T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS NODAL PROBLEM

DOKTORA TEZİ

Emrah YILMAZ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

KASIM-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS NODAL PROBLEM

DOKTORA TEZİ

Emrah YILMAZ

(07221202)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 16 Ekim 2012

KASIM-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN TERS NODAL PROBLEM

DOKTORA TEZİ

Emrah YILMAZ

(07221202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 16 Ekim 2012
Tezin Savunulduğu Tarih: 9 Kasım 2012

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü)**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)**
Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)
Prof. Dr. Cihan ORHAN (A.Ü)
Prof. Dr. Niyazi BULUT (F.Ü)

KASIM-2012

ÖNSÖZ

Yurt içi doktora burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' a teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU'na şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocama da teşekkür ederim.

Emrah YILMAZ

ELAZIĞ–2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **II**

İÇİNDEKİLER ..... **III**

ÖZET ..... **IV**

SUMMARY ..... **V**

TABLOLAR LİSTESİ ..... **VI**

SEMBOLLER LİSTESİ ..... **VII**

1. GİRİŞ **1**

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 13

2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI **29**

2.1. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN ASİMPTOTİK OLARAK DENK NODAL DİZİLER ..38
2.2. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN KARARLILIĞI 48
2.3. STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN YÜKSEK MERTEBEDEN KARARLILIK 59

3. DİFÜZYON DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ **64**

3.1. KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN DİFÜZYON DENKLEMİNE İNDİRGENMESİ.....66
3.2. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İLE İLGİLİ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLER 69

4. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI **75**

4.1. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN ASİMPTOTİK OLARAK DENK NODAL DİZİLER.....82
4.2. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN KARARLILIĞI 88
4.3. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN YÜKSEK MERTEBEDEN KARARLILIK.....98

5. DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI **107**

5.1. DİRAC DENKLEM SİSTEMİ 107
5.2. DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN KARARLILIĞI 125

6. SONUÇ **137**

KAYNAKLAR **138**

ÖZGEÇMİŞ .....

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci bölümde ters öz değer ve ters nodal problemler teorisinin tarihçesi ve bu alanda yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. Ayrıca tezde kullanılacak olan çeşitli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problemin iyi tanımlılığı incelenmiştir. $\int_0^1 q = 0$ olmak üzere mutlak bir metrik altında tüm (q, a, β) operatörlerinin uzayının bir denklik bağıntısı ile verilen, tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin uzayına homeomorf olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $q \in C^N$ olmak üzere ilgili metrikler q potansiyel fonksiyonunun türevleri ile büyütüldüğü zamanda, Φ nodal dönüşümünün halen daha bir homeomorfizm olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, difüzyon denkleminin bazı fiziksel özellikleri verilmiş ve Klein-Gordon kısmi türevli diferensiyel denkleminden, bazı dönüşümler kullanılarak difüzyon denklemi elde edilmiştir. Ayrıca difüzyon sınır değer problemi için bazı temel teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, difüzyon operatörü için ters nodal problemin iyi tanımlılığı irdelenmiştir. Bunun için $(\Omega_{dif}, d_{\Omega_{dif}})$ ve $(\Sigma^*_{dif_1}, d_{\Sigma_{dif}})$ uzaylarının homeomorfik uzaylar olduğu gösterilmiştir. Ayrıca difüzyon denklemindeki q potansiyel fonksiyonunun $m.$ mertebeden türevleri ile, ilgili metrikler büyütüldüğü zaman bile, nodal dönüşümün halen daha bir homeomorfizm olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, Dirac denklem sistemi belirli sınır koşulları ile ele alınmış, Dirac denklem sistemi için ters nodal problemin kararlılığı incelenmiştir.

Altıncı bölümde, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve bu konuda mevcut olan açık problemler ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Ters Problemler, Ters öz değer problemi, Ters nodal problem, Öz fonksiyon, Öz değer, Sturm-Liouville operatörü, Difüzyon operatörü, Dirac operatörü, İyi tanımlı problem, Potansiyel fonksiyon, Nodal noktalar, Nodal uzunluk, Homeomorfizm, Denklik bağıntısı, Bölüm cümlesi, Nodal dönüşüm, Asimptotik olarak denk nodal dizi, Kararlılık, Pseudo metrik.

SUMMARY

Inverse Nodal Problem for Differential Operators

This study is constructed in six chapters.

In chapter one, it is expressed a historical analysis of inverse spectral theory and inverse nodal theory. Moreover, some fundamental definitions and theorems which is used in thesis are given.

In chapter two, well-posedness of the inverse nodal problem for Sturm-Liouville operator is given. It is shown that the space of all (q, α, β) operators such that $\int_0^1 q = 0$, under a certain metric, is homeomorphic to the partition set of all asymptotically equivalent nodal sequences induced by an equivalence relation. It is found that Φ is still a homeomorphism when the corresponding metrics are magnified by the derivatives of q, whenever $q \in C^N$.

In chapter three, some physical properties of diffusion equation are given. Klein-Gordon partial differential equation is reduced to classical diffusion equation by using some transformations. Also, some basic lemmas and theorems are proved for diffusion boundary value problem.

In chapter four, well-posedness of the inverse nodal problem for diffusion operator is investigated. It is shown that the metric spaces $(\Omega_{dif},\ d_{\Omega_{dif}})$ and $(\Sigma^*_{dif_1},\ d_{\Sigma_{dif}})$ are homeomorphic. Moreover, It is found that nodal transformation of diffusion operator is still a homeomorphism when the corresponding metrics are magnified by the derivatives of potential function for diffusion operator, whenever $q \in C^N$.

In chapter five, Dirac equation system with some certain boundary conditions is considered. And stability of inverse nodal problem for Dirac operator is checked over.

In chapter six, obtained results are evaluated and open problems in this subject are presented.

Key Words: Inverse Problems, Inverse eigenvalue problem, Inverse nodal problem, Eigenfunction, Eigenvalue, Sturm-Liouville operator, Diffusion operator, Dirac operator, Well-posed problem, Potential function, Nodal points, Nodal lengths, Homeomorphism, Equivalent relation, Partition set, Nodal map, Asymptotically equivalent nodal sequence, Stability, Pseudo metric.

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1. (2. 1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, q(x) = x$ için nodal noktaları ……..……...32

Tablo 2.2. (2. 1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin $\alpha = 0, \beta = 0, q(x) = x$ için nodal noktaları……..……33

Tablo 2.3. $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{2},\ a_0 = 1,\ q(x) = x$ için (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları……...……. 45

Tablo 2.4. $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0,\ q(x) = x$ için verilen (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları…….45

Tablo 4.1. (4. 1), (4. 4), (4. 5) difüzyon sınır değer probleminin $p(x) = q(x) = x$ ve $h = H = 0$ özel hali için nodal noktaları…….. 77

Tablo 4.2. $h = H = 0,\ p(x) = q(x) = x$ özel hali için verilen (4.2)-(4.4) difüzyon sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları…….. 84

Tablo 5.1. $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0,\ m = 1,\ a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1, V(x) = x$ için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları…….....……..116

Tablo 5.2. $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2},\ m = 1,\ a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1,\ b_1 = 1,\ V(x) = x$ için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları…….…….116

Tablo 5.3. (5.1),(5.14) Dirac probleminin $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, a_0 = b_1 = 1, a_1 = b_0 = -1,$ $m = 1,\ V(x) = x$ özel hali için birinci öz fonksiyona ait nodal noktalar ……...121

Tablo 5.4. $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0,\ m = 1,\ a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1, V(x) = x$ için (5.1)-(5.20) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları ……...…..…..122

Tablo 5.5. $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2},\ m = 1,\ a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1,\ b_1 = 1,\ V(x) = x$ için (5.1)-(5.20) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları…….……..122

Tablo 5.6. (5.1), (5.22) Dirac probleminin $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0,\ m = 1,\ V(x) = x$ için birinci öz fonksiyona ait nodal noktalar …….....…..125

SEMBOLLER LİSTESİ

L	**:** Sturm-Liouville Operatörü
$L_{p,q}$	**:** Difüzyon operatörü
$L_2[a,b]$	**:** $[a,b]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, reel değerli ve karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_1[a,b]$	**:** $[a,b]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a,b]$	**:** $[a,b]$ aralığında sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
$W_1^2(\Omega)$	**:** Sobolev Uzayı
q	**:** Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon
(p,q)	**:** Difüzyon operatörü için potansiyel fonksiyon çifti
V	**:** Dirac operatörü için potansiyel fonksiyon
O	**:** Sınırlı değerler
o	**:** Sonsuz küçük değerler
h, H	**:** Sınır şartlarındaki impedance sabitleri
λ_n	**:** n. öz değer
$y_n(x,\lambda_n)$	**:** n. öz değere karşılık gelen n. öz fonksiyon
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
δ, δ^m	**:** Fark bölüm operatörü, m. mertebeden fark bölüm operatörü
$\hbar, c$	**:** Planck sabiti, Işık hızı
$x_j^{(n)}$	**:** j. nodal nokta
$l_j^{(n)}$	**:** j. nodal uzunluk
$I_j^{(n)}$	**:** j. nodal bölge
$\sim$	**:** Denklik bağıntısı
Ω	**:** Tüm Sturm-Liouville operatörlerinin uzayı
Σ	**:** Sturm-Liouville operatörü için geçerli tüm nodal dizilerin uzayı
$x_{j,1}^{(n)}$	**:** Dirac operatörü için birinci öz fonksiyonun j. nodal noktası
$l_{j,1}^{(n)}$	**:** Dirac operatörü için birinci öz fonksiyonun j. nodal uzunluğu
Ω_{Dir}	**:** Tüm Dirac operatörlerinin uzayı
Σ_{Dir}	**:** Dirac operatörü için geçerli tüm nodal dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

Lineer diferensiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Spektral analizin ters problemleri bir lineer diferensiyel operatörün bazı spektral özelliklerine göre şeklinin belirlenmesi problemidir (Çakır, 2007).

Spektral analizin ters problemleri matematiksel fiziğin lineer olmayan diferensiyel denklemlerinin çözülmesi için yeni bir yöntem oluşturması bakımından önemlidir. Bu tür ters problemler; matematik, fizik, mekanik, elektronik, jeofizik, meteoroloji, sismoloji, tıp ve bu gibi başka doğa bilimlerinde ortaya çıkan önemli problemlerin çözülmesinde özel role sahiptir (Çakır, 2007).

Sturm-Liouville teorisi 1829 ve 1836 yılları arasındaki Sturm'un özgün çalışması ile başlamaktadır. 1837 yılında Sturm ve Liouville, kısa fakat oldukça önemli çalışmalarını " *Journal de Mathematique*" adlı dergide yayınladılar. Bu çalışmalarında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{1.1}$$

diferensiyel denklemi için sınır değer problemini ele aldılar. Burada λ kompleks bir parametre, q ise $[0,1]$ aralığı üzerinde karesel integrallenebilen reel değerli bir fonksiyondur. Sturm ve Liouville, (1.1) denkleminin

$$\begin{aligned} y(0)cos\alpha + y'(0)sin\alpha = 0, \\ y(1)cos\beta + y'(1)sin\beta = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

sınır koşullarını sağlayan aşikâr olmayan çözümlerinin mevcut olup olmadığını incelediler. Burada α, β; 0 ve π arasındaki reel sayılardır. (1.1), (1.2) sınır değer problemi çözülebilirse, λ kompleks sayısına q, α ve β nın öz değeri denir. λ için buna bağlı aşikâr olmayan çözümlere, q, α ve β nın öz fonksiyonları denir. Bu problemin tüm öz değerlerin oluşturduğu kümeye, (1.1), (1.2) ile verilen sınır değer probleminin spektrumu denir (Pöschel ve Trubowitz, 1987).

Spektral teoride önemli gelişmeler bazen bir boyutlu zamana bağlı olmayan Schrödinger operatörü adını da alan

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

şeklindeki Sturm-Liouville operatörü için elde edilmiştir. Böyle operatörler için spektral teori üzerine ilk çalışmalar; Bernoulli, D'alambert, Euler, Sturm ve Liouville tarafından çubuğun titreşimi problemleri için yapılmıştır. 20. yüzyılda diferensiyel ve integral operatörlerin değişik sınıfları için spektral teori hızlı bir şekilde gelişmiştir. Bu alanda; Birkhoff, Hilbert, Neumann, Steklov, Stone, Weyl gibi ünlü matematikçilerin verdiği fikirler büyük katkılarda bulunmuştur. Spektral teorinin ters problemleri ile ilgili temel sonuçlar, 20. yüzyılın ikinci yarısında elde edilmiştir (Çakır, 2007).

Ters Problemler muhtemelen 19. yüzyılda veya daha öncesinde eski Yunanistan da ortaya çıkmıştır (Chadan, Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997). Bununla beraber Sturm-Liouville operatörü için ters problemlerin başlangıcı, 20. yüzyılın başlarında Rus astronomist-fizikçi Ambartsumyan tarafından yapılan çalışma ile olmuştur. Ambartsumyan çalışmasında

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0,$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \tag{1.3}$$

ile verilen Sturm-Liouville probleminin öz değerlerinin kümesi $\lambda_n = n^2\pi^2$ ise, $q = 0$ olacağını göstermiştir (Ambartsumyan, 1929). Aslında bu düşünce genel olarak doğru değildir. Yani bir spektrum genelde potansiyel fonksiyonu belirlemek için tek olarak yeterli değildir. Ancak bu çalışma, spektral teori alanında çalışacak olan matematikçilere, potansiyel fonksiyonun öz değerlerin bilgisini kullanarak elde edilebileceği konusunda fikir vermesi bakımından önemlidir (Chadan, Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997).

1940 lı yılların ortalarından itibaren bu problem birçok matematikçinin ilgisini çekti. 1946 yılında İsveçli matematikçi Borg

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0 \tag{1.4}$$

şeklinde verilen Sturm-Liouville denklemini, $H \neq H'$ olmak üzere

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(1) + Hy(1) = 0 \tag{1.5}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(1) + H'y(1) = 0 \tag{1.6}$$

şeklinde verilen iki farklı sınır koşulu ile ele aldı. $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$; (1.4), (1.5) probleminin spektrumu, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise; (1.4), (1.6) probleminin spektrumu olmak üzere, $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrum çiftinin $q \in L_2$ potansiyel fonksiyonunu tek olarak belirlediğini gösterdi. Borg, aynı zamanda (1.5) de, $h = H$ ve q potansiyeli aralığın orta noktasına göre simetrik ise yani $q(x) = q(1-x)$ ise, tek bir $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrumunun q potansiyelini tek olarak belirlemek için yeterli olduğunu ispatladı (Borg, 1946).

1949 yılında Levinson, Borg'un ele aldığı problemi inceledi ve kompleks analiz tekniklerini kullanarak Borg'un ispatlarını önemli ölçüde kısalttı (Levinson, 1949).

1950 yılında Marchenko, Borg'un problemini ele aldı. İki spektrumun yalnızca q potansiyel fonksiyonunu değil, aynı zamanda (1.5), (1.6) sınır koşullarındaki h, H ve H' sabitlerini belirlemek için yeterli olduğunu gösterdi (Chadan, Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997).

Gel'fand ve Levitan, öz değerlerin kümesinin spektral bilgi olarak kullanılmasına bir alternatif arayan ilk matematikçilerdir. 1951 yılında Gel'fand ve Levitan, potansiyel fonksiyonun bir $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrumu ve bir $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ normlaştırıcı sabitler kümesi kullanılarak tek olarak belirlenebileceğini ispatladılar. Burada

$$\rho_n(q) = \frac{\|y(:,q,\lambda_n)\|^2}{\|y'(0,q,\lambda_n)\|^2}, n = 1,2,\dots$$

normlaştırıcı sabitlerin bir kümesidir. Normlaştırıcı sabitlerin başka bir kümesi

$$\kappa_n(q) = log\left|\frac{y'(1,q,\lambda_n)}{y'(0,q,\lambda_n)}\right|, n = 1,2,\dots$$

şeklindedir (Gel'fand ve Levitan, 1951). $\kappa_n(q)$ normlaştırıcı sabitleri, Dirichlet sınır koşulları olduğu durumda kullanılabilir. Bu çalışma potansiyel fonksiyonu belirlemek için başka spektral bilgi kümelerinin de kullanılabileceğini gösterdi. Fakat halen daha potansiyel fonksiyonu tek olarak belirlemek için iki spektral bilgi dizisine ihtiyaç vardır.

1952 yılında Marchenko yaptığı çalışmada, teklik teoremini ispatlarken Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan faydalanmıştır. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu, (1.1) diferensiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 0, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ve $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin öz fonksiyonları olsun. Bu taktirde

$$a_n = \int_0^{\pi} \varphi_n^2(x, \lambda_n) dx,$$

verilen operatörün normlaştırıcı sabitleri,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{a_n},$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko, Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Söz konusu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm Liouville tipinde bir diferensiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartı ifade etmiştir (Marchenko, 1952).

1964 yılına kadar bu spektral değerlere neden olan L_2 tipi potansiyel fonksiyonun varlığı için spektra üzerine gerek ve yeter koşulların tam bir çözümü mevcut değildi. Bu çözüm 1964 yılında Levitan tarafından verildi (Levitan, 1964).

Sturm-Liouville operatörleri için ters problemin iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında Levitan ve Gasymov tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır (Levitan ve Gasymov, 1964).

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında kullanılan yöntemler sürekli artmıştır. Örneğin; 1967 yılında bir grup Amerikalı fizikçi ve matematikçi; Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, verilen başlangıç koşulu için Korteweg-de Vries (KDV) denklemini ters saçılma yöntemi ile çözerek önemli bir metod geliştirdiler (Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, 1967). 1968 yılında Lax, KDV denklemini lineer denklemler yardımı ile çözerek ters saçılma yöntemini daha genel bir çatı içerisine yerleştirmiştir ve bu çatı daha sonra diğer kısmi türevli denklemleri çözmede bir yöntem olarak tekniği genelleştirmenin yolunu açmıştır. Ters saçılma metodu, lineer olmayan kismi diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılır. Metod; başlangıç değer probleminin, bir lineer integral denklemine dönüştürülmesi esasına dayanır. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulaması olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen daha yoğun bir şekilde hem matematikçiler hem de fizikçiler tarafından çalışılmaktadır (Öğün, 2008).

Burada ise şu soru karşımıza çıkmaktadır. "Acaba sadece spektral değerlerinin kısmi bir bilgisi varsa ne olur? Bu sorunun cevabı 1973 yılında Hoschtadt tarafından verildi. Hoschtadt; eğer bir spektrum tam olarak belli ve diğer spektrum bir mutlak Λ indis kümesi üzerinden eksik bir bilgi ile verilmişse, q potansiyel fonksiyonu sadece, verilen bir q potansiyelinin öz fonksiyonlarının indis kümesi üzerinden bir mutlak toplam olarak elde edildiğini gösterdi (Hoschtadt, 1973).

1978 yılında Hald, sonlu bir aralıkta ters Sturm-Liouville problemini çözmek için bir algoritma verdi. Burada temel fikir, problemi sonlu sayıda lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgemekti (Hald, 1978).

1978 yılında Hoschtadt ve Liebermann, q potansiyel fonksiyonu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında belli ise, tek bir spektrumun aralığın geri kalan kısmında q potansiyel fonksiyonunu belirlemek için yeterli olduğunu gösterdiler. Bu tür problemlere literatürde yarı-ters problemler denir (Hoschtadt ve Liebermann, 1978).

Trubowitz ve çalışma arkadaşları, öz değerlerin bir tam kümesine ek olarak uç noktalarda öz fonksiyonların tam bilgisinin q potansiyel fonksiyonunu belirlemek için yeterli olduğunu gösterdi. Örneğin; $h = H = \infty$ ve $\kappa_n = log\left|\frac{u_n'(1)}{u_n'(0)}\right|$ ise $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümesi q potansiyel fonksiyonunu tek olarak belirler. $h = \infty$, $H < \infty$ ve $\kappa_n = log\left|\frac{u_n(1)}{u_n'(0)}\right|$ olarak tanımlanırsa $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ spektrumu ve $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümesi q potansiyel fonksiyonunu tek olarak belirler (Chadan, Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997).

1986 yılında McLaughlin, spektral bilgi kullanılarak bir diferensiyel denklemdeki katsayıları elde etmek için kullanılan metodları ve bu metodların özelliklerini inceledi. Ayrıca dördüncü mertebeden ters öz değer problemlerini araştırdı (McLaughlin, 1986).

(1.4), (1.5) probleminin spektrumu $\lambda_n(H)$ ile gösterilsin. N sabit bir tam sayı ve $\{H_j\}$ ise sonlu bir limit noktası ile verilen reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. McLaughlin ve Rundell, potansiyel fonksiyonun $\{\lambda_N(H_j)\}_{j=1}^{\infty}$ değerleri kullanılarak tek olarak elde edilebileceğini ispatladılar (McLaughlin ve Rundell, 1987).

Sturm Liouville operatörleri için ters problemler teorisinde dönüşüm operatörü kavramı oldukça önemli bir role sahiptir. Dönüşüm operatörü, iki farklı Sturm-Liouville denkleminin çözümlerini birbirine bağlar. Bu kavram ilk olarak operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsarte, Lions ve Levitan (Levitan, 1978) tarafından ortaya konulmuştur. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörleri ilk olarak Povzner tarafından oluşturulmuştur (Povzner, 1948). Ters problemler teorisinde dönüşüm operatörleri Gel'fand, Levitan ve Marchenko tarafından kullanılmıştır (Freiling ve Yurko, 2001).

Ters nodal problemler teorisi, ters spektral teoriye göre oldukça yeni bir konudur. 1988 yılında ilk defa McLaughlin, Dirichlet sınır koşuluna sahip bir boyutlu Schrödinger operatörünü elde etmek için nodal noktaların (Öz fonksiyonların sıfırlarının) bir kümesini kullandı. Bu çalışmada McLaughlin, $q \in L_2(0,1)$ olmak üzere

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0 \tag{1.7}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{1.8}$$

problemini ele aldı. Bu problemin öz fonksiyonların sıfırlarını, $n \geq 2$ için

$$0 < x_n^1 < x_n^2 < x_n^3 < \cdots < x_n^{n-1} < 1$$

olarak tanımladı (McLaughlin, 1988a). McLaughlin, potansiyel fonksiyonu belirlemek için hem öz değerleri hem de nodal noktaları kullanmak istedi. Fakat çalışması esnasında potansiyel fonksiyonu tek olarak belirlemek için sadece nodal noktaların bilgisinin yeterli olduğunu ispatladı. 1988 yılında Shen; McLaughlin'den bağımsız olarak string operatörü için ters nodal problemi çözdü (Shen, 1988). Genel olarak ters nodal problem, ters spektral problemden daha basit ve daha direkt bir yöntemdir. Nodal nokta bilgisini kullanmaktaki amaç, normlaştırıcı sabitlere bir alternatif bulma isteğidir.

1989 yılında McLaughlin ve Hald bu konu ile ilgili diğer çalışmalar incelediler ve McLaughlin'in daha önce verdiği metodu kullanarak genel sınır koşulları durumu için teklik teoremini genelleştirdiler. Aynı yıl, teklik sonuçları ile bağlantılı olarak bazı sınırlar ve algoritmalar kurdular ve buna bağlı çeşitli sayısal sonuçlar verdiler (Njue, 2003).

1989 yılında Hald ve McLaughlin

$$(Py_x)_x + \lambda\rho y = 0, \qquad 0 < x < L,\ y_x(0) = y(L) = 0,$$

problemini ele aldılar ve nodal noktaların herhangi bir yoğun kümesinin, P ve ρ yu tek olarak belirlediğini gösterdiler. Ayrıca yapılandırma için bazı algoritmalar kurdular (Hald ve McLaughlin, 1989).

1995 yılında McLaughlin ve Hald; dikdörtgensel bir zar çalışmasında ortaya çıkan öz değer problemini ele aldılar. Bu problemin matematiksel modeli, Dirichlet sınır koşuluna sahip bir eliptik diferensiyel denklemdir. Bu problem için potansiyel fonksiyonun, nodal nokta bilgisi kullanılarak bir sabit farkla tek olarak elde edilebileceğini ispatladılar (McLaughlin ve Hald, 1995).

1996 yılında Browne ve Sleeman, sonlu bir aralıkta regüler Sturm-Liouville problemi için verilen ters problemle ilgili Hald ve McLaughlin'in verdiği sonuçları, sınır koşullarının öz parametreye bağlı olması durumuna genişletti. Özel olarak böyle bir problemde potansiyel fonksiyonun ve sınır koşullarının, öz fonksiyonların sıfırlarını kullanarak tek olarak elde edilebileceğini gösterdiler. Ayrıca Hald ve McLaughlin'in verdiği ispatları basitleştirdiler (Browne ve Sleeman, 1996). 1997 yılında ise Browne ve Sleeman; sınır koşullarında öz parametre bulunan regüler Sturm-Liouville problemini tekrar ele aldılar. Öz değerlerin ve bunlarla uyumlu tanımlanan normlaştırıcı sabitlerin, potansiyel fonksiyonu tek olarak belirlediğini gösterdiler (Browne ve Sleeman, 1997).

1997 yılında Xue- Feng Yang

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0,$$

$$y(0)cos\alpha + y'(0)sin\alpha = 0,$$

$$y(1)cos\beta + y'(1)sin\beta = 0,$$

problemini ele aldı. Burada $0 \le \alpha, \beta \le \pi, q \in L_1[0,1]$ şeklindedir. Yang; McLauglin'in kullandığı metodu kullanarak, $\alpha = 0$ ya da $\beta = 0$ olması durumu için teklik teoremini ispatladı. Ayrıca $0 \le \alpha, \beta \le \pi, q \in L_1[0,1]$ için daha önce McLaughlin ve Hald tarafından verilen bir sayısal çözüm gereksinimini ortadan kaldırmak için nodal noktaların bilgisinden bir tam çözüm elde etti (Xue- Feng Yang, 1997).

1998 yılında McLaughlin ve Hald

$$(Py_x)_x + \lambda\rho y = 0, \qquad 0 \le x \le L, y(0) = y(L) = 0,$$

ile gösterilen bir ışığın boylamasına titreşim problemini ele aldılar. Burada P esnekliği ve ρ ise yoğunluğu göstermektedir. Bu çalışmalarında yoğunluk ve esnekliğin, her ikisi de sınırlı varyasyonda olacak şekilde sabitlenmek üzere nodal noktaların yoğun bir kümesi ile tek olarak belirlenebileceğini gösterdiler. Yapılandırma için bazı algoritmalar verdiler (Hald ve McLaughlin, 1998).

1998 yılında Law ve Ching Fu Yang; Xue- Feng Yang'ın probleminin aynısını ele aldılar. Nodal nokta bilgisi ile q nun integral ortalamasının birlikte kullanımının sadece potansiyel fonksiyon ve sınır şartlarının yapılandırılması için değil, aynı zamanda potansiyel fonksiyonun türevlerinin yapılandırılması için de yeterli olduğunu gösterdiler. Verdikleri algoritma birinci dereceden bir yakınsaklık oranına sahipti ve bu algoritmanın potansiyel fonksiyonun düzgünlüğünü çalışmak için faydalı olduğu görülmekteydi. Özellikle verilen herhangi bir N negatif olmayan tamsayısı için $q \in C^{N+1}$ olmak üzere, $q^{(k)}$ $(k = 1,2, \dots, N)$ türevlerinin nodal nokta bilgisi kullanılarak yaklaşık olarak elde edilebileceğini ispatladılar (Law ve Ching Fu Yang, 1998) .

1999 yılında Law, Shen ve Yang; Xue- Feng Yang'ın 1997 yılında incelediği problemi ele aldılar ve herhangi bir $q \in L_1[0,1]$ potansiyel fonksiyonu için Yang'ın daha önce elde ettiği sonucu geliştiren düz ve basit bir yapılandırma formülü verdiler (Law, Shen ve Yang, 1999; Law, Shen ve Yang, 2001).

2001 yılında Law ve Tsay; Xue- Feng Yang'ın problemini ele aldı ve $\int_0^1 q = 0$ olmak üzere mutlak metrik altında tüm (q, a, β) operatörlerinin uzayının, bir denklik bağıntısı ile verilen tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bölüm uzayına homeomorf olduğunu gösterdiler (Law ve Tsay, 2001).

2001 yılında Xue- Feng Yang; kendisinin 1997 yılında ortaya attığı problemi tekrar ele aldı ve $(0, b)$, $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında nodal noktaların herhangi bir yoğun alt kümesinin, potansiyel fonksiyonu ve sınır koşul bilgisini tek olarak belirlediğini gösterdi (Xue- Feng Yang, 2001).

2002 yılında Chen, Cheng, Law ve Tsay; 2001 yılında Law ve Tsay'ın ortaya koyduğu problemi ele aldılar. q potansiyel fonksiyonunun noktasal bir limitle nodal bilgilerden elde edilebileceğini gösterdiler. Bu durumda yakınsaklığın L_1 deki yakınsaklık olduğunu ispatladılar (Chen, Cheng, Law ve Tsay, 2002).

2006 yılında Cheng ve Law; Hill operatörü için ters nodal problemi çalıştılar. Periyodik (veya anti periyodik) problemin öz fonksiyonlarının nodal noktaları kullanılarak teklik, yapılandırma ve kararlılık problemlerini çözdüler. Ayrıca $\int_0^1 q = 0$ ile normalize edilen periyodik q potansiyellerinin uzayının, yarı nodal dizi uzaylarından oluşan bölüm uzayına homeomorf olduğunu gösterdiler (Cheng ve Law, 2006).

2007 yılında Currie ve Watson; graflar üzerinde ters nodal problemleri incelediler. Verilen nodal nokta bilgisi için potansiyel fonksiyonun tekliğini ispatladılar ve q nun yapılandırma formülünü, L_1 uzayında $n.$ terimi sadece $n.$ öz değere bağlı nodal bilgiyle bağlantılı olan L_1 tipi fonksiyonların bir dizisinin limiti olarak verdiler (Currie ve Watson, 2007).

2009 yılında Binding ve Watson;

$$y_j'' + (\lambda a_j + \mu b_j + q_j)y_j = 0, \qquad j = 1,2$$

olarak verilen (λ, μ) öz değer çiftine bağlı Sturm-Liouville denklemlerinin iki parametreli sistemi için nodal noktaların yoğun bir kümesini kullanarak, ayrık sınır koşulu parametreleri ve $q_j \in L_1$ potansiyel fonksiyonlarının teklik ve yapılandırma formüllerini elde ettiler (Binding ve Watson, 2009).

2010 yılında Yang; biri klasik sınır koşulu diğeri lokal olmayan integral sınır koşulu olacak şekilde bu sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville problemini ele aldı. Nodal noktaların yoğun bir alt kümesinin, Sturm-Liouville denkleminin potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşul parametrelerini tek olarak belirlediğini gösterdi (Yang, 2010a).

2010 yılında Kuryshova ve Shieh; Volterra tipi integral denklemi ve Sturm-Liouville diferensiyelinden oluşan integral diferensiyel operatörü için ters nodal problemi ele aldılar. İntegral kısmındaki çekirdek fonksiyonu bilinmek üzere potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarını yapılandırdılar. Bir teklik teoremi verdiler ve sınır koşul parametreleri ile potansiyel fonksiyonu için bir yapılandırma formülü elde ettiler (Kuryshova ve Shieh, 2010).

2011 yılında Yang ve Xiao-Ping Yang; Sonlu bir aralıkta sınır koşulları polinom şeklinde spektral parametre içeren Sturm-Liouville denklemi için ters nodal problemi çalıştılar. Bir teklik teoremi ispatladılar ve nodal nokta bilgisinin Sturm-Liouville denklemindeki potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki polinomları tek olarak belirlediğini gösterdiler (Yang ve Xiao-Ping Yang, 2011).

2011 yılında Wang, Cheng ve Lian; öz parametreye sahip sınır koşullu bir boyutlu p −Laplacian öz değer problemi için ters nodal problemi çalıştılar (Wang, Cheng ve Lian, 2011).

2011 yılında Chen, Cheng ve Law; bir Sturm-Liouville operatörünü, bir öz fonksiyonun sıfırlarını kullanarak yapılandırdılar. Bu yapılandırma için biri Tikhonov regülerize etme metodu olmak üzere üç tane metot önerdiler. Bu üç metot için mutlak hata sınırlarını hesapladılar. Ölçme hatası olduğu durumda bile Tikhonov regülerize etme metodunun yakınsak olduğunu ispatladılar (Chen, Cheng ve Law, 2011).

Difüzyon operatörü için ters öz değer problemi ve ters nodal problemle ilgili yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

1981 yılında Gasymov ve Guseinov; sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için ters problemi iki spektruma göre çözdüler. Bu problemin öz değerlerinin asimptotik ifadesini verdiler (Gasymov ve Guseinov, 1981).

1985 yılında Guseinov; $[0,\pi]$ aralığında difüzyon denklemini, periyodik ve anti periyodik sınır koşulları ile inceledi (Guseinov, 1985).

1987 yılında Maksudov ve Guseinov; difüzyon denklemini

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)[|q(x)|+|p'(x)|]dx < \infty,$$

şartları ile birlikte ele aldılar. Bu koşullara sahip difüzyon denkleminin özel çözümlerini buldular (Maksudov ve Guseinov, 1987).

2000 yılında Guseinov ve Nabiev; difüzyon denklemini

$$y(0) + wy(\pi) = 0, \bar{w}y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0,$$

koşulları ile birlikte incelediler (Guseinov ve Nabiev, 2000). Bu koşullara sahip difüzyon operatörü ile ilgili birçok matematikçi çalışmıştır (Nabiev, 2000; A.A. Nabiev, 2008).

2004 yılında Karaman; singülerliğe sahip difüzyon probleminin çözüm fonksiyonlarını, bilinen difüzyon probleminin çözüm fonksiyonlarını kullanarak elde etti (Karaman, 2004).

2006 yılında Koyunbakan; difüzyon operatörü için ters nodal problemleri inceleyerek, nodal nokta ve nodal uzunlukların asimptotik formüllerini elde etti. Ayrıca nodal nokta bilgisini kullanarak difüzyon operatörünün potansiyel fonksiyonunun tek olarak elde edilebileceğini gösterdi (Koyunbakan, 2006).

2007 yılında Guseinov ve Nabiev; sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için ters problemleri inceledi. Bir teklik teoremi ispatladı ve ters problemin çözülebilirliği için bir çözüm algoritması sunarak, gerek koşulları elde etti (Guseinov ve Nabiev, 2007).

2007 yılında Nabiev; kuasi periyodik sınır koşuluna sahip difüzyon problemini ele aldı. Bu problem için bir teklik teoremi verdi ve bu problemin çözülebilmesi için gerek koşulları ifade etti (Nabiev, 2007).

2007 yılında Koyunbakan ve Panakhov; Hoschtadt-Liebermann metodunu kullanarak sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için q potansiyel fonksiyonu $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralığında belli iken, tek bir spektrumun aralığın geri kalanında potansiyel fonksiyonu belirlemek için yeterli olduğunu ispatladılar (Koyunbakan ve Panakhov, 2007). 2008 yılında Koyunbakan ve Yılmaz; difüzyon operatörü için ters nodal problemi çalıştı. Sadece nodal nokta bilgisini kullanarak, difüzyon operatörünün potansiyel fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri için bir yapılandırma formülü verdiler (Koyunbakan ve Yılmaz, 2008). 2009 yılında Koyunbakan; difüzyon operatörü için nodal noktaların bilgisini kullanarak potansiyel fonksiyonunu bir limit olarak elde etti (Koyunbakan, 2009).

2009 yılında Buterin ve Shieh; sonlu bir aralıkta Dirichlet sınır koşullarına sahip olan reel katsayılı difüzyon operatörü için ters nodal problemi çalıştılar. Teklik teoremini ispatladılar ve ters problemin çözümü için kullanılan yapısal bir yöntem verdiler (Buterin ve Shieh, 2009).

2010 yılında Yang; sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için ters nodal problemi inceledi. Nodal nokta bilgisinin, difüzyon denklemindeki katsayıları ve sınır koşullarını tek olarak belirlediğini gösterdi (Yang, 2010b).

2010 yılında Yang ve Xiao-Ping Yang; bir yıldız şekilli graf üzerinde adi diferensiyel operatörlerin ikinci mertebeden pencillarının yapılandırıldığı ters nodal problemle ilgilendiler. Nodal noktaların yoğun bir alt kümesinin, bir graf üzerinde potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarının parametrelerini tek olarak belirlediğini gösterdiler (Yang ve Xiao-Ping Yang, 2010).

2011 yılında Koyunbakan; sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için ters problemi ele aldı. Hoschtadt metodunu kullanarak, iki spektruma göre potansiyel fonksiyonun tek olarak elde edilebileceğini gösterdi (Koyunbakan, 2011).

2012 yılında Yang ve Zettl; sonlu bir aralıkta difüzyon operatörü için yarı ters problemi incelediler. (p, q) potansiyel fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında belli iken, tek bir spektrumun aralığın geri kalanında bu potansiyel fonksiyonları belirlemek için yeterli olduğunu göstermişlerdir (Yang ve Zettl, 2012).

Sturm-Liouville operatörleri için kararlılık problemleri çeşitli şekillerde incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları aşağıdaki şekildedir.

1970 yılında Marchenko ve Maslov; spektral fonksiyonu kullanarak Sturm-Liouville operatörünü elde etme probleminin kararlılığını incelediler (Marchenko ve Maslov, 1970). 1975 yılında Hochstadt ters spektral problemlerin iyi tanımlılığını inceledi. Bilindiği üzere tam spektral bilgi verilirse bir Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon hemen hemen her yerde tek olarak belirlenebilir. Eğer böyle iki operatör, sadece sonlu sayıda öz değeri biribirinden farklı olacak şekilde spektraya sahipse, ilgili potansiyel fonksiyonlar artık aynı değildirler. Özdeş olmayan öz değerler hemen hemen eşit ise, ilgili potansiyel fonksiyonlar neredeyse her yerde eşit olacaktır. Üstelik bir operatör ve bu operatörün spektrumu verilirse, potansiyel fonksiyon muhtemelen bellidir ve ikinci bir operatör öz değerleri birinci operatörün öz değerlerinden sonlu bir küme hariç eşit olarak tanımlanırsa, ikinci operatöre ait potansiyel fonksiyon lineer olmayan adi difernsiyel denklemlerin bir kümesi çözülerek bulunabilir. Ayrıca bu çalışma da Gel'fand-Levitan metodunun iyi tanımlı olmadığı ifade edilmiştir (Hochstadt, 1975). 1988 yılında McLaughlin; sınırlı bir aralıkta tanımlanan iki ikinci mertebeden ters spektral problem için kararlılık sonuçları verdi (McLaughlin, 1988b).

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1. (*Metrik Uzay*) X boş olmayan bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall\, x, y, z \in X$ için

i) $d(x,x) = 0$

ii) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şeklindedir. Bu özelliklere metrik uzay aksiyomları, (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Burada *(iv)* eşitsizliği üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır (Choudhary ve Nanda, 1990). Metrik uzay kavramı ilk olarak Frechet tarafından 1906 yılında ortaya atılmıştır. Ancak metrik uzay deyimini ilk kullanan Hausdorfftur (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.2. (*Quasi Metrik*) Metrik uzay aksiyomlarından *(i), (ii)* ve *(iv)* sağlanıyorsa, *d* ye X üzerinde bir quasi metrik, (X,d) ikilisine ise bir quasi metrik uzay denir (Choudhary ve Nanda, 1990).

Tanım 1.3. (*Pseudo Metrik*) Metrik uzay aksiyomlarından *(i), (iii)* ve *(iv)* sağlanıyorsa, *d* ye X üzerinde bir pseudo metrik, (X,d) ikilisine ise bir pseudo metrik uzay denir (Choudhary ve Nanda, 1990).

Tanım 1. 4. (*Normlu uzay*) X, F kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan, $\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Bu özellikler; her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindedir. Üzerinde bir "$\|.\|$" normu tanımlanmış olan X vektör uzayına normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir ve $(X, \|.\|)$ ile gösterilir. Normlu uzaylar ilk olarak, Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından tanıtıldı. Aynı dönemlerde başka birçok matematikçi de benzer doğrultuda çalışıyordu. Banach'ın "*Theorie des operations linearies*" isimli küçük kitabı konunun başlangıcı olarak kabul edilir (Soykan, 2008).

Tanım 1. 5. (*Yarı Norm*) V bir vektör uzayı olsun. Bir $p: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

i) $\forall u, v \in V$ için $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$

ii) $\forall v \in V$ ve $\alpha \in F$ için $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$

özelliklerini sağlıyor ise, p ye yarı norm adı verilir (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.6. (*Hilbert uzayı*) Hilbert uzayı kavramı ilk olarak 1912 yılında ünlü Alman matematikçi Hilbert'in "*Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen integral gleichungen*" adlı çalışmasında ortaya atılmıştır. Daha sonraki yıllarda, ünlü matematikçi Neumann bu uzayı aksiyomatik olarak ispatlamıştır (Choudhary ve Nanda, 1990).

$x, y, z, \ldots$ elemanlarının bir kümesi H olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa H uzayına bir *soyut Hilbert uzayı* denir.

a) H bir lineer uzaydır.

b) H uzayındaki $\forall x, y \in H$ eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen, aşağıdaki aksiyomları sağlayan ve $< x, y >$ ile gösterilen bir reel sayı karşılık gelir.

i) $< x, y >=< y, x >$

ii) $< x+z, y >=< x, y > + < z, y >$

iii) $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$, ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için)

iv) $x \neq 0$ ise $< x, y \gg 0$

c) $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ile verilen metriğe göre H uzayı tamdır.

d) H uzayı sonsuz boyutludur.

Eğer sadece *a), b)* ve *c)* özellikleri sağlanıyorsa, H uzayına *üniter Hilbert uzayı* denir (Levitan ve Sargsjan, 1975; Kolmogorov ve Fomin, 1961).

Tanım 1. 7. ($L_2[a, b]$ *uzayı*) $[a, b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilen, ölçülebilir, kompleks değerli $f(x), g(x), \ldots$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L_2[a, b]$ uzayı denir. $L_2[a, b]$ uzayı, her $f, g \in L_2[a, b]$ için $d: L_2[a, b] \times L_2[a, b] \to \mathbb{R}^+$

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\|: L_2[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu uzayda iç çarpım,

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır. $L_2[a,b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır (Şuhubi, 2001; Kolmogorov ve Fomin, 1961; Lusternik ve Sobolev, 1968).

Bir Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün spektral teorisi; $L_2[0,\pi]$, $L_2(0,1)$, $L_2(0,\infty)$ ve $L_2(-\infty,\infty)$ uzaylarında çalışılır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1. 8. (l_2 *uzayı*) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ve $y = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 < \infty,$$

özelliğini sağlayan kompleks sayıların sonsuz sayı dizilerinin oluşturduğu uzaya l_2 *uzayı* denir. Bu uzay her $x, y \in l_2$ için; $d: l_2 \times l_2 \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \mu_k|^2 \right)^{1/2}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\|: l_2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile bir normlu uzaydır (Şuhubi, 2001). l_2 uzayında iç çarpım

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k . \bar{\mu}_k$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde verilen iç çarpıma göre l_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1. 9. ($C[a,b]$ uzayı) $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli, reel ya da kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a,b]$ uzayı denir. Bu uzay $f,g \in C[a,b]$ ve $d: C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(f,g) = \underset{a \le x \le b}{maks} |f(x) - g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\|: C[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\| = \underset{a \le x \le b}{maks} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Yukarıda tanımlanan metriğe, Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebishev ile bağlantılı olarak Chebishev metriği denilmektedir. Bu uzayda iç çarpım

$$< f,g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlansın.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

normu ile tam olmayan bu uzay Hilbert uzayı değildir (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.10. (*Sobolev Uzayı*) Sobolev uzayları eliptik diferensiyel denklemleri incelemek amacı ile Rus matematikçi Sergei Lvovich Sobolev tarafından 1930 lu yıllarda ortaya atılmıştır (Şuhubi, 2001). Sobolev uzayları önemli Hilbert uzaylarıdır.

Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bir bölge ve $L_2(\Omega)$ uzayı bir Lebesque uzayı olsun. $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $u \in L_2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ özelliğine sahip olan tüm u fonksiyonlarının uzayıdır. Buradaki 1, mertebesi bir olan kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ uzayına ait olması gerektiğini göstermektedir. 2 ise, $L_2(\Omega)$ uzayına ait olma koşulundaki integrantın kuvvetini göstermektedir. $W^{1,2}(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzayları arasında $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ şeklinde bir ilişki vardır. $f,g \in W^{1,2}(\Omega)$ olmak üzere $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayındaki iç çarpım

$$< f,g >= \int_\Omega f.gdx + \int_\Omega gradf.gradgdx$$

veya

$$< f, g >= \int_{\Omega} f.\bar{g}dx + \int_{\Omega} Df.Dgdx$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} f^2 dx + \int_{\Omega} |gradf|^2 dx \right)^{1/2}$$

olarak ifade edilir. Sobolev uzaylarına *W*- uzayları da denir (Lukkassen, 2004).

Örnek 1.1. (*Sobolev Uzayına ilişkin bir örnek*) Kabul edelim ki Ω bölgesi $Y = [0,2\pi]^2$ karesi olsun ve

$$f(x) = f(x_1, x_2) = sinx_1 + cosx_2,$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\frac{\partial f}{\partial x_1} = cosx_1$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -sinx_2$ olmak üzere

$$\int_Y |f|^2 dx = \int_Y |sinx_1 + cosx_2|^2 dx \leq \int_Y |1+1|^2 dx = \int_Y 4dx = 4|Y| < \infty,$$

$$\int_Y \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 dx = \int_Y |cosx_1|^2 dx \leq \int_Y |1|^2 dx = |Y| < \infty,$$

$$\int_Y \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2 dx = \int_Y |-sinx_2|^2 dx \leq \int_Y |1|^2 dx = |Y| < \infty,$$

olup, $f \in L_2(Y)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_2(Y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in L_2(Y)$ bulunur. Bu $f \in W^{1,2}(Y)$ olduğunu gösterir (Lukkassen, 2004).

Tanım 1. 11. (*Homeomorfizm*) (X, τ_1) ve (Y, τ_2) uzayları arasında bijektif, kendisi ve tersi sürekli bir $h: X \to Y$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona homeomorfizm denir. Aralarında bir h homoemorfizmi bulunan topolojik uzaylara ise, homeomorfik uzaylar denir (Şuhubi, 2001).

Homeomorfizm, matematiksel alanda topolojinin incelediği temel konulardan biridir ve iki uzayın (mesela iki şeklin) parça koparmadan sürekli olarak birbirine dönüşümünü inceler. Aralarında homeomorfizm bulunan iki cisim homeomorfik olarak adlandırılır. Topolojik açıdan bunlar aynıdır. Mesela bir üçgenin çembere, bir çay bardağını ya da kulplu bardağı simide homeomorfik kılabiliriz. Bu örneklerde bu nesnelerin içinde bulunduğu uzaylar, nesnelerin hangi topolojiye sahip olduğunu belirlemektedir. İki şekil üzerinde homeomorfizm şu şekilde açıklanabilir. X şeklinden Y şekline yırtmadan, parçalamadan, parça koparmadan geçebilmek için X den Y ye sürekli fonksiyona ihtiyaç vardır. Aynı şekilde Y den X e geçmemiz gerekmektedir. Bunun için de fonksiyon tersinir ve tersi de sürekli olmalıdır (URL-6, 2012).

Tanım 1. 12. (*İkili İşlem*) A, boş olmayan bir cümle olmak üzere $o: A \times A \to A$ dönüşümüne A da veya A üzerinde bir ikili işlem denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1. 13. (*Denklik Bağıntısı*) $\sim$, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. $\sim$ bağıntısı için

i) $\forall a \in A$ için $a \sim a$ (Yansıma özelliği)

ii) $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (Simetrik olma özelliği)

iii) $a \sim b$ ve $b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (Geçişme özelliği)

şartları sağlanıyorsa, bu bağıntıya A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1. 14. (*Denklik Sınıfı, Bölüm Uzayı*) $\sim$, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $a \in A$ olsun. a nın denklik sınıfı $\bar{a}$ veya $[a]$ ile gösterilir ve $\bar{a} = \{x \in A: x \sim a\}$ olarak tanımlanır. O halde a nın denklik sınıfı a ya denk olan A daki elemanların cümlesidir. Denklik bağıntısının tanımından dolayı $\forall a \in A$ için $a \sim a$ olduğundan, $\bar{a} \neq \emptyset$ olur. A nın denklik sınıflarının cümlesi $A/\sim$ ile gösterilir ve bu cümleye A nın $\sim$ ya göre bölüm cümlesi denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1. 15. (*Öz fonksiyon-Öz değer*) L lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ oluyorsa y fonksiyonuna L operatörünün öz fonksiyonu (veya öz vektörü), λ ya ise L operatörünün bir öz değeri denir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1. 16. (*Zamana Bağlı bir Schrödinger denkleminin Sturm-Liouville denklemine indirgenmesi*) Kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tanımlayan $\psi(x,y,z,t)$ dalga fonksiyonu

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V(x,y,z)\psi,$$

şeklindeki Schrödinger denkleminin bir çözümüdür. Burada $\hbar$ Planck sabiti, μ parçacığın indirgenmiş kütlesi ve V ise zamana bağlı olmayan potansiyel enerji fonksiyonudur (Asmar, 2000). Planck sabiti kuantum mekaniğinde aksiyonun temel birimi olacak şekilde düşünülecek bir sabittir. Bu sabit adını fizikçi Max Planck'tan alır. Değeri $joule \times saniye$ veya $elektronvolt \times saniye$ cinsinden olabilir. Planck sabiti

$$h = 6.6260693(11) \times 10^{-34}\ joule \times saniye$$

veya

$$h = 4{,}14 \times 10^{-15}\ elektronvolt \times saniye$$

değerindedir. $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ sabitine ise indirgenmiş Planck sabiti denir (URL-3, 2011).

Schrödinger denkleminin bir boyutlu hali, $\psi = \psi(x,t)$ olmak üzere

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi,$$

şeklindedir. Birçok uygulamada bu denklem

$$\psi(x,0) = f(x),$$

başlangıç şartı ile verilir. Burada V fonksiyonunun t den bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Bu durumda bir boyutlu Schrödinger denklemini değişkenlere ayırma metodunu kullanarak çözelim. $\psi(x,t) = u(x).T(t)$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = u''(x).T(t),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = u(x).T'(t),$$

bulunur. Bu türev değerleri bir boyutlu Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}u''(x) + V(x)u(x) = Eu(x),$$

elde edilir. Burada E ayırma sabitidir. Bu denklem

$$q(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(x) \text{ ve } \lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2},$$

alınarak

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),$$

şeklinde bir Sturm-Liouville diferensiyel denklemi haline gelir. Bu denkleme zamana bağlı olmayan Schrödinger denklemi de denir (Özbek ve Feyiz, 2010; Asmar, 2000).

$q = q(x,t)$ potansiyel fonksiyonuna sahip olan

$$Lu = -u'' + q(x,t)u = \lambda u$$

Schrödinger denklemi,

$$\begin{cases} q_t = 6qq_x - q_{xxx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ q_{t=0} = q_0(x), \end{cases},$$

ile verilen KDV denklemi ile bağlantılıdır. q_0 fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|q_0(x)|dx < \infty,$$

eşitsizliğini sağlar. $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ ve $Ay = -4u''' + 6qu' + 3q'u$ olsun. λ nın t den bağımsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\dot{q}y = (6qq_x - q_{xxx})y,$$

olmasını gerektiren

$$\dot{L}y = [A, L]y = (AL - LA)y,$$

şeklindeki Lax çiftinden, q fonksiyonu

$$-u''(x) + q(x,t)u(x) = \lambda u(x),$$

denkleminin bir çözümüdür. Bu izospektral deformasyon olarak adlandırılır. Bu sebeple eğer KDV denklemi çözülmek istenirse, bu Schrödinger denklemini anlamaya denktir (Cheng, 2005; Gelfand ve Dikii, 1975).

Tanım 1. 17. (*Sturm-Liouville Operatörü*) Kuantum mekaniğinin yanı sıra klasik fizikteki birçok öz değer problemi, (a, b) aralığında

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0,\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{1.9}$$

sınır şartlarına sahip

$$[p(x)y'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]y(x) = 0 \tag{1.10}$$

diferensiyel denklem sınıfına uygundur. Burada p, q ve ρ $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardır. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Njue, 2003).

Uygulamalarda sık sık kullanılan temel operatörlerden birisi de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Burada q fonksiyonu reel ve $[a, b]$ aralığında süreklidir. L operatörü için en önemli sınır şartları $a, \beta \in [0, \pi)$ olmak üzere genellikle aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$y(a)cos\alpha + y'(a)sin\alpha = 0,$$

$$y(b)cos\beta + y'(b)sin\beta = 0. \tag{1.11}$$

Bu sınır şartlarına ayrık sınır şartları da denir.

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{1.12}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem (1.10) denkleminin $p(x) = \rho(x) = 1$ özel halidir. (1.11)-(1.12) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak bilinmektedir. (1.11) sınır şartı $sin\alpha \neq 0$ ve $sin\beta \neq 0$ olmak üzere

$$y(a)cot\alpha + y'(a) = 0$$

$$y(b)cot\beta + y'(b) = 0$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $cot\alpha = -h$ ve $cot\beta = H$ denilirse

$$y'(a) - hy(a) = 0$$

$$y'(b) + Hy(b) = 0$$

sınır şartları elde edilir. Bu sınır şartlarına impedance sabitli sınır şartları, h ve H sabitlerine ise impedance sabitleri denir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

p, q ve ρ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve hepsi periyodik fonksiyonlar ise (1.10) denklemine;

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

periyodik sınır şartı ve

$$y(a) = -y(b), \qquad y'(a) = -y'(b)$$

anti periyodik sınır koşulları ile, Sturm-Liouville periyodik (veya anti periyodik) sınır değer problemi denir. Bu şartlarla beraber (1.12) denklemine Hill denklemi denir.

(1.10) denkleminde özel olarak $p = 1, q = 0$ alınarak elde edilen

$$-y'' = \lambda\rho(x)y,$$

denklemine string denklemi denir (Cheng, 2005).

Tanım 1. 18. (*Regüler Sturm-Liouville Problemi*) Aşağıdaki özellikleri sağlayan (1.9)-(1.10) sınır değer problemine regüler Sturm-Liouville problemi denir.

- ***a)*** a_1, a_2, b_1 ve b_2 reeldir.
- ***b)*** $p(x), q(x)$ ve $\rho(x)$ katsayı fonksiyonları, uç noktaları içeren her yerde reel ve süreklidir.
- ***c)*** Uç noktaları içeren her yerde $p(x),\ \rho(x) > 0$ dır.

Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine, singüler Sturm-Liouville problemi denir (Njue, 2003).

Tanım 1. 19. (*Başlangıç ve Sınır Koşulları*) Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(*i*) *Sınır şartları*: Kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

$$\textit{Dirichlet şartı}: \ u\big|_{\Gamma} = g\,,$$

$$\textit{Neumann şartı}: \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = g(\textit{veya } 0)\,,$$

$$\textit{Karışık (mixed) veya Robin şartı}: \ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g\,.$$

(*ii*) *Başlangıç Şartları:* Sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir (Myint-U ve Debnath, 2006).

Tanım 1. 20. (*Nodal Nokta Kümesi*) (1.9)-(1.10) öz değer probleminin nodal nokta bilgisi $y_n(x)$ öz fonksiyonlarının kökleri olan $\left\{x_j^{(n)}\right\},\ j = 1,2,\dots,n-1,\ n \geq 2$ kümesidir. $\left\{x_j^{(n)}\right\}$ kümesi (1.9)-(1.10) problemindeki $p,\ \rho$ ve q parametrelerine ve a_1, a_2, b_1, b_2, a ve b değerlerine bağlıdır (Njue, 2003).

Tanım 1.21. (*Düz Problem*) (1.9)-(1.10) Sturm-Liouville problemi sağlanacak şekilde λ_n öz değerleri ve bu öz değerlere karşılık gelen y_n öz fonksiyonlarını belirleme problemidir. Bu problem yaklaşık 150 yıldan beri önemini korumaktadır (Njue, 2003).

Tanım 1.22. (*Ters Problem*) Klasik bir ters spektral problemde potansiyel fonksiyon, öz değerlerin iki kümesi veya öz değerlerin bir kümesi ile normlaştırıcı sabitlerin bir kümesi gibi spektral bilgiler kullanılarak elde edilir. Bu problemler, ters öz değer problemi olarak adlandırılır. Başka bir alternatif ise öz fonksiyonların sıfırları olan nodal noktaların bilgisini kullanarak potansiyel fonksiyonu elde etmektir. Bu tür problemlere, ters nodal problemler denir (Njue, 2003).

Teorem 1. 1. (*I. Sturm Karşılaştırma Teoremi*)

$$u'' + g(x)u = 0$$
$$v'' + h(x)v = 0$$

denklemleri verilsin. $[a, b]$ aralığı üzerinde $g(x) < h(x)$ ise, birinci denklemin aşikar olmayan herhangi bir çözümünün her iki sıfırı arasında, ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı vardır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Teorem 1. 2. (*II. Sturm Karşılaştırma Teoremi*) $u(x)$, $u'' + g(x)u = 0$ denkleminin $u(a) = sin\alpha, u'(a) = -cos\alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü; $v(x)$, $v'' + h(x)v = 0$ denkleminin aynı başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığı üzerinde $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $u(x)$ çözüm fonksiyonu $a < x \leq b$ aralığında m tane sıfıra sahipse, $v(x)$ çözüm fonksiyonunun sıfırlarının sayısı aynı aralıkta m den az değildir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Teorem 1. 3. (*Sturm Osilasyon Teoremi*)

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a)cos\alpha + y'(a)sin\alpha = 0, y(b)cos\beta + y'(b)sin\beta = 0$$

ile verilen Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinin sınırsız, artan bir dizisi $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ olsun. λ_m öz değerine karşılık gelen m. öz fonksiyonun $[a, b]$ aralığın da tam olarak m tane sıfırı vardır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Teorem 1. 4. (*Riemann-Lebesque Lemması*) (a, b) sonlu bir aralık $f \in L(a, b)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx = 0\,,$$

şeklindedir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1. 23. (*Bir Operatörün Rezolventi*) T, H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ ile gösterilen λ parametreli bir operatördür (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1. 24. (*Rezolvent Cümlesi ve Spektrum*) $X \neq \emptyset$ kompleks normlu bir uzay ve $T: D(T) \to X$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa λ ya T operatörünün bir regüler değeri denir.

i) $R_\lambda(T)$ mevcut

ii) $R_\lambda(T)$ sınırlı

iii) $R_\lambda(T)$, X de yoğun bir cümle de tanımlı.

T operatörünün tüm regüler değerlerinin cümlesine rezolvent cümlesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Bu cümlenin tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ şeklinde olup, T operatörünün spektrumu adını alır. $\lambda \in \sigma(T)$ ise, λ ya T operatörünün spektral veya öz değeri denir (Levitan ve Sargsjan, 1975;1988).

Tanım 1. 25. (*Adjoint Operatör*) X bir Hilbert uzayı, $B(X)$ ise X üzerinde tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin uzayı olsun. $T \in B(X)$ olmak üzere T^* ile gösterilen T operatörünün adjointi; $\forall x, y \in X$ için $< Tx, y >=< x,\ T^* y >$ eşitliğini sağlayan $B(X)$ uzayının bir tek elemanıdır (Choudhary ve Nanda, 1990).

Tanım 1. 26. (*Self-Adjoint Operatör*) $T \in B(X)$ olsun. $T = T^*$ ise, T operatörüne self-adjoint veya hermityen operatör denir (Choudhary ve Nanda, 1990).

Teorem 1. 5. (*Fatou Lemması*) (X, A, μ) bir ölçü uzayı, (f_n) ise bu ölçü uzayında tanımlı reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. X üzerinde, her n için $f_n \geq -g$ olacak şekilde negatif olmayan, integrallenebilir bir g fonksiyonu varsa

$$\int_X \lim_n inf\ (f_n) d\mu \leq \lim_n inf \int_X (f_n)\, d\mu$$

şeklindedir (Balcı, 2011).

Tanım 1. 27. (*Büyük O Notasyonu*) 1892 yılında Alman matematikçi Bachmann, "*Analytische Zahlentheorie*" adlı kitabında fonksiyonların asimptotik davranışlarını karakterize etmek için yeni bir notasyon geliştirmiştir. Bachmann'ın bu keşfi daha sonraki yıllarda "Big Oh" notasyonu olarak adlandırılmıştır. Bu gösterim bir başka Alman matematikçi Landau tarafından yaygın kullanıma sunulmuştur. Bundan dolayı bu sembole Landau sembolü de denir (URL1, 2012).

$\forall n \geq 0$ tam sayısı için $f(n)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabiti varsa $f(n) = O(g(n))$ dir, denir. Büyük O notasyonunun bazı matematiksel özellikleri aşağıdaki şekildedir.

a) $f_1(n) = O(g_1(n))$ ve $f_2(n) = O(g_2(n))$ olsun.

i) $f_1(n) + f_2(n) = O(maks\{g_1(n), g_2(n)\})$

ii) $O(f_1(n)).O(f_2(n)) = O(f_1(n).f_2(n))$

iii) $k \neq 0, O(kf_1(n)) = O(f_1(n))$

iv) $O(k+f_1(n)) = O(f_1(n))$

v) $f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times g_2(n))$

b) $f_1(n)$ ve $f_2(n)$ fonksiyonları $\forall n \geq 0$ tam sayısı için pozitif fonksiyonlar olmak üzere $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ ve $L \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = L$ olsun. Bu durumda; $f(n) = O(f_1(n))$ şeklindedir.

c) $f(n) = O(g(n))$ ve $g(n) = O(h(n))$ ise $f(n) = O(h(n))$ şeklindedir.

d) $f(n)$ ve $g(n)$ sonlu bir aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ için $f(n) = O(g(n))$ olsun. Bu durumda

$$\int_{n_0}^{n} f(y)dy = O\left(\int_{n_0}^{n} |g(y)|dy\right), n \geq n_0$$

şeklindedir.

e) $i = 1,2,\dots,k$ olmak üzere $f_i(n) = O(g_i(n))$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(n) = O\left(\sum_{i=1}^{k} |g_i(n)|\right)$$

şeklindedir.

f) Verilen bir h fonksiyonu için

i) $\frac{1}{1+O(h(n))} = 1 + O(h(n))$

ii) $log[1 + O(h(n))] = O(h(n))$

iii) $exp[(\ O\big(h(n)\big)] = 1 + O\big(h(n)\big)$

şeklindedir (Preiss, 1999; URL5, 2012).

Tanım 1. 28. (*Küçük o Notasyonu*) $f(n) \in o(g(n))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

olmasıdır. Bu asimptotik olarak ihmal edilebilir anlamına gelir. "$f(n), g(n)$ in küçük o sudur" diye okunur. Sezgisel olarak bunun anlamı şudur; $n \to n_0$ iken $g(n), f(n)$ işleminden çok daha hızlı büyür. Küçük o notasyonu için aşağıdaki özellikler vardır (Preiss, 1999; URL1, 2012).

a) $o(f) + o(f) \in o(f)$

b) $o(f).o(g) \in o(fg)$

c) $o\big(o(f)\big) \in o(f)$

d) $o(f) \in O(f)$.

Örnek 1. 2. (*Büyük O notasyonuna ilişkin bir örnek*) $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonu verilsin. $\forall n \geq 0$ için $f(n)$ fonksiyonunun negatif olmadığı açıktır. $f(n) = O(n^2)$ olduğunu gösterelim.

$f(n) = O(n^2)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabitinin var olmasıdır. C sabiti mevcut olduğu sürece C sabitinin ne olduğu önemli değildir. Örneğin $C = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} f(n) \leq Cn^2 &\Longrightarrow f(n) \leq n^2 \\ &\Longrightarrow 8n + 128 \leq n^2 \\ &\Longrightarrow n^2 - 8n - 128 \geq 0 \\ &\Longrightarrow (n - 16)(n + 8) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. $\forall n \geq 0$ için, $(n + 8) > 0$ olduğundan, $(n - 16) \geq 0$ olduğu sonucu çıkar. Yani $n_0 = 16$ dır. Bu nedenle $C = 1$ için $n_0 = 16$ ve $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cn^2$ olur. Böylece, $f(n) = O(n^2)$ dir. $n = 16$ noktasının sağında $f(n) = n^2$ fonksiyonu $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonundan daha büyüktür. Elbette n_0 ve C nin birçok başka değeri vardır. Örneğin; $C = 2$ alınırsa $n_0 = 10.2$, $C = 4$ alınırsa $n_0 = 6.7$ olur (Preiss, 1999).

Örnek 1. 3. (*Küçük o notasyonuna ilişkin bir örnek*) $x \to 0$ iken $x - sinx = o(x)$ olur. Gerçekten

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sinx}{x} = 0$$

şeklindedir. Küçük o notasyonunun tanımı gereği $x - sinx = o(x)$ olarak elde edilir (URL-4, 2012).

Tanım 1. 29. (*Bir Problemin İyi Tanımlılığı*) Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak, Jacques Hadamard tarafından verilen bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

i) Çözüm vardır

ii) Çözüm tektir

iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümü tektir denildiği zaman, bu mutlak bir fonksiyon sınıfına

göre çözüm tektir anlamına gelir. Örneğin, bir problemin birkaç çözümü olsun. Fakat bu çözümlerden sadece biri sınırlı olsun. Bu durumda sınırlı fonksiyonlar uzayında çözüm tektir, denir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa, bunun anlamı model hakkında elde bulunan bilgiler eksiktir. Bu durumda model için çeşitli ek özellikler verilmelidir. Eğer başlangıç ya da sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır, denir. Bir problem kararlı değilse, bu problemin çözümü pratik bir şekilde hesaplanamaz. İyi tanımlı problemlere ilişkin örnekler Laplace denklemi için Dirichlet problemini ve özel başlangıç koşullarına sahip ısı problemi için Dirichlet problemini içermektedir. Bu problemler çözümleri için bazı fiziksel metotlar bulunan doğal problemlerdir. Fakat bunun aksine ters ısı denklemi iyi tanımlı değildir. Hadamard'a göre iyi tanımlı olmayan problemlere ill-posed problemler denir. Hadamard, ters problemlerin genellikle ill-posed problemler, düz problemlerin ise iyi tanımlı problemler olduğunu söylemiştir. Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

X ve Y iki normlu uzay ve $K: X \to Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y ye bağlıdır. Yani $n \to \infty$ iken $Kx_n \to Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için, $x_n \to x$ olmasıdır.

Kısmi diferensiyel denklemlerin klasik teorisi hemen hemen tamamıyla iyi tanımlı problemlerle ilgilenmektedir. Bu nedenle ill-posed problemler matematiksel ve bilimsel açıdan oldukça ilgi çekicidir (URL-2, 2011; Kirsch, 1996).

Tanım 1. 30. (*Yoğun Küme*) X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde eğer $\overline{M} = X$ oluyorsa, M cümlesi X uzayında yoğundur denir. Burada $\overline{M}$, M cümlesinin kapanışı olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Teorem 1. 6. (*Rouche Teoremi*) Farzedelim ki basit, kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları analitik ve C üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. Bu taktirde $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının C çevresinin içindeki sıfırlarının sayısı eşittir (Uluçay, 1978).

2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

2001 yılında Law ve Tsay; $\int_0^1 q = 0$ olacak şekilde mutlak bir metrik altında, tüm (q, α, β) operatörlerinin uzayının bir denklik bağıntısı ile verilen tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bölüm kümesine homeomorf olduğunu gösterdiler. Ters nodal problem aynı denklik bağıntısı ile verilen, geçerli tüm dizilerin bölüm kümesi üzerinde tanımlandığı zaman iyi tanımlıdır. Φ, nodal dönüşüm adı verilen bir homeomorfizm olsun. Law ve Tsay, $q \in C^N$ olmak üzere ilgili metrikler q fonksiyonunun türevleri ile büyütüldüğü zamanda, Φ dönüşümünün halen daha bir homeomorfizm olduğunu gösterdiler. Bu çalışma, ağırlıklı olarak nodal noktalar ve nodal uzunlukların açık olarak verilen asimptotik ifadelerine bağlıdır (Law ve Tsay, 2001).

$$Hy = -y'' + q(x)y, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı

$$y(0)cos\alpha + y'(0)sin\alpha = 0,$$

$$y(1)cos\beta + y'(1)sin\beta = 0,$$

sınır koşullarına sahip H Sturm-Liouville operatörü ele alınsın. Burada $q \in L_1(0,1)$, $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ şeklindedir. λ_n, H operatörünün n. öz değeri; $0 < x_1^{(n)} < \ldots < x_{n-1}^{(n)} < 1$, n. öz fonksiyonun nodal noktaları, $\{x_k^{(n)}\}$ çift indisli dizisi ise H operatörüne bağlı nodal noktalar dizisi olsun. Aynı zamanda $s_n = \sqrt{\lambda_n}$, ve $l_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ ise nodal uzunluk olsun. $(0,1)$ aralığı üzerinde j_n fonksiyonu $j_n(x) = maks\{k: x_k^{(n)} \leq x\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece $k = j_n(x)$ olması, $x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$ olmasını gerektirir.

H Sturm-Liouville operatörü; q potansiyel fonksiyonu ve α, β sınır koşulları ile belirlendiği için, bu operatör $H = (q, \alpha, \beta)$ şeklinde ifade edilebilir. Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problem; sadece $\{x_k^{(n)}\}$ nodal kümesini kullanarak $H = (q, \alpha, \beta)$ operatörünü belirleme problemidir. Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problem ilk olarak McLaughlin tarafından çalışıldı ve (2. 1) denklemi için Dirichlet probleminin nodal nokta kümesinin, q potansiyel fonksiyonunu bir sabit farkla belirlediği bulundu (McLaughlin, 1988).

Lemma 2. 1. $(q,\alpha,\beta) \in L_1(0,1) \times [0,\pi)^2$ olsun.

a) $n \to \infty$ iken, $\alpha = 0$ ise

$$x_k^{(n)} = \frac{k\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1-\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right), \tag{2.2}$$

b) $n \to \infty$ iken, $\alpha \neq 0$ ise

$$x_k^{(n)} = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - \frac{1}{s_n^2}cot\alpha + \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1+\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right), \tag{2.3}$$

c) Böylece her iki durumda da

$$l_k^{(n)} = \frac{\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} [1+\alpha_0\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right), \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada $\alpha > 0$ ise $\alpha_0 = 1$, $\alpha = 0$ ise $\alpha_0 = -1$ şeklindedir (Law, Shen ve Yang, 1999).

İspat :

a) $n \to \infty$ iken $\alpha = 0$ ise çözüm fonksiyonu

$$\phi(x) = -\frac{\sin(sx)}{s} + \frac{cos(sx)}{2s^2}\int_0^x [1-\cos(2sy)]q(y)dy - \frac{sin(sx)}{2s^2}\int_0^x \sin(2sy)\,q(y)dy$$

$$-\frac{\sin(sx)}{4s^3}\int_0^x\int_0^y q(t)q(y)dtdy + o\left(\frac{1}{s^3}\right),$$

şeklindedir. $\phi(x) = 0$ olarak kabul edilirse ve eşitliğin her iki yanı $cos(sx) \neq 0$ ile bölünürse

$$0 = -\frac{\tan(sx)}{s} + \frac{1}{2s^2}\int_0^x [1-\cos(2sy)]q(y)dy - \frac{tan(sx)}{2s^2}\int_0^x \sin(2sy)\, q(y)dy$$

$$-\frac{\tan(sx)}{4s^3}\int_0^x\int_0^y q(t)q(y)dtdy + o\left(\frac{1}{s^3}\right),$$

olur. Burada $\tan(sx)$ içeren terimler sağ tarafa alınır ve parantez kullanılırsa

$$\tan(sx)\left[1 + \frac{1}{2s}\int_0^x \sin(2sy)\, q(y)dy + \frac{1}{4s^2}\int_0^x\int_0^y q(t)q(y)dtdy\right]$$

$$= \frac{1}{2s}\int_0^x [1-\cos(2sy)]q(y)dy + o\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

ve

$$\tan(sx)\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right] = \frac{1}{2s}\int_0^x [1-\cos(2sy)]q(y)dy + o\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

olur. Yeteri kadar büyük s ler için

$$\tan(sx) = \frac{1}{2s}\int_0^x [1-\cos(2sy)]q(y)dy + \ o\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

elde edilir. $s = s_n$ ve $x = x_k^n$ olmak üzere

$$arctanx = k\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}x^{2k+1}}{2k+1},$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$s_n x_k^n = arctan\left[\frac{1}{2s_n}\int_0^{x_k^n} [1-\cos(2s_n y)]q(y)dy\right] + \ o\left(\frac{1}{{s_n}^2}\right)$$

$$= k\pi + \frac{1}{2s_n}\int_0^{x_k^n} [1-\cos(2s_n y)]q(y)dy + o\left(\frac{1}{{s_n}^2}\right),$$

ve

$$x_k^{(n)} = \frac{k\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1-\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right),$$

elde edilir.

b) İspat *(a)* dakine benzer şekilde yapılabilir.

c) $l_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ olmak üzere *(a)* da (veya *(b)* de) nodal uzunluk tanımı kullanılırsa

$$l_k^{(n)} = \frac{\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} [1+\alpha_0\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right),$$

bulunur.

(2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin nodal noktaları Sturm osilasyon teoreminin koşullarını sağlar. Gerçekten; Sturm-Liouville operatörünün n. öz fonksiyonunun, $(0,1)$ aralığında yeteri kadar büyük n ler için tam olarak $|n|$ tane sıfırı vardır. Tablo 2.1. ve Tablo 2.2. de farklı sınır şartları ve $q(x) = x$ potansiyel fonksiyonu için bu durum açık bir şekilde görülmektedir.

Tablo 2. 1. (2. 1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, q(x) = x}$ için nodal noktaları

x_j^n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$j=1$	***0.4910***	***0.2486***	***0.16624***	***0.12481***	***0.09990***	***0.08327***	***0.07139***	***0.06247***	***0.05553***	***0.04998***
$j=2$	*1.5122*	***0.7485***	***0.49926***	***0.37461***	***0.29978***	***0.24986***	***0.21419***	***0.18743***	***0.16662***	***0.14996***
$j=3$	*2.5814*	*1.2516*	***0.83289***	***0.62461***	***0.49974***	***0.41649***	***0.35702***	***0.31241***	***0.27771***	***0.24995***
$j=4$	*3.7141*	*1.7577*	*1.16715*	***0.87481***	***0.69978***	***0.58316***	***0.49987***	***0.43740***	***0.38881***	***0.34994***
$j=5$	*4.9496*	*2.2669*	*1.50202*	*1.1252*	***0.89990***	***0.74986***	***0.64273***	***0.56240***	***0.49992***	***0.44993***
$j=6$	*6.2904*	*2.7793*	*1.83751*	*1.37579*	*1.1001*	***0.91661***	***0.78562***	***0.68741***	***0.61103***	***0.54993***
$j=7$	*7.6262*	*3.2949*	*2.17362*	*1.62658*	*1.30039*	*1.08339*	***0.92853***	***0.81243***	***0.72215***	***0.64994***
$j=8$	*9.0383*	*3.8138*	*2.51035*	*1.87756*	*1.50075*	*1.25022*	*1.07147*	***0.93747***	***0.83328***	***0.74995***
$j=9$	*10.741*	*4.3364*	*2.8477*	*2.12874*	*1.70119*	*1.41708*	*1.21442*	*1.06253*	***0.94442***	***0.84996***
$j=10$	*12.299*	*4.8629*	*3.18568*	*2.38011*	*1.90172*	*1.58398*	*1.35739*	*1.18759*	*1.05557*	***0.94998***

Tablo 2. 2. (2. 1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = 0, q(x) = x}$ için nodal noktaları

x_j^n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$j=1$	***0.99821***	***0.49839***	***0.33270***	***0.24970***	***0.19983***	***0.16656***	***0.14279***	***0.12495***	***0.1110***	***0.0999***
$j=2$	*2.04277*	***0.99988***	***0.66603***	***0.49960***	***0.39975***	***0.33317***	***0.28560***	***0.24992***	***0.2221***	***0.1999***
$j=3$	*3.1404*	*1.50446*	***0.99997***	***0.74969***	***0.59975***	***0.49982***	***0.42844***	***0.37490***	***0.3332***	***0.2999***
$j=4$	*4.31961*	*2.01212*	*1.33454*	***0.99999***	***0.79983***	***0.66651***	***0.57130***	***0.49990***	***0.4443***	***0.3999***
$j=5$	*5.61543*	*2.52291*	*1.66972*	*1.25048*	***0.99999***	***0.83323***	***0.71418***	***0.62490***	***0.5554***	***0.4999***
$j=6$	*6.96753*	*3.03686*	*2.00552*	*1.50117*	*1.20024*	***0.99999***	***0.85707***	***0.74992***	***0.6665***	***0.5999***
$j=7$	*8.30197*	*3.5541*	*2.34194*	*1.75205*	*1.40056*	*1.1668*	***0.99999***	***0.87495***	***0.7777***	***0.6999***
$j=8$	*9.8765*	*4.07483*	*2.67898*	*2.00313*	*1.60096*	*1.33364*	*1.14294*	***0.99999***	***0.8888***	***0.7999***
$j=9$	*11.5479*	*4.59934*	*3.01664*	*2.25441*	*1.80145*	*1.50052*	*1.2859*	*1.12506*	***0.9999***	***0.8999***
$j=10$	*13.1774*	*5.12805*	*3.35493*	*2.50588*	*2.00201*	*1.16674*	*1.42889*	*1.25012*	*1.1111*	***0.9999***

Lemma 2. 2. $f \in L_1(0,1)$ olsun. $j = j_n(x) = maks\{k: x_k^{(n)} \leq x\}$ olmak üzere hemen hemen her $x \in (0,1)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\pi} \int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} f(t)dt = f(x),$$

şeklindedir (Law, Shen ve Yang, 1999).

Teorem 2. 1. $(q, \alpha, \beta) \in L_1(0,1) \times [0,\pi)^2$ olsun.

a) α ve β ifadelerinin asimptotik formülleri aşağıdaki şekildedir.

i) Hem $\alpha = 0$, hem de sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$cot\alpha = \lim_{n\to\infty} s_n^2 \left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - x_k^{(n)} \right),$$

ii) Hem $\beta = 0$, hem de sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$cot\beta = \lim_{n\to\infty} s_n^2 \left(1 - x_{n-k}^{(n)} - \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} \right),$$

b) $j = j_n(x)$ olmak üzere, hemen hemen her $x \in (0,1)$ için

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} 2s_n^2 \left(\frac{s_n l_k^{(n)}}{\pi} - 1 \right),$$

şeklindedir (Law ve Ching Fu Yang, 1998; Law, Shen ve Yang, 1999).

İspat :

a)

i) Bu teoremi ispatlamak için Lemma 2.1. *(b)* kullanılacaktır. *(b)* deki

$$x_k^{(n)} = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - \frac{1}{s_n^2}cot\alpha + \frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1+\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right),$$

ifadesinde $cot\alpha$ yalnız bırakılırsa

$$x_k^{(n)} = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - \frac{1}{s_n^2}cot\alpha + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right),$$

olmak üzere

$$cot\alpha = s_n^2\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - x_k^{(n)}\right),$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanının $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$cot\alpha = \lim_{n\to\infty} s_n^2\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{s_n} - x_k^{(n)}\right),$$

bulunur.

ii) Bu ifadenin ispatı *(i)* dekine benzer şekilde yapılabilir.

b) Bu kısmın ispatı için Lemma 2.1. *(c)* kullanılacaktır.

$$l_k^{(n)} = \frac{\pi}{s_n} + \frac{1}{2s_n^2}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} [1+\alpha_0\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^3}\right),$$

ifadesinin her iki tarafı $\frac{s_n}{\pi}$ ile çarpılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s_n}{\pi}l_k^{(n)} - 1 = \frac{1}{2s_n\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} [1+\alpha_0\cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right),$$

bulunur. Bu ifade $2s_n^2$ ile çarpılırsa ve $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} 2s_n^2\left(\frac{s_n}{\pi}l_k^{(n)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} q(t)dt + \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{\pi}\alpha_0\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n t)q(t)dt + o(1),$$

elde edilir. Sağ taraftaki ilk terim, Lemma 2.2. gereğince q potansiyel fonksiyonuna yakınsar. Bu yakınsaklık aynı zamanda L_1 yakınsaklıktır (Chen, Cheng, Law ve Tsay, 2002). Hemen hemen her $x \in (0,1)$ için ikinci terimin sıfıra yakınsadığını göstermek yeterli olacaktır.

$$T_n(x) = \frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n y)q(y)dy\,,$$

olsun. $n \to \infty$ iken $T_n(x) \to 0$ olduğunu gösterelim. $L^1(0,1)$ uzayında q ya yakınsayan bir sürekli q_k fonksiyon dizisini ele alalım. Bu durumda (0,1) aralığında hemen hemen her yerde q ya noktasal yakınsayan q_k nın bir alt dizisi vardır. Basitlik olması açısından bu diziyi q_k ile gösterelim. Her x için $q_k(x)$, $q(x)$ e yakınsar. Böylece verilen her bir $\varepsilon > 0$ için yeteri kadar büyük k bulunabilir ki $|q_k(x) - q(x)| < \varepsilon$ olur. $T_n(x)$ ifadesinin sağındaki integralin içerisine $q_k(x)$ ve $q_k(y)$ eklenir ve çıkarılırsa

$$T_n(x) = \frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n y)[q(y) - q_k(y) + q_k(y) - q_k(x) + q_k(x)]dy$$

$$= \frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n y)[q(y) - q_k(y)]dy + \frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n y)[q_k(y) - q_k(x)]dy$$

$$+ \frac{s_n}{\pi}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} cos(2s_n y)q_k(x)dy,$$

olur. $n \to \infty$ için eşitliğin sağındaki terimler sıfıra yakınsar (Law, Shen ve Tsay, 1999). Böylece

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} 2s_n^2\left(\frac{s_n l_k^{(n)}}{\pi} - 1\right),$$

elde edilir.

Law ve Tsay, Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problemin iyi tanımlılığını çalışmışlardır. Burada iyi tanımlılıkla ters problemin çözümlerinin varlık, teklik ve kararlılığından bahsedilmektedir (Kirsh, 1996).

$\mathbb{N}' = \mathbb{N} - \{1\}$ olsun. Ω, Sturm-Liouville operatörlerinin uzayı, Σ ise tüm geçerli nodal dizilerin uzayı olarak

$$\Omega = \left\{ (q, \alpha, \beta) \in L_1(0,1) \times [0,\pi)^2 : \int_0^1 q = 0 \right\},$$

ve

$\Sigma = \{ 0 < X_1^{(n)} < X_2^{(n)} < \cdots < X_{n-1}^{(n)} < 1$ ve $X = \{X_k^{(n)} : k = 1,2,\dots,n-1, n \in \mathbb{N}'\}$ şeklindeki tüm çift indisli dizilerin sınıfı$\}$ şeklinde tanımlansın (Law ve Tsay, 2001).

Sturm-Liouville operatörü için varlık problemi Xue-Feng Yang tarafından detaylı bir şekilde tanımlanmıştır (Xue-Feng Yang, 1997). X, tam olarak H operatörü ile bağlantılı nodal noktaların bir dizisi olmak üzere, hangi $X \in \Sigma$ için, Ω uzayında $H = (q, \alpha, \beta)$ vardır. Burada Teorem 2.1. in sağ tarafı hemen hemen her x için yakınsak ise ya da X, Lemma 2.1. deki asimptotik ifadelerden birini sağlarsa, $X \in \Sigma$ doğal olarak nodaldir. Bununla beraber eğer X in birçok sonlu terimi değişirse ve halen daha aynı asimptotik davranışa sahipse, ters problem yine de tanımlıdır ve böylece aynı (q, α, β) operatörünü oluşturur. Aynı asimptotik davranışa sahip tüm diziler temsilci olarak özgün bir nodal dizi ile bir denklik sınıfı oluştururlar. Bu müstakil diziye asimptotik olarak denk nodal dizi denir.

Σ üzerinde; $d_0 : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}^+$ olacak şekilde bir

$$d_0(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right|,$$

metriği tanımlansın. Burada $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$ ve $\bar{L}_k^{(n)} = \bar{X}_{k+1}^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)}$ şeklindedir. Bu metrik Teorem 2.1. *(b)* deki $\|q - \bar{q}\|_1$ normu kullanılarak elde edilir. Bu metrik aynı asimptotik davranışa sahip olan tüm asimptotik olarak denk nodal dizileri belirler. Bu daha sonra verilecek Teorem 2.7. nin bir sonucudur. Bununla beraber bu halen daha tatmin edici değildir. X ve $\bar{X}$, farklı durumlara ait asimptotik olarak denk nodal diziler ise, $d_0(X, \bar{X}) = \infty$ olur. Bu ise kabul edilebilir değildir. (Farklı durum derken, mesela farklı sınır şartları) Oranlama yaparak $\frac{d_0}{1+d_0}$ olacak şekilde bir d_Σ pseudo metriği elde edilebilir.

Böylece "$X \sim \bar{X}$ olması için gerek ve yeter şart $d_\Sigma(X, \bar{X}) = 0$" olmasıdır, şeklinde tanımlanırsa $\sim$, Σ üzerinde bir denklik bağıntısı ve d_Σ, $\Sigma^* = \Sigma/\sim$ bölüm uzayı üzerinde bir metrik olur (Royden, 1988; Law ve Tsay, 2001).

$\Sigma_1 \subset \Sigma$, tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bir alt uzayı ve $\Sigma_1^* = \Sigma_1/\sim$ olsun. Ω üzerinde uygun bir d_Ω metriği ile, aşağıdaki temel teorem verilecektir.

Teorem 2. 2. (Ω, d_Ω) ve (Σ_1^*, d_Σ) metrik uzayları homeomorfiktir (Law ve Tsay, 2001).

Teorem 2. 2., ters nodal problemin, Σ^* bölüm kümesi üzerinde tanımlandığı zaman, Ω uzayının homeomorfik bir görüntüsünü içerdiğini gösterir. Bu anlamda varlık problemi çözüldü. Buna ilave olarak Σ_1^* de bir $[X]$ denklik sınıfının veya Σ_1 de bir $[X]$ denklik sınıfının perturbasyonu; homeomorfizm ile, Ω uzayında $H = (q, \alpha, \beta)$ operatörünün bir perturbasyonunu verir. Böylece ters nodal problem kararlıdır ve dolayısı ile iyi tanımlıdır.

Φ, Ω yı Σ_1^* uzayına dönüştüren bir homeomorfizm olsun. Burada Φ dönüşümüne nodal dönüşüm denir. Bu dönüşümün çok önemli özellikleri vardır. $N \in \mathbb{N}$ için,

$$\Omega(N) = \left\{ (q, \alpha, \beta) \in L_1(0,1) \times [0, \pi)^2 : q \in C^N[0,1], \int_0^1 q = 0 \right\}$$

olsun. Law ve Ching Fu Yang, q potansiyel fonksiyonunun m. mertebeden türevi olan $q^{(m)}$ fonksiyonunun, nodal uzunluğun fark bölüm operatörü olan $\delta^m l_{j_n}^{(n)}$ ile yaklaşık olarak elde edilebileceğini göstermiştir (Law ve Ching Fu Yang, 1998). Kabul edelim ki $\Sigma_1(N)$, $\Omega(N)$ uzayında (q, α, β) operatörüne bağlı olan asimptotik olarak denk nodal dizilerin kümesi olsun. Ayrıca $d_{\Omega(N)}$ ve $D_{\Sigma(N)}$ ise sırası ile potansiyel fonksiyonların türevlerinin L_1 deki normları ile verilen $\Omega(N)$ ve $\Sigma_1^*(N)$ üzerindeki metrikler olsun. Buradan Φ nodal dönüşümünün bu büyütülen metrik altında halen daha bir homeomorfizm olduğu bulunur.

Teorem 2. 3. Φ nodal dönüşümünün, $\Omega(N)$ uzayına kısıtlanması olan

$$\Phi_{\Omega(N)} : (\Omega(N), d_{\Omega(N)}) \to (\Sigma_1^*(N), D_{\Sigma(N)})$$

dönüşümü de aynı zamanda bir homeomorfizmdir (Law ve Tsay, 2001).

Bu şekilde ifade edilen ters nodal problemin, bir parçalanmadan sonra bile iyi tanımlı olduğunu görmek şaşırtıcıdır. Belirlenen ifade Xue-Feng Yang tarafından farklı bir açıdan çalışıldı. Yang bu çalışmasında kısaca, $\frac{1}{2} < b < 1$ olmak üzere $(0, b)$ alt

aralığındaki tüm nodal noktaların kümesinin, tekliği elde etmek için yeterli olduğunu göstermiştir (Xue-Feng Yang, 2001).

2.1. Sturm-Liouville Operatörü için Asimptotik Olarak Denk Nodal Diziler

Verilen geçerli bir $X = \{X_k^{(n)} : k = 1,2, \dots, n-1, n \in \mathbb{N}'\}$ dizisi için, $n \to \infty$ iken eğer aşağıdaki ifadelerden biri tam olarak geçerli ise X, $H = (q, \alpha, \beta) \in \Omega$ operatörüne asimptotik olarak nodaldır denir.

1. *DURUM*: Herhangi $1 \le k \le n-1$ için,

$$X_k^{(n)} = \frac{k}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2} \int_0^{X_k^{(n)}} [1 - \cos(2n\pi t)] q(t) dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{2.5}$$

olur. Bu durumda $\alpha = \beta = 0$ şeklindedir.

2. *DURUM*: Herhangi $1 \le k \le n-1$ için,

$$X_k^{(n)} = \frac{k-\frac{1}{2}}{n} + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_k^{(n)}} [1 + \cos(2n\pi t)] q(t) dt - A\right) + \frac{k-\frac{1}{2}}{n^3\pi^2}\left(A - B - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\, q(t) dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{2.6}$$

olacak şekilde A, B reel sayıları mevcuttur. Bu durumda $\alpha = cot^{-1}(A)$ ve $\beta = cot^{-1}(B)$ şeklindedir.

3. *DURUM* : Herhangi $1 \le k \le n-1$ için

$$X_k^{(n)} = \frac{k}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n-\frac{1}{2})^2\pi^2} \int_0^{X_k^{(n)}} [1 - \cos((2n-1)\pi t)] q(t) dt + \frac{k}{(n-\frac{1}{2})^3\pi^2}\left(-B + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((2n-1)\pi t)\, q(t) dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{2.7}$$

olacak şekilde B reel sayısı mevcuttur. Bu durumda $\alpha = 0$ ve $\beta = cot^{-1}(B)$ şeklindedir.

4. DURUM : Herhangi $1 \le k \le n-1$ için,

$$X_k^{(n)} = \frac{k-\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_k^{(n)}} [1-\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt - A\right)$$
$$+ \frac{k-\frac{1}{2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3 \pi^2}\left(A - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\big((2n-1)\pi t\big)\, q(t)dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

(2.8)

olacak şekilde A reel sayısı mevcuttur. Bu durumda $\alpha = cot^{-1}(A)$ ve $\beta = 0$ şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

Hatırlatma 2. 1. $X_0^{(n)} = 0, X_n^{(n)} = 1$ ve $0 \le k \le n-1$ için $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$ grid uzunluğu olsun. Ayrıca yeteri derecede büyük n ler için $1 \le k \le n-2$ olarak alınsın. (2.5)-(2.8) durumları kullanılarak basit hesaplamalar ile aşağıdaki ifadeler elde edilir.

1. DURUM :

$$L_0^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\int_0^{X_1^{(n)}} [1-\cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\int_{X_{n-1}^{(n)}}^1 [1-\cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1-\cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(2.9)

2. DURUM :

$$L_0^{(n)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_1^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt - A\right) + \frac{1}{2n^3\pi^2}(A-B) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_{n-1}^{(n)} = \frac{3}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_{n-1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt - A\right)$$

$$+\frac{2n-3}{2n^3\pi^2}\left(B - A + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\, q(t)dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt\right) + \frac{1}{n^3\pi^2}(A-B) + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(2.10)

3. *DURUM :*

$$L_0^{(n)} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\int_0^{X_1^{(n)}} [1-\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt - \frac{B}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\int_0^{X_{n-1}^{(n)}} [1-\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt$$

$$+\frac{n-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3\pi^2}\left(B - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\big((2n-1)\pi t\big)\, q(t)dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1-\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt - \frac{B}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(2.11)

4. *DURUM*

$$L_0^{(n)} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_1^{(n)}} [1+\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt - A\right) + \frac{A}{2(n-\frac{1}{2})^3\pi^2}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\left(A - \frac{1}{2}\int_0^{X_{n-1}^{(n)}} [1+\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt \right)$$

$$+ \frac{n-\frac{3}{2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3 \pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\big((2n-1)\pi t\big)\, q(t)dt - A \right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1+\cos((2n-1)\pi t)]q(t)dt + \frac{A}{(n-\frac{1}{2})^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(2.12)

Burada ve daha sonraki kısımlarda, $x_k^{(n)}$ ile elde edilen $l_k^{(n)}$ nodal uzunluğuna benzer şekilde, $X_k^{(n)}$ ile elde edilen $L_k^{(n)}$ grid uzunluğu kullanılacaktır (Law ve Tsay, 2001).

Teorem 2. 4. $X \in \Sigma$, $(q, \alpha, \beta) \in \Omega$ operatörüne asimptotik olarak nodal olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler elde edilir.

(a) α, β;

i) $\alpha = 0$ ya da herhangi $i \geq 1$ sabiti için

$$cot\alpha = A = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n\pi^2\left(i - \frac{1}{2} - nX_i^{(n)}\right), & \beta \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^2\left(i-\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)X_i^{(n)}\right), & \beta = 0 \end{cases}$$

ii) $\beta = 0$ ya da herhangi $i \geq 1$ sabiti için

$$cot\beta = B = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n\pi^2\left(n - i - \frac{1}{2} - nX_{n-i}^{(n)}\right), & \alpha \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi^2\left(n-i-\left(n-\frac{1}{2}\right)X_{n-i}^{(n)}\right), & \alpha = 0 \end{cases}$$

(b) Hemen hemen her $x \in (0,1)$ için, $\alpha = \beta = 0$ (1. DURUM) ya da $\alpha\beta > 0$ (2. DURUM) ise

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{2n^2\pi^2\left[nL_{J_n(x)}^{(n)} - 1 + \frac{L_{J_n(x)}^{(n)}}{n\pi^2}(scot\beta - scot\alpha)\right]\right\}$$

$\alpha = 0 < \beta$ (3. *DURUM*) ya da $\alpha > 0 = \beta$ (4. *DURUM*) ise

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)L_{J_n(x)}^{(n)} - 1 + \frac{L_{J_n(x)}^{(n)}}{n\pi^2}(scot\beta - scot\alpha)\right]\right\}$$

olur. Burada $\gamma = 0$ ise $scot\gamma = 0$, aksi halde $cot\gamma = 0$ şeklindedir. Ayrıca $J_n(x) = maks\{k: X_k^{(n)} \leq x\}$ şeklinde tanımlanır (Law ve Tsay, 2001).

İspat: Burada sadece 1. *DURUM* ve 2. *DURUM* göz önüne alınacaktır. Diğer durumların ispatı benzerdir.

1. *DURUM* için sınır koşulları aşikârdır. $J = J_n(x)$ olmak üzere

$$f_n(x) = 2n^2\pi^2\left(nL_J^{(n)} - 1\right),$$

olsun. Bu durumda (2.9) dan

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1 - \cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ifadesi, $f_n(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f_n(x) = 2n^2\pi^2\left(nL_J^{(n)} - 1\right)$$

$$= 2n^2\pi^2\left[n.\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1 - \cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\right]$$

$$= n.\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1 - \cos(2n\pi t)]q(t)dt + o(1),$$

elde edilir. Böylece Lemma 2. 4. gereğince, hemen hemen her $x \in (0,1)$ için f_n fonksiyon dizisi, q potansiyel fonksiyonuna yakınsar.

2. DURUM için ilk olarak (2. 6) dan

$$X_k^{(n)} = \frac{k - \frac{1}{2}}{n} + \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_k^{(n)}} [1 + \cos(2n\pi t)]q(t)dt - A\right)$$

$$+ \frac{k - \frac{1}{2}}{n^3\pi^2}\left(A - B - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\, q(t)dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

olmak üzere bazı düzenlemeler yapılırsa

$$n\pi^2\left(k-\frac{1}{2}-nX_k^{(n)}\right)=-\left[\frac{1}{2}\int_0^{X_k^{(n)}} q(t)dt-A+\frac{1}{2}\int_0^{X_k^{(n)}} \cos(2n\pi t)\,q(t)dt\right]+\ o\left(\frac{1}{n}\right),$$

olur. $n\to\infty$ iken $X_k^{(n)}\to 0$ olduğundan, $k=i$ için

$$A=\lim_{n\to\infty} n\pi^2\left(i-\frac{1}{2}-nX_i^{(n)}\right),$$

elde edilir. Öte yandan $k=n-i$ alınırsa, (2.6) ifadesi

$$X_{n-i}^{(n)}=\frac{(n-i-\frac{1}{2})}{n}+\frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{X_{n-i}^{(n)}}[1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt-A\right)$$
$$+\frac{(n-i-\frac{1}{2})}{n^3\pi^2}\left(A-B-\frac{1}{2}\int_0^{1}\cos(2n\pi t)\,q(t)dt\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

şekline gelir. Burada bazı düzenlemeler yapılırsa

$$n\pi^2\left(n-i-\frac{1}{2}-nX_{n-i}^{(n)}\right)=\left(A-\frac{1}{2}\int_0^{X_{n-i}^{(n)}}[1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt\right)$$
$$+\frac{(n-i-\frac{1}{2})}{n}\left(B-A+\frac{1}{2}\int_0^{1}\cos(2n\pi t)\,q(t)dt\right)+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

elde edilir. $n\to\infty$ iken; $X_{n-i}^{(n)}$ dizisi, 1'e yakınsar ve bu sebeple $\int_0^{X_{n-i}^{(n)}} q(t)dt$ sıfıra yakınsar. Böylece Riemann-Lebesque lemmasından

$$\lim_{n\to\infty} n\pi^2\left(n-i-\frac{1}{2}-nX_{n-i}^{(n)}\right)=B,$$

olur. (2.10) kullanılarak, $J_n(x)=J$ olmak üzere

$$f_n(x) = 2n^2\pi^2\left(nL_J^{(n)} - 1 + \frac{L_J^{(n)}}{n\pi^2}(B-A)\right) = n.\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt + o(1),$$

elde edilir. Gerçekten (2.10) dan

$$L_J^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt\right) + \frac{1}{n^3\pi^2}(A-B) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

olduğu bilinmektedir. $L_J^{(n)}$, $f_n(x)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$2n^2\pi^2\left(nL_J^{(n)} - 1 + \frac{L_J^{(n)}}{n\pi^2}(B-A)\right) = \int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt\left[n + \frac{B-A}{n\pi^2}\right] + o(1)$$

$$= n\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt + o(1),$$

elde edilir. Dolayısı ile hemen hemen her $x \in (0,1)$ için, aşağıda verilecek olan Lemma 2.4. gereğince

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n.\int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} [1+\cos(2n\pi t)]q(t)dt = q(x),$$

elde edilir.

Lemma 2. 3. $(q,\alpha,\beta) \in L_1(0,1) \times [0,\pi)^2$ olsun. $\alpha > 0$ ise $\alpha_0 = 1$ ve $\alpha = 0$ ise $\alpha_0 = -1$ olarak alınsın.

(a) $\alpha = \beta = 0$ ya da $\alpha, \beta > 0$ ise, $n \to \infty$ iken

$$s_n = n\pi + \frac{1}{n\pi}\left[-scot\alpha + scot\beta + \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\alpha_0\cos(2n\pi t))q(t)dt\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{s_n} = \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^3\pi^3}\left[-scot\alpha + scot\beta + \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\alpha_0\cos(2n\pi t))q(t)dt\right] + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

(2.13)

şeklindedir.

(b) $\alpha = 0 < \beta$ ya da $\alpha > \beta = 0$ ise, $n \to \infty$ iken

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}\left[-scot\alpha + scot\beta + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + \alpha_0 \cos((2n-1)\pi t))q(t)dt\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{s_n} = \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^3 \pi^3}\left[scot\beta - scot\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + \alpha_0 \cos((2n-1)\pi t))q(t)dt\right] + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

Tablo 2. 3. $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha_0 = 1, q(x) = x}$ için verilen (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

$\boldsymbol{\lambda_n}$: **Öz değerler**										
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	3.2211	6.3229	9.4513	12.5863	15.7239	18.8628	22.0025	25.1427	28.2832	31.4239

Tablo 2. 4. $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, q(x) = x}$ için verilen (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

$\boldsymbol{\lambda_n}$: **Öz değerler**										
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	1.7299	4.7654	7.8858	11.0183	14.1549	17.293	20.4326	23.5726	26.7129	29.8535

Tablo 2.3. ve Tablo 2.4. de, (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin potansiyel fonksiyonunun ve sınır koşul parametrelerinin çeşitli özel durumları için Lemma 2.3. ile verilen asimptotik formüle sahip, spektrumuna ait ilk on öz değer gösterilmiştir. Bu elde edilen sayısal değerler, (2.1) Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerin reel olduğunu göstermektedir.

Lemma 2. 4. $f \in L_1(0,1)$ ve X asimptotik olarak denk nodal bir dizi olsun. Bu durumda $J = J_n(x) = maks\{k: X_k^{(n)} \leq x\}$ olmak üzere, hemen hemen her $x \in (0,1)$ için

$$a_n = \begin{cases} n, & \alpha = \beta = 0 \text{ ya da } \quad \alpha, \beta > 0 \\ n - \dfrac{1}{2}, & \alpha = 0 < \beta \text{ ya da } \quad \alpha > 0 = \beta \end{cases}$$

olmak üzere

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} f(t)dt = f(x)$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_{X_J^{(n)}}^{X_{J+1}^{(n)}} \cos(2a_n\pi t)\, f(t)dt = 0$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

Teorem 2. 5. Ω uzayında verilen bir $H = (q, \alpha, \beta)$ operatörü için, nodal noktaların $\{x_k^{(n)}\}$ kümesi aynı zamanda H operatörünün kendisine asimptotik nodaldır (Law ve Tsay, 2001).

İspat : $\{x_k^{(n)}\}$ nodal kümesinin, tanımdaki *(a)* koşulunu sağladığı açıktır. 1. DURUM yani $\alpha = \beta = 0$ olması durumu göz önüne alınırsa

$$x_k^{(n)} = \frac{k\pi}{s_n} + \frac{1}{2{s_n}^2} \int_0^{x_k^{(n)}} [1 - \cos(2s_n t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{{s_n}^3}\right)$$

$$= \frac{k}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2} \int_0^{x_k^{(n)}} [1 - \cos(2n\pi t)]q(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olur. Burada

$$s_n = n\pi + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

şeklindedir. Bunun nedeni

$$cosx - cosy = -2sin\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

dönüşüm formülü kullanıldığında

$$\int_0^{x_k^{(n)}} [\cos(2n\pi t) - \cos(2s_n t)]q(t)dt = -2\int_0^{x_k^{(n)}} sin\left(\frac{2n\pi t + 2s_n t}{2}\right) sin\left(\frac{2n\pi t - 2s_n t}{2}\right) q(t)dt$$

$$= -2\int_0^{x_k^{(n)}} sin(n\pi t + s_n t) sin(n\pi t - s_n t) q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} sin(n\pi t + s_n t) sin(s_n t - n\pi t) q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} sin\left[\left(\frac{-scot\alpha}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)t\right] sin[(n\pi + s_n)t] q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} \left[\left(\frac{-scot\alpha}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)t\right] sin\left[\left(n\pi + n\pi + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)t\right] q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} \frac{-scot\alpha}{n\pi} . sin\left[2n\pi t + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] tq(t)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{-scot\alpha}{n\pi}\int_0^{x_k^{(n)}} sin[2n\pi t] tq(t)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{-scot\alpha}{n\pi} o(1) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olmasıdır.

$\alpha = 0 < \beta$ olması durumu (yani 3. DURUM) göz önüne alınırsa ve (2.14); (2. 2) de yerine yazılırsa

$$x_k^{(n)} = \frac{k}{n - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1 - \cos((2n-1)\pi t)] q(t)dt$$

$$+ \frac{k}{(n - \frac{1}{2})^3 \pi^2}\left(-B + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((2n-1)\pi t)\, q(t)dt\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

elde edilir. Bunun için aşağıdaki işlemler uygulanmıştır.

$$\int_0^{x_k^{(n)}} [\cos((2n-1)\pi t) - \cos(2s_n t)]q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} sin\left[\left(s_n - \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)t\right] sin\left[\left(s_n + \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)t\right] q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} \left[\frac{-cot\alpha}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}t + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] sin\left[\left(s_n + \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)t\right] q(t)dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} \frac{-cot\alpha}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} sin\left[(2n-1)\pi t + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] tq(t)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{-cot\alpha}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\int_0^{x_k^{(n)}} sin[(2n-1)\pi t]tq(t)dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{-cot\alpha}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}o(1) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(2.15)

Diğer durumlar benzerdir.

2.2. Sturm-Liouville Operatörü için Ters Nodal Problemin Kararlılığı

Bu kısımda "Ω" ve "Σ" uzayları üzerinde bazı metrikler tanımlanacaktır. İlk olarak herhangi $\varphi, \psi \in [0,\pi)$ için

$$d_\pi(\varphi,\psi) = \begin{cases} |\varphi - \psi|, & 0 < \varphi\,, \quad \psi < \pi \text{ ise} \\ 0, & \varphi = \psi = 0 \text{ ise} \\ \pi, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

metriği tanımlansın. $d_\pi: [0,\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^+$ dönüşümünün $[0,\pi)$ üzerinde bir metrik olduğu açıktır. Böylece $(d_\pi, [0,\pi))$ bir metrik uzaydır. Diğer taraftan Ω üzerinde herhangi $H = (q,\alpha,\beta),\ \overline{H} = \left(\bar{q},\bar{\alpha},\bar{\beta}\right) \in \Omega$ operatörleri için

$$d_\Omega(H,\overline{H}) = \|q - \bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right),$$

şeklinde bir d_Ω metriği tanımlansın. $d_\Omega: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü Ω üzerinde bir metrik ve (Ω, d_Ω) bir metrik uzaydır.

$X, \bar{X} \in \Sigma$ ve bunlara karşılık gelen grid uzunluklar sırası ile $L_k^{(n)}$ ve $\bar{L}_k^{(n)}$ olsun. Ayrıca

$$S_n(X, \bar{X}) = n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right|, \tag{2.16}$$

ve

$$d_0(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(X, \bar{X}) \text{ ve } \quad d_\Sigma(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X, \bar{X})}{1 + S_n(X, \bar{X})}$$

olarak tanımlansın.

$$d_\Sigma(X, \bar{X}) \leq d_0(X, \bar{X})$$

olduğu açıktır. $d_0(X, \bar{X})$ sonlu ise

$$d_0(X, \bar{X}) \leq [1 + d_0(X, \bar{X})] d_\Sigma(X, \bar{X})$$

şeklindedir. Böylece

$$d_0(X, \bar{X}) \leq \frac{d_\Sigma(X, \bar{X})}{1 - d_\Sigma(X, \bar{X})}, \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada $d_\Sigma(X, \bar{X}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $d_0(X, \bar{X}) = 0$ olmasıdır (Law ve Tsay, 2001).

Önerme 2. 1. $d_\Sigma(.,.)$ fonksiyonu, Σ üzerinde bir pseudo metriktir (Law ve Tsay, 2001).

Böylece $d_\Sigma(.,.) = 0$, Σ üzerinde bir "$\sim$" denklik bağıntısı tanımlar. Buna ilaveten (Σ^*, d_Σ) bir metrik uzaydır (Royden, 1988).

Aşağıdaki önerme, $X, \bar{X} \in \Sigma_1$ farklı durumlara ait ise, bunların birbirlerine çok yakın olamayacağını gösterir. Böylece kararlılık probleminin incelenmesinde bu durumu ele almaya gerek yoktur. Diğer taraftan, bu önerme aynı zamanda aynı geçerli dizinin farklı asimptotik ifadelere sahip olamayacağını gösterir. Bu ise asimptotik olarak denk nodal dizilerin tanımını doğrular.

Önerme 2. 2. $X, \bar{X} \in \Sigma_1$ farklı durumlara ait olsunlar. Bu durumda

$$d_\Sigma(X, \bar{X}) = 1,$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

Lemma 2. 5. $X, \bar{X} \in \Sigma_1$ aynı duruma ait olsunlar.

(a) $n \to \infty$ iken, $X_k^{(n)}$ ve $\bar{X}_k^{(n)}$ arasındaki $I_k^{(n)}$ aralığı $O(n^{-2})$ uzunluğuna sahiptir.

(b) Yeteri kadar büyük n ler ve herhangi $x \in (0,1)$ için

$$|J_n(x) - \bar{J}_n(x)| \leq 1$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

Teorem 2. 6. $X, \bar{X} \in \Sigma_1$ sırası ile Ω uzayında (q, α, β) ve $(\bar{q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ operatörlerine asimptotik olarak nodal ise

$$\|q - \bar{q}\|_1 + |scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + \left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right| \leq 8d_0(X, \bar{X}),$$

şeklinde olur (Law ve Tsay, 2001).

İspat: İlk olarak X ve $\bar{X}$ farklı durumlara ait olsunlar. Bu durumda önerme 2.2. den kolaylıkla

$$d_0(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(X, \bar{X}) = \infty$$

olduğu görülür ve böylece teorem sağlanmış olur. Bu nedenle kabul edelim ki $X, \bar{X}$ aynı duruma ait olsunlar. 1. DURUM u ele alalım. Hemen hemen her $x \in (0,1)$ için

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{2n^3\pi^2 L_{J_n(x)}^{(n)} - 2n^2\pi^2\right\}$$
$$\bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{2n^3\pi^2 \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} - 2n^2\pi^2\right\}$$

olduğundan

$$q(x) - \bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} 2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right)$$

elde edilir. L_1 uzayındaki norm tanımı ve Fatou Lemması kullanılırsa

$$\|q-\bar{q}\|_1 = \int_0^1 |q-\bar{q}| = \int_0^1 \left|\lim_{n\to\infty} 2n^3\pi^2\left(L^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{\bar{J}_n(x)}\right)\right| dx$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty} \int_0^1 2n^3\pi^2 \left|L^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{\bar{J}_n(x)}\right| dx$$

$$\leq 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^1 n^3 \left|L^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{J_n(x)} + \bar{L}^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{\bar{J}_n(x)}\right| dx$$

$$\leq 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ n^3 \int_0^1 \left|L^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{J_n(x)}\right| dx + n^3 \int_0^1 \left|\bar{L}^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{\bar{J}_n(x)}\right| dx \right\}$$

olur. Bu ifade de ikinci terim

$$n^3 \int_0^1 \left|\bar{L}^{(n)}_{J_n(x)} - \bar{L}^{(n)}_{\bar{J}_n(x)}\right| dx = n^3 \sum_{k=0}^{n-1} \left|\bar{L}^{(n)}_{k+1} - \bar{L}^{(n)}_{k}\right| \left|I^{(n)}_k\right| = n^3 \sum_{k=0}^{n-1} o\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o(1),$$

bulunur. Gerçekten burada $\left|I^{(n)}_k\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ve

$$\left|\bar{L}^{(n)}_{k+1} - \bar{L}^{(n)}_{k}\right| = \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2} \int_{\bar{X}^{(n)}_{k+1}}^{\bar{X}^{(n)}_{k+2}} [1-\cos(2n\pi t)]\bar{q}(t)dt - \frac{1}{n} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n^2\pi^2} \int_{\bar{X}^{(n)}_{k}}^{\bar{X}^{(n)}_{k+1}} [1-\cos(2n\pi t)]\bar{q}(t)dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2n^2\pi^2} \left[\int_{\bar{X}^{(n)}_{k+1}}^{\bar{X}^{(n)}_{k+2}} [1-\cos(2n\pi t)]\bar{q}(t)dt - \int_{\bar{X}^{(n)}_{k}}^{\bar{X}^{(n)}_{k+1}} [1-\cos(2n\pi t)]\bar{q}(t)dt \right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

$$= o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. Dolayısı ile $n \to \infty$ iken limit supremum alınırsa yukarıdaki ikinci terim ortadan kaybolacaktır. $h(t) = 1-\cos(2n\pi t)$ alınırsa, (2.9) dan

$$\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

(2.18)

olur. Bu ifadeler yukarıda yerine yazılırsa

$$\|q - \bar{q}\|_1 \leq 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^1 n^3 \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} n^3 \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| L_k^{(n)}$$

$$= 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} n^3 \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 + o(n)) \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right|$$

$$= 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} n^2 \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + 2\pi^2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} o(n) \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right|$$

$$= 2\overline{\lim_{n\to\infty}} n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| = 2d_0(X, \bar{X}),$$

elde edilir.

1. *DURUM* : Kabul edelim ki $A = cot\alpha, \bar{A} = cot\bar{\alpha}$, $B = cot\beta$ ve $\bar{B} = cot\bar{\beta}$ olsun. $i > 0$ olacak şekilde sabitleyelim. Böylece Teorem 2.4 den,

$$|A - \bar{A}| = \lim_{n\to\infty} \left|n\pi^2 i - \frac{n\pi^2}{2} - n^2\pi^2 X_i^{(n)} - n\pi^2 i + \frac{n\pi^2}{2} + n^2\pi^2 \bar{X}_i^{(n)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|n^2\pi^2\left(X_i^{(n)} - \bar{X}_i^{(n)}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \left|X_i^{(n)} - \bar{X}_i^{(n)}\right|$$

$$\leq n^2\pi^2 \left|X_i^{(n)} - \bar{X}_i^{(n)}\right| + o(1)$$

olmak üzere

$$|A-\bar{A}| \leq n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + o(1)$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ iken limit supremum alınırsa

$$|A-\bar{A}| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| \leq d_0(X,\bar{X})$$

olur. Benzer şekilde

$$|B-\bar{B}| \leq d_0(X,\bar{X}),$$

olduğu gösterilebilir. Böylece hemen hemen her $x \in (0,1)$ için

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \left[2n^3\pi^2 L_{J_n(x)}^{(n)} - 2n^2\pi^2 + 2nL_{J_n(x)}^{(n)} \left(\underbrace{scot\beta}_{B} - \underbrace{scot\alpha}_{A} \right) \right]$$

$$\bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[2n^3\pi^2 \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} - 2n^2\pi^2 + 2n\bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \left(\underbrace{scot\bar{\beta}}_{\bar{B}} - \underbrace{scot\bar{\alpha}}_{\bar{A}} \right) \right]$$

olmak üzere

$$q(x) - \bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right) + 2nL_{J_n(x)}^{(n)}(B-A) - 2n\bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}(\bar{B}-\bar{A}) \right]$$

olur. Dolayısı ile buradan

$$q(x) - \bar{q}(x) = 2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right) + 2nL_{J_n(x)}^{(n)}(B-A) - 2n\bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}(\bar{B}-\bar{A}) + o(1)$$

$$= 2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right) + 2n\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)(B-A) - 2n\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)(\bar{B}-\bar{A}) + o(1)$$

$$= 2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right) + 2(B-\bar{B}) - 2(A-\bar{A}) + o(1)$$

elde edilir. (2.18) ifadesi bu durumda da geçerli olup

$$\int_0^1 |q-\bar{q}| = \int_0^1 \left| \lim_{n\to\infty} 2n^3\pi^2 \left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right) + 2(B-\bar{B}) - 2(A-\bar{A}) \right| dx$$

$$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^1 \left|2n^3\pi^2\left(L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right) + 2(B-\bar{B}) - 2(A-\bar{A})\right| dx$$

$$\leq 2\overline{\lim}_{n\to\infty} n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + 2|B-\bar{B}| + 2|A-\bar{A}|$$

$$\leq 6d_0(X,\bar{X})$$

elde edilir. 3. DURUM için,

$$\int_0^1 |q-\bar{q}| \leq 4d_0(X,\bar{X}),$$

olduğu görülebilir. Geri kalan kısım benzerdir.

Teorem 2. 7. $X, \bar{X} \in \Sigma_1$ sırası ile Ω üzerinde $H = (q, \alpha, \beta)$ ve $\bar{H} = (\bar{q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ operatörlerine asimptotik olarak nodal olsun. H ve $\bar{H}$ aynı duruma ait ise

$$d_0(X,\bar{X}) \leq \|q-\bar{q}\|_1 + 2|scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + 2\left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right|,$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

İspat: Burada sadece her bir durum için S_n dizisini bulmak ve bulduğumuz ifadenin limit supremumunu almak gerekmektedir. 1. DURUM için, $h(t) = 1 - \cos(2n\pi t)$ olsun. Bu durumda (2.18) den

$$\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| = \frac{1}{2n^2\pi^2}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

şeklindedir. Böylece

$$S_n = n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| = \frac{n^2\pi^2}{2n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)q(t)dt - \int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt + \int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)\big(q(t)-\bar{q}(t)\big)dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}}\right) h(t)\bar{q}(t)dt\right| + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left|\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} h(t)\big(q(t)-\bar{q}(t)\big)dt\right| + \left|\left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}}\right) h(t)\bar{q}(t)dt\right|\right] + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} |h(t)||q(t)-\bar{q}(t)|dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}}\right) |h(t)||\bar{q}(t)|dt\right] + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{2}.2\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}}\right) |\bar{q}(t)|dt\right] + o(1)$$

olur. Burada $h(t) = 1 - \cos(2n\pi t)$ olduğundan $|h(t)| \leq 2$ şeklindedir. Dolayısı ile

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt$$

$$= \int_{X_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \int_{X_1^{(n)}}^{X_2^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \cdots + \int_{X_{n-1}^{(n)}}^{X_n^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt$$

$$= \int_0^1 |q(t)-\bar{q}(t)|dt = \|q-\bar{q}\|_1$$

olmak üzere

$$S_n \leq \|q-\bar{q}\|_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}}\right)|\bar{q}(t)|dt + o(1)$$

$$= \|q - \bar{q}\|_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_k^{(n)} \cup I_{k+1}^{(n)}} |\bar{q}| + o(1)$$

şeklinde olur. Burada $I_k^{(n)}, X_k^{(n)}$ ve $\bar{X}_k^{(n)}$ ile sınırlandırılan bir aralıktır. Kabul edelim ki $I^{(n)} = \cup_0^n I_k^{(n)}$ olsun. Bu durumda Lemma 2. 5. den

$$\left|I^{(n)}\right| = \sum_{k=0}^{n} \left|I_k^{(n)}\right| = n.O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

bulunur. Böylece $\int_0 |\bar{q}| = 0$ olmak üzere

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{I^{(n)}} |\bar{q}| = 0,$$

olur. Dolayısı ile

$$d_0(X, \bar{X}) \leq \|q - \bar{q}\|_1,$$

elde edilir.

Diğer taraftan 2. *DURUM* için, (2.10) dan $\bar{h}(t) = 1 + \cos(2n\pi t)$ olmak üzere

$$L_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt\right) + \frac{A-B}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ve

$$\bar{L}_k^{(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt\right) + \frac{\bar{A}-\bar{B}}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olur. Dolayısı ile

$$\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| = \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt\right) + \frac{A-B}{n^3\pi^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(\int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt\right) - \frac{\bar{A}-\bar{B}}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|$$

$$= \left| \frac{1}{2n^2\pi^2} \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt \right) + \frac{A-B}{n^3\pi^2} - \frac{\bar{A}-\bar{B}}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

elde edilir. Böylece

$$S_n = n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right|$$

$$= n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{2n^2\pi^2} \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt \right) + \frac{A-B}{n^3\pi^2} - \frac{\bar{A}-\bar{B}}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

$$\leq n^2\pi^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left[\frac{1}{2n^2\pi^2} \left| \int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt \right| + \frac{|A-\bar{A}|}{n^3\pi^2} + \frac{|B-\bar{B}|}{n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left| \int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)q(t)dt - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \bar{h}(t)\bar{q}(t)dt \right| + 2|A-\bar{A}| + 2|B-\bar{B}| + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} \left|\bar{h}(t)\right| |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \right) \left|\bar{h}(t)\right| |\bar{q}(t)|dt \right] + 2|A-\bar{A}| + 2|B-\bar{B}| + o(1)$$

olur. Buradan $\left|\bar{h}(t)\right| \leq 2$ olup

$$S_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \right) |\bar{q}(t)|dt \right] + 2|A-\bar{A}| + 2|B-\bar{B}| + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} |q(t)-\bar{q}(t)|dt + \left(\int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} - \int_{\bar{X}_k^{(n)}}^{\bar{X}_{k+1}^{(n)}} \right) |\bar{q}(t)|dt \right] + 2|A-\bar{A}| + 2|B-\bar{B}| + o(1)$$

$$\leq \|q-\bar{q}\|_1 + \sum_{k=0}^{n-2} \int_{I_k^{(n)} \cup I_{k+1}^{(n)}} |\bar{q}| + 2|A-\bar{A}| + 2|B-\bar{B}| + o(1)$$

bulunur. Burada $A = cot\alpha$, $B = cot\beta$, $\bar{A} = cot\bar{\alpha}$, $\bar{B} = cot\bar{\beta}$ olmak üzere limit supremum alınırsa

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(X,\bar{X}) = d_0(X,\bar{X}) \le \|q-\bar{q}\|_1 + 2|scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + 2\left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right|$$

elde edilir. Geri kalan kısım benzerdir.

Teorem 2. 2. (Ω, d_Ω) ve (Σ_1^*, d_Σ) metrik uzayları homeomorfiktir (Law ve Tsay, 2001).

İspat: Teorem 2.6. ve Teorem 2.7. den $d_\Sigma(X,\bar{X}) = 0$ olması için gerek ve yeter şartın $H = \bar{H}$ şeklinde olması gerektiği açıktır. Gerçekten Teorem 2.7. de

$$d_0(X,\bar{X}) \le \|q-\bar{q}\|_1 + 2|scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + 2\left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right|$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $H = \bar{H}$ ise $q = \bar{q} \wedge \alpha = \bar{\alpha} \wedge \beta = \bar{\beta}$ olup

$$d_0(X,\bar{X}) \le \underbrace{\|q-\bar{q}\|_1}_{0} + 2\underbrace{|scot\alpha - scot\bar{\alpha}|}_{0} + 2\underbrace{\left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right|}_{0} = 0$$

bulunur. Böylece $d_\Sigma(X,\bar{X}) \le d_0(X,\bar{X}) \le 0 \Longrightarrow d_\Sigma(X,\bar{X}) \le 0 \Longrightarrow d_\Sigma(X,\bar{X}) = 0$ olur. Diğer taraftan kabul edelim ki $d_\Sigma(X,\bar{X}) = 0$ olsun.

$$d_\Sigma(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{1+S_n} = 0 \Longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} 1 + \frac{1}{S_n} = \infty \Longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{S_n} = \infty \Longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = d_0(X,\bar{X}) = 0$$

olur. Dolayısı ile Teorem 2.6. dan

$$\|q-\bar{q}\|_1 + |scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + \left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right| \le 8d_0(X,\bar{X}) = 0$$

olmak üzere $q = \bar{q} \wedge \alpha = \bar{\alpha} \wedge \beta = \bar{\beta}$ ise $H = \bar{H}$ olarak bulunur. Böylece $\Sigma_1^* = \Sigma_1/\sim$ bölüm kümesi, Ω uzayına birebir bir dönüşüm ile bağlıdır. $d_\Sigma(X,\bar{X}) < \frac{1}{2}$ olmak üzere (2.17) ve Teorem 2.6. dan, yani

$$d_0(X,\bar{X}) \le \frac{d_\Sigma(X,\bar{X})}{1-d_\Sigma(X,\bar{X})}$$

ve

$$\|q-\bar{q}\|_1 + |scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + \left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right| \le 8d_0(X,\bar{X})$$

eşitsizliklerinden

$$\|q-\bar{q}\|_1 + |scot\alpha - scot\bar{\alpha}| + \left|scot\beta - scot\bar{\beta}\right| \le \frac{d_\Sigma(X,\bar{X})}{1-d_\Sigma(X,\bar{X})} \le 16d_\Sigma(X,\bar{X})$$

elde edilir. Böylece $X, \bar{X}$ aynı duruma ait ve cot^{-1} fonksiyonu lokal olarak homeomorfik ise; H ve $\bar{H}$, d_Ω metriğine göre istenildiği kadar birbirine yakın seçilebilir.

Diğer taraftan

$$d_\pi(\varphi,\psi)=\begin{cases}|\varphi-\psi|, & 0<\varphi\,, \quad \psi<\pi \\ 0, & \varphi=\psi=0 \\ \pi, & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

olmak üzere

$$d_\Omega(H,\bar{H})=\|q-\bar{q}\|_1+d_\pi(\alpha,\bar{\alpha})+d_\pi(\beta,\bar{\beta})$$

metriği için, $d_\Omega(H,\bar{H})=0$ olduğu durumda $q=\bar{q}\wedge\alpha=\bar{\alpha}\wedge\beta=\bar{\beta}$ olacağından, H ve $\bar{H}$ aynı durumdadır. Böylece Teorem 2.7. deki ifadeden $d_\Sigma(X,\bar{X})$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu ise ispatı gerçekler. Gerçekten Teorem 2.7. deki

$$d_0(X,\bar{X})\le\|q-\bar{q}\|_1+2|scot\alpha-scot\bar{\alpha}|+2\left|scot\beta-scot\bar{\beta}\right|$$

ifadesi ele alınırsa

$$d_\Sigma(X,\bar{X})\le d_0(X,\bar{X})$$

olup, $d_\Sigma(X,\bar{X})$ istenildiği kadar küçük yapılabilir.

2.3. Sturm-Liouville Operatörü için Yüksek Mertebeden Kararlılık

δ ve δ^m fark bölüm operatörleri sırası ile

$$\delta a_i^{(n)}=\frac{a_{i+1}^{(n)}-a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}} \quad \text{ve} \quad \delta^m a_i^{(n)}=\frac{\delta^{m-1}a_{i+1}^{(n)}-\delta^{m-1}a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}}$$

şeklinde tanımlansın. δ ve δ^m, sadece $\left\{a_i^{(n)}\right\}$ çift indisli dizisine bağlıdır. X, $\bar{X}\in\Sigma_1$ ve $k>n$ için $X_k^{(n)}=\bar{X}_k^{(n)}=1$ olsun. $m=1,2,\dots,N$ için

$$S_{m,n}(X,\bar{X})=n^2\pi^2\sum_{k=1}^{n-m-2}\left|\delta^m L_k^{(n)}-\delta^m\bar{L}_k^{(n)}\right|,$$

ve

$$d_m(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_{m,n}(X,\bar{X}) \text{ ve } \quad d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_{m,n}(X,\bar{X})}{1+S_{m,n}(X,\bar{X})},$$

olarak tanımlansın. Bu limitlerin varlığı Teorem 2. 9. ile doğrulanacaktır (Law ve Tsay, 2001).

$$d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}) \le d_m(X,\bar{X}),$$

ve $d_m(X,\bar{X})$ sonlu olduğu müddetçe

$$d_m(X,\bar{X}) \le [1+d_m(X,\bar{X})]d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}) = d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}) + d_m(X,\bar{X})d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X})$$

olmak üzere

$$d_m(X,\bar{X}) \le \frac{d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X})}{1-d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X})},$$

şeklindedir. Üstelik $d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $d_m(X,\bar{X}) = 0$ olmasıdır.

$$D_{\Sigma(N)}(X,\bar{X}) = d_{\Sigma}(X,\bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)}(X,\bar{X}),$$

olarak tanımlansın. $D_{\Sigma(N)}$ dönüşümünün, $\Sigma_1(N)$ uzayında bir pseudo metrik olduğu gösterilebilir. $\sim_N$, $D_{\Sigma(N)}$ için $\Sigma_1(N)$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\Sigma_1^*(N) = \Sigma_1(N)/\sim_N$ olsun. $q,\bar{q} \in C^N[0,1]$ ve $H = (q,\alpha,\beta), \bar{H} = (\bar{q},\bar{\alpha},\bar{\beta}) \in \Omega$ için

$$d_{\Omega(N)}(H,\bar{H}) = d_{\Omega}(H,\bar{H}) + \sum_{m=1}^{N} \left\| q^{(m)} - \bar{q}^{(m)} \right\|_1,$$

tanımlansın. Burada $d_{\Omega(N)}$ dönüşümünün, $\Omega(N)$ üzerinde bir metrik olduğu açıktır. Teorem 2.3. ün ispatı $q^{(m)}$ için verilen aşağıdaki yapılandırma formülüne bağlıdır (Law ve Tsay, 2001).

Teorem 2. 8. $q \in C^N[0,1], N \in \mathbb{N}$ ve $\left\{x_k^{(n)}\right\}; H = (q,\alpha,\beta)$ ile ilgili nodal dizi olsun. Bu durumda $\forall m = 1,2,\dots,N$ için ve her bir $x \in [0,1]$ için, $j_n(x) = maks\left\{k : x_k^{(n)} \le x\right\}$ ve $n \to \infty$ olmak üzere

$$q^{(m)}(x) = 2n^3\pi^2\delta^m l_j^{(n)} + o(1),$$

şeklindedir (Law ve Ching Fu Yang, 1998).

Teorem 2. 9. Kabul edelim ki $q, \bar{q} \in C^N[0,1]$ ve $(\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ aynı duruma ait olsunlar. Ayrıca X ve $\bar{X}$ ilgili asimptotik olarak denk nodal diziler olsunlar. Bu durumda $\forall m = 1,2, \dots, N$ için

$$\left\| q^{(m)} - \bar{q}^{(m)} \right\|_1 = 2d_m(X, \bar{X}),$$

şeklindedir (Law ve Tsay, 2001).

İspat: Teorem 2.8., (2.4) ve hatırlatma 2.1. gereğince

$$q^{(m)}(x) = 2n^3\pi^2\delta L_J^{(n)} + o(1) \quad \text{ve} \quad \bar{q}^{(m)}(x) = 2n^3\pi^2\delta \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)} + o(1),$$

olmak üzere

$$q^{(m)}(x) - \bar{q}^{(m)}(x) = 2n^3\pi^2\left[\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right] + o(1),$$

ve

$$\left| q^{(m)} - \bar{q}^{(m)} \right| = 2n^3\pi^2\left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| + o(1),$$

olur. Böylece yeteri derece de büyük n ler için

$$\left\| q^{(m)} - \bar{q}^{(m)} \right\|_1 = \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left| q^{(m)}(x) - \bar{q}^{(m)}(x) \right| dx + o(1)$$

$$= 2n^3\pi^2 \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left| \delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)} \right| dx + o(1),$$

olur. Lemma 2.5. ve (Law ve Ching Fu Yang, 1998) gereğince

$$\int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left| \delta^m \bar{L}_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)} \right| dx = \sum_{k=1}^{n-m-2} \left| \delta^m \bar{L}_{k+1}^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)} \right| \left| I_k^{(n)} \right| = \sum_{k=1}^{n-m-2} O\left(\frac{1}{n^3}\right) O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$= O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

olur. Üstelik $L_k^{(n)} = \frac{1}{n} + O(n^{-2})$ olduğundan

$$2n^3\pi^2 \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_j^{(n)}\right| dx + o(1) = 2n^3\pi^2 \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| L_k^{(n)} + o(1)$$

$$= 2n^3\pi^2 \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| \left(\frac{1}{n} + O(n^{-2})\right) + o(1)$$

$$= 2n^2\pi^2 \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| + o(1),$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = 2n^2\pi^2 \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| + o(1),$$

bulunur. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = 2d_m(X, \bar{X}),$$

elde edilir.

Hatırlatma 2. 2. [0,1] aralığı üzerinde $q^{(m)}$ ve $\bar{q}^{(m)}$ fonksiyonlarının sürekli olması, bu teoremin ispatı için oldukça önemli bir role sahiptir. $q,\ \bar{q} \in L_1(0,1)$ olsaydı, $q^{(m)}$ ve $\bar{q}^{(m)}$ için düzgün olmayan bir yapılandırma formülü elde edilirdi. Bu yüzden Teorem 2.6. ve Teorem 2.7. deki ispatlar, Teorem 2.9. un ispatından oldukça farklıdır (Law ve Tsay, 2001).

Lemma 2.6. Verilen $X,\ \bar{X} \in \Sigma(N)$ için, $d_\Sigma(X,\ \bar{X}) = 0 \Leftrightarrow D_{\Sigma(N)}(X,\ \bar{X}) = 0$ olmasıdır (Law ve Tsay, 2001).

İspat: Gerçekten

$$D_{\Sigma(N)}(X, \bar{X}) = d_\Sigma(X, \bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)}(X, \bar{X})$$

olduğu bilinmektedir. Burada $D_{\Sigma(N)}(X,\ \bar{X}) = 0 \Longrightarrow d_\Sigma(X, \bar{X}) = 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan aksini ispat etmeye çalışalım. Kabul edelim ki $d_\Sigma(X, \bar{X}) = 0$ olsun. Yeter şartın ispatı için $d_\Sigma(X, \bar{X}) = 0$ olması durumunda, L_1 uzayındaki $q,\ \bar{q}$ fonksiyonlarının eşit olduğunu göstermek gerekir. $q,\ \bar{q}$ fonksiyonlarının her ikisi de C^N sınıfından olup, $\forall m = 1,2,\dots,N$ için $q^{(m)} = \bar{q}^{(m)}$ olur. $\forall m = 1,2,\dots,N$ için Teorem 2.9. gereğince

$d_m(X, \bar{X}) = 0$ ve $d_{\Sigma(m)}(X, \bar{X}) \leq d_m(X, \bar{X})$ olduğundan tanım gereği $d_{\Sigma(m)}(X, \bar{X}) = 0$ olur. $d_{\Sigma}(X, \bar{X}) = 0$ ve $d_{\Sigma(m)}(X, \bar{X}) = 0$ olduğundan, $D_{\Sigma(N)}(X, \bar{X}) = 0$ elde edilir.

Teorem 2.3. ün ispatı: Lemma 2.6. dan, $D_{\Sigma(N)}$ için verilen $\sim_N$ denklik bağıntısı ile d_{Σ} için verilen $\sim$ denklik bağıntısı aynıdır. Böylece $\Sigma_1^*(N) \subset \Sigma_1^*$ olur. Buradan ise

$$\Phi\big(\Omega(N)\big) = \Sigma_1^*(N)$$

elde edilir. Teorem 2.9. ve Teorem 2.2. gereğince Φ dönüşümü, $\Omega(N)$ uzayından $\Sigma_1^*(N)$ uzayına bir homeomorfizmdir.

3. DİFÜZYON DENKLEMİNİN GENEL ÖZELLİKLERİ

Fizikte çarpışan parçacıklar arasındaki etkileşimleri ifade etme problemi oldukça ilgi çekicidir. Birçok durumda, bir tanım iyi bilinen bir teorik model yardımı ile yapılabilir. Bu amaçla aşağıdaki ters problem ortaya konulmuştur. Bu problem bazı önemli nicelikleri deneysel sonuçlardan elde etme ve kendilerini türeten seçilmiş modelde meydana gelen parametrelerin değerlerinin ne olduğunun belirlenmesi problemidir.

1972 yılında Jaulent ve Jean, kendi ekseni etrafında dönmeyen iki parçacığın çarpışması ile ilgilenmişlerdir. Tüm $E > 0$ enerjileri için tanımlı $S(E)$ ile gösterilen s saçılma matrisinin ve E_n ile ifade edilen bağlama enerjisinin, çarpışma deneylerinden tam olarak bilindiğini kabul etmişlerdi (Jaulent ve Jean, 1972).

Jaulent ve Jean, ilk olarak $x \geq 0$ olmak üzere bir radial, durağan $V(x)$ potansiyel fonksiyonunu bulmayı denemişlerdir. Bu potansiyel fonksiyon, radial s-dalga Schrödinger denklemi ile verilen E_n ve $S(E)$ $(E > 0)$ yi verecektir. Bu denklemin iki parçacığın kütlesinin merkezinde ve olağan indirgenmiş değişkenlerle aşağıdaki şekilde verilen ifadesini tekrar ele alalım.

$$y'' + [E - V(x)]y = 0, x \geq 0. \tag{3.1}$$

Yukarıdaki ters problem, Faddeyev tarafından detaylı bir şekilde çalışılmıştır (Faddeyev, 1963). Bu araştırmada kullanılan en güçlü metotlar Gel'fand-Levitan ve Marchenko'nun metotlarıdır (Gel'fand ve Levitan, 1951; Agranovich ve Marchenko, 1964). Bu metodların her ikisinde de (3.1) denkleminin bir öz değer denklemi olduğu gerçeği göz önüne alınmıştır. Bununla beraber Marchenko' nun metodu Gel'fand-Levitan'ın metoduna göre daha direkt bir yöntemdir. Çünkü Gel'fand-Levitan metodunda veri giriş bilgisi ile kolay bir şekilde bağlantılı olmayan bir spektral fonksiyonun tanımlanmasına ihtiyaç vardır. Daha genel olarak çarpışmalar

$$y^{+''} + [E - V^+(E, x)]y^+ = 0, x \geq 0, \tag{3.2}$$

denklemi ile tanımlanabilir. Burada $V^+(E, x)$ bir şekilde enerjiye bağlıdır. Bu enerjiye bağlı olma durumu

$$V^{+}(E,x) = U(x) + 2\sqrt{E}Q(x), x \geq 0,$$

(3.3)

şeklinde verilmiştir. Burada "$\sqrt{E}$"

$$\sqrt{E} = -|E|^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}E}, 0 \leq \mathrm{Arg}E \leq 2\pi,$$

(3.4)

şeklinde tanımlanan iki değerli karekök fonksiyonun belirlenmesi anlamına gelir.

(3.3) deki $U(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları kompleks değerli fonksiyonlardır. Burada şunu not edelim ki $U(x) = -Q^2(x)$ ek koşulu ile (3.2) denklemi, statik $Q(x)$ potansiyeline sahip, $\sqrt{E}$ enerjili, sıfır kütleli (çok küçük) bir parçacık için; Klein Gordon $s-$ dalga denklemine indirgenir.

$$V^{-}(E,x) = U(x) - 2\sqrt{E}Q(x), x \geq 0,$$

(3.6)

olmak üzere

$$y^{-\prime\prime} + [E - V^{-}(E,x)]y^{-} = 0, x \geq 0,$$

(3.5)

denkleminin verilmesi yararlı olacaktır. Bu denklemde iki değerli karakök fonksiyonunun diğer "$-\sqrt{E}$" değerini ele alıyoruz.

$$k = \sqrt{E},$$

(3.7)

olarak alınırsa; (3.2), (3.3), (3.5) ve (3.6) ifadelerinden

$$y^{\pm\prime\prime} + [k^2 - V^{\pm}(k,x)]y^{\pm} = 0, \qquad x \geq 0$$

(3.8a)

ve

$$V^{\pm}(k,x) = U(x) \pm 2kQ(x), x \geq 0$$

(3.8b)

elde edilir. Buradaki seçimden dolayı; $\sqrt{E}$, $\mathrm{Im}k < 0$ veya k bir reel pozitif sayıdır. Bununla beraber, (3.8a) ve (3.8b) her kompleks k için ayrı bir anlama sahiptir.

Burada ters problem $U(x)$, $Q(x)$ potansiyellerini verilen E_n^+ ve $(k > 0)$ $S^+(k)$ için belirleme problemidir. Yani verilen E_n^+ ve $(k > 0)$ $S^+(k)$ için bir mutlak fonksiyonlar sınıfı üzerinde $U(x)$, $Q(x)$ potansiyel fonksiyonlarının tam yapılandırma formülü, varlığı ve tekliği konuları tartışılmıştır. Bu problem 1954 yılında Corinaldesi tarafından Gel'fand-Levitan metodu genelleştirilerek ele alınmıştır. Jaulent ve Jean ise çalışmalarında Marchenko'nun metodunu genelleştirilerek daha direkt bir yaklaşımla çözüm aramıştır (Jaulent ve Jean, 1972).

3.1. Klein-Gordon Denkleminin Difüzyon Denklemine İndirgenmesi

Klein-Gordon denklemi, kuantum alan teorisindeki matematiksel modellerin en önemlilerinden birisi olarak kabul edilmektedir. Denklem genel olarak dispersive dalga olayını tasvir etmek için kullanılır ve relativistik fizik, plazma fiziği ve lineer olmayan optikte ortaya çıkar. Klein-Gordon denklemi fizikte lineer veya lineer olmayan şekillerde karşımıza çıkabilir (Wazwaz, 2002).

Klein-Gordon denkleminin

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2 - \left(\frac{1}{i}\nabla - e\vec{A}\right)^2\right]\Psi = m^2\Psi, \tag{3.9}$$

formunu ele alalım (Sharma, Luhanga ve Chimidza, 2011). (3.9) denklemi, atomik birimde $\hbar = c = 1$ olmak üzere ϕ_1 skaler potansiyeli ve $\vec{A}(r,t)$ vektör potansiyeli için; m kütlesi ve e yüküne sahip kendi ekseni etrafında dönmeyen bir parçacığı göstermektedir. $\vec{A}(r,t) = 0$ ve ϕ_1 skaler fonksiyonunun zamandan bağımsız olduğu kabul edilirse, (3.9) denklemi aşağıdaki denkleme indirgenir.

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi_1\right)^2 - \left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2\right]\Psi = m^2\Psi \Longrightarrow \left[\nabla^2 + i^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + e^2\phi_1^2 - 2ei\phi_1\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi = m^2\Psi.$$

Burada bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + e^2\phi_1^2 - 2ei\phi_1\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi = m^2\Psi \tag{3.10}$$

olur. Eğer (3.10) da, $\Psi(r,t) = \varphi(r)e^{-iEt}$ alınırsa ve

$$\Psi_t(r,t) = -\varphi(r)iEe^{-iEt},$$

$$\Psi_{tt}(r,t) = \varphi(r)(iE)^2e^{-iEt} = -\varphi(r)E^2e^{-iEt},$$

olmak üzere, (3. 10) denklemi kullanılırsa

$$\left[\nabla^2\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + e^2\phi_1^2\Psi - 2ei\phi_1\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right] = m^2\Psi$$

$$\left[\nabla^2\varphi(r)e^{-iEt} + \varphi(r)E^2e^{-iEt} + e^2\phi_1^2\varphi(r)e^{-iEt} - 2e\phi_1E\varphi(r)e^{-iEt}\right] = m^2\varphi(r)e^{-iEt}$$

$$[\nabla^2 + E^2 + e^2\phi_1^2 - 2e\phi_1E]\varphi(r) = [\nabla^2 + (E - \phi_1e)^2]\varphi(r) = m^2\varphi(r)$$

(3.11)

elde edilir. Bu ise Klein-Gordon denkleminin iyi bilinen bir formudur. Burada (3.11) denklemi bir küresel simetrik potansiyel enerji ile küresel koordinatlar kullanılarak

$$\left[\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \quad \frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] + (E - \phi_1e)^2\right]\varphi(r) = m^2\varphi(r)$$

(3.12)

olur. Şimdi ise, (3.12) denkleminin değişkenlere ayırma metodunu kullanarak $\varphi(r,\theta,\phi) = R(r).Y(\theta,\phi)$ şeklinde bir çözümünü arayalım.

$$\left[\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(RY)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial(RY)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2(RY)}{\partial\phi^2}\right] + (E - \phi_1e)^2(RY)\right]$$
$$= m^2(RY)$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\left[Y\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right] + (E - \phi_1e)^2(RY)\right] = m^2(RY)$$

ve

$$\frac{1}{r^2}Y\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + (E - \phi_1e)^2(RY) - m^2(RY) = -\frac{R}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right]$$

olmak üzere her iki tarafın r^2 ile çarpılıp, (RY) ile bölünmesi halinde

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+[(E-\phi_1 e)^2-m^2]r^2=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\ +\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]$$

(3.13)

olur. (3.13) denkleminin sol tarafı sadece r ye, sağ tarafı ise sadece ϕ ve θ ya bağlıdır. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için her iki tarafın bir sabite eşit olması gerekir. Bu ayrıştırma sabitini $l(l+1)$ ile gösterelim. Burada l kuantum yörünge sayısını göstermektedir.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+[(E-\phi_1 e)^2-m^2]r^2=l(l+1)$$

olmak üzere $V=e\phi_1$ alınırsa

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[(E^2-m^2)+V(V-2E)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

(3.14)

elde edilir. Burada $l=0,1,2,\ldots$ şeklindedir. Şimdi ise (3.14) denkleminde $R=\frac{\psi(r)}{r}$ bağıntısıyla yeni bir $\psi(r)$ fonksiyonu tanımlanırsa denklem daha basit bir ifadeye dönüşür.

$$\frac{dR}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi(r)}{r}\right)=\left(\frac{\psi'(r)r-\psi(r)}{r^2}\right)=\frac{\psi'(r)}{r}-\frac{\psi(r)}{r^2}$$

ve

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi'(r)}{r}-\frac{\psi(r)}{r^2}\right)=\frac{\psi''(r)}{r}-\frac{\psi'(r)}{r^2}-\frac{\psi'(r)}{r^2}+2\frac{\psi(r)}{r^3}$$

türevlerini kullanacağız.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{dR}{dr}+r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{dR}{dr}+r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2\psi'(r)-2\frac{\psi'(r)}{r}+r.\psi''(r)-\psi'(r)-\psi'(r)+2\frac{\psi(r)}{r}\right)$$
$$=\frac{\psi''(r)}{r}$$

ifadesi (3.14) de yerine yazılırsa

$$\frac{\psi''(r)}{r}+\left[E^2-m^2+V(V-2E)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\frac{\psi(r)}{r}=0$$

ve

$$\psi''(r)+\left[E^2-m^2+V(V-2E)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\psi(r)=0$$

bulunur. $E^2=K^2+m^2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\psi''(r)+\left[K^2+V(V-2E)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\psi(r)=0$$

elde edilir. $l=0$ alınırsa kuantum yörüngesi bir küre olur. Böylece

$$\psi''(r)+[K^2+V^2-2EV]\psi(r)=0\Longrightarrow\psi''(r)+[V^2-2EV]\psi(r)=-K^2\psi$$

bulunur. $m=0$ olacak şekilde bilinen difüzyon denklemi elde edilir. Gerçekten bu durumda $E=K$ şeklindedir. Böylece

$$\psi''(r)+[V^2-2KV]\psi(r)=-K^2\psi,$$

elde edilir.

3.2. Difüzyon Operatörü ile İlgili Bazı Spektral Özellikler

$$L_{p,q}y=-y''+[q(x)+2\lambda p(x)]y=\lambda^2y,\ 0\le x\le\pi \tag{3.15}$$

$$y(0,\lambda)=1,\quad y'(0,\lambda)=-h, \tag{3.16}$$

$$y'(\pi,\lambda)+Hy(\pi,\lambda)=0, \tag{3.17}$$

şeklindeki difüzyon sınır değer problemini ele alalım. Burada h ve H sonlu reel sayılar ve $p\in W_2^1[0,\pi],\ q\in L_2[0,\pi]$ şeklindedir. Bu problemin çözümü

$$y(x,\lambda)=\cos(\lambda x)-\frac{h}{\lambda}\sin(\lambda x)+\int_0^x \frac{\sin(\lambda x-\lambda t)}{\lambda}[q(t)+2\lambda p(t)]y(t)dt \tag{3.18}$$

şeklindedir (Gasymov ve Guseinov, 1981).

Teorem 3.1. $L_{p,q}$ difüzyon operatörünün öz değerleri basittir.

İspat: u ve v, $L_{p,q}$ difüzyon operatörünün aynı λ öz değerine karşılık gelen iki öz fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L_{p,q}u=-u''+[q(x)+2\lambda p(x)]u=\lambda^2 u,$$

$$L_{p,q}v=-v''+[q(x)+2\lambda p(x)]v=\lambda^2 v,$$

olmak üzere bu denklemler sırası ile v ve u ile çarpılır, taraf tarafa çıkarılırsa

$$vL_{p,q}[u]-uL_{p,q}[v]=\lambda^2 uv-\lambda^2 uv=0$$

elde edilir. Buradan ise

$$v[-u''+[q(x)+2\lambda p(x)]u]-u[-v''+[q(x)+2\lambda p(x)]v]=0\Longrightarrow -u''v+v''u=0$$

$$\Longrightarrow (uv'-vu')'=0\Longrightarrow uv'-vu'=C$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır. Eğer $x=0$ alınırsa; (3.16) dan, $C=0$ olacağından

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=0\Longrightarrow u=C_1 v,(C_1=sbt)$$

elde edilir. Bu durum, u ve v fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösterir. Dolayısı ile $L_{p,q}$ difüzyon operatörünün öz değerleri basittir.

Teorem 3.2. $L_{p,q}$ difüzyon operatörü $L_2[0,\pi]$ uzayında self adjoint bir operatördür.

İspat : u ve v fonksiyonları ikinci mertebeden sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $L_2[0,\pi]$ uzayında iç çarpım tanımı gereğince

$$<L_{p,q}[u],v>=\int_0^\pi L_{p,q}[u]\,vdx=\int_0^\pi\{-u''+[q(x)+2\lambda p(x)]u\}\,vdx$$

$$= -\int_0^{\pi} u'' \, v dx + \int_0^{\pi} [q(x) + 2\lambda p(x)] u \, v dx$$

$$= -\left\{ v u' |_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u' \, v' dx \right\} + \int_0^{\pi} [q(x) + 2\lambda p(x)] u \, v dx$$

$$= -\{v(\pi)u'(\pi) - v(0)u'(0)\} + \int_0^{\pi} u' \, v' dx + \int_0^{\pi} [q(x) + 2\lambda p(x)] u \, v dx$$

$$= v(0)u'(0) - v(\pi)u'(\pi) + \left\{ u v' |_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u \, v'' dx \right\} + \int_0^{\pi} [q(x) + 2\lambda p(x)] u \, v dx$$

$$= v(0)u'(0) - v(\pi)u'(\pi) + u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0) + \int_0^{\pi} \{-v'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]u\} \, v dx$$

$$= hu(0)v(0) + v(\pi)Hu(\pi) - v(\pi)Hu(\pi) - hu(0)v(0) + \int_0^{\pi} \{-v'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]u\} \, v dx$$

$$= < u, L_{p,q}[v] >$$

olup, difüzyon operatörü $L_2[0, \pi]$ uzayında self-adjoint bir operatördür.

Lemma 3. 1. $g \geq 0, k(t) \geq 0$ ve $f(x) \leq g + \int_0^x k(t) f(t) dt$ ise $K = \sup_{0 \leq t \leq 1} |k(t)|$ olmak üzere

$$f(x) \leq g exp\{Kx\}$$

şeklindedir. Bu eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği denir (Chadan, Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997).

Lemma 3. 2. $L_{p,q}$ difüzyon operatörünün öz değerleri reeldir.

İspat: λ bir öz değer ve ϕ bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Difüzyon operatörünün $L_2[0, \pi]$ uzayında self-adjoint olma özelliğinden

$$< L_{p,q}[\phi], \phi > = < \lambda^2 \phi, \phi >$$

ve

$$< L_{p,q}[\phi], \phi >=< \phi, \overline{L_{p,q}[\phi]} >, \quad < \phi, \overline{L_{p,q}[\phi]} >=< \phi, \overline{\lambda^2}\phi >$$

olmak üzere

$$< \lambda^2\phi, \phi >=< \phi, \overline{\lambda^2}\phi > \Longrightarrow \left(\lambda^2 - \overline{\lambda^2}\right) < \phi, \phi >= 0$$

elde edilir. $\phi \neq 0$ ve $\lambda^2 = \rho$ alınırsa $\left(\lambda^2 - \overline{\lambda^2}\right) = 0 \Longrightarrow (\rho - \bar{\rho}) = 0 \Longrightarrow \rho = \bar{\rho}$ olur.

Lemma 3. 3. $L_{p,q}$ difüzyon operatörü için, farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogonaldir.

İspat : $L_{p,q}$ difüzyon operatörünün farklı λ_m ve λ_n öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları sırası ile ϕ_m ve ϕ_n olsun. (3.15) den

$$-{\phi_m}'' + [q(x) + 2\lambda_m p(x)]\phi_m = {\lambda_m}^2\phi_m$$

$$-{\phi_n}'' + [q(x) + 2\lambda_n p(x)]\phi_n = {\lambda_n}^2\phi_n$$

olur. Bu denklemler sırasıyla ϕ_n ve ϕ_m ile çarpılır, taraf tarafa çıkarılırsa

$$-{\phi_m}''\phi_n + {\phi_n}''\phi_m + 2\lambda_m p(x)\phi_m\phi_n - 2\lambda_n p(x)\phi_m\phi_n = \left({\lambda_m}^2 - {\lambda_n}^2\right)\phi_m\phi_n$$

$$-{\phi_m}''\phi_n + {\phi_n}''\phi_m + 2p(x)\phi_m\phi_n(\lambda_m - \lambda_n) = \left({\lambda_m}^2 - {\lambda_n}^2\right)\phi_m\phi_n$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafının 0 dan π ye integrali alınarak, sınır koşulları uygulanırsa

$$\int_0^\pi (-{\phi_m}'\phi_n + {\phi_n}'\phi_m)'dx + 2(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi p(x)\phi_m\phi_n dx = \left({\lambda_m}^2 - {\lambda_n}^2\right)\int_0^\pi \phi_m\phi_n dx$$

$$\underbrace{(-{\phi_m}'\phi_n + {\phi_n}'\phi_m)}_{=0}\Big|_0^\pi + 2(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi p(x)\phi_m\phi_n dx = \left({\lambda_m}^2 - {\lambda_n}^2\right)\int_0^\pi \phi_m\phi_n dx$$

$$2(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi p(x)\phi_m\phi_n dx = (\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m + \lambda_n)\int_0^\pi \phi_m\phi_n dx$$

$$2\int_0^\pi p(x)\phi_m\phi_n dx = (\lambda_m + \lambda_n)\int_0^\pi \phi_m\phi_n dx$$

$$\int_0^{\pi}[2p(x)-\lambda_m-\lambda_n]\phi_m\phi_n dx=\int_0^{\pi}r(x)\phi_m\phi_n dx=0$$

olur. Dolayısı ile ϕ_m ve ϕ_n fonksiyonları $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonaldir. Burada $r(x)=2p(x)-\lambda_m-\lambda_n$ şeklindedir.

Lemma 3. 4.

$$y''+\big(\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x)\big)y=0 \tag{3.19}$$

$$a_{i1}y(0)+a_{i2}y'(0)+a_{i3}y(\pi)+a_{i4}y'(\pi)=0, i=1,2 \tag{3.20}$$

$$y(0)+wy(\pi)=0, \overline{w}y'(0)+\alpha y(\pi)+y'(\pi)=0 \tag{3.21}$$

problemine (p,w,α) problemi denir. Burada $p(x)\in W_2^1[0,\pi]$, $q(x)\in L_2[0,\pi]$ reel fonksiyonlar, a_{ik} lar keyfi kompleks sayılardır. Ayrıca α keyfi reel sayı, $w\neq 0$ ise keyfi bir kompleks sayıdır. (p,w,α) sınır değer probleminin öz değerleri reel ve sıfırdan farklıdır (Nabiev, 2003).

İspat : $L_2[0,\pi]$ Hilbert uzayında bir L operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $D(L)$ bölgesi (3.21) sınır koşulunu sağlayan tüm $y(x)\in W_2^2[0,\pi]$ fonksiyonlarını içerisinde bulunduran bir bölge ve $y\in D(L)$ için

$$Ly=-y''+q(x)y$$

olsun. $L_2[0,\pi]$ uzayındaki iç çarpımı kullanılırsa

$$<Ly,y>=\int_0^{\pi}Ly.\bar{y}dx=\int_0^{\pi}(-y''+q(x)y).\bar{y}dx=\int_0^{\pi}-y''\bar{y}dx+\int_0^{\pi}q(x)y(x)\bar{y}dx$$

$$=-(\bar{y}y')|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\overline{y}'y'dx+\int_0^{\pi}q(x)y(x)\bar{y}dx$$

$$=\bar{y}(0)y'(0)-\bar{y}(\pi)y'(\pi)+\int_0^{\pi}|y'|^2dx+\int_0^{\pi}q(x)|y(x)|^2dx \tag{3.22}$$

elde edilir.

(3.21) sınır koşulları ele alınırsa

$$\bar{y}(0) = -\bar{w}\bar{y}(\pi)$$

$$y'(\pi) = -\bar{w}y'(0) - \alpha y(\pi)$$

olmak üzere bu ifadeler (3.22) de göz önüne alınırsa

$$< Ly, y >= -\bar{w}\bar{y}(\pi)y'(0) + (\bar{w}y'(0) + ay(\pi))\bar{y}(\pi) + \int_0^\pi |y'|^2 dx + \int_0^\pi q(x)|y(x)|^2 dx$$

$$= \alpha y(\pi)\bar{y}(\pi) + \int_0^\pi |y'|^2 dx + \int_0^\pi q(x)|y(x)|^2 dx$$

$$= \alpha|y(\pi)|^2 + \int_0^\pi \{|y'|^2 + q(x)|y(x)|^2\}dx > 0$$

elde edilir. Nabiev çalışmasında,

$$\alpha|y(\pi)|^2 + \int_0^\pi \{|y'|^2 + q(x)|y(x)|^2\}dx > 0,$$

olduğunu kabul etmiştir. λ_0, (p, w, α) sınır değer probleminin bir öz değeri ve $y_0(x)$ ise, λ_0 öz değerine karşılık gelen öz fonksiyon olmak üzere, bu öz fonksiyon $< y_0, y_0 >= 1$ şeklinde normalize edilsin.

$$y_0'' + \left(\lambda_0{}^2 - 2\lambda_0 p(x) - q(x)\right)y_0 = 0,$$

eşitliği y_0 ile iç çarpılırsa

$$< y_0'', y_0 > +\lambda_0{}^2 < y_0, y_0 > -2\lambda_0 < py_0, y_0 > - < qy_0, y_0 >= 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_0{}^2 - 2\lambda_0 < py_0, y_0 > + < y_0'' - qy_0, y_0 >= 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_0{}^2 - 2\lambda_0 < py_0, y_0 > - < Ly_0, y_0 >= 0$$

olur. Böylece

$$\lambda_0 = < py_0, y_0 > \pm\sqrt{< py_0, y_0 >^2 + < Ly_0, y_0 >},$$

elde edilir. $< Ly, y \gg 0$ ve $p(x)$ reel olduğundan λ_0 reeldir.

4. DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

Difüzyon operatörü için ters nodal problem, $\{x_k^{(n)}\}$ nodal dizisini kullanarak (p,q) potansiyel fonksiyon çiftini ve sınır koşullarındaki parametreleri belirleme problemidir. Difüzyon operatörü

$$L_{p,q}y = -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]y\,,\ x \in [0,\pi] \tag{4.1}$$

olarak yazılır. Burada $p \in W_2^1[0,\pi]$, $q \in L_2[0,\pi]$ şeklindedir. h ve H sonlu reel sayılar olmak üzere

$$L_{p,q}y = \lambda^2 y \tag{4.2}$$

$$y(0,\lambda) = 1, y'(0,\lambda) = -h \tag{4.3}$$

$$y'(\pi,\lambda) + Hy(\pi,\lambda) = 0 \tag{4.4}$$

problemini ele alalım. Burada (4.1) denkleminin; (4.3) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)$ ve aynı denklemin

$$y(0,\lambda) = 0, y'(0,\lambda) = 1, \tag{4.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ise $\psi(x,\lambda)$ olsun (Gasymov ve Guseinov, 1981; Koyunbakan, 2009). λ_n, n. öz fonksiyona karşılık gelen n. öz değer; $i = 1,2,\dots,n-2$, için

$$0 < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < \pi$$

ise n. öz fonksiyonun nodal noktaları, $I_i^{(n)} = [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$; n. öz fonksiyona karşılık gelen i. nodal bölge ve $l_i^{(n)} = x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}$ ise nodal uzunluk olsun. Ayrıca $(0,\pi)$ aralığında

$$j_n(x) = maks\{i: x_i^{(n)} \le x\}$$

şeklinde tanımlansın. Sabit x ve n için $i = j_n(x)$ olması $x \in I_i^{(n)}$ olmasını gerektirir. $L_{p,q}$ difüzyon operatörü, (p,q) potansiyel fonksiyonları ve h,H sınır koşulları ile belirlendiği için, bu operatör $L_{p,q} = (q,p,h,H)$ olarak ifade edilebilir (Koyunbakan, 2009).

Lemma 4. 1. (4.2)-(4.4) ve (4.2), (4.4), (4.5) problemlerinin çözüm fonksiyonları sırası ile

$$\varphi(x,\lambda) = \cos(\lambda x) - \frac{h}{\lambda}\sin(\lambda x) + \int_0^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\lambda}[q(t) + 2\lambda p(t)]\varphi(\lambda,t)dt,$$

(4.6)

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\lambda}[q(t) + 2\lambda p(t)]\psi(\lambda,t)dt,$$

(4.7)

şeklindedir (Koyunbakan, 2009).

Lemma 4. 2. $q \in L_1[0,\pi],\ p \in W_2^1[0,\pi]$ olsun. $n \to \infty$ iken

(a) (4.2)-(4.4) probleminin nodal noktaları ve nodal uzunlukları sırası ile

$$x_i^{(n)} = \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} - \frac{h}{2\lambda_n^2} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{x_i^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

(4.8)

$$l_i^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

(4.9)

şeklindedir.

(b) (4.2), (4.4), (4.5) probleminin nodal noktaları ve nodal uzunlukları sırası ile

$$x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{x_i^{(n)}} [1-\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

(4.10)

$$l_i^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} [1-\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

(4.11)

şeklindedir (Koyunbakan, 2009).

Tablo 4. 1. de, (4. 2), (4. 4), (4. 5) difüzyon sınır değer probleminin $\boldsymbol{p(x) = q(x) = x}$ ve $\boldsymbol{h = H = 0}$ özel hali için nodal noktalar verilmiştir. $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n - 2}$ olmak üzere difüzyon operatörünün $\boldsymbol{n}$. öz fonksiyonunun $\boldsymbol{(0, \pi)}$ aralığında tam olarak $\boldsymbol{|n|}$ tane sıfırı vardır. Tablo 4.1. den görüldüğü üzere bu sonuç, Sturm-Liouville operatörü için verilen klasik Sturm osilasyon teoreminin koşullarını sağlamaktadır.

Tablo 4. 1. (4. 2), (4. 4), (4. 5) difüzyon sınır değer probleminin $\boldsymbol{p(x) = q(x) = x}$ ve $\boldsymbol{h = H = 0}$ özel hali için nodal noktaları

x_j^n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$j = 1$	***0.6652***	***0.5729***	***0.4935***	***0.4305***	***0.3806***	***0.3406***	***0.3079***	***0.2809***
$j = 2$	***1.4151***	***1.2018***	***1.0239***	***0.8859***	***0.7787***	***0.6938***	***0.6253***	***0.5689***
$j = 3$	***2.2495***	***1.8866***	***1.591***	***1.3662***	***1.1941***	***1.0596***	***0.9519***	***0.8640***
$j = 4$	*3.1685*	***2.6274***	***2.1948***	***1.8712***	***1.6269***	***1.4378***	***1.2878***	***1.1661***
$j = 5$	*4.1722*	*3.4243*	***2.8353***	***2.4011***	***2.0770***	***1.8286***	***1.6331***	***1.4754***
$j = 6$	*5.2604*	*4.2770*	*3.5126*	***2.9558***	***2.5445***	***2.2320***	***1.9876***	***1.7918***
$j = 7$	*6.4331*	*5.1858*	*4.2267*	*3.5354*	***3.0294***	***2.6478***	***2.3515***	***2.1153***
$j = 8$	*7.6905*	*6.1505*	*4.9775*	*4.1398*	*3.5316*	***3.0763***	***2.7247***	***2.4458***
$j = 9$	*9.0325*	*7.1712*	*5.7650*	*4.7689*	*4.0512*	*3.5172*	***3.1072***	***2.7834***
$j = 10$	*10.459*	*8.2479*	*6.5893*	*5.423*	*4.5881*	*3.9707*	*3.4990*	***3.1282***

Lemma 4. 3. $f \in L_1[0, \pi]$ olsun. $j = j_n(x)$ olmak üzere hemen hemen her $x \in (0, \pi)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} f(t)dt = f(x),$$

şeklindedir.

Teorem 4. 1. $q \in L_1[0, \pi]$ ve $p \in W_2^1[0, \pi]$ olmak üzere, hemen hemen her $x \in (0, \pi)$ için

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_n\left(\lambda_n^2 l_j^{(n)} - \lambda_n \pi - p(x)\right)$$

şeklindedir (Koyunbakan, 2009).

Bu kısımda, difüzyon operatörü için ters nodal problemin iyi tanımlılığı ele alınacaktır. İyi tanımlılıkla ters problemin çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığı ifade edilmektedir. Teorem 4.1 den dolayı teklik kısmı iyice anlaşılmaktadır.

$\mathbb{N}' = \mathbb{N} - \{1,2\}$ olsun. Ω_{dif}, difüzyon operatörlerinin uzayı, Σ_{dif} ise tüm geçerli nodal dizilerin uzayı olmak üzere aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\Omega_{dif} = \left\{(q,p,h,H) \in L_1[0,\pi] \times W_2^1[0,\pi] \times \mathbb{R}^2 : \int_0^\pi q = 0\right\}$$

$\Sigma_{dif} = \{\, 0 < X_1^{(n)} < X_2^{(n)} < \cdots < X_{n-1}^{(n)} < \pi$ ve $X = \{X_k^{(n)} : k = 1,2,\dots,n-2,\ n \in \mathbb{N}'\}\}$ şeklindeki tüm çift indisli dizilerin uzayı.

Difüzyon operatörü için varlık problemi, Koyunbakan tarafından incelenmiştir (Koyunbakan, 2009). X, tam olarak $L_{p,q}$ operatörü ile bağlantılı nodal noktaların bir dizisi olmak üzere hangi $X \in \Sigma_{dif}$ için, Ω_{dif} uzayında bir $L_{p,q}$ operatörü vardır. Teorem 4.1. in sağ tarafı hemen hemen her x için yakınsak ise ya da X, Lemma 4.2. deki asimptotik ifadelerden birini tam olarak sağlarsa, $X \in \Sigma_{dif}$ dizisinin nodal olması doğaldır. Aynı asimptotik davranışa sahip tüm diziler, özgün bir nodal dizi ile bir denklik sınıfı oluştururlar. Bu müstakil diziye asimptotik olarak denk nodal dizi denir.

Σ_{dif} üzerinde, $d_0 : \Sigma_{dif} \times \Sigma_{dif} \to \mathbb{R}^+$ olacak şekilde bir

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + n\int_0^\pi |\bar{p} - p|dx \tag{4.12}$$

metriğini tanımlayalım. Bu metrik, Teorem 4.1. deki q potansiyel fonksiyonu için L_1 uzayında verilen $\|q - \bar{q}\|_1$ normu kullanarak elde edilmiştir. Burada $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$ ve $\bar{L}_k^{(n)} = \bar{X}_{k+1}^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)}$ şeklindedir. Gerçekten, Teorem 4.1. den

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_n\left\{\lambda_n^2 L_{J_n}^{(n)} - \lambda_n\pi - p(x)\right\}$$
$$\bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_n\left\{\lambda_n^2 \bar{L}_{\bar{J}_n}^{(n)} - \lambda_n\pi - \bar{p}(x)\right\}$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$q(x) - \bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{2\lambda_n^3\left(L_{J_n}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n}^{(n)}\right) + 2\lambda_n[\bar{p}(x) - p(x)]\right\}$$

olmak üzere, L_1 uzayındaki norm tanımı ve $\lambda_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\|q-\bar{q}\|_1 = \int_0^{\pi} \left| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ 2n^3 \left(L_{J_n}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n}^{(n)} \right) + 2n[\bar{p}(x)-p(x)] \right\} \right| dx$$

$$\leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{\pi} \left\{ 2n^3 \left| L_{J_n}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n}^{(n)} \right| + 2n|\bar{p}(x)-p(x)| \right\} dx$$

$$\leq 2\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} n^3 L_k^{(n)} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}(x)-p(x)|\, dx \right\}$$

$$\leq 2\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} n^3 \left(\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}(x)-p(x)|\, dx \right\}$$

$$= 2\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} n^2\pi \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}(x)-p(x)|\, dx \right\}$$

elde edilir. Böylece $d_0 : \Sigma_{dif} \times \Sigma_{dif} \to \mathbb{R}^+, \quad \forall X, \bar{X} \in \Sigma_{dif}$ için

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}(x)-p(x)| dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4. 2. $d_0 : \Sigma_{dif} \times \Sigma_{dif} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\forall\, X, \bar{X} \in \Sigma_{dif}$ için

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}-p| dx$$

dönüşümü, Σ_{dif} üzerinde bir pseudo metriktir.

İspat :

1) $X = \bar{X}$ için $d_0(X,\bar{X}) = 0$ olduğu açıktır.

2)

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |\bar{p}-p| dx$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left| \bar{L}_k^{(n)} - L_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |p-\bar{p}| dx = d_0(\bar{X},X)$$

olup simetrik olma özelliği sağlanır.

3) $\forall X, \bar{X}, \bar{\bar{X}} \in \Sigma_{dif}$ ve $\forall p, \bar{p}, \bar{\bar{p}} \in W_2^1[0,\pi]$ için

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{n^2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left|L_k^{(n)} - \bar{\bar{L}}_k^{(n)} + \bar{\bar{L}}_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + n\int_0^{\pi}|\bar{p} - \bar{\bar{p}} + \bar{\bar{p}} - p|dx\right\}$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{n^2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left|L_k^{(n)} - \bar{\bar{L}}_k^{(n)}\right| + n^2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left|\bar{\bar{L}}_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + n\int_0^{\pi}|\bar{p} - \bar{\bar{p}}|dx + n\int_0^{\pi}|\bar{\bar{p}} - p|dx\right\}$$

$$\leq d_0\left(X,\bar{\bar{X}}\right) + d_0\left(\bar{\bar{X}},\bar{X}\right)$$

olup, üçgen eşitsizliği sağlanır. Dolayısı ile (Σ_{dif}, d_0) bir pseudo metrik uzaydır.

(4.12) metriği aynı asimptotik davranışa sahip olan tüm asimptotik olarak denk nodal dizileri tanımlar. Bu daha sonra verilecek olan Teorem 4.9. un bir sonucudur. $X, \bar{X}$ farklı durumlara ait asimptotik olarak denk nodal diziler ise, kabul edilmeyecek şekilde $d_0(X,\bar{X}) = \infty$ olur. Burada farklı durum derken farklı sınır şartlarından bahsedilmektedir. Oranlama yapılarak $\frac{d_0}{1+d_0}$ şeklinde bir $d_{\Sigma_{dif}}$ pseudo metriği elde edilir.

"$X \sim \bar{X}$ olması için gerek ve yeter şart $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = 0$ olmasıdır" şeklinde tanımlanırsa; $\sim$, Σ_{dif} üzerinde bir denklik bağıntısı olur. Gerçekten $\forall X, \bar{X}, \bar{\bar{X}} \in \Sigma_{dif}$ için

1) $X \sim X$ olup nedeni pseudo metrik uzay olma aksiyomlarından $d_{\Sigma_{dif}}(X,X) = 0$ olmasıdır.

2) $X \sim \bar{X} \Longrightarrow d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = 0 \Longrightarrow d_{\Sigma_{dif}}(\bar{X},X) = 0 \Longrightarrow \bar{X} \sim X$ olup simetrik olma özelliği sağlanır.

3) $X \sim \bar{X}$ ve $\bar{X} \sim \bar{\bar{X}}$ olması durumunda $X \sim \bar{\bar{X}}$ olduğunu, yani geçişme özelliğinin sağlandığını gösterelim.

$X \sim \bar{X} \Longrightarrow d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = 0$ ve $\bar{X} \sim \bar{\bar{X}} \Longrightarrow d_{\Sigma_{dif}}\left(\bar{X},\bar{\bar{X}}\right) = 0$ şeklinde olur. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$d_{\Sigma_{dif}}\left(X\,,\bar{\bar{X}}\right) \leq d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) + d_{\Sigma_{dif}}\left(\bar{X}\,,\bar{\bar{X}}\right) = 0 \Longrightarrow d_{\Sigma_{dif}}\left(X\,,\bar{\bar{X}}\right) \leq 0$$

ve

$$d_{\Sigma_{dif}}\left(X\,,\bar{\bar{X}}\right) = 0$$

olur. Dolayısı ile $X \sim \bar{\bar{X}}$ olup, geçişme özelliği sağlanır. Diğer taraftan $\forall\, X, \bar{X} \in \Sigma_{dif}$ için

$$d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = \frac{d_0(X,\bar{X})}{1 + d_0(X,\bar{X})}$$

şeklindedir.

Böylece $\sim$, Σ_{dif} üzerinde bir denklik bağıntısı olur. $\sim$ denklik bağıntısı Σ_{dif} cümlesini denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının cümlesi $\Sigma^*_{dif} = \Sigma_{dif}/\sim$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $d_{\Sigma_{dif}}$, Σ^*_{dif} bölüm uzayı için bir metriktir. $\Sigma_{dif_1} \subset \Sigma_{dif}$ tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bir alt dizisi ve $\Sigma^*_{dif_1} = \Sigma_{dif_1}/\sim$ olsun. Ω_{dif} uzayı üzerinde uygun bir $d_{\Omega_{dif}}$ metriği ile aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4. 3. $(\Omega_{dif}, d_{\Omega_{dif}})$ ve $(\Sigma^*_{dif_1}, d_{\Sigma_{dif}})$ metrik uzayları homeomorfik uzaylardır.

Teorem 4.3., difüzyon operatörü için ters nodal problemin, Σ^*_{dif} bölüm uzayı üzerinde tanımlanması durumunda, Ω_{dif} uzayının homeomorfik bir görüntüsünü içerdiğini gösterir. Bu durumda varlık problemi çözülmüştür. Buna ilave olarak Σ^*_{dif} üzerinde bir $[X]$ denklik sınıfının perturbasyonu homeomorfizm ile Ω_{dif} uzayındaki $L_{p,q}$ operatörünün bir perturbasyonunu verir. Böylece ters nodal problem kararlıdır ve dolayısı ile iyi tanımlıdır.

Φ_{dif} dönüşümü, Ω_{dif} uzayını, Σ_{dif_1} uzayına dönüştüren bir homeomorfizm olsun. Bu dönüşüme difüzyon operatörü için nodal dönüşüm denir.

$$\Omega_{dif}(N) = \left\{(q,p,h,H) \in L_1[0,\pi] \times\, W_2^1[0,\pi] \times \mathbb{R}^2 : q \in C^{N+1}, \int_0^\pi q = 0\right\}$$

olsun. Koyunbakan ve Yılmaz difüzyon operatörü için q potansiyel fonksiyonunun $m.$ mertebeden türevi olan $q^{(m)}$ fonksiyonunun, nodal uzunluğun fark bölüm operatörü olan $\delta^{(m)} l_j^{(n)}$ ile yaklaşık olarak elde edilebileceğini göstermişlerdir (Koyunbakan ve Yılmaz, 2008). $\Sigma_{dif_1}(N)$, $\Omega_{dif}(N)$ uzayında $L_{p,q}$ operatörüne bağlı olan asimptotik olarak denk

nodal dizilerin kümesi olsun. $d_{\Omega_{dif}(N)}$ ve $D_{\Sigma_{dif}(N)}$ ise sırası ile q potansiyel fonksiyonunun türevlerinin L_1 deki normları ile verilen $\Omega_{dif}(N)$ ve $\Sigma^*_{dif_1}(N)$ üzerinde tanımlı metrikler olsun.

Buradan Φ_{dif} nodal dönüşümünün, potansiyel fonksiyonun türevleri ile büyütülen metrik altında bir homeomorfizm olduğu elde edilir.

Teorem 4. 4. Φ_{dif} nodal dönüşümünün, $\Omega_{dif}(N)$ uzayına bir kısıtlanması olan

$$\Phi_{dif}{}_{\Omega_{dif}(N)} : \left(\Omega_{dif}(N)\ , d_{\Omega_{dif}(N)}\ \right) \longrightarrow \left(\Sigma^*_{dif_1}(N), D_{\Sigma_{dif}(N)}\right)$$

dönüşümü bir homeomorfizmdir.

4.1. Difüzyon Operatörü için Asimptotik Olarak Denk Nodal Diziler

Verilen geçerli bir $X = \left\{X_k^{(n)} : k = 1,2, \dots n-2, n \in \mathbb{N}'\right\}$ dizisi için, $n \to \infty$ olmak üzere, aşağıdaki ifadelerden biri tam olarak doğru ise X, $L_{p,q}$ difüzyon operatörüne asimptotik olarak nodaldır.

1. DURUM : $n \to \infty$ ve $1 \le k \le n-2$ olmak üzere, (4.2)-(4.4) problemi için

$$X_k^{(n)} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} - \frac{h}{2\lambda_n^2} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{X_k^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right), \tag{4.13}$$

şeklindedir.

2. DURUM : $n \to \infty$ ve $1 \le k \le n-2$ olmak üzere, (4.2), (4.4) ve (4.5) problemi için

$$X_k^{(n)} = \frac{k\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{X_k^{(n)}} [1-\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right), \tag{4.14}$$

şeklindedir.

Hatırlatma 4. 1. $X_0^{(n)} = 0,\ X_n^{(n)} = \pi$ ve $0 \le k \le n-2$ için $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$ uzunluğu grid uzunluğu olsun. (4.13) ve (4.14) kullanılarak, basit hesaplamalar ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. DURUM :

$$L_0^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{X_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \tag{4.15}$$

$$L_{n-1}^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{X_{n-1}^{(n)}}^{X_n^{(n)}=\pi} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \tag{4.16}$$

$$L_k^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{X_k^{(n)}}^{X_{k+1}^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \tag{4.17}$$

şeklinde olur.

2. DURUM: Benzer formüller burada da elde edilebilir.

Burada ve daha sonraki kısımlarda $x_k^{(n)}$ ile elde edilen $l_k^{(n)}$ nodal uzunluğuna benzer şekilde $X_k^{(n)}$ ile elde edilen $L_k^{(n)}$ grid uzunluğu kullanılacaktır.

Lemma 4. 4. (4-2)-(4.4) öz değer probleminin öz değerleri reel ve basittir. Ayrıca $\{\lambda_n\}$ ler (4.4) eşitliğinin kökleridir ve $n \neq 0$ için aşağıdaki asimptotik formülü sağlarlar.

$$\lambda_n = n + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{1}{n\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[q(x) + p^2(x)]dx\right) + \frac{c_{1,n}}{n}$$

şeklindedir. Burada $\sum|c_{1,n}|^2 < \infty$ olup, $c_{1,n}; H, p$ ve q ya bağlıdır (Gasymov ve Guseinov, 1981).

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{1}{n^3\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[q(x) + p^2(x)\right)dx + \frac{c_{1,n}}{n^3}$$

şeklindedir.

Tablo 4. 2. $\boldsymbol{h = H = 0, p(x) = q(x) = x}$ özel hali için (4.2)-(4.4) difüzyon sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

$\boldsymbol{\lambda_n}$: **Öz değerler**										
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	5.00113	4.78596	5.38091	6.17838	7.05686	7.97585	8.91799	9.87459	10.8408	11.8138

Tablo 4. 2. de, $h = H = 0,\ p(x) = q(x) = x$ özel hali için (4.2)-(4.4) difüzyon sınır değer probleminin Lemma 4.4. ile verilen asimptotik formüle sahip ilk on öz değeri verilmiştir. Buradan difüzyon probleminin öz değerlerinin reel olduğu görülmektedir.

Teorem 4. 5. $p \in W_2^1[0,\pi]$ ve $q \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$F_n = n\left[\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 L_k^{(n)} - 2n\pi - 2p(x)\right]$$

dizisi, L_1 uzayında q potansiyel fonksiyonuna yakınsar.

İspat : (4.9) dan

$$l_j^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her iki tarafı sırası ile $\frac{\lambda_n}{\pi}$ ve $2\lambda_n^2\pi$ ile çarpılırsa

$$l_j^{(n)}\frac{\lambda_n}{\pi} - 1 = \frac{1}{2\lambda_n\pi}\int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right)$$

ve

$$2\lambda_n^2\left(l_j^{(n)}\lambda_n-\pi\right)=\lambda_n\int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}}[1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt+o(1)$$

elde edilir. Buradan

$$2\lambda_n^2\left(l_j^{(n)}\lambda_n-\pi\right)-2\lambda_n p(x)=\lambda_n\int_{x_j^{(n)}}^{x_{j+1}^{(n)}}q(t)dt+o(1)$$

olur. Son eşitliğin sol tarafı, $\lambda_n=n+o\left(\frac{1}{n}\right)$ asimptotik formülü ile beraber ele alınırsa

$$2\lambda_n^2\left(l_j^{(n)}\lambda_n-\pi\right)-2\lambda_n p(x)=\lambda_n\left(2\lambda_n^2 l_j^{(n)}-2\lambda_n\pi-2p(x)\right),$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\lambda_n\left(2\lambda_n^2 l_j^{(n)}-2\lambda_n\pi-2p(x)\right)\\&\qquad=\left[n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(2\left(n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 l_j^{(n)}-2\left(n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\pi-2p(x)\right)\\&\qquad=n\left(2n^2 l_j^{(n)}-2n\pi-2p(x)\right)+o(1)\end{aligned}$$

bulunur. Bu teoremin ispatını tamamlamak için Teorem 4. 6. yı ispatlamak yeterli olacaktır.

Teorem 4. 6. $X\in\Sigma_{dif}$, Ω_{dif} uzayındaki $L_{p,q}$ operatörüne asimptotik olarak nodal olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

1) (4.2)-(4.4) problemi için

$$h=\lim_{n\to\infty}2\lambda_n\pi\left(i-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_n}{\pi}X_i^{(n)}\right)$$

şeklindedir.

2) Hemen hemen her $x\in[0,\pi]$ için

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}2\lambda_n\left[{\lambda_n}^2 l_j^{(n)}-\lambda_n\pi-p(x)\right]$$

şeklindedir.

İspat :

1) (4.2)-(4.4) problemi için $1 \le i \le n-2$ olmak üzere

$$X_i^{(n)} = \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} - \frac{h}{2\lambda_n^2} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{X_i^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her iki tarafı λ_n^2 ile çarpılır, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_n^2 X_i^{(n)} = \lambda_n\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{X_i^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\lambda_n\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi - \lambda_n^2 X_i^{(n)} = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{X_i^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\lambda_n\pi\left(i-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_n}{\pi}X_i^{(n)}\right) = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{X_i^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

olup yeteri derece de büyük n ler için $X_i^{(n)} \to 0$ olduğundan

$$h = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_n\pi\left(i-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_n}{\pi}X_i^{(n)}\right),$$

elde edilir.

2) Bu kısmın ispatı, Koyunbakan'ın 2009 yılındaki çalışmasından yararlanılarak kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 4. 7. Ω_{dif} uzayında verilen $L_{p,q}$ operatörü için, nodal noktaların $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ kümesi bu operatörün kendisine asimptotik nodaldır.

İspat: Kabul edelim ki nodal noktaların asimptotik formülü aşağıdaki eşitliği sağlasın. Yani 1. durumu ele alalım.

$$x_k^{(n)} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} - \frac{h}{2\lambda_n^2} + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1+\cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t)+2\lambda_n p(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

olsun. Diğer taraftan

$$\lambda_n = n + \ o\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik formülü kullanılırsa

$$x_k^{(n)} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n} - \frac{h}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\int_0^{x_k^{(n)}} [1+\cos((2\,n)t)]\,[q(t)+2np(t)]dt + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

elde edilir. Bunun sebebi

$$cosx - cosy = -2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

dönüşümü kullanılarak aşağıda ifade edilecektir.

$$\int_0^{x_k^{(n)}} [\cos(2nt) - \cos(2\lambda_n t)][q(t)+2np(t)]dt$$

$$= -2\int_0^{x_k^{(n)}} sin\left(\frac{2nt+2\lambda_n t}{2}\right)sin\left(\frac{2nt-2\lambda_n t}{2}\right)[q(t)+2np(t)]dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} sin[(\lambda_n - n)t]sin\left[2nt + o\left(\frac{1}{n}\right)\right][q(t)+2np(t)]dt$$

olur. Diğer taraftan

$$\lambda_n - n = \frac{h}{n\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \ o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$sin[(\lambda_n - n)t] = \frac{h}{n\pi}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Bu son ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} sin\left[\frac{h}{n\pi}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] sin\left[2nt + o\left(\frac{1}{n}\right)\right][q(t) + 2np(t)]dt$$

$$= 2\int_0^{x_k^{(n)}} \frac{h}{n\pi}t^2 sin\left[2nt + o\left(\frac{1}{n}\right)\right][q(t) + 2np(t)]dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{h}{n\pi}\int_0^{x_k^{(n)}} t^2 \sin(2nt)\,[q(t) + 2np(t)]dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\frac{h}{n\pi}o(1) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanmıştır. $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ dizisinin diğer durumunun ispatı benzerdir.

4.2. Difüzyon Operatörü için Ters Nodal Problemin Kararlılığı

Bu bölümde Ω_{dif} ve Σ_{dif} uzayları üzerinde bazı metrikler tanımlanacaktır. İlk olarak herhangi $\varphi, \psi \in [0, \pi)$ için

$$d_\pi(\varphi,\psi) = \begin{cases} |\varphi - \psi|, & 0 < \varphi, \quad \psi < \pi \\ 0, & \varphi = \psi = 0 \\ \pi, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

metriği tanımlansın (Law ve Tsay, 2001). Difüzyon probleminin sınır koşulları

$$y(0)cos\varphi + y'(0)sin\varphi = 0$$

$$y(\pi)cos\psi + y'(\pi)sin\psi = 0$$

veya

$$y'(0) + y(0)cot\varphi = 0$$
$$y'(\pi) + y(\pi)cot\psi = 0$$

şeklinde verilebilir. Bu koşullar impedance sabitli sınır koşulları olarak bilinmektedir. Dolayısı ile, $d_\pi(\varphi,\psi)$ metriğinde

$$cot\varphi = -h \Longrightarrow \varphi = arccot(-h)$$

$$cot\psi = H \Longrightarrow \psi = arccot(H)$$

şeklindedir (Levitan ve Sargsjan, 1975). Burada d_π: $[0,\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $[0,\pi)$ aralığı üzerinde bir metriktir. Gerçekten, $\forall\ \varphi,\psi,\gamma \in [0,\pi)$ için

1) $\varphi = \psi$ ise $d_\pi(\varphi,\psi) = 0$ olduğu tanımdan açıktır.

2) $d_\pi(\varphi,\psi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \psi = 0$ şeklindedir.

3) $d_\pi(\varphi,\psi) = |\varphi - \psi| = |\psi - \varphi| = d_\pi(\psi,\varphi)$, $d_\pi(\varphi,\psi) = 0 = d_\pi(\psi,\varphi)$ ve $d_\pi(\varphi,\psi) = \pi = d_\pi(\psi,\varphi)$ olduğundan dolayı simetrik olma özelliği sağlanır.

4) Son olarak

$$d_\pi(\varphi,\psi) = |\varphi - \psi| = |\varphi - \gamma + \gamma - \psi| \le |\varphi - \gamma| + |\gamma - \psi|$$

ve

$$d_\pi(\varphi,\psi) \le d_\pi(\varphi,\gamma) + d_\pi(\gamma,\psi)$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır. Benzer durum $\varphi = \psi = 0$ olması halinde ve diğer durumlarda da vardır. Böylece $([0,\pi), d_\pi)$ bir metrik uzaydır.

Şimdi ise Ω_{dif} üzerinde, $L_{p,q}, \overline{L_{p,q}} \in \Omega_{dif}$ operatörleri için

$$d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q}, \overline{L_{p,q}}\right) = \|q - \bar{q}\|_1 + |p - \bar{p}| + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right)$$

olacak şekilde bir $d_{\Omega_{dif}}$ metriğini tanımlayalım. Burada $\alpha = arcco\,t(-h)$, $\beta = arcco\,t(H)$ ve $\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta} \in [0,\pi)$ şeklindedir. $d_{\Omega_{dif}} : \Omega_{dif} \times \Omega_{dif} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, Ω_{dif} uzayı üzerinde bir metrik ve $(\Omega_{dif}, d_{\Omega_{dif}})$ ikilisi bir metrik uzaydır. Gerçekten $\forall\ L_{p,q} = (q,p,h,H)$, $\overline{L_{p,q}} = \left(\bar{q},\bar{p},\bar{h},\bar{H}\right), \overline{\overline{L_{p,q}}} = \left(\bar{\bar{q}},\bar{\bar{p}},\bar{\bar{h}},\bar{H}\right) \in \Omega_{dif}$ için aşağıdaki metrik uzay aksiyomları sağlanır.

1) $L_{p,q} = \overline{L_{p,q}}$ için $q = \bar{q}, \alpha = \bar{\alpha},\ \beta = \bar{\beta}$ ve $p = \bar{p}$ ve $d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q}, \overline{L_{p,q}}\right) = 0$ olur.

2)

$$d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q}, \overline{L_{p,q}}\right) = 0 \Longrightarrow \|q - \bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi(\beta,\bar{\beta}) + |p - \bar{p}| = 0$$
$$\Longrightarrow \|q - \bar{q}\|_1 = 0 \wedge d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) = 0 \wedge d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right) = 0 \wedge |p - \bar{p}|$$
$$\Longrightarrow q = \bar{q} \wedge \alpha = \bar{\alpha} \wedge \beta = \bar{\beta} \wedge p = \bar{p} \Longrightarrow L_{p,q} = \overline{L_{p,q}}$$

elde edilir.

3)

$$d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q},\overline{L_{p,q}}\right) = \|q-\bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right) + |p-\bar{p}|$$
$$= \|\bar{q}-q\|_1 + d_\pi(\bar{\alpha},\alpha) + d_\pi\left(\bar{\beta},\beta\right) + |\bar{p}-p|$$
$$= \|\bar{q}-q\|_1 + d_\pi(\bar{\alpha},\alpha) + d_\pi\left(\bar{\beta},\beta\right) + |\bar{p}-p| = d_{\Omega_{dif}}\left(\overline{L_{p,q}},L_{p,q}\right)$$

olup, simetrik olma özelliği sağlanır.

4)

$$d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q},\overline{L_{p,q}}\right) = \|q-\bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right) + |p-\bar{p}|$$
$$= \|q-\bar{\bar{q}}+\bar{\bar{q}}-\bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\beta}\right) + |p-\bar{\bar{p}}+\bar{\bar{p}}-\bar{p}|$$

$$\leq \|q-\bar{\bar{q}}\|_1 + \|\bar{\bar{q}}-\bar{q}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\bar{\alpha}}) + d_\pi(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\bar{\beta}}\right) + d_\pi\left(\bar{\bar{\beta}},\bar{\beta}\right) + |p-\bar{\bar{p}}| + |\bar{\bar{p}}-\bar{p}|$$

$$= \|q-\bar{\bar{q}}\|_1 + d_\pi(\alpha,\bar{\bar{\alpha}}) + d_\pi\left(\beta,\bar{\bar{\beta}}\right) + + |p-\bar{\bar{p}}| + \|\bar{\bar{q}}-\bar{q}\|_1 + d_\pi(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\alpha}) + d_\pi\left(\bar{\bar{\beta}},\bar{\beta}\right) + |\bar{\bar{p}}-\bar{p}|$$

$$= d_{\Omega_{dif}}\left(L_{p,q},\ \overline{\overline{L_{p,q}}}\right) + d_{\Omega_{dif}}\left(\overline{\overline{L_{p,q}}},\ \overline{L_{p,q}}\right)$$

elde edilir. Dolayısı ile $d_{\Omega_{dif}}: \Omega_{dif} \times \Omega_{dif} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu bir metrik olup, $(\Omega_{dif}, d_{\Omega_{dif}})$ bir metrik uzaydır. Burada $\alpha,\bar{\alpha},\bar{\bar{\alpha}},\beta,\bar{\beta},\bar{\bar{\beta}} \in [0,\pi)$, $q,\bar{q},\bar{\bar{q}} \in L_2[0,\pi)$ ve $p,\bar{p},\bar{\bar{p}} \in W_2^1[0,\pi)$ şeklindedir.

$X,\bar{X} \in \Sigma_{dif}$ ve bunlara karşılık gelen grid uzunluklar $L_k^{(n)}$ ve $\bar{L}_k^{(n)}$ olsun.

$$S_n(X,\bar{X}) = n^2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + n\int_0^\pi |p-\bar{p}|dx \tag{4.18}$$

ve

$$d_0(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(X,\bar{X}), \quad d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X,\bar{X})}{1+S_n(X,\bar{X})}$$

olarak tanımlansın.

$$d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) \leq d_0(X,\bar{X})$$

olduğu açıktır. $d_0(X,\bar{X})$ sonlu ise

$$d_0(X,\bar{X}) \leq \left[1+d_0(X,\bar{X})\right] d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece bu eşitsizlikten

$$\frac{d_0(X,\bar{X})}{[1+d_0(X,\bar{X})]} \leq d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) \Longrightarrow \frac{[1+d_0(X,\bar{X})]}{d_0(X,\bar{X})} \geq \frac{1}{d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})}$$

$$\Longrightarrow 1+\frac{1}{d_0(X,\bar{X})} \geq \frac{1}{d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{d_0(X,\bar{X})} \geq \frac{1}{d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})} - 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{d_0(X,\bar{X})} \geq \frac{1-d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})}{d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})}$$

$$\Longrightarrow d_0(X,\bar{X}) \leq \frac{d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})}{1-d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})} \tag{4.19}$$

elde edilir. Buna ilaveten $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olması için gerek ve yeter şart $d_0(X,\bar{X})=0$ olmasıdır. Gerçekten; $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olsun. (4.19) dan $d_0(X,\bar{X})=0$ elde edilir. Diğer taraftan $d_0(X,\bar{X})=0$ olması halinde $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) \leq d_0(X,\bar{X})=0$ eşitsizliğinden $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olur.

Önerme 4. 1. $d_{\Sigma_{dif}}(.,.)$ fonksiyonu, Σ_{dif} üzerinde bir pseudo metriktir.

İspat : $X,\bar{X} \in \Sigma_{dif}$ olmak üzere $X=\bar{X}$ ise $d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X,\bar{X})}{1+S_n(X,\bar{X})} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{(n)}-\bar{L}_k^{(n)}\right|+n\int_0^{\pi}|p-\bar{p}|dx}{1+n^2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left|L_k^{(n)}-\bar{L}_k^{(n)}\right|+n\int_0^{\pi}|p-\bar{p}|dx}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left|\bar{L}_k^{(n)}-L_k^{(n)}\right|+n\int_0^{\pi}|\bar{p}-p|dx}{1+n^2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left|\bar{L}_k^{(n)}-L_k^{(n)}\right|+n\int_0^{\pi}|\bar{p}-p|dx}$$

$$= d_{\Sigma_{dif}}(\bar{X},X)$$

olup, simetrik olma özelliği sağlanır. Diğer taraftan üçgen eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için $X,\bar{X},Y \in \Sigma_{dif}$ olacak şekilde

$$\frac{S_n(X,\bar{X})}{1+S_n(X,\bar{X})} \leq \frac{S_n(X,Y)}{1+S_n(X,Y)} + \frac{S_n(Y,\bar{X})}{1+S_n(Y,\bar{X})} \tag{4.20}$$

veya buna eşdeğer olarak

$$S_n(X,Y) + S_n(Y,\bar{X}) + 2S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X})S_n(X,\bar{X}) - S_n(X,\bar{X}) \geq 0 \tag{4.21}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten (4.20) den

$$\frac{S_n(X,\bar{X})}{1+S_n(X,\bar{X})} \leq \frac{S_n(X,Y)[1+S_n(Y,\bar{X})] + S_n(Y,\bar{X})[1+S_n(X,Y)]}{[1+S_n(X,Y)][1+S_n(Y,\bar{X})]}$$

$$\frac{S_n(X,\bar{X})}{1+S_n(X,\bar{X})} \leq \frac{S_n(X,Y) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X})S_n(X,Y)}{1+S_n(X,Y) + S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X})}$$

olmak üzere içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} S_n(X,\bar{X})[1 + S_n(X,Y) + S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X})] \\ \leq [1+S_n(X,\bar{X})][S_n(X,Y) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X}) \\ + S_n(Y,\bar{X})S_n(X,Y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(X,\bar{X}) + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y) + S_n(X,\bar{X})S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) \\ \leq S_n(X,Y) + S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X})S_n(X,Y) \\ + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y) + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(Y,\bar{X})S_n(X,\bar{X}) \\ + S_n(Y,\bar{X})S_n(X,Y)S_n(X,\bar{X}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleşme işlemleri yapılırsa

$$S_n(X,\bar{X}) \leq S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + 2S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,Y)$$

$$S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,\bar{X})S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + 2S_n(X,Y)S_n(Y,\bar{X}) + S_n(X,Y) - S_n(X,\bar{X}) \geq 0$$

olur.

$$S_n(X,\bar{X}) \leq S_n(X,Y) + S_n(Y,\bar{X}) \Longrightarrow S_n(X,Y) + S_n(Y,\bar{X}) - S_n(X,\bar{X}) \geq 0$$

ve $\forall\ X,\bar{X} \in \Sigma_{dif}$ için $S_n(X,\bar{X}) \geq 0$ olduğu dikkate alınırsa (4.21) eşitsizliği sağlanır. Dolayısı ile $d_{\Sigma_{dif}}(.,.)$ fonksiyonu, Σ_{dif} üzerinde bir pseudo metriktir. Böylece $d_{\Sigma_{dif}}(.,.) = 0$ bağıntısı, Σ_{dif} üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar.

Aşağıdaki önerme, $X,\bar{X} \in \Sigma_{dif}$ farklı durumlara ait ise, bunların birbirlerine çok yakın olamayacağını gösterir. Böylece bu durumda kararlılık problemini ele almaya gerek yoktur. Diğer taraftan bu önerme aynı nodal dizilerin farklı asimptotik ifadelere sahip olamayacağını göstermektedir.

Önerme 4. 2. $X, \overline{X} \in \Sigma_{dif}$ farklı durumlara ait olsunlar. Bu durumda

$$d_{\Sigma_{dif}}(\overline{X}, X) = 1$$

şeklindedir.

İspat: X, 1. DURUM' a, $\overline{X}$ ise 2. DURUM a ait olsun. Böylece

$$L_0^{(n)} - \overline{L}_0^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{X_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt - \frac{\pi}{\lambda_n}$$

$$- \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{\bar{X}_0^{(n)}}^{\bar{X}_1^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[\bar{q}(t) + 2\lambda_n \bar{p}(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

$$L_0^{(n)} - \overline{L}_0^{(n)} = \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{X_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[q(t) + 2\lambda_n p(t)]dt - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{\bar{X}_0^{(n)}}^{\bar{X}_1^{(n)}} [1 + \cos(2\,\lambda_n t)]\,[\bar{q}(t)$$

$$+ 2\lambda_n \bar{p}(t)]dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

$$L_0^{(n)} - \overline{L}_0^{(n)} = o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) = o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right)$$

olur. Böylece $S_n(X, \overline{X})$ dizisinin tanımı ve Riemann-Lebesque lemması kullanılırsa

$$S_n(X, \overline{X}) = n^2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \overline{L}_k^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx$$

$$= n^2\pi \left(\left| L_0^{(n)} - \overline{L}_0^{(n)} \right| + \left| L_1^{(n)} - \overline{L}_1^{(n)} \right| + \cdots + \left| L_{n-1}^{(n)} - \overline{L}_{n-1}^{(n)} \right| \right) + n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx$$

$$\geq n^2\pi \left| L_0^{(n)} - \overline{L}_0^{(n)} \right| + n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx = n^2\pi o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) + n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx = n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx + o(1) \tag{4.22}$$

olur. (4.22) den $n \to \infty$ iken, $S_n(X, \overline{X})$ sonsuza yaklaşır. Buradan

$$d_{\Sigma_{dif}}(X, \overline{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X, \overline{X})}{1 + S_n(X, \overline{X})} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx + o(1)}{n \int_0^{\pi} |p - \overline{p}|\, dx + o(1)} = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde X, 2. DURUM' a ve $\bar{X}$ ise 1. DURUM a ait ise; $n \to \infty$ iken $S_n(X, \bar{X}) \to \infty$ olacağından

$$d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X}) = 1$$

olur.

Lemma 4. 5. $X, \bar{X} \in \Sigma_{dif}$ aynı duruma ait olsunlar.

a) $X_k^{(n)}$ ve $\bar{X}_k^{(n)}$ noktaları arasındaki $I_k^{(n)}$ aralığı, $n \to \infty$ iken $O(n^{-2})$ uzunluğuna sahiptir.

b) Herhangi $x \in (0, \pi)$ ve yeteri kadar büyük n ler için

$$|J_n(x) - \bar{J}_n(x)| \leq 1$$

şeklindedir.

İspat: Bu lemmanın ispatında Law ve Tsay'ın 2001 yılındaki çalışmasından faydalanılmıştır.

a) Burada sadece 2. DURUM ele alınacaktır. Diğer durumun ispatı benzerdir. (4.14) den

$$X_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \bar{X}_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olup

$$\left| I_k^{(n)} \right| = \left| X_k^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)} \right| = \left| X_k^{(n)} - \frac{k\pi}{n} + \frac{k\pi}{n} - \bar{X}_k^{(n)} \right| \leq \left| X_k^{(n)} - \frac{k\pi}{n} \right| + \left| \frac{k\pi}{n} - \bar{X}_k^{(n)} \right|$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$X_k^{(n)} - \frac{k\pi}{n} = +O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \bar{X}_k^{(n)} - \frac{k\pi}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olacağından

$$\left| I_k^{(n)} \right| \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir.

b) $x \in (0,\pi)$ olarak sabitleyelim. $J = J_n(x)$ ve $\bar{J} = \bar{J}_n(x)$ olsun.

$$J_n(x) = maks\{k: X_k^{(n)} \le x\} \text{ ve } k = J_n(x) \Longrightarrow x \in [X_k^{(n)}, X_{k+1}^{(n)})$$

olup tanım gereği

$$X_J^{(n)} \le x < X_{J+1}^{(n)}, \quad \bar{X}_{\bar{J}}^{(n)} \le x < \bar{X}_{\bar{J}+1}^{(n)}$$

şeklinde olur. Dolayısıyla $X_J^{(n)} = \frac{J\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ve $\bar{X}_{\bar{J}}^{(n)} = \frac{\bar{J}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ olmak üzere

$$X_J^{(n)} = \frac{J\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \le x < X_{J+1}^{(n)} = \frac{(J+1)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\bar{X}_{\bar{J}}^{(n)} = \frac{\bar{J}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \le x < \bar{X}_{\bar{J}+1}^{(n)} = \frac{(\bar{J}+1)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur. Yeteri kadar büyük n ler için yukarıdaki eşitsizlikler sağlanır. Bu nedenle

$$\frac{J\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{(\bar{J}+1)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow J\pi \le (\bar{J}+1)\pi \Longrightarrow J \le (\bar{J}+1)$$

$$\frac{\bar{J}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{(J+1)\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow \bar{J}\pi \le (J+1)\pi \Longrightarrow \bar{J} \le (J+1)$$

yazılabilir. Buradan ise

$$J \le \bar{J} + 1 \text{ ve } \quad \bar{J} \le J + 1 \Longrightarrow \left|J_n(x) - \bar{J}_n(x)\right| \le 1$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.3. ü ispatlamak için, $d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X}) < 1$ iken

$$\|q - \bar{q}\|_1 = \frac{2d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X})}{1 - d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X})}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Böylece difüzyon operatörü için ters nodal problem lokal olarak kararlı olacaktır.

Teorem 4. 8. $X, \bar{X} \in \Sigma_{dif_1}$ sırası ile $L_{p,q}$ ve $\overline{L_{p,q}}$ operatörlerine asimptotik olarak nodal olmak üzere, (p, h, H) ve $(\bar{p}, \bar{h}, \bar{H})$ aynı duruma ait olsun. Bu durumda

$$\|q - \bar{q}\|_1 = 2d_0(X, \bar{X})$$

şeklindedir.

İspat: Önerme 4.2. gereğince sadece, $X, \overline{X} \in \Sigma_{dif_1}$ in aynı durumunun ele alınması yeterlidir. Genelliği bozmadan kabul edelim ki X ve $\overline{X}$, 1. duruma ait olsunlar.

$$\|q - \bar{q}\|_1 = 2d_0(X, \bar{X})$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Teorem 4.5. gereği; L_1 uzayında F_n dizisi q fonksiyonuna, $\bar{F}_n$ dizisi de $\bar{q}$ fonkiyonuna yakınsaktır. Bu durumda, $n \to \infty$ iken

$$F_n = n\left\{\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 L_k^{(n)} - 2n\pi - 2p(x)\right\} \to q$$

ve

$$\bar{F}_n = n\left\{\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 \bar{L}_k^{(n)} - 2n\pi - 2\bar{p}(x)\right\} \to \bar{q}$$

olur. q ve $\bar{q}$ fonksiyonları için, L_1 uzayındaki norm kullanılırsa

$$\|q - \bar{q}\|_1 = \int_0^{\pi} |q(x) - \bar{q}(x)| dx,$$

olmak üzere

$$\|q - \bar{q}\| = \int_0^{\pi} \left| n\left\{\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 L_k^{(n)} - 2n\pi - 2p(x)\right\} - n\left\{\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 \bar{L}_k^{(n)} - 2n\pi - 2\bar{p}(x)\right\} \right| dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left| n\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 L_k^{(n)} - 2n^2\pi - 2np(x) - n\sum_{k=1}^{n-1} 2n^2 \bar{L}_k^{(n)} + 2n^2\pi + 2n\bar{p}(x) \right| dx + o(1)$$

$$\leq 2n^3 \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| dx + 2n \int_0^{\pi} |p(x) - \bar{p}(x)| dx + o(1)$$

$$= 2n^3 \int_0^{\pi} \left| L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} \right| dx + 2n \int_0^{\pi} |p(x) - \bar{p}(x)| dx + o(1)$$

olur. Burada integralin içerisindeki mutlak değere $\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}$ eklenip çıkarılırsa ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\|q-\bar{q}\| \le 2n^3 \int_0^{\pi} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx + 2n^3 \int_0^{\pi} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx$$
$$+ 2n \int_0^{\pi} |p(x)-\bar{p}(x)|dx + o(1),$$

(4.23)

elde edilir. Burada

$$\int_0^{\pi} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ve

$$\int_0^{\pi} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|L_k^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$
$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + o(1),$$

şeklindedir. Bu ifadeler, (4.23) de yerine yazılırsa

$$\|q-\bar{q}\| \le 2n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right) + 2n^3 \left[\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + o(1)\right] + 2n \int_0^{\pi} |p(x)-\bar{p}(x)|dx + o(1)$$

ve

$$\|q-\bar{q}\|_1 \le 2n^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| + 2n \int_0^{\pi} |p(x)-\bar{p}(x)|dx + o(1)$$

elde edilir. Her iki tarafın $n \to \infty$ iken limiti alınırsa, metrik tanımı gereğince

$$\|q-\bar{q}\|_1 \le 2d_0(X,\bar{X}) + o(1)$$

(4.24)

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|q-\bar{q}\|_1 \ge 2d_0(X,\bar{X}) + o(1)$$

(4.25)

olduğu gösterilebilir. (4.24) ve (4.25) eşitsizliklerinden

$$\|q-\bar{q}\|_1 = 2d_0(X,\bar{X})$$

bulunur.

4.3. Difüzyon Operatörü için Yüksek Mertebeden Kararlılık

δ ve δ^m fark bölüm operatörleri sırası ile

$$\delta a_i^{(n)} = \frac{a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}} \quad \text{ve} \quad \delta^m a_i^{(n)} = \frac{\delta^{m-1} a_{i+1}^{(n)} - \delta^{m-1} a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}}$$

şeklinde tanımlansın (Law ve Ching Fu Yang, 1998). δ ve δ^m operatörleri $\left\{a_i^{(n)}\right\}$ çift indisli dizisine bağlıdırlar. $X,\ \bar{X} \in \Sigma_{dif_1}$ ve $k > n$ için $X_k^{(n)} = \bar{X}_k^{(n)} = \pi$ olsun. $m = 1,2,\dots,N$ için

$$S_{m,n}(X,\bar{X}) = \lambda_n{}^{1/2} \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| + \lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right| dx$$

$$+ \lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right| dx \tag{4.26}$$

ve

$$d_m(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_{m,n}(X,\bar{X}), \quad d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_{m,n}(X,\bar{X})}{1 + S_{m,n}(X,\bar{X})}$$

olarak tanımlansın. Bu limitlerin varlığı Teorem 4.10. ile doğrulanacaktır.

$$d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) \le d_m(X,\bar{X})$$

ve $d_m(X,\bar{X})$ sonlu olduğu müddetçe

$$d_m(X,\bar{X}) \le \frac{d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X})}{1 - d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X})}$$

şeklindedir. Buna ilaveten $d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $d_m(X,\bar{X}) = 0$ olmasıdır. Gerçekten $d_m(X,\bar{X}) = 0$ olmak üzere

$$d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) \le d_m(X,\bar{X}) = 0 \Longrightarrow d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) = 0$$

olur. Karşıt olarak kabul edelim ki $d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) = 0$ olsun.

$$d_m(X,\bar{X}) \leq \frac{d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X})}{1-d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X})}$$

eşitsizliği kullanılırsa $d_m(X,\bar{X})=0$ olur.

$$D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\bar{X}) = d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X})$$

olsun. Buradan $D_{\Sigma(N)_{dif}}$ dönüşümünün, $\Sigma_{dif_1}(N)$ uzayında bir pseudo metrik olduğunu göstermek zor değildir. Gerçekten,

1) $X=\bar{X}$ için $D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olduğu açıktır.
2) Burada

$$d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) = d_{\Sigma_{dif}}(\bar{X},X) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}(\bar{X},X)$$

olduğundan

$$D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\bar{X}) = D_{\Sigma(N)_{dif}}(\bar{X},X)$$

elde edilir. Böylece simetrik olma özelliği sağlanır.

3) Her $X,\bar{X},\bar{\bar{X}} \in \Sigma_{dif_1}(N)$ için

$$\begin{aligned} d_{\Sigma_{dif}}(X,\bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) &\leq d_{\Sigma_{dif}}\left(X,\bar{\bar{X}}\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}\left(X,\bar{\bar{X}}\right) + d_{\Sigma_{dif}}\left(\bar{\bar{X}},\bar{X}\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}\left(\bar{\bar{X}},\bar{X}\right) = D_{\Sigma(N)_{dif}}\left(X,\bar{\bar{X}}\right) + D_{\Sigma(N)_{dif}}\left(\bar{\bar{X}},\bar{X}\right) \end{aligned}$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır. Böylece $D_{\Sigma(N)_{dif}}$ dönüşümü, $\Sigma_{dif_1}(N)$ uzayında bir pseudo metriktir.

"$X \sim_N \bar{X}$ olması için gerek ve yeter şart, $D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\bar{X})=0$ olmasıdır" şeklinde tanımlanırsa; $\sim_N$, $\Sigma(N)_{dif}$ uzayında bir denklik bağıntısı olur. $\sim_N$ denklik bağıntısı, $\Sigma(N)_{dif}$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Tüm bu denklik sınıflarının cümlesi ise $\Sigma_{dif_1}^{*}(N) = \Sigma_{dif_1}(N)/\sim_N$ ile gösterilir. $q,\bar{q} \in C^N[0,\pi]$ ve $\bar{H},H \in \Omega_{dif}$ için

$$d_{\Omega(N)_{dif}}(H,\overline{H}) = d_{\Omega_{dif}}(H,\overline{H}) + \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1$$

olsun. $d_{\Omega(N)_{dif}}$, $\Omega(N)_{dif}$ üzerinde bir metriktir. Gerçekten $\forall\, H,\overline{H},\overline{\overline{H}} \in \Omega(N)_{dif}$ için

1) $H = \overline{H}$ olduğunda $d_{\Omega(N)_{dif}}(H,\overline{H}) = 0$ olacağı açıktır.

2) $d_{\Omega(N)_{dif}}(H,\overline{H}) = 0$ olsun. Bu durumda

$$d_{\Omega_{dif}}(H,\overline{H}) + \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1 = 0$$

ve

$$d_{\Omega_{dif}}(H,\overline{H}) = 0 \wedge \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 \wedge \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1 = 0 \Longrightarrow H = \overline{H}$$

olur.

3)

$$\begin{aligned} d_{\Omega(N)_{dif}}(H,\overline{H}) &= d_{\Omega_{dif}}(H,\overline{H}) + \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1 \\ &= d_{\Omega_{dif}}(\overline{H},H) + \sum_{m=1}^{N}\left\|\bar{q}^{(m)} - q^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|\bar{p}^{(m)} - p^{(m)}\right\|_1 \\ &= d_{\Omega(N)_{dif}}(\overline{H},H) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} &d_{\Omega_{dif}}(H,\overline{H}) + \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{\bar{q}}^{(m)} + \bar{\bar{q}}^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{\bar{p}}^{(m)} + \bar{\bar{p}}^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1 \\ &\leq d_{\Omega_{dif}}\left(H,\overline{\overline{H}}\right) + d_{\Omega_{dif}}\left(\overline{\overline{H}},\overline{H}\right) + \sum_{m=1}^{N}\left\|q^{(m)} - \bar{\bar{q}}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|\bar{\bar{q}}^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N}\left\|p^{(m)} - \bar{\bar{p}}^{(m)}\right\|_1 + \sum_{m=1}^{N}\left\|\bar{\bar{p}}^{(m)} - \bar{p}^{(m)}\right\|_1 \\ &= d_{\Omega(N)_{dif}}\left(H,\overline{\overline{H}}\right) + d_{\Omega(N)_{dif}}\left(\overline{\overline{H}},\overline{H}\right) \end{aligned}$$

olup, $(\Omega(N)_{dif}, d_{\Omega(N)_{dif}})$ bir metrik uzaydır.

Teorem 4. 4. ün ispatı $q^{(m)}$ için verilen aşağıdaki yapılandırma formülüne bağlıdır.

Teorem 4. 9. $N \geq 1$ için q potansiyel fonksiyonu $(N+1)$. mertebeden sürekli ve $L_1[0,\pi]$ sınıfından olsun. Ayrıca $\forall x \in [0,\pi]$ için $j = j_n(x)$ ve $\left\{x_j^{(n)}\right\}$ ilgili nodal nokta dizisi olsun. Böylece $n \to \infty$ iken

$$q(x) = \lambda_n \left(2\lambda_n^2 l_j^{(n)} - 2\pi\lambda_n - 2p(x)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve $\forall m = 1,2,\dots,N$ için

$$q^{(m)}(x) = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi}\delta^m l_j^{(n)} - 2\lambda_n \delta^m p\left(x_j\right) - 2\lambda_n p^{(m)}(x) + o(1)$$

olur (Koyunbakan ve Yılmaz, 2008).

Teorem 4.4. ü ispatlamak için $d_{\Sigma(m)_{dif}}(X,\bar{X}) < 1$ iken

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = \frac{2d_{\Sigma(m)_{dif}}}{1 - d_{\Sigma(m)_{dif}}}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Böylece difüzyon operatörü için ters nodal problem yüksek mertebeden lokal olarak kararlı olacaktır.

Teorem 4. 10 $q, \bar{q} \in C^N[0,\pi]$ ve (p,h,H) ve $(\bar{p},\bar{h},\bar{H})$ aynı asimptotik duruma ait olsunlar. X ve $\bar{X}$ ise ilgili asimptotik olarak denk nodal diziler olsunlar. Bu durumda $\forall\, m = 1,2,\dots,N$ için

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = 2d_m(X,\bar{X}),$$

şeklinde olur.

İspat : Teorem 4. 9., (4.4) ve hatırlatma 4.1. gereğince

$$q^{(m)} = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi}\delta^m L_J^{(n)} - 2\lambda_n \delta^m p\left(x_J\right) - 2\lambda_n p^{(m)}(x) + o(1)$$

ve

$$\bar{q}^{(m)} = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi}\delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)} - 2\lambda_n \delta^m \bar{p}\left(x_{\bar{J}}\right) - 2\lambda_n \bar{p}^{(m)}(x) + o(1)$$

olur. Buradan

$$q^{(m)} - \bar{q}^{(m)} = \frac{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}}{\pi}\left[\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right] + 2\lambda_n\left[\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right] + 2\lambda_n\left[\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right] + o(1)$$

ve

$$\left|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right| = \left|\frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi}\left[\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right] + 2\lambda_n\left[\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right] + 2\lambda_n\left[\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right] + o(1)\right|$$

olup, L_1 uzayındaki norm tanımı kullanılırsa yeteri derece de büyük n ler için

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|q^{(m)}(x) - \bar{q}^{(m)}(x)\right| dx + o(1)$$

$$= \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi}\left[\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right] + 2\lambda_n\left[\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right] + 2\lambda_n\left[\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right] + o(1)\right| dx$$

$$\leq \frac{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx + 2\lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right| dx + 2\lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right| dx + o(1)$$

olur. ilk integraldeki mutlak değerde $\delta^m \bar{L}_J^{(n)}$ eklenip çıkarılır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_J^{(n)} + \delta^m \bar{L}_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx$$

$$\leq \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_J^{(n)}\right| dx + \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m \bar{L}_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx$$

olur. Lemma 4. 5. ve (Law ve Ching Fu Yang, 1998) gereğince

$$\int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m \bar{L}_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m \bar{L}_{k+1}^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|I_k^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n-m-2} O\left(\frac{1}{n^3}\right) O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

ve

$$\int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_J^{(n)}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| L_k^{(n)}$$

olur. Üstelik $L_k^{(n)} = \frac{\pi}{n} + O(n^{-2})$ şeklindedir. Böylece

$$\frac{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}}{\pi} \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m L_J^{(n)} - \delta^m \bar{L}_{\bar{J}}^{(n)}\right| dx \leq \frac{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}}{\pi} O\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| \left(\frac{\pi}{n} + O(n^{-2})\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) + 2n^{1/2} \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right| + \frac{2}{\pi} n^{3/2} n o(n^{-2}) o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) + 2n^{1/2} \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right|$$

olacağından

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 \leq 2n^{1/2} \sum_{k=1}^{n-m-2} \left|\delta^m L_k^{(n)} - \delta^m \bar{L}_k^{(n)}\right|$$

$$+ 2\lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\delta^m \bar{p}(x_{\bar{J}}) - \delta^m p(x_J)\right| dx + 2\lambda_n \int_{X_1^{(n)}}^{X_{n-m-1}^{(n)}} \left|\bar{p}^{(m)}(x) - p^{(m)}(x)\right| dx$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve $n \to \infty$ iken limit alınırsa, metrik tanımı gereği

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 \leq 2d_m(X, \bar{X})$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 \geq 2d_m(X, \bar{X})$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\left\|q^{(m)} - \bar{q}^{(m)}\right\|_1 = 2d_m(X, \bar{X})$$

elde edilir.

Hatırlatma 4. 2. $[0,\pi]$ aralığında $q^{(m)}$ ve $\bar{q}^{(m)}$ fonksiyonlarının sürekli olması bu teoremin ispatı için oldukça önemlidir. $q,\ \bar{q} \in L_1(0,\pi)$ olsaydı $q^{(m)}$ ve $\bar{q}^{(m)}$ için düzgün olmayan bir yapılandırma formülü elde edilirdi.

Lemma 4. 6. Verilen $X,\ \bar{X} \in \Sigma(N)_{dif}$ için $d_{\Sigma_{dif}}(X,\ \bar{X}) = 0 \Leftrightarrow D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\ \bar{X}) = 0$ olmasıdır.

İspat:

$$D_{\Sigma(N)_{dif}}(X, \bar{X}) = d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X}) + \sum_{m=1}^{N} d_{\Sigma(m)_{dif}}(X, \bar{X})$$

olduğu bilinmektedir. Burada $D_{\Sigma(N)_{dif}}(X,\ \bar{X}) = 0$ ise $d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X}) = 0$ olduğu açıktır. Tersine, kabul edelim ki $d_{\Sigma_{dif}}(X, \bar{X}) = 0$ olsun. Yeter şartın ispatı için L_1 uzayındaki $q,\ \bar{q}$ potansiyel fonksiyonlarının eşit olduğunu göstermek gerekir. $q,\ \bar{q}$ fonksiyonlarının her ikisi de C^N sınıfından olup, $q^{(m)}(x) = \bar{q}^{(m)}(x)$ olur. $\forall m = 1,2,\dots,N$ için Teorem 4.10. gereğince $d_m(X,\ \bar{X}) = 0$ olur. Tanım gereği $d_m(X,\ \bar{X}) = 0 \Longrightarrow d_{\Sigma(m)_{dif}}(X, \bar{X}) = 0$ olur. Böylece $D_{\Sigma(N)_{dif}}(X, \bar{X}) = 0$ elde edilir.

Bu durumda $\Sigma(N)_{dif}$ uzayındaki $\sim_N$ ve Σ_{dif} uzayındaki $\sim$ denklik bağıntıları aynıdır. Böylece Φ_{dif} nodal dönüşümünün $\Omega_{dif}(N)$ uzayına kısıtlanması olan dönüşüm halen daha bir homeomorfizmdir.

Lemma 4. 7. Kabul edelim ki $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)},\ \bar{L}_k^{(n)} = \bar{X}_{k+1}^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)},\ \bar{X}_0^{(n)} = 0 = X_0^{(n)}$ ve $\bar{X}_n^{(n)} = \pi = X_n^{(n)}$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^{\pi} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|L_k^{(n)}\right|$$

şeklindedir.

İspat : $[0,\pi]$ aralığını $X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ yardımıyla $\left(0, X_1^{(n)}\right), \dots, \left(X_{n-1}^{(n)}, \pi\right)$ olacak şekilde $n-$ tane açık alt aralığa bölelim.

$x \in (0, X_1^{(n)})$ olsun. Bu durumda $J_n(x) = maks\left\{k: X_k^{(n)} \le x\right\} = 0$ olur.

$$\int_0^{X_1^{(n)}} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_0^{X_1^{(n)}} \left|L_0^{(n)} - \bar{L}_0^{(n)}\right| dx = \left|L_0^{(n)} - \bar{L}_0^{(n)}\right|\left(X_1^{(n)} - 0\right)$$

$x \in (X_1^{(n)}, X_2^{(n)})$ olsun. Bu durumda $J_n(x) = maks\left\{k: X_k^{(n)} \le x\right\} = 1$ olur.

$$\int_{X_1^{(n)}}^{X_2^{(n)}} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_1^{(n)}}^{X_2^{(n)}} \left|L_1^{(n)} - \bar{L}_1^{(n)}\right| dx = \left|L_1^{(n)} - \bar{L}_1^{(n)}\right|\left(X_2^{(n)} - X_1^{(n)}\right)$$

$x \in (X_2^{(n)}, X_3^{(n)})$ olsun. Bu durumda $J_n(x) = maks\left\{k: X_k^{(n)} \le x\right\} = 2$ olur.

$$\int_{X_2^{(n)}}^{X_3^{(n)}} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_2^{(n)}}^{X_3^{(n)}} \left|L_2^{(n)} - \bar{L}_2^{(n)}\right| dx = \left|L_2^{(n)} - \bar{L}_2^{(n)}\right|\left(X_3^{(n)} - X_2^{(n)}\right)$$

Bu şekilde devam edilecektir.

$x \in (X_{n-1}^{(n)}, \pi)$ olsun. Bu durumda $J_n(x) = maks\left\{k: X_k^{(n)} \le x\right\} = n - 1$ olur.

$$\int_{X_{n-1}^{(n)}}^{\pi} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_{n-1}^{(n)}}^{\pi} \left|L_{n-1}^{(n)} - \bar{L}_{n-1}^{(n)}\right| dx = \left|L_{n-1}^{(n)} - \bar{L}_{n-1}^{(n)}\right|\left(\pi - X_{n-1}^{(n)}\right).$$

Burada elde edilen tüm eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\int_0^{\pi} \left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|L_k^{(n)}\right|$$

elde edilir.

Lemma 4. 8. Kabul edelim ki $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$, $\bar{L}_k^{(n)} = \bar{X}_{k+1}^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)}$, $\bar{X}_0^{(n)} = 0 = X_0^{(n)}$ ve $\bar{X}_n^{(n)} = \pi = X_n^{(n)}$ olsun.

$$\int_0^{\pi} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\bar{L}_{k+1}^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| \left|I_k^{(n)}\right|$$

şeklindedir.

İspat : $[0, \pi]$ aralığını $X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ ve $\bar{X}_0^{(n)}, \bar{X}_1^{(n)}, \dots, \bar{X}_n^{(n)}$ yardımıyla $\left(\bar{X}_0^{(n)}, X_1^{(n)}\right), (X_1^{(n)}, \bar{X}_1^{(n)}), \dots, (\bar{X}_{n-1}^{(n)}, X_n^{(n)})$ olacak şekilde açık alt aralıklara bölelim.

$x \in (\bar{X}_0^{(n)}, X_1^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = 0$, $\bar{J}_n(x) = 0$ olur.

$$\int_{\bar{X}_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{\bar{X}_0^{(n)}}^{X_1^{(n)}} \left|\bar{L}_0^{(n)} - \bar{L}_0^{(n)}\right| dx = 0$$

$x \in (X_1^{(n)}, \bar{X}_1^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = 1,\ \bar{J}_n(x) = 0$ olur.

$$\int_{X_1^{(n)}}^{\bar{X}_1^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_1^{(n)}}^{\bar{X}_1^{(n)}} \left|\bar{L}_1^{(n)} - \bar{L}_0^{(n)}\right| dx = \left|\bar{L}_1^{(n)} - \bar{L}_0^{(n)}\right|\left|\bar{X}_1^{(n)} - X_1^{(n)}\right|$$

$x \in (\bar{X}_1^{(n)}, X_2^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = 1,\ \bar{J}_n(x) = 1$ olur.

$$\int_{\bar{X}_1^{(n)}}^{X_2^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_2^{(n)}}^{X_2^{(n)}} \left|\bar{L}_1^{(n)} - \bar{L}_1^{(n)}\right| dx = 0$$

$x \in (X_2^{(n)}, \bar{X}_2^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = 2$,$\bar{J}_n(x) = 1$ olur.

$$\int_{X_2^{(n)}}^{\bar{X}_2^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_2^{(n)}}^{\bar{X}_2^{(n)}} \left|\bar{L}_2^{(n)} - \bar{L}_1^{(n)}\right| dx = \left|\bar{L}_2^{(n)} - \bar{L}_1^{(n)}\right|\left|\bar{X}_2^{(n)} - X_2^{(n)}\right|$$

$x \in (\bar{X}_2^{(n)}, X_3^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = 2,\ \bar{J}_n(x) = 2$ olur.

$$\int_{\bar{X}_2^{(n)}}^{X_3^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{\bar{X}_2^{(n)}}^{X_3^{(n)}} \left|\bar{L}_2^{(n)} - \bar{L}_2^{(n)}\right| dx = 0$$

$x \in (X_{n-1}^{(n)}, \bar{X}_{n-1}^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = n-1,\ \bar{J}_n(x) = n-2$ olur.

$$\int_{X_{n-1}^{(n)}}^{\bar{X}_{n-1}^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{X_{n-1}^{(n)}}^{\bar{X}_{n-1}^{(n)}} \left|\bar{L}_{n-1}^{(n)} - \bar{L}_{n-2}^{(n)}\right| dx = \left|\bar{L}_{n-1}^{(n)} - \bar{L}_{n-2}^{(n)}\right|\left|\bar{X}_{n-1}^{(n)} - X_{n-1}^{(n)}\right|$$

$x \in (\bar{X}_{n-1}^{(n)}, X_n^{(n)})$ alınırsa $J_n(x) = n-1,\ \bar{J}_n(x) = n-1$ olur.

$$\int_{\bar{X}_{n-1}^{(n)}}^{X_n^{(n)}} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \int_{\bar{X}_{n-1}^{(n)}}^{X_n^{(n)}} \left|\bar{L}_{n-1}^{(n)} - \bar{L}_{n-1}^{(n)}\right| dx = 0$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\int_0^{\pi} \left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)}\right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\bar{L}_{k+1}^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right|\left|I_k^{(n)}\right|$$

elde edilir.

5. DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

5.1. Dirac Denklem Sistemi

Dirac sistemi için ters problemler ilk olarak Moses (Moses, 1956), Prats-Toll (Prats ve Toll, 1959), Verde (1958-1959), Gasymov- Levitan (1966) ve Panakhov (1985) tarafından çalışılmıştır. Joa ve Minkin, bir boyutlu Dirac operatörleri için kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tasvir eden öz fonksiyonlara ait bazı açılım formülleri verdiler (Joa ve Minkin, 1997). Ağırlıklı Dirac sistemleri için ters spektral problemler Watson tarafından çalışıldı (Watson, 1999).

Kerimov, sınır koşullarında ve denklemde aynı spektral parametreyi bulunduran Dirac sistemi için öz fonksiyon ve öz değerlerin özelliklerini inceledi (Kerimov, 2002). Nabiev, bölünmemiş sınır koşuluna sahip Dirac operatörü için ters spektral problemi inceledi (Nabiev, 2003). 2009 yılında Amirov, Keskin ve Özkan, Dirac diferensiyel operatörleri için öz parametre sadece diferensiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır koşulunda lineer olarak bulunan bir problemi ele aldı ve bilinen öz değerler ve normlaştırıcı sabitler ile iki spektrumu kullanarak ters spektral problem için teklik teoremlerini ispatladılar (Keskin ve Özkan, 2011). Öz değer parametresi sınır koşullarında lineer bir şekilde bulunan Dirac sistemleri ile bağlantılı sinyal analizinin örnekleme teorisi Annaby ve Tharwat tarafından çalışıldı (Annaby ve Tharwat, 2011).

Ters nodal problem, öz fonksiyonların sıfırlarını kullanarak, operatörü elde etme problemidir. Dirac sistemi için ters nodal problem, öz fonksiyonun bir bileşeninin nodal kümesi kullanılacak şekilde tek olarak Dirac denkleminin tüm katsayılarını ve sınır koşullarının tüm parametrelerini elde etme problemidir.

2010 yılına kadar Dirac sistemleri için ters nodal problemler çalışılmamıştı. 2010 yılında sonlu bir aralıkta Dirac operatörü için ters nodal problem çözüldü ve çeşitli çalışmalar yapıldı (Yang ve Huang, 2010; Panakhov, Yılmaz ve Koyunbakan, 2010). Sınır koşullarında spektral parametre bulunduran Dirac sistemi için ters nodal problem ise ilk olarak Yang ve Pvavorchik tarafından çalışılmıştır (Yang ve Pvavorchik, 2011).

Bu kısımda ise Dirac operatörü için ters nodal problemin kararlılığı incelenecektir. λ spektral parametresi sınır koşullarında bulunmak üzere aşağıdaki Dirac sistemi için L sınır değer problemini ele alalım.

$$By'(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x),\ 0 \le x \le \pi\,, \tag{5.1}$$

$$(\lambda cos\alpha + a_0)y_1(0) + (\lambda sin\alpha + b_0)y_2(0) = 0, \tag{5.2}$$

$$(\lambda cos\beta + a_1)y_1(\pi) + (\lambda sin\beta + b_1)y_2(\pi) = 0. \tag{5.3}$$

Bu problemde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} V(x)+m & 0 \\ 0 & V(x)-m \end{pmatrix}, \qquad y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. V, reel değerli, sürekli ve $L_1[0,\pi]$ sınıfından bir fonksiyondur. Ayrıca $m, a_0, a_1, b_0, b_1, \alpha$ ve β reel sabitler; üstelik $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ şeklindedir. Yang ve Pvavorchik, çalışmaları boyunca

$$a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha > 0 \text{ ve } a_1 sin\beta - b_1 cos\beta < 0 \tag{5.4}$$

olduğunu kabul etmişlerdir. (5.4) şartı altında, (5.1)-(5.3) sınır değer probleminin öz değerleri reel ve basittir (Kerimov, 2002; Yang ve Pvavorchik, 2011).

Bu çalışmada Dirac sistemi için verilen $y(x,\lambda_n) = (y_1(x,\lambda_n),\ \ y_2(x,\lambda_n))^T$ iki bileşenli vektör öz fonksiyonunun sadece bir bileşeni olan $y_1(x,\lambda_n)$ (ya da $y_2(x,\lambda_n)$) öz fonksiyonunun nodal noktalarının bir kümesi kullanılmıştır. (5.1) denklemini, Dirac denklem sistemi haline getirelim. (5.1) den,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'_1(x,\lambda) \\ y'_2(x,\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(x)+m & 0 \\ 0 & V(x)-m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olur. Burada bazı düzenlemeler yapılırsa

$$y'_2(x,\lambda) + [\,V(x)+m]y_1(x,\lambda) - \lambda y_1(x,\lambda) = 0$$

$$-y'_1(x,\lambda) + [\,V(x)-m]y_2(x,\lambda) - \lambda y_2(x,\lambda) = 0 \tag{5.5}$$

elde edilir. Genel halde (5.1) denklemindeki potansiyel fonksiyon

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. (5.5) denklem sistemi için, özel olarak $p_{12}(x) = p_{21}(x) = 0$ alınmıştır. Bu denklem sistemine bir boyutlu Dirac denklem sistemi ya da Dirac denklem sisteminin birinci kanonik formu adı verilir.

Lemma 5. 1. (5.1)-(5.3) probleminin spektrumu, tamamı reel ve basit olan $\{\lambda_n\}$ öz değerlerini içerir. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\{\lambda_n\}$ öz değerleri asimptotik olarak

$$\lambda_n = n - 2 + \frac{v}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \to \infty, \tag{5.6}$$

$$\lambda_{-n} = -n + \frac{v}{\pi} - \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \to \infty, \tag{5.7}$$

formundadır. Burada

$$v = \int_0^{\pi} V(x)dx + \beta - \alpha,$$

ve

$$c = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2\pi}(sin2\alpha - sin2\beta) + \frac{a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha}{\pi} - \frac{a_1 sin\beta - b_1 cos\beta}{\pi},$$

olarak alınmıştır (Yang ve Pvavorchik, 2011).

İspat : (5.1)-(5.3) probleminin sınır şartlarında spektral parametre bulunduran özel hali için $y(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$ bileşen fonksiyonları

$$y_1(x,\lambda) = -\lambda sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right) + \frac{m^2}{2} x cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right)$$
$$- m cos\alpha\, sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) - a_0 sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right)$$
$$- b_0 cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$y_2(x,\lambda) = \lambda cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right) + \frac{m^2}{2} x sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right)$$
$$+ msin\alpha\, sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + a_0 cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right)$$
$$- b_0 sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

şeklindedir. L operatörünün $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu

$$\omega(\lambda) = (\lambda cos\beta + a_1) y_1(\pi,\lambda) + (\lambda sin\beta + b_1) y_2(\pi,\lambda) \tag{5.8}$$

bağıntısı ile tanımlanır. $y_1(\pi,\lambda)$ ve $y_2(\pi,\lambda)$ değerleri (5.8) karakteristik fonksiyon denkleminde yerine yazılırsa

$$\omega(\lambda) = (\lambda cos\beta + a_1)\left\{-\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)\right.$$
$$+ \frac{m^2}{2}\pi cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) - mcos\alpha\, sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)$$
$$\left. - a_0 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) - b_0 cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$
$$+ (\lambda sin\beta + b_1)\left\{\lambda cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)\right.$$
$$+ \frac{m^2}{2}\pi sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) + msin\alpha\, sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)$$
$$\left. + a_0 cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) - b_0 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\omega(\lambda) = -\lambda^2 cos\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) + \frac{m^2}{2}\pi\lambda cos\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)$$
$$- m\lambda cos\alpha cos\beta\ sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) - a_0\lambda cos\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)$$
$$- b_0\lambda cos\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + \lambda^2 sin\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)$$
$$+ \frac{m^2}{2}\lambda\pi sin\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)$$
$$+ m\lambda sin\alpha sin\beta\ sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + a_0\lambda sin\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)$$
$$- b_0\lambda sin\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$- \lambda a_1 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) + \lambda b_1 cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)$$

(5.9)

elde edilir. Burada

$$\lambda^2\left[sin\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) - cos\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)\right]$$
$$= -\lambda^2 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$\frac{m^2}{2}\lambda\pi\left[cos\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) + sin\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)\right]$$
$$= \frac{m^2}{2}\lambda\pi cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$m\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)[sin\alpha sin\beta - cos\alpha cos\beta] = -m\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)\cos(\alpha+\beta)$$

$$\lambda a_o\left[sin\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) - cos\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)\right]$$

$$= -\lambda a_o sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right)$$

ve

$$-\lambda b_o\left[cos\beta cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right) + sin\beta sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)\right]$$

$$= -\lambda b_o cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right)$$

olur. Bu ifadeler (5.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) = {} & -\lambda^2 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right) + \frac{m^2}{2}\lambda\pi cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right) \\ & - m\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)\cos(\alpha+\beta) - \lambda a_o sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right) \\ & - \lambda b_o cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right) - \lambda a_1 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) \\ & + \lambda b_1 cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right) + O(e^{\tau\pi}),\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. Burada

$$\omega_0(\lambda) = -\lambda^2 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

olacak şekilde yardımcı bir fonksiyon alalım. $\omega_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının kümesi

$$\lambda_n^0 = n - 2 + \frac{\beta - \alpha + \int_0^\pi V(x)dx}{\pi}, (n \geq 2)$$

şeklinde elde edilir. Rouche teoremi kullanılırsa, yeteri kadar büyük $|n|$ ler için $\omega_0(\lambda)$ ve $\omega(\lambda)$ fonksiyonları büyük yarıçaplı bir küre içerisinde aynı sayıda sıfıra sahiptir. Şöyle ki $\omega(\lambda)$ nın sıfırlarının kümesi $\{\lambda_n\}$,

$$... < \lambda_{-n} < ... < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şeklinde olur. Öz değerler $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan, $\omega(\lambda_n) = 0$ denklemi kullanılırsa ve (5.10) eşitliğinin her iki tarafı $cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right) \\
&\quad = \frac{m^2}{2}\lambda\pi - \frac{m\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx\right)\cos(\alpha+\beta)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} \\
&\quad - \frac{\lambda a_o sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} - \frac{\lambda b_o cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx - \beta\right)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} \\
&\quad - \frac{\lambda a_1 sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} + \frac{\lambda b_1 cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

olur. (5.11) eşitliğinin sağ tarafı için bazı trigonometrik ifadeler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-\frac{m\lambda sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta - (\alpha-\beta)\right)cos(\alpha+\beta)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} \\
&= -\frac{m\lambda\left[sin\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)cos\left(-(\alpha-\beta)\right) + cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)sin\left(-(\alpha-\beta)\right)\right]cos(\alpha+\beta)}{cos\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)} \\
&= -m\lambda\, tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)cos(\alpha-\beta)\,cos(\alpha+\beta) + m\lambda\, sin(\alpha-\beta)\,cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$-\frac{\lambda a_o sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx-\beta\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}=-\frac{\lambda a_o sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx-\beta+\alpha-\alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\frac{\lambda a_o\left[sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)cos(-\alpha)+cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)sin(-\alpha)\right]}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\lambda a_o\ cos\,\alpha\,tan\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(t)dt+\alpha-\beta\right)+\lambda a_o\,sin\,\alpha$$

ve

$$-\frac{\lambda b_o cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx-\beta\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}=-\frac{\lambda b_o cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx-\beta+\alpha-\alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\frac{\lambda b_o\left[cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)\cos(-\alpha)-sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)sin(-\alpha)\right]}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\lambda b_o\ cos\,\alpha-\lambda b_o\,sin\,\alpha tan\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$-\frac{\lambda a_1 sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}=-\frac{\lambda a_1 sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta+\beta\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\frac{\lambda a_1\left[sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)\cos\beta+cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)sin\,\beta\right]}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=-\lambda a_1\ cos\,\beta\,tan\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)-\lambda a_1\,sin\,\beta$$

ve

$$\frac{\lambda b_1 cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}=\frac{\lambda b_1 cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta+\beta\right)}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=\frac{\lambda b_1\left[cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)\cos\beta-sin\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)sin\,\beta\right]}{cos\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)}$$

$$=\lambda b_1\ cos\,\beta-\lambda b_1\,sin\,\beta tan\left(\lambda\pi-\int_0^\pi V(x)dx+\alpha-\beta\right)$$

elde edilir. Bu ifadeler (5.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda^2 tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$= \frac{m^2}{2}\lambda\pi - m\lambda\, tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right) cos(\alpha-\beta)\, cos(\alpha+\beta)$$

$$+ m\lambda\, sin(\alpha-\beta)\, cos(\alpha+\beta) - \lambda a_o\ cos\,\alpha\, tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$+ \lambda a_o\, sin\,\alpha - \lambda b_o\ cos\,\alpha - \lambda b_o\, sin\,\alpha tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$- \lambda a_1\ cos\,\beta\, tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right) - \lambda a_1\, sin\,\beta + \lambda b_1\ cos\,\beta$$

$$- \lambda b_1\, sin\,\beta tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)\left\{1 + \frac{m}{\lambda}cos(\alpha-\beta)\, cos(\alpha+\beta) + \frac{a_o cos\alpha}{\lambda} + \frac{b_0 sin\alpha}{\lambda} + \frac{a_1 cos\beta}{\lambda}\right.$$

$$\left. + \frac{b_1 sin\beta}{\lambda}\right\}$$

$$= \frac{m^2}{2\lambda}\pi + \frac{m}{\lambda}sin(\alpha-\beta)\, cos(\alpha+\beta) + \frac{a_o sin\alpha}{\lambda} - \frac{b_o cos\alpha}{\lambda} - \frac{a_1 sin\beta}{\lambda} + \frac{b_1 cos\beta}{\lambda}$$

$$+ O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

olup yeterince büyük n ler için

$$tan\left(\lambda\pi - \int_0^\pi V(x)dx + \alpha - \beta\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{m^2}{2}\pi + m\, sin(\alpha-\beta)\, cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\{a_o sin\alpha - b_o cos\alpha - a_1 sin\beta + b_1 cos\beta\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

elde edilir. Buradan, $n \geq 0$ için,

$$\lambda = n - 2 + \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} V(x)dx + \beta - \alpha\right) + \frac{\frac{m^2}{2}\pi + m\,sin(\alpha-\beta)\,cos(\alpha+\beta) + a_o sin\alpha - b_o cos\alpha - a_1 sin\beta + b_1 cos\beta}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Bu ifadede

$$v = \int_0^{\pi} V(x)dx + \beta - \alpha$$

ve

$$c = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2\pi}[sin\,2\alpha - sin2\beta] + \frac{a_o sin\alpha - b_o cos\alpha}{\pi} - \frac{a_1 sin\beta - b_1 cos\beta}{\pi}$$

alınırsa

$$\lambda = n - 2 + \frac{v}{\pi} + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur.

Tablo 5. 1. $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, m = 1, a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1, V(x) = x}$ için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

Öz değerler										
$\boldsymbol{\lambda_n}$:	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	1.20742	1.63911	2.44967	3.35495	4.29812	5.26023	6.23317	7.21287	8.19709	9.18446
$\boldsymbol{\lambda_{-n}}$:	λ_{-1}	λ_{-2}	λ_{-3}	λ_{-4}	λ_{-5}	λ_{-6}	λ_{-7}	λ_{-8}	λ_{-9}	λ_{-10}
	-1.06582	-1.49751	-2.30808	-3.21336	-4.15653	-5.11864	-6.09158	-7.07128	-8.05549	-9.04287

Tablo 5. 2. $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, m = 1, a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1, b_1 = 1, V(x) = x}$ için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

Öz değerler										
$\boldsymbol{\lambda_n}$:	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	2.20742	2.63911	3.44967	4.35495	5.29812	6.26023	7.23317	8.21287	9.19709	10.1845
$\boldsymbol{\lambda_{-n}}$:	λ_{-1}	λ_{-2}	λ_{-3}	λ_{-4}	λ_{-5}	λ_{-6}	λ_{-7}	λ_{-8}	λ_{-9}	λ_{-10}
	-0.06582	-0.49751	-1.30808	-2.21336	-3.15653	-4.11864	-5.09158	-6.07128	-7.05549	-8.04287

Tablo 5. 1. de, $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=0,m=1,a_0=b_0=a_1=b_1=1,V(x)=x}$ özel hali için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin Lemma 5.1. deki asimptotik ifadeye sahip öz değerlerinden bazıları ve Tablo 5. 2. de ise $\boldsymbol{\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2},m=1,a_0=1,b_0=-1,a_1=-1,b_1=1,V(x)=x}$ özel hali için (5.1)-(5.3) Dirac sınır değer probleminin Lemma 5.1. deki asimptotik ifadeye sahip öz değerlerinden bazıları verilmiştir. Bu tabloda problemin öz değerlerin reel olduğu görülmektedir.

$y(x,\lambda_n)=(y_1(x,\lambda_n),\quad y_2(x,\lambda_n))^T$, (5.1)-(5.3) Dirac sisteminin λ_n öz değerine karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $x_n^{j,1}$, $y(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonunun $y_1(x,\lambda_n)$ şeklindeki birinci bileşen fonksiyonunun nodal noktaları olsun. Başka bir ifade ile $y_1\left(x_n^{j,1},\lambda_n\right)=0$ olsun. Burada $I_n^{j,1}=[x_n^{j,1},x_n^{j+1,1}]$ nodal bölge ve $l_n^{j,1}=x_n^{j+1,1}-x_n^{j,1}$ nodal uzunluktur. Ayrıca $n>0$ için $0\le x_n^{j,1}\le x$ olacak şekilde $j=j_n(x)$ fonksiyonunu j indislerinin en büyük değeri olarak tanımlayalım. Böylece $n>0$ için $j=j_n(x)$ olması, $x\in[x_n^{j,1},x_n^{j+1,1})$ olmasını gerektirir.

$X=\{x_n^{j,1}\}$ olsun. X kümesi, Dirac denklem sisteminin $y(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonunun $y_1(x,\lambda_n)$ şeklindeki birinci bileşeninin nodal noktalarının kümesi olarak adlandırılır. Burada ters nodal problem; $(0,\pi)$ de yoğun olarak verilen X nodal nokta kümesi kullanılarak, sınır koşullarındaki α ve β parametrelerini, parçacığın m kütlesini ve V potansiyel fonksiyonunu belirleme problemidir.

Lemma 5. 2. (5.1) denkleminin, $U_1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ koşulunu sağlayan çözüm fonksiyonu $U_1(x)=\begin{pmatrix}u_{1,1}(x,\lambda)\\u_{2,1}(x,\lambda)\end{pmatrix}$ ile gösterilsin. Her bir sabit x için bu çözüm λ parametresinin bir tam çözümüdür. Buna ilaveten $\tau=|\varrho\lambda|$ olmak üzere aşağıdaki gösterimler sağlanır (Yang ve Pvavorchik, 2011).

$$u_{1,1}(x,\lambda)=cos\left(\lambda x-\int_0^x V(t)dt\right)+\frac{m^2}{2\lambda}x\,sin\left(\lambda x-\int_0^x V(t)dt\right)+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{2,1}(x,\lambda)=sin\left(\lambda x-\int_0^x V(t)dt\right)-\frac{m}{\lambda}sin\left(\lambda x-\int_0^x V(t)dt\right)$$
$$-\frac{m^2}{2\lambda}xcos\left(\lambda x-\int_0^x V(t)dt\right)+O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right). \tag{5.12}$$

Lemma 5. 3. (5.1) denkleminin $U_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ koşulunu sağlayan çözüm fonksiyonu $U_2(x) = \begin{pmatrix} u_{1,2}(x,\lambda) \\ u_{2,2}(x,\lambda) \end{pmatrix}$ olsun. Her bir sabit x için bu çözüm λ parametresinin bir tam çözümüdür. Buna ek olarak $\tau = |\varrho\lambda|$ için aşağıdaki gösterimler sağlanır (Yang ve Pvavorchik, 2011).

$$u_{1,2}(x,\lambda) = -sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) - \frac{m}{\lambda} sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + \frac{m^2}{2\lambda} x\, cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{2,2}(x,\lambda) = cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + \frac{m^2}{2\lambda} x\, sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right).$$

(5.13)

Lemma 5. 4. (5.1) denkleminin

$$y(0,\lambda) = \begin{pmatrix} -(\lambda sin\alpha + b_0) \\ \lambda cos\alpha + a_0 \end{pmatrix}$$

(5.14)

koşulunu sağlayan çözüm fonksiyonu $y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ olsun. Bu çözüm $\tau = |\varrho\lambda|$ için aşağıdaki gösterimlere sahiptir.

$$y(x,\lambda) = -(\lambda sin\alpha + b_0)U_1(x,\lambda) + (\lambda cos\alpha + a_0)U_2(x,\lambda)$$

olmak üzere

$$y_1(x,\lambda) = -\lambda sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right) + \frac{m^2}{2} x cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right) - mcos\alpha\, sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) - a_0 sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) - b_0 cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right),$$

(5.15)

$$y_2(x,\lambda) = \lambda cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right) + \frac{m^2}{2} x sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt + \alpha\right)$$
$$+ msin\alpha\, sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + a_0 cos\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right)$$
$$- b_0 sin\left(\lambda x - \int_0^x V(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right),$$

şeklinde olur (Yang ve Pvavorchik, 2011).

Lemma 5. 5. (5.1) denkleminin (5.14) koşulunu sağlayan $y(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonunun $y_1(x,\lambda_n)$ şeklindeki birinci bileşen fonksiyonu, yeteri kadar büyük n ler için $(0,\pi)$ aralığında tam olarak $N(\alpha,\beta)$ kadar sıfıra sahiptir. Burada

$$N(\alpha,\beta) = \begin{cases} n-2, & \alpha \geq 0 \text{ ve } \beta > 0 \quad \text{veya } \alpha < 0 \text{ ve } \beta \leq 0 \\ n-3, & \alpha \geq 0 \text{ ve } \beta \leq 0 \\ n-1, & \alpha < 0 \text{ ve } \beta > 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca yeteri derece de büyük n ler için, $j \in \{1,2,\dots,N(\alpha,\beta)\}$ olmak üzere

$$x_n^{j,1} = \frac{j\pi + \int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \alpha}{\lambda_n} + \frac{m^2 x_n^{j,1}}{2\lambda_n^2} + \frac{msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha}{\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \tag{5.16}$$

veya

$$x_n^{j,1} = \frac{j\pi + \int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \alpha}{n-2} - \frac{\left(j\pi + \int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \alpha\right)v}{(n-2)^2\pi}$$
$$+ \frac{m^2 x_n^{j,1} + msin2\alpha + 2(a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha)}{2(n-2)^2}$$
$$+ \frac{\left(j\pi + \int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \alpha\right)(v^2 - \pi^2 c)}{(n-2)^3\pi^2}$$
$$- \frac{m^2 v x_n^{j,1} + mvsin2\alpha + 2v(a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha)}{(n-2)^3\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{5.17}$$

şeklindedir.

Bu problemin $l_n^{j,1}$ nodal uzunlukları için asimptotik ifadeler

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{\lambda_n} + \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right), \tag{5.18}$$

veya

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi + \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{n-2} - \frac{\left(\pi + \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx\right)v}{(n-2)^2\pi} + \frac{m^2(x_n^{j+1,1} - x_n^{j,1})}{2(n-2)^2} + \frac{\left(\pi + \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx\right)(v^2 - \pi^2 c)}{(n-2)^3\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{5.19}$$

şeklindedir (Yang ve Pvavorchik, 2011).

İspat : (5.1) denkleminin, (5.14) koşulunu sağlayan $y(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonunun $y_1(x,\lambda_n)$ şeklindeki birinci bileşen fonksiyonunun nodal noktaları

$$x_n^{j,1} = \frac{j\pi + \int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \alpha}{\lambda_n} + \frac{m^2 x_n^{j,1}}{2\lambda_n^2} + \frac{msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha}{\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

şeklindedir. Buradan

$$x_n^{j+1,1} = \frac{(j+1)\pi + \int_0^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx - \alpha}{\lambda_n} + \frac{m^2 x_n^{j+1,1}}{2\lambda_n^2} + \frac{msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{a_0 sin\alpha - b_0 cos\alpha}{\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

olur. Nodal uzunluk tanımı kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{\lambda_n} + \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lambda_n^{-1} = \frac{1}{n-2} - \frac{v}{(n-2)^2\pi} + \frac{v^2 - \pi^2 c}{(n-2)^3\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

asimptotik formülü kullanılarak, (5.19) rahatlıkla elde edilir.

Tablo 5. 3. ile (5. 1), (5.14) Dirac probleminin $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, m = 1, a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1, b_1 = 1, V(x) = x}$ özel hali için birinci öz fonksiyona ait nodal noktaları gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlar klasik Sturm osilasyon teoremine benzer olup, Lemma 5. 5. deki koşullara uymaktadır.

Tablo 5. 3. (5. 1), (5.14) Dirac probleminin $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, m = 1, a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1, b_1 = 1, V(x) = x}$ özel hali için, birinci öz fonksiyona ait nodal noktalar

$x_n^{j,1}$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$j=1$	*4.97879*	*2.42879*	***1.2930***	***0.8916***	***0.6865***	***0.56009***	***0.47375***	***0.41080***	***0.36278***	***0.32490***
$j=2$	*40.5551*	*10.7422*	*3.4138*	***1.9917***	***1.4467***	***1.15135***	***0.96183***	***0.82828***	***0.72844***	***0.65068***
$j=3$	*249.133*	*43.6867*	*7.8796*	*3.5758*	***2.3725***	***1.8185***	***1.49136***	***1.2711***	***1.11083***	***0.98812***
$j=4$	*1143.42*	*156.576*	*17.84*	*6.0332*	*3.5482*	***2.58739***	***2.07231***	***1.74375***	***1.51221***	***1.3385***
$j=5$	*4170.51*	*487.135*	*39.606*	*10.013*	*5.0970*	*3.49276*	***2.71731***	***2.2517***	***1.93527***	***1.70324***
$j=6$	*12770.3*	*1335.58*	*84.900*	*16.555*	*7.1956*	*4.58045*	*3.44208*	***2.80147***	***2.38311***	***2.08397***
$j=7$	*34159.5*	*3293.21*	*174.17*	*27.265*	*10.090*	*5.91016*	*4.26606*	*3.40083*	***2.85931***	***2.48255***
$j=8$	*82115.8*	*7435.97*	*341.25*	*44.545*	*14.122*	*7.55867*	*5.21308*	*4.05895*	*3.36799*	***2.90103***
$j=9$	*181082.*	*15602.*	*639.75*	*71.896*	*19.748*	*9.62374*	*6.31209*	*4.7866*	*3.91386*	*3.34173*
$j=10$	*371956.*	*30774.1*	*1151.4*	*114.29*	*27.581*	*12.2285*	*7.59807*	*5.59637*	*4.5023*	*3.80727*

Lemma 5. 6. (5. 1) denklemi, $(0, \pi)$ aralığında $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ olmak üzere

$$u_1(0)cos\alpha + u_2(0)sin\alpha = 0,$$

$$u_1(\pi)cos\beta + u_2(\pi)sin\beta = 0, \tag{5.20}$$

sınır koşulları ile verilsin. Burada m kütlesinin pozitif olduğu kabul edilmektedir. (5.1), (5.20) probleminin tüm öz değerleri reel ve basittir. Bu öz değerler, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\lambda_n = n + \frac{v}{\pi} + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \to \infty, \tag{5.21}$$

asimptotik gösterimine sahiptir. Burada

$$v = \int_0^{\pi} V(x)dx + \beta - \alpha,$$

ve

$$c_1 = \frac{m(sin2\alpha - sin2\beta) + m^2\pi}{2\pi cos^2\left(\int_0^{\pi} V(x)dx + \beta - \alpha\right)},$$

şeklindedir (Yang ve Huang, 2010).

Tablo 5. 4. $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, m = 1, a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1, V(x) = x}$ için (5.1)-(5.20) Dirac sınır değer probleminin öz değerlerinden bazıları

$\boldsymbol{\lambda_n}$: **Öz değerler**										
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	2.59637	3.33358	4.24599	5.20219	6.17591	7.15839	8.14588	9.13649	10.1292	11.1234
	λ_{-1}	λ_{-2}	λ_{-3}	λ_{-4}	λ_{-5}	λ_{-6}	λ_{-7}	λ_{-8}	λ_{-9}	λ_{-10}
	-0.454777	-1.19199	-2.10439	-3.0606	-4.03432	-5.0168	-6.00429	-6.9949	-7.9876	-8.98176

Tablo 5. 5. $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, m = 1, a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1, b_1 = 1, V(x) = x}$ için (5.1)-(5.20) Dirac sınır değer probleminin öz değerleri

$\boldsymbol{\lambda_n}$: **Öz değerler**										
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	3.59637	4.33358	5.24599	6.20219	7.17591	8.15839	9.14588	10.1365	11.1292	12.1234
	λ_{-1}	λ_{-2}	λ_{-3}	λ_{-4}	λ_{-5}	λ_{-6}	λ_{-7}	λ_{-8}	λ_{-9}	λ_{-10}
	0.545223	-0.19199	-1.10439	-2.0606	-3.03432	-4.0168	-5.00429	-5.9949	-6.9876	-7.98176

Tablo 5.4. ve Tablo 5.5. de sırası ile $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, m = 1, a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1, V(x) = x}$ *ve* $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, m = 1, a_0 = 1, b_0 = -1, a_1 = -1, b_1 = 1, V(x) = x}$ özel halleri için (5.1)-(5.20) Dirac sınır değer probleminin (5.21) asimptotik ifadesi ile verilen öz değerlerinden bazıları verilmiştir.

(5.1) denkleminin

$$u_1(0,\lambda) = sin\alpha, \qquad u_2(0,\lambda) = -cos\alpha, \tag{5.22}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x,\lambda) \\ u_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

ve $\tau = |\varrho\lambda|$ olmak üzere ardışık yaklaşımlar metodu ile

$$u_1(x,\lambda) = sin\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx + \alpha\right) - \frac{U}{\lambda} + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right),$$

$$u_2(x,\lambda) = -cos\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx + \alpha\right) - \frac{V}{\lambda} + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda^2}\right),$$

(5.23)

elde edilir. Burada yeteri kadar büyük $|\lambda|$ lar için

$$U = -msin\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx\right)cos\alpha + \frac{m^2}{2}x\,cos\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx + \alpha\right),$$

$$V = msin\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx\right)sin\alpha + \frac{m^2}{2}x\,sin\left(\lambda x - \int_0^x V(x)dx + \alpha\right),$$

(5.24)

şeklindedir (Yang ve Huang, 2010).

Lemma 5. 7. (5.1), (5.22) probleminin çözüm fonksiyonunun birinci ve ikinci bileşen fonksiyonlarına ait nodal noktalar, $|n| \to \infty$ ve $j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_n^{j,1} = \frac{j\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \frac{\alpha}{\lambda_n} + \frac{(-1)^j msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{(-1)^j m^2 x_n^{j,1}}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

$$x_n^{j,2} = \frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_n^{j,2}} V(x)dx - \frac{\alpha}{\lambda_n} + \frac{(-1)^{j+1} msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{(-1)^{j+1} m^2 x_n^{j,2}}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

şeklindedir.

Lemma 5.7. kullanılarak; (5.1), (5.22) probleminin öz fonksiyonunun birinci bileşenine ait olan $l_n^{j,1}$ nodal uzunluğunu hesaplayalım. Benzer şekilde bu problemin öz fonksiyonunun ikinci bileşenine ait $l_n^{j,2}$ nodal uzunluğu hesaplanabilir. Lemma 5.7 den

$$x_n^{j,1} = \frac{j\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_n^{j,1}} V(x)dx - \frac{\alpha}{\lambda_n} + \frac{(-1)^j msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{(-1)^j m^2 x_n^{j,1}}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

ve

$$x_n^{j+1,1} = \frac{(j+1)\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx - \frac{\alpha}{\lambda_n} + \frac{(-1)^{j+1} msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{(-1)^{j+1} m^2 x_n^{j+1,1}}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

olmak üzere nodal uzunluk tanımı kullanılıp, gerekli işlemler yapılırsa

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + \frac{\{(-1)^{j+1} - (-1)^j\} msin2\alpha}{2\lambda_n^2} + \frac{\{(-1)^{j+1} x_n^{j+1,1} - (-1)^j x_n^{j,1}\} m^2}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

bulunur. Burada j çift (veya tek) ise

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx \pm \frac{msin2\alpha}{\lambda_n^2} \pm \frac{m^2}{2\lambda_n^2}\{x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1}\} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right), \tag{5.25}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde $l_n^{j,2}$ elde edilebilir.

Yeteri kadar büyük $|n|$ ler için Dirac operatörünün $y(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonun $i.$ bileşen fonksiyonu olan $y_i(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında tam olarak $|n|+1-i$ tane nodal noktası vardır. Örneğin (5.1), (5.22) probleminin $y_1(x,\lambda_n)$ bileşen fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında tam olarak $|n|$ tane sıfırı vardır (Yang ve Huang, 2010).

Tablo 5. 6 da (5.1), (5.22) Dirac probleminin $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=0,m=1,V(x)=x}$ özel hali için birinci öz fonksiyona ait nodal noktalar verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Lemma 5.5. deki koşulları sağlamaktadır.

Tablo 5. 6. (5.1), (5.22) Dirac probleminin $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=0,m=1,V(x)=x}$ için birinci öz fonksiyona ait nodal noktalar

$x_n^{j,1}$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$j=1$	***0.637638***	***0.47617***	***0.3696***	***0.3009***	***0.2535***	***0.2188***	***0.192359***	***0.1715***	***0.154802***	***0.1410***
$j=2$	*3.87185*	***2.11727***	***1.3845***	***1.0378***	***0.8362***	***0.7031***	***0.60797***	***0.5361***	***0.47997***	***0.4346***
$j=3$	*8.15152*	*3.99105*	***2.4487***	***1.7848***	***1.4196***	***1.1858***	***1.02153***	***0.8989***	***0.80352***	***0.7269***
$j=4$	*20.5593*	*8.17066*	*4.2866*	***2.8688***	***2.1786***	***1.7716***	***1.50095***	***1.3063***	***1.15887***	***1.0426***
$j=5$	*32.9355*	*12.1516*	*5.9838*	*3.8648*	***2.8811***	***2.3197***	***1.95418***	***1.6949***	***1.50021***	***1.3477***
$j=6$	*65.1207*	*21.1442*	*9.1882*	*5.4668*	*3.8823*	***3.0365***	***2.51225***	***2.1533***	***1.89046***	***1.6885***
$j=7$	*92.586*	*28.7281*	*11.875*	*6.8235*	*4.7471*	*3.6694*	***3.01482***	***2.5730***	***2.25267***	***2.0082***
$j=8$	*159.027*	*45.482*	*17.113*	*9.1439*	*6.0654*	*4.5501*	*3.66768*	***3.091***	***2.68282***	***2.3770***
$j=9$	*210.578*	*58.513*	*21.210*	*10.988*	*7.1402*	*5.2887*	*4.22994*	*3.5474*	***3.06912***	***2.7134***
$j=10$	*329.63*	*86.6501*	*29.274*	*14.257*	*8.8595*	*6.3693*	*4.99502*	*4.1342*	*3.54447*	***3.1135***

5.2. Dirac Operatörü için Ters Nodal Problemin Kararlılığı

Lemma 5. 8. $V\in L_1[0,\pi]$ olsun. Bu durumda $j=j_n(x)$ olmak üzere hemen hemen her $x\in[0,\pi]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})}V(t)dt=V(x),$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})}\cos(2\lambda_n\pi t)V(t)dt=0,$$

şeklindedir. Burada λ_n özdeğerlerinin

$$\lambda_n=\begin{cases}n-2, & (5.1),(5.14)\text{ problemi için}\\ n, & (5.1),(5.22)\text{ problemi için}\end{cases}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir.

İspat: Hemen hemen her $x \in [0,\pi]$ için $j = j_n(x)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\pi} \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} V(t)dt = V(x),$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\pi} \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} \cos(2s_n t)V(t)dt = 0,$$

olduğu bilinmektedir (Law, Shen ve Yang, 1999). Diğer taraftan her s_n için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda_n \pi} = 1$$

şeklindedir. Bu yukarıda dikkate alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\pi} \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} V(t)dt = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} V(t)dt. \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda_n \pi} = V(x),$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\pi} \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} \cos(2s_n t)V(t)dt = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_{x_n^{j,1}(x_n^{j,2})}^{x_n^{j+1,1}(x_n^{j+1,2})} \cos(2\lambda_n \pi t)\, V(t)dt. \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda_n \pi} = 0,$$

elde edilir. Burada $x_k^{(n)}$ ile elde edilen $l_k^{(n)}$ nodal uzunluğuna benzer şekilde, $X_k^{(n)}$ ile elde edilen $L_k^{(n)}$ grid uzunluğu kullanılacaktır.

Teorem 5. 1. $V \in L_1[0,\pi]$, Dirac operatörünün potansiyel fonksiyonu olsun. Bu durumda F_n ler

(a) (5.1), (5.14) problemi için

$$F_n = (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]L_k^{(n)} - \pi\right\}$$

(b) (5.1), (5.22) problemi için

$$F_n = n\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n \pm \frac{m^2}{2n}\right]L_k^{(n)} \pm \frac{m^2}{n}X_k^{(n)} - \pi\right\}$$

şeklindedir. F_n ler L_1 deki yakınsaklığa göre V fonksiyonuna yakınsaktır ve bu yakınsaklık V fonksiyonunun tüm sürekli noktaları için sağlanır.

İspat:

(a) (5.18) den

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{\lambda_n} + \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{\lambda_n}{\pi} l_n^{j,1} - 1 - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2\lambda_n \pi} = \frac{1}{\pi} \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right)$$

ve

$$\lambda_n \left[l_n^{j,1} \left(\lambda_n - \frac{m^2}{2\lambda_n} \right) - \pi \right] = \lambda_n \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifadenin sol tarafında öz değerlerin asimptotik formülleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \left[l_n^{j,1} \left(\lambda_n - \frac{m^2}{2\lambda_n} \right) - \pi \right] \\
&\quad = \left(n - 2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left[l_n^{j,1} \left(n - 2 + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{m^2}{2(n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right)} \right) - \pi \right] \\
&\quad = \left(n - 2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left[l_n^{j,1} \left(n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \pi \right] \\
&\quad = (n-2) \left[l_n^{j,1} \left(n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)} \right) - \pi \right] + \frac{(n-2)}{\pi} l_n^{j,1} O\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) \\
&\quad = (n-2) \left[l_n^{j,1} \left(n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)} \right) - \pi \right] + o(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 5.1. *(a)* nın ispatını tamamlamak için Teorem 5.2. yi göstermek yeterlidir.

(b) İspat benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca Teorem 5.1. *(b)* nin ispatını tamamlamak için Teorem 5.3. ü göstermek yeterlidir.

Teorem 5. 2. $j = j_n(x) = maks\{k: 0 \le x_n^{k,1} \le x\}$ olmak üzere $V \in L_1[0,\pi]$ için (5.1) denkleminin (5.14) sınır şartını sağlayan problem ele alınsın. Hemen hemen her $x \in (0,\pi)$ için $L_1[0,\pi]$ uzayında

$$V(x) = \lim_{n\to\infty}\left[l_n^{j,1}\lambda_n - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2\lambda_n} - \pi\right]\lambda_n, \tag{5.26}$$

şeklindedir.

İspat : (5.18) dikkate alınırsa

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{\lambda_n} + \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

ve

$$l_n^{j,1} - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx}{\lambda_n} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafı $\frac{\lambda_n}{\pi}$ ile çarpılırsa

$$\left\{l_n^{j,1} - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2}\right\}\frac{\lambda_n}{\pi} = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right),$$

ve

$$\left\{\left[l_n^{j,1} - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2}\right]\frac{\lambda_n}{\pi} - 1\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right),$$

elde edilir. Son ifadenin her iki tarafı $\lambda_n\pi$ ile çarpılırsa

$$\left\{\left[l_n^{j,1} - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2}\right]\lambda_n - \pi\right\}\lambda_n = \lambda_n\int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

olur. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[l_n^{j,1} - \frac{m^2 l_n^{j,1}}{2{\lambda_n}^2} \right] \lambda_n - \pi \right\} \lambda_n,$$

bulunur.

Teorem 5. 3. $j = j_n(x) = maks\{j: 0 \le x_n^{j,1} \le x\}$ olmak üzere $V \in L_1[0,\pi]$ için (5.1) denkleminin (5.22) başlangıç şartını sağlayan problemi ele alınsın. Hemen hemen her $x \in (0,\pi)$ için $L_1[0,\pi]$ uzayında

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \left[l_n^{j,1}\lambda_n \pm \frac{m^2(x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1})}{2\lambda_n} - \pi \right] \lambda_n \pm msin2\alpha, \tag{5.27}$$

şeklindedir.

İspat : (5.25) den

$$l_n^{j,1} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx \pm \frac{msin2\alpha}{\lambda_n^2} \pm \frac{m^2}{2\lambda_n^2}\{x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1}\} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

olmak üzere bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{\lambda_n}{\pi}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\lambda_n}{\pi}\, l_n^{j,1} - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx \pm \frac{msin2\alpha}{\lambda_n\pi} \pm \frac{m^2}{2\lambda_n\pi}\{x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1}\} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right),$$

ve bu ifade de her iki taraf $\lambda_n\pi$ ile çarpılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_n \left\{ \lambda_n l_n^{j,1} \pm \frac{msin2\alpha}{\lambda_n} \pm \frac{m^2}{2\lambda_n}\left[x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1}\right] - \pi \right\} = \lambda_n \int_{x_n^{j,1}}^{x_n^{j+1,1}} V(x)dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

olur. Her iki tarafın $n \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \left\{ \lambda_n\, l_n^{j,1} \pm \frac{msin2\alpha}{\lambda_n} \pm \frac{m^2}{2\lambda_n}\left[x_n^{j+1,1} + x_n^{j,1}\right] - \pi \right\},$$

bulunur.

Tanım 5. 1. $\mathbb{N}' = \mathbb{N} - \{1\}$ olsun.

i)

$\Omega_{Dir} = \{V \in L_1[0,\pi]\}$

$\Sigma_{Dir} : X = \{X_k^{(n)} : k = 1,2,\dots,n; n \in \mathbb{N}'; 0 < X_1^{(n)} < X_2^{(n)} < \cdots < X_{n-1}^{(n)} < \pi\}$

şeklindeki tüm çift indisli geçerli dizilerin uzayı olsun. Burada Ω_{Dir}, tüm Dirac operatörlerinin uzayı, Σ_{Dir} ise buna bağlı tüm geçerli dizilerin uzayıdır.

ii) $X \in \Sigma_{Dir}$ olmak üzere $X = \{X_k^{(n)}\}$, $L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}$, $I_k^{(n)} = (X_k^{(n)}, X_{k+1}^{(n)})$ şeklindedir.

Aşağıdaki durumlardan biri sağlanıyorsa X, $V \in L_1[0,\pi]$ potansiyel fonksiyonuna quasi nodaldır denir. Burada iki durum söz konusudur.

1.Durum : (5.1), (5.14) problemi için X aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir.

$$X_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right), k = 1,2,\dots,n.$$

Ayrıca L_1 uzayında

$$F_n = (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]L_k^{(n)} - \pi\right\},$$

(5.28)

dizisi, V potansiyel fonksiyonuna yakınsaktır.

2.Durum : (5.1), (5.22) problemi için X aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir.

$$X_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), k = 1,2,\dots,n.$$

Ayrıca L_1 uzayında

$$F_n = n\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n \pm \frac{m^2}{2n}\right]L_k^{(n)} \pm \frac{m^2}{n}X_k^{(n)} - \pi\right\},$$

(5.29)

dizisi, V potansiyel fonksiyonuna yakınsaktır.

Lemma 5. 9.

$$\Lambda = \{X \in \Sigma_{Dir} : X, V \in \Omega_{Dir} \text{ potansiyeline quasi nodaldır}\}$$

olarak tanımlansın. $X, \bar{X} \in \Lambda$ olmak üzere

(a)

X birinci duruma ait ise

$$L_k^{(n)} = \frac{\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right), k = 1,2,\dots,n,$$

X ikinci duruma ait ise

$$L_k^{(n)} = \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), k = 1,2,\dots,n,$$

şeklindedir.

(b) $\delta_{n,k} = \left|X_k^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)}\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ şeklindedir.

(c) $\forall x \in (0,\pi)$ için $J_n(x) = maks\{k : X_k^{(n)} \leq x\}$ olacak şekilde tanımlayalım. Öyle ki $k = J_n(x)$ olması için gerek ve yeter şart $x \in [X_J^{(n)}, X_{J+1}^{(n)}]$ olmasıdır. Böylece yeteri derece de büyük n ler için

$$|J_n(x) - \bar{J}_n(x)| \leq 1,$$

şeklindedir.

İspat :

(a) X birinci duruma ait ise nodal uzunluk tanımından

$$L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)} = \frac{(k+1)\pi}{n-2} - \frac{k\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

olur. Benzer şekilde X ikinci duruma ait ise nodal uzunluk tanımından

$$L_k^{(n)} = X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)} = \frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{k\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

elde edilir.

(b) X birinci duruma ait olsun. Bu durumda

$$\delta_{n,k} = \left|X_k^{(n)} - \bar{X}_k^{(n)}\right| = \left|\frac{k\pi}{n-2} - \frac{k\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

olur. İkinci durum için benzer durum söz konusudur.

(c) Nodal nokta tanımından birinci durum için

$$X_J^{(n)} \le x \le X_{J+1}^{(n)} \Longrightarrow \frac{J\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \le x \le \frac{(J+1)\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ve

$$\bar{X}_{\bar{J}}^{(n)} \le x \le \bar{X}_{\bar{J}+1}^{(n)} \Longrightarrow \frac{\bar{J}\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \le x \le \frac{(\bar{J}+1)\pi}{n-2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

olur. Buradan ise

$$\bar{J} \le J + 1 \text{ ve } J \le \bar{J} + 1 \Longrightarrow -1 \le J - \bar{J} \le 1 \Longrightarrow |J - \bar{J}| \le 1,$$

elde edilir.

Tanım 5. 2. $X, \bar{X} \in \Lambda$ olsun. Bu durumda

$$S_n(X, \bar{X}) = \pi\left[(n-2) - \frac{m^2}{2(n-2)}\right]\sum_{k=1}^{n-1}\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right|, \tag{5.30}$$

ve

$$d_0(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(X, \bar{X}), \quad d_\Lambda(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X, \bar{X})}{1 + S_n(X, \bar{X})},$$

şeklinde alınsın. Bu metrik Teorem 5.2 deki $\|V - \bar{V}\|_1$ normu kullanılarak elde edilir. Bu tanım ilk olarak Law ve Tsay tarafından kullanılmıştır (Law ve Tsay, 2001). Burada $f(x) = \frac{x}{1+x}$ fonksiyonu monoton olduğundan

$$d_\Lambda(X, \bar{X}) = \frac{d_0(X, \bar{X})}{1 + d_0(X, \bar{X})} \in [0, \pi],$$

olur ki bu da $d_0(X, \bar{X}) = \infty$ olması halinde $d_\Lambda(X, \bar{X}) = 1$ olması anlamına gelir. Ayrıca yukarıdan

$$d_0(X, \bar{X}) = \frac{d_\Lambda(X, \bar{X})}{1 - d_\Lambda(X, \bar{X})},$$

şeklindedir.

Önerme 5. 1. $X, \bar{X} \in \Lambda$ olsun.

(a) d_Λ, Λ üzerinde bir pseudo metriktir.

(b) X ve $\bar{X}$ farklı durumlara ait ise, $d_\Lambda(X, \bar{X}) = 1$ olur.

İspat

(a) $\forall X, \bar{X} \in \Lambda$ için d_Λ nin Λ üzerinde bir pseudo metrik olduğu gösterilecektir.
$X, \bar{X} \in \Lambda$ ve $X = \bar{X}$ için $d_\Lambda(X, \bar{X}) = 0$ olduğu açıktır.

$$d_\Lambda(X, \bar{X}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(X, \bar{X})}{1 + S_n(X, \bar{X})} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\pi\left[(n-2) - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right|}{1 + \pi\left[(n-2) - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right|}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\pi\left[(n-2) - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \left| \bar{L}_k^{(n)} - L_k^{(n)} \right|}{1 + \pi\left[(n-2) - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \left| \bar{L}_k^{(n)} - L_k^{(n)} \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n(\bar{X}, X)}{1 + S_n(\bar{X}, X)}$$

$$= d_\Lambda(\bar{X}, X)$$

olur ki bu simetrik olma özelliğinin sağlandığını gösterir.

Üçgen eşitsizliğini göstermek için $X, Y, \bar{X} \in \Lambda$ olmak üzere

$$\frac{S_n(X, \bar{X})}{1 + S_n(X, \bar{X})} \leq \frac{S_n(X, Y)}{1 + S_n(X, Y)} + \frac{S_n(Y, \bar{X})}{1 + S_n(Y, \bar{X})} \tag{5.31}$$

veya buna denk olarak

$$S_n(X, Y) + S_n(Y, \bar{X}) + 2S_n(X, Y)S_n(Y, \bar{X}) + S_n(X, Y)S_n(Y, \bar{X})S_n(X, \bar{X}) - S_n(X, \bar{X}) \geq 0 \tag{5.32}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Üçgen eşitsizliğinden

$$S_n(X, Y) + S_n(Y, \bar{X}) - S_n(X, \bar{X}) \geq 0$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan $\forall X, \bar{X} \in \Lambda$ için $S_n(X, \bar{X}) \geq 0$ olduğu bilinmektedir. Dolayısı ile (5.32) ve (5.31) sağlanmış olur. Bu d_Λ nın Λ üzerinde bir pseudo metrik olduğunu gösterir.

Not: Burada

$$\left[(n-2)-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\geq 0 \Longrightarrow n-2\geq \frac{m^2}{2(n-2)} \Longrightarrow n\geq \frac{m}{\sqrt{2}}+2$$

şeklindedir.

(b) X birinci, $\bar{X}$ ise ikinci duruma ait olsun.

$$L_k^{(n)}=\frac{\pi}{n-2}+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \bar{L}_k^{(n)}=\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$\left|L_k^{(n)}-\bar{L}_k^{(n)}\right|=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Buradan

$$S_n(X,\bar{X})=\pi\left[(n-2)-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\sum_{k=1}^{n-1}\left|L_k^{(n)}-\bar{L}_k^{(n)}\right|=\pi\left[(n-2)-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\sum_{k=1}^{n-1}O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\pi(n-2)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. $n\to\infty$ iken $S_n(X,\bar{X})$ sonsuza yaklaşır. Bu nedenle $d_\Lambda(X,\bar{X})=1$ olur.

Teorem 5. 4. $(\Omega_{Dir},\|.\|_1)$ metrik uzayı ile $(\Lambda/\sim,d_\Lambda)$ metrik uzayları homeomorfik uzaylardır. Burada $\sim$, Λ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Burada $d_\Lambda(X,\bar{X})<1$ olması halinde

$$\|V-\bar{V}\|_1=\frac{d_\Lambda(X,\bar{X})}{1-d_\Lambda(X,\bar{X})},$$

şeklindedir.

İspat: Önerme 5. 1. gereğince sadece X ve $\bar{X}$ aynı durumlara ait olduğu zaman ispat yapılacaktır. Genelliği bozmadan kabul edelim ki X ve $\bar{X}$ birinci duruma ait olsunlar. Bu durumda

$$\|V-\bar{V}\|_1=d_0(X,\bar{X}),$$

olduğunu göstereceğiz. (5. 28) gereği; L_1 uzayında F_n dizisi V fonksiyonuna, $\bar{F}_n$ dizisi de $\bar{V}$ fonksiyonuna yakınsaktır. Bu durumda $n\to\infty$ iken

$$F_n = (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]L_k^{(n)} - \pi\right\} \to V(x)$$

ve

$$\bar{F}_n = (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\bar{L}_k^{(n)} - \pi\right\} \to \bar{V}(x)$$

olur. V ve $\bar{V}$ fonksiyonları için, L_1 uzayındaki norm tanımı kullanılırsa

$$\|V(x) - \bar{V}(x)\|_1 = \int_0^{\pi} |V(x) - \bar{V}(x)| dx$$

olmak üzere

$$\|V - \bar{V}\| = \int_0^{\pi} \left| (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]L_k^{(n)} - \pi\right\} \right.$$
$$\left. - (n-2).\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\bar{L}_k^{(n)} - \pi\right\}\right| dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left| (n-2)\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]L_k^{(n)} - (n-2)\pi\right\} \right.$$
$$\left. - (n-2).\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\bar{L}_k^{(n)} + (n-2)\pi\right\}\right| dx$$

$$= (n-2)\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left|L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)}\right| dx + o(1)$$

$$= (n-2)\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\int_0^{\pi}\left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx + o(1)$$

olur. Burada integral içerisindeki ifadeye $\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}$ eklenip çıkarılırsa ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\|V - \bar{V}\| \le (n-2).\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\int_0^{\pi}\left|L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx$$
$$+ \ (n-2).\left[n-2-\frac{m^2}{2(n-2)}\right]\int_0^{\pi}\left|\bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)}\right| dx$$

(5.33)

elde edilir. Burada

$$\int_0^{\pi} \left| \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{\bar{J}_n(x)}^{(n)} \right| dx = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ve

$$\int_0^{\pi} \left| L_{J_n(x)}^{(n)} - \bar{L}_{J_n(x)}^{(n)} \right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| \left| L_k^{(n)} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| \left| \frac{\pi}{n-2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \frac{\pi}{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. Bu ifadeler (5.33) de yerine yazılırsa

$$\|V - \bar{V}\| \leq (n-2).\left[n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$+ (n-2).\left[n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)}\right]\left[\frac{\pi}{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

ve

$$\|V - \bar{V}\|_1 \leq \pi \left[n - 2 - \frac{m^2}{2(n-2)}\right] \sum_{k=1}^{n-1} \left| L_k^{(n)} - \bar{L}_k^{(n)} \right| + o(1)$$

elde edilir. Her iki tarafın $n \to \infty$ iken limiti alınırsa, tanım 5.2. gereğince

$$\|V - \bar{V}\|_1 \leq d_0(X, \bar{X}) + o(1) \tag{5.34}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|V - \bar{V}\|_1 \geq d_0(X, \bar{X}) + o(1) \tag{5.35}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece (5.34) ve (5.35) eşitsizliklerinden

$$\|V - \bar{V}\|_1 = d_0(X, \bar{X})$$

bulunur.

6. SONUÇ

2001 yılında Law ve Tsay, mutlak bir metrik altında, tüm (q, α, β) operatörlerinin uzayının bir denklik bağıntısı ile verilen tüm asimptotik olarak denk nodal dizilerin bölüm uzayına homeomorf olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca nodal dönüşümün, ilgili metrikler potansiyel fonksiyonun türevleri ile büyütüldüğü zaman bile halen daha bir homeomorfizm olduğunu ispatlamışlardır. Bu sayede Law ve Tsay, Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problemin kararlılığını ve dolayısıyla iyi tanımlı olduğunu göstermişlerdir. Burada Law ve Tsay'ın çalışması esas alınmış ve bu çalışma ikinci bölümde detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise difüzyon denkleminin bazı fiziksel özellikleri incelenmiş ve Klein-Gordon kısmi türevli diferensiyel denklemi üç dönüşüm kullanılarak çözülmüş ve bu denklem difüzyon denklemine indirgenmiştir. Ayrıca bu bölümde, difüzyon sınır değer probleminin bazı spektral özellikleri irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde difüzyon operatörü için ters nodal problemin kararlılığı çalışılmıştır. Difüzyon operatörü için nodal dönüşümün, ilgili metrikler difüzyon denklemindeki potansiyel fonksiyonun türevleri ile büyütüldüğü zaman bile halen daha bir homeomorfizm olduğu görülmüştür. Fakat buradaki yüksek mertebeden kararlılık bir lokal kararlılıktır. Çünkü belirli bir şart altında kararlılık incelenmiştir.

Beşinci bölümde Dirac denklem sistemi farklı sınır şartları ile ele alınmış, bu denklem sistemindeki potansiyel fonksiyon nodal noktaların bilgisi kullanılarak elde edilmiştir. Buna ilaveten Dirac operatörü için ters nodal problemin kararlılığı çalışılmıştır.

Kararlılık ispatlarında kullanılan çeşitli metodlar vardır. Burada sadece bunlardan biri kullanılmıştır. Diğer metodlarla, farklı operatörler için ters nodal problemin kararlılığı farklı şekillerde incelenebilir. Sturm-Liouville, difüzyon ve Dirac operatörleri için ters nodal problemlerinin kararlılığı incelenirken kurulan metriklerin çeşitli topolojik özellikleri incelenip, önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Agranovich, Z. S. and Marchenko, V. A., 1964. The inverse problem of scattering theory: Gordon and Breach.

Ambartsumyan, V. A., 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, *Zeitschrift für Physik*, **53,** 690-695.

Annaby, M. H. and Tharwat, M. M., 2011. On sampling and Dirac systems with eigenparameter in the boundary conditions, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **36,** 1-2 291-317.

Asmar, N. H., 2000. Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems, Pearson Education.

Balcı, M., 2011. Reel Analiz, Balcı Yayınları.

Bayraktar, M., 2006. Fonksiyonel Analiz, Fersa Matbaacılık.

Binding, P. A. and Watson, W. A., 2009. An inverse nodal problem for two parameter Sturm-Liouville systems, *Inverse Problems*, **25,** 085005.

Borg, G., 1946. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, *Acta Mathematica*, **78,** 1-96.

Browne, P. J. and Sleeman, B. D., 1996. Inverse nodal problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, *Inverse Problems*, **12,** 377-381.

Browne, P. J. and Sleeman, B. D., 1997. A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems, *Inverse Problems*, **13**, 1453-1462.

Buterin, S. A. and Shieh, C. T., 2009. Inverse nodal problem for differential pencils, *Applied Mathematical Letters*, **22,** 1240-1247.

Chadan, K., Colton, D., Paivarinta, L. and Rundell, W., 1997. An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems, *Society for Industrial and Applied Mathematics***.**

Chen, X. F., Cheng, Y. H. and Law, C. K., 2011. Reconstruction potentials from zeros of one eigenfunction, *Transactions of the American Mathematical Society*, **363,** 9 4831-4851.

Chen, Y. T., Cheng, Y. H., Law, C. K. and Tsay, J., 2002. L^1 convergence of the reconstruction formula for the potential function, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **130,** 8 2319–2324.

Cheng, Y. H., 2005. Inverse Problems for Various Sturm-Liouville operators, *Doctor of Philosophy*, National Sun Yat Sen University.

Cheng, Y. H. and Law, C. K., 2006. The inverse nodal Problem for Hill's equation, *Inverse Problems*, **22,** 891-901.

Choudhary, B. and Nanda, S., 1990. Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc.

Currie, S. and Watson, B. A., 2007. Inverse Nodal Problems for Sturm-Liouville equations on graphs, *Inverse Problems*, **23,** 2029-2040.

Çakır, A., 2007. Kompleks potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için ters saçılma problemi ve bazı uygulamaları, *Yüksek Lisans Tezi*, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.

Faddeyev, L. D., 1963. The inverse problem in the quantum theory of scattering, *Journal of Mathematical Physics,* **4,** 72.

Freiling, G. and Yurko, V.A., 2001. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, *Nova Science Publishers*.

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M., 1967. A method for solving Korteweg de Vries equation, *Physical Rewiev Letters,* **19,** 1095-1097.

Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh., 1981. Determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademii Nauk Azerbaijan SSSR,* **37,** 2 19-23.

Gel'fand, I. M. and Dikii, L. A., 1975. Asymptotic behaviour of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-De Vries equation, *Russian Mathematical Surveys*, **30**, 77-113.

Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M., 1951. On the determination of a differential equation from its spectral function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, **15,** 4 309-360; 1955. translated in *American Mathematical Society Translate*, **1,** 253.

Guseinov, G. Sh., 1985. On spectral Analysis of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Soviet Mathematics Doklady*, **32,** 3 859-862.

Guseinov, I. M. and Nabiev, I. M., 2000. A class of Inverse problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Differential Equations*, **36,** 3 471-473.

Guseinov, I. M. and Nabiev, I. M., 2007. The inverse spectral problem for pencils of differential operators, *Sbornik Mathematics*, **198,** 11 1579-1598.

Hald, O. H., 1978. The inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials*, Acta Mathematica,* **141**, 262-291.

Hald, O. H. and McLaughlin, J. R., 1989. Solutions of inverse nodal problems, *Inverse problems,* **5,** 307-347.

Hald, O. H. and McLaughlin, J. R., 1998. Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes, *Inverse problems*, **14,** 2 245-273.

Hoschtadt, H., 1973. The inverse Sturm-Liouville Problem, *Communications Pure and Applied Mathematics*, **26,** 715-729.

Hoschtadt, H., 1975. Well-posed inverse spectral problems, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **72**, 7 2496-2497.

Hoschtadt, H. and Lieberman, B., 1978. An Inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **34,** 4 676-680.

Jaulent, M. and Jean, C., 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*, **28,** 3 177-220.

Joa, I. and Minkin, A., 1997. Eigenfunction estimate for a Dirac operator, *Acta Mathematica Hungarica,* **76,** 4 337-349.

Karaman, Ö., 2004. On the solutions of the quadratic pencil of a Schrodinger equation, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **35,** 7 889-893.

Kerimov, N. B., 2002. A boundary value problem for Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions, *Differential Equations,* **38,** 2 164-174. (Translated from Differentsial'nye uravneniya, 2002, 2 155-164).

Keskin, B. and Özkan, A. S., 2011. Inverse spectral problems for Dirac operator with eigenvalue dependent and jump conditions, *Acta Mathematica Hungarica*, **130**, 4 309-320.

Kirsh, A., 1996. An introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, *Springer*.

Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., 1961. Elements of the Theory of functions and Functional Analysis Volume 2 Measure, The Lebesque integral, Hilbert Space, Graylock Press, Albany N. Y.

Koyunbakan, H., 2006. A new inverse problem for Diffusion operator, *Applied Mathematics Letters,* **19,** 10 995-999.

Koyunbakan, H., 2009. Reconstruction of potential function for diffusion operator, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **30,** (1-2) 1-10.

Koyunbakan, H., 2011. Inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **378,** 549-554.

Koyunbakan, H. and Panakhov, E. S., 2007. Half Inverse problem for diffusion operators on the finite interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **326,** 1024-1030.

Koyunbakan, H. and Yılmaz, E., 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the Diffusion operator, *Verlag der Zeitschrift für Naturforch*, **63**a, 127-130.

Kurshova, Y. V. and Shieh, C. T., 2010. An inverse nodal problem for integro-differential operators, *Journal of Inverse and III Posed Problems*, **18,** 357-369.

Law, C. K., Shen, C. L. and Yang, C. F., 1999. The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems*, **15,** 1 253-263 (Erratum 2001, **17,** 361-364).

Law, C. K. and Tsay, J., 2001. On the well-posedness of the inverse nodal problem, *Inverse Problems*, **17,** 5 1493-1512.

Law, C. K. and Yang, C. F., 1998. Reconstruction the potential function and its derivatives using nodal data, *Inverse Problems*, **14,** 299-312.

Levinson, N., 1949. The Inverse Sturm-Liouville Problem, *Mat. Tideskr. B.,* **25,** 25-30.

Levitan, B. M., 1964. Determination of a Sturm-Liouville differential equation in terms of the two spectra, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, **28,** 1 63-78.

Levitan, B. M., 1978. On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya,* **42,** 1 185-199.

Levitan, B. M. and Gasymov, M. G., 1964. The determination of a differential equation by two of its spectra, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **19,** 2 3-63.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S., 1975. Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S., 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators (Russian), *Nauka, Moscow*; English Translate, 1991. Kluwer, Dordrecht.

Lukkassen, D., 2004. A short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for engineering students.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J., 1968. Elements of Functional Analysis, Gordon and Breach, Science Publishers.

Maksudov, F. G. and Guseinov, G. Sh., 1987. On Solution of the inverse scattering problem for a quadratic pencil of one dimensional Schrödinger operators on the whole axis, *Soviet Mathematics Doklady*, **34**, 34-38.

Marchenko, V. A., 1952. Some problems in the theory of one dimensional linear differential operators of second order, *1. Trudy Mosk. Mat. Obshch.* **1,** 327-420.

Marchenko, V. A. and Maslov, K. V., 1970. Stability of the problem of recovering the Sturm-Liouville operator from the spectral function, *Mathematics of the USSR Sbornik*, **81**, 123 475-502.

McLaughlin, J. R., 1986. Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, *SIAM Review,* **28**, 53-72.

McLaughlin, J. R., 1988a. Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness result, *Journal of Differential Equations*, **73,** 2 354-362.

McLaughlin, J. R., 1988b. Stability theorems for two inverse spectral problems, *Inverse Problems*, **4**, 529-540.

McLaughlin, J. R. and Hald, O. H., 1995. A formula for finding a potential from nodal lines, *American Mathematical Society*, **32**, 2 241-247.

McLaughlin, J. R. and Rundell, W., 1987. A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem, *Journal of Mathematical Physics*, **28,** 1471-1472.

Moses, H. E., 1956. Calculation of the scattering potential from reflection coefficients, *Physical Review,* **102,** 2 557-559.

Myint-U, T. and Debnath L., 2006. Linear partial differential equations for scientists and engineers, Birkhauser, Boston.

Nabiev, A. A., 2008. On the solutions of the quadratic pencil of the Sturm-Liouville equation with steplike potential, *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, **29,** 1 47-56.

Nabiev, I. M., 2000. Multiplicities and relation position of eigenvalues of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Mathematical Notes*, **67,** 3 369-381.

Nabiev, I. M., 2003. On reconstruction of Dirac operator on the segment, *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, 97-102.

Nabiev, I. M., 2007, The inverse quasiperiodic problem for Diffusion operator, *Doklady Mathematics*, **76,** 1 527-529.

Njue, J. N., 2003. Nodal Point data for inverse Sturm-Liouville Problems, *Master of Science*, Iowa State University.

Öğün, A., 2008. Painleve analizi ve Backlund dönüşümü yardımı ile lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin incelenmesi, *Doktora tezi*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Özbek, H. and Feyiz, S. D., 2010. Kuantum Mekaniğine giriş; Introduction to Quantum Mechanics, Griffiths, D.J., Nobel Yayınları.

Panakhov, E. S., Yılmaz, E. and Koyunbakan, H., 2010. Inverse nodal Problem for Dirac Operator, *World Applied Science Journal,* **11,** 8 906-911.

Povzner, A. Y., 1948. On differential equations of Sturm-Liouville type on the half axis, *Sbornik Mathematics*, **23,** 1 3-52.

Pöschel, J. and Trubowitz, E., 1987. Inverse Spectral Theory, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc, Boston, MA.

Prats F., and Toll, J. S., 1959. Construction of the Dirac equation central potential from phase shifts and bound states, *Physical Review,* **113,** 1 363-370.

Preiss, B. R., 1999. Data Structures and Algorithms with object – Oriented Design Patterns in Java, John-Wiley and Sons.

Royden, H. L., 1988. Real Analysis Prentice Hall 3rd edition, Macmillan.

Rundell, W. and Sacks, P. E., 1992. The reconstruction of Sturm-Liouville operators, *Inverse Problems*, **8**, 457-482.

Sharma, L. K., Luhanga, P. V. and Chimidza, S., 2011. Potentials for the Klein-Gordon and Dirac equations, *Chiang Mai Journal of Science,* **38,** 4 514-526.

Shen, C. L., 1988. On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **19,** 1419-1424.

Soykan, Y., 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Şuhubi, E. S., 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

Uluçay, C., 1978. Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, Türkiye Cumhuriyeti Karadeniz Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Trabzon.

URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation, *Büyük O gösterimi*. 14 ocak 2012.

URL-2, http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem, *Well-posed Problem*, 20 Aralık 2011.

URL-3, http://tr.wikipedia.org/wiki/Max_Planck, *Max Planck*, 13 Kasım 2011.

URL-4, http://www.math.osu.edu/~fowler.291/teaching/handouts/ibl-analysis/little-oh.pdf, *Little o Notation*, 11 Mart 2012.

URL-5, http://www.math.uiuc.edu/~hildebr/595ama/ama-ch2.pdf, *Asymptotic Notations*, 9 Eylül 2012.

URL-6, http://tr.wikipedia.org/wiki/Homeomorfizma, *Homeomorfizm*, 14 Ekim 2012.

Wang, W. C., Cheng, Y. H. and Lian, W. C., 2011. Inverse nodal Problems for the p-Laplacian with eigenparameter dependent boundary conditions, *Mathematical and Computer modelling*, **54,** 11-12 2718-2724.

Watson, B. A., 1999. Inverse spectral problems for weighted Dirac systems, *Inverse Problems*, **15,** 793-805.

Wazwaz, A., 2002. Partial differential equations methods and applications, Taylor and Francis.

Yang, C. F., 2010a. Inverse Nodal Problem for a Class of Nonlocal Sturm-Liouville operator, *Mathematical Modelling and Analysis*, **15,** 3 383-392.

Yang, C. F., 2010b. Reconstruction of the Diffusion operator from nodal data, *Verlag der Zeitschrift für Naturforch,* **65**a, 100-106.

Yang, C. F. and Huang Z. Y., 2010. Reconstruction of the Dirac operator from nodal data, *Integral Equations and Operator Theory*, **66,** 4 539-551.

Yang, C. F. and Pvavorchik, V. N., 2011. Inverse nodal problem for Dirac system with spectral parameter in boundary conditions, *Complex Analysis and Operator Theory.*

Yang, C. F. and Yang, X. P., 2010. Inverse Nodal Problems for differential pencils on a star shaped graph, *Inverse Problems*, **26,** 8 085008.

Yang, C. F. and Yang, X. P., 2011. Inverse nodal Problems for the Sturm-Liouville equation with polynomially dependent on the eigenparameter, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **19,** 7 951-961.

Yang, C. F. and Zettl, A., 2012. Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16**, 5 1829-1846.

Yang, X. F., 1997. A Solution of the inverse nodal problem, *Inverse Problems*, **13,** 1 203-213.

Yang, X. F., 2001. A new inverse nodal problem, *Journal of Differential Equations*, **169,** 2 633-653.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2007 yılı ekim ayında Fen Bilimleri Enstitüsünün açtığı araştırma görevliliği kadrosunu kazandım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktoraya başladım. Halen daha Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.