluk yapısıdır. $\mathcal{U}_\mathcal{T}$ L-bulanık esnek komşuluk dönüşümüne $\mathcal{T}$ L-bulanık topolojisi tarafından üretilen esnek dönüşüm denir.

Tersine, $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ bir L-bulanık esnek komşuluk yapısı olsun. $\mathcal{T}_\mathcal{U}: L^X \to L$ dönüşümünü $\mathcal{T}_\mathcal{U}(u) = \bigwedge_{x_\lambda \hat{q} u} \mathcal{U}_{x_\lambda}(u)$ olarak tanımlarsak $\mathcal{T}_\mathcal{U}$, X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur. $(X, \mathcal{T}_\mathcal{U})$ L-bulanık topolojik uzayına $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ L-bulanık esnek komşuluk yapısı tarafından üretilen L-bulanık topolojik uzay denir.

Ayrıca, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ olur.

Önerme 5.4.3: $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ ve $(\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ iki L-bulanık esnek komşuluk yapısı olsun. $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X \times M(L), L^X) \to (\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ bir bulanık esnek dönüşümdür $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in Pt(L^X)$ ve $u \in L^Y$ için $\mathcal{U}_{x_\lambda}(\psi^{\leftarrow}(u)) \geq \mathcal{V}_{\psi(x)_\lambda}(u)$ dur.

Teorem 5.4.4: $\psi: X \to Y$ bir dönüşüm olsun.
$(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X \times M(L), L^X) \to (\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ bir bulanık esnek dönüşümdür $\Leftrightarrow$ Uygun L-bulanık topolojik uzaylar arasındaki $\psi: (X, \mathcal{T}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{V})$ dönüşümü süreklidir.

Teorem 5.4.5: L latisi sabit olsun. $(\mathcal{U}, X \times M(L), L^X)$ L-bulanık esnek komşuluk yapısını $(X, \mathcal{T}_\mathcal{U})$ L-bulanık topolojik uzayına ve $(\psi, (\psi^{\rightarrow})^{\rightarrow}): (\mathcal{U}, X \times M(L), L^X) \to (\mathcal{V}, Y \times M(L), L^Y)$ esnek dönüşümünü $\psi: (X, \mathcal{T}_\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{V})$ sürekli dönüşümüne atayan ve L-bulanık topolojik uzayların $\mathbb{FTOP}(\mathrm{L})$ kategorisi ile L-bulanık esnek komşuluk yapılarının $\mathbb{NSOFSET}(\mathrm{L})$ kategorisi arasında bir izomorfizm kuran $\Psi: \mathbb{NSOFSET}(\mathrm{L}) \to \mathbb{FTOP}(\mathrm{L})$ funktorunu elde ederiz.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

1. Shabir ve Naz tarafından tanımlanan esnek topolojik uzaylar ele alınarak bu topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları üzerine çalışılmıştır.

2. Bulanık esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylarda süreklilik, iç ve kapanış operatörleri gibi kavramlar, taban, başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi gibi yapılar detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca bulanık esnek nokta ve bir bulanık esnek noktanın bir bulanık esnek kümeye ait olması tanımlanarak bulanık esnek topolojik uzaylarda komşuluk ve Q-komşuluk yapıları çalışılmıştır.

3. Esnek topolojik uzaylar, parametre kümesine göre açık ve $2^X \coloneqq P(X)$ üzerinde bir esnek küme olarak göz önüne alınmış ve böylece esnek topolojik uzaylara yeni bir yaklaşım verilmiştir. Benzer şekilde L-bulanık esnek topolojik uzay tanımlanarak bu topolojik uzaylarda kompaktlık kavramı üzerine çalışılmıştır.

4. Esnek kümelerin özel bir çeşidi olarak L-esnek, L-bulanıklaştırılmış esnek ve L-bulanık esnek komşuluk yapıları tanımlanmış ve esnek kümelerin özel kategorileri olarak topolojik uzaylar kategorisi ile ilgili kategoriler incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Acar Ü., Koyuncu F., Talay B., Soft sets and soft rings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**, 3458-3463.

Adamek J., Herrlich H., Strecker G. E., *Abstract and Concrete Categories*, Wiley, 2004.

Ahmad B., Kharal A., On fuzzy soft sets, *Advances in Fuzzy Systems*, DOI: 10.1155/2009/586507.

Aktaş H., Çağman N., Soft set and soft groups, *Information Sciences*, 2007, **177** 2726-2735.

Aygün H., Warner M. W., Kudri S. R., On smooth L-fuzzy topological spaces, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 1997, **5**(2), 321-338.

Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygünoğlu A., Esnek Topolojik Uzaylar, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 2011.

Babitha K. V., Sunil J. J., Soft set relations and functions, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **60**, 1840-1849.

Birkhoff G., *Lattice Theory*, 3rd Edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, 1967.

Chang C. L., Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **24**(1), 182-190.

Dongsheng Z., The N-compactness in L-fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1987, **128**, 64-79.

Feng F., Jun Y. B., Zhao X. Z., Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 2621–2628.

Feng F., Li C. X., Davvaz B., Ali M. I., Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, *Soft Computing*, 2010, **14**, 899-911.

Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S., *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg Newyork, 1980.

Goguen J. A., The fuzzy Tychonoff theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1973, **43**, 734-742.

Goguen J. A., L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967, **18**, 145-174.

Höhle U., Upper-semicontinuous fuzzy sets and applicaitons, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1980, **78**, 659-673.

Johnstone P. T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Kharal A., Ahmad B., Mappings on fuzzy soft classes, *Advances in Fuzzy Systems*, DOI: 10.1155/2009/407890.

Kubiak T., On fuzzy topologies, PhD Thesis, Adam Mickiewicz University, Poznan, Poland, 1985.

Liu Y. M., Luo M. K., *Fuzzy topology*, World Scientific Publication, Singapore, 1998.

Lowen R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1976, **56**, 621-633.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**, 589–602.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Intuitionistic fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 677-692.

Maji P. K., Biswas R., Roy R., An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, **44** , 1077-1083.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Molodtsov D., Soft set theory- First results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**(415), 19-31.

Nazmul S., Samanta S. K., Soft topological groups, *Kochi Journal of Mathematics*, 2010, **5**, 151-161.

Pei D., Miano D., From soft sets to information systems, *Granular Computing IEEE International Conference on (2)*, Hangzhou, China, 25-27 July 2005, 617-621.

Pu P. M., Liu Y. M., Fuzzy topology (I), Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith converges, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1980, **76**, 571-599.

Ramadan A. A., Smooth topological spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **48,** 371-375.

Ramadan A. A., Abbas S. E., On L-smooth compactness, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(1), 59-73.

Rodabaugh S. E., *Powerset Operator Foundations For Poslat Fuzzy Set Theories and Topologies, Chapter 2 in Mathematics of Fuzzy Sets:Logic, Topology and Measure Theory*, U. Höhle and S.E. Rodabaugh eds., Kluwer Academic Publishers**,** Boston Dordrecht London**,** 91-116, 1999.

Shabir M., Naz M., On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786–1799.

Shostak A. P., On a fuzzy topological structure, *Supplemento ai Rendiconti Circolo Matematico di Palermo Serie II*, 1985, **11**, 89-103.

Shostak A. P., Two decades of fuzzy topology: Basic ideas, notions and results, *Russian Mathematical Surveys*, 1989, **44**, 125-186.

Tanay B., Kandemir M. B., Topological structure of fuzzy soft sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 2952–2957.

Terziler M., Öner T., *Kafes Teorisi*, Cilt no:178, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi Ders Kitapları Serisi, 2002.

Wang G. J., Theory of topological moleculer lattices, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **47**, 351-376.

Xu W., Ma J., Wang S., Hao G., Vague soft sets and their properties, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **58**, 787–794.

Ying M., A new approach to fuzzy topology (I), *Fuzzy Sets and Systems*, 1991**, 39**, 303-321.

Ying-Ming L., Mao-Kang L., *Fuzzy Topology*, World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

Zadeh L. A., Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, **8**, 338-353.

Zorlutuna I., Aktağ M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYINLAR ve ESERLER

[1] **Pazar B.**, Aygün H., Üretilmiş sezgisel fuzzy topolojik uzaylar, *II. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu*, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 04-07 Temmuz 2007.

[2] **Pazar B.**, Çetkin V., Aygün H., Interval-valued L-fuzzy topological groups, *The 20th International Congress of The Jangjeon Mathematical Society*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 21-23 Ağustos 2008.

[3] Çetkin V., **Pazar B.**, Aygün H., (L,M)-intuitionistic fuzzy filters, *The 20th International Congress of The Jangjeon Mathematical Society*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 21-23 Ağustos 2008.

[4] Çetkin V., **Pazar B.**, Aygün H., (L,M)-sezgisel fuzzy idealler, *Türk Matematik Derneği XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Koç Üniversitesi, İstanbul, 01-04 Eylül 2008.

[5] **Pazar B.**, Aygün H., On interval-valued neutrosophic subgroups, *International Conference on Topology and its Applications ICTA2009*, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 09-11 Temmuz 2009.

[6] **Pazar Varol B.**, Aygün H., On intuitionistic fuzzy metric groups, *The First International Symposium on Computing in Science and Engineering*, Gediz Üniversitesi, Kuşadası, 03-05 Haziran 2010.

[7] Shostak A., **Pazar Varol B.**, Aygün H., Soft neighborhood sets, 1*6th International Conference on Mathematical Modeling and Analysis MMA 2011*, University of Latvia, Sigulda (Letonya), 25-28 Mayıs 2011.

[8] **Pazar Varol B.**, Aygün H., Esnek topolojik uzaylara giriş, *6. Ankara Matematik Günleri AMG 2011*, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 02-03 Haziran 2011.

[9] **Pazar Varol B.**, Aygün H., An introduction to fuzzy soft topology, *The Second International Fuzzy Systems Symposium FUZZYSS' 11*, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 17-18 Kasım 2011.

[10] **Pazar Varol B.**, Shostak A., Aygün H., Categories related to topology viewed as soft sets, Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, DOI:10.2991/eusflat.2011.52.

[11] Aygünoğlu A., **Pazar Varol B.**, Çetkin V., Aygün H., Interval-valued intuitionistic fuzzy subgroups based on interval-valued double t-norm, Neural Computing and Applications, DOI:10.1007/s00521-011-0773-5.

[12] **Pazar Varol B.**, Aygün H., Fuzzy soft topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2012, **41**(3), 407-419.

[13] **Pazar Varol B.**, Aygün H., Intuitionistic fuzzy metric groups, *International Journal of Fuzzy Systems*, 2012, **14**(3), 454-461.

[14] **Pazar Varol B.**, Aygünoğlu A., Aygün H., On fuzzy soft rings, *Journal of Hyperstructures*, (kabul edildi).

[15] **Pazar Varol B.**, Aygün H., On soft Hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, (kabul edildi).

[16] **Pazar Varol B.**, Shostak A., Aygün H., A new approach to soft topology, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, (kabul edildi).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Ordu' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ordu' da tamamladı. 1999 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2006 yılında ise Yüksek Lisans öğrenimini bitirerek Doktora öğrenimine başladı. 2004 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.