KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYLARINDA ÖTELEME YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

SEZGİN BÜYÜKKÜTÜK

KOCAELİ 2012

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYLARINDA ÖTELEME YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

SEZGİN BÜYÜKKÜTÜK

Yrd.Doç.Dr. Günay ÖZTÜRK
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Kadri ARSLAN
Jüri Üyesi, Uludağ Üniv. .....

Yrd.Doç.Dr. Ahmet ZOR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 09.07.2012

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüzeyler teorisi diferensiyel geometrinin en temel konuları arasındadır. Özellikle uygulamalı alanlarda çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Yüzeyler arasında yapılan sınıflandırmalarda en ilgi çekici olan ise düz ve minimal yüzeylerdir. Bu çalışmada öteleme yüzeyleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçların yeni araştırmalar için bir temel oluşturacağı kanısındayım.

Yüksek lisansıma başladığım ilk günden bu güne kadar bana destek olarak her konuda yardımlarını esirgemeyen, bu çalışma konusunu veren ve bu çalışmayı yöneten Danışmanım Yrd. Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK e, çalışmalarım esnasında fikir ve görüşlerinden yaralandığım Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN a teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışma esnasında beni destekleyen ve moralimi her zaman en üst düzeyde tutmamı sağlayan aileme teşekkür ederim.

Haziran – 2012 Sezgin BÜYÜKKÜTÜK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
SİMGELER iv
ÖZET v
İNGİLİZCE ÖZET vi
GİRİŞ 1
1. TEMEL KAVRAMLAR 2
1.1. Riemann Manifoldları 2
1.2. IE^n Uzayında Yüzeyler 6
2. IE^3 UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ 10
2.1. Giriş 10
2.2. IE^3 Uzayında Öteleme Yüzeyleri 10
3. IE^4 UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ 23
3.1. Bezier Öteleme Yüzeyleri 31
3.2. Bir Yüzeyin Eğrilik Elipsi 33
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 39
KAYNAKLAR 40
ÖZGEÇMİŞ 42

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Yumurta Kutusu Yüzeyi 12
Şekil 2.2. Hannover Fuarının Batı Girişi, Almanya 12
Şekil 2.3. IE^3 Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyi 13
Şekil 2.4. Leipzig Industriepalast Sarayının Cam Tavan Kaplaması 13
Şekil 2.5. Bosch Areal Otel Avlusunun Çatısı, Stuttgard 13
Şekil 2.6. Berlin DG Bankasının Cam Tavan Kaplaması, Almanya 14
Şekil 2.7. Rostocker Hof Alışveriş Merkezinin Izgara Kubbesi, Rostock 14
Şekil 2.8. Berlin Hayvanat Bahçesi Su Aygırı Bölümünün Cam Kubbesi 15
Şekil 2.9. Lehrter Tren İstasyonunun Çatı Platformu 15
Şekil 2.10. Sabit Ortalama Eğrilikli Öteleme Yüzeyi 19
Şekil 2.11. Scherk Yüzeyi 22
Şekil 3.1. Bezier Öteleme Yüzeyi 33
Şekil 3.2. Eşitlik (3.28) ile Verilen Öteleme Yüzeyi 37

SİMGELER

A_ξ	: Şekil operatörü
C^∞	: Diferensiyellenebilme
IE^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
h	: İkinci temel form
$\vec{H}$	: M nin IE^n deki ortalama eğrilik vektörü
p	: Nokta
IR	: Reel sayılar kümesi
T(M)	: Tanjant uzay
$T^\perp(M)$	: Normal uzay
$T_p(M)$	: $p \in M$ deki tanjant uzay
X	: İmersiyon
∇	: Kovaryant türev
$\chi(M)$	: M nin C^∞ vektör alanları uzayı
$< , >$	: $\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
∂	: Kısmi türev
$N_p^1(M^n)$	: Birinci normal uzay
$\widetilde{R}$	: Riemann eğrilik tensörü
$\overline{\nabla}$	: Van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu

ÖKLİD UZAYLARINDA ÖTELEME YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

ÖZET

Bu çalışmada, 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında öteleme yüzeyleri ele alınmıştır. Öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayı IE^3 te öteleme yüzeyleri ile ilgili sınıflandırmalar verilmiştir. Daha sonra 4-boyutlu Öklid uzayı IE^4 te öteleme yüzeyleri incelenerek düz ve minimal olma koşulları elde edilmiştir. Ayrıca bu yüzeyin H_1-minimal yüzey olma koşulu verilmiştir. IE^4 uzayında kuadratik üçgensel Bezier yüzeyinin öteleme yüzeyi olma koşulları elde edilmiştir. Son olarak, IE^4 uzayında öteleme yüzeyinin eğrilik elipsi ele alınarak normal uzayın orjininin sınıflandırılması verilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Monge Yüzeyi, Minimal Yüzey, Düz Yüzey, Kuadratik Üçgensel Bezier Yüzeyi, Eğrilik Elipsi.

A CHARACTERIZATION OF TRANSLATION SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

ABSTRACT

In this thesis, translation surfaces were considered in 3 and 4-dimensional Euclidean spaces. First, classification of translation surfaces were given in 3-dimensional Euclidean space IE^3. Then in 4-dimensional Euclidean space IE^4, a translation surface was considered and the conditions were searched for a translation surface to become minimal and flat. Further, the condition was given for this surface to become H_1-minimal surface. The necessary and sufficient condition was obtained for a quadratic triangular Bezier surface in IE^4 to become a translation surface. Finally, curvature ellipse of a translation surface was considered.

Key Words: Monge Surface, Minimal Surface, Flat Surface, Quadratik Triangular Bezier Surface, Curvature Ellipse.

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, öteleme yüzeylerinin bir karakterizasyonunu belirlemektir. Ayrıca bu yüzeyleri sınıflandırarak örnekler vermektir.

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm sonraki bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir.

İkinci bölümde, IE^3 uzayındaki öteleme yüzeylerinin özellikleri verilmiştir. Öteleme yüzeylerinin minimal ve düz olma koşulları incelenmiştir. Ayrıca sabit ortalama eğrilikli ve sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeyleri sınıflandırılmıştır. Bu yüzeylere örnekler verilerek grafikleri oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde, IE^4 uzayındaki öteleme yüzeyleri incelenmiştir. Kuadratik üçgensel Bezier yüzeyinin öteleme yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Son olarak öteleme yüzeyinin eğrilik elipsi elde edilip bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar ve daha sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Riemann Manifoldları

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1.1: $M \neq \phi$ bir küme olsun. M için:

i) M Hausdorff uzayı,

ii) M nin açıkları ile IE^n in açıkları arasında homeomorfizimler tanımlı,

iii) M sonlu sayıda açıkla örtülebilir,

şartları sağlanıyorsa, M kümesine topolojik manifold denir [7].

Tanım 1.1.2: M, n-boyutlu diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise M ye bir Riemann Manifoldu denir. Burada g ye Riemann metriği (veya metrik tensör) adı verilir [2].

Tanım 1.1.3: M diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) ; \quad (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall$ f, g $\in C^\infty(M, IR)$, $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

iii) $\nabla_x(fY) = f\nabla_x Y + X(f)Y$

lineerlik özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir Afin koneksiyon adı verilir [7]. Burada ∇_X operatörüne X vektör alanına kovaryant türev denir.

Tanım 1.1.4: M bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon)

ii) $X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$ (koneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu (veya M nin Levi-Civita Koneksiyonu) adı verilir [2, 7]. Bu koneksiyon kısaca M deki Riemann Koneksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.5: M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $n+d$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere f: $M \to \widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için

df_p: $T_p(M) \to T_{f(p)}(\widetilde{M})$

dönüşümü birebir ise f ye bir daldırma (imersiyon) denir. Ayrıca, $f : M \to f(M) \subset \widetilde{M}$ bir homeomorfizm ise f ye bir gömme (imbedding) denir. Eğer $M \subseteq \widetilde{M}$ ve $f : M \to \widetilde{M}$ dönüşümü bir gömme ise M ye $\widetilde{M}$ nin n-boyutlu bir gömülen (immersed) altmanifoldu adı verilir. Bununla beraber f bir daldırma olmak üzere $\forall\ X, Y \in T_pM$ için,

$< df_p(X), df_p(Y) >_{f(p)} = < X, Y >_p$

şartını sağlıyorsa f ye bir izometrik daldırma adı verilir [2].

Tanım 1.1.6: $M \subseteq \widetilde{M}$ bir altmanifold ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}$ de kovaryant türev olsun. Böylece her $X, Y \in \chi(M)$ ve her p için $(\widetilde{\nabla}_X Y)_p$ iyi tanımlıdır.

Ayrıca $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$ ve $h_p(X, Y) \in T_p^{\perp} M$ olmak üzere,

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \tag{1.1}$$

biçiminde Gauss Denklemi elde edilir. Burada h, M nin ikinci temel formudur.

Önerme 1.1.7: $M \subseteq \tilde{M}$ bir altmanifold ve g ile $\tilde{g}$ de sırasıyla M ve $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı metrikler olsun. Böylece $h(X, Y)$, M üzerinde bir normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. Ayrıca ∇ da M üzerinde indirgenmiş $g = f^*(\tilde{g})$ metriğinin bir Riemann koneksiyonudur [2].

Tanım 1.1.8: $M \subseteq \tilde{M}$ bir altmanifold olmak üzere M ye normal bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\tilde{\nabla}_X \xi$ nın teğet bileşeni $-A_\xi(X)$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere;

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{1.2}$$

şeklinde Weingarten Denklemi elde edilir. Burada A_ξ ya şekil operatörü, D ye de M nin NM normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir.

Önerme 1.1.9:

i) $A_\xi(X)$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.
ii) M nin her bir ξ normal vektörü ve X, Y tanjant vektörleri için

$$g(A_\xi(X), Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \tag{1.3}$$

dır [2].

Tanım 1.1.10: M, N nin bir altmanifoldu olsun. Böylece N nin eğrilik tensörü $\tilde{R}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{1.4}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$\widetilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + < h(X,Z), h(Y,W) > - < h(X,W), h(Y,Z) > \qquad (1.5)$$

dir. Bu denklem Gauss denklemi olarak adlandırılır. Bununla beraber $\widetilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşeni,

$$(\ \widetilde{R}(X,Y)Z\ )^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h\ )(\ Y\ ,\ Z\ ) - (\overline{\nabla}_Y h\ )(\ X\ ,\ Z\ ) \qquad (1.6)$$

olup buna Codazzi denklemi adı verilir [2].

Ayrıca M nin normal vektör alanları ξ ve η için M nin normal demeti NM üzerindeki eğrilik tensörü $R^{\perp}$ ise,

$$R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta) = \widetilde{R}(X,Y;\xi,\eta) + \langle [A_{\xi}, A_{\eta}](X), Y \rangle \qquad (1.7)$$

biçiminde tanımlanır. Burada [,] Lie parantez operatörü olup,

$$[A_{\xi}, A_{\eta}] = A_{\xi}A_{\eta} - A_{\eta}A_{\xi} \qquad (1.8)$$

dir [2].

Denklem (1.7) , Ricci denklemi olarak adlandırılır. Eğer $\forall\ X\ ,Y\ ,Z \in \chi(M)$ için,

$$R^{\perp}(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]} = 0 \qquad (1.9)$$

ise M altmanifolduna düz normal koneksiyonludur denir [2].

1.2. IE^n Uzayında Yüzeyler

Bu bölümde IE^n uzayındaki yüzeyler için bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Tanım 1.2.1: $I \subseteq IR$ açık bir aralık olmak üzere, $\alpha : I \subseteq IR \to IE^n$ diferansiyellenebilir dönüşümü $\forall\ s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ şartını sağlıyorsa α ya IE^n uzayında bir regüler eğri denir [13].

Tanım 1.2.2: M, IE^n uzayının bir alt kümesi olsun. $X : D \subset IE^2 \to M \subset IE^n$, diferansiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere IE^n uzayında bir koordinat yaması oluşturur. Bu yama regülerse M ye IE^n uzayında türevlenebilir bir yüzey denir [13].

M, IE^n uzayında $X(u,v) : (u,v) \in D \subset IE^2$ yaması ile verilen düzgün bir yüzey olsun. M yüzeyinin tanjant uzayı, M üzerindeki keyfi bir $p = X(u,v)$ noktasında $\{X_u, X_v\}$ kümesi tarafından gerilir. Böylece M yüzeyinin birinci temel formu,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada birinci temel formun katsayıları

$$E = < X_u, X_u >, \quad F = < X_u, X_v >, \quad G = < X_v, X_v > \tag{1.10}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $< , >$ Öklid iç çarpımıdır. Eğer $W^2 = EG - F^2 \neq 0$ ise X(u,v) yüzey yaması regülerdir denir.

Her bir $p \in M$ için $T_p IE^n = T_p M \oplus T_p^{\perp} M$ olsun. Burada $T_p^{\perp} M$, IE^n uzayında $T_p M$ nin ortogonal bileşenidir.

$\chi(M)$ ve $\chi^{\perp}(M)$, M yüzeyine sırasıyla, teğet ve dik olan düzgün vektör alanlarının uzayı, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ise sırasıyla M ve IE^n nin koneksiyonları olsun. $X_1, X_2 \in \chi(M)$ ve $N_\alpha \in \chi_p^{\perp}(M)$ için

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$h(X_1, X_2) = \widetilde{\nabla}_{x_1} X_2 - \nabla_{X_1} X_2$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme M nin ikinci temel formu denir. M yüzeyinin şekil operatörü

$$A : \chi^{\perp}(M) x \chi(M) \to \chi(M) \ ;$$

$$A_{N_k} X_j = -(\nabla_{X_j} N_i)^T \quad , \quad X_j \in \chi(M) \tag{1.11}$$

şeklindedir. Ayrıca bu operatör

$$\langle A_{N_k} X_j, X_i \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle = c_{ij}^k \quad , \quad 1 \le i, j \le 2 \ ; \ 1 \le k \le n-2 \tag{1.12}$$

denklemini sağlar. Burada c_{ij}^k M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarıdır.

Buna göre

$$h(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n-2} c_{ij}^k N_k \quad , \qquad 1 \le i, j \le 2 \tag{1.13}$$

yazılır.

Tanım 1.2.3: $M \subset IE^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} olmak üzere M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\ c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad 1 \le k \le n-2 \\ c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle \end{aligned} \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 1.2.4: X(u,v) regüler yaması ile verilen M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \tag{1.15}$$

dir [10].

Tanım 1.2.5: X(u,v) regüler yaması ile verilen M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\sum_{k=1}^{n-2} c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F)N_k \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlanır. Ortalama eğrilik vektörünün normuna $\alpha = \left\|\vec{H}\right\|$, M yüzeyinin ortalama eğriliği denir [9].

Tanım 1.2.6: M yüzeyinin, Gauss eğriliği sıfırsa M ye düz yüzey, ortalama eğrilik vektörü sıfırsa M ye minimal yüzey denir.

Tanım 1.2.7: M yüzeyinin k ıncı ortalama eğrililiği

$$H_k = \frac{1}{W^2}(c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) \quad , \quad 1 \le k \le n-2 \tag{1.17}$$

şeklindedir. Eğer M yüzeyinin k ıncı ortalama eğriliği H_k sıfırsa, M yüzeyine H_k - minimaldir denir.

Tanım 1.2.8: $M \subset IE^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset IR^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ ve $T_p^{\perp}(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları için M yüzeyinin normal eğriliği

$$K_N = \langle R^{\perp}(X_1, X_2)N_2, N_1\rangle \tag{1.18}$$

şeklinde tanımlanır [6]. Eğer $K_N = 0$ ise M yüzeyine düz normal koneksiyonludur denir.

Önerme 1.2.9: M yüzeyi $X: U \subset R^2 \to IE^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \ldots + c_{11}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \ldots + c_{12}^{n-2} N_{n-2} \\ h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \ldots + c_{22}^{n-2} N_{n-2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

dir.

Önerme 1.2.10: M yüzeyi $X : U \subset IE^2 \to IE^n$ regüler yaması ile verilsin. Böylece X_1, X_2 vektörleri $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$X_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|},$$

$$X_2 = \frac{\sqrt{E}}{W}\left(X_v - \langle X_u, X_v \rangle \frac{X_u}{\|X_u\|^2} \right), \tag{1.20}$$

dir. Burada $W = \sqrt{EG - F^2}$ dır [1].

Önerme 1.2.11: M yüzeyi $X : U \subset IE^2 \to IE^n$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için

$$h(X_1, X_1) = \frac{1}{E} h(X_u, X_u)$$

$$h(X_1, X_2) = \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{WE} h(X_u, X_u) \tag{1.21}$$

$$h(X_2, X_2) = \frac{E}{W^2} h(X_v, X_v) - \frac{2F}{W^2} h(X_u, X_v) + \frac{F^2}{W^2 E} h(X_u, X_u)$$

dir [1].

2. IE^3 UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ

2.1. Giriş

IE^3 uzayında, sabit ortalama eğrilikli yüzeyler H-yüzeyleri, sabit Gauss eğrilikli yüzeyler, K-yüzeyleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. IE^3 uzayında daha ilginç yüzey sınıfı öteleme yüzeyleridir. Öteleme yüzeyleri iki eğri tarafından üretilen yüzeylerdir. Dolayısıyla quadrilateral (dört kenarlı) yapıdaki yüzeylerdir. Bu özellik sayesinde bu yüzeyler, mimaride dizayn amaçlı ve cam tavan kaplamalarında kullanılır [5]. Genellikle bu cam kaplamalar üçgensel cam yüzeyleri ve cam levhalar ile yapılır. Ancak dört kenarlı elemanlar daha ekonomiktir ve üçgensel yapıya göre daha şeffaftır.

Öteleme yüzeyleri ilk olarak 1835 yılında H. Scherk tarafından ele alınmıştır ve düz olmayan tek minimal öteleme yüzeyinin kendi adıyla anılan Scherk yüzeyi olduğu gösterilmiştir [15].

Daha sonra öteleme yüzeyleri bir çok geometrici tarafından çeşitli bakış açılarıyla değerlendirilip araştırılmıştır [4]. L. Verstraelen, J. Walrave ve S. Yaprak, n-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini ele almışlardır [17]. H. Liu, 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit ortalama eğrilikli ve sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeylerini sınıflandırmıştır [8]. M. I. Munteanu ve A. I. Nistor IE^3 uzayında öteleme yüzeylerinin ikinci temel formu üzerine çalışmıştır [12].

2.2. IE^3 Uzayında Öteleme Yüzeyleri

Tanım 2.2.1: $\alpha,\beta : IR \to IE^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında regüler iki eğri olsun. Bu eğrilerin parametrizasyonları, sırasıyla $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v), g_3(v))$ olmak üzere bu eğrilerin teğet vektörleri

$\alpha'(u) = (f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u))$ ve $\beta'(v) = (g_1'(v), g_2'(v), g_3'(v))$ lineer bağımsız olarak alınırsa bu eğrilerin toplamı,

$$X : IE^2 \to IE^3$$

$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) \tag{2.1}$$

yaması ile verilen bir yüzey tanımlar. Burada $u_0 < u < u_1$ ve $v_0 < v < v_1$ dir. Açık olarak $X_u = \alpha'$ ve $X_v = \beta'$ olduğundan bu yüzey regülerdir [3].

Tanım 2.2.2**:** IE^3 Öklid uzayında

$$X : IE^2 \to IE^3$$

$$(u,v) \to (u,v,z(u,v)) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan yüzey Monge yüzeyi adını alır (Burada $z : IE^2 \to IR$ bir fonksiyondur) [7].

Tanım 2.2.3: Eğer M yüzeyi $\alpha(u) = (u,0,f(u))$ ve $\beta(v) = (0,v,g(v))$ şeklinde iki uzay eğrisinin toplamı olarak tanımlanırsa bu yüzeye öteleme yüzeyi denir. Bu yüzeyin parametrizasyonu

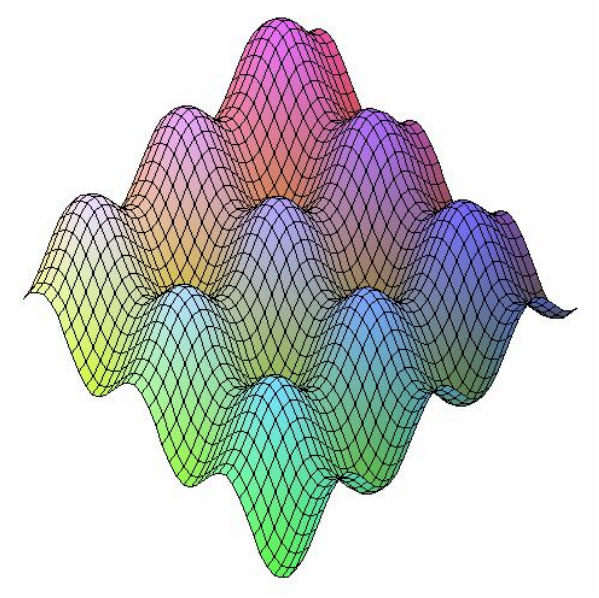
$$X(u,v) = (u,v,f(u) + g(v)) \tag{2.3}$$

şeklinde bir Monge yüzeyi olarak verilir.

Örnek 2.2.4: IE^3 Öklid uzayında

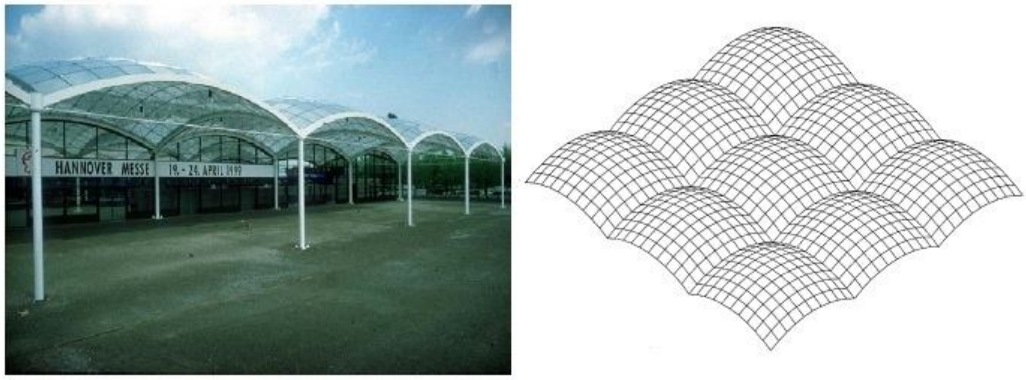
$$X(u,v) = (u,v,\sin 3u + \cos 3v)$$

parametrizasyonu ile verilen öteleme yüzeylerinin Mapple programı yardımıyla grafiği Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. Yumurta Kutusu Yüzeyi

Bu yüzeyin model olarak mimaride uygulamalarına en güzel örnek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

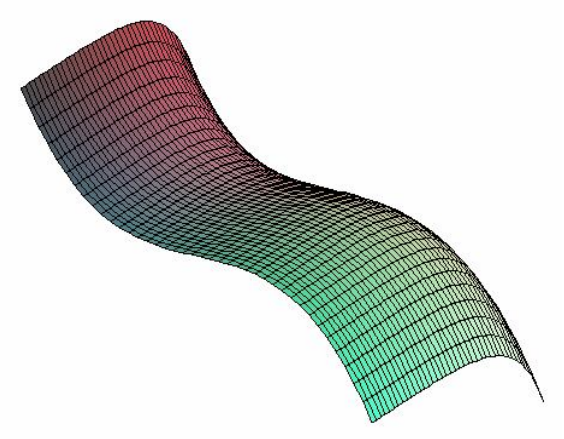


Şekil 2.2. Hannover Fuarının Batı Girişi, Almanya

Örnek 2.2.5: IE^3 Öklid uzayında

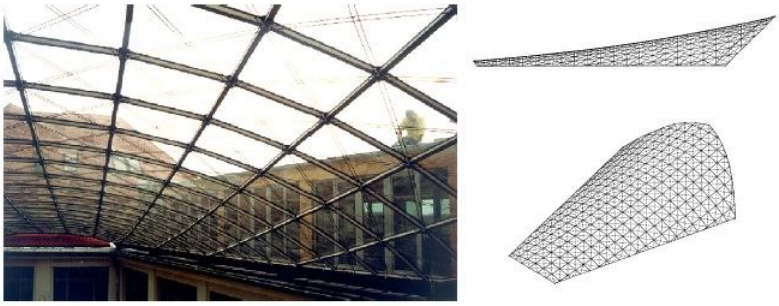
$$X(u,v) = (u, v, e^u + v^3 + v + 1)$$

parametrizasyonu ile verilen öteleme yüzeyinin grafiği ise Şekil 2.3 da verilmiştir.

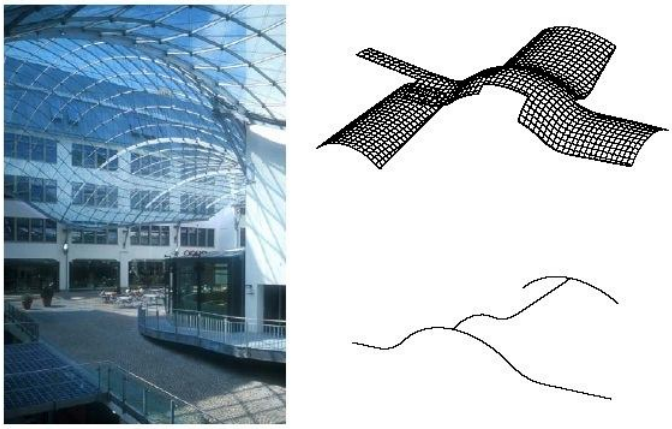


Şekil 2.3. IE^3 Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyi

Bu yüzeyin model olarak uygulamaları aşağıda verilmiştir.

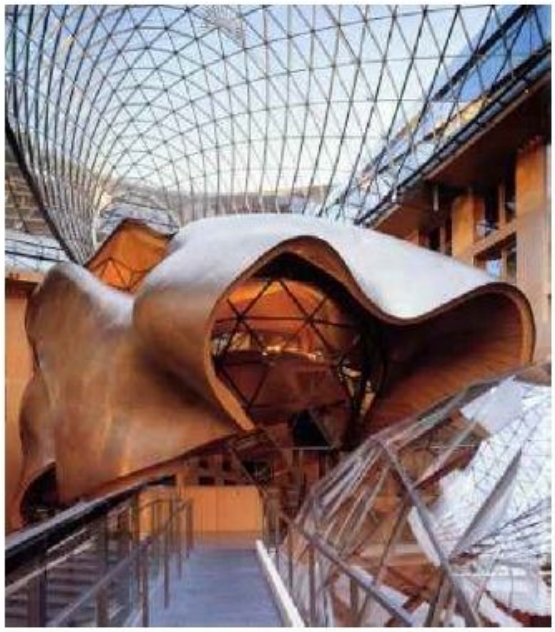


Şekil 2.4. Leipzig Industriepalast Sarayının Cam Tavan Kaplaması

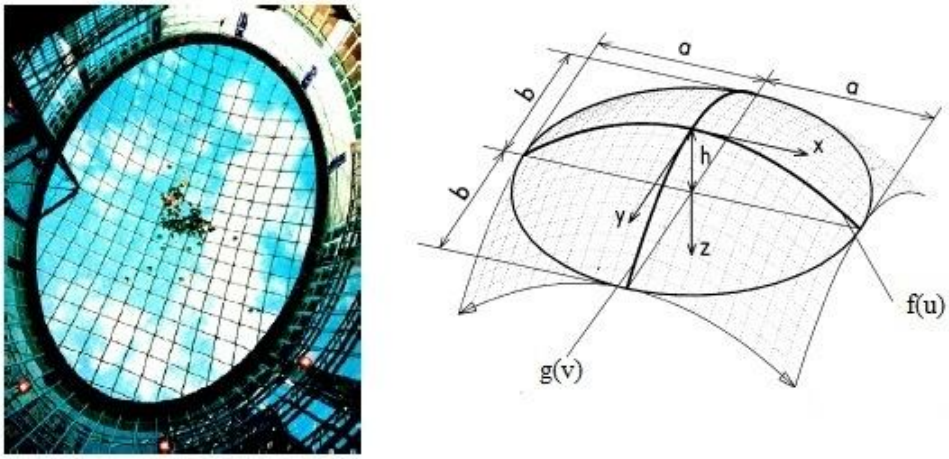


Şekil 2.5. Bosch Areal Otel Avlusunun Çatısı, Stuttgard

Örnek 2.2.6: Öteleme yüzeyi ile ilgili diğer mimari modeller aşağıda verilmektedir.



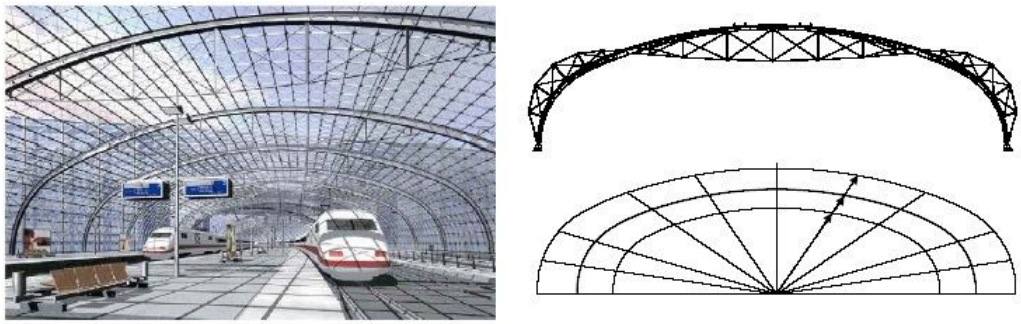
Şekil 2.6. Berlin DG Bankasının Cam Tavan Kaplaması, Almanya



Şekil 2.7. Rostocker Hof Alışveriş Merkezinin Izgara Kubbesi, Rostock



Şekil 2.8. Berlin Hayvanat Bahçesi Su Aygırı Bölümünün Cam Kubbesi



Şekil 2.9. Lehrter Tren İstasyonunun Çatı Platformu

Teorem 2.2.7: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. Buna göre M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{f''(u)g''(v)}{(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2)^2} \tag{2.4}$$

ve

$$\alpha = \left\|\vec{H}\right\| = \frac{f''(u)(1+(g'(v))^2+g''(v)(1+(f'(u))^2)}{2(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.5}$$

şeklindedir [8].

İspat: Eşitlik (2.3) deki $X(u,v)$ parametrizasyonu ile verilen M öteleme yüzeyinin teğet vektör alanları

$$X_u = (1,0,f'(u))$$

$$X_v = (0,1,g'(v)) \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{(-f'(u),-g'(v),1)}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}} \tag{2.7}$$

bulunur. Böylece M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları eşitlik (1.10) yardımıyla

$$E = < X_u, X_u > = 1+(f'(u))^2$$

$$F = < X_u, X_v > = f'(u)g'(v) \tag{2.8}$$

$$G = < X_v, X_v > = 1+(g'(v))^2$$

şeklinde hesaplanır. $X(u,v)$ nin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$X_{uu} = (0,0,f''(u))$$

$$X_{uv} = (0,0,0) \tag{2.9}$$

$$X_{vv} = (0,0,g''(v))$$

dır. Böylece eşitlik (2.7) ve (2.9) kullanılarak M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$c_{11}^1 = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}}$$

$$c_{12}^1 = c_{21}^1 = 0 \tag{2.10}$$

$$c_{22}^1 = \frac{g''(v)}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}}$$

elde edilir. Son olarak eşitlik (2.10) eşitlik (1.15) ve (1.16) de yerine yazılırsa M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$K = \frac{f''(u)g''(v)}{(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2)^2}$$

ve

$$\alpha = \left\|\vec{H}\right\| = \frac{f''(u)(1+(g'(v))^2 + g''(v)(1+(f'(u))^2)}{2(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.8: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyinin Gauss eğriliği sabit ise o zaman M yüzeyi bir silindirdir. Dolayısıyla $K = 0$ olur [8].

İspat: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer K sabit ise eşitlik (2.4) kullanılarak $f''(u) \neq 0$ olduğu durumda

$$g'''(v)(1+f'(u)^2+g'(v)^2)+4g'(v)g''(v)=0$$

elde edilir. $g''(v) \neq 0$ olduğu durumda ise

$$f'''(u)(1+f'(u)^2+g'(v)^2)+4f'(u)f''(u)=0$$

elde edilir. Her iki durumda $f''(u)=0$ veya $g''(v)=0$ olmak zorundadır. Varsayalım ki $f(u)=au+b,\ a,b \in IR$ olsun. O halde yüzeyin parametrizasyonu

$$X(u,v)=(u,v,au+b+g(v))=(0,v,b+g(v))+u(1,0,a)$$

şeklindedir. Bu yüzey bir silindire karşılık gelir.

Teorem 2.2.9: M, IE^3 Öklid uzayında sabit ortalama eğrilikli ($\alpha = \left\|\vec{H}\right\| \neq 0$) bir öteleme yüzeyi olsun. $a<1$ sıfırdan farklı pozitif bir sayı olmak üzere, M,

$$f(u) = \frac{-\sqrt{1+a^2}}{2\alpha}\sqrt{1-4\alpha^2u^2} \qquad (2.11)$$

$g(v) = av$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzeydir [8].

İspat: , IE^3 Öklid uzayında sabit ortalama eğrilikli ($\alpha = \left\|\vec{H}\right\| \neq 0$) bir öteleme yüzeyi olsun. Eşitlik (2.5) de önce u ya sonra v ye bağlı türev alarak;

$$0 = (f'''(1+g'^2) + 2f'f''g'')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-3f'f''(f''(1+g'^2) + g''(1+f'^2))(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (f'''(1+g'^2) + 2f'f''g'')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{3}{2}} - 6\alpha f'f''(1+f'^2+g'^2)^{-1}$$

$$(f'''(1+g'^2) + 2f'f''g'')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{1}{2}} = 6\alpha f'f''$$

$$0 = (2g'g''f''' + 2f'f''g''')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-g'g''(f'''(1+g'^2) + 2f'f''g'')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(2g'g''f'''(1+g'^2) + 2f'f''g''')(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{1}{2}} - 6\alpha f'f''g'g''(1+f'^2+g'^2)^{-1}$$

bulunur. Buradan;

$(2g'g''f'''(1+g'^2) + 2f'f''g''')(1+f'^2+g'^2)^{\frac{1}{2}} - 6\alpha f'f''g'g'' = 0$ elde edilir.

$f''(u) \neq 0$ ve $g''(v) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$3\alpha = \left(\frac{f'''}{f'f''} + \frac{g'''}{g'g''}\right)(1+f'^2+g'^2)^{\frac{1}{2}}$$

olur ki bu eşitlikte u ya göre tekrar türev alarak

$$\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'(1+f'^2+g'^2)^{\frac{3}{2}}+3\alpha f'f''=0$$

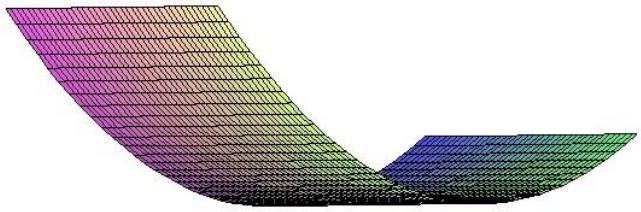
elde edilir. Dolayısıyla $f''(u)\neq 0$ ve $g''(v)\neq 0$ ise $\alpha=0$ olur. Bu ise $\alpha=\|\vec{H}\|\neq 0$ olmasıyla çelişir. Bu takdirde $f''=0$ veya $g''=0$ olmalıdır. $g''=0$ olduğu kabul edilerek eşitlik (2.5) de $g(v)=av$ yazılırsa

$f''(u)(1+a^2)=2\alpha(1+a^2+f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}$ dir. Bu diferansiyel denklem çözülerek

$$f(u)=-\frac{\sqrt{1+a^2}}{2\alpha}\sqrt{1-4\alpha^2(u+c_1)^2}+c_2,\qquad c_1,c_2\in IR$$

bulunur. Sonuç olarak $c_1=0$, $c_2=0$ seçimiyle eşitlik (2.11) elde edilir.

Örnek 2.2.10: Eşitlik (2.11) de $a=\frac{1}{10}$ ve $\alpha=\|\vec{H}\|=1$ alınırsa, grafiği Şekil 2.10 ile verilen yüzey elde edilir.



Şekil 2.10. Sabit Ortalama Eğrilikli Öteleme Yüzeyi

Teorem 2.2.11: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir düzlem ya da

$$X(u,v)=(0,v,b+g(v))+u(1,0,a) \qquad (2.12)$$

ya da

$$X(u,v) = (u,0,d + f(u)) + v(0,1,c) \tag{2.13}$$

formunda verilen silindirin bir parçası olmasıdır. Burada a,b,c,d reel sabitlerdir [14].

Lemma 2.2.12: Genel olarak bir $(u,v) \to (u,v,z(u,v))$ Monge yüzeyinin bir minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul

$$(1+z_v^2)z_{uu} - 2z_u z_v z_{uv} + (1+z_u^2)z_{vv} = 0 \tag{2.14}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 2.2.13: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} = -\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2} = a \tag{2.15}$$

olmasıdır. Burada a sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat: M yüzeyi $z(u,v) = f(u) + g(v)$ ile verilen Monge yüzeyi olarak ele alınırsa

$$z_{uu} = f''(u)$$

$$z_{uv} = 0$$

$$z_{vv} = g''(v)$$

elde edilir. Buna göre bu ifadeler eşitlik (2.14) de yerine yazılırsa

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} = -\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}$$

bulunur.

Teorem 2.2.14: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul bu yüzeyin ya bir düzlemin parçası ya da $a \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$f(u) = -\frac{1}{a}\log(\cos(au))$$

ve

$$g(v) = \frac{1}{a}\log(\cos(av))$$

parametrizasyonu ile verilen Scherk yüzeyi olmasıdır [8].

İspat: M, IE^3 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyi minimal ise Sonuç 2.2.11 den

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} = -\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2} = a$$

elde edilir.

$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} = a$ diferansiyel denkleminde

$$f'(u) = p$$

$$f''(u) = p'$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{p'}{1+p^2} = a$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında u değişkenine göre integral alınırsa

$$\int \frac{p'}{1+p^2}dp = \int adu$$

$$\arctan(p) = au + c_1$$

$$p = \tan(au + c_1)$$

elde edilir. $f'(u) = p$ eşitliği kullanılarak

$$\frac{df}{du} = \tan(au + c_1)$$

$$df = \tan(au + c_1)du$$

$$f(u) = \int \frac{\sin(au + c_1)}{\cos(au + c_1)}du$$

$$f(u) = -\frac{1}{a}\log(\cos(au) + c_1)$$

bulunur. $c_1 = 0$ alınırsa,

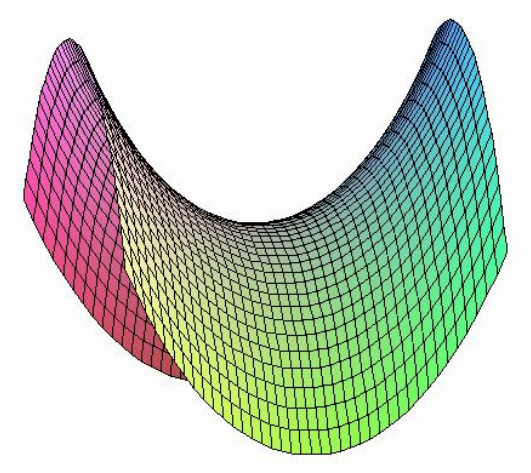
$$f(u) = -\frac{1}{a}\log(\cos(au))$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2} = a$ diferansiyel denkleminden

$$g(v) = \frac{1}{a}\log(\cos(av))$$

elde edilir.



Şekil 2.11. Scherk Yüzeyi

3. IE^4 UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bu bölümde IE^4 Öklid uzayında öteleme yüzeyleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1: $\alpha, \beta : IR \to IE^4$ 4-boyutlu Öklid uzayında regüler iki eğri olsun. Bu eğrilerin parametrizasyonları, sırasıyla $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u))$ ve $\beta(v) = (g_1(v), g_2(v), g_3(v), g_4(v))$ olmak üzere bu eğrilerin teğet vektörleri $\alpha'(u) = (f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u), f_4'(u))$ ve $\beta'(v) = (g_1'(v), g_2'(v), g_3'(v), g_4'(v))$ lineer bağımsız olarak alınırsa bu eğrilerin toplamı,

$$X : IE^2 \to IE^4$$

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \tag{3.1}$$

yaması ile verilen bir yüzey tanımlar. Burada $u_0 < u < u_1$ ve $v_0 < v < v_1$ dir. Açık olarak $X_u = \alpha'$ ve $X_v = \beta'$ olduğundan bu yüzey regülerdir.

Tanım 3.2: Eğer M yüzeyi $\alpha(u) = (u, 0, f_3(u), f_4(u))$ ve $\beta(v) = (0, v, g_3(v), g_4(v))$ şeklinde iki eğrinin toplamı olarak tanımlanırsa bu yüzeye IE^4 Öklid uzayında öteleme yüzeyi denir. Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$X(u, v) = (u, v, f_3(u) + g_3(v), f_4(u) + g_4(v)) \tag{3.2}$$

şeklinde bir Monge yüzeyi olarak verilir.

M yüzeyinin teğet uzayı,

$$X_u = (1, 0, f_3'(u), f_4'(u))$$

$$X_v = (0, 1, g_3'(v), g_4'(v))$$

teğet vektörleri tarafından gerilir. Buna göre eşitlik (1.10) yardımıyla yüzeyin birinci temel formunun katsayıları,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f_3'(u))^2 + (f_4'(u))^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = f_3'(u)g_3'(v) + f_4'(u)g_4'(v) \tag{3.3}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (g_3'(v))^2 + (g_4'(v))^2$$

şeklinde elde edilir. Burada $< , >$ IE^4 uzayında iç çarpımdır. $X(u,v)$ nin ikinci kısmi türevleri,

$$X_{uu} = (0,0,f_3''(v),f_4''(v))$$

$$X_{uv} = (0,0,0,0) \tag{3.4}$$

$$X_{uu} = (0,0,g_3''(v),g_4''(v))$$

şeklinde bulunur.

Şimdi M yüzeyinin normal uzayını geren ortonormal vektör alanlarını elde edelim. Bunun için,

$\langle X_u, N_1 \rangle = 0$,

$\langle X_v, N_1 \rangle = 0$,

$\langle X_u, N_2 \rangle = 0$,

$\langle X_v, N_2 \rangle = 0$,

$\langle N_1, N_2 \rangle = 0$,

eşitliklerini sağlayan N_1 ve N_2 ortonormal vektör alanlarını hesaplayalım.

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

olmak üzere,

$\langle (1,0,f_3'(u),f_4'(u)),(a_1,a_2,a_3,a_4)\rangle = 0$,

$\langle (0,1,g_3'(v),g_4'(v)),(a_1,a_2,a_3,a_4)\rangle = 0$,

eşitlikleri yardımıyla

$$a_1 + f_3'(u)a_3 + f_4'(u)a_4 = 0$$

$$a_2 + g_3'(v)a_3 + g_4'(v)a_4 = 0$$

elde edilir. Burada $a_3 = 1$, $a_4 = 0$ olarak alınırsa $a_1 = -f_3'(u)$, $a_2 = -g_3'(v)$ bulunur. Böylece

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_3'(u))^2 + (g_3'(v))^2}}(-f_3'(u),-g_3'(v),1,0)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}}(b_1,b_2,b_3,b_4)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} b_1 + f_3'(u)b_3 + f_4'(u)b_4 &= 0 \\ b_2 + g_3'(v)b_3 + g_4'(v)b_4 &= 0 \\ -f_3'(u)b_1 - g_3'(v)b_2 + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözümünde $b_4 = 1 + (f_3'(u))^2 + (g_3'(v))^2$ alınırsa

$$\widetilde{E} = 1 + (f_3'(u))^2 + (g_3'(v))^2 ,$$

$$\widetilde{F} = f_3'(u)f_4'(u) + g_3'(v)g_4'(v) ,$$

$$\widetilde{G} = 1 + (f_4'(u))^2 + (g_4'(v))^2 ,$$

$$\widetilde{W}^2 = \widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2 = W^2$$

eşitlikleri yardımıyla

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}}(\widetilde{F}f_3'(u) - \widetilde{E}f_4'(u), \widetilde{F}g_3'(u) - \widetilde{E}g_4'(v), -\widetilde{F}, \widetilde{E})$$

bulunur. Böylece (3.2) parametrizasyonu ile verilen M öteleme yüzeyinin normal uzayının ortonormal bir çatısı

$$N_1 = \frac{1}{\widetilde{E}}(-f_3'(u), -g_3'(v), 1, 0) ,$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}}(\widetilde{F}f_3'(u) - \widetilde{E}f_4'(u), \widetilde{F}g_3'(u) - \widetilde{E}g_4'(v), -\widetilde{F}, \widetilde{E}) \qquad (3.5)$$

şeklinde elde edilir.

M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları eşitlik (3.4) ve (3.5) yardımıyla,

$$c_{11}^1 = \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}} \quad , \quad c_{22}^1 = \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}} ,$$

$$c_{12}^1 = c_{12}^2 = 0 \quad ,$$

$$c_{11}^2 = \frac{\widetilde{E}f_4''(u) - \widetilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}} , \qquad (3.6)$$

$$c_{22}^2 = \frac{\widetilde{E}g_4''(v) - \widetilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}} .$$

şeklinde bulunur.

M yüzeyinin şekil operatörü matrisleri eşitlik (3.6) ve (1.12) kullanılarak

$$A_{N_1} = \frac{1}{W^2}\begin{bmatrix} \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}} & 0 \\ 0 & \frac{g_3''}{\sqrt{\tilde{E}}} \end{bmatrix},$$

(3.7)

$$A_{N_2} = \frac{1}{W^2}\begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}f_4''(u) - \tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{W}}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{E}g_4''(v) - \tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.3: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Buna göre M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektör alanı, sırasıyla,

$$K = \frac{f_3''(u)g_3''(v)\tilde{G} - \left(f_3''(u)g_4''(v) + g_3''(v)f_4''(u)\right)\tilde{F} + f_4''(u)g_4''(v)\tilde{E}}{\tilde{W}^2 W^2} \tag{3.8}$$

ve

$$\vec{H} = \frac{f_3''(u)G + g_3''(v)E}{2\sqrt{\tilde{E}}W^2}N_1 + \frac{G\left(f_4''(u)\tilde{E} - f_3''(u)\tilde{F}\right) + E\left(g_4''(v)\tilde{E} - g_3''(v)\tilde{F}\right)}{2\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}W^2}N_2 \tag{3.9}$$

dır [14].

İspat: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Eşitlik (3.6) eşitlik (1.15) de yerine yazılırsa M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{1}{W^2}\left(\left[c_{11}^1 c_{22}^1 - (c_{12}^1)^2\right] + \left[c_{11}^2 c_{22}^2 - (c_{12}^2)^2\right]\right)$$

$$K = \frac{1}{W^2}\left[\left(\frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}\right)\left(\frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}}\right) + \left(\frac{\tilde{E}f_4''(u) - \tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{W}}}\right)\left(\frac{\tilde{E}g_4''(v) - \tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\right)\right]$$

$$K = \frac{1}{W^2}\left[\frac{f_3'' g_3''}{\tilde{E}} + \frac{\tilde{E}^2 f_4'' g_4'' - \tilde{E}\tilde{F} f_4'' g_3'' - \tilde{E}\tilde{F} f_3'' g_4'' + \tilde{F}^2 f_3'' g_3''}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]$$

$$K = \frac{1}{W^2}\left[\frac{\tilde{W}^2 f_3'' g_3'' + \tilde{F}^2 f_3'' g_3'' + \tilde{E}^2 f_4'' g_4'' - \tilde{E}\tilde{F} f_4'' g_3'' - \tilde{E}\tilde{F} f_3'' g_4''}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]$$

$$K = \frac{1}{W^2}\left[\frac{f_3'' g_3''(\tilde{W}^2 + \tilde{F}^2) + \tilde{E}^2 f_4'' g_4'' - \tilde{E}\tilde{F}(f_4'' g_3'' - f_3'' g_4'')}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]$$

$$K = \frac{1}{W^2}\left[\frac{f_3'' g_3''((\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 + \tilde{F}^2) + \tilde{E}^2 f_4'' g_4'' - \tilde{E}\tilde{F}(f_4'' g_3'' - f_3'' g_4'')}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]$$

$$K = \frac{f_3''(u) g_3''(v)\tilde{G} - \left(f_3''(u) g_4''(v) + g_3''(v) f_4''(u)\right)\tilde{F} + f_4''(u) g_4''(v)\tilde{E}}{\tilde{W}^2 W^2}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (3.6) eşitlik (1.16) da yerine yazılırsa M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\left[(c_{11}^1 G + c_{22}^1 E - 2c_{12}^1 F)N_1 + (c_{11}^2 G + c_{22}^2 E - 2c_{12}^2 F)N_2\right]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2}\left[\left(\frac{f_3''}{\sqrt{\tilde{E}}} G + \frac{g_3''}{\sqrt{\tilde{E}}} E\right)N_1 + \left(\frac{\tilde{E} f_4'' - \tilde{F} f_3''}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} G + \frac{\tilde{E} g_4'' - \tilde{F} g_3''}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} E\right)N_2\right]$$

$$\vec{H} = \frac{f_3''(u) G + g_3''(v) E}{2\sqrt{\tilde{E}W^2}} N_1 + \frac{G\left(f_4''(u)\tilde{E} - f_3''(u)\tilde{F}\right) + E\left(g_4''(v)\tilde{E} - g_3''(v)\tilde{F}\right)}{2\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}W^2} N_2$$

olarak bulunur.

Önerme 3.4: $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \subset E^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{E\left(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1\right) - F\left(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{11}^2 c_{22}^1\right) + G\left(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1\right)}{W^3} \tag{3.10}$$

dir [1].

Sonuç 3.5: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{F\left(f_4''(u)g_3''(v) - f_3''(u)g_4''(v)\right)}{W^4} \tag{3.11}$$

şeklindedir [1].

İspat: Eşitlik (3.6) eşitlik (3.10) da yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Buna göre M yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir düzlem ya da

$$X(u,v) = (0, v, b_3 + g_3(v), b_4 + g_4(v)) + u(1,0,a_3,a_4)$$

veya

$$X(u,v) = (u,0,d_3 + f_3(u), d_4 + f_4(u)) + v(0,1,c_3,c_4)$$

parametrizasyonu ile verilen silindir olmasıdır. Burada a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 3,4)$ reel sabitlerdir [14].

Önerme 3.7: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{f_i''(u)}{E} = -\frac{g_i''(v)}{G} = c_i \quad , \quad i = 3,4 \tag{3.12}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada c_i ler reel sabitlerdir.

Teorem 3.8. M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Buna göre M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir düzlem ya da

$$f_k(u) = \frac{c_k}{c_3^2 + c_4^2}\left(\log\left|\cos\ (\sqrt{au})\right| + cu\right) + e_k u\ ,$$

$$g_k(u) = \frac{c_k}{c_3^2 + c_4^2}\left(-\log\left|\cos\ (\sqrt{bv})\right| + dv\right) + p_k v\ ,\quad k = 3,4$$

parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olmasıdır. Burada $c_k, e_k, p_k, a > 0, b > 0, c, d$ reel sabitlerdir [3].

Önerme 3.9: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer $f_3(u)$ ve $g_3(v)$ fonksiyonları lineer polinomlar ise M yüzeyi $H_1 -$ minimaldir.

İspat: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin birinci ortalama eğriliği eşitlik (1.17) yardımıyla

$$H_1 = \frac{f_3'' G + g_3'' E}{2\sqrt{\widetilde{E}} W^2}$$

şeklinde elde edilir. $f_3(u)$ ve $g_3(v)$ fonksiyonları

$$f_3(u) = a_1(u) + a_2\,,\qquad g_3(v) = b_1(v) + b_2$$

lineer polinom fonksiyonları olarak alınırsa $M \subset IE^4$ öteleme yüzeyinin birinci ortalama eğriliği sıfır olur. Yani yüzey H_1-minimaldir.

3.1. Bezier Öteleme Yüzeyleri

Tanım 3.1.1: IE^4 Öklid uzayında kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi, $u, v, t = 1 - u - v$ merkezi koordinatları yardımıyla

$$s(u,v,t) = \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}^2(u,v,t) b_{ijk} \tag{3.13}$$

parametrizasyonu ile verilir. Burada

$$B_{ijk}^2 = \frac{2!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j t^k$$

baz fonksiyonları ve b_{ijk} lar ise kontrol noktalarıdır [16].

$M \subset IE^4$ kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi, u,v afin parametreler olmak üzere

$$X(u,v) = \frac{1}{2} x u^2 + yuv + \frac{1}{2} z v^2 + wu + cv + d \tag{3.14}$$

şeklinde parametrize edilebilir. Burada x, y, z, w, c, d, IE^4 uzayında sabit vektörlerdir.

Buna göre kuadratik üçgensel Bezier yüzeyleri özel olarak $y = 0$ alınarak

$$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} x_i u^2 + w_i u + a_i$$

$$\beta(v) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} z_i v^2 + c_i v + b_i \tag{3.15}$$

şeklindeki iki eğrinin toplamı olarak ele alınabilir. Burada $d_i = a_i + b_i$ şeklindedir.

Önerme 3.1.2: M, IE^4 Öklid uzayında (3.14) parametrizasyonu ile verilen bir kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi olsun. Eğer

$$w_1 = 1, x_1 = z_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$c_2 = 1, x_2 = z_2 = w_2 = d_2 = 0, \tag{3.16}$$

ise M yüzeyi bir öteleme yüzeyidir [14].

İspat: M, IE^4 Öklid uzayında (3.14) parametrizasyonu ile verilen bir kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi olsun. Eğer eşitlik (3.16) sağlanıyorsa,

$$r(u,v)=\frac{1}{2}x_3u^2+\frac{1}{2}z_3v^2+w_3u+c_3v+d_3,$$

$$s(u,v)=\frac{1}{2}x_4u^2+\frac{1}{2}z_4v^2+w_4u+c_4v+d_4.$$

olmak üzere, M yüzeyi

$$X(u,v)=(u,v,r(u,v),s(u,v))$$

parametrizasyonu ile verilebilir. Böylece kuadratik üçgensel Bezier yüzeyi

$$f_3(u)=\frac{1}{2}x_3u^2+w_3u+a_3 \quad ; \quad g_3(v)=\frac{1}{2}z_3v^2+c_3v+b_3$$

$$f_4(u)=\frac{1}{2}x_4u^2+w_4u+a_4 \quad ; \quad g_4(v)=\frac{1}{2}z_4v^2+c_4v+b_4 \qquad (3.17)$$

formunda bir öteleme yüzeyi olur. Burada $d_i=a_i+b_i, i=3,4$ şeklindedir.

Örnek 3.1.3: M, IE^4 Öklid uzayında eşitlik (3.17) yardımıyla verilen bir Bezier öteleme yüzeyi olsun. Eğer

$$x_3=-1,\ z_4=-1 \text{ ve } w_3=a_3=z_3=c_3=b_3=x_4=w_4=a_4=c_4=b_4=0$$

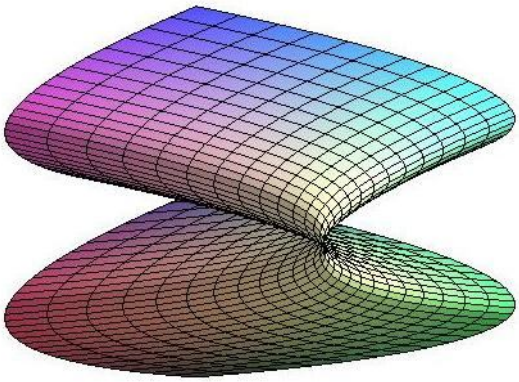
alınırsa, M yüzeyinin parametrizasyonu

$$X(u,v)=\left(u,v,-\frac{u^2}{2},-\frac{v^2}{2}\right) \qquad (3.18)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca eşitlik (3.18) yardımıyla verilen M yüzeyinin IE^3 Öklid uzayındaki izdüşümü alınarak

plot3d([x + y, z,w], x = a..b, y = c..d)

mapple çizim komutuyla grafiği Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1. Bezier Öteleme Yüzeyi

3.2. Bir Yüzeyin Eğrilik Elipsi

Tanım 3.2.1: $M \subset IE^4$ yüzeyi X(u.v) regüler yaması ile verilsin. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_P(M)$ teğet uzayında $\theta \in [0,2\pi]$ açısı ile verilen bir çember alınsın. Böylece $N_p(M)$ normal düzlem ile

$$X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2 \tag{3.19}$$

doğrultu vektörünün oluşturduğu doğrunun direkt toplamı olan $p \in M$ noktasındaki hiperdüzlem ile M yüzeyinin arakesit eğrisi $\gamma(\theta)$ ile gösterilsin. Burada X_1, X_2 vektörleri $T_P(M)$ teğet uzayının ortonormal bir bazıdır. Bu eğriye M yüzeyinin p noktasında ve X vektörü yönündeki normal kesit eğrisi adı verilir. Ayrıca $\gamma(\theta)$ eğrisinin η_θ normal eğrilik vektörü de $N_p(M)$ düzleminde yatan bir vektördür. Ayrıca θ açısı 0 dan 2π ye değiştiğinde bu vektör $N_p(M)$ düzleminde bir elips oluşturur. Bu elipse M yüzeyinin p noktasındaki eğrilik elipsi denir. Böylece

$$\gamma'_\theta = X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2 \tag{3.20}$$

vektörü, normal kesit eğrisinin birim vektörü olmak üzere M yüzeyinin p noktasındaki eğrilik elipsi

$$E(p) = \{h(X,X) : X \in T_p(M), \|X\| = 1\} \tag{3.21}$$

ile gösterilir.

Burada h ifadesi $X(u,v)$ yamasının ikinci temel formudur. Bunun bir elips belirttiğini görmek için $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ yardımıyla

$$h(X,X) = \vec{H} + \cos 2\theta\vec{B} + \sin 2\theta\vec{C} \tag{3.22}$$

formülüne bakmak yeterlidir. Burada

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(h(X_1,X_1) - h(X_2,X_2)\right) \quad , \quad \vec{C} = h(X_1,X_2) \tag{3.23}$$

normal vektörler ve $\vec{H}$ ortalama eğrilik vektörüdür. Bu bize X birim vektörünün birim çember etrafında bir tur attığında $h(X,X)$ vektörünün $\vec{H}$ merkezli elips etrafında iki tur attığını gösterir. Bu elips p noktasında $X(u,v)$ nin $E(p)$ elipsidir. Açık olarak $E(p)$ elipsi bir nokta ya da bir doğruya dejenere olabilir [11].

Tanım 3.2.2: $M \subset IE^4$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde

$$\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0 \text{ ve } \|B\| = 2\|C\| \tag{3.24}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $X(u,v)$ nin eğrilik elipsi bir çember belirtir. Eğrilik elipsleri çember olan yüzeyler süperkonformal yüzeyler olarak da bilinir [6].

Tanım 3.2.3: $M \subset IE^4$ yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları yardımıyla $\Delta(p)$ determinantı ve $\alpha(p)$ matrisi sırasıyla

$$\Delta(p) = \frac{1}{4W^2}\det\begin{bmatrix} c_{11}^1 & 2c_{12}^1 & c_{22}^1 & 0 \\ c_{11}^2 & 2c_{12}^2 & c_{22}^2 & 0 \\ 0 & c_{11}^1 & 2c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ 0 & c_{12}^2 & 2c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{bmatrix}(p) \tag{3.25}$$

ve

$$\alpha(p) = \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{bmatrix}(p) \tag{3.26}$$

biçiminde tanımlanır.

$T_P^{\perp}(M)$ uzayının orijini p noktası olarak alındığında aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir [11].

a) $\Delta(p) < 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışındadır. Bu noktaya M yüzeyinin hiperbolik noktası adı verilir.

b) $\Delta(p) = 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerindedir. Bu noktaya M yüzeyinin parabolik noktası adı verilir.

i) $\Delta(p) = 0$ ve $K(P) > 0$ ise p noktası sanal tipinde büküm noktasıdır.

ii) $\Delta(p) = 0$ ve $K(P) < 0$ ise

rank $\alpha(p) = 2$ için p noktası non-dejeneredir.

rank $\alpha(p) = 1$ için p noktası reel tipinde büküm noktasıdır.

iii) $\Delta(p) = 0$ ve $K(P) = 0$ ise p noktası düz tipinde büküm noktasıdır.

c) $\Delta(p) > 0$ ise p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin içindedir. Bu noktaya M yüzeyinin eliptik noktası adı verilir.

Sonuç 3.2.4: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. $T_P^{\perp}(M)$ uzayının orijini $p \in M$ noktası olarak alındığında aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir.

1) Eğer $\dfrac{f_3''(u)}{f_4''(u)} = \dfrac{g_3''(v)}{g_4''(v)}$ ise, p noktası eğrilik elipsinin üzerindedir. Bu nokta, M yüzeyinin parabolik noktasıdır.

2) Eğer $\dfrac{f_3''(u)}{f_4''(u)} \neq \dfrac{g_3''(v)}{g_4''(v)}$ ise, p noktası eğrilik elipsinin dışındadır. Bu nokta, M yüzeyinin hiperbolik noktasıdır.

İspat: M, IE^4 Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi olsun. Eşitlik (3.6) ve (3.25) yardımıyla

$$\Delta(p)=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}W^2} & 0 & \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}W^2} & 0 \\ \frac{\widetilde{E}f_4''(u)-\widetilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}W^2} & 0 & \frac{\widetilde{E}g_4''(v)-\widetilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}W^2} & 0 \\ 0 & \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}W^2} & 0 & \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}W^2} \\ 0 & \frac{\widetilde{E}f_4''(u)-\widetilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}W^2} & 0 & \frac{\widetilde{E}g_4''(v)-\widetilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}W^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(p)=\frac{1}{4}\frac{f_3''}{\sqrt{\widetilde{E}W^2}}\left(-\frac{\widetilde{E}g_4''-\widetilde{F}g_3''}{\sqrt{\widetilde{E}}\widetilde{W}W^2}\right)\left(\frac{f_3''(\widetilde{E}g_4''-\widetilde{F}g_3'')}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}-\frac{g_3''(\widetilde{E}f_4''-\widetilde{F}f_3'')}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\widetilde{E}f_4''-\widetilde{F}f_3''}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)\left(-\frac{g_3''}{\sqrt{\widetilde{E}}W^2}\right)\left(\frac{f_3''(\widetilde{E}g_4''-\widetilde{F}g_3'')}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}-\frac{g_3''(\widetilde{E}f_4''-\widetilde{F}f_3'')}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)$$

$$\Delta(p)=\frac{1}{4}\left(\frac{g_3''(v)(\widetilde{E}f_4''(u)-\widetilde{F}f_3''(u))-f_3''(u)(\widetilde{E}g_4''(v)-\widetilde{F}g_3''(v))}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)$$
$$\left(\frac{f_3''(u)(\widetilde{E}g_4''(v)-\widetilde{F}g_3''(v))-g_3''(v)(\widetilde{E}f_4''(u)-\widetilde{F}f_3''(u))}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)$$

$$\Delta(p)=-\frac{1}{4}\left(\frac{f_3''(u)(\widetilde{E}g_4''(v)-\widetilde{F}g_3''(v))-g_3''(v)(\widetilde{E}f_4''(u)-\widetilde{F}f_3''(u))}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right)^2$$

$$\Delta(p)=-\frac{1}{4}\left[\frac{\widetilde{E}\left((g_4''(v)f_3''(u)-f_4''(u)g_3''(v)\right)}{\widetilde{E}\widetilde{W}W^4}\right]^2$$

$$\Delta(p)=-\frac{1}{4}\frac{\left(g_4''(v)f_3''(u)-f_4''(u)g_3''(v)\right)^2}{W^{10}} \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre $\Delta(p)\le 0$ olur. Tanım 3.2.3 yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 3.2.5: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer

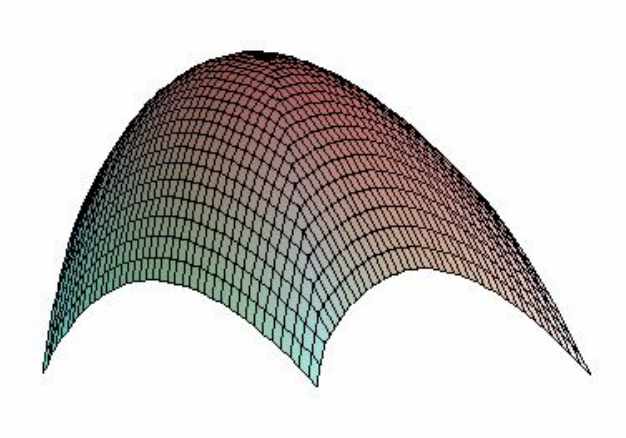
$$f_3(u) = 2u^2 + 3u + 1 \quad , \quad g_3(v) = 3v^2 + 2v + 4$$

$$f_4(u) = 3u^2 + 2u + 2 \quad , \quad g_4(v) = 2v^2 + 3v + 5 \qquad (3.28)$$

şeklinde seçilirse $T_p^{\perp}(M)$ uzayının orijini olan $p \in M$ noktası eğrilik elipsinin üzerindedir. Ayrıca eşitlik (3.28) yardımıyla verilen M yüzeyinin IE^3 Öklid uzayındaki izdüşümü alınarak

plot3d([x + y, z,w], x = a..b, y = c..d)

mapple çizim komutuyla grafiği Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2. (3.28) Eşitlikleri ile Verilen Öteleme Yüzeyi

Sonuç 3.2.6: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. $T_p^{\perp}(M)$ uzayının orijini olan $p \in M$ noktası eğrilik elipsinin üzerinde ise M yüzeyi düz normal koneksiyona sahiptir.

İspat: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. $T_p^{\perp}(M)$ uzayının orijini olan $p \in M$ noktası eğrilik elipsinin üzerinde ($\Delta(p) = 0$) ise eşitlik (3.27) den

$$g_4''(v)f_3''(u) - f_4''(u)g_3''(v) = 0$$

bulunur. Eşitlik (3.11) ve (1.18) den sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.7: M, IE^4 Öklid uzayında (3.2) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Buna göre M yüzeyinin eğrilik elipsinin bir çember olması için gerek ve yeter koşul

$$\left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{EG-2F^2}{W^2E} h(X_u,X_u) - \frac{E}{W^2} h(X_v,X_v) \right), \frac{-F}{WE} h(X_u,X_u) \right\rangle = 0$$

ve (3.29)

$$\left\| \frac{1}{2}\left(\frac{EG-2F^2}{W^2E} h(X_u,X_u) - \frac{E}{W^2} h(X_v,X_v) \right) \right\| = \frac{-F}{WE} \left\| h(X_u,X_u) \right\|$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Eşitlik (3.6) ve (1.19) yardımıyla $h(X_u,X_v)=0$ bulunur. Buna göre eşitlik (3.23) ve (1.21) kullanılarak

$$\vec{B} = \frac{EG-2F^2}{W^2E} h(X_u,X_u) - \frac{E}{W^2} h(X_v,X_v)$$

ve (3.30)

$$\vec{C} = -\frac{F}{WE} h(X_u,X_u)$$

elde edilir. Eşitlik (3.30) ile elde edilen $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri eşitlik (3.24) de yerine yazılırsa eşitlik (3.29) elde edilir. Tersine eşitlik (3.29) sağlanıyorsa M yüzeyi süperkonformal yüzeydir.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

IE^4 Öklid uzayında öteleme yüzeyleri verilerek bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğrilik vektörü ve normal eğrilik fonksiyonu hesaplanmıştır. IE^4 uzayında öteleme yüzeyinin $H_1 -$ minimal olma koşulu elde edilmiştir. Bir quadratik üçgensel Bezier yüzeyinin öteleme yüzeyi olma koşulu verilmiştir. Öteleme yüzeyinin eğrilik elipsi yardımıyla normal uzayının orijininin sınıflandırılması yapılmıştır. $T_p^{\perp}(M)$ uzayının orijini olan p noktasının eğrilik elipsinin üzerinde olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin düz normal koneksiyona sahip olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca M yüzeyinin süperkonformal yüzey olma koşulları elde edilmiştir.

Bu çalışmada öteleme yüzeyleri daha çok teorik açıdan ele alınmıştır. Ayrıca bu yüzeylerin mimariye uygulamaları ele alınarak daha sonraki çalışmalara zemin oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Arslan K. and Bulca B., Surfaces Given with the Monge Patch in IE^4 ,2012, (Preprint).

[2] Chen, B.Y., *Geometry of Submanifolds*, Dekker, New York**,** 1973.

[3] Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L. and Zafindratafa G.,Classification of Polynomial Translation Hypersurfaces of Finite Type, *Results in Math*, 1995, **27**, 244-249.

[4] Geomans W., Surfaces in Three-Dimensional Euclidean and Minkowski Space, in Particular a Study of Weingarten Surfaces, PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven- Faculty of Science, Leuven, 2010.

[5] Glymph J., Schelden D., Ceccato C., Mussel J. and. Schober H, A Parametric Strategy for Free-From Glass Structures Using Quadrilateral Planar Facets, *Automation in Construction*, 2004, **13**, 187-202.

[6] Guadalupe I. V. and Rodriguez L., Normal Curvature of Surfaces in Space Forms. *Pasific J. Math*., 1983, **106(1)**, 95-103.

[7] Hacısalihoğlu H.H., *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

[8] Liu H., Translation Surfaces with Constant Mean Curvature in 3-Dimensinal Spaces*, J. Geom*., 1999, **64** , 141-149.

[9] Mello L. F., Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in IR^4, *Publ. Math.* ,2003, **47**, 415-440

[10] Mello L. F., Orthogonal Asymptotic Lines on Surfaces Immersed in IR^4, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2009, **39(5),** 1597-.1612

[11] Mochida D.K., Fuster M.D.C.R and Ruas M.A.S, The Geometry of Surfaces in 4-Space From a Contact Viewpoint, *Geometriae Dedicata*, 1995, **54** , 323-332.

[12] Munteanu M., and Nistor A. I., On the Geometry of The Second Fundamental Form of Translation Surfaces in IE^3, *Houston Journal of Mathematics*, 2011, **37**, 1087-1102.

[13] O'Neill, B., *Elemantary Differantial Geometry*, Academic Press, 1966.

[14] Öztürk G., On Translation Surfaces in Euclidean Spaces*,* 2012, (Preprint).

[15] Scherk H. F., Bemerkungen Ber Die Kleinste Fläche Innerhalb Gegebener Grenzen, *J. R. Angew. Math.,* 1835, **13**, 185-208.

[16] Sederberg T.W., Anderson D.C., Steiner Surface Patches, IEEE Comp. *Graphics and Applications,* 1985, **5**, 23-36.

[17] Verstraelen L., Walrave J., Yaprak S., The Minimal Translation Surface in Euclidean Space, *Soochow J. Math.*, 1994, **20**, 77-82.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında İzmit'te doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini Kocaeli'nin Derince ilçesinde tamamladı. 2006 yılında girdiği Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden Matematikçi olarak mezun oldu. 2010 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

2010 yılından beri Kocaeli'de özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.