İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ ETKİLEŞİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Esra AKMAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Anabilim Dalı : Herhangi Mühendislik, Bilim
Programı : Herhangi Program

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ ETKİLEŞİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Esra AKMAN
(509091006)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Semra AHMETOLAN
Anabilim Dalı : Herhangi Mühendislik, Bilim
Programı : Herhangi Program

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509091006 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ayşe Esra AKMAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"Nonlineer elastik bir tabakada SH dalgalarının Etkileşimi "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Yrd. Doç Dr. Semra AHMETOLAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Hasan ENGİN İstanbul Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **19 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **23 Ocak 2012**

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, tanıştığımız ilk günden bu yana, bilgi ve tecrübeleriyle bana destek veren, tezimi hazırlamamda her konuda yol gösteren, emeğini hiçbir zaman sakınmayan ve çalışmaktan gurur duyduğum sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Semra Ahmetolan' a çok teşekkür ederim.

Çalışmam süresince bilgi birikimiyle benden yardımını esirgemeyen Araş. Gör. Ali Demirci' ye teşekkür ederim.

Manevi desteklerini her zaman arkamda hissettiğim tüm arkadaşlarıma teşekkürler.

Beni bugünlere getirmek için bana emek veren, hayat boyu desteklerini arkamda hissettiğim ve hissedeceğim aileme teşekkür ederim.

Ocak 2012

Ayşe Esra Akman
Matematikçi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **ix**
ÖZET ..... **xi**
SUMMARY ..... **xiii**
1. GİRİŞ **1**
2. NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARI **5**
2.1 Amaç 5
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler 5
2.3 Elastik Bir Tabakada Lineer SH Dalgaları ve Dispersiyon Bağıntısı 7
3. NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA AYNI YÖNDE İLERLEYEN SH DALGALARININ ETKİLEŞİMLERİ **11**
3.1 Giriş 11
3.2 Nonlineer SH Dalgalarının Etkileşimleri 11
3.3 Kuple Nonlineer Schrödinger (KNLS) Denklemleri için Lineer Kararlılık Analizi 30
3.4 KNLS Denklemlerinin Katsayılarının Sayısal Olarak İncelemesi……..33
4. SONUÇ **41**
KAYNAKLAR **43**
EKLER **47**
ÖZGEÇMİŞ **57**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : 2h (h>0) kalınlıklı *P* tabakası……..……...……5
Şekil 2.2 : Dispersiyon bağıntısının ilk üç simetrik modu…. .... …….9
Şekil 2.3: Dispersiyon bağıntısının ilk üç antisimetrik modu.....9
Şekil 2.4 : (2.20)' de verilen dispersiyon bağıntısının ilk simetrik ve antisimetrik dörder dalı için boyutsuz faz hızı $C=c/c_T$' nin boyutsuz dalga sayısı K=kh' ya göre değişimi..... 10
Şekil 3.1: (3.13) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk iki simetrik ve antisimetrik modları için Γ nın boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi…….37
Şekil 3.2: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için *A* teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a ' ya göre değişimi……...38
Şekil 3.3 : Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, β<0 seçimine karşılık *B* teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a' ya göre değişimi…….38
Şekil 3.4: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, β>0 seçimine karşılık *B* teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a ' ya göre değişimi……..39
Şekil 3.5: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, β<0 seçimine karşılık *C* teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a ' ya göre değişimi……..39
Şekil 3.6: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, β>0 seçimine karşılık *C* teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a ' ya göre değişimi…….……..40
Şekil 3.7: (3.80) denklemi ile verilen NLS denkleminin katsayılarının çarpımının (3.13) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi…….....40

NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARININ ETKİLEŞİMİ

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı hiperelastik malzemeden oluşan bir tabaka içerisinde aynı yönde ilerleyen SH dalgalarının etkileşimi problemi ele alınmıştır. Serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı kabul edilmiştir. Dalgaların etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu kullanılarak incelenmiştir. Asimptotik analiz neticesinde aynı yönde ilerleyen ve birbirleri ile etkileşen dalgalara ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denklemleri elde edilmiştir. Sonrasında KNLS denklemlerinin çözümlerinin kararsızlıkları ve solitary dalga çözümlerinin varlığı incelenmiştir. Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır:

Giriş bölümünde, elastik dalgalarının yayılmasına yönelik gelişimin tarihi kısaca verilmiştir. İkinci kısımda ise ilk olarak lineer malzemeden oluşan bir tabakada aynı yönde ilerleyen SH dalgalarının yayılımı problemi incelenmiş ve lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısı türetilmiştir. Bilindiği gibi c_T ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını, c ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere, tabakada bu tip dalgaların yayılabilmesi için $c_T < c$ eşitsizliğinin gerçeklenmesi gerekmektedir. Bu koşul altında, daha sonra nonlineer malzemeden oluşan bir elastik tabakada aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimi problemi ele alınmış ve bu problem bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu yardımıyla incelenmiştir. Etkileşen dalgalara ilişkin birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarını asimptotik olarak karakterize eden nonlineer denklem sistemi, Kuple Nonlineer Schrödinger (KNLS) denklem sistemi, türetilmiştir.

Son yıllarda, KNLS denklem sistemi üzerine, denklemlerin solitary dalga ve periyodik çözümleri ve bunlara ilişkin lineer kararlılık analizinin incelendiği birçok çalışma bulmak mümkündür. Solitary zarf çözümlerinin bulunmasında, KNLS sistemini oluşturan denklemlerin lineer ve nonlineer katsayılarının işaretleri büyük önem taşımaktadır. Bölüm 3.3' de bu çalışmaların bazılarından bahsedilerek, solitary dalga çözümlerinin varlığı ve ortamı oluşturan malzemenin nonlineerliğinin aynı yönde ilerleyen ve eşit grup hızlarına sahip dalgaların yayılımı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

THE INTERACTON OF SH WAVES IN A NONLINEAR ELASTIC PLATE

SUMMARY

In this work, the nonlinear interaction of two co-directional shear horizontal (SH) waves in a homogeneous, isotropic elastic plate of uniform thickness is considered. The plate of uniform thickness occupies the region,

$$P = \{(X,Y,Z) \mid -h \le Y \le h, -\infty < (X,Z) < \infty\} \quad \textbf{(1)}$$

in the reference frame *(X,Y,Z)* and it is assumed that the free boundaries $Y=\pm h$ are free of traction. It is supposed that SH waves propagate along the positive *X* axis and the displacement of a particle in *Z* direction. In this case, the wave motion

$$x=X,\ y=Y,\ z=Z+u(X,Y,t) \quad \textbf{(2)}$$

can be defined in this form. *u* is the displacement function of *X,Y* and *t*, the time. The governing equation of motion which the terms are not higher than third degree and the boundary conditions can be written as follows;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_T^2\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right\} \qquad \text{in } P \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \qquad \text{on} \qquad Y = \pm h \quad \textbf{(4)}$$

where

$$Q(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 . \quad \textbf{(5)}$$

In the equation **(3),** $c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$ is the propagation velocity of linear waves in the plate. Here, μ is the linear shear modulus of the layer, and ρ is the density of the layer. $n_T = \frac{2}{\rho}\frac{d^2\Sigma(3)}{dI^2}$ is nonlinear material constant of the constituent material. In the plate, when $n_T > 0$ the material is hardening, $n_T < 0$ then material is softening.

To investigate the interaction of two co-directional SH waves which the amplitudes are assumed to be small but finite, the method of multiple scales is used. For this method we introduce the new independent variables,

$$x_i = \varepsilon^i X\ ,\ t_i = \varepsilon^i t \ \text{ and } \ y = Y\ ,(i=0,1,2) \quad \textbf{(6)}$$

where $\{x_1,x_2,t_1,t_2\}$ are slowly variables to describe slow variations of the amplitudes whereas $\{x_0,y,t_0\}$ characterize the fast variables, and $\varepsilon > 0$ is a small parameter

which measures the degree of nonlinearity. Now u is considered to be a function of these new variables and it is expanded in power of ε to the asymptotic series,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \tag{7}$$

and we can arrange a transformation between old and new variables as follows:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \tag{8}$$

Then writing the equation of motion in **(3)** and boundary conditions in **(4)** with considering the terms in **(8)** by applying **(6)** and using asymptotic expansion **(7)** with collecting the terms of some powers in ε, we find a hiearchy of problems which can be determined for u_n. First three perturbation problems can be given as following:

$$\mathrm{O}(\varepsilon): \qquad \mathrm{L}_0 u_1 = 0 \qquad \text{in} \quad \mathrm{P} \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on} \quad y = \pm h \tag{10}$$

$$\mathrm{O}(\varepsilon^2): \qquad \mathrm{L}_0 u_2 = \mathrm{L}_1 u_1 \qquad \text{in} \quad \mathrm{P} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on} \quad y = \pm h \tag{12}$$

$$\mathrm{O}(\varepsilon^3): \qquad \mathrm{L}_0 u_3 = \mathrm{L}_1 u_2 + \mathrm{L}_2 u_1 + n_T \mathrm{N}_0(u_1) \quad \text{in} \quad \mathrm{P} \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad \text{on} \quad y = \pm h \tag{14}$$

where the linear operators $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1$ and L_2 and the nonlinear operators N_0 and Q_0 are given as follows:

$$\mathrm{L}_0(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial {t_0}^2} - c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_0}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right), \quad \mathrm{L}_1(\psi) = -2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} + 2c_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1},$$

$$\mathrm{L}_2(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial {t_1}^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} + c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_1}^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2}\right),$$

$$N_0(\psi) = \left[\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} Q_0(\psi)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} Q_0(\psi)\right)\right], \tag{15}$$

$$Q_0(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2,$$

These problems are linear at each step and the first order problem is simply the classical linear wave problem. In the analysis, for the propagation of SH waves, the phase velocity of waves should satisfy the inequalities,

$$c_T < c_j \qquad (j=a,b) \tag{16}$$

In this work, since we have examined the propagation of the co-directional SH waves, which centered around the wave numbers k_a and k_b and the frequencies ω_a and ω_b, it is supposed that the harmonic resonance does not exist for the waves. Therefore, we assume $k_b \neq Mk_a$ and $\omega_b \neq M\omega_a$ where $M \in \{3,5,7,...\}$ is a positive integer. With these assumptions, the solution of first order problem is found as:

$$\begin{aligned} u_1 = & \mathrm{A}_{1a}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{ik_a p_a y}R_{1a} + e^{-ik_a p_a y}R_{2a})e^{i(k_a x_0 - \omega_a t_0)} \\ & + \mathrm{A}_{1b}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{ik_b p_b y}R_{1b} + e^{-ik_b p_b y}R_{2b})e^{i(k_b x_0 - \omega_b t_0)} + c.c. \end{aligned} \tag{17}$$

where $\phi_j = (k_j x_0 - \omega_j t_0)$, $p_j = (c_j^2 / c_T^2 - 1)^{1/2}$ and R_{1j}, R_{2j} $j=a,b$ are constants . c.c. is the symbol for complex conjugate of preceding terms and A_{1j} is complex function of the slow variables $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$ which represents the first order slowly varying amplitudes of the wave interaction. In **(17)** and henceforth a subscript value $j=a$ indicates the first and $j=b$ the second wave.

Here the aim is to determine the first order amplitude functions A_{1a} and A_{1b} to complete the first order solutions of the nonlinear problem, so that it has to be examined in the higher order perturbation problems. With the compatibility condition of second order problem yields that

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{1a} &= \mathrm{A}_{1a}(x_1 - V_{ga}t_1, x_2, t_2) \\ \mathrm{A}_{1b} &= \mathrm{A}_{1b}(x_1 - V_{gb}t_1, x_2, t_2). \end{aligned} \tag{18}$$

A_{1j} remains constant in a frame of reference moving with its group velocity V_{gj}. The compatibility conditions in the third order problem, it is obtained the following couples equations for amplitudes, when the group velocities of the waves are equal:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \mathrm{A}_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathrm{A}_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |\mathrm{A}_a|^2 \mathrm{A}_a + \Delta_{ba} |\mathrm{A}_b|^2 \mathrm{A}_a = 0 \\ & i\frac{\partial \mathrm{A}_b}{\partial \tau} + \Gamma_b \frac{\partial^2 \mathrm{A}_b}{\partial \xi^2} + \Delta_{bb} |\mathrm{A}_b|^2 \mathrm{A}_b + \Delta_{ab} |\mathrm{A}_a|^2 \mathrm{A}_b = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

where $\tau = \omega_a t_2$, $\xi = k_a(x_1 - V_{ga}t_1)$, $\mathrm{A}_j = k_a \mathrm{A}_{1j}$. The coefficients Γ_a and Γ_b are the linear dispersion coefficients, Δ_{aa} and Δ_{bb} are the nonlinear constants which describe the self modulation of wave packets, and Δ_{ab} and Δ_{ba} are the nonlinear coupling constants of cross modulation between two wave packets. It is noted that if $\mathrm{A}_b = 0$, the CNLS equations in **(19)** are reduced to a NLS equation which characterizes asymptotically the self modulation of SH waves in a plate. CNLS equations has been obtained in the similar wave interaction problems of various branches of physics and engineering. Thus, they have great interest to find exact solutions for special values of coefficients of the equations. In the present work, we investigate the instabilities of the interacting waves and observe the effect of the nonlinearity of the constituent materials on the existence of solitary waves.

1. GİRİŞ

Elastik ortamlarda dalga yayılımları ile ilgili çalışmaların ilki 1921 senesinde Paris Akademisinde yayınlanan Navier'in elastik katıların titreşim ve denge denklemlerinin türetildiği çalışma olarak bilinir [1,2]. Fresnel (1816) ve Thomas Young (1817) yaptıkları çalışmalarda, birbirine dik iki düzlemde polarize olmuş iki ışık demetinin birbirleri ile girişim yapmadıklarını gözlemlemişlerdir. Fresnel bu durumun enine dalgalarla mümkün olabileceği fikrini ileri sürmüştür. Bu açıklama ile, ışığın dalga teorisi ortaya çıkmış ve bu teoriye göre ışığın, yalnızca enine titreşimler yapabilen bir elastik moleküler ortamda yayılabilen enine dalga olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu gelişmeler, elastisite teorisinin ve elastik ortamlarda dalgaların yayılması problemine duyulan ilgiyi arttırmış ve o zamanların önemli matematikçileri olan Cauchy ve Poisson'un bu konuya yönelmelerine neden olmuştur. 1822 senesinde Cauchy klasik elastisite teorisinin temellerini kurmuş olup, hareketin gerilme ve yer değiştirme denklemlerini bulmuştur. 1829 senesinde Poisson elastisite ile ilgili çalışmasını Paris akademisine sunmuştur. Çalışmasında, Cauchy gibi önce denge denklemlerini gerilme bileşenleri cinsinden elde edip, gerilmeler ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıları moleküler bir yaklaşımla belirlemiştir. Böylelikle, izotrop ortamlar için elde ettiği denge ve hareket denklemleri Navier' inkiler ile özdeş olmuştur. Daha sonra, Poisson bu denklemleri elastik dalgaların izotrop bir ortamda yayılımlarını incelemek için kullanmış ve bu yayılımın boyuna (sıkışma) ve enine (kayma) dalgalardan oluştuğunu gözlemlemiştir. Ayrıca bu dalgaların yayılma hızlarının oranını da bütün lineer izotrop ortamlar için $\overline{3} : 1$ olduğunu hesaplamıştır [1].

1849'da Stokes, Poisson' un ortaya çıkardığı iki dalgadan birinin genleşme diğerinin rotasyon dalgası olduğunu gözlemlemiştir [1,2]. Ayrıca 1852 senesinde Láme, Poisson'un çalışmasını tamamlamış ve genel bir elastodinamik yer değiştirme alanının her biri bir dalga denklemini sağlayan bir skaler potansiyelin gradyantı ile

bir vektör potansiyelin rotasyonelinin toplamı olarak temsil edilebileceğini göstermiştir [1,3,4].

19. yüzyılda elastik dalga yayılımları ile ilgili önemli çalışmalar Rayleigh tarafından yapılmıştır. Buna göre, homojen izotrop bir elastik yarım uzayın serbest yüzünde, yer değiştirme vektörü ile yayılma doğrultusunun oluşturduğu düzlemde uzanan yüzey dalgalarının varlığı matematiksel olarak belirlenmiştir [2,3,6]. Sonradan, depremlerin sismografik kayıtları incelendiğinde, yer değiştirmelerin esasen üç parçadan oluşan enine, boyuna ve Rayleigh yüzey dalgalarından meydana geldiği gözlemlenmiştir [3,4].

Rayleigh dalgalarının faz hızları sabit olup, dispersif değildirler. Yayılma doğrultusu ile serbest düzlem yüzeyinin oluşturduğu düzleme (saggital düzlem) dik yönde yer değiştirme bileşenleri yoktur. Ancak, sismograflar yüzey dalgası katarlarında büyük, enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgalar kaydetmişlerdir. Rayleigh dalgalarından farklı olarak ortaya çıkan bu yeni yüzey dalgalarını A.E.H. Love isimli bilim adamı incelemiştir. Bu olayın, yerin tabakalı yapısından kaynaklandığını düşünmüş, düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı homojen elastik bir yarım uzayda yer değiştirme doğrultusu saggital düzleme dik olan dispersif yüzey dalgalarının varlığını tespit etmiştir [8]. Bu dalgalar günümüzde onun adı ile yani Love dalgaları olarak anılmaktadır. Daha sonra başka isimlerle anılan diğer yüzey dalgaları keşfedilmiş olup, bu dalgalar, sismoloji, malzeme yüzeylerinin tahribatsız muayeneleri, elektronik sinyal işleme cihazları teknolojisi gibi değişik alanlarda incelenmişlerdir [3,6,9,10,11].

Boyuna ve enine dalgalar da Rayleigh dalgaları gibi homojen izotrop malzemeden oluşan sonsuz ortamlarda dispersif değildirler. Diğer yandan, homojen elastik izotrop malzemeden oluşan çubuk, plaka ve farklı malzemelerden meydana gelen tabakalı yarım uzay gibi, çoğunlukla dalga kılavuzu olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgalar, sınır yüzeylerinde oluşan dalgaların da etkisi ile dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişirler. 19. yüzyılın ortalarından itibaren, hem dispersif hem de dispersif olmayan lineer elastik dalgaları konu edinen çeşitli türden problemler, yukarıda belirtilen uygulama alanlarının da etkisi ile günümüze kadar birçok incelemenin temelini oluşturmuşlardır [1,2,6,7,10,11].

Önceleri akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, hidrodinamik v.s. de genel olarak kullanılmış olan asimptotik yöntemler, dalga yayılımlarında dispersiyonun ortaya

çıkmasına neden olan koşullar, nonlineer elastik ortamlarda çeşitli problemlerde incelenmiştir [10-19].

Değişik ölçekler yöntemi kullanılarak sonlu genlikli kuazi-monokromatik dalgaların yayılımı Kalyanasundaram tarafından [12]' de ele alınmış ve kompleks genlik fonksiyonlarının yavaş değişimini karakterize eden bir yarı lineer denklem elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümlerinden, genliğin yarı lineer denklemler boyunca karakteristiğinin sabit kaldığı, dalga hareketlerinde sadece faz kayması olduğu sonucu çıkarılmıştır. Bu çalışmada Love dalgalarının önemli bir özelliği olan dispersiyon olayının etkisi tam olarak görülmemiştir. Daha sonradan, Batallie ve Lund [13] tarafından yapılan çalışmada hem nonlineerliğin hem de dispersiyonun etkisini birlikte modelleyen bir denklem oluşturulmuş ve denklemdeki dalga modülasyonunun genlik fonksiyonu için soliton tipi çözümleri olduğu sonucu ortaya çıkarılmıştır. [12] ve [13]' de yapılan çalışmalar, Teymur tarafından [16]' da birleştirilmiştir. Buna göre, düzgün kalınlıklı, farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop, sıkıştırılabilir ve hiperelastik malzemeden yapılmış bir tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzayda SH dalgalarının nonlineer modülasyonunu değişik ölçekler yöntemi ile incelemiştir. Dalgaların nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebildiğini göstermiştir. Tabakalanmış yarı uzayın nonlineer malzeme özelliğine göre yüzey zarf solitary dalgalarının varlığı incelenmiştir. Böylece [12]' de görülmeyen dispersiyon etkisini içeren ve asimptotik pertürbasyon yönteminin kullanıldığı, zayıf nonlineerlik ve dispersiyon etkisi dengelenerek dalga modülasyonunun genlik fonksiyonunun bir NLS denklemi ile karakterize edilebildiği gösterilmiştir.

Bilindiği üzere, NLS denkleminin çözümlerinin davranışı, denklemin katsayılarının çarpımlarının işaretine bağlıdır [26-29]. Bu çalışmada ayrıca, nonlineerliğe bağlılığı incelemek için, yarım uzayı ve üzerindeki tabakayı meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulup, nonlineer sabitler değiştirilerek katsayıların dalga sayısına göre değişimleri incelenmiş ve zarf soliton tipi yüzey dalgalarının varlığının tabakalı yarım uzayın nonlineer yapısına bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca [16]' daki sonuçlar dispersiyon bağıntısının tüm dalları ve tüm dalga sayıları için geçerlidir. Daha sonradan, [16]' ya paralel çalışmalar [17,18,20,22]' de yapılmıştır. Buna göre, sıkıştırılamaz malzemelerden yapılmış tabakalı yarım uzay için [18,20,22]' de aynı yönde ilerleyen iki dalganın çeşitli tipten nonlineer etkileşimleri incelenmiştir. [23]' de homojen, sıkıştırılamaz, izotrop elastik malzemelerden oluşan

düzgün kalınlık iki tabaka ile kaplı elastik bir ortamda yüzey SH dalgalarının nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak NLS denklemi ile yürütüldüğü gözlemlenmiştir.

2007 senesinde Teymur ve Ahmetolan, homojen izotrop ve sıkıştırılamaz düzgün kalınlıklı bir ortamda nonlineer SH dalgalarının yayılımını incelemişlerdir [25]. Zayıf nonlineerlik ve dispersiyon dengelenerek, nonlineer dalgaların modülasyonunun NLS denklemleri ile karakterize edilebildiği gösterilmiş olup, yayılma karakteristiklerinde nonlineerliğin etkisi incelenmiştir. Buna göre, tabaka kalınlığına, mod sayısına ve dalga sayısına bağlı olmaksızın, tabaka malzemesi kaymada yumuşayan (softening) özelliğe sahip ise, nonlineer düzlem dalgaları kararsız olup, açık (bright) zarf solitary SH dalgalarının varlığı görülmüştür. Diğer yandan, tabaka malzemesi kaymada sertleşen (hardening) özelliğinde ise, bu durumda düzlem dalgalarının kararlı ve koyu (dark) SH dalgalarının mevcut olduğu tespit edilmiştir. Diğer taraftan, Teymur' un [16]' da yapmış olduğu çalışmasındaki yarı sonsuz uzay modeli için aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimleri problemleri [22] ve [24]' de ele alınmıştır. Bu çalışmalarda, nonlineerliğin dalgaların etkileşimi üzerindeki etkisi incelenmiş ve grup hızları aynı olan dalgaların nonlineer etkileşimlerini karakterize eden KNLS denklemi türetilmiştir.

Dalga etkileşimlerinin incelenmesi probleminde genel olarak karşılaşılan kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denklemleri, fizikte geniş bir uygulama alanına sahiptir. Araştırmacılar, KNLS denkleminin periodik ve solitary dalga çözümleri ve bunların kararlılık analizleri üzerine çalışmalar yapmışlardır [30-34].

Bu çalışmada ise, düzgün kalınlıklı nonlineer elastik bir tabaka içerisinde aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimleri problemi ele alınmaktadır. Serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı kabul edilmiştir. Dalgaların etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu uygulanarak incelenecektir. Asimptotik analiz neticesinde, aynı yönde ilerleyen ve birbirleri ile etkileşen dalgalara ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının uzay zaman değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple bir denklem sistemi türetilerek bu sistemin özel halde KNLS denklemine indirgenebileceği görülecektir.

2. NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA SH DALGALARI

2.1. Giriş

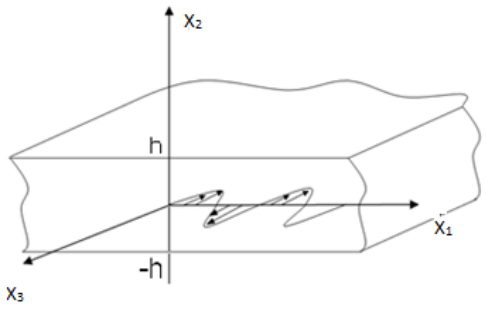
Bu bölümde önce elastik malzemeden oluşan düzgün (uniform) kalınlıklı bir tabakada SH tipi nonlineer dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemi ve sınır koşulları **Ek A.** bölümünde verilen incelemeden faydalanılarak verilmektedir. Daha sonra bu denklem ve sınır koşulları lineerleştirilerek SH tipi lineer dalgaların yayılmasını karakterize eden sınır değer problemi incelenecektir. Ayrıca lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısı türetilecektir.

2.2. Problemin Tanımı ve Temel Denklemler

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre sırasıyla uzaysal ve maddesel koordinatlarını (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) ile gösterelim. Başlangıç konumunda h>0 olmak üzere, **Şekil 2.1'** de verilen

$$P = \{(X_1, X_2, X_3) \,|\, -h \le X_2 \le h, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \qquad \textbf{(2.1)}$$

bölgesini dolduran elastik malzemeden oluşan düzgün kalınlıklı bir sürekli ortam göz önüne alalım. $X_2 = \pm h$ serbest yüzeylerinde gerilmelerin sıfır olduğunu varsayalım.



Şekil 2.1: 2h (h>0) kalınlıklı *P* tabakası.

Tabakada *X* ekseni boyunca yayılan ve

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t)\delta_{k3}$$

yani,

$$x_1 = X_1 \quad , \quad x_2 = X_2 \quad , \quad x_3 = X_3 + u_3(X_1, X_2, t) \qquad \textbf{(2.2)}$$

denklemleri ile tanımlanan SH dalgalarını göz önüne alalım. Burada u_3, tabakadaki noktaların X_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonudur. Dikkat edilirse, **(2.2)** ile tanımlanan dalga hareketi **Ek A**.' da incelenen genelleştirilmiş kayma hareketinden başka bir şey değildir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması problemi inceleneceği için yüksek mertebe terimler ihmal edilerek hareket denkleminin yaklaşık formunu kullanacağız. (X_1, X_2, X_3) yerine (X,Y,Z) ve tabakadaki yer değiştirme fonksiyonu u_3 yerine u yazılırsa, probleme ait hareket denklemi ve sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilirler:

P' de $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_T^2\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right\}, \qquad \textbf{(2.3)}$$

ve

$Y = \pm h$ ' de $$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad . \qquad \textbf{(2.4)}$$

Burada

$$Q(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 \qquad \textbf{(2.5)}$$

olarak tanımlanmış ve c_T ise P ortamında yayılan lineer dalgaların yayılma hızlarını göstermektedir ve **(A.49)**' dan c_T' nin

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad \textbf{(2.6)}$$

şeklinde olduğu görülür. $\mu = 2\dfrac{d\Sigma(3)}{dI}$ ortamın kayma modülünü, ρ ise ortamı oluşturan malzemenin yoğunluğunu göstermektedir. n_T sabiti ise ortamın nonlineer özellikleri ile ilgili sabittir ve

$$n_T = \frac{2}{\rho}\frac{d^2\Sigma(3)}{dI^2} \qquad \textbf{(2.7)}$$

şeklinde olduğu görülür. Burada Σ, ortamı oluşturan elastik malzemenin iç enerji fonksiyonudur ve $\Sigma=\Sigma(I)$ yapısındadır. I, Green deformasyon tensörünün birinci

invaryantını göstermektedir, yani ortamı oluşturan tabakanın neo Hookean malzemeden meydana geldiğini kabul ediyoruz. Ayrıca $n_T > 0$ ise malzeme kaymada sertleşen, $n_T < 0$ ise kaymada yumuşayan özelliğe sahiptir.

2.3. Elastik Bir Tabakada Lineer SH Dalgaları ve Dispersiyon Bağıntısı

Daha ileriki bölümlerde sonlu fakat küçük genlikli SH dalgalarının düzgün kalınlıklı bir tabakada yayılımını modelleyen ve **(2.3)** denklemi ve **(2.4)** sınır koşulları ile tanımlanan nonlineer sınır değer probleminin asimptotik çözümü inşa edilecektir. Bu incelemeye geçmeden önce bazı noktalara ışık tutmak amacı ile önce lineer dalgaların yayılması ele alınacaktır. Lineer dalgaları betimleyen sınır değer problemi **(2.3)'** de $n_T=0$ alınarak aşağıdaki gibi yazılır:

P' de
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

$Y = \pm h$ ' de
$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

Pozitif X ekseni yönünde yayılan harmonik dalgalar için yukarıdaki denklem ve sınır koşullarının çözümlerini

$$u = U(Y)e^{i(kX-\omega t)} + k.e. \qquad \textbf{(2.10)}$$

formunda arayabiliriz. Burada k dalga sayısını, ω açısal frekansı göstermektedir ve "k.e." ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca dalgaların faz hızı

$$c=\omega/k \qquad \textbf{(2.11)}$$

olarak tanımlanmaktadır. **(2.10)** çözüm formu **(2.8)** denkleminde kullanılırsa U fonksiyonu için,

$$U'' + k^2\left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1\right)U = 0 \qquad \textbf{(2.12)}$$

denklemi elde edilir. **(2.12)** denkleminin çözümlerinin verilen sınır koşullarını sağlayabilmesi için dalgaların faz hızı c' nin, ortamın lineer kayma dalgalarının yayılma hızı c_T olmak üzere

$$c_T<c \qquad \textbf{(2.13)}$$

eşitsizliğini gerçeklemesi gerekir.

Bu koşul altında **(2.12)** denkleminin çözümü,

$$U = Ae^{ikpY} + Be^{-ikpY} \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. Burada **(2.13)** koşulu altında,

$$p^2 = \left(\frac{c^2}{c_T^2} - 1 \right) > 0 \tag{2.15}$$

dır. **(2.14)'** de verilen çözüm formu **(2.9)** sınır koşullarında kullanılırsa

$$U = (A \;\; B)^T \tag{2.16}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} ikpe^{ikph} & -ikpe^{-ikph} \\ ikpe^{-ikph} & -ikpe^{ikph} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{W}\ \mathbf{U} = \begin{pmatrix} ikpe^{ikph} & -ikpe^{-ikph} \\ ikpe^{-ikph} & -ikpe^{ikph} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.18}$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Burada **W** dispersiyon matrisi olarak adlandırılmaktadır. Yukarıdaki cebirsel denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir:

$$\det \mathbf{W} = 0 \tag{2.19}$$

Bu da bize lineer malzemeden oluşan bir tabakada yayılan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısını verir:

$$\sin(2khp) = 0 \;\text{ veya }\; \sin(khp)\cos(khp) = 0 \tag{2.20}$$

Buradan

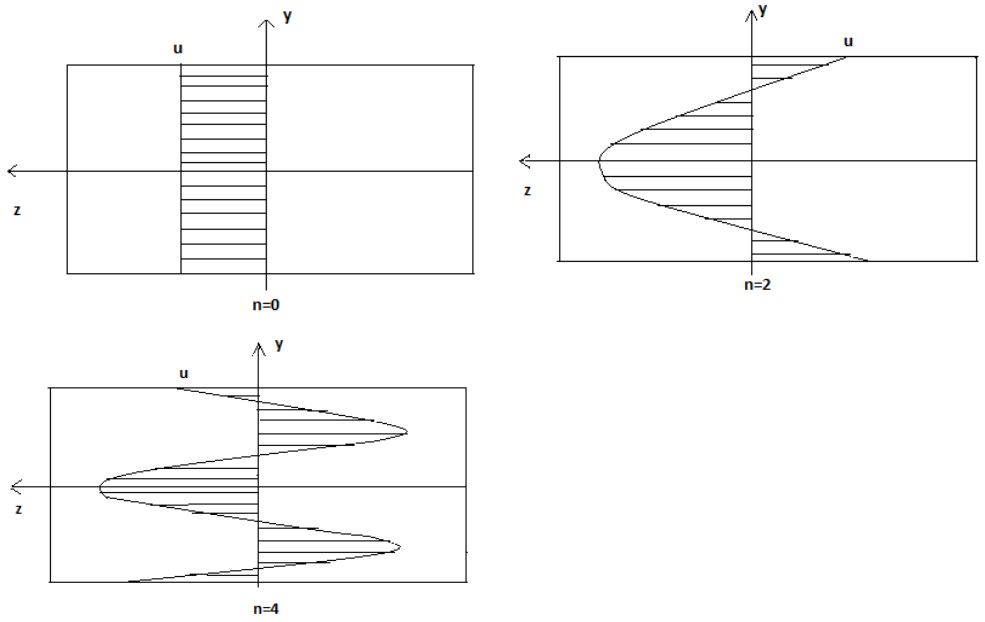
$$2khp = n\pi \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.21}$$

yani

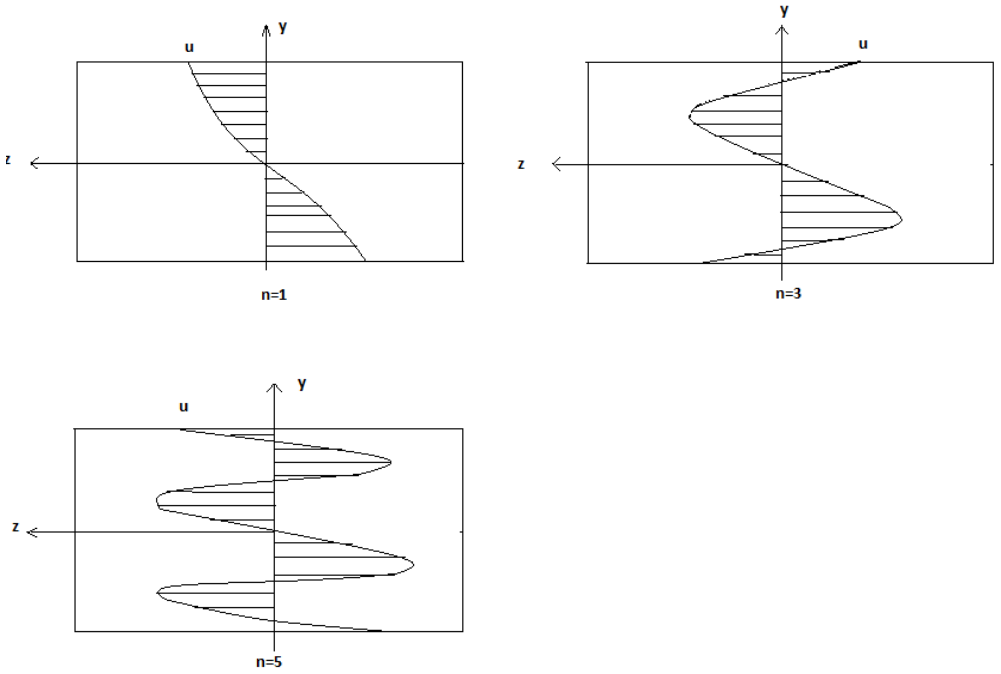
$$\frac{c^2}{c_T^2} = 1 + \left(\frac{n\pi}{2kh} \right)^2 \;\text{ veya }\; \omega^2 = k^2 c_T^2 \left[1 + \left(\frac{n\pi}{2kh} \right)^2 \right] \tag{2.22}$$

koşulu elde edilir. n, lineer dispersiyon bağıntısının dallarını göstermektedir. n=0 veya çift tamsayı ise frekans denklemi **(2.20)**, $\sin(khp) = 0$ olacağı için sağlanacaktır, bu modlara simetrik mod adı verilir. Yani dalga hareketi y=0 orta yüzeyine göre simetriktir. **Şekil 2.2'** de ilk üç simetrik mod yer almaktadır. Benzer şekilde eğer

frekans denklemi **(2.20),** $\cos(khp) = 0$ tarafından sağlanıyorsa, yani n tek tamsayı ise, bu modlara da antisimetrik mod adı verilir ve dalga hareketi y=0 orta yüzeyine göre antisimetrik olur [3]. **Şekil 2.3'** de de ilk üç antisimetrik mod yer almaktadır.



Şekil 2.2: Dispersiyon bağıntısının ilk üç simetrik modu.



Şekil 2.3: Dispersiyon bağıntısının ilk üç antisimetrik modu.

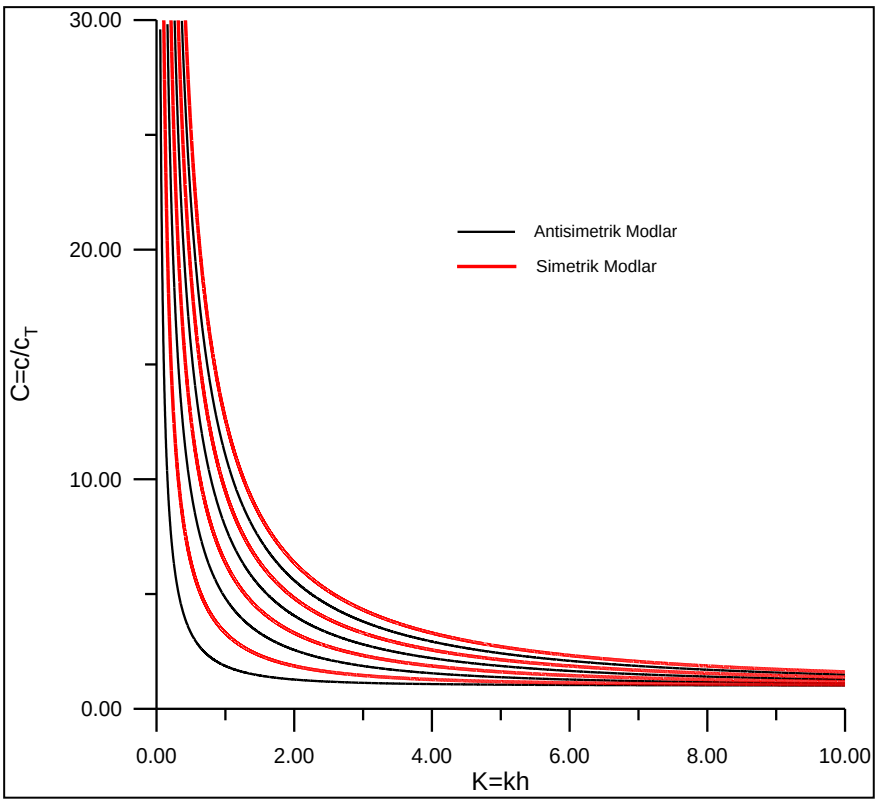
Ayrıca dikkat edilirse $n=0$ için **(2.22)** nolu denklemlerden $c=c_T$ veya $\omega=kc_T$ olduğu görülür. Yani diğer modların aksine ilk mod dispersif değildir. Şimdi $C=\frac{c}{c_T}$, $K=kh$ değişkenlerini tanımlayalım. Burada C yüzey dalgalarının boyutsuz faz hızı ve K' da boyutsuz dalga sayısını göstermektedir. Bu tanımlamalar ile **(2.13)'** de verilen eşitsizlik aşağıdaki forma dönüşür:

$$C=\frac{c}{c_T}>1 \qquad \textbf{(2.23)}$$

Ayrıca **(2.20)'** de verilen dispersiyon bağıntısı da aşağıdaki hale dönüşür:

$$\sin(2KP)=0\,, \quad P=\sqrt{C^2-1}\,.$$

Yukarıda verilen boyutsuz dispersiyon bağıntısının ilk dört simetrik ve ilk dört antisimetrik dalının grafiği **Şekil 2.4'** de gösterilmiştir. Dikkat edilirse $K\to\infty$, yani ya sabit bir dalga sayısında $h\to\infty$ için veya sabit tabaka kalınlığında $k\to\infty$ için dispersiyon bağıntısının dalları C=1' e yani c' nin c_T değerine yaklaştığı görülür.



Şekil 2.4: (2.20)'de verilen dispersiyon bağıntısının ilk simetrik ve antisimetrik dörder dalı için boyutsuz faz hızı $C=c/c_T$' nin boyutsuz dalga sayısı $K=kh$' ya göre değişimi

3. NONLİNEER ELASTİK BİR TABAKADA AYNI YÖNDE İLERLEYEN SH DALGALARININ ETKİLEŞİMLERİ

3.1. Giriş

Nonlineer elastik bir malzemeden oluşan düzgün kalınlıklı bir tabakada SH dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemi ve sınır koşulları Bölüm 2.2.' de türetilmiştir. Daha sonra, Bölüm 2.3' de lineer SH dalgaların yayılması ele alınarak lineer SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısı elde edilmiştir. Bilindiği gibi böyle bir ortamda SH dalgalarının yayılabilmesi için, dalgaların faz hızı c ile, ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızları c_T arasında $c_T < c$ eşitsizliğinin geçerli olması gerekir.

Bu bölümde ise böyle bir tabakada aynı yönde ilerleyen nonlineer SH dalgalarının etkileşimi problemi ele alınmaktadır. Bu problem, Bölüm 3.2' de asimptotik bir pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler yöntemi kullanılarak incelenecektir. Asimptotik inceleme neticesinde nonlineer dalgaların etkileşiminin bir kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilecektir. Bölüm 3.3'de ise KNLS denkleminin çözümlerinin kararlılık analizi yapılarak çözümlerin solitary zarf dalgası formunda olması için koşullar elde edilmektedir. Bu koşullar altında KNLS denkleminin solitary zarf çözümlerinin varlığı nümerik olarak Bölüm 3.4'de incelenmektedir.

3.2. Nonlineer SH Dalgalarının Etkileşimleri

Tek tabakadan oluşan elastik bir ortamda pozitif X ekseni boyunca yayılan ve Z ekseni boyunca yer değiştiren küçük ama sonlu genlikli iki SH dalgasının etkileşimi problemi, asimptotik bir pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu ile incelenecektir.

Bu amaçla, $\varepsilon > 0$ nonlineerliğin mertebesini gösteren küçük bir parametre olmak üzere, X,Y ve t bağımsız değişkenleri yerine aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanır:

$$x_0 = X\ ,\ x_1 = \varepsilon X\ ,\ x_2 = \varepsilon^2 X,$$

$$t_0 = t \ , \ t_1 = \varepsilon t \ , \ t_2 = \varepsilon^2 t, \qquad \textbf{(3.1)}$$
$$y = Y.$$

Burada, (x_0,t_0,y) hızlı değişkenler ve (x_1,x_2,t_1,t_2) ise yavaş değişkenler olarak tanımlanmaktadırlar. Ayrıca tabakaya ait yer değiştirme fonksiyonu u' nun ε cinsinden düzgün (uniform) bir asimptotik açılıma sahip olduğu varsayılmaktadır [35];

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2). \qquad \textbf{(3.2)}$$

Diğer taraftan, eski ve yeni değişkenlere göre türev operatörleri arasında

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \qquad \textbf{(3.3)}$$
$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

bağıntıları geçerlidir.

Şimdi, **(2.3)** ile verilen hareket denklemi ve **(2.4)** sınır koşulunda **(3.3)** dönüşümü uygulanırsa ve **(3.2)** açılımı kullanılırsa, ε' nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n' lerin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Buna göre ilk üç pertürbasyon problemi aşağıda verilmektedir:

$$\mathrm{O}(\varepsilon): \qquad P'de \qquad \mathrm{L}_0 u_1 = 0 \qquad \textbf{(3.4a)}$$

$$y = \pm h'de \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(3.4b)}$$

$$\mathrm{O}(\varepsilon^2): \qquad P'de \qquad \mathrm{L}_0 u_2 = \mathrm{L}_1 u_1 \qquad \textbf{(3.5a)}$$

$$y = \pm h'de \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(3.5b)}$$

$$\mathrm{O}(\varepsilon^3): \qquad P'de \qquad \mathrm{L}_0 u_3 = \mathrm{L}_1 u_2 + \mathrm{L}_2 u_1 + n_T \mathrm{N}_0(u_1) \qquad \textbf{(3.6a)}$$

$$y = \pm h'de \qquad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(3.6b)}$$

Burada lineer diferansiyel operatörler L_0, L_1, L_2 ve nonlineer diferansiyel operatörler N_0 ve Q_0 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\mathrm{L}_0(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial {t_0}^2} - c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_0}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad , \tag{3.7a}$$

$$\mathrm{L}_1(\psi) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} + 2 c_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} \quad , \tag{3.7b}$$

$$\mathrm{L}_2(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial {t_1}^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} + c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_1}^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \quad , \tag{3.7c}$$

$$N_0(\psi) = \left[\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} Q_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} Q_0(\psi) \right) \right] , \tag{3.7d}$$

$$Q_0(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \quad . \tag{3.7e}$$

Bilindiği gibi bu tip asimptotik analizde her bir mertebe pertürbasyon problemi lineer olmaktadır. Ayrıca **(3.4a,b)** ile verilen birinci mertebe problem Bölüm 2.1' de **(2.8)** ve **(2.9)** ile verilen klasik lineer problem ile eş yapıdadır. Sadece **(2.8)** ve **(2.9)'** daki lineer problemde yer değiştirme fonksiyonu $u=u(\mathrm{X,Y,t})$ yapısında bir fonksiyon iken **(3.4a,b)**' de verilen ε mertebesindeki problemde yer değiştirme fonksiyonu $u_1=u_1(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2)$ yapısında bir fonksiyondur.

Birinci mertebe problem çözümünden u_1 fonksiyonunun (x_0,y,t_0) hızlı değişkenlere bağlılığı açık olarak hesaplanabilmektedir. u_1 fonksiyonunun yavaş değişkenlere yani (x_1,x_2,t_1,t_2)' ye bağlılığı ise ancak üst mertebe problemlerin çözümlerinden belirlenebilecektir.

Şimdi birinci mertebe problemi çözerek işleme devam edelim. Aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi problemi ile ilgilendiğimiz için birinci mertebe problemdeki denklemin çözümünü aşağıdaki formda alabiliriz;

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left(A_{1a}^{(l)} e^{ik_a p_a y} + B_{1a}^{(l)} e^{-ik_a p_a y} \right) e^{il\phi_a} + \left(A_{1b}^{(l)} e^{ik_b p_b y} + B_{1b}^{(l)} e^{-ik_b p_b y} \right) e^{il\phi_b} + k.e. \tag{3.8}$$

Burada a ve b indisleri sırasıyla k_a ve k_b dalga sayıları civarında merkezlenmiş ve frekansları ω_a ve ω_b olan yarı monokromatik dalgaları göstermektedir. $A_{1a}^{(l)}$ ve $B_{1a}^{(l)}$ birinci dalganın $A_{1b}^{(l)}$ ve $B_{1b}^{(l)}$ ikinci dalganın birinci mertebe $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$ yavaş değişkenlere bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır. Ayrıca $j = a, b$ için

$\phi_j = (k_j x_0 - \omega_j t_0)$, $p_j = (c_j^2 / c_T^2 - 1)^{1/2}$ olarak tanımlanmakta olup, *k.e.* ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini ifade etmektedir. Bundan sonraki tüm katsayı ve ifadelerde *j* alt indisi *j=a* için birinci dalgaya; *j=b* için ikinci dalgaya ait olduklarını gösterecektir. **(3.8)**' de verilen u_1 çözümü **(3.4b)**' de verilen sınır koşullarında kullanıldığında

$$\mathbf{W}_a^{(l)}\mathbf{U}_{1a}^{(l)} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \mathbf{W}_b^{(l)}\mathbf{U}_{1b}^{(l)} = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

homojen denklem sistemleri elde edilir. Burada *j=a,b* için dispersiyon matrisleri

$$\mathbf{W}_j^{(l)} = \begin{pmatrix} ilk_j p_j e^{ilk_j p_j h} & -ilk_j p_j e^{-ilk_j p_j h} \\ ilk_j p_j e^{-ilk_j p_j h} & -ilk_j p_j e^{ilk_j p_j h} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

ve $\mathbf{U}_{1a}^{(l)}$ ve $\mathbf{U}_{1b}^{(l)}$ birinci mertebe genlik vektörleri ise

$$\mathbf{U}_{1a}^{(l)} = \begin{matrix} A_{1a}^{(l)} & B_{1a}^{(l)} \end{matrix}^T, \quad \mathbf{U}_{1b}^{(l)} = \begin{matrix} A_{1b}^{(l)} & B_{1b}^{(l)} \end{matrix}^T \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanmaktadırlar.

Dikkat edilirse, *l*=1 için **(3.10)** ile tanımlanan $\mathbf{W}_a^{(l)}$ ve $\mathbf{W}_b^{(l)}$ matrisleri **(2.17)** ile verilen **W** dispersiyon matrisi ile özdeştirler. Dolayısıyla *l*=1 için

$$\det \mathbf{W}_a^{(1)} = \det \mathbf{W}_b^{(1)} = \det \mathbf{W} = 0 \tag{3.12}$$

'dan sırasıyla açısal frekansları ve dalga sayıları (ω_a, k_a) ve (ω_b, k_b) olan lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntıları **(2.20)'** de verilen klasik lineer dispersiyon bağıntısı ile aynı yapıda elde edilir:

$$\sin(2k_j h p_j) = 0 \quad \text{veya} \quad \sin(k_j h p_j)\cos(k_j h p_j) = 0 \quad j=a,b \tag{3.13}$$

Buradan

$$2k_j h p_j = n\pi \quad , \qquad n = 0,1,2,... \tag{3.14}$$

yani,

$$\frac{c_j^2}{c_T^2} = 1 + \left(\frac{n\pi}{2k_j h}\right)^2 \quad \text{veya} \quad \omega_j^2 = k_j^2 c_T^2 \left[1 + (\frac{n\pi}{2k_j h})^2\right] \tag{3.15}$$

elde edilebilir. *n*, lineer dispersiyon bağıntısı $\omega_j = \omega(k_j; n)$' ye ait dalları göstermektedir. *n=0* için **(3.15)** denkleminden $c_j = c_T$ veya $\omega_j = k_j c_T$ olduğu

görülür. Bu yüzden ilk mod diğer modların aksine dispersif değildir [3,4]. Bu çalışmada başta da belirtildiği gibi k_a ve k_b dalga sayıları civarında ve bu dalga sayılarına karşılık gelen ω_a ve ω_b açısal frekanslar civarında merkezlenmiş ve aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi incelendiğinden bu iki dalganın birbirlerinin harmonikleri olmadıklarını kabul ederek çalışmamızı sürdüreceğiz. Yani $k_a < k_b$ ve $\omega_a < \omega_b$ olmak üzere $M \in \{3,5,7,...\}$ için $k_b \neq Mk_a$ ve $\omega_b \neq M\omega_a$ bağıntılarının geçerli olduklarını kabul edelim.

Bu durumda $l \geq 2$ ve $j = a,b$ için $\det \mathbf{W}_a^{(l)} \neq 0$ ve $\det \mathbf{W}_b^{(l)} \neq 0$ olur. Bu koşul altında **(3.9)** denkleminin çözümleri, l=1 için $\mathbf{R}_j$' ler

$$\mathbf{W}_j^{(1)} \mathbf{R}_j = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

denklemini sağlayan sütun vektörler olmak üzere, l=1 için:

$$\mathbf{U}_{1a}^{(1)} = \mathrm{A}_{1a}(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R}_a \tag{3.17}$$

$$\mathbf{U}_{1b}^{(1)} = \mathrm{A}_{1b}(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R}_b$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \qquad \mathbf{U}_{1j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \tag{3.18}$$

olarak elde edilirler. **(3.16)**' daki homojen denklemlerin birer çözümü olarak $\mathbf{R}_a$ ve $\mathbf{R}_b$ aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= (\mathbf{R}_{1a} \quad \mathbf{R}_{2a}) = (e^{-2ik_a p_a h} \quad 1)^T \\ \mathbf{R}_b &= (\mathbf{R}_{1b} \quad \mathbf{R}_{2b}) = (e^{-2ik_b p_b h} \quad 1)^T \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dikkat edilirse, burada $\mathbf{R}_j$, j=a,b vektörlerinin bileşenleri arasında $|R_{1j}| = |R_{2j}|$ bağıntısı geçerlidir.

Böylece **(3.17)** ve **(3.18)** kullanılarak birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_1 = {} & \mathrm{A}_{1a}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_a p_a y} R_{1a} + e^{-ik_a p_a y} R_{2a}) e^{i(k_a x_0 - \omega_a t_0)} \\ & + \mathrm{A}_{1b}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_b p_b y} R_{1b} + e^{-ik_b p_b y} R_{2b}) e^{i(k_b x_0 - \omega_b t_0)} + k.e. \end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. Burada dikkat edilirse, birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonları A_{1a} ve A_{1b}' nin açık olarak hesaplanması, birinci mertebe çözümün belirlenmesi için yeterli olacaktır. Bunun için ikinci ve üçüncü mertebe problemlerin de incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla **(3.20)**' de verilen birinci mertebe problem çözümü u_1, ikinci mertebe pertürbasyon problemin hareket denkleminde kullanılırsa, **(3.5a)** aşağıdaki gibi elde edilir;

$$L_0 u_2 = 2i(R_{1j} e^{ik_j p_j y} + R_{2j} e^{-ik_j p_j y}) e^{i\phi_j} M_{11j} + k.e. \qquad \textbf{(3.21)}$$

Burada

$$M_{11j} = \omega_j \frac{\partial A_{1j}}{\partial t_1} + k_j c_j^2 \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_1} \qquad \textbf{(3.22)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İkinci mertebe problemin çözümünü

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2 \qquad \textbf{(3.23)}$$

olarak ikiye ayıralım öyle ki $\bar{u}_2$ homojen olmayan denklemin özel çözümünü, $\tilde{u}_2$ ise

$$L_0(\tilde{u}_2) = 0 \qquad \textbf{(3.24)}$$

homojen denklemin ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun:

$$y = \pm h \text{' da} \qquad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \qquad \textbf{(3.25)}$$

(3.21) denkleminin özel çözümünü belirsiz katsayılar yöntemi ile bulmak mümkündür. Bunun için, özel çözüm $\bar{u}_2$' yi

$$\bar{u}_2 = (F_{1a} e^{ik_a p_a y} + F_{2a} e^{-ik_a p_a y}) y e^{i\phi_a} + (F_{1b} e^{ik_b p_b y} + F_{2b} e^{-ik_b p_b y}) y e^{i\phi_b} + k.e. \qquad \textbf{(3.26)}$$

olarak seçelim. **(3.26)** çözüm formunu, **(3.21)** denkleminde kullanırsak gerekli ara işlemleri yaptıktan sonra katsayı fonksiyonları F_{1j} ve F_{2j} , j=a,b aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\mathrm{F}_{1j} = -\frac{R_{1j}}{c_T^2 k_j p_j}\mathrm{M}_{11j} \quad , \quad \mathrm{F}_{2j} = \frac{R_{2j}}{c_T^2 k_j p_j}\mathrm{M}_{11j} \ . \tag{3.27}$$

Diğer taraftan **(3.24)** homojen denkleminin u_2 çözümü de birinci mertebe problemin çözüm formunda seçilir;

$$u_2 = \sum_{l=1}^{\infty}(A_{2a}^{(l)}e^{ilk_a p_a y} + B_{2a}^{(l)}e^{-ilk_a p_a y})e^{il\phi_a} + (A_{2b}^{(l)}e^{ilk_b p_b y} + B_{2b}^{(l)}e^{-ilk_b p_b y})e^{il\phi_b} + k.e. \tag{3.28}$$

Burada $A_{2j}^{(l)}$ ve $B_{2j}^{(l)}$ fonksiyonları $\{x_1,x_2,t_1,t_2\}$ yavaş değişkenlere bağlı ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdırlar.

Bu amaçla **(3.28)** çözümü **(3.25)** sınır koşullarında kullanılırsa, ikinci mertebe genlik vektörü

$$\mathbf{U}_{2j}^{(l)} = (A_{2j}^{(l)} \ B_{2j}^{(l)})^T \qquad \text{j=a,b} \tag{3.29}$$

olmak üzere aşağıdaki homojen olmayan cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_j^{(l)}\mathbf{U}_{2j}^{(l)} = \mathbf{b}_{2j}^{(l)} \quad , \quad j=a,b \tag{3.30}$$

(3.30)' un sağındaki $\mathbf{b}_{2j}^{(l)}$ vektörleri l=1 için

$$\mathbf{b}_{2j}^{(l)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{F}_{1j}(1+ik_j p_j h)e^{ik_j p_j h} - \mathrm{F}_{2j}(1-ik_j p_j h)e^{-ik_j p_j h} \\ -\mathrm{F}_{1j}(1-ik_j p_j h)e^{-ik_j p_j h} - \mathrm{F}_{2j}(1+ik_j p_j h)e^{ik_j p_j h} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

şeklindedir. $\mathbf{W}_j^{(1)}$ matrisinin ve $\mathbf{R}_j^{(1)}$ vektörünün tanımlarını kullanarak gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\mathbf{b}_{2j}^{(1)} = -i(\frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial t_1}\frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j} - \frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j})\mathbf{R}_j^{(1)} \ , \tag{3.32}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$l \geq 2 \ \text{ ve } \ \mathbf{b}_{2j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \tag{3.33}$$

dır.

Diğer yandan, l=1 için $\det \mathbf{W}_j^{(1)} = 0$ ve $\mathbf{b}_{2j}^{(1)} \neq 0$ olmaktadır. **(3.30)** homojen olmayan cebrik denklem sisteminin l=1 için çözüme sahip olabilmesi için

$$\mathbf{L}_j\mathbf{W}_j^{(1)} = 0 \tag{3.34}$$

denklemi ile tanımlanan bir satır vektörü $\mathbf{L}_j$ olmak üzere,

$$\mathbf{L}_j \mathbf{b}_{2j}^{(1)} = 0 \qquad \textbf{(3.35)}$$

uygunluk koşulunu sağlaması gerekir. Burada $\mathbf{L}_j$ vektörü

$$\mathbf{L}_j = (-e^{-2ik_j p_j h} \;\; 1) \qquad \textbf{(3.36)}$$

şeklinde hesaplanabilir.

(3.16) ile verilen bağıntı, $\mathbf{W}_j^{(1)}\mathbf{R}_j = \mathbf{0}$, k 'ya göre türetildiğinde,

$$(\frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} + V_{gj}\frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j})\mathbf{R}_j + \mathbf{W}_j^{(1)}(\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial k_j} + V_{gj}\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \omega_j}) = 0 \quad j=a,b \qquad \textbf{(3.37)}$$

elde edilir. Burada V_{ga} ve V_{gb} sırasıyla birinci ve ikinci dalgaya ait grup hızlarını göstermektedir ve

$$V_{ga} = \frac{d\omega_a}{dk_a} \quad , \quad V_{gb} = \frac{d\omega_b}{dk_b} \qquad \textbf{(3.38)}$$

olarak tanımlanmaktadırlar. Şimdi **(3.37)** denklemini soldan $\mathbf{L}_j$ vektörü ile çarpıp **(3.34)**' ü kullanırsak,

$$V_{gj} = -(\mathbf{L}_j \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j}\mathbf{R}_j) / (\mathbf{L}_j \frac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j}\mathbf{R}_j) \qquad j=\text{a,b} \qquad \textbf{(3.39)}$$

olduğu sonucu çıkar. **(3.39)** ve **(3.33)** , **(3.35)** uygunluk koşulunda kullanılırsa A_{1a} ve A_{1b} fonksiyonlarının

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{A}_{1a}}{\partial t_1} + V_{g\,a}\frac{\partial \mathrm{A}_{1a}}{\partial x_1} = 0 \;\; , \\ &\frac{\partial \mathrm{A}_{1b}}{\partial t_1} + V_{g\,b}\frac{\partial \mathrm{A}_{1b}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.40)}$$

denklemlerini sağladığı görülebilir. Bu da bize A_{1a} genlik fonksiyonunun V_{ga} grup hızı; A_{1b} genlik fonksiyonunun da V_{gb} grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldıklarını gösterir. Yani A_{1a} ve A_{1b} fonksiyonları

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{1a} &= \mathrm{A}_{1a}(x_1 - V_{ga}t_1, x_2, t_2) \ , \\ \mathrm{A}_{1b} &= \mathrm{A}_{1b}(x_1 - V_{gb}t_1, x_2, t_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.41)}$$

yapısında olacaklardır. Böylece **(3.30)** denkleminin $l = 1$ için çözümü **(3.37)** ve **(3.40)** denklemleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2a}^{(1)} &= \mathrm{A}_{2a}\mathbf{R}_a - i\frac{\partial \mathrm{A}_{1a}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial k_a} + V_{g\,a}\frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \omega_a}\right) \\ \mathbf{U}_{2b}^{(1)} &= \mathrm{A}_{2b}\mathbf{R}_b - i\frac{\partial \mathrm{A}_{1b}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial k_b} + V_{g\,b}\frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial \omega_b}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.42)}$$

olarak elde edilir. Burada A_{2a} ve A_{2b} fonksiyonları incelemekte olduğumuz etkileşim problemine ilişkin yavaş değişkenlere bağlı ikinci mertebe genlik fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada sadece birinci mertebe çözüm inşa edileceği için A_{2a} ve A_{2b} genlik fonksiyonlarının açık yapılarına ihtiyacımız olmayacaktır. Ama istenirse bu fonksiyonları daha üst mertebe pertürbasyon problemlerinden elde etmek mümkündür. Diğer taraftan $l \geq 2$ için $\det \mathbf{W}_j^{(l)} \neq 0$ kabul edildiği için,

$$\mathbf{U}_{2\,j}^{(l)} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.43)}$$

olacaktır.

Böylece birinci ve ikinci mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümleri elde edilmiş olur. Ancak biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılımı ile ilgilendiğimiz için birinci mertebe çözümü tam olarak belirlemeye çalışıyoruz. Bu yüzden A_{1a} ve A_{1b} genlik fonksiyonlarını belirlemek bizim için yeterli olacaktır. Yalnız bu aşamada sadece A_{1a} ve A_{1b} fonksiyonlarının x_1 ve t_1 yavaş değişkenlere bağlılığı belirlenebildi ama açık ifadeleri elde edilmedi. A_{1a} ve A_{1b} fonksiyonlarını tam olarak belirleyebilmek için **(3.20)'** de verilen birinci mertebe çözüm ve **(3.26)** ile **(3.28)**' de verilen ikinci mertebe çözümler, üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin **(3.6a)** ile verilen hareket denklemlerinde kullanılırsa **(3.6a)** aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_0 u_3 = [&(D_{1j} + yD_{2j})e^{ik_j p_j y} + (D_{3j} + yD_{4j})e^{-ik_j p_j y} + D_{5j}e^{3ik_j p_j y} \\
&+ D_{6j}e^{-3ik_j p_j y} + D_{7j}e^{i(k_j p_j - 2k_l p_l)y} + D_{8j}e^{-i(k_j p_j + 2k_l p_l)y} \\
&+ D_{9j}e^{i(k_j p_j + 2k_l p_l)y} + D_{10j}e^{i(-k_j p_j + 2k_l p_l)y})]e^{i\phi_j} \\
&+ (e^{i3\phi_a}, e^{3i\phi_b}, e^{i(\phi_a + 2\phi_b)}, e^{i(2\phi_a + \phi_b)}, e^{i(\phi_b - 2\phi_a)}\text{'li terimler}) + k.e.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.44)}
$$

Burada $j = a,b$ ve $n = a,b$ olmak üzere ve $j \neq n$ için

$$D_{1j} = 2iR_{1j}(\mathrm{M}_{12j} + \mathrm{M}_{21j}) + R_{1j}\mathrm{N}_j + 2T_{1j}\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}_{11j} + \mathrm{P}_{1j} \quad ,$$

$$D_{2j} = -\frac{2iR_{1j}}{k_j c_T^2 p_j}(\omega_j \frac{\partial}{\partial t_1} + k_j c_T^2 \frac{\partial}{\partial x_1})\mathrm{M}_{11j} \quad ,$$

$$D_{3j} = 2iR_{2j}(\mathrm{M}_{12j} + \mathrm{M}_{21j}) + R_{2j}\mathrm{N}_j + 2T_{2j}\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}_{11j} + \mathrm{P}_{2j} \quad ,$$

$$D_{4j} = \frac{2iR_{2j}}{k_j c_T^2 p_j}(\omega_j \frac{\partial}{\partial t_1} + k_j c_T^2 \frac{\partial}{\partial x_1})\mathrm{M}_{11j} \quad ,$$

$$D_{5j} = R_{1j}^2 \bar{R}_{2j}\mathrm{P}_{3j} |\mathrm{A}_{1a}|^2 \bar{\mathrm{A}}_{1a} \quad ,$$

$$D_{6j} = R_{2j}^2 \bar{R}_{1j}\mathrm{P}_{3j} |\mathrm{A}_{1a}|^2 \bar{\mathrm{A}}_{1a} \quad ,$$

$$D_{7j} = \mathrm{A}_{1j} |\mathrm{A}_{1n}|^2 R_{1j}R_{2n}\bar{R}_{1n}\mathrm{P}_{5j} \quad ,$$

$$D_{8j} = \mathrm{A}_{1j} |\mathrm{A}_{1n}|^2 R_{2j}R_{2n}\bar{R}_{1n}\mathrm{P}_{4j} \quad ,$$

$$D_{9j} = \mathrm{A}_{1j} |\mathrm{A}_{1n}|^2 R_{1j}R_{1n}\bar{R}_{2n}\mathrm{P}_{4j} \quad ,$$

$$D_{10j} = \mathrm{A}_{1j} |\mathrm{A}_{1n}|^2 R_{2j}R_{1n}\bar{R}_{2n}\mathrm{P}_{5j} \quad , \qquad \textbf{(3.45)}$$

ve $\alpha = 1,2$, $j = a,b$, $n = a,b$ olmak üzere ve $j \neq n$ için

$$T_{\alpha j} = (\frac{\partial R_{\alpha j}}{\partial k_j} + V_{gj}\frac{\partial R_{\alpha j}}{\partial \omega_j}) \quad ,$$

$$\mathrm{N}_{\alpha j} = (c_T^2 \frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial {t_1}^2})$$

$$\mathrm{M}_{\beta\gamma j} = \omega_j \frac{\partial \mathrm{A}_{\beta j}}{\partial t_\gamma} + k_j c_T^2 \frac{\partial \mathrm{A}_{\beta j}}{\partial x_\gamma} \quad ,$$

$$\mathrm{P}_{1j} = -n_T k_j^4 (9 + 2p_j^2 + 9p_j^4) \,|\, R_{1j} \,|^2 \, R_{1j} \,|\, \mathrm{A}_{1j} \,|^2 \, \mathrm{A}_{1j}$$
$$- 4n_T k_j^2 k_n^2 (3p_j^2 p_n^2 + p_j^2 + p_n^2 + 3) \,|\, R_{1n} \,|^2 \, R_{1j} \,|\, \mathrm{A}_{1n} \,|^2 \, \mathrm{A}_{1j} \quad ,$$

$$\mathrm{P}_{2j} = -n_T k_j^4 (9 + 2p_j^2 + 9p_j^4) \,|\, R_{1j} \,|^2 \, R_{2j} \,|\, \mathrm{A}_{1j} \,|^2 \, \mathrm{A}_{1j}$$
$$- 4n_T k_j^2 k_n^2 (3p_j^2 p_n^2 + p_j^2 + p_n^2 + 3) \,|\, R_{2n} \,|^2 \, R_{2j} \,|\, \mathrm{A}_{1n} \,|^2 \, \mathrm{A}_{1j} \quad ,$$

$$\mathrm{P}_{3j} = -n_T k_j^4 (3 + 2p_j^2 - 9p_j^4) \quad ,$$

$$\mathrm{P}_{4j} = 2n_T k_j k_n^2 [(k_j (-3 + p_n^2 + p_j^2 (-1 + 3p_n^2)) + 2k_n p_j p_n (-1 + 3p_n^2))] \quad ,$$

$$\mathrm{P}_{5j} = 2n_T k_j k_n^2 [(k_j (-3 + p_n^2 + p_n^2 (-1 + 3p_n^2)) + 2k_n p_j p_n (1 - 3p_n^2))] \,. \qquad \textbf{(3.46)}$$

olarak tanımlanmaktadırlar. Yukarıda verilen denklemlerdeki "$\bar{}$" işareti, üstünde bulunduğu terimin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca, $|\,\mathrm{A}_{1j}\,|^2 = \mathrm{A}_{1j}\,\bar{\mathrm{A}}_{1j}$' dır. Dikkat edilirse üçüncü mertebe probleme ait hareket denklemi homojen olmayan bir denklemdir. Bu yüzden, ikinci mertebe problemde olduğu gibi, üçüncü mertebe problemin çözümlerini de

$$u_3 = \%u_3 + \bar{u}_3 \qquad \textbf{(3.47)}$$

olacak şekilde iki parçaya ayıralım, öyle ki $\bar{u}_3$, **(3.44)** homojen olmayan denklemin özel çözümünü; $\%u_3$ ise,

$$\mathrm{L}_0 \%u_3 = 0 \qquad \textbf{(3.48)}$$

homojen denklemin ve **(3.6b)** sınır koşullarından türetilen

$$y = \pm h \text{' da} \qquad \frac{\partial \%u_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \qquad \textbf{(3.49)}$$

homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun. **(3.44)** denkleminin özel çözümü $\bar{u}_3$ fonksiyonunu,

$$\begin{aligned}\bar{u}_3 = {} & f_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i\phi_a} + g_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{3i\phi_a} + h_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i(2\phi_a+\phi_b)} \\ & + k_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i(\phi_a-2\phi_b)} + f_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i\phi_b} + g_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{3i\phi_b} \\ & + h_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i(2\phi_b+\phi_a)} + k_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{i(\phi_b-2\phi_a)} + \bar{f}_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i\phi_a} \\ & + \bar{g}_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-3i\phi_a} + \bar{h}_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i(2\phi_a+\phi_b)} + \bar{k}_{3a}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i(\phi_a-2\phi_b)} \\ & + \bar{f}_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i\phi_b} + \bar{g}_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-3i\phi_b} + \bar{h}_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i(2\phi_b+\phi_a)} \\ & + \bar{k}_{3b}(x_1,x_2,y,t_1,t_2)e^{-i(\phi_b-2\phi_a)}.\end{aligned}$$

(3.50)

şeklinde alabiliriz**. (3.50)** çözüm formu dikkate alınırsa, süperpozisyon ilkesi kullanılarak f_{3j}, g_{3j}, h_{3j} ve k_{3j} ile bunların eşlenikleri olan fonksiyonlar ayrı ayrı hesaplanabilirler. f_{3j} (j=a,b) çözümleri, denklemin sağ yanı dikkate alınarak aşağıdaki gibi seçilebilirler:

$$\begin{aligned}f_{3j} = {} & (\varepsilon_1^{(j)} + y\varepsilon_2^{(j)})ye^{ik_jp_jy} + (\varepsilon_3^{(j)} + y\varepsilon_4^{(j)})ye^{-ik_jp_jy} + \varepsilon_5^{(j)}e^{3ik_jp_jy} \\ & + \varepsilon_6^{(j)}e^{-3ik_jp_jy} + \varepsilon_7^{(j)}e^{i(k_jp_j-2k_np_n)y} + \varepsilon_8^{(j)}e^{-i(k_jp_j+2k_np_n)y} \\ & + \varepsilon_9^{(j)}e^{i(k_jp_j+2k_np_n)y} + \varepsilon_{10}^{(j)}e^{i(-k_jp_j+2k_np_n)y} + k.e.\end{aligned} \qquad \textbf{(3.51)}$$

Bu ifade **(3.44)** denkleminde kullanılırsa, gerekli ara işlemlerden sonra ε_i katsayıları i=1,…10 ve $j,n=a,b,\ j\neq n$ olmak üzere

$$\varepsilon_1^{(j)} = \frac{1}{2c_T^2k_jp_j}(iD_{1j} - \frac{D_{2j}}{2k_jp_j}) \qquad \varepsilon_2^{(j)} = i\frac{D_{2j}}{4c_T^2k_jp_j}$$

$$\varepsilon_3^{(j)} = -\frac{1}{2c_T^2k_jp_j}(iD_{3j} + \frac{D_{4j}}{2k_jp_j}) \qquad \varepsilon_4^{(j)} = -i\frac{D_{4j}}{4c_T^2k_jp_j}$$

$$\varepsilon_5^{(j)} = \frac{D_{5j}}{8c_T^2k_j^{\,2}p_j^{\,2}} \qquad \varepsilon_6^{(j)} = \frac{D_{6j}}{8c_T^2k_j^{\,2}p_j^{\,2}}$$

(3.52)

$$\varepsilon_7^{(j)} = \frac{\mathrm{P}_{5j}R_{1j}R_{2n}\bar{R}_{1n}}{4k_np_nc_T^2(k_np_n - k_jp_j)} \qquad \varepsilon_8^{(j)} = \frac{\mathrm{P}_{4j}R_{2j}R_{2n}\bar{R}_{1n}}{4k_np_nc_T^2(k_np_n + k_jp_j)}$$

$$\varepsilon_9^{(j)} = \frac{\mathrm{P}_{4j}R_{1j}R_{1n}\bar{R}_{2n}}{4k_np_nc_T^2(k_np_n + k_jp_j)} \qquad \varepsilon_{10}^{(j)} = \frac{\mathrm{P}_{5j}R_{2j}R_{1n}\bar{R}_{2n}}{4k_np_nc_T^2(k_np_n - k_jp_j)}$$

(3.52)

olarak elde edilirler.

Diğer katsayı fonksiyonları g_{3j}, h_{3j} ve k_{3j} için de benzer şekilde hareket edilerek bu katsayılar da hesaplanabilirler. Fakat bu çalışmada uniform geçerli birinci mertebe çözümler ile ilgilenildiğinden g_{3j}, h_{3j} ve k_{3j} çözüm parçalarına ihtiyaç olmadığından bunlar hesaplanmayacaklardır. Burada şu noktaya dikkat edilmesi gerekmektedir:

(3.44) denkleminin sağ yanında $e^{\pm i\phi_j}$, $e^{\pm 3i\phi_j}$, $e^{\pm i(2\phi_j \pm \phi_n)}$, $j,n=a,b$ ve $j \neq n$ fonksiyonları ile çarpılan terimler yer almaktadır. Aynı terimler $\bar{u}_3$' nın sağlaması gereken homojen olmayan sınır koşullarında bulunacaklardır. Dolayısıyla burada $\bar{u}_3$ çözümü inşa edilirken harmonik rezonans koşulunun sağlanıp sağlanmadığı önemlidir. Bu yüzden bu noktaya dikkat edilmesi gerekir.

Birinci ve ikinci dalga için harmonik rezonans koşulu sağlanır ise $k_b = Mk_a$ ve $\omega_b = M\omega_a$, $M = 3,5,7,...$ olacaktır. Özel olarak M=3 olması durumu yani üçüncü harmonik rezonans koşulunun sağlandığı hali inceleyelim. Bu durumda,

$$(k_b, \omega_b) = (3k_a, 3\omega_a) \tag{3.53}$$

olacaktır. Bu durumda **(3.50)** denklemin sağ yanındaki, dolayısıyla $\bar{u}_3$ çözüm önerisindeki bazı terimlerin,

$$e^{i(2\phi_a+\phi_b)} = e^{5i\phi_a},\ e^{i(2\phi_b+\phi_a)} = e^{7i\phi_a},\ e^{i(\phi_b-2\phi_a)} = e^{i\phi_a},\ e^{i(2\phi_b-\phi_a)} = e^{5i\phi_a} \tag{3.54}$$

formunda olması gerektiği ortaya çıkar. Yani yukarıdaki terimlerin bazıları $\bar{u}_3$ çözümündeki $e^{i\phi_a}$' lı terimlere dahil etmek mümkün olacaktır. Dolayısıyla üçüncü harmonik rezonans halinde bu eklenen terimlerden **(3.51)'** deki çözümlere katkılar gelecektir. Daha yüksek mertebe, harmonik rezonans hallerinde, M >3, beşinci ve yüksek harmonik rezonans etkileşimlerinden **(3.51)'** deki çözümlere katkı gelmeyecektir. Fakat biz bu çalışmada harmonik rezonans durumunu inceleme dışında bıraktığımızı daha önceden belirtmiştik. Bu yüzden incelemeye harmonik rezonans olmadığı kabulü ile devam edeceğiz, yani $k_a < k_b$ ve $\omega_a < \omega_b$ olmak üzere $k_b \neq Mk_a$, $\omega_b \neq M\omega_a$, $M \in \{3,5,7,...\}$ olduğunu kabul ediyoruz.

Bu nedenle üçüncü mertebe homojen denklem çözümleri $\bar{u}_3$ aşağıdaki biçimde alınırlar:

$$\tilde{u}_3 = \left[\sum_{l=1}^{\infty} (A_{3a}^{(l)} e^{ilk_a p_a y} + B_{3a}^{(l)} e^{-ilk_a p_a y}) e^{il\phi_a} + (A_{3b}^{(l)} e^{ilk_b p_b y} + B_{3b}^{(l)} e^{-ilk_b p_b y}) e^{il\phi_b} + k.e. \right] + \left[\sum_{L} A_{3L} e^{ik_L p_L y} + B_L e^{-ik_L p_L y}) e^{i\phi_L} + k.e. \right] \quad \textbf{(3.55)}$$

Burada

$$k_L = 2k_j \pm k_n \quad , \quad j,n=\text{a,b} \quad \text{ve} \quad j \neq n \qquad \textbf{(3.56)}$$

dir. k_L sayısına karşılık $\omega_L = 2\omega_j \pm \omega_n$, $j,n = a,b$ ve $j \neq n$ değerlerini aldığını kabul ediyoruz. Ayrıca

$$\phi_L = k_L x_0 - \omega_L t_0 \quad , \quad k_L = \frac{\omega_L}{c_L} , \; p_L = \left(\frac{c_L^2}{c_T^2} - 1 \right)^{1/2} \qquad \textbf{(3.57)}$$

olarak tanımlanmaktadır [24].

(3.55) ile verilen üçüncü mertebe homojen denklem çözümü $\tilde{u}_3$ ile **(3.50)** ile verilen üçüncü mertebe özel çözüm $\bar{u}_3$ **(3.49)**' da verilen sınır koşulunda kullanılırsa,

$$\mathbf{U}_{3j}^{(l)} = (A_{3j}^{(l)} \quad B_{3j}^{(l)})^T \qquad \text{j=a,b} \qquad \textbf{(3.58)}$$

ve

$$\mathbf{U}_{3j}^{(L)} = (A_{3j}^{(L)} \quad B_{3j}^{(L)})^T \qquad \textbf{(3.59)}$$

vektörleri, bileşenleri üçüncü mertebe genlik fonksiyonları olan vektörler olmak üzere aşağıdaki cebrik denklem sistemleri elde edilir:

$$\mathbf{W}_j^{(l)} \mathbf{U}_{3j}^{(l)} = \mathbf{b}_{3j}^{(l)} \quad , \quad l = 1,2,3... \quad , \quad j = a,b \qquad \textbf{(3.60)}$$

$$\mathbf{W}_j^{(L)} \mathbf{U}_{3j}^{(L)} = \mathbf{b}_{3j}^{(L)} \qquad \textbf{(3.61)}$$

Burada $\mathbf{W}_j^{(L)}$ matrisini **(3.10)'** da verilen $\mathbf{W}_j^{(l)}$ matrisinde $lk_j = 2k_j \pm k_n$ ve $l\omega_j = 2\omega_j \pm \omega_n$, $j = a,b$ ve $j \neq n$ yazılarak elde edilen matristir.

Dikkat edilirse, burada **(3.50)** özel çözüm formu göz önüne alındığında

$$l = 1,3 \quad \text{için} \qquad \mathbf{b}_{3j}^{(l)} \neq \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.62)}$$

ve

$$l \neq 1,3 \quad \text{için} \qquad \mathbf{b}_{3j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.63)}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca

$$\mathbf{b}_{3j}^{(L)} \neq \mathbf{0} \tag{3.64}$$

dır.

$l \neq 1,3$ için $\det \mathbf{W}_j^{(l)} \neq 0$ ve $\mathbf{b}_{3j}^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ olduğunda **(3.60)**' ın çözümleri

$$l \neq 1,3 \quad \text{için} \qquad \mathbf{U}_{3j}^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad j=a,b \tag{3.65}$$

olur.

$$L \quad \text{için} \qquad \mathbf{b}_{3j}^{(L)} \neq \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \det \mathbf{W}_j^{(L)} \neq 0 \tag{3.66}$$

olduğundan,

$$\mathbf{U}_{3j}^{(L)} = \mathbf{W}_j^{(L)-1} \mathbf{b}_{3j}^{(L)} \tag{3.67}$$

olarak elde edilir.

$l = 3$ için $\mathbf{b}_{3j}^{(3)} \neq \mathbf{0}$ ve $\det \mathbf{W}_j^{(3)} \neq 0$ olduğundan **(3.60)** denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_{3j}^{(3)} = \mathbf{W}_j^{(3)-1} \mathbf{b}_{3j}^{(3)} \qquad j=a,b \tag{3.68}$$

olarak bulunur. Fakat bundan sonraki hesaplarda sadece *l*=1 için $\mathbf{b}_{3j}^{(1)}$ vektörünün açık yapısı gerekli olacağından **(3.66)** ve **(3.67)'** de yer alan çözüm vektörlerine ihtiyacımız olmayacaktır. Şimdi *l*=1 olması durumunu inceleyelim:

l=1 için $\mathbf{b}_{3j}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ idi. $\mathbf{b}_{3j}^{(1)}$ vektörlerini uzun ara işlemlerden sonra aşağıdaki formda açık olarak yazabiliriz:

$$\mathbf{b}_{3a}^{(1)} = \mathbf{B}_{3a} + \mathbf{F}^{(aa)} \mid \mathrm{A}_{1a} \mid^2 \mathrm{A}_{1a} + \mathbf{F}^{(ba)} \mid \mathrm{A}_{1b} \mid^2 \mathrm{A}_{1a} \quad , \tag{3.69}$$

$$\mathbf{b}_{3b}^{(1)} = \mathbf{B}_{3b} + \mathbf{F}^{(bb)} \mid \mathrm{A}_{1b} \mid^2 \mathrm{A}_{1b} + \mathbf{F}^{(ab)} \mid \mathrm{A}_{1a} \mid^2 \mathrm{A}_{1b} \tag{3.70}$$

Burada $\mathbf{B}_{3j}$ vektörleri ortamın lineer malzeme özelliklerine sahip olup, açık ifadesi aşağıdadır:

$$\mathbf{B}_{3j} = -i(\frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j}\frac{\partial \mathrm{A}_{2j}}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial k_j}\frac{\partial \mathrm{A}_{2j}}{\partial x_1})\mathbf{R}_j - i(\frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j}\frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial k_j}\frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_2})\mathbf{R}_j$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j{}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial t_1{}^2} - 2\frac{\partial^2 \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j \partial k_j}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_{1j}}{\partial k_j{}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1{}^2})\mathbf{R}_j \qquad \textbf{(3.71)}$$
$$+(\frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial k_j}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1{}^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j}\frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1 \partial t_1})(\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial k_j} + V_{gj}\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \omega_j}) \quad .$$

ve $\mathbf{F}_{jj} = (F_{1jj}\ F_{2jj})$ ve $\mathbf{F}_{jn} = (F_{1jn}\ F_{2jn})$ vektörleri bileşenleri ortamın hem lineer hem de nonlineer malzeme özelliklerine sahip katsayı vektörleridirler ve bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F}_{1aa} = -\frac{e^{-ihk_a p_a} h k_a^4 n_T (9 + 2p_a^2 + 9p_a^4)}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{2aa} = \frac{e^{-ihk_a p_a} \cos[2hk_a p_a] h k_a^4 n_T (9 + 2p_a^2 + 9p_a^4)}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{1bb} = -\frac{e^{-ihk_b p_b} h k_b^4 n_T (9 + 2p_b^2 + 9p_b^4)}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{2bb} = \frac{e^{-ihk_b p_b} \cos[2hk_b p_b] h k_b^4 n_T (9 + 2p_b^2 + 9p_b^4)}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{1ab} = -\frac{4e^{-ihk_b p_b} h k_a^2 k_b^2 n_T (3 + p_b^2 + p_a^2 (1 + 3p_b^2))}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{2ab} = \frac{4e^{-ihk_b p_b} \cos[2hk_b p_b] h k_a^2 k_b^2 n_T (3 + p_b^2 + p_a^2 (1 + 3p_b^2))}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{1ba} = -\frac{2e^{-ihk_a p_a} h k_a^2 k_b^2 n_T (6 + 2p_b^2 + 2p_a^2 (1 + 3p_b^2))}{c_T^2} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{2ab} = \frac{4e^{-ihk_a p_a} \cos[2hk_a p_a] h k_a^2 k_b^2 n_T (3 + p_b^2 + p_a^2 (1 + 3p_b^2))}{c_T^2} \ . \qquad \textbf{(3.72)}$$

Dikkat edilirse nonlineer malzeme parametresi n_T=0 olduğunda $\mathbf{F}_{jj} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{F}_{nj} = \mathbf{0}$ olur.

$l=1$ için $\mathbf{b}_{3j}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ ve $\det \mathbf{W}_j^{(1)} = 0$ olduğundan, bu durumda **(3.60)** denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için $\mathbf{L}_j$, *j=a,b* **(3.36)** ile tanımlanan satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L}_a \mathbf{b}_{3a}^{(1)} = 0\,, \quad \mathbf{L}_b \mathbf{b}_{3b}^{(1)} = 0 \tag{3.73}$$

uygunluk koşullarının sağlanması gerekir. **(3.73)'** de **(3.37)** ve **(3.38)** bağıntıları kullanılırsa, yukarıdaki uygunluk koşulları aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$i\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{1a}}{\partial t_2} + V_{ga}\frac{\partial \mathrm{A}_{1a}}{\partial x_2}\right) + i\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{2a}}{\partial t_1} + V_{ga}\frac{\partial \mathrm{A}_{2a}}{\partial x_1}\right) + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1a}}{\partial x_1^{\,2}} + \Delta_{aa} \mid \mathrm{A}_{1a} \mid^2 \mathrm{A}_{1a} + \Delta_{ba} \mid \mathrm{A}_{1b} \mid^2 \mathrm{A}_{1a} = 0$$

$$i\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{1b}}{\partial t_2} + V_{gb}\frac{\partial \mathrm{A}_{1b}}{\partial x_2}\right) + i\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{2b}}{\partial t_1} + V_{gb}\frac{\partial \mathrm{A}_{2b}}{\partial x_1}\right) + \Gamma_b \frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1b}}{\partial x_1^{\,2}} + \Delta_{bb} \mid \mathrm{A}_{1b} \mid^2 \mathrm{A}_{1b} + \Delta_{ab} \mid \mathrm{A}_{1a} \mid^2 \mathrm{A}_{1b} = 0\,. \tag{3.74}$$

Burada Γ_j, Δ_{jj} ve Δ_{nj} $j=a,b\ j\neq n$ aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$\Gamma_j = -\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\mathbf{L}_j\left(V_{gj}^2\dfrac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j^{\,2}} + 2V_{gj}\dfrac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j \partial k_j} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j^{\,2}}\right)\mathbf{R}_j \\ +\mathbf{L}_j\left(\dfrac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial k_j} + V_{gj}\dfrac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j}\right)\left(\dfrac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial k_j} + V_{gj}\dfrac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \omega_j}\right) \Big/ \left(\mathbf{L}_j\dfrac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j}\mathbf{R}_j\right) \end{array}\right] \tag{3.75}$$

ve

$$\Delta_{jj} = -\frac{\mathbf{L}_j \mathbf{F}_{j\,j}}{\mathbf{L}_j \dfrac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j}\mathbf{R}_j} \quad , \quad \Delta_{nj} = -\frac{\mathbf{L}_j \mathbf{F}_{n\,j}}{\mathbf{L}_j \dfrac{\partial \mathbf{W}_j^{(1)}}{\partial \omega_j}\mathbf{R}_j} \quad . \tag{3.76}$$

Bu ifadeler incelenirse Γ_j' nin tabakayı oluşturan malzemenin lineer özelliğine ve k_j dalga sayısına bağlı iken, Δ_{jj} ve Δ_{nj}' lerin bunlara ek olarak ortamı oluşturan malzemenin nonlineer özelliklerine de bağlı olduğu görülür.

(3.74) denkleminde A_{2a}, A_{2b} ikinci mertebe genlik fonksiyonlarının $\{x_1,t_1\}$ yavaş değişkenlerine bağlılığının A_{1a}, A_{1b} birinci mertebe genlik fonksiyonları gibi $(x_1 - V_{gj}t_1)$ formunda olduğunu kabul edersek, yani

$$\mathrm{A}_{2j} = \mathrm{A}_{2j}(x_1 - V_{gj}t_1, x_2, t_2) \qquad j=a,b \tag{3.77}$$

yani,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{2j}}{\partial t_1} + V_{gj} \frac{\partial \mathrm{A}_{2j}}{\partial x_1} \right) = 0 \qquad \textbf{(3.78)}$$

denklemi sağlanırsa **(3.74)** aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$i\left(\frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial t_2} + V_{gj} \frac{\partial \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_2} \right) + \Gamma_j \frac{\partial^2 \mathrm{A}_{1j}}{\partial x_1^2} + \Delta_{jj} |\mathrm{A}_{1j}|^2 \mathrm{A}_{1j} + \Delta_{nj} |\mathrm{A}_{1n}|^2 \mathrm{A}_{1j} = 0 \qquad \text{j,n=a,b j}\neq\text{n}$$

(3.79)

Şimdi yeni boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlayalım:

$$\tau = \omega_a t_2 \quad , \qquad \Delta_{nj} = \Delta_{nj} / \omega_a k_a^2$$

$$\xi = k_a (x_1 - V_{ga} t_1) \quad , \qquad \Lambda = \frac{k_a}{\varepsilon \omega_a} (V_{gb} - V_{ga})$$

$$\mathrm{A}_j = k_a \mathrm{A}_{1j} \quad , \qquad \Gamma_j = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_j}{dk_j^2}$$

$$\Gamma_j = k_a^2 \Gamma_j / \omega_a \quad , \qquad \Delta_{nj} = -\mathbf{L}_j . \mathbf{F}_j / \mathbf{L}_j \frac{\partial \mathbf{W}_{1j}}{\partial \omega_j} \mathbf{R}_j \qquad \textbf{(3.80)}$$

Bu yeni değişkenlerin ve sabitlerin **(3.79)'** da verilen uygunluk koşullarında kullanılırsa A_a ve A_b boyutsuz genlik fonksiyonları için

$$i \frac{\partial \mathrm{A}_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 \mathrm{A}_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |\mathrm{A}_a|^2 \mathrm{A}_a + \Delta_{ba} |\mathrm{A}_b|^2 \mathrm{A}_a = 0 \quad , \qquad \textbf{(3.81a)}$$

$$i \frac{\partial \mathrm{A}_b}{\partial \tau} + i\Lambda \frac{\partial \mathrm{A}_b}{\partial \xi} + \Gamma_b \frac{\partial^2 \mathrm{A}_b}{\partial \xi^2} + \Delta_{bb} |\mathrm{A}_b|^2 \mathrm{A}_b + \Delta_{ab} |\mathrm{A}_a|^2 \mathrm{A}_b = 0 \qquad \textbf{(3.81b)}$$

denklemleri elde edilir. Yukarıda verilen **(3.81a,b)** denklemlerinin çözümleri A_a ve A_b genlik fonksiyonları bulunursa, **(3.80)'** deki değişken dönüşümleri kullanılarak **(3.20)**' de verilen birinci mertebe uniform geçerli çözümler tam olarak elde edilmiş olur. Γ_a ve Γ_b katsayıları lineer dispersiyon katsayıları, Δ_{aa} ve Δ_{bb} katsayıları, dalga paketlerinin self modülasyonunu tanımlayan hem lineer hem de nonlineer malzeme sabitlerini içeren nonlineer katsayılardır. Δ_{ab} ve Δ_{ba} katsayıları ise iki dalga

paketinin birbirleri ile etkileşen modülasyon terimlerini gösteren hem lineer hem de nonlineer malzeme sabitlerini içeren katsayılardır.

Burada dikkat edilirse, $A_b = 0$ kabulü altında **(3.81a,b)** denklem sisteminin, tabakada yayılan A_a genliğine sahip tek bir SH dalgasının modülasyonunu karakterize eden bir NLS denklemine indirgenmiş olur [23];

$$i\frac{\partial A_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 A_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |A_a|^2 A_a = 0 \qquad \textbf{(3.82)}$$

(3.81a,b) denklemlerinin,

$$A_a(\xi,0) = A_{a0} \quad , \quad A_b(\xi,0) = A_{b0} \qquad \textbf{(3.83)}$$

başlangıç koşulları altında genel olarak kesin analitik çözümünü yapmak mümkün değildir. Burada dikkat edilirse, **(3.79b)** denkleminde Λ katsayısını yok etmek için $A_b \to A_{by} e^{-i(\alpha\xi - \beta\tau)}$ gibi bir değişken dönüşümü uygulanırsa, gerekli işlemler sonucunda α ve β katsayıları aşağıdaki gibi bulunarak,

$$A_b \to A_{by} e^{-i(\xi\frac{\Lambda}{2\Gamma_b} - \tau\frac{\Lambda^2}{4\Gamma_b})} \qquad \textbf{(3.84)}$$

dönüşümü yapılması gerektiği sonucuna varılır ve böylece **(3.81a,b)** denklemleri aşağıdaki kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denklemine indirgenir;

$$i\frac{\partial A_a}{\partial \tau} + \Gamma_a \frac{\partial^2 A_a}{\partial \xi^2} + \Delta_{aa} |A_a|^2 A_a + \Delta_{ba} |A_b|^2 A_a = 0$$

$$i\frac{\partial A_b}{\partial \tau} + \Gamma_b \frac{\partial^2 A_b}{\partial \xi^2} + \Delta_{bb} |A_b|^2 A_b + \Delta_{ab} |A_a|^2 A_b = 0 \qquad \textbf{(3.85)}$$

Ya da $V_{ga} = V_{gb}$ olması durumunda da, yani grup hızları eşit olan iki dalga paketinin etkileşim problemi incelenirse yukarıdaki ikinci denklemde $\Lambda = 0$ olur ve bu durumda **(3.81a,b)** denklemleri A_a ve A_b genlik fonksiyonları için **(3.85)'** de verilen KNLS denklemine indirgenir.

Kuple NLS denklem sistemi, fiziğin jeofiziksel akışkanlar, nonlineer optikler gibi birçok dalında karşılaşılan denklem sistemidir. Bu sebepten, literatürde KNLS için solitary dalga çözümleri, periyodik dalga çözümleri arayışları ve kararlılık

incelemeleri üzerine birçok çalışma bulmak mümkündür [29-33]. Biz burada, ileriki nümerik incelememizde kullanacağımız için birkaç tanesinden bahsedeceğiz.

İlk olarak KNLS nin aşağıda verilen periyodik çözümleri için lineer kararlılık incelemesini yapalım: [29,31]

3.3. Kuple Nonlineer Schrödinger (KNLS) Denklemleri için Lineer Kararlılık Analizi

Bu bölümde **(3.85)'** de verilen KNLS denkleminin periyodik çözümlerinin lineer kararlılık analizini yapacağız ve çözümlerin kararlılığı için koşul elde etmeye çalışacağız. Bu amaçla,

$$\mathrm{A}_a = a_1 e^{i(k_1\xi - \varpi_1\tau)} \quad , \quad \mathrm{A}_b = a_2 e^{i(k_2\xi - \varpi_2\tau)} \qquad \textbf{(3.86)}$$

periyodik çözümleri alalım. Burada a_1 ve a_2 genlikleri reel sabitler, k_1 ve k_2 dalga sayıları, ϖ_1 ve ϖ_2 ise açısal frekansları göstermektedir. Bu çözümleri **(3.85)** denklemlerinde yerine yazarsak, ϖ_1 ve ϖ_2 ' nin aşağıdaki dispersiyon bağıntılarını sağlamaları gerektiği ortaya çıkar:

$$\varpi_1 = \Gamma_a k_1^2 - (\Delta_{aa} a_1^2 + \Delta_{ba} a_2^2)$$

$$\varpi_2 = \Gamma_b k_2^2 - (\Delta_{bb} a_2^2 + \Delta_{ab} a_1^2) \qquad \textbf{(3.87)}$$

Dikkat edilirse burada, **(3.87)'** de verilen dispersiyon bağıntıları iki dalga genlik fonksiyonunu da içermektedir, Şimdi de **(3.86)'** da verilen dalgaların kararlılık incelemesini yapalım. Bunun için genlik çözüm fonksiyonlarını $\varepsilon << 1$ pertürbe edelim:

$$\mathrm{A}_a = (a_1 + \varepsilon\phi_1(\xi,\tau))e^{i(k_1\xi - \varpi_1\tau)}$$

$$\mathrm{A}_b = (a_2 + \varepsilon\phi_2(\xi,\tau))e^{i(k_2\xi - \varpi_2\tau)} \qquad \textbf{(3.88)}$$

(3.88) çözüm önerileri **(3.85)'** de yerine yazılıp ε 'un yüksek terimleri ihmal edildiğinde pertürbasyon fonksiyonları ϕ_1 ve ϕ_2 için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$i\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}+\Gamma_a(2k_1 i\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\xi^2})+\Delta_{aa}a_1^2(\phi_1+\bar{\phi}_1)+\Delta_{ba}a_1a_2(\phi_2+\bar{\phi}_2)=0$$

$$i\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau}+\Gamma_b(2k_2 i\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\xi^2})+\Delta_{bb}a_2^2(\phi_2+\bar{\phi}_2)+\Delta_{ab}a_1a_2(\phi_1+\bar{\phi}_1)=0 \qquad \textbf{(3.89)}$$

Burada ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının, periyodik olduklarını kabul edersek, yani

$$\phi_1 = B_1e^{i(l\xi-\mu\tau)}+C_1e^{-i(l\xi-\mu\tau)}$$

$$\phi_2 = B_2e^{i(l\xi-\mu\tau)}+C_2e^{-i(l\xi-\mu\tau)} \qquad \textbf{(3.90)}$$

gibi olduğunu kabul edersek, bunları **(3.89)** denkleminde yerlerine yazıp denklemlerin reel ve imajinal kısımları ayrılırsa, B_1, B_2 ve C_1, C_2' ler için homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin olması için katsayılar matrisinin determinantının

$$\begin{aligned}[(\Gamma_a^2l^2-2\Gamma_a\Delta_{aa}a_1^2)-(c-2\Gamma_ak_1)^2]x[(\Gamma_b^2l^2-2\Gamma_b\Delta_{bb}a_2^2)-(c-2\Gamma_bk_2)^2] \\ =4\Gamma_a\Gamma_b\Delta_{ab}\Delta_{ba}a_1^2a_2^2\end{aligned} \qquad \textbf{(3.91)}$$

formunda olması gerektiği ortaya çıkar. Burada $c=\frac{\mu}{l}$ pertürbasyonun faz hızı olarak tanımlanmaktadır. Özel olarak $k_1=k_2=0$ olursa, **(3.91)** bağıntısı, c için Roskes' in çalışmasında elde etmiş olduğu, dispersiyon bağıntısına indirgendiği görülür [29].

$$\begin{aligned}P(\mu)=&[\Gamma_al^2(\Gamma_al^2-2\Delta_{aa}a_1^2)-\mu^2][\Gamma_bl^2(\Gamma_bl^2-2\Delta_{bb}a_2^2)-\mu^2]\\&-4\Gamma_a\Gamma_b\Delta_{ba}\Delta_{ab}l^4a_1^2a_2^2=0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.92)}$$

(3.92)' deki çözümlerin kararsız (unstabil) olması için Im(μ) > 0 olmalıdır. Bunun için yeterli koşul da, yukarıda elde edilen $P(\mu)$ polinomunun $P(0) < 0$ koşulu altında pozitif bir köke sahip olması olarak ifade edilebilir [29]. Bu durumda l' ler için kararsızlık (unstability) incelemesinde,

$P(0) < 0$, koşulu bize

$$A=\Gamma_a\Gamma_b\begin{vmatrix}\Delta_{aa} & \Delta_{ab}\\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb}\end{vmatrix}<0 \qquad \textbf{(3.93)}$$

eşitsizliğini verir.

Diğer taraftan **(3.82)'** de verilen NLS denkleminin $\Gamma_a \Delta_{aa} > 0$ (kararsızlık) olması durumunda

$$\mathrm{A}_a = a \sec h(\delta\xi) e^{i\theta\tau} \qquad \textbf{(3.94)}$$

formunda solitary zarf çözümünün varlığı bilinmektedir. Burada

$$\delta^2 = \frac{\Delta}{2\Gamma} a^2 \quad , \quad \theta = \frac{\Delta}{2} a^2 \qquad \textbf{(3.95)}$$

şeklindedir. Benzer olarak, **(3.85)'** de verilen KNLS denklem sisteminin de **(3.93)'** de verilen kararsızlık koşulu altında solitary zarf çözümlerini aşağıdaki formda arayalım:

$$\mathrm{A}_a = \alpha_1 \sec h(\delta\xi) e^{i\theta_1\tau}$$

$$\mathrm{A}_b = \alpha_2 \sec h(\delta\xi) e^{i\theta_2\tau} \qquad \textbf{(3.96)}$$

Bu çözümler **(3.85)** denkleminde yerine yazılırsa:

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \frac{\begin{matrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} \end{matrix}}{\begin{matrix} \Gamma_a & \Delta_{ab} \\ \Gamma_b & \Delta_{bb} \end{matrix}} \alpha_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\begin{matrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} \end{matrix}}{\begin{matrix} \Delta_{aa} & \Gamma_a \\ \Delta_{ba} & \Gamma_b \end{matrix}} \alpha_2^2 \qquad \textbf{(3.97)}$$

ve

$$\theta_1 = \Gamma_a \delta^2 \quad , \quad \theta_2 = \Gamma_b \delta^2 \qquad \textbf{(3.98)}$$

koşullarının sağlanması gerekir.

(3.97)' den görüleceği üzere, **(3.96)** formunda solitary zarf çözümlerinin varlığı için,

$$B = \begin{matrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Gamma_a & \Delta_{ab} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Gamma_b & \Delta_{bb} \end{matrix} > 0$$

$$C = \begin{matrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} & \Delta_{aa} & \Gamma_a \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} & \Delta_{ba} & \Gamma_b \end{matrix} > 0 \qquad \textbf{(3.99)}$$

olması gerekmektedir. Burada önemli bir noktaya açıklık getirelim:

Solitary zarf çözümlerinin varlığı için **(3.93)'** de verilen kararsızlık koşulu gerekli değildir. Yani karasızlık koşulu sağlansa bile solitary dalga çözümleri olmayabilir [29]. Örneğin,

$$\Gamma_a = \Gamma_b > 0, \qquad \Delta_{aa} = \Delta_{bb} = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta_{ab} = \Delta_{ba} < 0 \qquad \textbf{(3.100)}$$

seçilirse **(3.93)** kararsızlık koşulu sağlanır. Ama **(3.99)'** da verilen solitary dalga koşulu sağlanmaz.

KNLS denklem sisteminin kararsızlık incelemesi ve solitary zarf çözümlerinin yukarıdaki koşullar altında varlığının nümerik incelemesine Bölüm 3.4' de yer verilmektedir.

Ayrıca, KNLS denklem sisteminin çözüm arayışı üzerine diğer bir çalışma da Parker ve Porubov' un çalışmasıdır [30]. Parker ve Porubov Weierstrass eliptik fonksiyonu cinsinden periyodik dalga çözümlerinin varlığını incelemişlerdir.

3.4. KNLS Denklemlerinin Katsayılarının Sayısal Olarak İncelemesi

Bir önceki bölümde KNLS denklemlerinin lineer kararsızlık analizinden bahsedilerek solitary zarf çözümlerinin var olması için koşullar verilmiştir. Tabakada aynı yönde yayılan, grup hızları eşit olan iki SH dalgasının birbirleri ile etkileşimlerini asimptotik olarak karakterize eden KNLS denkleminin çözümlerinin davranışlarını belirleyebilmek için bu denklemlerinin katsayılarını ve dolayısıyla Bölüm 3.3' de sırasıyla **(3.93)** ve **(3.99)'** de verilen *A, B* ve *C* ifadelerinin işaretlerinin dalga sayısına ve malzeme özelliklerine göre ne şekilde değiştiğini bilmek gerekir. Elbette bu terimlerin yapıları karışık olduğu için bu bölümde böyle bir inceleme sayısal olarak yapılacaktır.

Yukarıda belirtildiği üzere, solitary zarf çözümlerinin varlığı, KNLS denklemlerin lineer ve nonlineer katsayılarını içeren *A, B* ve *C* ifadelerinin işaretlerine bağlıdır. Bu nedenle bu çalışmada ortamı oluşturan malzemelerin nonlineerliğinin, aynı yönde ilerleyen ve grup hızları eşit olan dalgaların yayılımı (etkileşimi) üzerindeki etkisini inceleyeceğiz. Bu incelemeyi yapabilmek için ilk olarak boyutsuz sabitleri ve değişkenleri kullanarak ve dispersiyon bağıntısı da gözönüne alınarak **(3.85)'** de yer alan lineer ve nonlineer katsayılar aşağıdaki forma indirgenirler;

$$\Gamma_a = \frac{C_a^2 - 1}{2C_a^4} \quad , \qquad \Gamma_b = \frac{C_b^2 - 1}{2C_b^4}$$

$$\Delta_{aa} = -\beta\Delta_{1aa} \quad , \qquad \Delta_{1aa} = \frac{(9 + 2P_a^2 + 9P_a^4)}{2C_a^2}$$

$$\Delta_{bb} = -\beta\Delta_{1bb} \quad , \qquad \Delta_{1bb} = \frac{(9 + 2P_b^2 + 9P_b^4)}{2C_aC_b}.r^3 \qquad \textbf{(3.101)}$$

$$\Delta_{ab} = -\beta\Delta_{1ab} \quad , \qquad \Delta_{1ab} = \frac{2k_b(3 + P_b^2 + P_a^2 + 3P_a^2P_b^2)}{C_aC_bk_a}.r$$

$$\Delta_{ba} = -\beta\Delta_{1ba} \quad , \qquad \Delta_{1ba} = -\frac{2(3 + P_b^2 + P_a^2 + 3P_a^2P_b^2)}{C_a^2}.r^2$$

Burada $P_a^2 = (C_a - 1)$, $P_b^2 = (C_b - 1)$ ve $r = \frac{K_b}{K_a}$ olarak tanımlanmaktadırlar. Ayrıca, $\beta = \frac{n_T}{c_T^2}$ boyutsuz nonlineer malzeme sabitidir. **(3.101)'** de verilen Δ_{1jj} ve Δ_{1jn} , $j=a,b$, $j \neq n$, terimlerine dikkat edecek olursak, bu terimlerin daima pozitif olmaları gerektiği görülür. Bu sebepten Δ_{jj} ve Δ_{jn}, $j=a,b$, $j \neq n$ terimlerinin işaretini belirleyen nonlineer sabit β' nın işaretidir. Ayrıca *A, B* ve *C* terimlerini gözönüne aldığımızda

$$A = \Gamma_a\Gamma_b(\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba}) = \beta^2\Gamma_a\Gamma_b(\Delta_{1aa}\Delta_{1bb} - \Delta_{1ab}\Delta_{1ba})$$

$$B = (\Gamma_a\Delta_{bb} - \Gamma_b\Delta_{ba})(\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba}) = -\beta^3(\Gamma_a\Delta_{1bb} - \Gamma_b\Delta_{1ba})(\Delta_{1aa}\Delta_{1bb} - \Delta_{1ab}\Delta_{1ba})$$

$$C = (\Gamma_b\Delta_{aa} - \Gamma_a\Delta_{ab})(\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba}) = -\beta^3(\Gamma_b\Delta_{1aa} - \Gamma_a\Delta_{1ab})(\Delta_{1ba}\Delta_{1bb} - \Delta_{1ab}\Delta_{1ba})$$

(3.102)

olarak elde edilir. Dikkat edilirse, daha önceden de belirtildiği gibi tabakada yayılan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısının simetrik ve antisimetrik modları mevcuttur. Bu yüzden grup hızları eşit olan ($V_{ga} = V_{gb}$) ve etkileşime giren birinci dalgaya ait (k_a,c_a) ve ikinci dalgaya ait (k_b,c_b) için aşağıdaki seçimler yapılmıştır:

1. S1-S2 modları: Dispersiyon bağıntısının simetrik birinci dalı üzerinde (k_a,c_a) ve simetrik ikinci dalı üzerinde (k_b,c_b), bu durumda $\frac{k_b}{k_a} = 2 = r$ olmaktadır.
2. A1-S1 modları: Dispersiyon bağıntısının antisimetrik birinci dalı üzerinde (k_a,c_a) ve simetrik birinci dalı üzerinde (k_b,c_b), bu durumda $\frac{k_b}{k_a} = 2 = r.$ olmaktadır.
3. S1-A2 modları: Dispersiyon bağıntısının simetrik birinci dalı üzerinde (k_a,c_a) ve antisimetrik ikinci dalı üzerinde (k_b,c_b), bu durumda $\frac{k_b}{k_a} = 1,5 = r$ olmaktadır.
4. A1-S2 modları: Dispersiyon bağıntısının antisimetrik birinci dalı üzerinde (k_a,c_a) ve simetrik ikinci dalı üzerinde (k_b,c_b), bu durumda $\frac{k_b}{k_a} = 4 = r.$

Burada bir noktaya açıklık getirmek gerekmektedir: İncelemenin başında, k_a ve k_b dalga sayıları civarında ve bu dalga sayılarına karşılık gelen ω_a ve ω_b açısal frekanslar civarında merkezlenmiş ve aynı yönde ilerleyen iki dalganın etkileşimi incelendiğinden bu iki dalganın birbirlerinin harmonikleri olmadıklarını ve bu yüzden de $k_a < k_b$ ve $\omega_a < \omega_b$ olmak üzere $k_b \neq Mk_a$, $\omega_b \neq M\omega_a$, $M \in \{3,5,7,...\}$ olduğunu kabul ettiğimizi belirtmiştik. Fakat (k_a,c_a) dispersiyon bağıntısının birinci antisimetrik modu, (k_b,c_b) ise ikinci antisimetrik modu üzerinde seçildiğinde dalga sayıları arasında $k_b = 3k_a$ eşitliği ve buna bağlı olarakta açısal frekanslar arasında $\omega_b = 3\omega_a$ eşitliği gerçeklenmektedir, yani harmonik rezonans oluşmaktadır. Bu yüzden bu tip bir seçim incelemeye dahil edilmemiştir.

Nonlineer malzeme parametresi β' da negatif ve pozitif değerleri temsil etmesi amacıyla β=-1 ve β=1 olarak seçilmiştir. Yukarıda verilen dört farklı dalga çifti seçimi için Γ_j' lerin ve *A, B* ve *C* terimlerinin boyutsuz dalga sayısı $K_a = k_a h$' ya göre değişimleri **Şekil 3.1-3.7'** de yer almaktadır.

Şekil 3.1' de ilk iki simetrik ve antisimetrik moda karşı gelen Γ eğrileri çizilmiştir. Tüm K_a' lar ve tüm dalga modları için $\Gamma > 0$ ve $K_a \to \infty$ için $\Gamma \to 0$ olmaktadır.

Diğer taraftan, **Şekil 3.2'** de A teriminin K_a' ya göre değişimi β' nın seçiminden bağımsız olarak daima negatif olmaktadır, $A<0$' dır. Bu da Roskes' in yapmış olduğu kararsızlık incelemesi ile uyuşmaktadır. Ayrıca K_a arttıkça, $K_a \to \infty$, A sıfıra yaklaşmaktadır.

β' nın pozitif ve negatif değerlerine karşılık B ve C terimlerinin K_a' ya göre değişimleri farklılık göstermektedir. **Şekil 3.3** ve **Şekil 3.4'** den sırasıyla, $\beta<0$ iken dalga çiftlerinin dört farklı durumu için $B<0$ olduğu, $\beta>0$ iken ise $B>0$ değerlerini aldığı gözlemlenmiştir. Tüm dalga seçimleri için C' nin K_a' ya göre değişimi grafikleri $\beta<0$ için **Şekil 3.5** ve $\beta>0$ için **Şekil 3.6'** da verilmişlerdir. Bu şekillerden gözlemleneceği gibi $\beta<0$ iken tüm dalga çifti seçimleri için $C>0$; $\beta>0$ iken ise $C<0$ olmaktadır. Ayrıca , B ve C katsayılarıda her bir durumda çok büyük K_a' lar için, $K_a \to \infty$ sıfıra yaklaşmaktadırlar.

Dikkat edilirse $\beta<0$ olması durumunda, yani tabakayı oluşturan malzeme kaymada yumuşayan (softening) bir malzeme ise

$$A<0,\ \ B<0,\ \ C>0 \qquad \textbf{(3.103)}$$

olmakta; $\beta>0$ olması durumunda yani tabakayı oluşturan malzeme kaymada sertleşen (hardening) bir malzeme ise

$$A<0,\ \ B>0,\ \ C<0 \qquad \textbf{(3.104)}$$

olmaktadır. Yani **(3.85)**' de verilen KNLS denkleminin solitary zarf çözümleri mevcut değildir.

Diğer taraftan bilindiği üzere **(3.82)** ile verilen tabakada SH dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden NLS denkleminin çözümleri de denklemin lineer ve nonlineer terimlerinin katsayılarının çarpımının işaretine bağlıdır.

$|\xi| \to \infty$' da sıfıra giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma_a \Delta_{aa} > 0$ ise bir dizi solitona ama eğer $\Gamma_a \Delta_{aa} < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür. Bu halde tüm K_a' lar için $\Gamma_a > 0$ ve $\Delta_{1aa} > 0$ olduğundan $\Gamma_a \Delta_{aa}$ teriminin işaretini nonlineer malzeme sabiti β' nın işareti belirleyecektir;

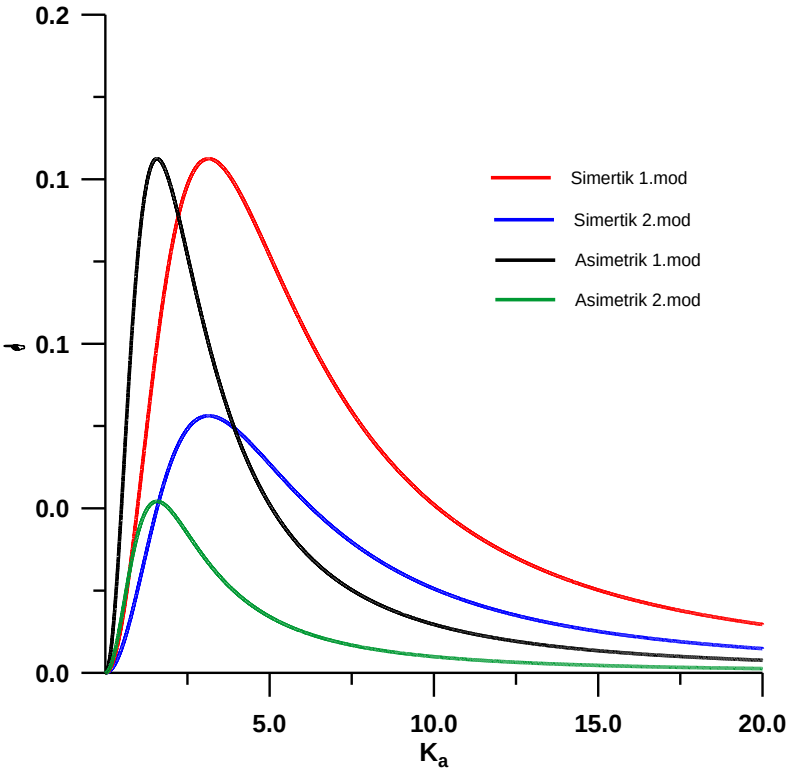
$$\Gamma_a \Delta_{aa} = -\beta \Gamma_a \Delta_{1aa} \Rightarrow sign(\Gamma_a \Delta_{aa}) = -sign(\beta) \qquad \textbf{(3.105)}$$

Şekil 3.7' de $\Gamma_a \Delta_{aa} / |\beta|$' nın dispersiyon bağıntısının ilk altı dalına karşılık gelen grafikleri yer almaktadır.

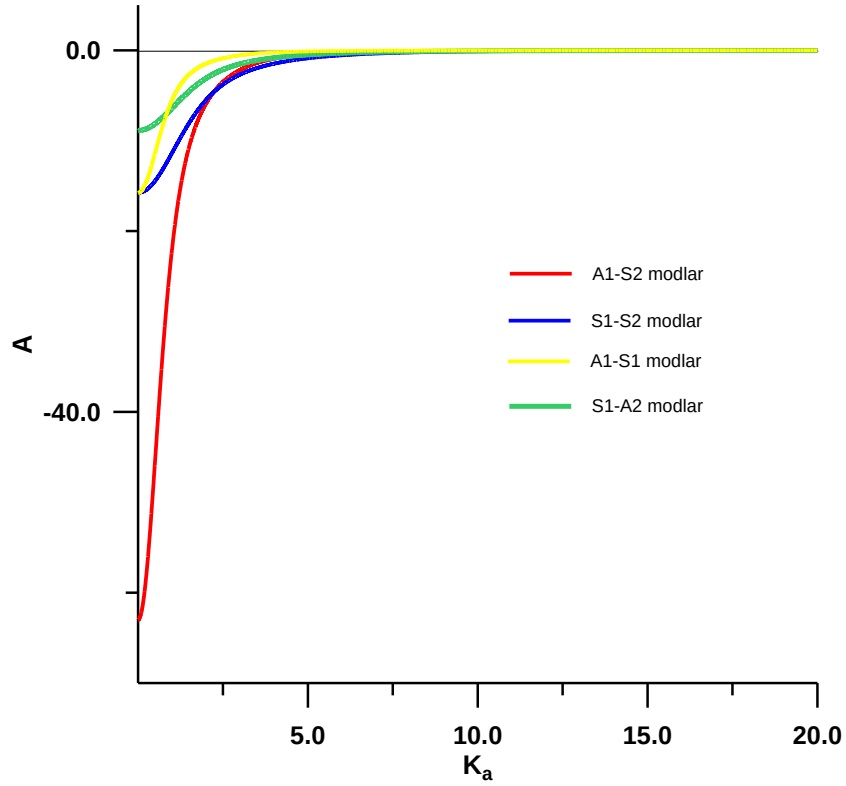
$$\beta = \frac{n_T}{c_T^2} < 0 \quad \text{ise} \quad \Gamma_a \Delta_{aa} > 0 \qquad \textbf{(3.106)}$$

$$\beta = \frac{n_T}{c_T^2} > 0 \quad \text{ise} \quad \Gamma_a \Delta_{aa} < 0 \qquad \textbf{(3.107)}$$

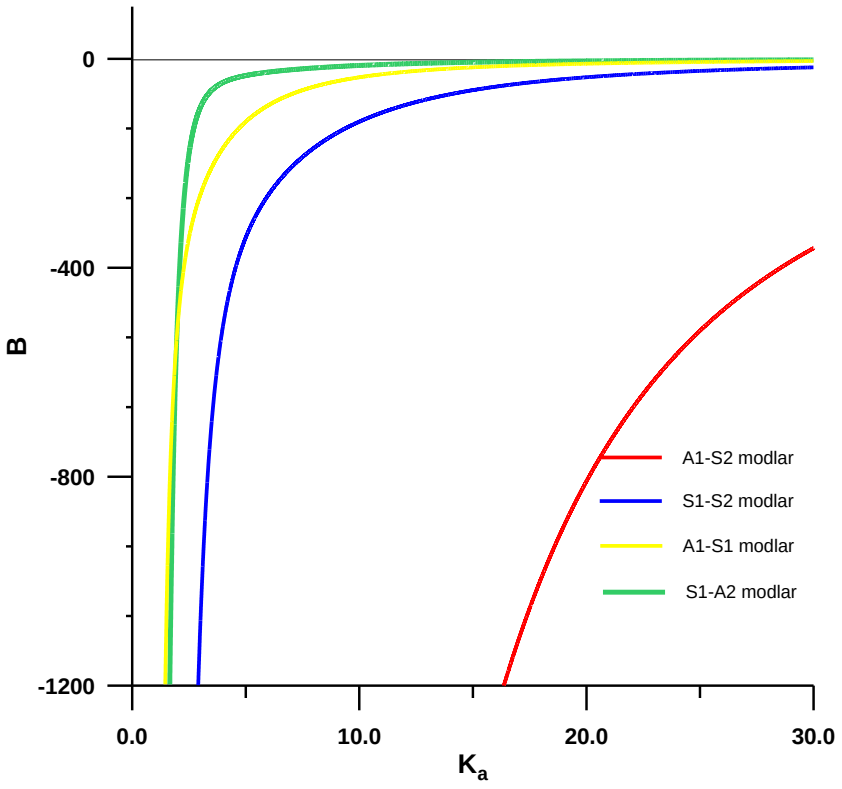
olmaktadır [23]. Yani $\beta < 0$ için NLS denkleminin solitary zarf çözümü mevcuttur.



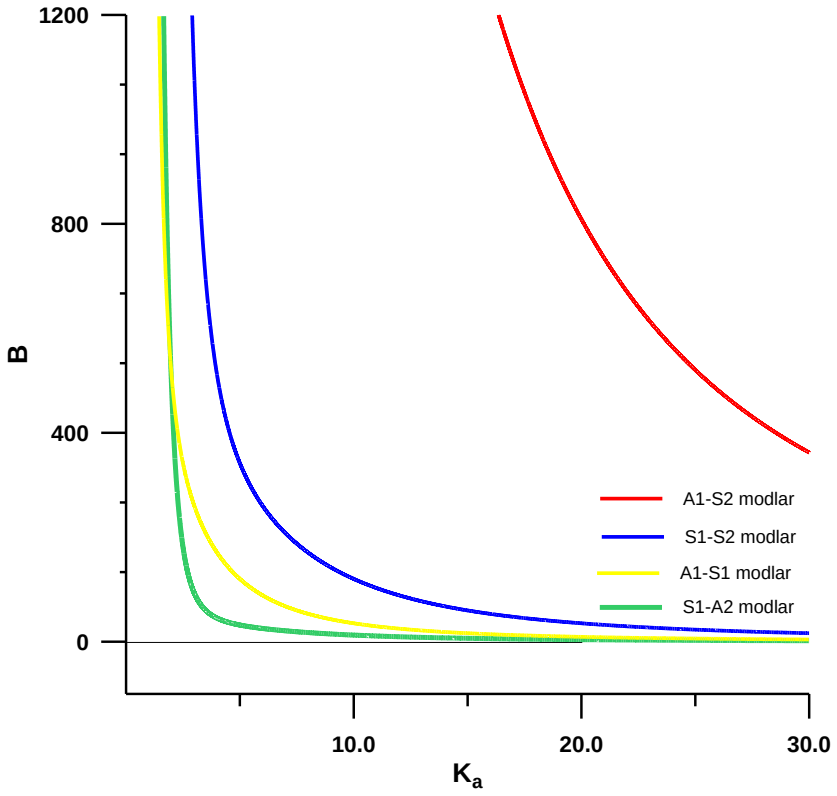
Şekil 3.1: (3.13) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk iki simetrik ve antisimetrik modları için Γ nın boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



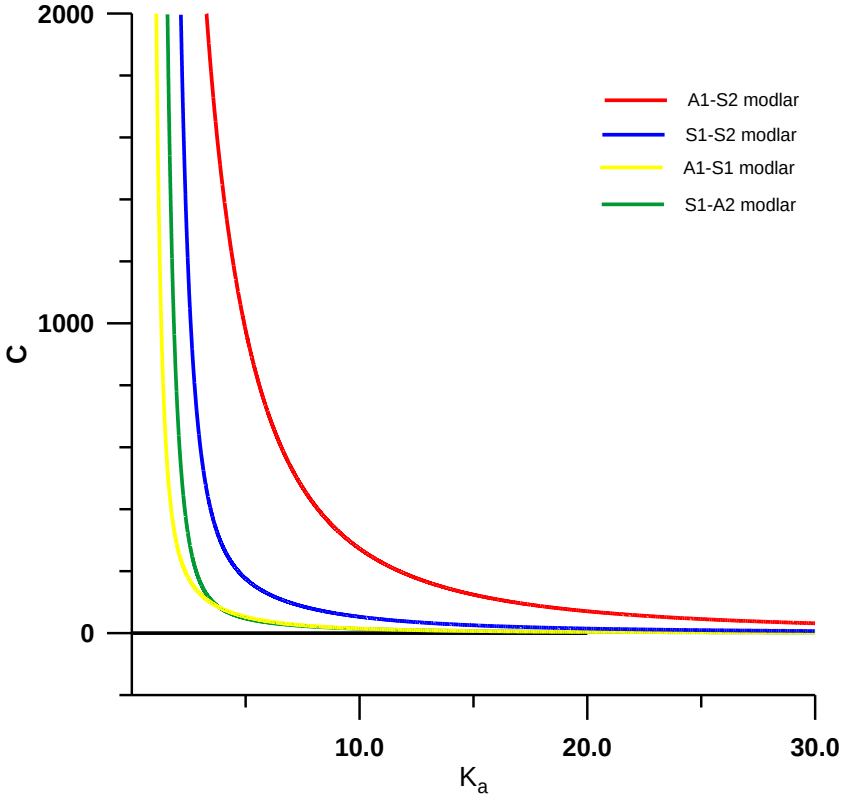
Şekil 3.2: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için A teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



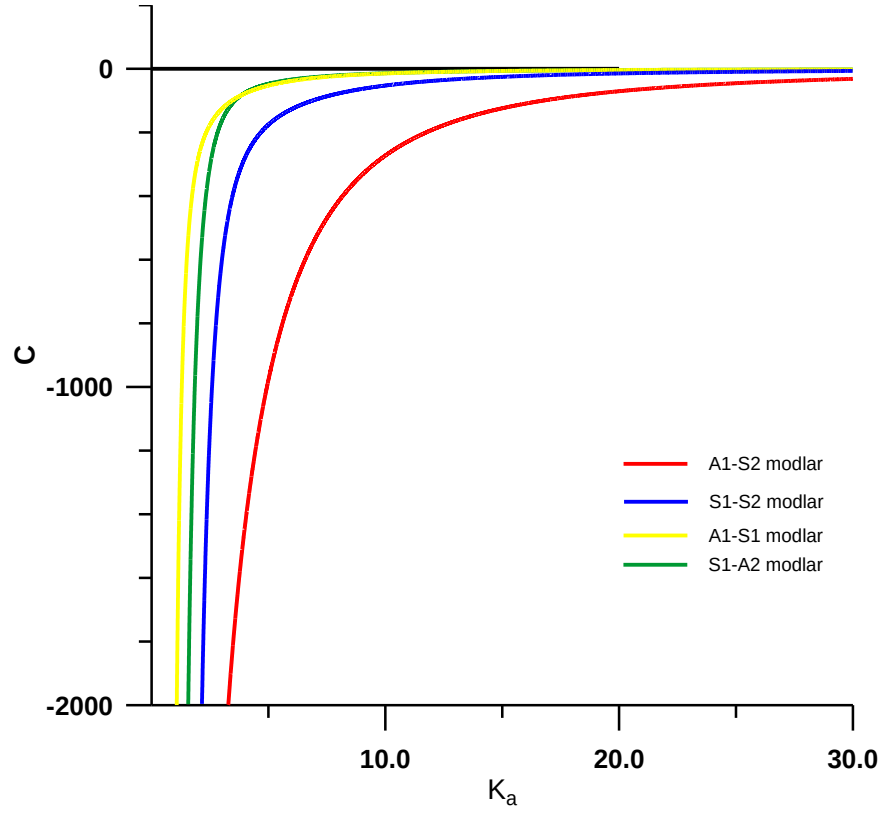
Şekil 3.3: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, $\delta\zeta<0$ seçimine karşılık B teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



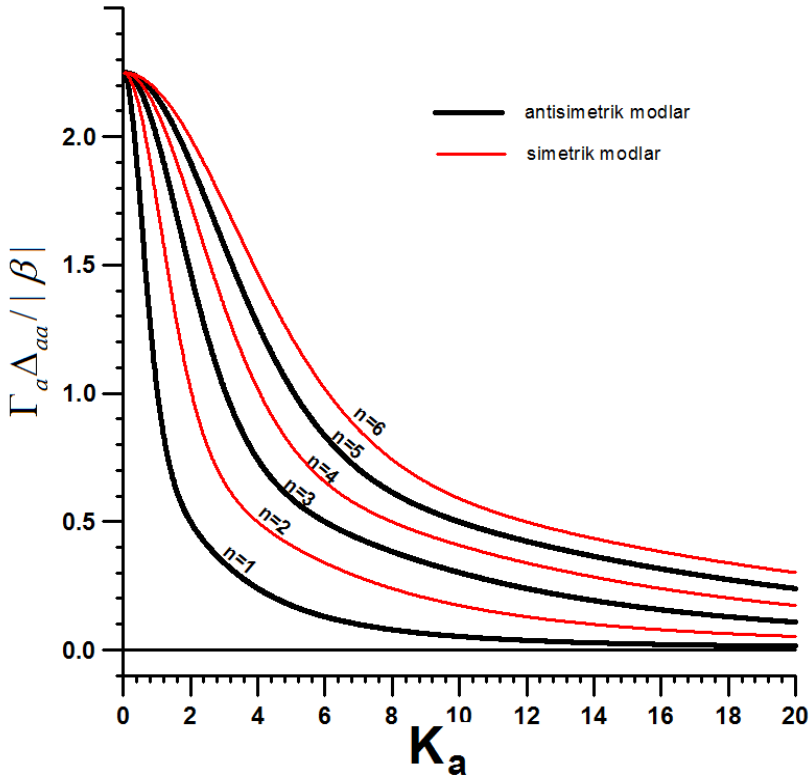
Şekil 3.4: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, $\delta\zeta>0$ seçimine karşılık B teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



Şekil 3.5: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, $\delta\zeta<0$ seçimine karşılık C teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



Şekil 3.6: Etkileşime giren SH dalgalar için seçilen dört farklı durum için, $\delta\zeta>0$ seçimine karşılık C teriminin boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.



Şekil 3.7: (3.80) denklemi ile verilen NLS denkleminin katsayılarının çarpımının (3.13) ile verilen dispersiyon bağıntısının ilk altı dalı için boyutsuz dalga sayısı K_a 'ya göre değişimi.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı hiperelastik sıkıştırılamaz izotrop malzemeden oluşan bir tabakada aynı yönde ilerleyen nonlineer SH dalgalarının etkileşimleri incelenmiştir. İncelemede dalgaların sonlu fakat küçük genlikli oldukları varsayılmıştır.

SH dalgalarının faz hızı c, c_T ise tabakada yayılan lineer dalgaların faz hızını göstermek üzere, tabakada bu tip dalgaların yayılabilmesi için $c_T<c$ eşitsizliği gerçeklenmelidir. Tabakada aynı yönde yayılan nonlineer SH dalgalarının etkileşimlerini betimleyen sınır değer probleminin asimptotik çözümü, c faz hızının yukarıda verilen eşitsizliği sağladığı varsayımı altında, değişik ölçekler yöntemi kullanılarak incelenmiştir. İncelemenin sonunda nonlineer SH dalgalarının etkileşimlerinin asimptotik olarak bir denklem sistemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Grup hızları aynı olan iki dalganın etkileşimi incelendiğinde bu sistem bir KNLS denklemine indirgenmektedir.

KNLS denkleminin katsayıları da, NLS denkleminde olduğu gibi ortamı oluşturan malzemenin lineer ve nonlineer özelliklerine ve dalga sayısına bağlıdır. KNLS denkleminin periyodik çözümleri için lineer kararlılık (stability) analizi yapılmıştır. Kararsızlık halinde KNLS denkleminin solitary zarf çözümlerinin varolabileceği ve bunun için de gerekli koşulların KNLS denkleminde yeralan lineer ve nonlineer katsayılara bağlı olduğu elde edilmiştir. Bu amaçla, KNLS denkleminin solitary zarf çözümlerinin varlığı ve ortamı oluşturan malzemenin dalga etkileşimine etkisini gözlemlemek için sayısal analiz yapılmıştır. Bu analiz neticesinde, tabakada yayılan nonlineer SH dalgalarının modülasyonunda elde edilen NLS denkleminin aksine böyle bir ortamda dalga etkileşimini karakterize eden KNLS denkleminin seçilen tüm nonlineer malzeme parametresine karşılık solitary dalga çözümlerinin oluşmadığı gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Love A.E.H**. (1944). Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition, Dover Publications Inc.

[2] **Miklowitz J.** (1978). The Theory of Elastic Waves and Waveguides, NorthHolland Publishing Co.

[3] **Graff, K.F.** (1975). Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, Oxford

[4] **Achenbach, J.D.** (1973). Wave Propagation in Elastic Solids, NortHolland Publishing Co., Amsterdam

[5] **Eringen, A.C.,** (1967). Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, Inc., New York

[6] **Ewing, W.M., Jardesky, W.S. and Press F.** (1957). Elastic Waves in Layered Media, Mc Graw-Hill, New York

[7]**Eringen, A.C., and Şuhubi, E.S.** (1975). Elostodynamics, Vol.**2**, Linear Theory, Academics Press, NewYork

[8] **Love, A.E.H.** (1911). Some Problems of Geodynamics, Cambridge Univ. Press, London

[9] **White, R.M.** (1981). in Methods of Experimental Physics, Vol.**19**, Chapter 10, Academic Press, New York

[10] **Gao, H.D. and Rose, J.L.**, 2009. Ice Detection and Classification on an Aircraft Wing with Ultrasonic Shear Horizontal Guided Waves, , IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics,and Frequency Control, **56**, no. 2, 334-344.

[11] **Josse, F., Bender, F. ve Cernosek, R. W.** 2001. Guided shear horizontal surface acoustic wave sensors for chemical and biochemical detection in liquids, Analytical Chemistry, **73**, no. 24, 5937–5944.

[12] **Kalyanasundaram, N.** (1981). Nonlinear Surface Acoustic Waves on an Isotropic Solid, Int. J. Engng. Sci. Vol.**19**, 287.

[13] **Bataille, K. ve Lund, F.** (1982). Nonlinear Waves in Elastic Media, Physica, Vol. **6**, 95.

[14] **Soerensen, M.P., Chrıstıansen, P.L. ve Lamdahl, P.S.** (1984). J. Acoust.Soc. Am., 76, 871.

[15] **Clarkson, P.A., Le Veque, R.J. ve Saxton, R.** (1986). Stud. Appl. Maths., 75, 95.

[16] **Teymur, M.** (1988). Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half-space, Int. J. Engng. Sci., **26**, 907.

[17] **Teymur, M.** (1988). In Recent Development in Surface Acoustic Waves (Ed. by Parker D.F. And Maugın G.A.), pp.54-61, Springer, Berlin.

[18] **Teymur, M.** (1989). Nonlinear modulation and the fifth -harmonic resonance of Love waves on a neo-Hookean layered half-space in Nonlinear Wave Motion (Ed. by Jeffrey A.), pp.205-228, Wiley, New York.

[19] **Maugin, G.A. and Hadouaj H.** (1991). Solitary Surface Transverse-Waves on an Elastic Substrate Coated with a Thin Film, Phy. Rev. Vol.**44**, 3, 1266.

[20] **Teymur M.** (1993). Interactions of nonlinear surface elastic waves, 8. National Congress of Mechanics-Contributed papers, pp.587-596.

[21] **Teymur M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two layered incompressible elastic medium, Int. J. Engng. Sci. **34**, 227.

[22] **Teymur M.** (2002). Nonlinear interaction of two co-directional surface SH waves in a layered elastic Half-Space, Nonlinear Acoustics at the Begining of the 21st Century, vol.**1**, pp. 69-72.

[23**] Ahmetolan, S. and Teymur, M.** (2003). Nonlinear modulation of SH Waves in a two layered plate and formation of surface SH waves, Int. J. Non-Linear Mechs., 38, 1237-1250.

[24] **Var, H. İ.** (1997). Tabakalı bir hiperelastik yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının etkileşimleri, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

[25] **Ahmetolan, S. and Teymur, M.** (2007). Nonlinear Modulation of SH Waves in an Incompressible Hyperelastic plate. *ZAMP*, 58(3), 457-474.

[26]**Ablowitz, M.J. ve Segur, H.** (1981). Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia.

[27] **Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. ve Morris H.C.** (1982). Solitons and Nonlinear Waves, Academic Press, London.

[28] **Drazin, P.G. ve Johnson, R.S**. (1989). Solitons: an Introduction. Cambridge University Press, Cambridge.

[29] **Remoissenet, M.** (1999). Waves called solitons: Concepts and experiments, Springer-Verlag, Berlin.

[30] **Roskes, G.J.** (1976). Some Nonlinear Multiphase Interactions. Stud. Appl. Math., 55, 231-238.

[31] **Porubov, A.V. ve Parker, D.F.** (1999). Some General Periodic Solutions to Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. Wave Motion, 29, 97-109.

[32] **Tan, B. ve Boyd, J.P.** (2001). Stability and Long Time Evolution of the Periodic Solutions to the Two Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. Chaos, Solitons&Fractals, 12, 721-734.

[33] **Liu, P., Li, Z. ve Lou, S.** (2010). A Class of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations: Painleve Property, Exact Solutions, and Application to Atmospheric Gravity Waves, Appl. Math. Mech., 31, 1383-1404.

[34] **Radhakrishan, R. ve Lakshmanan, M.** (1995). Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations, J.Phys. A: Math. Gen. **28**, 2683-2692.

[35] **Jeffrey, A. ve Kawahara, T**. (1982). Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, Boston.

[36] **Ahmetolan, S.** (1996). İki Tabakalı Elastik Ortamlarda Nonlineer Dalga Modülasyonu yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.

EKLER

Ek. A.1: Genelleştirilmiş Kayma Hareketi

Bu bölümde [35]' de yer alan genelleştirilmiş kayma hareketi üzerine bilgiler verilmektedir. üç boyutlu uzayda bir noktanın,aynı dik Kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterilmek üzere

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t)\delta_{k3} \qquad \textbf{(A.1)}$$

denklemi ile belirtilen bir şekil değiştirme genelleştirilmiş kayma hareketi olarak adlandırılır. **(A.1)** denkleminde u_3 bir parçacığın X_3 ekseni doğrultusundaki yer değiştirme fonksiyonunu, t zamanı, δ_{kK} da Kronecker sembolünü göstermektedir. Latin indislerin (1,2,3), Yunan indislerinin ise (1,2) değerlerini alacaklarını ve **(A.2)'** de ve bu bölümde bundan sonra tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yazılacağını kabul ediyoruz.

(A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları

$$[x_{k,K}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad [X_{K,k}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(A.2)}$$

olarak bulunur. **(A.2)'** de virgülden sonraki bir alt indis bunun belirttiği Kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. Dikkat edilirse,

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \qquad \textbf{(A.3)}$$

dir. Dolayısı ile **(A.1)** ile belirtilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirmedir, yani bu hareket esnasında hacim değişim olmaz. Buna bağlı olarak böyle bir hareketin meydana geldiği ortamın yoğunluğu, ρ , değişmez.;yani

$$\rho = \rho_0 = sabit \qquad \textbf{(A.4)}$$

dir.

Şimdi ortamın sıkışmaz homojen izotrop hiperelastik bir cisim olduğunu ve şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun, Finger şekil değiştirme tansörü

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K} \qquad \textbf{(A.5)}$$

'nin yalnızca birinci invaryantı

$$I = trc^{-1} = 3 + K^2 \quad , \quad K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \qquad \textbf{(A.6)}$$

'nın fonksiyonu olduğunu kabul edelim, yani

$$\Sigma = \Sigma(I) \qquad \textbf{(A.7)}$$

olsun. Böyle malzemelere genelleştirilmiş neo-Hookean malzemeler denir, ve bunlar için gerilme bünye denklemleri, t_{kl} Cauchy gerilme tansörünü göstermek üzere,

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \qquad \textbf{(A.8)}$$

olarak ifade edilirler [21]. **(A.8)'** de $p = p(X_K, t)$ hidrostatik basınç fonksiyonudur ve harekete bağlı olarak hesaplanır. Φ ise

$$\Phi = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \qquad \textbf{(A.9)}$$

olarak tanımlanır.

(A.1) için c_{kl}^{-1} tansörünün bileşenleri **(A.2)'** de kullanılarak

$$c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 1 & u_{3,2} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+K^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(A.10)}$$

olarak bulunurlar. Bu sonuçlar **(A.8)'** de yerleştirilirse gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$t_{11} = -p + \Phi \quad , \quad t_{12} = t_{21} = 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = t_{3\alpha} = \Phi u_{3,\alpha}$$

$$t_{33} = -p + (1 + K^2)\Phi \quad , \quad t_{22} = -p + \Phi \qquad \textbf{(A.11)}$$

Eğer,

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{22}^2} \qquad \textbf{(A.12)}$$

bağıntısı ile bir kayma gerilmesi tanımlanırsa **(A.11)**' den

$$\tau = \Phi K \qquad \textbf{(A.13)}$$

yazılır. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için, K' nın katsayısı olan Φ ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak adlandırılabilir. Bu modülü

$$\hat{\mu} = \Phi \qquad \textbf{(A.14)}$$

ile gösterelim. **(A.6)** kullanılırsa

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{d\Sigma}{dK} \qquad \textbf{(A.15)}$$

ve

$$\tau = \hat{\mu}K = \frac{d\Sigma}{dK} \qquad \textbf{(A.16)}$$

yazılabilir. Bütün K' lar için

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{d\Sigma}{dK} > 0 \qquad \textbf{(A.17)}$$

olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca, μ klasik Lame sabiti olmak üzere

$$\hat{\mu}(0) = \mu \qquad \textbf{(A.18)}$$

dir.

Eğer bütün K' lar için

$$\frac{d\mu}{dK} < 0 \qquad \textbf{(A.19)}$$

ise ortam kaymada uniform (düzgün) olarak yumuşama (softening in shear), fakat eğer bütün K' lar için

$$\frac{d\mu}{dK} > 0 \qquad \textbf{(A.20)}$$

ise kaymada uniform olarak sertleşen (hardening in shear) davranışı gösterir. **(A.16)** türetilerek,

$$K^2 \frac{d\hat{\mu}}{dK} = K\frac{d\tau}{dK} - \tau \qquad \textbf{(A.21)}$$

yazılabileceği için yumuşayan malzemeler için

$$K\frac{d\tau}{dK} < \tau \qquad \textbf{(A.22)}$$

sertleşen malzemeler için ise

$$K\frac{d\tau}{dK} > \tau \qquad \textbf{(A.23)}$$

olacağı ortaya çıkar.

Şimdi p basınç fonksiyonunun genel olarak X_1 ve X_2 'nin yanında X_3 ‘ün de fonksiyonu olacağını dikkate alarak, **(A.1)** ile tanımlanan hareketin denklemlerini, hareketi etkileyen kütle kuvvetleri bulunmadığında, referans konumunda

$$t_{11,1} - u_{3,1}t_{11,3} = 0 \qquad t_{22,2} - u_{3,2}t_{22,3} = 0$$

$$t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} = \rho_0 \ddot{u}_3 \qquad \textbf{(A.24)}$$

olarak yazabiliriz [21]. **(A.24)**’ de u_3 ‘ün üzerindeki noktalar zamana göre kısmi türevleri göstermektedir. **(A.11)** kullanılarak bu denklemler bazı ara işlemlerden sonra

$$(-p+\Phi)_{,1} + u_{3,1}p_{,3} = 0$$

$$(-p+\Phi)_{,2} + u_{3,2}p_{,3} = 0 \qquad \textbf{(A.25)}$$

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} - \rho_0 \ddot{u}_3 = p_{,3}$$

formlarına indirgenirler. **(A.25)’** deki son denklemden

$$p_{,3} = \kappa_0(X_1, X_2, t) \qquad \textbf{(A.26)}$$

olduğu görülür. Bu denklem integre edilirse,

$$p = \kappa_0(X_1, X_2, t)X_3 + \kappa_1(X_1, X_2, t) \qquad \textbf{(A.27)}$$

elde edilir. Burada κ_0 ve κ_1 keyfi fonksiyonlardır. **(A.27)**, **(A.25)'** deki ilk iki denklemde kullanılırsa

$$\kappa_{0,1} = 0 \ , \ \kappa_{0,2} = 0 \qquad \textbf{(A.28)}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Buradan da f keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\kappa_0 = f(t) \qquad \textbf{(A.29)}$$

olarak bulunur. Bu sonuç dikkate alınırsa **(A.25)'** deki ilk iki denklem

$$-\kappa_{1,1} + u_{3,1} f(t) + \Phi_{,1} = 0 \quad , \quad -\kappa_{1,2} + u_{3,2} f(t) + \Phi_{,2} = 0 \qquad \textbf{(A.30)}$$

formlarına dönüşürler. Bu son denklemler integre edilerek, g keyfi bir fonksiyon olmak üzere κ_1 ,

$$\kappa_1 = \Phi + u_3 f(t) - g(t) \qquad \textbf{(A.31)}$$

olarak elde edilir, ve p için

$$p = f(t)X_3 + \Phi + u_3 f(t) - g(t) \qquad \textbf{(A.32)}$$

yazılır. **(A.32)** kullanılarak **(A.11)'** de verilen gerilme bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilirler;

$$t_{11} = t_{22} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) \quad , \quad t_{12} = t_{21} = 0$$

$$t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \quad , \quad t_{33} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) + K^2\Phi \qquad \textbf{(A.33)}$$

Dikkat edilirse, $|X_3| \to \infty$ için t_{11}, t_{22}, t_{33} gerilmeleri sonsuza gider. Diğer taraftan bu limitle fiziksel nedenle gerilmelerin sınırlı kalmaları gerekir. Bunun sağlanması için

$$f(t) \equiv 0 \qquad \textbf{(A.34)}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Diğer taraftan ortamın doğal durumunu gerilmesiz kabul edersek, bunun sağlanması için

$$g(t) \equiv 0 \qquad \textbf{(A.35)}$$

olması gerekir. Sonuçta bu varsayım altında

$$p = \Phi \qquad \textbf{(A.36)}$$

ve

$$t_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \qquad t_{33} = K^2 \Phi \qquad \textbf{(A.37)}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse bu durumda **(A.24)'** deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} = \rho_0 \ddot{u}_3 \qquad \textbf{(A.38)}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu denklemin hiperbolik bir denklem olması koşulunun Σ üzerinde getireceği kısıtlamayı ortaya çıkartmaya çalışalım. $\rho_0 > 0$ olduğu için, **(A.38)** denklemin sol tarafının bu bölgede eliptik bir operatör olması gereklidir. Bunun için de

$$(\frac{1}{K}\frac{d\Phi}{dK}u_{3,1}^2 + \Phi)(\frac{1}{K}\frac{d\Phi}{dK}u_{3,2}^2 + \Phi) - (\frac{1}{K}\frac{d\Phi}{dK})^2 u_{3,1}^2 u_{3,2}^2 > 0 \qquad \textbf{(A.39)}$$

olması gereklidir. Buradan da **(A.16)** ve **(A.21)** kullanılarak

$$\Phi(K\frac{d\Phi}{dK} + \Phi) = \Phi\frac{d\tau}{dK} > 0 \qquad \textbf{(A.40)}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Daha önce $\Phi = \hat{\mu} > 0$ olduğu kabul edildiği için, **(A.40)** eşitsizliğinin gerçekleşmesi için

$$K\frac{d\Phi}{dK} + \Phi = \frac{d\tau}{dK} > 0 \qquad \textbf{(A.41)}$$

olması gerektiği görülür. **(A.16)** kullanılırsa **(A.41)** eşitsizliği

$$\frac{d^2\Sigma}{dK^2} > 0 \qquad \textbf{(A.42)}$$

olarak yazılabilir.

Biz bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli bir dalga yayılması probleminin asimptotik çözümü ile ilgilendiğimiz için gerilme – şekil değiştirme bağıntılarının , **(A.37)** ve hareket denkleminin, **(A.38)**, yaklaşık formlarını kullanacağız. Bu yaklaşık denklemleri türetmek amacı ile Σ ' nın I ' nın analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek, bu fonksiyonu I -3' ün kuvvetleri cinsinden aşağıdaki gibi bir seri formunda yazabiliriz.

$$\Sigma(I) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (I-3)^p \qquad \textbf{(A.43)}$$

Burada α_p sabitleri

$$\alpha_p = \frac{d^{\nu}\Sigma}{dI^{p}}(3) \qquad \textbf{(A.44)}$$

olarak tanımlanmaktadırlar ve referans konumunda enerjinin sıfır olması için

$$\alpha_0 = 0 \qquad \textbf{(A.45)}$$

olması gerekir.bu dikkate alınarak **(A.43)'** den

$$\frac{d\Sigma}{dI} = \alpha_1 + 2\alpha_2 K^2 + O(K^4) \qquad \textbf{(A.46)}$$

yazılır ve **(A.46)** kullanılarak gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta} = 0 \qquad t_{\alpha 3} = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 K^2)u_{3,\alpha} + \mathrm{O}(K^5) \qquad \textbf{(A.47)}$$

$$t_{3,3} = 2\alpha_1 K^2 + \mathrm{O}(K^4)$$

olarak bulunur. **(A.46)'** dan **(A.38)** hareket denklemi de

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} = n\mathrm{N}(u_3) + \mathrm{O}(K^5) \qquad \textbf{(A.48)}$$

olarak yaklaştırılır. Burada

$$c^2 = \mu/\rho_0 \quad , \quad \mu = 2\alpha_1 \quad , \quad n = 4\alpha_2/\rho_0 \qquad \textbf{(A.49)}$$

ve

$$\mathrm{N}(u_3) = (u_{3,1}Q(u_3))_{,1} + (u_{3,2}Q(u_3))_{,2} \qquad \textbf{(A.50)}$$

$$Q(u_3) = K^2 = u_{3,\Delta}u_{3,\Delta} \qquad \textbf{(A.51)}$$

olarak tanımlanmaktadır ve c lineer dalgaların yayılma hızını göstermektedir.

Bu yaklaşımda (yani mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edildiğinde) **(A.14)** ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma modülü

$$\hat{\mu} = \rho_0(c^2 + nK^2) \qquad \textbf{(A.52)}$$

dir. Dikkat edilirse $c^2 > 0$ olduğu için eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\hat{\mu}$ monoton olarak artacak, fakat $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Dolayısı ile eğer $n > 0$ ise

ortam kayma hareketinde sertleşen bir davranış, fakat $n<0$ ise yumuşayan bir davranış gösterecektir. $\hat{\mu}(K)>0$ kabul edildiği için, bütün K ' lar için

$$c^2+nK^2>0 \qquad \textbf{(A.53)}$$

olmalıdır. Diğer taraftan, **(A.48)** denkleminin hiperbolik olması için de **(A.41)** veya **(A.42)**' den bütün K ' lar için

$$c^2+3nK^2>0 \qquad \textbf{(A.54)}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği görülür. $n>0$ olduğunda **(A.53)** ve **(A.54)** eşitsizlikleri bütün K ' lar için sağlanır. Fakat $n<0$ olduğunda bu eşitsizliklerin her ikisinin birden sağlanabilmesi için

$$0<K^2<\frac{c^2}{3|n|} \qquad \textbf{(A.55)}$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için **(A.55)** dalga hareketinin genliğine bir kısıtlama getirir. Biz sonlu fakat küçük genlikli dalga hareketleri ile ilgilendiğimiz için bunun sağlandığını kabul edebiliriz.

Ek.A.2: Elastik Bir Tabakada Sh Dalgaları

Tabakaların sıkıştırılamaz hiperelastik malzemeden oluştuğunu ve tabakanın iç enerji fonksiyonunu

$$\Sigma=\Sigma(I) \qquad \textbf{(A.56)}$$

yapısında olduklarını varsayalım. Ayrıca (X_1,X_2,X_3) maddesel koordinatlarını (X,Y,Z) olarak yazalım. Bu durumda probleme ait hareket denklemi **(A.38)'** den

$$\frac{\partial}{\partial X}(\Phi\frac{\partial u}{\partial X})+\frac{\partial}{\partial Y}(\Phi\frac{\partial u}{\partial Y})=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \textbf{(A.57)}$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda da belirtildiği gibi $Y=0$ ' da yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu ve ayrıca $Y=\pm h$ serbest yüzeylerinde de gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilmişti. Bunlar dikkate alınarak ve **(A.37)**' de kullanılarak aşağıdaki sınır koşulları elde edilebilir [21].

$$Y = \pm h \quad \text{de} \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \tag{A.58}$$

Sonlu fakat küçük genlikli dalgalar için daha önceden yapıldığı gibi mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edilerek **(A.57)-(A.58)** denklemleri ve sınır koşulları aşağıda olduğu gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_T^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_T^2\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right\} \tag{A.59}$$

$$Y = \pm h \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \tag{A.60}$$

Aşağıda verilen c_T, n_T sabitler,şu şekilde tanımlıdırlar:

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad , \quad n_T\rho = 2d^2\sum(3)/dI^2 \quad , \quad \mu = 2d\sum(3)/dI \tag{A.61}$$

ve daha önceden **(A.51)**' de tanımlandığı gibi

$$Q(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 \tag{A.62}$$

dir. Burada c_T, P ortamında yayılan lineer dalgaların yayılma hızlarını göstermektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ayşe Esra Akman

Doğum Yeri ve Tarihi: Ankara 23.12.1987

E-Posta: esraakman @yahoo.com

Lisans: İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölümü ve İşletme Bölümü (Çift Anadal Programı)

Mesleki Deneyim ve Ödüller: İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölüm İkinciliği

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Akman E., ve Ahmetolan S. 2011: Elastik Bir Tabakada Nonlinear SH Dalgalarının Etkileşimi. XVII. Ulusal Mekanik Kongresi, 5-9 Eylül 2011, Elazığ. (Basımda)