İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASİFLİĞE DAYALI KONTROL TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Ertan BALABAN

Anabilim Dalı : ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASİFLİĞE DAYALI KONTROL TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Ertan BALABAN
504021127

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Leyla GÖREN
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Hakan TEMELTAŞ
Doç.Dr. Ata MUĞAN

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Bu çalışmamı yüksek lisans eğitimim boyunca beni sürekli destekleyen değerli arkadaşım Yük. Müh. Ulaş AŞIK'a ithaf etmek isterim.

Öncelikle, tez çalışmam sırasında bilgisi ve tecrübeleri ile benden yardımlarını esirgemeyen, araştırmalarımı yönlendiren, azmi ile bana örnek olan değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Leyla GÖREN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezin yazılmasında, düzenlenmesinde, eleştirel bir gözle katkı sağlayan Yük.Müh. Çağrı TEMİZYÜREK'e içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2005 Ertan BALABAN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ..... **v**

ŞEKİL LİSTESİ ..... **vi**

SEMBOL LİSTESİ ..... **vii**

ÖZET ..... **viii**

SUMMARY ..... **ix**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Kontrol Mühendisliği'nden Matematiksel Kontrol Teorisine Geçişin Kısa Tarihçesi 1

1.2 Euler-Lagrange Sistemleri 2

1.3 Pasiflik 2

1.4.Pasifliğe Dayalı Kontrol 4

2 KLASİK MEKANİK VE EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ **5**

2.1 Bir Maddesel Noktanın Mekaniği 5

2.1.1 Doğrusal Momentumun 5

2.1.2 Bir Maddesel Noktanın Doğrusal Momentumu İçin Korunum Teoremi 6

2.1.3 İş ve Enerji 6

2.1.4 Bir Maddesel Nokta İçin Enerjinin Korunum Teoremi 8

2.2 Kısıtlar 8

2.3 D'Alembert İlkesi ve Lagrange Denklemleri ..... 9**Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**

2.4 Varyasyon İlkeleri ve Lagrange Denklemleri 14

2.4.1 Hamilton ilkesi 14

2.4.2 Varyasyonlar Hesabı 14

2.4.3 Lagrange Denklemlerinin Hamilton İlkesinden Çıkarılması 18

3 KAYIPLI OLMA VE PASİFLİK **20**

3.1 Kayıplı Olma 20

3.2 L_2 ve L_{2e} Uzayları 21

3.3 Pasiflik ve Sonlu Kazanç Kararlılığı 22

3.4 Geri beslemeli Sistemler 23

3.5 İç Kararlılık ve Pasiflik 24

4. PASİFLİĞE DAYALI KONTROL 26
4.1 Euler-Lagrange Sistemleri 26
4.1.1 Euler Lagrange Denklemleri 26
4.2 Giriş-Çıkış Özellikleri 28
4.2.1 EL Sistemlerinin Pasifliği 29
4.2.2 Hata Dinamiğinin Pasifliği 31
4.2.3 Öteki Özellikler ve Varsayımlar 32
4.2.4 Pasif Alt Sistem Ayrıştırması 33
4.2.5 EL Yapısını Koruyan Bir Arabağlaşım 34
4.3 Lyapunov Kararlılığı Özellikleri 34
4.3.1 Tam Sönümlü sistemler 34
4.3.2 Az Sönümlü Sistemler 36
4.4 Örnekler ..... 37**Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**
4.4.1 TORA Sistemi 38

5 UYGULAMALAR 40
5.1 Basit Sarkaç İçin Sabit Nokta Kontrolü 40
5.1.1 Enerjinin şekillendirilmesi ve sönüm enjeksiyonu 40
5.2 EL Sistemlerinin Çıkış Geri Beslemesi ile Kararlı Kılınması 44
5.2.1 Problem Formülasyonu 44
5.2.2 Sönüm Enjeksiyonu 45
5.2.3 Euler-Lagrange Kontrolörleri 46
5.2.4 TORA Sisteminin Çıkış Geri Beslemesi ile Kararlı Kılınması 48
5.2.4.1 Yaklaşık Türevle Kontrol 50
5.3 Doyurulmuş EL Kontrolörleri 52
5.3.1 Global Olarak Kararlı Kılan EL Kontrolörleri 53
5.3.1.1 Potansiyel Kuvvetleri İptal Eden Bir Kontrolör 53
5.3.1.2 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen Bir Kontrolör 56
5.3.2 Bir Kütle-Yay Sisteminin İçin Doyurulmuş EL Kontrolörü 57
5.3.2.1 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen PD Kontrolörü 57
5.3.2.2 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen EL Kontrolörü 58

6 SONUÇLAR VE TARTIŞMA 63

KAYNAKLAR 64

ÖZGEÇMİŞ 65

KISALTMALAR

EL	: Euler-Lagrange
GAS	: Global Asymptotical Stability
OSP	: Output Strictly Passive
PBC	: Passivity-Based Control
PD	: Propotional-Derivative
TORA	: Translational/Rotational Actuator

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Bir maddesel noktanın uzayda hareketinin ve hızının açıklanması..... 6
Şekil 2.2 : Tek boyutlu ekstremum probleminde farklı yörüngeler..... 15
Şekil 3.1 : RLC devresi..... 20
Şekil 3.2 : Geri beslemeli sistem..... 23
Şekil 4.1 : TORA sistemi..... 38
Şekil 5.1 : Basit Sarkaç..... 41
Şekil 5.2 : Sabit nokta kontrolörünün fiziksel gösterimi..... 43
Şekil 5.3 : Basit sarkaç kontrolü..... 44
Şekil 5.4 : EL kapalı çevrimli sistemi..... 46
Şekil 5.5 : Tora Sistemi..... 48
Şekil 5.6 : Kütle-Yay Sistemi..... 57
Şekil 5.7 : Kütle-Yay sistemi için potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen PD kontrolörü..... 58
Şekil 5.8 : Kütle-yay sisteminde potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen EL kontrolörü..... 59
Şekil 5.9 : Kütle-yay sisteminde potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen doyurulmuş EL kontrolörü..... 60
Şekil 5.10 : Kütle-yay sistemi için doyma fonksiyonlu ve doyma fonksiyonsuz giriş işareti..... 61
Şekil 5.11 : 2m'lik yer değiştirme altında sistemin ilk 5 saniyedeki davranışı..... 61
Şekil 5.12 : 2m'lik yer değiştirme ve doyurulmuş EL kontrolörü ile kütle-yay sisteminin geçici hal davranışı..... 62

SEMBOL LİSTESİ

$diag\{\ \}$	**:** Diagonal operatörü
$(\ )^T$	**:** Transpoz operatörü
q	**:** Genelleştirilmiş koordinat vektörü
$\bar{q}$	**:** Doğal denge noktası
q_*	**:** İstenen referans değer
$T\left(q,\dot{q}\right)$	**:** Kinetik enerji fonksiyonu
$V(q)$	**:** Potansiyel enerji fonksiyonu
$F\left(\dot{q}\right)$	**:** Rayleigh kayıp fonksiyonu
M	**:** Giriş matrisi
$H\left(q,\dot{q}\right)$	**:** Toplam enerji veya depo fonksiyonu
$\mathrm{D(q)}$	**:** Atalet matrisi
Q	**:** Harici dış kuvvetler
u	**:** Kontrol girişi

PASİFLİĞE DAYALI KONTROL TEKNİKLERİ

ÖZET

Bu çalışmada temelleri 1980'lerin başında atılan Pasifliğe Dayalı Kontrol Tekniği (Passivity-Based Control) tanıtılmaya çalışılmıştır. Giriş kısmında Kontrol Teorisinin tarihsel gelişiminden kısaca bahsedilmiş, halihazırda kullanılan tekniklerin özellikleri, avantaj ve dezavantajları açıklanmaya çalışılmıştır. İkinci kısımda çalışmada tanıtılmaya çalışılan Pasifliğe Dayalı Kontrol Tekniğinin uygulanacağı Euler-Lagrange sistemleri anlatılmaya çalışılmıştır. Euler-Lagrange denklemlerinin türetilmesi için Klasik Mekaniğe kısa bir giriş yapılmış, hem Newton'un hareket yasalarından hem de Hamilton İlkesi'nden yola çıkılarak Euler-Lagrange denklemlerinin türetilmesi gösterilmiştir.

Üçüncü kısımda ilgilenilen sistemlerin temel özelliği olan pasiflik kavramı açıklanmaya çalışılmış, bu sistemlerde istenen kararlılık gibi başka özelliklere kısaca değinilmiştir.

Dördüncü kısımda Pasifliğe Dayalı Kontrol Tekniğinin teorik alt yapısı, bu tekniğin Euler-Lagrange sistemlerine uygulanabilmesi için gerekli teorik alt yapı anlatılmaya çalışılmıştır. Bu bölümde verilen bir sistemin Euler-Lagrange modelinin nasıl çıkarılacağı da gösterilmeye çalışılmıştır.

Beşinci kısımda ise anlatılan teknik sabit nokta kontrolü yapmak için mekanik sistemlere uygulanmıştır. Bu sistemlerin istenilen davranışı göstermeleri için Pasifliğe Dayalı Kontrol Tekniği kullanılarak tasarlanmış çeşitli kontrolörlerin performansları ve dinamik davranışları gösterilmeye çalışılmıştır.

Bu çalışma bir giriş niteliğinde olup Pasifliğe Dayalı Kontrol Tekniği sadece Euler-Lagrange denklemleri ile modellenen mekanik sistemlere uygulanmıştır. Elektrik, Elektro-mekanik sistemler ve yörünge izleme gibi problemler çalışmanın dışında bırakılmıştır.

PASSIVITY BASED CONTROL TECHNIQUES

SUMMARY

In this work, Passivity Based Control Techniques are presented. These techniques have been developed in the 1980s. In the introduction section, the history of control theory is discussed briefly. The techniques, which are in use today, are presented and their advantages and disadvantages are discussed. In the second part the Euler-Lagrange systems are presented. These techniques are applied to the Euler-Lagrange systems. To derive the Euler-Lagrange Equations, some properties of Classical Mechanics are introduced shortly. And in the end of this section, Euler Lagrange Equations are derived from both Newton's Law and Hamilton's principle. In the third section, the fundamental property of the systems that we are dealing, passivity and dissipation are presented. Also a brief summary of stability theory is given.

In the fourth section, some theoretical concepts of Passivity-Based Control are given. Also the theoretical material that is needed to apply the techniques to the Euler Lagrange systems is given. In the fifth section, some applications of Set Point Regulation for mechanical systems are given. At the end of this section, simulation results are presented and controller dynamics are discussed.

This thesis is only an introduction to the Passivity Based Control and only the set point regulation problem is discussed.

1 GİRİŞ

1.1 Kontrol Mühendisliği'nden Matematiksel Kontrol Teorisine Geçişin Kısa Tarihçesi

Kontrol teorisinde ilk gelişmeler, (1930'lardan 1960'lara kadar olan süreç) geri beslemeli kuvvetlendiricilerden uzaya dair uygulamalara kadar değişen teknolojik ihtiyaçlar ve problemler tarafından yönlendirilmiştir. Geri besleme fikrinin temelleri Black'in 'Geri Beslemeli Kuvvetlendiriciler' çalışmasıyla atılmıştır. Sistemleri modellemek, analiz etmek ve kontrol etmek için kontrolör sentezlemekte kullanılan matematik Fourier ve Laplace dönüşümlerini kullanıyordu ve giriş-çıkış fikrine dayanıyordu.

Bu bakış açısı 'durum uzayı' fikriyle değişti. Durum uzayı modelinde giriş ile çıkış arasında ki dönüşüm, sistemin iç durumu üzerinden yapılır. Durum uzayı yaklaşımının matematiksel malzemesi diferansiyel denklemlerdir. Durum uzayı modelinin matematiksel avantajları 1960 ve 1970'lerde, bugünkü kontrol teorisinin temelleri olan 'kontrol edilebilirlik', gözlenebilirlik', 'optimallik' gibi yeni kavramların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu yıllarda ki çalışmalar matematiksel teoriyi geliştirmiştir. Fakat bu gelişme, kontrol teorisinin başlangıcında ki amaç olan mühendislik problemlerindeki belirsizlikler ve doğrusal olmama durumlarıyla başa çıkacak malzemede olmamıştır.

1970 ve 1980'lerin başındaki araştırmalar mühendislik ihtiyaçlarından ziyade akademik problemler, matematik soyutlamalar tarafından güdülenmiştir. 1980'lerin ortalarında kontrol teorisinde, teori ile pratik arasında ki farkın artması durdu. Bunun nedeni ekonomiktir. Ekonomik baskı pratiğe yönelik çalışmaların önemini arttırdı. Fakat bu eğilim teorik çalışmaların önemini azaltmadı. Çünkü teknolojik gelişmeler karmaşık teorik kavramların ortaya çıkmasını sağlayan mühendislik gelişmelerine yol açtı.

1.2 Euler-Lagrange Sistemleri

Bu çalışmada doğrusal olmayan kısmı ihmal edilemeyen dinamik sistemler için kontrolör tasarımı ile ilgilenilmektedir. Doğrusal olmayan sistemlerin çok karmaşık davranışları olabileceğinden, tüm sistemlere uygulanabilir bir kontrol teorisi oluşturmak güçtür. Bu yüzden ilgileneceğimiz sitemler sınıfını özelleştirmemiz gerekmektedir. EL sistemleri ile ilgilenmemizin nedeni günümüz mühendislik sistemlerinin büyük bir kısmının davranışını betimleyebilmelerdir. EL sistemleri, başlangıç noktası genelleştirilmiş değişkenler cinsinden enerji fonksiyonunun tanımı olan bir modelleme tekniğinin sonucudur (genelleştirilmiş değişkenler, mekanik sistemler için konum, elektrik sistemleri için yüktür). Bu modelleme bir Lagrangian fonksiyonu tanımlar. Hareket denklemleri analitik dinamiğin ilkelerinden, özellikle sistemlerin Lagrangian integralini minimize eden yörüngeler boyunca hareket ettiğini belirten Hamilton ilkesinden türetilir. Varyasyonel modelleme yöntemi dinamiğin en güçlü tekniklerindendir. Bu yöntem aşağıdaki nedenlerden dolayı amaca uygundur.

Modelleme enerji büyüklükleri üzerinden yapıldığından sistemler karışık bir doğaya (hibrit) sahip olabilirler (örneğin hem elektrik hem mekanik bileşenleri olabilir). Bize doğrudan sistemin depo [storage] ve kayıp [dissipation] fonksiyonlarını verir. Modelleme ağ gösterimine [network representation] ve enerji akışına dayandığından; karmaşık sistemlere enerji fonksiyonları ile karakterize edilen basit alt sistemlerin ara bağlantısı [interconnection] olarak bakmak mümkündür. EL olan iki sistemin ara bağlaşımı da EL dır. Kontrole sistemin çevresi ile uygun bir ara bağlaşım tesis etme işi olarak bakılabilir.

1.3 Pasiflik

Pasif sistemler, çevre ile enerji transferinin önemli bir rol oynadığı dinamik sistemlerdir. Pasif bir sistemde, sisteme verilen enerji, sistemde depolanan enerjiden az değildir. Başka bir deyişle pasif bir sistem kendisine dışarıdan verilen enerjiden daha fazlasını depolayamaz. Lineer zamanla değişmeyen [Linear Time Invariant] durumda pasif sistemlerin frekans cevabı $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}\geq 0$ koşulunu sağlar. Pasiflik sistemin fiziği ve kararlılık özellikleri ile ilgilidir. Örneğin geri besleme ara bağlaşımına bir enerji değişme işlemi olarak bakılırsa, negatif geri besleme ara bağlaşımı altında pasiflik değişmezdir [invariant]. Başka bir deyişle pasif olan iki

sistemin geri beslemeli ara bağlaşımı ile ortaya çıkan yeni sistemde pasiftir. Bir alt sistem tarafından üretilen enerji diğer bir alt sistem tarafından tüketiliyorsa kapalı çevrim kararlı olmaya devam edecektir. Bunun bir sonucu olarak pasif sistemlerin kontrolü kolaydır denilebilir. Pasiflik 'durum' fikrinden bağımsızdır. Bu durumda, kontrol amaçlarının gerçeklenmesinde durum geri beslemesi bir ön şart olmayacaktır. Özetle pasiflik (ve bununla yakından ilişkili sonlu kazanç kararlılığı), geri beslemeli bir doğrusal zamanla değişmeyen sistemin kararlılığının çevrime verilen kazanç ve faz kaymasına bağlı olduğuna dair doğal bir genelleştirme sağlar. Bundan başka işaretin kuvvetlendirilmesinin (operatör kazancı) ve işaretin ötelenmesinin (pasifliği) ölçüsü bazı anlarda fiziksel büyüklüklerle ilişkili olabilir. Bu temel özellikler yüzünden çalışmamızda pasiflik temel bir yapı taşı olarak kullanılmıştır. EL sistemleri için bu kavramları göz önüne alacak olursak :

- EL sistemleri, depo fonksiyonları kendi toplam enerjileri olan pasif dönüşümler tanımlarlar. Bu, çalışmanın en temel özelliğidir. Çünkü kontrol edilmesi kolay çıkışı ayırt eder ve arzulanan kapalı çevrimli depo fonksiyonunun elde edilmesine yardımcı olacak bir depo fonksiyonu sağlar.

- Çoğu problemde, EL sistemlerinin 'skew-simetri' olma özelliğine ihtiyaç vardır. Geri besleme ara bağlaşımı altında, değişmezlik [invariance] ilkesi sayesinde bazı kontrol işlerinde kontrolörün görevi 'EL yapısını koruyan' ara bağlaşım olmaktır. Bu sayede EL sistemini karakterize eden enerji ve kayıp fonksiyonlarının özellikleri kapalı çevrimde de geçerlidir. Ayrıca, bunlar plant ve kontrolöre karşı gelen fonksiyonların toplamıdır.

- Bazı makul varsayımlar altında EL sistemlerinin geri besleme ile bağlanmış iki pasif alt sisteme ayrıştırılabileceği gösterilecektir.

Bu özelliklerin hepsi Pasifliğe Dayalı Kontrolde kullanılmaktadır. EL sistemlerinin pasif olması, EL sistemlerinin kontrolü problemini 'trival' yapmaz. Bunun ilk nedeni sistemin pasifliğini dayandırdığımız çıkış işareti kontrol etmek istediğimiz çıkış değildir. Örneğin mekanik sistemin pasifliğine hız işareti üzerinden karar veririz. Fakat mekanik sistemin konumunu kontrol etmek isteriz. Elektrik makinelerinde torka doğrusal olmayan bir şekilde bağlı olan akımı kontrol etmek isteriz. İkinci nedeni ise çıkışın istediğimiz gibi olması için kontrol etmek isteğimiz işareti şekillendirmemizin gerektiğidir.

1.4.Pasifliğe Dayalı Kontrol

Pasifliğe dayalı kontrolün amacı kapalı çevrimi kararlı kılacak bir kontrolör tasarımı yöntemi vermektir. Bu çalışmada ele alınan pasifliğe dayalı kontrol yaklaşımına 'enerji şekillendirme' artı 'sönüm enjeksiyonu' tekniğinin genişletilmiş hali olarak bakılabilir. Bu teknik robotik sistemlerde durum geri beslemesi altında sabit nokta problemini çözmek için Takegaki ve Arimoto tarafından ortaya atılmıştır. Bu özel problem için dikkatimizi potansiyel enerji ve kayıp fonksiyonuna çevirebilir ve iki temel aşama ile devam edebiliriz. İlk aşama enerjiyi şekillendiren aşamadır. Bu aşamada sistemin potansiyel enerjisini, potansiyel enerji fonksiyonunu global ve tek bir minimum noktasına sahip olacak şekilde değiştiririz. İkinci aşama bir sönüm enjeksiyonu aşamasıdır. Bu aşamada kayıp fonksiyonunu asimptotik kararlılığı sağlayacak şekilde değiştiririz.

Enerjiyi şekillendiren aşama ilk baştaki kinetik enerjiyi ve yeni istenen potansiyel enerjiyi barındıran depo fonksiyonunu gerçekleyen pasifleştirme amacını yerine getirir. Sönüm enjeksiyonu bunu OSP için yapar. Son olarak bazı kayıp yayılmaları [dissipation propagation] koşullarının sağlanması ile (örneğin sezilebilirlik, detectability) OSP dönüşümün giriş-çıkış kararlılığı Lyapunov anlamında kararlılığı sağlar.

2 KLASİK MEKANİK VE EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ

Bu kısımda mekaniğin temel kavramları tanıtılmaya çalışılacaktır. Öncelikle mekaniğin temel yasalarından olan Newton'un ikinci hareket yasası verilecektir. Bu yasanın açıklanabilmesi için doğrusal momentum, doğrusal hız gibi kavramlar açıklanacak ve mekanikte geçerli olan korunum yasalarına kısaca değinilecektir. Daha sonra iş, enerji gibi fiziksel sistemlere dair temel kavramlar açıklanmaya çalışılacaktır. Mekanik bir sistemin dinamiğini belirlemede önemli bir ol oynayan kısıtlara değinilecek ve Euler-Lagrange denklemlerinin türetilmesi gösterilmeye çalışılacaktır.

2.1 Bir Maddesel Noktanın Mekaniği

Newton'un 2. hareket yasası:

$$F = \frac{dP}{dt}; \tag{2.1}$$

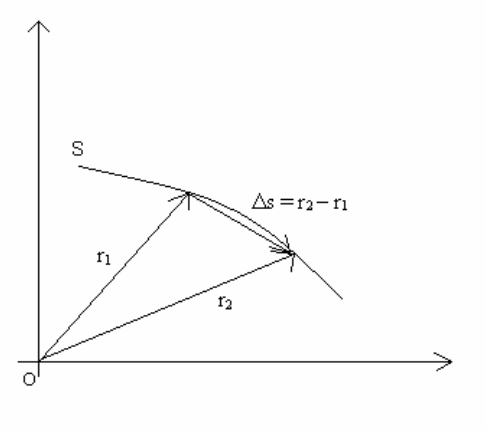
Burada F , maddesel noktaya etkiyen kuvvet ve P doğrusal momentumdur.

2.1.1 Doğrusal Momentumun

s maddesel noktanın hareketi sırasında çizdiği eğri; r başlangıç noktasından maddesel noktaya çizilen ışın vektörü olsun. Bu durumda vektörel hız:

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{2.2}$$

ile ifade edilir. Burada $\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ dir. Buradan v nin s eğrisine teğet olduğu sonucu çıkarılabilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Bir maddesel noktanın uzayda hareketinin ve hızının açıklanması

Bu halde doğrusal momentumun hız cinsinden ifadesi,

$$P = mv \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Böylece (2.1) denklemi,

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. Kütlenin sabit olduğu durumda:

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma \tag{2.5}$$

Burada a ivme olup:

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} \tag{2.6}$$

ile tanımlanır.

2.1.2 Bir Maddesel Noktanın Doğrusal Momentumu İçin Korunum Teoremi

Eğer F toplam kuvveti sıfırsa $\dot{P}$ da sıfırdır ve P lineer momentumu korunur.

2.1.3 İş ve Enerji

F dış kuvvetinin 1 noktasından 2 noktasına giderken maddesel nokta üzerinde yaptığı iş:

$$W_{12} = \int_1^2 F ds \tag{2.7}$$

olup, $\int F ds = m\int \frac{dv}{dt} v dt = \frac{m}{2}\int \frac{d}{dt}\left(v^2\right)dt$ olduğundan,

$$W_{12} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{2.8}$$

dır. $\frac{mv^2}{2}$ skaler büyüklüğü maddesel noktanın kinetik enerjisi olup T ile gösterilir. Dolayısıyla yapılan iş kinetik enerjide ki değişmeye eşittir.

$$W_{12} = T_2 - T_1 \tag{2.9}$$

Eğer kuvvet alanı kapalı bir yörünge üzerinde yapılan W işi sıfır olacak şekilde ise, yani:

$$\oint F.ds = 0 \tag{2.10}$$

ise bu halde kuvvet (ve sistem) korunumludur denir. Eğer (2.10) bağıntısı geçerli ise W_{12} işi 1 ve 2 noktaları arasındaki integrasyon yörüngesinden bağımsız olmalıdır. Buradan W_{12}'yi, sadece uç noktalarının konumlarına bağlı olan bir büyüklükteki değişim olarak ifade etmenin mümkün olduğu sonucu çıkar. Bu büyüklük $-V$ ile gösterilebilir. Dolayısıyla sonsuz küçük bir yörünge uzunluğu için $F.ds = -dV$ bağıntısı vardır. Burada V potansiyel veya potansiyel enerji adını alır. Korunumlu bir sistem için kuvvetlerin yaptığı iş:

$$W_{12} = V_1 - V_2 \tag{2.11}$$

dır. (2.11) denklemi (2.9) ile birleştirilirse:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{2.12}$$

sonucu bulunur.

2.1.4 Bir Maddesel Nokta İçin Enerjinin Korunum Teoremi

Eğer bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetler korunumlu ise maddesel noktanın $T+V$ toplam enerjisi korunur.

2.2 Kısıtlar

Mekanik sistemleri biri birinden bağımsız maddesel noktalar olarak düşünüp bunlar üzerinden hesap yapmak yetersizdir. Çoğunlukla maddesel noktalar bağlıdır. Örneğin rijid cisimlerde maddesel noktaların hareketlerini kısıtlayan bağlar, maddesel noktaların arasındaki r_{ij} uzaklıklarının değişmeden kalmasını sağlayacak tarzdadır. Bağlı sistemlere başka bir örnek, bir kap içerisindeki gaz molekülleridir. Gaz molekülleri kabın çeperleri yüzünden sadece kabın içinde hareket edebilirler.

Eğer kısıt şartları maddesel noktanın koordinatlarını bağlayan denklemler olarak ifade edilebilirse ve,

$$f(r_1, r_2, r_3, ..., t) = 0 \tag{2.13}$$

formunda ise bağlar holonomdur denir. Holonom bağlara en basit örnek rijid cisimdir. Rijid cisimde bağlar $(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$ yapısında ki denklemlerle ifade edilir. Bu tarzda ifade edilemeyen bağlara holonom olmayan bağ denir. Kısıtlar mekanik problemlerin çözümünde iki tip güçlük çıkarır. Birincisi r_i koordinatlarının artık hepsi birden bağımsız değildir, çünkü kısıt denklemleri ile bağlıdırlar. Bu durumda sistemi oluşturan maddesel noktalara dair hareket denklemleri birbirinden bağımsız değildir. İkincisi, bağ kuvvetleri baştan belli değildir. Bu kuvvetler problemin bilinmeyenleri arasındadır ve aradığımız çözümden elde edilmelidir.

Holonom kısıtlar halinde birinci güçlük genelleştirilmiş koordinatların ortaya konulmasıyla çözülür. N maddesel noktası olan bir sistemin, bağsız ise $3N$ bağımsız koordinatı veya serbestlik derecesi vardır. Eğer (2.13) yapısında k tane denklem ile ifade edilen holonom kısıtları varsa, bu denklemleri $3N$ koordinatın k tanesini yok etmekte kullanabiliriz ve $3N-k$ tane bağımsız koordinatımız kalır. Bu halde sistemin $3N-k$ serbestlik derecesi vardır denir. Bağlı koordinatların yok edilmesi bir başka tarzda, yeni $3N-k$ bağımsız $q_1, q_2, ..., q_{3N-k}$ değişkenin ortaya

konması yoluyla da ifade edilebilir. Bu koordinatlar cinsinden eski $r_1, r_2, ..., r_N$ koordinatları

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t) \\ r_2 &= r_2(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t) \\ &..... \\ r_N &= r_N(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

yapısındaki denklemlerle ifade edilir. Bu denklemler bağları kapalı bir tarzda içinde bulundururlar.

Genellikle genelleştirilmiş koordinatlar, kartezyen koordinatların tersine bir araya toplanıp vektörler meydana getirecek üçlü gruplara ayrılmazlar. Genelleştirilmiş koordinatları, üzerinde uzlaşılan ortogonal konum koordinatları olarak düşünmemelidir. Her çeşit büyüklük genelleştirilmiş koordinat olarak kullanılmak üzere ortaya konulabilir. Eğer kısıt holonom değilse, kısıtı ifade eden denklemler bağlı koordinatların yok edilmesinde kullanılamaz. Kısmen bağlı koordinatları yok edebileceği için holonom bağları olan problemler her zaman formel bir çözüme ulaştırılabilir. Fakat holonom olmayan örnekleri ele almak için genel bir yol yoktur. Holonom olmayan bağın daha karışık halleri tek tek ele alınmalıdır ve bunun sonucu olarak klasik mekaniğin daha formel olarak göz önüne alınıp geliştirilmesi halinde hemen hemen değişmez bir kural olarak, mevcut bütün bağların holonom olduğu kabul edilir.

2.3 D'Alembert İlkesi ve Lagrange Denklemleri

Bir sistemin virtüel bir yer değiştirmesi; verilen bir t anında sistem üzerine uygulanan bağlar ve kuvvetlerle uyuşan bir keyfi sonsuz küçük δr_i koordinat değişiminin sonucu olarak sistemin konumundaki değişmeyi ifade eder. Yer değiştirmeye, süresince kuvvetlerin ve bağların değişebileceği bir dt zaman aralığında sistemin yapacağı gerçek bir yer değiştirmeden ayırmak için, virtüel denir. Sistemin dengede olduğunu var sayalım, yani her maddesel noktaya etkiyen toplam kuvvet $F_i = 0$ olsun. Bu halde F_i kuvvetinin δr_i yer değiştirmesindeki virtüel işinin $F_i \delta r_i$ iç çarpımı da açıkça sıfır olur. Sıfır olan bu çarpımların bütün maddesel noktalar üzerindeki toplamı, benzer şekilde sıfır olmalıdır:

$$\sum_i F_i \delta r_i = 0 \tag{2.15}$$

F_i 'yi uygulanan $F_i^{(a)}$ kuvveti ve f_i bağ kuvvetine ayıralım:

$$F_i = F_i^{(a)} + f_i \tag{2.16}$$

böylece (2.15) denklemi:

$$\sum_i F_i^{(a)} \delta r_i + \sum_i f_i \delta r_i = 0 \tag{2.17}$$

incelememizi bağ kuvvetlerinin virtüel işinin sıfır olduğu sistemlere kısıtlıyoruz. Bu durumda sistemin dengesi için uygulanan kuvvetlerin virtüel işi sıfır olmalıdır:

$$\sum_i F_i^{(a)} \delta r_i = 0 \tag{2.18}$$

$F_i = \dot{P}_i$ hareket denklemleri $F_i - \dot{P}_i = 0$ olarak yazılabilir. Bu ise sistemdeki maddesel noktaların gerçek kuvvete eşit bir kuvvet $-\dot{P}_i$ 'nin eklenmesiyle dengede olacaklarını ifade eder. (2.15) yerine,

$$\sum_i \left(F_i - \dot{P}_i \right) \delta r_i = 0 \tag{2.19}$$

yazılabilir. Yine uygulanan kuvvetler, bağ kuvvetleri ayırması yapılır, bağ kuvvetlerinin virtüel işinin sıfır olduğu sistemler için:

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - \dot{P}_i \right) \delta r_i = 0 \tag{2.20}$$

(2.20) denklemi D'Alembert ilkesi olarak adlandırılır. Bu ilkeyi genelleştirilmiş koordinatların virtüel yer değiştirmeleri cinsinden bir ifadeye dönüştürmek için:

$r_i = r_i(q_1, q_2, ..., q_n, t)$, $v_i \equiv \dot{r}_i$, $\dot{q}_j$ cinsinden,

$$v_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{2.21}$$

olacaktır.

Benzer şekilde keyfi δr_i virtüel yer değiştirmesi δq_j virtüel yer değiştirmeleri ile,

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.22}$$

bağıntısı ile bağlanır. Burada zamanın δt değişimi yoktur. Çünkü virtüel yer değiştirme tanım gereği sadece koordinatların yer değiştirmelerini göz önüne alır. Genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden F_i 'in virtüel işi,

$$\sum_i F_i \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{2.23}$$

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{2.24}$$

(2.20) denkleminde ($\sum_i \dot{P}_i \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \delta r_i$) δr_i 'yi (2.22) ile ifade edersek:

$\sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \dot{P}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$ olur. Şimdi,

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \tag{2.25}$$

bağıntısını göz önüne alalım. (2.25)) denkleminin son teriminde t ve q 'ye göre türetmenin sırasını değiştirebiliriz. Çünkü (2.21)'e benzer olarak $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t}$ yazılabilir ve bu da (2.21)'e göre $\frac{\partial v_i}{\partial q_j}$ 'dır. Ayrıca (2.21)'den

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{2.26}$$

olduğunu da görüyoruz. Bunlar (2.25)'de yerine yazılırsa $\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\}$ sonucu çıkar ve (2.20) denkleminin göz önüne alınan terimi $\sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j$ şeklinde parçalanır. $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ yi T sistem kinetik enerjisine eşitlersek D'Alambert ilkesi,

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \qquad (2.27)$$

Ele aldığımız kısıtlar holonom olduklarından q_j'ler bağımsızdır. Herhangi bir δq_i virtüel yer değiştirmesi δq_k'den bağımsızdır ve dolayısıyla (1.49)'un geçerli olması için tek imkan katsayıların ayrı ayrı sıfır olmasıdır:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (2.28)$$

Burada n tane böyle denklem vardır. Eğer sistem korunumlu ise yani kuvvetlerin sistemin potansiyel enerjisi olan skaler bir V potansiyel fonksiyonundan $F_j = -\nabla_i V$ şeklinde türetilebilmesi halinde (2.28) denklemine Lagrange denklemleri denir. Bu halde genelleştirilmiş kuvvetler $Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ olarak yazılabilir. Bu da bir $-V(r_1, r_2, ..., r_N)$ fonksiyonunun q_j'ye göre kısmi türevine eşittir.

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{(korunumlu sistemlerde)} \qquad (2.29)$$

(2.28) denklemi bu halde $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$ olarak yeniden yazılabilir. V potansiyeli sadece bir konum fonksiyonudur ve bu nedenle genelleştirilmiş hızlara

bağlı olmaması gerekir. Şu halde V'nin q_j'ye göre kısmi türevi olan bir terim ifadeye eklenebilir: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_j}=0$ veya L Lagrange fonksiyonu adını vereceğimiz yeni bir fonksiyon olmak üzere,

$$L=T-V \tag{2.30}$$

biçiminde tanımlarsak (2.28) denklemi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{2.31}$$

olur. (2.31)'e Lagrange denklemi denir.

Lagrange formulasyonu, hareket denklemlerinden bağ kuvvetlerini yok etmek istememizin bir sonucudur. Lagrange metodu ile sadece T ve V gibi iki skaler fonksiyonun ele alınması gerekmektedir. Hareket denklemlerini elde etmek için sadece T ve V'yi genelleştirilmiş koordinatlarda yazmalı, bu büyüklüklerden L'yi kurmalı ve bulunan L'yi (2.31) Lagrange denklemlerinde yerleştirilmelidir.

T ve V'yi kartezyen koordinatlardan genel koordinatlara dönüştürmek için gereken dönüşüm (2.14) ve (2.21) dönüşüm denklemlerini uygulayarak elde edilir. Buradan T genel olarak $T=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2$ yapısında verilir. Açılımı yaparsak, genelleştirilmiş koordinatlarda T'nin,

$$T=a+\sum_j a_j \dot{q}_j+\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{2.32}$$

yapısında olacağı açıktır. Burada a, a_j, a_{jk}, r'lerin ve t'nin belli fonksiyonlarıdır. Ve dolayısıyla q'ların ve t'lerin fonksiyonudur.

2.4 Varyasyon İlkeleri ve Lagrange Denklemleri

2.4.1 Hamilton ilkesi

Sistemi t_1 zamanından t_2 zamanına hareketi, $L = T - V$ olmak üzere,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{2.33}$$

çizgisel integrali hareketin yörüngesi boyunca ekstremum olacak şekildedir. Yani sistem noktasının t_1 zamanındaki konumundan t_2 zamanındaki konumuna kadar çizmesi mümkün olan bütün yörüngeler arasından gerçekte çizeceği yörünge (2.33) integralinin, boyunca ekstremum olduğu yörüngedir. Bu ekstremum maksimum veya minimum olabilir.

Hamilton ilkesi şöyle özetlenebilir: Harekete, I çizgisel integralinin varyasyonu, sabit t_1 ve t_2 için sıfır yani,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n,t \right) dt = 0 \tag{2.34}$$

olacak şekildedir.

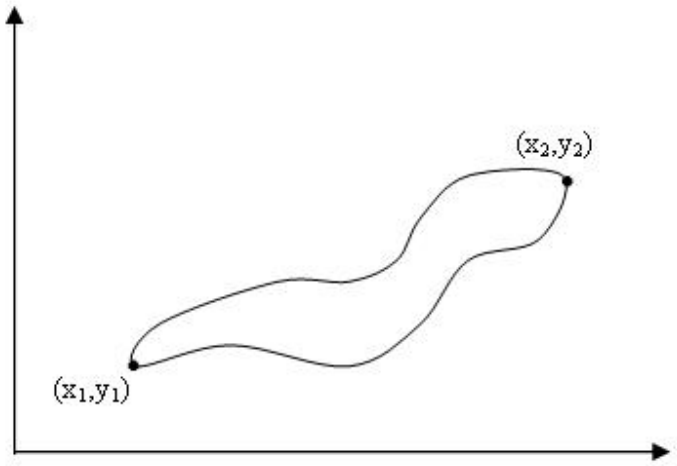
Lagrange denklemleri Hamilton ilkesinden çıkartılabilir. Newton hareket denklemleri yerine Hamilton ilkesini esas postula alarak korunumlu sistemlerin mekaniğini kurmak mümkündür.

2.4.2 Varyasyonlar Hesabı

Lagrange denklemlerinin (2.34)'den çıktığını ispatlamadan önce, varyasyonlar hesabının yöntemlerine bir göz atmak gerekir. Varyasyonlar hesabının en önemli problemlerinden biri verilen bir çizgisel integrali ekstremum yapan eğriyi bulmaktır. Önce problemi esas olarak tek boyutlu bir formda göz önüne alalım. Yani $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere bir $f\left(y,\dot{y},x \right)$ fonksiyonunun x_1 ve x_2 değerleri arasındaki çizgisel integralini ekstremum yapacak bir $y = y(x)$ yörüngesi bulmak istiyoruz. Çözüm olan fonksiyon için,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \dot{y}, x \right) dx \tag{2.35}$$

integrali bir maksimum veya bir minimum olmalıdır. Burada x değişkeni t parametresinin yerini tutar ve sadece $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ olan çeşitli yörüngeleri göz önüne alıyoruz (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Tek boyutlu ekstremum probleminde farklı yörüngeler

Problemi diferansiyel ve integral hesabın bir ekstremum değeri elde etmek için kullanılan bilinen yöntemleri ile çözebileceğimiz bir forma koyuyoruz. Bunun için bütün mümkün $y(x)$ eğrileri bir α parametresinin çeşitli değerlerine bağlı olarak belirtilebilir ve α 'nın belli değerleri mesela $\alpha = 0$ için, eğri, integralin ekstremum olduğu yörünge veya yörüngelerle çakışabilir. y büyüklüğü bu halde hem x 'in hem de α parametresinin bir fonksiyonu olur. Mesela y 'yi,

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x) \tag{2.36}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada $\eta(x)$ x in $x = x_1$ ve $x = x_2$ de sıfır olan herhangi bir fonksiyonudur. (2.36) denklemi y eğrileri için olanaklı parametrik ailelerden sadece biridir. (2.35)'deki J de α nın bir fonksiyonu olur:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x \right) dx \tag{2.37}$$

ve ekstremum elde etmek için gereken şart bilinen,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \tag{2.38}$$

dır. İntegral işlemi altında türev alınırsa:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx \tag{2.39}$$

bulunur. Bu integrallerin ikincisini göz önüne alalım, $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}dx$,

integral parça parça integre edilirse,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx \tag{2.40}$$

olur. Bütün değiştirilmiş eğriler üzerindeki şartlar, bu eğrilerin (x_1, y_1) , (x_2, y_2) noktalarından geçtikleri ve dolayısıyla $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$'nın x_1 ve x_2'de sıfır olması gerekliliğidir. Bu nedenle (2.8)'in ilk terimi sıfır olur ve (2.7) denklemi $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx$ haline indirgenir. Ekstremum şartını elde etmek için bir $d\alpha$ diferansiyeli ile her iki tarafı çarpıp türevleri $\alpha = 0$'da değerlendiriyoruz. Böylece,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha dx \tag{2.41}$$

sonucuna ulaşıyoruz. $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta I$ değerine J'nin varyasyonu diyeceğiz. Benzer şekilde,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y \tag{2.42}$$

dır. Burada δy, $y(x)$'in keyfi α parametresinin sıfır değeri komşuluğunda varyasyonu ile elde edilen keyfi bir varyasyonu gösterir. Bu daha önce tanımlanmış olan virtüel yer değiştirmeye karşı gelir. δy keyfi olduğu için buradan,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0 \tag{2.43}$$

olması gerektiği çıkar. Bu nedenle J sadece f 'in (2.43) diferansiyel denklemini sağladığı $y(x)$ eğrileri için bir ekstremumdur. (2.43) denklemi ise Lagrange denklemlerine büyük benzerlik gösterir. Bu denklemin uygulaması bir örnek ile verilebilir.

Örnek (Bir düzlemde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık):

Bir düzlemde yay uzunluğu elemanı $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ve 1 ve 2 noktaları arasındaki herhangi bir eğrinin toplam uzunluğu $I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ 'dır. Eğrinin en kısa yörünge olması için şart I integralinin bir minimum olmasıdır. $f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ alınırsa (2.35) denklemiyle ifade edilen ekstremum problemine bir örnektir. (2.43) de $\frac{df}{dy} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ 'yi yerleştirirsek $\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$ veya, c bir sabit olmak üzere $\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = c$ elde edilir. Bu çözüm sadece $\dot{y} = \alpha$ ise geçerli olabilir. Burada α, c ye $\alpha = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$ bağıntısı ile bağlı olan bir sabittir. Fakat bununda bir doğru denklemi olduğu açıktır: $y = ax + b$. Burada b bir başka integrasyon sabitidir. Sonuçta (x_1, y_1)

noktasını (x_2, y_2) noktasına birleştiren en kısa yol bu noktalardan geçen bir doğrudur.

2.4.3 Lagrange Denklemlerinin Hamilton İlkesinden Çıkarılması

Varyasyonlar hesabının esas problemi, f'in birçok y_i bağımsız değişkeni ile bu bağımsız değişkenlerin $\dot{y}_i$ türevlerinin fonksiyonu olması haline kolayca genelleştirilir. Bu halde J integralinin değişimi, daha önce yapılmış olduğu gibi J'yi olanaklı bütün $y_i(x,\alpha)$ eğrilerini parametreleyen bir α parametresinin fonksiyonu gibi alarak,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f\left(y_1(x), y_2(x), ..., \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), ..., x \right) dx \tag{2.44}$$

yapısında elde edilir. Bunun için α'yi,

$$\begin{aligned} y_1(x,\alpha) &= y_1(x,0) + \alpha \eta_1(x) \\ y_2(x,\alpha) &= y_2(x,0) + \alpha \eta_2(x) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.45}$$

koyarak tanımlayabiliriz. Burada $y_1(x,0)$, $y_2(x,0)$ vs.'nin ekstremum probleminin çözümleri ve η_1, η_2 vs. ise sabit uç noktalı bir varyasyon ele alındığı için, sadece uç noktalarda sıfır fakat başka bakımlardan x'in tüm keyfi fonksiyonlarıdır. (2.45) parametrelemenin tek yolu değildir. J'nin değişimi, terim terim,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx \tag{2.46}$$

olarak yazılabilir. (2.46) denkleminin ikinci toplamındaki integrali yine parça parça integre ediyoruz $\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx$.

Burada ilk terim, bütün eğrilerin sabit uç noktalarından geçmesi nedeniyle sıfırdır. (2.46) ya yerleştirirsek, δJ ,

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx \tag{2.47}$$

olur. Burada (2.42)'la benzerlik kurulursa δy_i varyasyonu, $\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$ olur.

y değişkenleri bağımsız olduklarından δy_i varyasyonları da birbirinden bağımsızdırlar. Şu halde sadece ve sadece δy_i'in katsayıları ayrı ayrı sıfırsa $\delta J = 0$'dır:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, i = 1,2,...n \tag{2.48}$$

(2.48) diferansiyel denklem sistemi Euler-Lagrange diferansiyel denklemleri olarak bilinir. Çözümleri (2.44)'de de verilen yapıdaki bir integralin varyasyonunu sıfır yapan eğriler verir. Sonuç olarak Hamilton ilkesindeki $I = \int L\left(q_i, \dot{q}_i, t \right) dt$ integrali

$x \to t$

$y_i \to q_i$

$f\left(y_i, \dot{y}_i, x \right) \to L\left(q_i, \dot{q}_i, t \right)$

dönüşümleri ile (2.44)'de verilen yapıdadır. Bu hal için Euler-Lagrange denklemleri hareketin Lagrange denklemleri haline gelir: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $i = 1,2,...n$.

Böylece korunumlu sistemler için Lagrange denklemleri Hamilton ilkesinden çıkarılmış oldu.

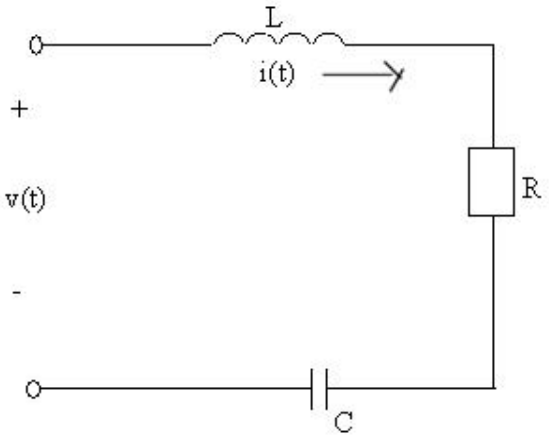
3 KAYIPLI OLMA VE PASİFLİK

Bu bölümde Pasifliğe Dayalı Kontrol tekniğin temel kavramlarından olan pasiflik açıklanmaya çalışılacaktır. Ayrıca bununla yakından ilgili olan L_2 uzayları ve kararlılığı açıklanacak, pasifliğe dair teoremler verilmeye çalışılacaktır.

3.1 Kayıplı Olma

Kayıplı Olma, enerjinin kaybolması veya tüketilmesiyle ilgili fiziksel sistemlerin temel bir özelliğidir. Kayıplı sistemlere tipik bir örnek elektrik devreleridir. Elektrik devrelerinde elektrik ve manyetik enerji dirençler üzerinde ısıya dönüştürülerek tüketilir. Mekanik sistemlerde benzer bir işi sürtünme yapar. Kayıplı olma özelliğinin matematiksel olarak tanımlanması için iki fonksiyonun tanımlanması gerekiyor: Kaynak miktarı [supply rate] ve Depo fonksiyonu [storage function]. Kaynak miktarı, enerjinin sisteme akış miktarının bir ölçüsüdür. Depo fonksiyonu ise sistemde depolanan enerjinin miktarını veren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlar biri birlerine kayıp eşitsizliği [dissipation inequality] üzerinden bağlıdırlar. Kayıplı bir sistemde zaman yörüngeleri boyunca kaynak miktarı depo fonksiyonunda ki artıştan az değildir. Yani kayıplı bir sistem kendisine dışarıdan verilen enerjiden daha fazlasını depolayamaz. Arada ki fark tüketilen enerjidir.

Örnek:



Şekil 3.1: RLC devresi

Şekil 3.1'de verilen devrenin dinamik davranışı Kirchoff kanunlarından elde edilebilir: $v = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(T)dT + L\frac{di}{dt}$.

Eşitliğin her iki tarafı da i ile çarpılırsa: $iv = Ri^2 + \frac{1}{C}i\int_0^t i(T)dT + Li\frac{di}{dt}$.

Veya eşdeğer olarak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2C}\left(\int_0^t i(T)dT\right)^2 + \frac{L}{2}i^2\right) = vi - Ri^2 \tag{3.1}$$

$V := \frac{1}{2C}\left(\int_0^t i(T)dT\right)^2$ ve $T := \frac{L}{2}i^2$ tanımlansın. Bu ifadede V kondansatörde depolanan elektrik enerjisini, T bobinde depolanan manyetik enerjiyi göstermektedir. (3.1) ifadesi 0 dan t'ye kadar integre edilirse enerji denge denklemi elde edilir: $H(t) = H(0) + \int_0^t v(T)i(T)dT - \int_0^t R^2 i(T)dT$.

Burada,
$H(t)$: mevcut enerjiyi ve $H(0)$: başlangıç enerjisini göstermektedir.
$\int_0^t v(T)i(T)dT$: sisteme verilen enerjiyi ve $\int_0^t R^2 i(T)dT$: ısıya dönüşen enerjiyi göstermektedir. Bu eşitlikte H:=V+T devrenin toplam enerjisidir. Bu örnekte kaynak miktarı gerilim x akım (vi) olup devreye dışarıdan aktarılan güçtür. H depo fonksiyonu olup sistemin toplam enerjisidir. Yukarıdaki tanıma göre RLC devresi açıkça kapılıdır.

3.2 L_2 ve L_{2e} Uzayları

Ele aldığımız küme, gerçel değerli, ölçülebilir, n-boyutlu ve zamanın fonksiyonu olan fonksiyonları içeren L_q uzayıdır. $f(t): R_+ \to R^n$ olmak üzere L_2 kümesi şöyle tanımlanır: $L_2 := \{x \in L_q \mid \|f\|_2^2 := \int_0^\infty \| f(t) \|^2 \, dt < \infty\}$. Burada $\|.\|$ Euclidean

normudur. Bu küme $\|.\|_2$ normuna göre normlu bir vektör uzayı oluşturur. L_{2e} genişletilmiş uzayı şöyle tanımlanır: $L_{2e} := \{x \in L_q \mid \|f\|_{2T}^2 := \int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty, \forall T\}$.

Açıkça $L_2 \subset L_{2e}$ dir. İç çarpım ve kesilmiş [truncated] iç çarpım şöyle tanımlanır:

$< u \mid y > := \int_0^\infty u(t)^T y(t) dt$ ve $< u \mid y >_T := \int_0^T u(t)^T y(t) dt$.

3.3 Pasiflik ve Sonlu Kazanç Kararlılığı

İlgilendiğimiz sistemler:

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = f(x,u), x(0) = x_0 \in R^n \\ y = h(x,u) \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

formunda olup $x \in R^n$ durum, $u \in R^m$ giriş, $y \in R^m$ çıkış vektörleridir. Bu yolla (3.2) nedensel, dinamik bir operatör tanımlar: $\Sigma : L_{2e} \to L_{2e} : u \; \alpha \; y$.

Tanım 3.1 (Kayıplı Olma):

Σ, $w(u,y) : R^m x R^m \to R$ kaynağına göre kayıplıdır $\Leftrightarrow$

$$H : R^n \to R_{\geq 0}$$

$$H(x(T)) \leq H(x(0)) + \int_0^T w(u(t), y(t)) dt \qquad \forall u, \forall T \geq 0$$

ve $\forall x_0 \in R^n$

koşulunu sağlayan bir depo fonksiyonu varsa.

Tanım 3.2 (Pasiflik):

Σ, $w(u,y) = u^T y$ kaynak miktarına göre kayıplı ise pasiftir denir. Σ kesin giriş pasiftir [ISP] eğer $w(u,y) = u^T y - \delta_i \| u \|^2, \delta_i > 0$ kaynak miktarına göre kayıplı ise. Son olarak Σ kesin çıkış pasiftir [OSP] eğer $w(u,y) = u^T y - \delta_o \| y \|^2, \delta_o > 0$ kaynak miktarına göre kayıplı ise.

Tanım 3.3 (L_2 kararlılığı):

Σ, L_2 kararlıdır; eğer $\exists \gamma > 0$ öyle ki $\forall x_0$ için $\exists \beta(x_0)$ öyle ki $\|y\|_{2T} \leq \gamma \|u\|_{2T} + \beta(x_0)$.

Teorem 3.1 (L_2 kararlılığı ve kayıplı olma):

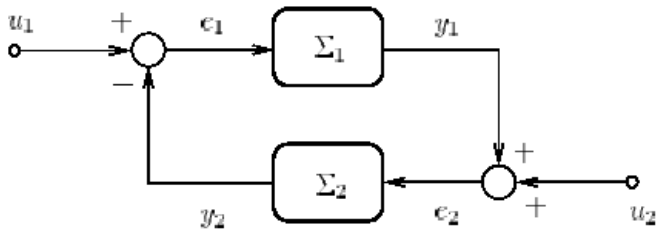
Σ, L_2 kararlıdır eğer $w(u,y)=\frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2-\|y\|^2, \gamma>0$ kaynak miktarına göre kayıplı ise.

Teorem 3.2 (OSP $\Rightarrow L_2$ kararlı):

$\Sigma: u \alpha\ y$ kesin çıkış pasif[OSP] ise Σ L_2 kararlıdır.

3.4 Geri beslemeli Sistemler

Ele alınan sistemler Şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Geri beslemeli sistem

Σ_1 ve Σ_2 (3.2) formunda durum uzaylarıdır. Ara bağlaşımın iyi konduğunu [well posed] Σ_1(yani $u:=(u_1,u_2)$ ve $y:=(y_1,y_2)$ olmak üzere $u \alpha\ y$ olan operatörün nedensel olduğunu ve L_{2e} işaret uzayını L_{2e} işaret uzayına dönüştürdüğünü varsayıyoruz.

Teorem 3.3 (Pasifliğin değişmezliği):

Σ_1 ve Σ_2 pasifse, $u:=(u_1,u_2)$ ve $y:=(y_1,y_2)$ olmak üzere $\Sigma: u \alpha\ y$ de pasiftir. Eğer Σ_1 ve Σ_2 çıkış kesin pasifse[OSP] $\Sigma: u \alpha\ y$ de çıkış kesin pasiftir.

Teorem 3.4.7 (Pasiflik Teoremi):

Şekil 3.1 de ki sistem göz önüne alınsın. δ_{i1}, δ_{i2}, δ_{o1}, δ_{o2}, β_1, β_2 sabitler olsun öyle ki,

$$< e_1, y_1 >\geq \delta_{i1}\|e_1\|_{2T}^2 + \delta_{o1}\|y_1\|_{2T}^2 + \beta_1 \quad \text{ve}$$

$$< e_2, y_2 >\geq \delta_{i2}\|e_2\|_{2T}^2 + \delta_{o2}\|y_2\|_{2T}^2 + \beta_2$$

$\forall e_1, e_2 \in L_{2e}$ ve $\forall T \geq 0$ için. Bu koşullar altında $\Sigma : u \; \alpha \;\; y \;\; L_2$ kararlıdır eğer,

$\delta_{i1} + \delta_{o2} > 0$, $\delta_{o1} + \delta_{i2} > 0$ ise.

3.5 İç Kararlılık ve Pasiflik

Gözlenebilirliğe dair bazı özelliklerin sağlanması durumunda giriş-çıkış kararlı olan sistemler aynı zamanda iç kararlı da olurlar (Lyapunov anlamında kararlılık).

Tanım 3.4 (Sıfır-Durum Gözlenebilirlik [Zero-State Observability] ve Sezilebilirlik [Detectability]):

Bir $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$ durum uzayı sistem $y = h(x)$ çıkışından sıfır-durum gözlenebilirdir eğer $\forall x(0) \in R^n$ başlangıç koşulu için $(y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0)$ oluyorsa. Sıfır-durum sezilebilirdir eğer $\left(y(t) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \right)$.

Basitlik için u 'ya göre 'affine' sistemleri ele alacağız:

$$\Sigma_a = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad , \; x(0) = x_0 \in R^n$$

Teorem 3.5:

Σ_a çıkış kesin pasif [OSP] ve H depo fonksiyonu yarı kesin pozitif tanımlı,

Eğer Σ_a sıfır durum sezilebilir ise $H(x) > 0, \forall x \neq 0$ iken,

Eğer $\forall x \neq 0$ için $H(x) > 0$, $H(0) = 0$ ve Σ_a sıfır durum sezilebilir

ise $x = 0$, $\dot{x} = f(x)$ 'in lokal asimptotik kararlı bir denge noktasıdır. Fazladan, eğer H radyal sınırsız [radially unbounded] ise kararlılık globaldir.

Teorem 3.6 (3.2 Sistemi İçin):

i. Σ_1, Σ_2 pasif, $x_1 = \bar{x}_1$ ve $x_2 = \bar{x}_2$ depo fonksiyonunun lokal minimumları olsun. Bu durumda $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ girişsiz $(u_1 = u_2 = 0)$ geri beslemeli sistemin kararlı bir denge noktasıdır.

ii. Σ_1, Σ_2 çıkış kesin pasif [OSP] ve sıfır-durum sezilebilir, Σ_1 ve Σ_2 'ye karşı düşen depo fonksiyonları 'proper' ve $x_1 = x_2 = 0$ 'da tek ve global minimuma sahip olsun. Bu koşullarda (0,0) noktası girişsiz $(u_1 = u_2 = 0)$ geri beslemeli sistemin global asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

4. PASİFLİĞE DAYALI KONTROL

4.1 Euler-Lagrange Sistemleri

Giriş kısmında bahsedildiği gibi, pratik olarak, doğrusal olmayan bir kontrol teorisi geliştirmek için göz önüne alınan sistemlerin bir sınıfta özelleşmesi gerekir. Bunun temel nedeni, doğrusal olmayan sistemlerin hepsini kapsayacak bir teori geliştirmenin zorluğudur. Bu çalışmada ilgilenilen sistemler EL sistemleridir. Bunun nedeni EL sistemlerinin günümüz mühendislik problemlerinin bir çoğunu kapsamasıdır.

Bir EL sistemi, dinamiği EL denklemleri ile ifade edilebilen bir sistemdir. EL denklemleri ise matematiksel bir bakış açısıyla söylemek gerekirse belli bir özel yapısı olan, doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerdir. Birçok fiziksel sistemin davranışını tasvir eden güçlü bir modelleme tekniğinden - varyasyonel yöntem - çıktıkları için bu çalışmanın amacı bakımından EL sistemleri önemlidirler. EL sistemlerinin modeli enerji fonksiyonunun minimize edilmesiyle elde edilir.

4.1.1 Euler Lagrange Denklemleri

Toplu parametreli fiziksel sistemlerin modellenmesinde iki temel yaklaşım kullanıla gelmiştir: kuvvetler yasası ile hareket denklemlerinin türetilmesi veya seçilmiş enerji fonksiyonlarına varyasyon ilkelerinin uygulanması. Aynı özellikteki elemanlardan oluşan basit sistemler için birinci yöntem yeterlidir. Örneğin, sadece mekanik sistemler için Newton'un ikinci kanunu veya sadece elektrik sistemleri için Kirchhoff' yasaları istenen denklemleri verir. Karışık sistemler için (elektro mekanik) varyasyon yaklaşımı daha iyidir. Aynı alt sistemlerin ortak özelliği hepsinin enerjiyi dönüştürmesidir. Bu yüzden modellemeyi enerji büyüklükleri üzerinden yapmak daha uygun görünmektedir. Varyasyon yaklaşımının başlangıç noktası enerji fonksiyonunun genelleştirilmiş değişkenler (mekanik sistemlerinde konum, elektrik sistemlerinde yükler) cinsinden tanımlanmasıdır. Bu işlemde Lagrangian fonksiyonu kullanılır. Hareket denklemleri analitik dinamiğin ilkelerinden, özel olarak temel Hamilton ilkesinden türetilir. Hamilton ilkesi,

sistemin Lagrangian fonksiyonunun integralini minimize eden yörünge boyunca hareket edeceğini ifade eder. Bu yöntem PBC için uygundur. Çünkü depo ve kayıp fonksiyonlarını verir.

n serbestlik derecesine sahip, genelleştirilmiş koordinatları $q \in R^n$ ve dış kuvvetleri $Q \in R^n$ olan dinamik bir sistemin EL denklemleri:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = Q \tag{4.1}$$

Burada $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$ Lagrangian fonksiyonu, $T(q,\dot{q})$ kinetik enerji fonksiyonu olup: $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$ formunda olduğunu varsayıyoruz. Burada $D(q) \in R^{nxn}$ genelleştirilmiş atalet matrisi olup $D(q) = D(q)^T > 0$ koşulunu sağlar. $V(q)$ potansiyel fonksiyonu olup alttan sınırlı olduğu varsayılmıştır. Yani: $\exists c \in R$ öyle ki $V(q) \geq c \quad \forall q \in R^n$ için.

Çalışma boyunca kontrollerin doğrusal girdiğini varsayacağız. $M_u \in R^n$, $M \in R^{nxn}$ sabit matris ve $u \in R^n$ kontrol vektörü. Kayıp kuvvetler $-\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0$ formundadır.

Burada $F(\dot{q})$ Rayleigh kayıp fonksiyonudur ve

$$\dot{q}^T \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0 \tag{4.2}$$

özelliğini tanım gereği sağlar. Özetle; sisteme etkiyen dış kuvvetler:

$$Q = -\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + Q_\varsigma + M_u \tag{4.3}$$

formunda olup Q_ς bozucuların etkisini modelleyen harici bir işarettir. Giriş kısmında belirtildiği gibi PBC'nin amacı sistemin kapalı çevrim dinamiğine belli bir özellik kazandırmaktır. Bu ise istenen bir depo ve kayıp fonksiyonunun atanması ile olur.

Tanım 4.1 (EL sistemleri ve EL parametreleri):

Hareketin EL denklemleri:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q}+-\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}=M_u+Q_\varsigma \tag{4.4}$$

EL parametreleri cinsinden bir EL sistemi: $\{T(q,\dot{q}),V(q),F(\dot{q}),M,Q_\varsigma\}$ M matrisi harici girişleri genelleştirilmiş koordinatlarla ilişkilendiren tam sütun ranklı bir matristir. Bu matrisin yapısına göre iki EL sitemi sınıfı tanımlanabilir:

Tanım 4.2 (Eksik sürülmüş[underactuated] EL sistemi):

Serbestlik derecesi ile kontrol girişi sayısı aynı olan sistemlere 'tam sürülmüş [fully actuated]'denir (yani $n=n_u$, $M=I_n$). Eğer $n_u<n$ ise sistem 'az sürülmüştür' denir. Az sürülmüş durumda q, sürülmemiş $M_q^\perp$ ve sürülmüş M_q bileşenlerine ayrıştırılabilir. $M_q^\perp$, M 'in dik komplementini temsil eder.

Sönüme göre iki sistem tanımlanabilir:

Tanım 4.3 (Az sönümlü [underdamped] ve Tam sönümlü [fully damped] sistemler):

(4.4) EL sistemi tam sönümlüdür denir, eğer Rayleigh kayıp fonksiyonu:

$$\dot{q}^T\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}\geq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot{q}_i^{\,2}\qquad\qquad\alpha_i>0\qquad\qquad\forall i\in\{1,...,n\}$$

sağlarsa. Öte yandan az sönümlüdür eğer $\exists i\in\{1,...,n\}$ öyle ki $\alpha_i=0$.

Tam sönümlü ve az sönümlü EL sistemleri sırasıyla pozitif tanımlı ve yarı pozitif tanımlı olmaya karşı gelir.

4.2 Giriş-Çıkış Özellikleri

Geri beslemeli bir doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) sistemin kararlılığı çevrime verilen kazanç ve faz kaymasına bağlıdır. Bundan başka ve daha önemlisi işaretin kuvvetlendirilmesinin ölçüsü (operatör kazancı) ve işaretin ötelenmesinin ölçüsü

(işaretin pasifliği) fiziksel büyüklüklere bağlı olabilir. Giriş çıkış yaklaşımı kontrol kuramının 'karmaşık sistemleri düşünmenin en iyi yolu onların basit alt sistemlerin arabağlaşımı olduğunu düşünmektir' bakış açısıyla uyumludur. Böyle düşünmenin iki önemli yanı vardır. Birincisi elemanların giriş-çıkış özellikleri ile karakterize edilen davranışları onların sistemleri oluştururkenki arabağlaşım şeklinden daha önemlidir. İkincisi bize tasarıma yönelik yöntemler bulmamızda yardımcı olur. Çünkü kontrolöre bağımsız bir alt sistem gibi bakabiliriz.

Bu bölümde PBC için önemli olan araçlar tanıtılacaktır. Bunlar sadece EL sistemlerinin pasifliğiyle ilgili değil, bu sistemlerin arabağlaşımıyla da ilgilidir.

EL sistemleri pasif dönüşümler tanımlarlar. Bu PBC'nin en temel özelliğidir. Bu özellik kontrol edilmesi kolay çıkışı ayırt eder ve gerçeklenmesi istenen kapalı çevrimli depo fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılacak bir depo fonksiyonu verir.

Kontrolör tasarımını kolaylaştırmak için EL sistem dinamiğinin iki pasif alt sistem olarak geri beslemeli bir arabağlaşıma nasıl indirgeneceğini göstereceğiz. İndirgemenin / ayrıştırmanın hangi koşullarda mümkün olduğunu göstereceğiz.

Kontrolörün görevini EL yapısı arabağlaşımını koruyan [EL structure preserving interconnection] olarak göstereceğiz. Bu sayede kapalı çevrimin özellikleri hala enerji ve kayıp fonksiyonları tarafından verilebilir.

4.2.1 EL Sistemlerinin Pasifliği

Pasif sistemler, ortamla enerji alışverişinin önemli olduğu sistemlerdir. Pasif bir sistemde, sisteme verilen enerji onda depolanan enerjiden az değildir. Başka bir deyişle pasif bir sistem kendisine dışarıdan verilen enerjiden daha fazlasını depolayamaz. Arada ki fark tüketilen enerjidir. Aşağıdaki teorem EL sistemlerinin birer pasif dönüşüm tanımladıklarını gösterir.

Teorem 4.1: (4.4) ile verilen EL sisteminde $Q_\varsigma \equiv 0$ için depo fonksiyonu toplam enerjisi $H(q,\dot{q})$ olan $\Sigma : u \to M^T \dot{q}$ 'a pasif bir operatör tanımlar. Yani

$$< u \mid M^T \dot{q} >_T \geq H[q(T),\dot{q}(T)] - H[q(0),\dot{q}(0)] \quad , \forall T \geq 0 \text{ ve } u \in L_{2e}^m \tag{4.5}$$

Bu özellik sistemin tam sönümlü olması durumunda, çıkış kesin pasif (OSP) durumu için de geçerlidir. Bu durumda:

$$< u \mid M^T \dot{q} >_T \geq \alpha \parallel M^T \dot{q} \parallel_{2T}^2 + H[q(T), \dot{q}(T)] - H[q(0), \dot{q}(0)], \alpha > 0 \text{ ve } \forall u \in L_{2e}^m \quad (4.6)$$

İspat: Özellik $L(q, \dot{q})$ Lagrangian'ın zamana göre türevi alınarak elde edilebilir:

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)^T \frac{dq}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \frac{d\dot{q}}{dt} \quad (4.7)$$

ve (4.1) de ki EL eşitliğini kullanarak: $\frac{dL}{dq} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - Q$. Buradan (4.7) şöyle yazılabilir: $\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} - \dot{q}^T Q$.

(4.3) kullanılırsa ve yukarıdaki terimler yeniden düzenlenirse:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} - L \right] = \dot{q}^T \left(M_u - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \quad (4.8)$$

sol tarafta parantezin içindeki terimler sistemin $H(q, \dot{q})$ ile gösterilen toplam enerjisine karşı düşer: $\left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q) := H(q, \dot{q})$.

(4.8) ifadesi 0'dan T'ye integre edilirse, enerji denge [energy balance] denklemi elde edilir:

$$H[q(T), \dot{q}(T)] - H[q(0), \dot{q}(0)] + \int_0^T \dot{q}^T \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} ds = \int_0^T \dot{q}^T M_u ds \quad (4.9)$$

$V(q)$ alttan c ile sınırlı olduğundan ve $T(q,\dot{q}) \geq 0$ olduğundan $H(q,\dot{q}) \geq c$'dir. Rayleigh kayıp fonksiyonu (4.2)'yi sağladığından (4.5)'in doğruluğu gösterilmiş olur.

Eğer sistem tam sönümlü ise Tanım 4.3'den ve (4.9) eşitliğinden (4.6) ifadesinin $\alpha := \frac{\min\{\alpha_i\}}{\| M \|^2}$ göre doğru olduğu görülür.

Uyarı 4.1: (4.9) eşitliği EL sistemlerinin ilginç özelliklerini verir. Birincisi u=0 için enerji artmaz. Bu durumda zorlanmamış sistemin denge noktası Lyapunov anlamında kararlıdır. İkinci olarak $M\dot{q}$ çıkışı sıfıra eşitlenirse kararlılık yine korunur. Üçüncü olarak $\dot{q}$ ölçülebilir ise sönüm kolayca eklenebilir.

4.2.2 Hata Dinamiğinin Pasifliği

Yukarıda anlatılan pasiflik özelliği mekanik sistemlerdeki kontrol problemini çözmek için yeterlidir. Burada, PBC ile potansiyel enerji ve kayıp fonksiyonu değiştirilir. Yinede izleme problemi veya elektrik-elektro mekanik sistemlerle uğraşmak için daha güçlü özelliklere ihtiyaç vardır. Bunun temel nedeni sadece q nun davranışını değil, $\dot{q}$'in da davranışını değiştirmek isteyebileceğimizdir. Bunun anlamı kinetik enerjiyi de değiştirmeye ihtiyaç duyabileceğimizdir.

PBC tekniğinin ilk adımı:

$$D(q)\dot{s} + [C(q,\dot{q}) + K_d(q,\dot{q})]s = 0 \tag{4.10}$$

biçiminde kapalı çevrimi gerçeklemektir. Burada s, sıfırlamak istediğimiz bir hata işaretini temsil etmektedir. $K_d(q,\dot{q}) = K_d(q,\dot{q})^T > 0$ sönüm enjeksiyon matrisi ve $C(q,\dot{q})$,

$$\dot{D}(q) = C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q}) \tag{4.11}$$

işlemini sağlayan bir matristir. (4.11) eşitliği $Z^T[\dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q})]Z = 0$, $\forall Z \in R^n$ skew-simetri özelliğine denktir.

Aşağıdaki lemma (4.10) ifadesinin neden amaçlandığını açıklar:

Lemma 4.1: $D(q)\dot{s}+[C(q,\dot{q})+K_d(q,\dot{q})]s=\psi$, $D(q)$ ve $K_d(q,\dot{q})$ pozitif tanımlı ve $C(q,\dot{q})$ (4.11) eşitliğini sağlar. Bu diferansiyel denklem $\Sigma_d:\psi\to s$ ye bir OSP operatörü tanımlar. Sonuç olarak eğer $\psi\equiv 0$ ise $s\in L_2$ dır.

İspat:

$$H_d=\frac{1}{2}s^T D(q)s\geq 0 \tag{4.12}$$

Depo fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.12)'yi zamana göre türetirsek ve $\dot{D}(q)-2C(q,\dot{q})$'in skew-simetrik olma özelliğini kullanırsak $H_d\leq -K_d(q,\dot{q})s^2+\psi^T s$ elde ederiz. Bu eşitsizliğin iki tarafı da 0'dan T'ye integre edilirse OSP özelliği gösterilmiş olur. İspatın ikinci kısmı OSP sistemlerinin L_2 kararlı olmasından gelmektedir. Böylece $\psi\equiv 0$ olduğu durumda $s\in L_2$ dir.

Yukarıdaki ayrıştırmayı kullanarak (4.4)' de ki EL denklemleri eşdeğer olarak,

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}=M_u+Q_\varsigma \tag{4.13}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g(q):=\frac{\partial V(q)}{\partial q}$ dır.

4.2.3 Öteki Özellikler ve Varsayımlar

Bu çalışmada aşağıdaki özellikleri sağlayan ve varsayımlara uyan sistemlerle ilgileniyoruz:

Özellik 4.1: (4.13) sistemi şu şekilde parametrelerine ayrıştırılabilir:

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}=\Phi(q,\dot{q},\ddot{q})\Theta \tag{4.14}$$

Burada $\Theta \in R^P$ sabit parametreli bir vektör, $\Phi(q,\dot{q},\ddot{q}) \in R^{qxn}$ olup "regressor matrisi" denir.

Varsayım 4.1: D(q) simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olup,

$$d_m I < D(q) < d_M I \tag{4.15}$$

koşulunu sağlayan d_m>0 ve d_M>0 sabitleri vardır.

Varsayım 4.2:

$$k_g \geq \sup_{q \in R^n} \| \frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2} \| \tag{4.16}$$

$$k_v \geq \sup_{q \in R^n} \| \frac{\partial V(q)}{\partial q} \| \tag{4.17}$$

koşullarını sağlayan $k_g > 0$ ve $k_v > 0$ sabitleri vardır.

Özellik 4.2: $C(x,y)$ matrisi x'e göre sınırlı ve y ye göre doğrusaldır:

$$\forall z \in R^n \text{ için } \quad C(x,y)z = C(x,z)y \tag{4.18}$$

ve

$$\| C(x,y) \| \leq k_c \| y \|, k_c > 0 \tag{4.19}$$

(4.18) $C(q,\dot{q})$ ın tanımından gelir. (4.19) ise (4.15) varsayımından gelir.

4.2.4 Pasif Alt Sistem Ayrıştırması

Bazı pratik durumlarda genelleştirilmiş atalet[generalized inertia] matrisi blok köşegendir. Bu tip sistemler için aşağıda ki özellik geçerlidir:

Teorem 4.2: $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$ ile verilen Lagrangian'ın $L(q,\dot{q}) = L_e(q_e,\dot{q}_e,q_m) + L_m(q_m,\dot{q}_m)$ $q := [q_e^T, q_m^T]^T$, $q_e \in R^{n_e}$ ve $q_m \in R^{n_m}$ biçiminde ayrıştırılabildiğini varsayalım. Bu koşullarda (4.1) ile verilen EL sistemi iki pasif alt sistemin negatif geri beslemeli arabağlaşımı olarak temsil edilebilir.

$\Sigma_e : \begin{bmatrix} Q_e \\ -\dot{q}_m \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \tau \end{bmatrix} \Sigma_m : (\tau + Q_m) \alpha \dot{q}_m$. Bu sistemlere dair depo fonksiyonları sırasıyla $L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)$ ve $L_m(q_m, \dot{q}_m)$ olup $\tau := \frac{\partial L_e(q_e, \dot{q}_e, q_m)}{\partial q_m}$ alt sistemleri bağlaştıran işaret ve $Q := [Q_e^T, Q_m^T]^T$, $Q_e \in R^{n_e}$, $Q_m \in R^{n_m}$ 'dır.

4.2.5 EL Yapısını Koruyan Bir Arabağlaşım

Giriş kısmında açıklandığı gibi PBC'nin amacı kapalı çevrimde, istenen pasif bir dönüşümü gerçeklemektir. EL sistemleri pasif operatörler tanımlarlar ve pasiflik geri besleme arabağlaşımı altında değişmezdir. Çalıştığımız sistemleri EL olarak kısıtlarsak, EL yapısını koruyan (kapalı çevrimin pasifliğini de) bir kontrolör tanımlayabiliriz. Daha da önemlisi yeni depo ve enerji fonksiyonlarının birbirlerine eklenmesi ile bulunur.

Teorem 4.3 (Arabağlaştırılmış EL sistemleri):

Genelleştirilmiş koordinatları $q_p \in R^{n_p}$ ve $q_c \in R^{n_c}$ olan $\Sigma_p : \{T_p(q_p, \dot{q}_p), V_p(q_p), F_p(\dot{q}_p), M_p\}$ ve $\Sigma_c : \{T_c(q_c, \dot{q}_c), V_c(q_c, q_p), F_c(\dot{q}_c)\}$ olan sistemler göz önüne alınsın. Sistemler şu şekilde arabağlaştırılsın: $M_p u = -\frac{\partial V_c(q_c, q_p)}{\partial q_p}$, burada u Σ_p alt sisteminin girişidir. Bu koşullar altında $\Sigma : \{T(q, \dot{q}), V(q), F(\dot{q})\}$ kapalı çevrim sitemi bir EL sistemi olup genelleştirilmiş koordinatları $q = [q_p^T, q_c^T]$ ve EL parametreleri $T(q, \dot{q}) = T_c(q_c, \dot{q}_c) + T_p(q_p, \dot{q}_p)$; $V(q) = V_p(q_p) + V_c(q_c, q_p)$; $F = F_c(\dot{q}_c) + F_p(\dot{q}_p)$ 'dir.

4.3 Lyapunov Kararlılığı Özellikleri

4.3.1 Tam Sönümlü sistemler

Teorem 4.4 (Tam Sönümlü Sistemlerde Global Asimptotik Kararlılık):

Tam sönümlü, zorlanmamış $(u = Q_\varsigma = 0)$ bir EL sisteminin denge noktaları $(q, \dot{q}) = (\bar{q}, 0)$ olup $\bar{q}$

$$\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \tag{4.20}$$

denkleminin çözümüdür. $\bar{q}$, $V(q)$ potansiyel enerji fonksiyonunun lokal bir minimumu ise denge noktası kararlıdır. Bundan başka $V(q)$ 'proper' ise ve minimum tek ise denge noktası Global Asimptotik Kararlıdır.

İspat: Denge noktasının varlığını göstermek için $u = Q_{\varsigma} = 0$ alınmalıdır.

$$D(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q}) + \frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{4.21}$$

buradan,

$$N(q,\dot{q}) := \frac{d}{dt}\{D(q)\} - \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q} \tag{4.22}$$

olarak tanımlanmış olup, $N(q,0) = 0$ dır. $\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{q}=0} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$\bar{q}$ denge noktalarının (4.20)'nin çözümleri olduğu sonucu çıkar.

Tam aşımlı EL sistemleri için $u \alpha \dot{q}$ dönüşümü çıkış kesin pasiftir (OSP). Burada depo fonksiyonu toplam enerjidir. Potansiyel enerji açısından bakılırsa, toplam enerji alttan sınırlıdır. Ve toplam enerjiyi pozitif tanımlı yapmak için basitçe bir sabit ekleyebiliriz. Kararlılığı göstermek için EL sisteminin sıfır-durum sezilebilir [zero state detectable] olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bu da sistemin sıfır-durum-gözlenebilir [zero state observable] olduğunu göstermekle eşdeğerdir. (4.21) ifadesi $\dot{q} = 0$ alınır ve bunun $\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0$ yaptığı göz önüne alınırsa denge noktasının tekliği varsayımından ve $V(q)$ un 'proper' olmasından sistemin Global Asimptotik Kararlı olduğu sonucu çıkar.

4.3.2 Az Sönümlü Sistemler

Atalet matrisi $D(q)$'nun blok köşegen olması ve tüketimin uygun bir biçimde olması durumunda tek bir denge noktasına sahip bir sistem tam sönümlü olmasa bile Global Asimptotik Kararlı olabilir. Sönümlü ve az sönümlü koordinatları ayırt etmek için q'yu şöyle ayrıştıralım:

$$q_c := [0 \quad I_{n_c}]q, \qquad q_p := [I_{n_p} \quad 0]q, \qquad n = n_p + n_c \tag{4.23}$$

Burada $(.)_c$ ve $(.)_p$ alt indisleri sırasıyla kontrolör ve plantı temsil etmektedir.

Teorem 4.5 (Kısmi Sönümlü GAS):

Koordinatları (4.23)'de ki gibi ayrıştırılmış zorlanmamış az sönümlü bir EL sistemi göz önüne alınsın. Bu durumda eğer potansiyel enerji fonksiyonu proper ve $q = \bar{q}$'da global ve tek bir minimum varsa ve,

(i) $$D(q) = \begin{bmatrix} D_p(q_p) & 0 \\ 0 & D_c(q_c) \end{bmatrix} \qquad D_p(q_p) \in R^{n_p x n_p} \text{ ve}$$

$$D_c(q_c) \in R^{n_c x n_c}$$

(ii) $$\dot{q}\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq \alpha \| \dot{q}_c \|^2, \alpha > 0$$

(iii) Her q_c için $\frac{\partial V(q)}{\partial q_c} = 0$ fonksiyonunun q_p'de izole sıfırları var.

Bu koşullarda $(\dot{q}, q) = (0, \bar{q})$ global asimptotik kararlı denge noktasıdır.

İspat:

Teorem 4.1 de ki gibi işlemler yapılırsa $u \alpha \dot{q}_c$'ye olan dönüşüm çıkış kesin pasif (OSP) olduğu görülür. $D(q)$'nun blok köşegen yapısını kullanarak Teorem 4.4'deki gibi (4.4)'de verilen EL denklemlerini $u = Q_\varsigma = 0$ için yazarsak,

$$D_p(q_p)\ddot{q}_p + N_p(q_p, \dot{q}_p) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_p} = 0 \tag{4.24}$$

$$D_c(q_c)\ddot{q}_c + N_c(q_c,\dot{q}_c) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_c} + \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_c} = 0 \qquad (4.25)$$

Burada $N_c(q_c,\dot{q}_c)$, $N_p(q_p,\dot{q}_p)$ (4.22) formunda tanımlanmış uygun vektörlerdir. Denge noktaları $V(q)$ potansiyel enerji fonksiyonunun kritik noktaları ile belirlenmekte olup $\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0$ denkleminin çözümleridir. Kararlılığın ispatı Teorem 3.5 kullanılarak yapılır. Böylece $\dot{q}_c$ çıkışına göre sıfır-durum sezilebilirliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakmamız yeterlidir. $\dot{q}_c = 0$, $q_c = sabit$ seçilirse (4.25) ve (iii) koşulundan q_p'nin de sabit olduğu sonucu çıkar. $q = \bar{q}$ (4.24) , (4.25)'nin tek global denge noktası olduğundan sistem sıfır-durum sezilebilirdir.

Hatırlatma 4.1: (4.24), (4.25)'i kayıpsız bir sistem için yazarsak: $D_p(q_p)\ddot{q}_p + N_p(q_p,\dot{q}_p) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_p} = 0$, $D_c(q_c)\ddot{q}_c + N_c(q_c,\dot{q}_c) + \frac{\partial V(q)}{\partial q_c} + \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_c} = 0$

kapalı çevrimde kayıp terimi $y = \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_c}$, $u = -y$.

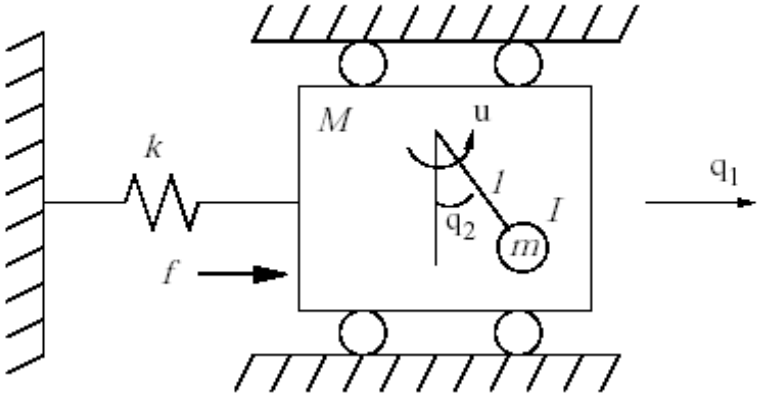
Teorem 4.5 sıfır-durum gözlenebilirlik özelliği ve aşağıdaki teorem ile ispatlanabilir.

Teorem 4.4: Pozitif tanımlı ve proper bir H depo fonksiyonuna sahip kayıpsız bir sistem göz önüne alınsın. Çıkış geri besleme kuralı $u = -ky$, $k > 0$ kapalı çevrimli sistemin orijinini global asimptotik kararlı (GAS) yapar ancak ve ancak sistem sıfır-durum gözlenebilir ise.

4.4 Örnekler

Lagrangian formalizmi hareket denklemlerinin kurulmasında büyük kolaylık sağlar. Hareket denklemlerinin türetilmesinde T ve V yi genelleştirilmiş koordinatlarda yazıp (4.4)'ü kullanmak yeterlidir. Bu bölümde EL denklemleri ve bunlara karşı düşen EL parametreleri kullanılarak hareket denklemleri türetilebilen sistemlere örnekler verilecektir.

4.4.1 TORA Sistemi



Şekil 4.1: TORA sistemi

M kütleli araba tek doğrultuda hareket edebiliyor. Tavana asılı m kütlesinin eylemsizlik momenti I, ip uzunluğu l, yerçekimi önemsizdir. m kütlesine uygulanan kontrol torku u dur. q_1 arabanın konumu, q_2 kütlenin açısal konumudur. Bu halde sisteme ait genelleştirilmiş koordinatlar : $q = [q_1 \quad q_2] \in R^2$'dır. Kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonları şöyle tanımlanır:

$$T(q_2, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q_2)\dot{q} = \dot{q}^T \begin{bmatrix} M+m & -ml\cos(q_2) \\ -ml\cos(q_2) & I+ml^2 \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$V(q_1) = \frac{1}{2}kq_1^2$$

$Q_\varsigma = 0$ koşulu altında (4.4)'de ki EL denklemleri yazılırsa:

$$D(q_2)\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{q}_2^2 \sin(q_2)\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kq_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

daha kompakt olarak $D(q_2)\ddot{q} + C(q_2, \dot{q}_2)\dot{q} + g(q_1) = Mu$ (4.26)

$M = [0,1]^T$, $g(q_1) := [kq_1, 0]^T$. Sistem açıkça az sürülmüştür. Sürülen koordinat q_2 dir. Ayrıca sistem sönümsüzdür. Fazladan $u \alpha \ \dot{q}_2$ pasif bir operatör tanımlar.

$$C(q_2,\dot{q}_2)=\begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{q}_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin tanımından,

$$\begin{bmatrix} -ml\dot{q}_2\sin(q_2)\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}=C(q_2,\dot{q}_2)\dot{q}$$

vektörü ayrıştırılabilir. Bu ayrıştırmayı $D(q_2)$ atalet matrisi tek başına belirler.

5 UYGULAMALAR

Bu kısımda bir önceki bölümde anlatılan pasifliğe dayalı kontrol (PBC) tekniğine birkaç örnek verilecektir.

5.1 Basit Sarkaç İçin Sabit Nokta Kontrolü

Bir EL sisteminin denge noktaları $V_p(q_p)$ potansiyel enerji fonksiyonunun minimum noktaları ile belirlenir. Potansiyel enerji fonksiyonunun global ve tek bir minimuma sahip olduğu durumda EL sistemininde global ve tek bir denge noktası vardır. Global aimptotik kararlılık (GAS) için bir EL sisteminde uygun sönümün olması gerekir. EL sistemlerinin bir başka önemli özelliği de iki EL sisteminin geri beslemeli arabağlaşımında bir Lagrangian sistem olmasıdır.

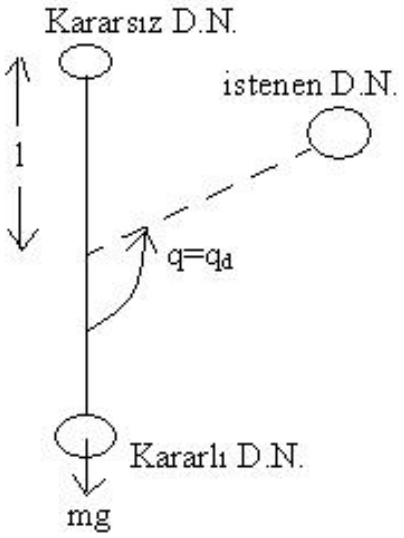
Bu kısımda uygulamalara bir örnek olarak sabit nokta kontrolü verilecektir. Sabit nokta kontrol problemi şöyle formüle edilir: $\Sigma_p\left\{T_p\left(q_p,\dot{q}_p\right),V_p(q_p),F_p\left(\dot{q}_p\right),M_p\right\}$ EL sistemi için bir çıkış geri belemeli kontrolörü bul öyle ki istenen denge noktası $q_p = q_{pd}$ olsun. Burada q_{pd} sabit ve global asimptotik kararlı (GAS) denge noktasıdır.

Bu kısımda tasarlanacak EL kontrolörü potansiyel enerji fonksiyonunu şekillendirecektir. Yeni potansiyel enerji fonksiyonunun $q = q_d$ de global ve tek minimumu olacaktır. Fazladan, sisteme asimptotik kararlı olma özelliği kazandırmak için uygun bir sönüm enjekte edilecektir.

5.1.1 Enerjinin şekillendirilmesi ve sönüm enjeksiyonu

EL sistemlerinin giriş-çıkış ve iç kararlılık özellikleri "pasifliğe dayalı enerji şekillendirme ve sönüm enjeksiyonu " kontrolör tasarım yönteminin geliştirilmesini sağlamıştır. Bu yöntemde sistemin potansiyel enerji fonksiyonu yeniden şekillendirilmektedir. Öyle ki yeni potansiyel enerjinin istenilen bir noktada global

ve tek bir minimuma sahip olması sağlanmaktadır. Burada yöntem 'basit sarkaç' örneği üzerinden tanıtılmaya çalışılacaktır (Şekil 5.1).



Şekil 5.1: Basit Sarkaç

Basit sarkaç sisteminin toplam enerjisi (kinetik enerji ve potansiyel enerji toplamı),

$$H = \underbrace{\frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2}_{T\left(q,\dot{q}\right)} + \underbrace{mgl\left(1-\cos(q)\right)}_{V(q)} \tag{5.1}$$

denklemi ile verilir. Burada $q \in R$ ve $q \in [0,2\pi]$'dır. Lagrangian denklemlerinden,

$$ml^2 \ddot{q} + g(q) = u \tag{5.2}$$

Burada u harici genelleştirilmiş kuvvet, $g(q)$'ya gravitasyonel kuvvet denir. Zorlanmamış ($u \equiv 0$) sistemin denge noktaları potansiyel enerji fonksiyonunun ekstremum noktalarıdır: $\frac{\partial V(q)}{\partial q} = mgl\sin(q) = 0$, denkleminin $q = 0$ ve $q = \pi$'de çözümleri vardır. $V(q)$ 'nun ikinci türevine bakılırsa: $\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2} = mgl\cos(q)$ olup, ikinci türev $q = 0$ için pozitif, $q = \pi$ için negatif olduğundan $q = 0$ potansiyel enerji fonksiyonunun bir minimumu, $q = \pi$ ise potansiyel enerji fonksiyonunun bir

maksimumudur sonucu çıkar. Potansiyel enerji fonksiyonunun minimumu kararlı bir denge noktasına karşı düşer.

Teorem 5.1: Eğer $\bar{q}$, $V(q)$ potansiyel enerji fonksiyonunun lokal bir minimumu ise $q=\bar{q}$ Lyapunov anlamında kararlı bir denge noktasıdır.

Tasarım problemimiz, sarkacı kararlı $q=0$ denge noktasından başka bir yerde kararlı kılmaktır. Potansiyel enerji fonksiyonunun minimumu kararlı bir denge noktasına karşı geldiğinden istenen kararlı denge noktası potansiyel enerji fonksiyonunun global ve tek minimumu olacak şekilde yeni bir potansiyel enerji fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu amaca uygun bir potansiyel enerji fonksiyonu:

$$V_d(q)=\frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2 \tag{5.3}$$

$k_p>0$ ve $\tilde{q}:=q-q_d$'dır. Açıkça $V_d(q)$'nun global ve tek minimumu orijindir: $\tilde{q}=0$. Böylece sistemimize uygun bir potansiyel enerji fonksiyonu atamış olduk. Şimdi problem, sistemin gerçek potansiyel enerji fonksiyonunun nasıl şekillendirileceğidir. Öyle ki son durumda potansiyel enerji fonksiyonu (5.3) eşitliğiyle verilen potansiyel enerji fonksiyonu ile aynı olsun. Bu u kontrol girişi ile yapılacaktır. Lagrange denkleminden:

$$u=\frac{\partial}{\partial q}(V(q)-V_d(q))=g(q)-k_p\tilde{q} \tag{5.4}$$

(5.4) ile verilen kontrol girişi uygulandığında sistemin yeni potansiyel enerji fonksiyonu (5.3) ile verilen potansiyel enerji fonksiyonu olacaktır. Son olarak $q=q_d$ in global asimptotik kararlı denge noktası olması için sisteme yeterince sönüm enjeksiyonu yapılmalıdır: $u=g(q)-k_p\tilde{q}-k_d\dot{q}$. Burada $k_d>0$ dır. Bu kontrol girişine dair en büyük güçlük $g(q)$ doğrusal olmayan teriminin hesaplanmasıdır. Bu terimin yok edilmesi bir çözümdür. Ancak, bunun yerine sabit bir terimin eklenmesinin sistemin dayanıklılığını arttıracağına inanılmaktadır. Bu durum için,

$$V_d(q)=V(q)-V(q_d)+\frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2-g(q_d)\tilde{q} \tag{5.5}$$

potansiyel enerji fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu potansiyel enerji fonksiyonunun $k_p > k_g$ için $q = q_d$ de global ve tek minimumu vardır.

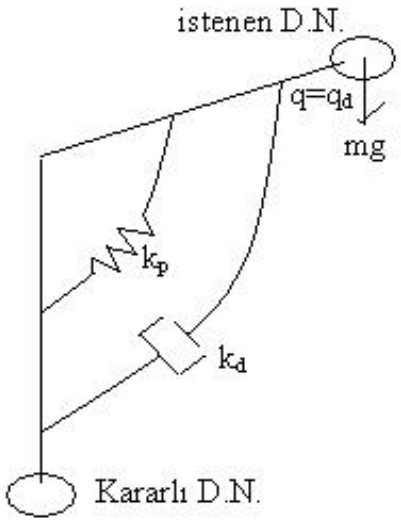
Potansiyel enerji fonksiyonunun böyle seçilmesi durumunda kontrol girişinin ilk kısmı:

$$u=\frac{\partial}{\partial q}(V(q)-V_d(q))=-k_p\tilde{q}+g(q_d) \tag{5.6}$$

olacaktır. Global asimptotik kararlılık için uygun bir sönüm enjeksiyonu yapılırsa:

$$u=-k_p\tilde{q}-k_d\dot{q}+g(q_d) \tag{5.7}$$

Bu kontrolörün fiziksel gösterimi şekil 5.2'de verilmiştir:



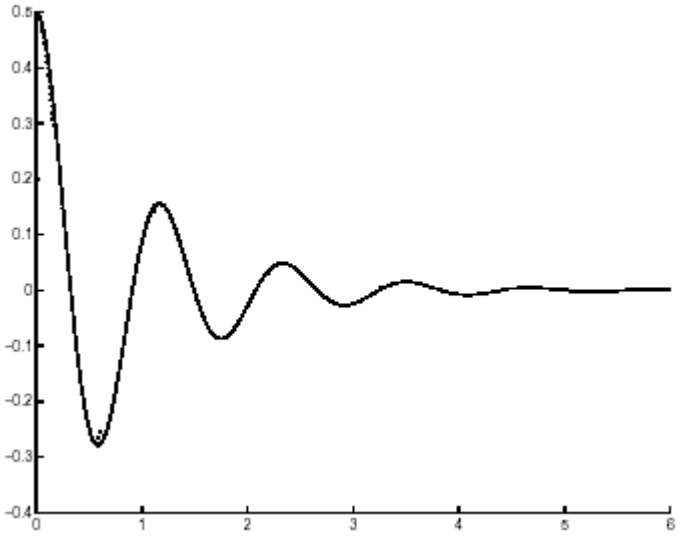
Şekil 5.2 Sabit nokta kontrolörünün fiziksel gösterimi

Bu tür bir kontrolörün tasarımında iki güçlük vardır:

1. Sönümün eklenmesi için $\dot{q}$ genelleştirilmiş hızının ölçülmesi gerekmektedir.

2. $V(q)$ potansiyel enerji fonksiyonu tam biliniyor varsayılmaktadır.

Şekil 5.3'de $k_p = 15$, $k_d = 1$, $m = 0.5$, $l = 1$ ve $q_d = 0$ için Matlab simülasyonu gösterilmiştir.



Şekil 5.3: Basit sarkaç kontrolü

5.2 EL Sistemlerinin Çıkış Geri Beslemesi ile Kararlı Kılınması

5.2.1 Problem Formülasyonu

Bu kısımda iç sönümü olmayan EL sistemleri ele alınacaktır. Böyle bir EL sisteminin parametrik gösterimi: $\left\{T_p\left(q_p,\dot{q}_p\right),V_p\left(q_p\right),0,M_p\right\}$ ve sistemin dinamik modeli:

$$D_p\left(q_p\right)\ddot{q}_p+C_p\left(q_p,\dot{q}_p\right)\dot{q}_p+g\left(q_p\right)=u_p \tag{5.8}$$

$u_p=M_p u\in R^n$ plantın kontrol girişleri vektörüdür.

Tanım 5.1: (5.8) ile verilen EL sistemi göz önüne alınsın. $q_p=\left[q_{p1}^T,q_{p2}^T\right]^T$, $q_{p2}=M_p q_p$ olsun. q_{p2} ölçülebilen çıkışların istenilen değerleri olsun. Bu koşullarda kapalı çevrimli sistemi bir $\bar{q}$ denge noktasında global asimptotik kararlı (GAS) yapacak q_{p2} α u_p'ye kontrolörünü tasarla. Burada $\bar{q}$, $\bar{q}_{p1}=q_{p1d}$ koşulunu sağlar.

5.2.2 Sönüm Enjeksiyonu

Burada genelleştirilmiş koordinatları $q_c \in R^{n_c}$ ve EL parametreleri $\left\{T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right), V_c\left(q_c, q_p\right), F_c\left(\dot{q}_c\right)\right\}$ olan EL kontrolörleri göz önüne alınacaktır.

Kontrolör dinamiği:

$$D_c\left(q_c\right)\ddot{q}_c + \dot{D}_c\left(q_c\right)\dot{q}_c - \frac{\partial T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right)}{\partial q_c} + \frac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_c} + \frac{\partial F_c\left(\dot{q}_c\right)}{\partial \dot{q}_c} = 0 \tag{5.9}$$

Kontrolörün potansiyel enerjisi ölçülebilen q_{p2} çıkışına bağlıdır. Böylece $q_{p2}, \frac{\partial V_c\left(q_c, q_{p2}\right)}{\partial q_c}$ terimi ile kontrolöre girmektedir. Öte yandan plant ve kontrolör arasındaki geri besleme

$$u_p = -\frac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_{p2}} \tag{5.10}$$

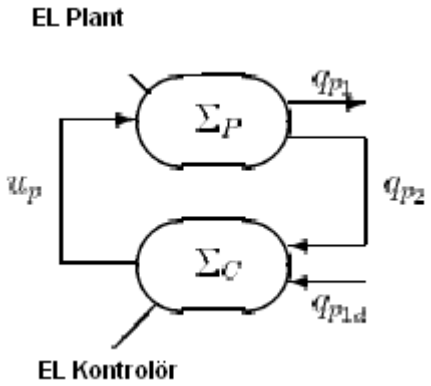
ile sağlanmaktadır. Böylece sistemin kapalı çevrimdeki davranışı $\left\{T\left(q, \dot{q}\right), V\left(q\right), F\left(\dot{q}\right), 0\right\}$ EL parametreleri ile karakterize edilmektedir. Burada,

$T\left(q, \dot{q}\right) := T_p\left(q_p, \dot{q}_p\right) + T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right)$

$V(q) := V_p\left(q_p\right) + V_c\left(q_c, q_p\right)$

$F\left(\dot{q}\right) := F_p\left(\dot{q}_p\right) + F_c\left(\dot{q}_c\right)$ ve $q = \left[q_p, q_c\right]^T$ 'dur.

$F\left(\dot{q}\right)$'nin yeni tanımından eğer F_c bir Rayleigh kayıp fonksiyonu ise isteme sönüm enjeksiyonu kontrolör üzerinden yapılır. Şekil 5.4 'de sistem gösterilmiştir.



Şekil 5.4 EL kapalı çevrimli sistemi

Burada $\Sigma_p : u_p \; \alpha \; q_{p2}$ ye (5.9)'a göre tanımlı, $\Sigma_c : q_{p2} \; \alpha \; u_p$ ye (5.9) ile tanımlı operatörlerdir.

5.2.3 Euler-Lagrange Kontrolörleri

Bu kısımda EL yapısını koruyan, potansiyel enerji fonksiyonunu değiştiren ve EL plantının kayıp özelliklerini koruyan bir kontrolör tanımlanacaktır. Teknik, daha önce bahsedilen enerji şekillendirme ve sönüm enjekiyonu ile aynıdır. EL yapısı korunacağından kontrolörde EL parametreleri $\left\{T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right), V_c\left(q_c, q_p\right), F_c\left(\dot{q}_c\right)\right\}$; $q_c \in R^{n_c}$ olan bir EL sistemidir. Kontrolör dinamiği

$$D_c\left(q_c\right)\ddot{q}_c + C_c\left(q_c, \dot{q}_c\right)\dot{q}_c + \frac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_c} + \frac{\partial F_c\left(\dot{q}_c\right)}{\partial \dot{q}_c} = 0 \tag{5.11}$$

Teorem 4.3'den plant ve EL kontrolörü arasında ki arabağlaşım $M_p u = -\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_p}$ ile yapılır. Ortaya çıkan yeni sistem de EL yapısındadır. Kinetik enerji fonksiyonunun kuadratik olduğunu varsayalım. Bu halde kapalı çevrimin kinetik enerjisi:

$$T\left(q, \dot{q}\right) := T_p\left(q_p, \dot{q}_p\right) + T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right) = \frac{1}{2}\dot{q}_p^T D_p \dot{q}_p + \frac{1}{2}\dot{q}_c^T D_c \dot{q}_c = \frac{1}{2}\dot{q}^T \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \dot{q}$$

EL sisteminin kararlı kılınmasında kinetik enerjinin hiçbir etkisi yoktur. Bu $T_c = 0$ için de geçerlidir. $T_c\left(q, \dot{q}\right) = 0$ olsun. Bu halde (5.11) denkleminin ilk iki terimi sıfır olacaktır. Rayleigh kayıp fonksiyonunu da kuadratik olduğunu varsayarsak yani $F_c\left(\dot{q}_c\right) = \frac{1}{2}\dot{q}_c^{\,T} R_c \dot{q}_c$ ve $R_c = R_c^T > 0$. Bu halde EL kontrolörü şöyle ifade edilebilir:

$$\frac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_c} + \frac{\partial F_c\left(\dot{q}_c\right)}{\partial \dot{q}_c} = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_c = -R_c^{-1}\frac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_c}$$

Bununla birlikte ve Teorem 4.3'de gösterilen arabağlaşımla kontrolör dinamiği şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{cases} \dot{q}_c = -R_c^{-1}\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_c} \\ M_p u = -\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_p} \end{cases} \tag{5.12}$$

Eğer ölçülebilen tek büyüklük q_{p2} ise kontrolör dinamiği,

$$\begin{cases} \dot{q}_c = -R_c^{-1}\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_{p2}\right)}{\partial q_c} \\ M_p u = -\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_{p2}\right)}{\partial q_{p2}} \end{cases}$$

Son durumda elde edilen kapalı çevrimli sistem Teorem 4.3'e göre bir EL sistemi olup EL parametreleri:

$$T\left(q, \dot{q}\right) := T_p\left(q_p, \dot{q}_p\right) + T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right)$$

$$V(q) := V_p\left(q_p\right) + V_c\left(q_c, q_{p2}\right)$$

$F\left(\dot{q}\right) := F_c\left(\dot{q}_c\right)$ ve $q = \left[q_p, q_c\right]^T$'dır.

Teorem 5.2 (Çıkış geri beslemesi kararlılığı):

(5.11) ile verilen, parametreleri $\left\{T_p\left(q_p,\dot{q}_p\right),V_p\left(q_p\right),F_p\left(\dot{q}_p\right),M_p\right\}$ ölçülebilir çıkışları q_{p2} ve kontrol edilmek istenen çıkışları q_{p1} olan bir EL plantı göz önüne alınsın. (5.12), (5.13) ile verilen ve parametreleri $\left\{T_c\left(q_c,\dot{q}_c\right),V_c\left(q_c,q_{p2}\right),F_c\left(\dot{q}_c\right),0\right\}$ olan bir EL kontrolöründe,

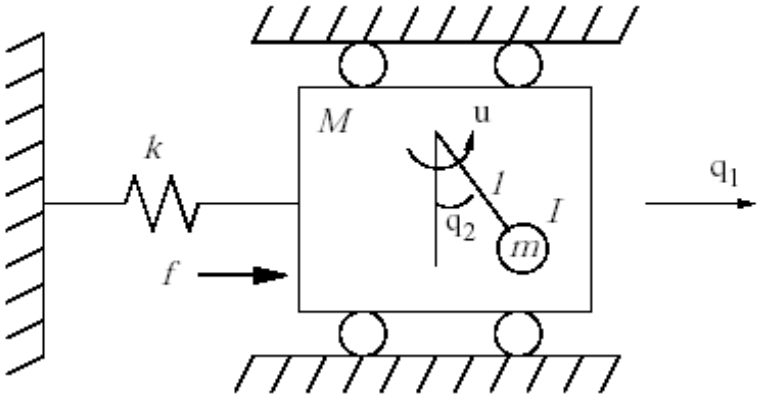
1. $\dot{q}_c^{\,T}\dfrac{\partial F_c\left(\dot{q}_c\right)}{\partial \dot{q}_c}\geq\alpha\left\|\dot{q}_c\right\|^2$ koşulunu sağlayan $\alpha>0$ varsa bu kontrolör global çıkış geri beslemeli kontrol problemini çözer, eğer,

2. (Enerji Şekillendirme) $\dfrac{\partial V(q)}{\partial q}=0$ denkleminin $q_{p1d}=\begin{bmatrix}I_{np1} & 0\end{bmatrix}\bar{q}$ olmak üzere $\bar{q}$ biçiminde bir $q=\bar{q}$ sabit çözümü vardır ve bu $V(q)$'nun tek minimumudur $V(q)$ 'proper'dir.

3. (Kayıp Yayılımı) Her $q_c=sabit$ ve $\dfrac{\partial V_c\left(q_c,q_{p2}\right)}{\partial q_c}=0$ yörüngesi için $q_p=sabit$

Bu teoremde açıkça görülmektedir ki kararlı kılmada sitemin kinetik enerjisinin hiçbir rolü yoktur. Sistemin sadece potansiyel enerjisi şekillendirilmektedir.

5.2.4 TORA Sisteminin Çıkış Geri Beslemesi ile Kararlı Kılınması



Şekil 5.5: Tora Sistemi

Şekildeki sistemi göz önüne alalım. M arabanın kütlesidir. Araba yatay bir yüzey üzerinde hareket etmektedir ve sabiti k olan bir yayla duvara bağlıdır. Diğer duvarlar araba için bir yol yapmaktadırlar ve hareketi kısıtlamaktadırlar. l uzunluklu m kütleli yatayda hareket yapan sarkacın eylemsizlik momenti I 'dır. Sürtünmeler ihmal edilmiştir. u kontrol torkudur. q_1 öteleme hareketi, q_2 sarkacın açısal konumudur. $q_2 = 0$ açısı arabanın hareket yönüne diktir. $q_2 = \frac{\pi}{2}$ durumunda sarkaç q_1 ile aynı yönü göstermektedir. Bu halde genelleştirilmiş koordinatlar $q = [q_1 \quad q_2] \in R^2$ 'dır. Kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonları:

$$T(q_2, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q_2)\dot{q} = \dot{q}^T \begin{bmatrix} M+m & -ml\cos(q_2) \\ -ml\cos(q_2) & I+ml^2 \end{bmatrix} \dot{q}$$

ve,

$$V(q_1) = \frac{1}{2}kq_1^2$$

Bu sistem için EL denklemleri:

$$D(q_2)\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{q}_2^2\sin(q_2)\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kq_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

veya,

$$D(q_2)\ddot{q} + C(q_2, \dot{q}_2)\dot{q} + g(q_1) = Mu$$

$$M = [0,1]^T, \; g(q_1) := [kq_1, 0]^T$$

ve

$$C(q_2, \dot{q}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{q}_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu sistemde sürülebilen koordinat q_2 olup bunu q_{p2} ile gösterirsek sistemin EL parametreleri,

$$T\left(q_{p2}, \dot{q}_p\right) = \frac{1}{2}\dot{q}_p^T D\left(q_{p2}\right)\dot{q}_p = \frac{1}{2}\dot{q}_p^T \begin{bmatrix} M+m & ml\cos(q_{p2}) \\ ml\cos(q_{p2}) & I+ml^2 \end{bmatrix} \dot{q}_p$$

ve,

$$V(q_{p1}) = \frac{1}{2} k {q_{p1}}^2 \ , \ F_p\left(\dot{q}_p\right) = 0, \ M_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu sistem $\lfloor q_{p1} \quad q_{p2} \rfloor = \lfloor 0 \quad q_{p2}* \rfloor$ denge noktasında global asimptotik kararlı kılınabilir. Bu ise,

$$u_p = -k_p q_{p2} - k_d \dot{q}_{p2} \qquad ; \ k_d, k_p > 0$$

PD kontrolörü türetir. u_p kontrol işareti sadece q_{p2}'yi barındırmaktadır. Çünkü genelleştirilmiş koordinatlardan yalnızca birini ölçerek kararlı bir sistem elde etmek istiyoruz. Genelde hızı ölçmek zordur veya bazı durumlarda imkansızdır. Bunun bir nedeni gürültüdür. Bu nedenle hız kestirilmeye çalışılacaktır.

5.2.4.1 Yaklaşık Türevle Kontrol

Sadece q_{p2}'nin ölçülebildiğini varsayıyoruz. Bu bizi $T_c(q_c, \dot{q}_c) = 0$, $F_c\left(\dot{q}_c\right) = \frac{k_d}{2ab} \dot{q}_c^{\ 2}$, $V_c\left(q_c, q_{p2}\right) = \frac{k_p}{2} q_{p2}^2 + \frac{k_d}{2b}\left(q_c + b q_{p2}\right)^2$; $a, b, k_d, k_p > 0$ formunda bir EL kontrolörüne götürür. (5.12) denkleminden,

$$\begin{cases} \dot{q}_c = -a\left(q_c + b q_{p2}\right) \\ M_p u = -\dfrac{\partial V_c\left(q_c, q_p\right)}{\partial q_p} \end{cases} \tag{5.13}$$

Teorem 5.2'den bu yapının global asimptotik kararlı olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle kapalı çevrimli sistemin potansiyel enerji fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$V(q) = V_p\left(q_p\right) + V_c\left(q_c\right) = \frac{1}{2} q^T \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k_p + k_d b & k_d \\ 0 & k_d & k_d \diagup b \end{bmatrix} q \ , \ q = \lfloor q_{p1}, q_{p2}, q_c \rfloor$$

Potansiyel enerji fonksiyonu pozitif tanımlı olup $q = 0$'da bir minimumu vardır. Böylece Teorem 5.2'nin 2. koşulu sağlanır. $\alpha = k_d$ için 1. koşulu sağlanır. Şimdi 3. koşulun sağlandığını gösterelim: (5.13) denkleminden $q_c = sabit$ ise q_{p2}'nin de

sabit olacağı görülür. $\dot{q}_c = sabit$ olsun (yani kontrolör dengede olsun). Bu halde TORA sisteminin dinamik denklemleri:

$$\begin{bmatrix} M+m & -ml\cos(q_{p2}) & 0 \\ -ml\cos(q_{p2}) & I+ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k_p + k_d b & k_d \\ 0 & k_d & k_d / b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{p1} \\ q_{p2} \\ q_c \end{bmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

Burada iki farklı durum gözlenir:

Durum 1: $\cos(q_{p2}) \neq 0$ olsun. (5.14)'den $\ddot{q}_{p1} = 0$ olur ve,

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k_p + k_d b & k_d \\ 0 & k_d & k_d / b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{p1} \\ q_{p2} \\ q_c \end{bmatrix} = 0$$

Bunun çözümü ise $\begin{bmatrix} q_{p1} & q_{p2} & q_c \end{bmatrix}^T = 0$ dır.

Durum 2: $\cos(q_{p2}) = 0$ olsun. Buradan $\begin{bmatrix} q_{p2} & q_c \end{bmatrix}^T = 0$ sonucu çıkar. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak Teorem 5.2'nin 3. koşulu da sağlanmaktadır.

Şimdi bu PBC'nin yukarıda bahsedilen yaklaşık türevle bir PD kontrolörü olduğunu göstereceğiz.

$v = q_c + bq_{p2}$ olsun. Bu halde $u = -k_p q_{p2} - k_d v$ yazabiliriz. v nin türevini alırsak:

$$\dot{v} = \dot{q}_c + b\dot{q}_{p2} = -a(q_c + bq_{p2}) + b\dot{q}_{p2} = -av + b\dot{q}_{p2}$$

Laplace dönüşümünden:

$$sv = -av + bsq_{p2} \Rightarrow v = \frac{bs}{s+a} q_{p2}$$

Bunu kontrol kuralında yerine yazarsak:

$$u = -k_p q_{p2} - k_d \frac{bs}{s+a} q_{p2} = -k_p q_{p2} - k_d \frac{\frac{b}{a}s}{1+\frac{s}{a}} q_{p2}$$

olacaktır. Bu ise yaklaşık türevli bir PD kontrolördür.

5.3 Doyurulmuş EL Kontrolörleri

Gerçek fiziksel bir sistemde giriş işareti her zaman sınırlıdır. Tasarım aşamasında bu durum göz önüne alınmazsa giriş işaretinin doyması durumunda sistem istendiği gibi davranamayabilir. Bu kararsızlıklara yol açabilir. Bu kısımda genliği sınırlı giriş işaretlerinin neden olduğu kontrol problemleri göz önüne alınacaktır. Ayrıca giriş işaretinin doyması durumunda global asimptotik kararlılığın (GAS) nasıl garanti altına alınacağı gösterilecektir.

Tanım 5.2 (Sınırlandırılmış girişle kontrol):

$D(q_p)\ddot{q}_p + C\left(q_p, \dot{q}_p\right)\dot{q}_p + g(q_p) = u_p$ denklemi ile verilen EL sistemlerini göz önüne alıyoruz. Burada sadece q_p'lerin ölçülebildiğini ve u_p'lerin,

$$\left|u_{pi}\right| \le u_{pi}^{\max}, \forall i \in \{1,2,...\} \tag{5.15}$$

şeklinde sınırlı olduğunu varsayıyoruz. Amaç, sistemi kararlı kılacak bir çıkış geri beslemeli kontrolör bulmaktır. Yani,

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\tilde{q}_p(t)\right\| = \lim_{t\to\infty}\left\|q_p(t) - q_{p^*}\right\| = 0$$

Bura da q_{p^*} sabit referans konumdur.

EL kontrolörünün amacı $V(q)$ potansiyel enerji fonksiyonunu şekillendirmek ve sisteme uygun bir sönüm vermektir. Burada iki farklı yaklaşım ele alınacaktır:

1. $V(q)$'nun iptal edilmesi ve yeni bir potansiyel enerji fonksiyonunun atanması.

2. $V(q)$'nun baskınlaştırılması.

Potansiyel enerji fonksiyonunun iptal edilmesi kolay olan yoldur. Fakat $V(q)$'nun baskınlaştırılmasına göre daha az dayanıklı bir kontrolör elde edilir.

Daha önce de gösterildiği gibi kontrolör ve plant,

$u_p = -\dfrac{\partial V_c(q_c, q_p)}{\partial q_p}$ ile arabağlaştırılabilir. Bu ifadeden $V_c(q)$'nun üzerinde bazı kısıtlamaların olması gerektiği görülebilir. Bunu yapmanın bir yolu bir yuvar dışında

doğrusal artan bir $V_c(q)$ seçmektir. Bu halde (5.15) denklemi sağlanacaktır. $V_c(q)$ için uygun bir seçim:

$$V_c(q_c, q_p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^{f_i(q_c, q_p)} sat(x)dx \right) + V_{cN}(q_c, q_p)$$

dır. Burada f_i'ler $RxR \to R$ fonksiyonlar, $V_{cN}(q_c, q_p)$, q_p'ye göre doğrusaldır. $sat(x)$ fonksiyonu ise şöyle tanımlanır:

Tanım 5.3 (Doyma fonksiyonu): Doyma fonksiyonu $sat(x) \in C^2$ olup, kesin artan, tek bir fonksiyon olup şu özellikleri sağlar:

1. $sat(0) = 0$

2. $|sat(x)| < 1$

3. $x \frac{\partial^2 sat(x)}{\partial x^2} < 0, \forall x \neq 0$

Tanımdan, bir doyma fonksiyonunun şu özelliğe sahip olduğu görülür:

Özellik 5.1:

$$\int_0^{x_1} sat(x)dx \geq \frac{1}{2} sat(x_1)x_1 \geq 0$$

Uygun bir doyma fonksiyonu $sat(x) = \tanh \omega x$, $\omega > 0$ dır.

5.3.1 Global Olarak Kararlı Kılan EL Kontrolörleri

Bu bölümde doyurulmuş tam sürülen EL kontrolörleri üzerinde durulacaktır. Hem potansiyel enerjiyi iptal eden hem de baskınlaştıran kontrolörler ele alınacaktır.

5.3.1.1 Potansiyel Kuvvetleri İptal Eden Bir Kontrolör

Enerji ve kayıp fonksiyonları için uygun bir seçim:

$$T_c\left(q_c, \dot{q}_c\right) = 0$$

$$F_c\left(\dot{q}_c\right) = \frac{1}{2}\left\|\dot{q}_c\right\|^2$$

$$V_c(q_c,q_p)=V_{c1}(q_c)+V_{c2}(q_c,q_p)-V_p(q_p)\ ,\ V_{c1}(q_c)=\frac{1}{2}q_c^T K_1 q_c$$

ve,

$$V_{c2}(q_c,q_p)=\sum_{i=1}^{n}k_{2_i}\int_0^{\left(q_{c_i}-\tilde{q}_{p_i}\right)}sat(x_i)dx_i$$

Burada $\tilde{q}_{p_i}:=q_{p_i}-q_{p^*_i}$ ve $k_{1_i},k_{2_i}>0$ olup $K_1:=diag\{k_{1_i}\}$'dır.

Kontrolör dinamiğini elde etmek için (5.12) denklemini kullanacağız:

$$\dot{q}_{c_i}=-k_{1_i}q_{c_i}-k_{2_i}sat\left(q_{c_i}-\tilde{q}_{p_i}\right)$$

$$u_{p_i}=k_{2_i}sat\left(q_{c_i}-\tilde{q}_{p_i}\right)+\left(\frac{\partial V_p(q_p)}{\partial q_p}\right)_i \tag{5.16}$$

Teorem 5.3 (Potansiyel kuvvetleri iptal edilmiş kontrolör): Plantın potansiyel enerji fonksiyonunun,

$$\sup_{q_p\in R^n}\left|\left(\frac{\partial V_p(q_p)}{\partial q_p}\right)_i\right|<u_{p1}^{\max},i\in\{1,...,n\} \tag{5.17}$$

sağladığını varsayıyoruz. Bu halde,

$$\Sigma_c:\left\{T_c\left(q_c,\dot{q}_c\right),V_c(q_c,q_p),F_c\left(\dot{q}_c\right)\right\}$$

ile verilen, (5.15) denklemini sağlayan ve $\left[\dot{q}_p,q_p,\dot{q}_c,q_c\right]=\left[0,q_{p^*},0,q_{cd}\right]$ yapan bir EL kontrolörü vardır. Burada $q_{cd}=sabit$ kaplı çevrimin global asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

İspat: Öncelikle (5.16) ile verilen işaretin $\left|u_{pi}\right|\le u_{p1}^{\max}$ eşitsizliğini sağladığını göstereceğiz. (5.16)'ya üçgen eşitsizliği uygulanırsa ve $\left|sat(x)\right|<1$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$\left|u_{pi}\right| \le \left|k_{2_i} sat\left(q_{c_i} - \tilde{q}_{p_i}\right)\right| + \left|\left(\frac{\partial V_p(q_p)}{\partial q_p}\right)_i\right| < k_{2_i} + \left|\left(\frac{\partial V_p(q_p)}{\partial q_p}\right)_i\right|$$

(5.17) denkleminden $\left|u_{pi}\right| \le u_{p1}^{\max}$ olacak şekilde her zaman $k_{2_i} > 0$ sabitinin yeterince küçük seçilebileceği görülü. Bundan başka $V(q_p)$'nun iptal edilmesi durumunda Teorem 5.2'nin koşullarının $V(q_c, q_p)$ için sağlandığı göstermeliyiz.

1. Enerji Şekillendirme: Kapalı çevrimin toplam enerjisi:

$$V(q_c, q_p) = V_{c1}(q_c) + V_{c2}(q_c, q_p) = \frac{1}{2} q_c^T K_1 q_c + \sum_{i=1}^{n} k_{2_i} \int_0^{\left(q_{c_i} - \tilde{q}_{p_i}\right)} sat(x_i) dx_i$$

$V(q)$'nun $\left[q_c - \bar{q}_c, \bar{q}_p\right] = [0,0]$'da global ve tek bir minimuma sahip olduğunu göstermek için aşağıdaki iki koşulun sağlandığı gösterilmelidir:

1. $V(q) > 0 \;\; \forall q, q \neq 0$ ve $V(0) = 0$.

2. $\left\| \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right\| > 0 \;,\; \forall q \neq 0$

koşul (5.16) özelliğinden sağlanır. 2. koşul için $\partial V(q)/\partial q = 0$ yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \partial V(q)/\partial q_c \\ \partial V(q)/\partial q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 q_c + K_2 sat\left(q_c - \tilde{q}_p\right) \\ -K_2 sat\left(q_c - \tilde{q}_p\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x \neq 0$ için $sat(x) > 0$ ve K_1 ve K_2 tam ranklı olduğundan yukarıda ki eşitlik sadece $\left[q_c \quad \tilde{q}_p\right] = [0 \quad 0]$ iken sağlanır.

2.Sönüm Enjeksiyonu: Bu koşul $F_c\left(\dot{q}_c\right)$ in tanımından doğrudan sağlanır.

3.Kayıp Yayılımı: Bu koşulun sağlanıp sağlanmadığını sınamak için

$$\frac{\partial V_c(q_c, q_p)}{\partial q_c} = 0 \Leftrightarrow K_1 q_c + K_2 sat\left(q_c - \tilde{q}_p\right) = 0$$

Eğer $q_c = sabit$ ise, yukarıda ki denklemden $q_p = sabit$ sonucu çıkacaktır.

5.3.1.2 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen Bir Kontrolör

Doyurulmuş EL Kontrolörlerinin en dayanıklı olanı potansiyel kuvvetleri iptal etmeyenidir. Kontrol kuralını elde etmek için EL parametrelerini:

$$T_c\left(q_c,\dot{q}_c\right)=0,\ F_c\left(\dot{q}_c\right)=\frac{1}{2}\dot{q}_c^{\ T}K_2B^{-1}A^{-1}\dot{q}_c$$

$$V_c\left(q_c,q_p\right)=V_{c2}\left(q_c,q_p\right)-V_p\left(q_{p^*}\right)+q_p^T\frac{\partial V_p}{\partial q_p}\left(q_{p^*}\right)$$

$$V_{c2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_{2_i}}{b_i}\int_0^{\left(q_{c_i}-\tilde{q}_{p_i}\right)}sat\left(x_i\right)dx_i+k_{3_i}\int_0^{\tilde{q}_{p_i}}sat\left(x_i\right)dx_i\right)$$

şeklinde seçeceğiz. Burada $A:=diag\{a_i\}$, $B:=diag\{b_i\}$, $K_2:=diag\{k_{2_i}\}>0$ 'dır ve k_{3_i} yeterince büyük seçilmektedir. Buradan,

$$\dot{q}_{c_i}=-a_i sat\left(q_{c_i}+b_i q_{pi}\right) \tag{5.18}$$

$$u_{pi}=-k_{2_i}sat\left(q_{c_i}+b_i q_{pi}\right)-k_{3_i}sat\left(\tilde{q}_{p_i}\right)+\left(\frac{\partial V_p}{\partial q_p}\left(q_{p^*}\right)\right)_i \tag{5.19}$$

kontrolörü türetilir.

Teorem 5.4 (Potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen kontrolör):

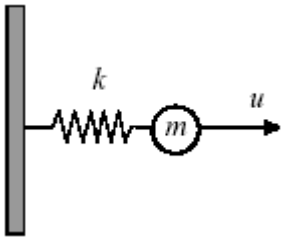
Plantın potansiyel enerji fonksiyonu istenen referans değerinde:

$$\left|\left(\frac{\partial V_p}{\partial q_p}\left(q_{p^*}\right)\right)_i\right|<k_{g_i}^{\max},i\in\{1,...,n\} \tag{5.20}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca $k_{g_i}^{\max}<u_{p_i}^{\max}$ olsun ve Varsayım 4.1 sağlansın. Bu koşullarda yeterince büyük $u_{p_i}^{\max}$ için potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen, (5.15) denkleminin giriş kısıtlamalarını sağlayan ve plantı global asimptotik kararlı (GAS) kılan bir EL kontrolörü vardır.

5.3.2 Bir Kütle-Yay Sisteminin İçin Doyurulmuş EL Kontrolörü

Şekil 5.6 ile verilen kütle-yay sistemi göz önüne alınsın:

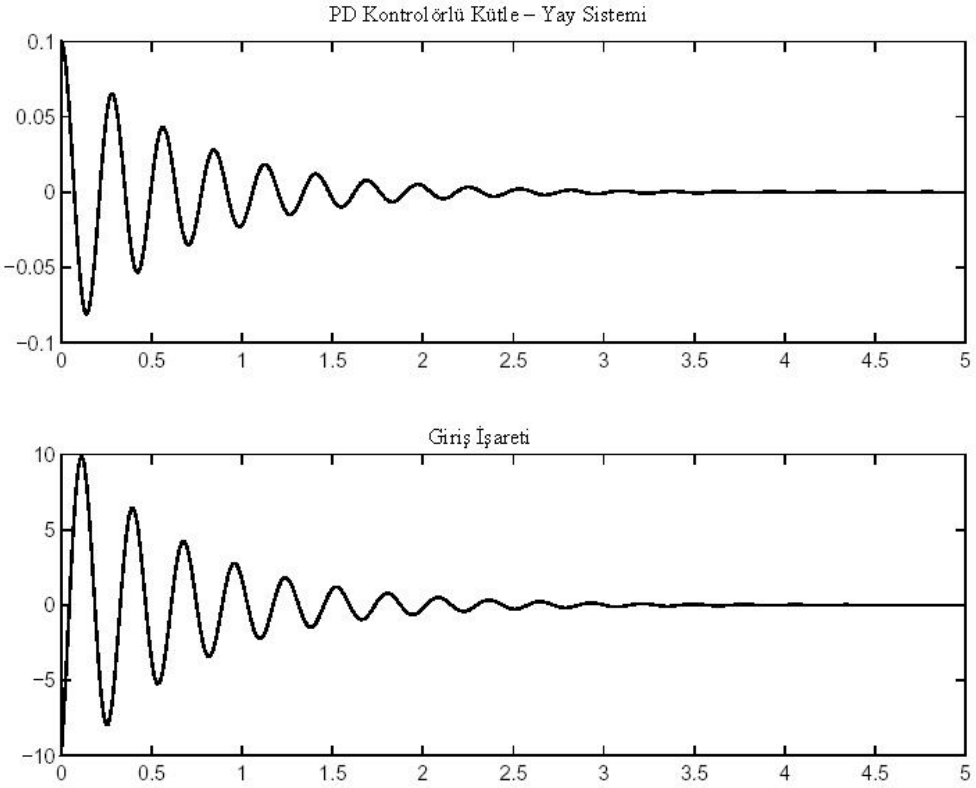


Şekil 5.6: Kütle-Yay Sistemi

Bu sistemin EL denklemleri: $m\ddot{q}_p + kq_p = u$ dır. Amacımız potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen bir EL kontrolörü gerçeklemektir. Fakat önce bir PD kontrolörü gerçeklenecektir. Bir sonra ki aşamada sadece q_p'nin ölçülebildiği varsayılacaktır ve bu nedenle q_p'nin türevini yaklaşık olarak hesaplayan bir EL kontrolörü gerçeklenecektir. Son aşamada gerçeklenen EL kontrolörü doyurulmuş bir EL kontrolörüne dönüştürülecektir. Aşağıdaki simülasyonda m kütlesi 1 kg, k yay sabiti 200 N/m alınmıştır.

5.3.2.1 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen PD Kontrolörü

PD kontrolörünün denklemleri $u = -k_p q_p - k_d \dot{q}_p$ ile verilir. Bu kontrol kuralına göre elde edilen simülasyon sonuçları Şekil 5.7 de verilmiştir.



Şekil 5.7: Kütle-Yay sistemi için potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen PD kontrolörü

Yay $0.1\,m$ çekilip bırakılmaktadır. Şekil 5.7'nin ilk kısmı kütlenin konumunu, ikinci kısmı ise u giriş işaretini göstermektedir. Bu simülasyonda $k_p = 300$ ve $k_d = 3$ alınmıştır. Burada u 'nun maksimum $10\,N$ değerini aldığı görülmektedir.

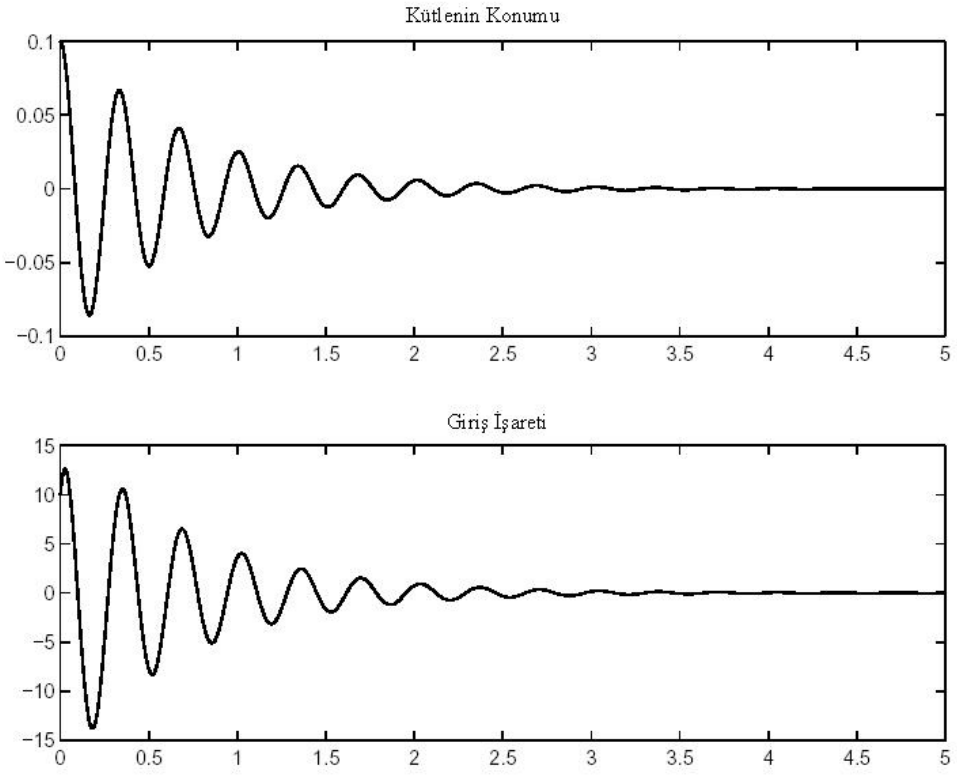
5.3.2.2 Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen EL Kontrolörü

Sadece q_p 'nin ölçülebildiği durumda (5.12) denklemini kullanılarak bir EL kontrolörü tasarlanabilir. Bu kontrolör:

$$\dot{q}_c = -a\left(q_c + b\tilde{q}_p\right)$$

$$u = -k_d\left(q_c + b\tilde{q}_p\right) - k_p\left(\tilde{q}_p\right)$$

Bu EL kontrolörü kullanılarak yapılan simülasyon Şekil 5.8'de gösterilmiştir.

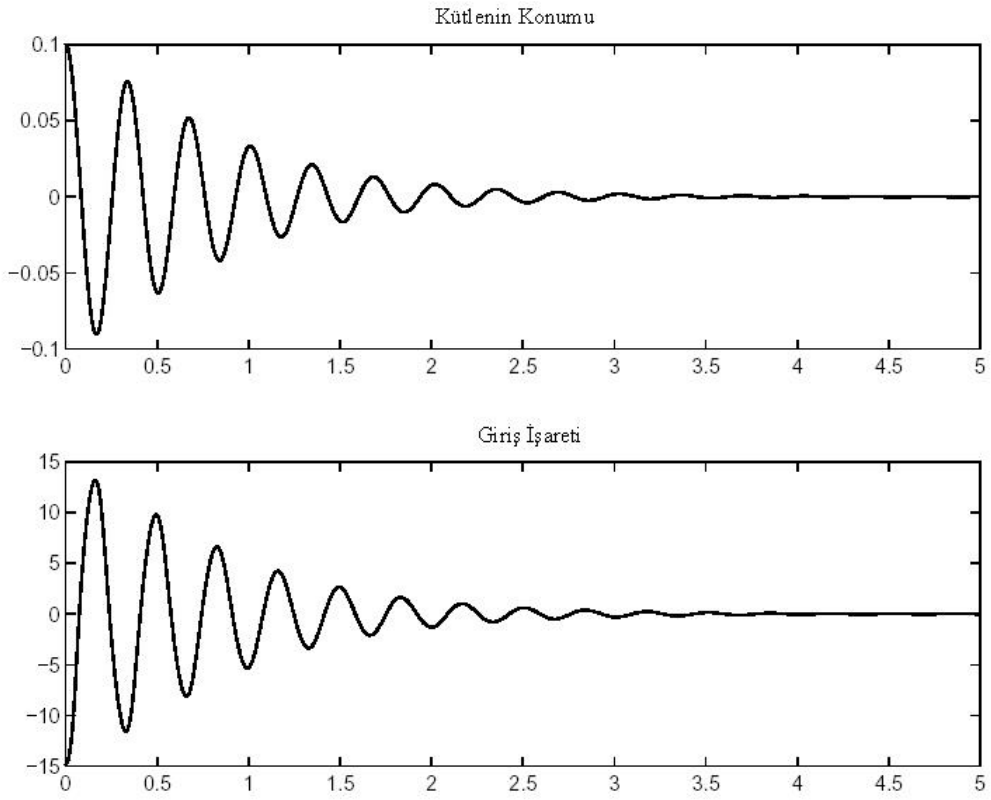


Şekil 5.8: Kütle-yay sisteminde potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen EL kontrolörü

Potansiyel Kuvvetleri İptal Etmeyen doyurulmuş EL kontrolörü: (5.18) ve (5.19) denklemlerinden doyurulmuş EL kontrolörü:

$$\dot{q}_c = -asat\left(q_c + b\tilde{q}_p\right), u = -k_2 sat\left(q_c + b\tilde{q}_p\right) - k_3 sat\left(\tilde{q}_p\right)$$

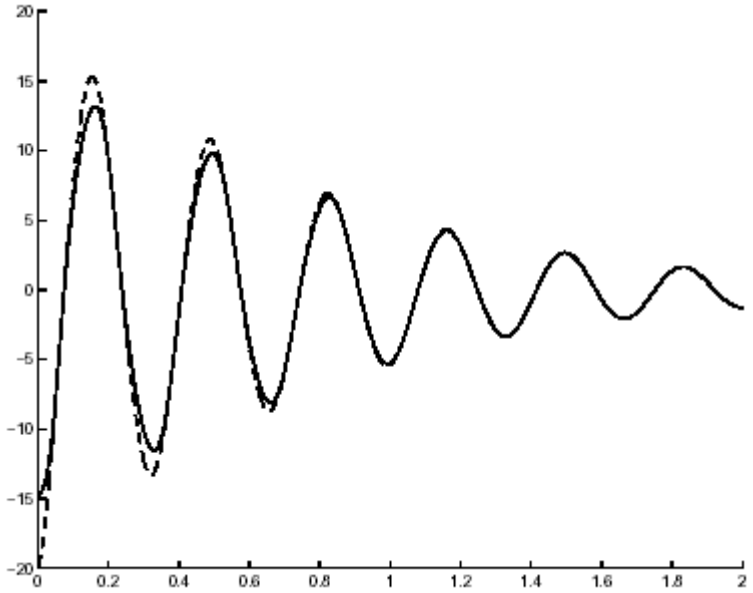
$k_2 = 5$, $k_3 = 100$ ve $a = b = 20$ alınmıştır. u işaretinin doymadığı koşulda sistem davranışının bir önceki örnekte verilene benzemesi beklenebilir. Şekil 5.8 ile Şekil 5.9 kıyaslanırsa bu benzerlik görülebilir.



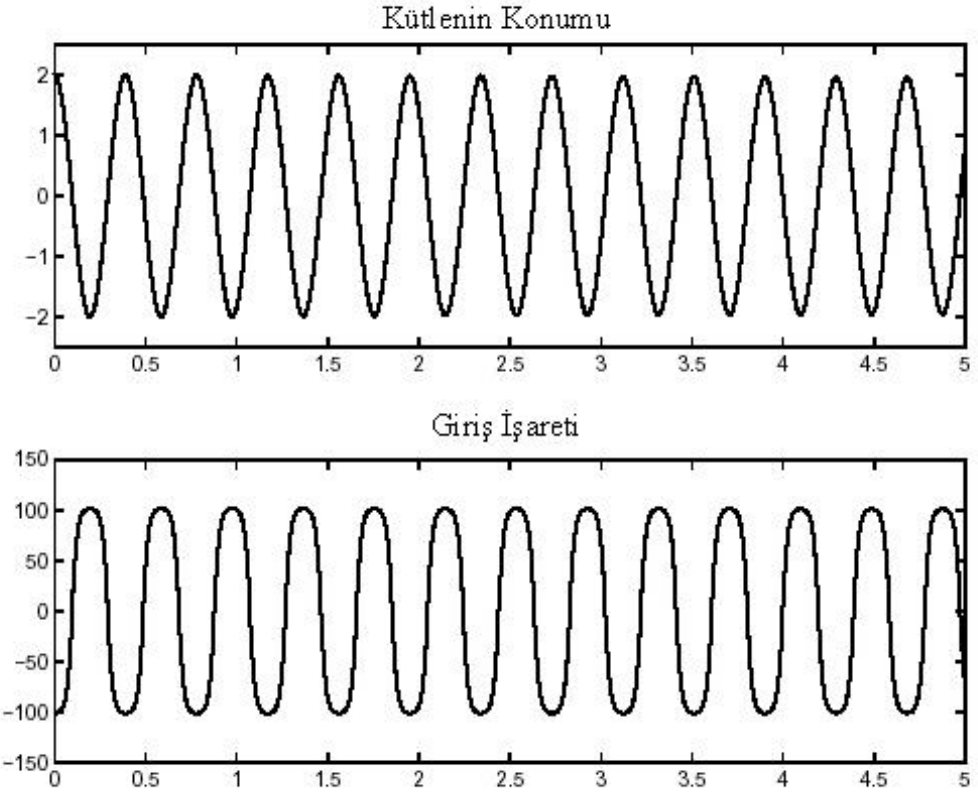
Şekil 5.9:Kütle-yay sisteminde potansiyel kuvvetleri iptal etmeyen doyurulmuş EL kontrolörü

Bu sonucun çıkması doğaldır. Çünkü giriş işareti doyma sınırlarının altındadır. Şekil 5.10'da giriş işaretinde doyma fonksiyonu olmaksızın elde edilmiş sonuç (kesik çizgili) ve doyma fonksiyonu olduğu durumda elde edilmiş sonuç (koyu çizgili) gösterilmiştir. Buradan doymanın olmadığı durumda giriş işaretinin genliğinin daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu yüzden doymanın olduğu durumda sistem daha yavaş davranacaktır.

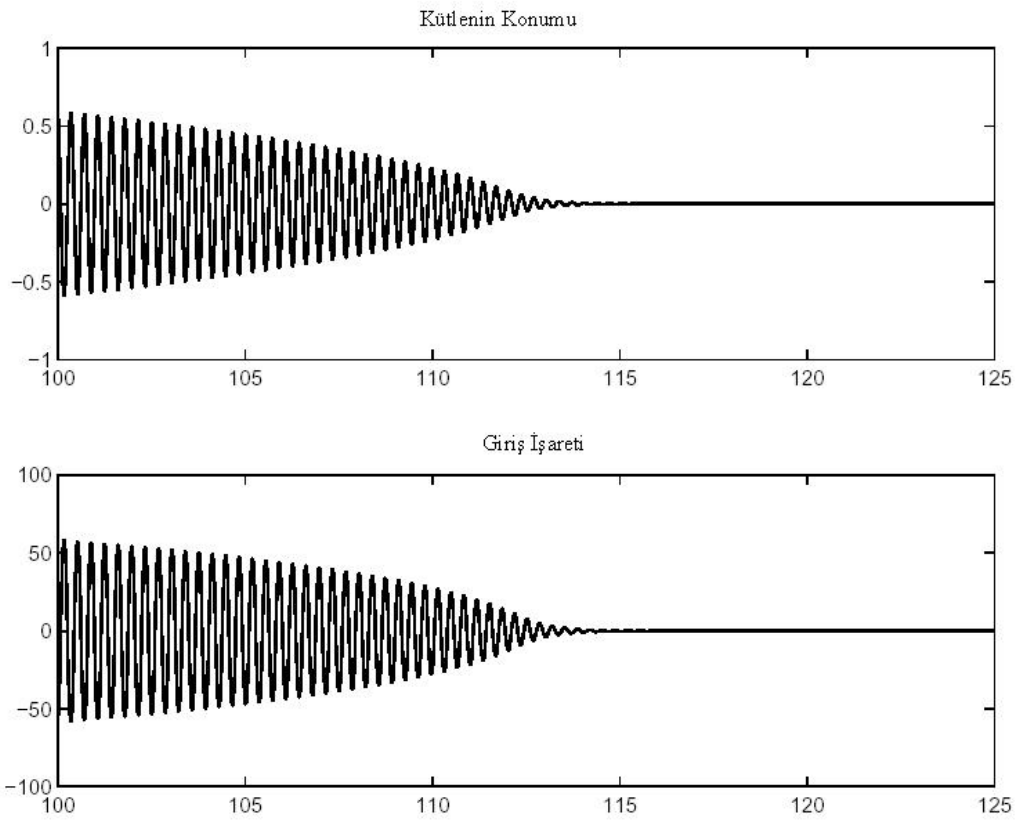
Şimdi kontrolörün doyduğu durumu ele alalım. Yay bir önceki örnekte verilenden daha fazla gerilip bırakılırsa Şekil 5.11'deki sonuçlar elde edilir. Burada yay 2 m çekilmiştir. Giriş 100 N'de doymaya ulaşmıştır. Bu k_2 ve k_3'ün toplamı ile belirlenmektedir. Sistem bu koşullar altında global asimptotik kararlıdır. Bu, Şekil 5.12'de görülmektedir.



Şekil 5.10: Kütle-yay sistemi için doyma fonksiyonlu ve doyma fonksiyonsuz giriş işareti



Şekil 5.11: 2 *m* 'lik yer değiştirme altında sistemin ilk 5 saniyedeki davranışı



Şekil 5.12: 2 *m* 'lik yer değiştirme ve doyurulmuş EL kontrolörü ile kütle-yay sisteminin geçici hal davranışı

6 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde Pasifliğe Dayalı Kontrol teknikleri tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu teknikler, özellikle doğrusal olmayan kontrol teorisinde, yetersiz kalan tekniklere bir alternatif oluşturmaktadır. Teknik, enerji gibi temel bir büyüklüğe dayalı bir modellemeden yola çıktığından, sistemin iç yapısıyla doğrudan ilgilenmemektedir. Enerji temelli modelleme, pasifliğe dayalı kontrol tekniğinin hibrit sistemlere uygulanabilmesini sağlamaktadır. Anlatılan teknikler mekanik sistemlere sabit nokta kontrolü için uygulanmış, kabul edilebilir sonuçlar elde edilmiştir.

Pasifliğe dayalı kontrol tekniği, sistemlerin enerji fonksiyonlarının bilinmesini veya en azından haklarında bir fikre sahip olunmasını gerektirmektedir. Bu ise uygulamalarda zorluklarla karşılaşılmasına yol açabilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Goldstein, H.**, 1980 Classical Mechanics, Addison Wesley.

[2] **Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P.J., Sira-Ramirez., H,** 1998 Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems, Springer.

[3] **van der Schaft., A.,** 2000, L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer.

[4] **Khalil, H.,** 2000, Nonlinear Systems (Third Edition), Pearson Education.

[5] **Vidyasagar, M.,** 1993, Nonlinear Systems Analysis (Second Edition), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[6] **Desoer, C.A., and Vidyasagar, M.,** 1975, Feedback Systems:Input Output Properties, Academic Press, New York.

[7] **Willems, J.C.,** 1972, "Dissipative dynamical systems-Part I: General Theory", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45, pp.321-351.

ÖZGEÇMİŞ

Ertan Balaban, 1977 yılında Malatya'da doğdu. İlkokulu ve ortaokulu Malatya'da, lise eğitimini Gaziantep'te tamamladı. 2001 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Halen İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği bölümünde Yüksek Lisans eğitimini sürdürmektedir.