KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Halis AYGÜN

KOCAELİ, 2011

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Ekim 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 10 Kasım 2011

Tez Danışmanı
Prof.Dr. Halis AYGÜN
(.....)

Üye
Doç.Dr. Ahmet KÜÇÜK
(.....)

Üye
Yrd.Doç.Dr. Ali DEMİR
(.....)

Üye
Prof.Dr. Refik KESKİN
(.....)

Üye
Prof.Dr. İsmet YILDIZ
(.....)

KOCAELİ, 2011

ÖNSÖZ

Çevresel problemleri, ekonomi ve mühendislik problemlerini çözmek için, çeşitli belirsizliklerden dolayı, klasik metotlar genel olarak kullanılamaz. Bu belirsizlikleri giderebilmek için geliştirilmiş üç yöntem mevcuttur: olasılık teorisi, bulanık kümeler ve aralık (interval) matematiği. Fakat tüm bu yöntemlerin kendine özgün zorlukları vardır.

Olasılık teorisi yalnızca stokastik olarak dengede olan problemlerde kullanılabilir. Ayrıca bu problemlerde çok fazla deney sonucunda belli bir çözüme ulaşılabilir. Bu yöntem mühendislikte kullanılabilmesine karşın ekonomik, çevresel ve sosyal olaylarda kullanılabilmesi mümkün değildir.

Aralık matematiği, bir problemin çözümündeki hataların hesaba katılarak problemin gerçek çözümünün tahmini için oluşturulan aralıkların kullanılması metodudur. Bu yöntem pek çok durumda kullanışlıdır. Fakat aralık matematiği yöntemi farklı belirsizlikler içeren problemlere tam verimli olacak şekilde uygulanabilmesi mümkün değildir. Bu yöntem, bir bilginin pürüzsüz değişimini, güvenilmez, yetersiz ve kusurlu bilginin ve kısmen çelişkili vb. durumları modellemede yetersiz kalır.

Belirsizlikle ilgili problemlerde şimdiye kadar en kullanışlı yöntem Zadeh (1965) tarafından geliştirilen bulanık kümeler teorisidir. Bir bulanık küme, klasik bir kümedeki her elemanı $[0,1]$ aralığında bir sayıya götüren bir dönüşüm olarak ele alınır. Bu değer bu elemanın kümeye ait olma derecesini gösterir. Bu dönüşüme üyelik fonksiyonu da denir. Diğer yöntemlerde olduğu gibi bulanık kümeler teorisinin de bir zorluğu vardır: Bulanık küme işlemlerinde farklı tanımlar vardır. Örneğin birkaç kesişim işlemi olduğu gibi farklı tanımlanmış birleşim işlemleri de mevcuttur. Tek bir tanım olmadığı için kişisel olarak farklı çözümler ortaya çıkacaktır. Ayrıca bir üyelik fonksiyonunun değeri tek yönlü olduğundan bir elemanın kümeye ait olma derecesi her kişiye göre farklı yorumlanabilir.

Tüm bu sorunların ortaya çıkmasının nedeni ise muhtemel olarak parametre değerinin mevcut teorilerdeki eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple, yukarıdaki zorluklardan tamamen bağımsız olan ve ayrıca belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tam anlamıyla yeni bir yaklaşım olan "esnek küme" teorisi Molodtsov (1999) tarafından geliştirilmiştir.

Esnek kümeler teorisinin diğer alanlara ve gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere uygulamaları günümüzde büyük bir ivme kazanmıştır. Molodtsov (1999) ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Molodtsov ayrıca esnek küme teorisinin bahsedilen olumsuzluklardan bağımsız olduğunu göstermiştir. Maji ve diğ. (2002) esnek kümelerin, karar verme problemlerine (decision making problem) en iyi nesne seçimi için parametre düşürme yöntemini temel alan bir yöntemle, ilk uygulamasını vermiştir. Daha sonra Chen (2005) kaba kümelerle (rough sets) karşılaştırılmasını kullanarak parametre

düşürme yöntemine yeni bir yaklaşım vermiştir. Pei ve Miao (2005) esnek kümelerin bilgi sistemlerinin (information systems) özel bir sınıfı olduğunu göstermiştir. Kong ve diğ. (2008) normal parametre düşürme yöntemini tanımlamıştır. Bu yöntem esnek kümeye bir parametre ekleyerek problemdeki ikincil en iyi seçimlere ulaşmayı hedeflemiştir.

Esnek kümelerin cebirsel yapılara ilk uygulaması esnek grupları içeren çalışmalarıyla Aktaş ve Çağman (2007) tarafından verilmiştir. Daha sonra Jun (2008) esnek BCK/BCI- cebirlerini ve ideal teoriye uygulamalarını incelemiş, Feng ve diğ. (2008) esnek yarı-gruplar, esnek idealler ve idealistik esnek yarı-grupları çalışmışlardır. Ali ve diğ. (2009) ve Shabir ve Ali (2009) bir yarı-grup üzerinde esnek yarı-grup ve esnek ideal yapılarını çalışmışlardır. Daha sonra Shabir ve Naz (2011) esnek kümelerin topolojik yapılarını ve bu uzaylardaki ayırma akisyomlarını çalıştılar.

Maji ve diğ. (2001) esnek kümeler ve bulanık kümeler tanımlarından yola çıkarak daha genel bir kavram olan bulanık esnek kümeleri tanımlamıştır. Bu yeni kavram ise esnek kümelerin bulanıklaştırılmış bir hali olarak düşünülebilir. Daha sonra Yang ve diğ. (2007) esnek kümenin bulanıklık kavramını geliştirmişlerdir. Bulanık esnek kümelerin ilk cebirsel uygulaması Aygünoğlu ve Aygün (2009) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada bulanık esnek gruplar temel özellikleri ve bulanık esnek grupların homomorfik görüntü ve ters görüntüleri incelenmiştir. Ahmad ve Kharal (2009a,2009b) çalışmalarıyla bulanık esnek kümeleri ve bir bulanık esnek kümenin bulanık esnek dönüşüm altındaki görüntü ve ters görüntüsünün temel özelliklerini detaylı bir şekilde incelemişlerdir. Daha sonra Tanay ve Kandemir (2011) bulanık esnek kümelerin topolojik yapılarını çalışmışlardır. Bu çalışmada bulanık esnek topolojik uzaylar Chang anlamında (1968) tanımlanmış ve alt uzaylar incelenmiştir.

Özet olarak bu tezin içeriği esnek topolojik uzaylar ve bulanık esnek topolojik uzaylardaki süreklilik ve kompaktlık gibi temel özellikleri ile taban, alttaban, başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi gibi yapıların detaylı olarak incelenmesidir.

Bu tezin konu seçiminde ve çalışmaların yürütülmesi sürecinde yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN' e yoğun çalışmaları arasında bana göstermiş olduğu ilgi, sabır ve desteğinden dolayı teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca tez çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen meslektaşlarım Sayın Arş. Gör. Vildan ÇETKİN' e, Sayın Arş. Gör. Banu PAZAR' a, desteklerini esirgemeyen aileme ve doktora çalışmalarım sırasında beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ iv
İÇİNDEKİLER iiiv
ŞEKİLLER DİZİNİ iv
SİMGELER v
ÖZET vii
İNGİLİZCE ÖZET viii
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Latis Teoride Temel Kavramlar 1
1.2. Kategoriler ve Funktorlar 6
1.3. L-Bulanık Kümeler 13
1.4. L- Bulanık Topolojik Uzaylar 17
2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 22
2.1. Esnek Kümeler 22
2.2. Genişletilmiş Esnek Kümeler 25
2.3. Esnek Topolojik Uzaylar 30
2.4. Esnek Topolojik Uzaylarda Kompaktlık 35
3. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 37
3.1. Bulanık Esnek Kümeler 37
3.2. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar 41
4. L-BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 48
4.1. L-Bulanık Esnek Kümeler 48
4.2. L-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar 51
4.3. L-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Kompaktlık 53
4.4. Kompaktlığın Farklı Karakterizasyonları 56
5. LOWEN ANLAMINDA BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR 61
5.1. Lowen Anlamında Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar 61
5.2. $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{I}$ Funktorları 66
6. SONUÇLAR 70
KAYNAKLAR 71
KİŞİSEL YAYIN ve ESERLER 71
ÖZGEÇMİŞ 75

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1: Dağılımlı latis 2
Şekil 1.2: (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis 3
Şekil 3.1: f_A bulanık esnek kümesi 37

SİMGELER

$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\subseteq$	: Alt küme
$\cap$ $(\cup)$	: Arakesit (Birleşim)
$\in$	: Eleman
$\lhd$	: Üçgensel altında
$X, Y, \ldots$	: Klasik kümeler
$f, g, \ldots$	: Bulanık kümeler
$\underline{\alpha}$	: α değerli sabit bulanık küme
χ_A	: A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
I	: [0,1] kapalı aralığı
L	: Latis (kafes, örgü)
$F(X)$	: Bulanık kümeler ailesi
$L(X)$	: L-Bulanık kümeler ailesi
$\vee$ $(\wedge)$	: Supremum (İnfimum)
$\varphi, \psi, \ldots$	: Fonksiyonlar
0_L (1_L)	: L latisinin en küçük (en büyük) elemanı
$'$	: Sırayı tersine koruyan üst alma operatörü
M_0	: $M - \{0\}$
$M(L)$	: L' nin 0 dan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi
$P(L)$	: L' nin 1 den farklı asal elemanlarının kümesi
$\mathcal{P}(X)$	: X' in güç kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak
Γ, Λ, Δ	: İndis kümesi
$\mathbb{K}, \mathbb{L}, \ldots$	: Kategoriler
$Ob\mathbb{K}$	: $\mathbb{K}$ kategorisinin objelerinin sınıfı
$Mor(X, Y)$	: X' den Y' ye tanımlı morfizmler kümesi
$\circ$	: Bileşke işlemi
$\mathbb{K}^o$	: $\mathbb{K}$' nın dual kategorisi
F, G	: Funktorlar
x_α, x_t	: Bulanık nokta
$M(L(X))$	: Bulanık noktaların kümesi
$\varphi(f)$	: f bulanık kümesinin φ altındaki görüntüsü
$\varphi^{-1}(f)$	: f bulanık kümesinin φ altındaki ters görüntüsü
τ, τ'	: Bulanık topoloji, bulanık kotopoloji
$(F, A), (G, B), \ldots$	: Esnek kümeler
$F_A, G_B, \ldots$	: Genişletilmiş esnek kümeler
Φ	: Boş esnek küme
$\tilde{E}$	: Evrensel esnek küme
$\tilde{A}$	: Yerel evrensel esnek küme
$S(X, E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi

$F_A^{x_0}, G_B^{y_0}, \ldots$	: Esnek noktalar
$P(X,E)$	: X üzerindeki tüm esnek noktaların ailesi
$\varphi_\psi, \gamma_\delta, \ldots$	: Esnek dönüşümler
$\mathcal{B}$	: Bir esnek topolojinin tabanı
$int(F_A)$	: F_A esnek kümesinin içi
$cl(F_A)$	: F_A esnek kümesinin kapanışı
$\mathcal{S}$	: Bir esnek topolojinin alttabanı
$f_A, g_B, \ldots$	: Bulanık esnek kümeler
$\tilde{E}^\lambda$	: λ-Evrensel bulanık esnek küme
$F(X,E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi
$L(X,E)$	: E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm L-bulanık esnek kümelerin ailesi
x^α, y^β	: Bulanık esnek nokta
$PF(X,E)$	: X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların ailesi
$\mathcal{U}(x^\alpha)$	: x^α bulanık esnek noktasının tüm komşuluklarının ailesi
$\mathcal{T}_E$	: Bulanık esnek topoloji
$\mathcal{B}_E$	: Bulanık esnek taban
$\mathcal{C}_E$	: Bulanık esnek kotopoloji
$(X,\mathcal{T},E)$	: Lowen anlamında bulanık esnek topoloji
$\mathfrak{W}(X)$	: X üzerindeki Lowen anlamındaki tüm bulanık esnek topolojilerin ailesi
$\mathfrak{T}(X)$	: X üzerindeki tüm klasik topolojilerin ailesi

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, L-bulanık topoloji, Esnek küme, Esnek nokta, Esnek topoloji, Esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, başlangıç esnek topolojisi, çarpım esnek topolojisi, Bulanık esnek küme, Bulanık esnek nokta, Bulanık esnek topoloji, Bulanık esnek taban, Bulanık esnek süreklilik, Bulanık esnek topolojik uzaylarda kompaktlık, Lowen anlamında bulanık esnek topoloji, başlangıç bulanık esnek topoloji, çarpım bulanık esnek topolojisi.

Özet: Bu tezin amacı esnek kümeler ve bulanık esnek kümelerin topolojik uzay yapılarını tanımlamak ve bu uzaylardaki süreklilik, taban, kompaktlık gibi temel kavramları detaylarıyla incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, latis teorideki bazı temel tanımlar ve kavramlar, temel kategorik kavramlar, bulanık kümeler ve bulanık topolojik uzaylar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle esnek küme kavramı tanıtılmış ve bu kümeleri temel alan esnek topolojik uzaylar tanımlanmıştır. Buna ek olarak, esnek topolojik uzaylarda süreklilik, taban ve kompaktlık kavramları verilerek genel topolojideki temel teoremlerden olan Alexander alttaban teoremi ve Tychonoff teoremi bu uzaylara genelleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık esnek topolojik uzay kavramı Sostak anlamında tanımlanmıştır. Taban ve süreklilik kavramları tanımlanarak detaylı olarak incelenmiş ve bulanık esnek topolojik uzaylar için başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi kavramları tanımlanarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, L-bulanık esnek topolojik uzay ve güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay kavramları verilerek kompaktlık kavramı ve kompaktlığın farklı karakterizasyonları detaylı olarak incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Lowen anlamında bulanık esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve Lowen funktorları olarak bilinen $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{I}$ funktorlarının özellikleri incelenmiştir.

SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Abdülkadir AYGÜNOĞLU

Keywords: Fuzzy set, L-fuzzy topology, Soft set, Soft point, Soft topology, Compactness in soft topology, Fuzzy soft set, Fuzzy soft point, Fuzzy soft topology, Fuzzy soft base, Fuzzy soft continuity, compactness in soft topological space, Lowen type fuzzy soft topology, initial fuzzy soft topology, product fuzzy soft topology.

Abstract: The aim of this thesis is to introduce the structures of soft topological spaces and fuzzy soft topological spaces and to investigate the fundamental notions such as continuity, base and compactness in detail.

This thesis is divided into five chapters. In the first chapter, fundamental definitions and notions in lattice theory, basic categorical notions, fuzzy sets and fuzzy topological spaces are covered.

In the second chapter, first of all the notion of soft set and the structure of soft topological space are introduced. In addition to this, the notions of continuity, base and compactness in soft topological spaces are defined and two of the important theorems, Alexander subbase theorem and Tychonoff theorem, are generalized to the soft topological spaces.

In the third section, the definition of fuzzy soft topological space in Sostak sense is given and fuzzy soft base of a fuzzy soft topology and continuity of a soft mapping are defined. Furthermore, initial and product fuzzy soft topologies are defined and their basic properties are investigated.

In the fourth chapter, L-fuzzy soft topological space and strong L-fuzzy soft topological space are defined. The definition of compactness of L-fuzzy soft topological space is given and its other characterizations are investigated in detail.

In the fifth chapter, Lowen type fuzzy soft topological space is defined and the Lowen functors $\mathcal{W}$ and $\mathcal{I}$ are constructed for the fuzzy soft topological category.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, latis teorideki bazı temel tanımlar ve kavramlar, temel kategorik kavramlar, bulanık kümeler ve bulanık topolojik uzaylar özetlenmiştir.

1.1. Latis Teoride Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere;

(a) L nin sonlu her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir üst-yarı latis (join-semilattice) denir ve üst-yarı latis $(L, \vee, 0_L)$ ile gösterilir.

(b) L nin sonlu her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir alt-yarı latis (meet-semilattice) denir ve alt-yarı latis $(L, \wedge, 1_L)$ ile gösterilir.

(c) L nin sonlu her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve bu $L = (L, \vee, \wedge 0_L, 1_L)$ ile gösterilir.

Burada, $0_L = \vee\emptyset$ ve $1_L = \wedge\emptyset$ sırasıyla L nin en küçük ve en büyük elemanını ifade etmektedir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Özel olarak, $I := [0,1]$ kapalı birim aralık ve $2 := \{0,1\}$ iki noktalı kümesi birer latisdir.

Önerme 1.1.2: $L = (L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır. (Birkhoff, 1967)

(i) $\forall\, a \in L$ için $a \vee a = a$ ve $a \wedge a = a$.

(ii) $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq a,\ \ b \leq a \vee b$.

(iii) $\forall\, a,b \in L$ için $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

(iv) $\forall\, a,b,c \in L$ için $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ve $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Önerme 1.1.3: $(L,\vee, 0_L)$ ve $(L,\wedge, 1_L)$ yarı-latisler olsunlar. Bu takdirde,

$(L,\vee,\wedge\, 0_L, 1_L)$ bir latisdir $\iff \forall\, a,b \in L$ için $a \wedge (a \vee b) = a,\ a \vee (a \wedge b) = a$ sağlanır (Johnstone, 1992).

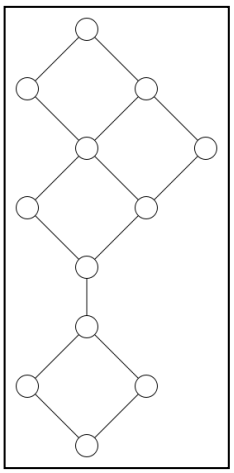
Önerme 1.1.4: L bir latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki koşullar denktir.

$\forall\, a,b,c \in L$ için,

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dir.

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ dir (Johnstone, 1992).

Tanım 1.1.5: Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan bir L latisine dağılımlı latis (Şekil 1. 1) adı verilir (Johnstone, 1992, Birkhoff, 1967).



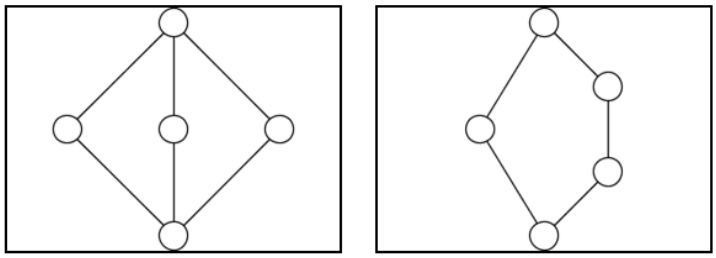
Şekil 1.1: Dağılımlı latis

Önerme 1.1.6: L bir latis olsun. Bu takdirde,

L dağılımlıdır $\Leftrightarrow \forall\, a,b,c \in L$ için $a \wedge c = b \wedge c$ ve $a \vee c = b \vee c$ ise $a = b$ sağlanır (Birkhoff, 1967).

Dağılımlı olmanın diğer bir karakterizasyonu ise aşağıdaki teorem yardımıyla yapılmaktadır.

Teorem 1.1.7: Bir L latisi dağılımlıdır ancak ve ancak bu latis içerisinde dağılımlı olmayan köşegensel (Şekil 1.2 (a)) veya beşgen (Şekil 1.2 (b)) latisden birini içermez (Terziler ve Öner, 2002).



(a) (b)

Şekil 1.2: (a) Köşegensel latis ve (b) Beşgen latis

Tanım 1.1.8: L kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde,

(i) L nin her alt kümesinin supremumu mevcut ise L ye bir tam üst-yarı latis (complete join-semilattice) denir.

(ii) L nin her alt kümesinin infimumu mevcut ise L ye bir tam alt-yarı latis (complete meet-semilattice) denir.

(iii) L nin her alt kümesinin supremum ve infimumu mevcut ise L ye bir tam latis (complete lattice) denir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.9: L sonlu infimum ve keyfi supremum işlemleri altında kapalı bir latis olmak üzere, L ye bir çatı (frame) adı verilir : $\Leftrightarrow \forall a \in L, \{b_i\}_{i\in\Gamma} \subset L$ için

$a \wedge (\bigvee_{i\in\Gamma} b_i) = \bigvee_{i\in\Gamma}(a \wedge b_i)$ sağlanır (Johnstone, 1992).

Örnek 1.1.10: X bir topolojik uzay olmak üzere, $\Omega(X) \coloneqq \{G \subset X : G$ açık$\}$ ailesi bir çatıdır.

Tanım 1.1.11: L bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L ye sonsuz dağılımlı latis adı verilir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

(i) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B}(a \wedge b)$.

(ii) $\forall\, a \in L, B \subset L$ için $a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b\in B}(a \vee b)$.

Tanım 1.1.12: L bir tam latis olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L ye tam dağılımlı tam latis (completely distributive complete lattice) adı verilir. Her $\{\{a_{i,j} \mid j \in J_i\} \mid i \in K\} \subset \mathcal{P}(L)\backslash\{\emptyset\},\ (K \neq \emptyset)$ için

(CD1) $\bigwedge_{i\in K}(\bigvee_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigwedge_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$.

(CD2) $\bigvee_{i\in K}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{i,j}) = \bigwedge_{\varphi\in\prod_{i\in K} J_i}(\bigvee_{i\in K} a_{i,\varphi(i)})$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 1.1.13: L bir latis olsun. Eğer her $x \in L$ için $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$ olacak şekilde bir x' elemanı mevcutsa x' elemanına x' in tümleyeni denir.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $' : L \to L,\ x \to x'$ dönüşümüne sırayı tersine koruyan dönüşüm denir.

(a) $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$

(b) $(a')' = a$

Tanım 1.1.14: Sırayı tersine koruyan dönüşüm ile bir tam dağılımlı tam latis bir bulanık latis olarak adlandırılır ve $L = (L, \leq, \vee, \wedge, ')$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.15: Bir $L = (L, \leq, \vee, \wedge, ')$ bulanık latis aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L' ye bir De Morgan cebri denir. Her $x, y \in L$ için

(a) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

(b) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Dikkat edilmesi gerekir ki, bir De Morgan cebrinde $x \wedge x' = 0$ veya $x \vee x' = 1$ özelliklerinin sağlanması gerekmez. Eğer bu iki özellik sağlanıyorsa L' ye bir Bool cebri denir.

Tanım 1.1.16: L bir latis ve $\alpha \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b$ eşitsizliği $\alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b$ olmasını gerektiriyorsa α ya L nin bir indirgenemez elemanı (irreducible, coprime, molecule) denir.

L nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi,

$M(L) \coloneqq \{\alpha \in L \mid \alpha \neq 0$ ve $\forall a, b \in L$ için $\alpha \leq a \vee b \implies \alpha \leq a$ veya $\alpha \leq b\}$

ile gösterilir (Gierz, et al., 1980).

Tanım 1.1.17: L bir latis ve $p \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p$ eşitsizliği $a \leq p$ veya $b \leq p$ olmasını gerektiriyorsa p ye L nin bir asal (prime) elemanı veya bir atom denir.

L nin birden farklı asal elemanlarının kümesi,

$Pr(L) \coloneqq \{p \in L \mid p \neq 1$ ve $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b \leq p \implies a \leq p$ veya $b \leq p\}$

ile gösterilir (Gierz, et al., 1980).

Tanımlar karşılaştırıldığında, L bir bulanık latis olmak üzere

$\alpha \in M(L) \iff \alpha' \in \mathrm{Pr}(L)$

olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 1.1.18: $L = (L,\vee,\wedge,')$ bir tam De Morgan cebri olsun. Eğer her $D \subseteq L$ ve $\vee D \geq b$ eşitsizliği $d \geq a$ olacak şekilde bir $d \in D$ olmasını gerektiriyorsa a, b' nin üçgensel altındadır denir ve bu $a \lhd b$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.19: L tam dağılımlı bir latis olsun. Bu takdirde her $a \in L$ nin $\beta(a) = \{b \in L : b \lhd a\}$ ile gösterilen bir en büyük minimal ailesi ve $\alpha(a) = \{b \in L : b' \lhd a'\}$ ile gösterilen bir en büyük maximal ailesi vardır. Özel olarak $\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L)$, a' nın bir minimal ailesi ve $\alpha^*(a) = \alpha(a) \cap P(L)$, a' nın bir maksimal ailesidir (Wang, 1992).

Teorem 1.1.20: L bir tam dağılımlı tam latis olmak üzere, L' deki her eleman L' nin indirgenemez elemanlarından oluşan bir kümenin supremumuna eşit olarak yazılabilir. Benzer şekilde, L bir bulanık latis iken L' nin her elemanı bazı asal elemanlarının infimumu olarak yazılabilir (Gierz, et al., 1980).

1.2. Kategoriler ve Funktorlar

Küme teorisinde, kümeler ve kümeler arasında tanımlanan fonksiyonlar göz önüne alınır. Topolojide bir topolojik uzaydan diğerine sürekli fonksiyonlar, grup teorisinde bir gruptan diğerine grup homomorfizmleri tanımlanır. Bunları ayrı ayrı birer çatı altında toplarsak, bu yapı bazı objelerden ve bir objeden diğerine gitmek için tanımlanan kurallar veya yollardan oluşur. İşte bu kavramlar kategorinin temelini oluşturmaktadır.

Tanım 1.2.1: Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:

(K1) Bir $Ob\mathbb{K}$ sınıfı ki, bu sınıfın elemanlarına $\mathbb{K}$ nın objeleri (nesneleri) denir.

(K2) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her (X,Y) ikilisi için bir $M(X,Y)$ kümesi karşılık getirilir ve bu kümenin elemanlarına X den Y ye morfizmler ya da $\mathbb{K}$-morfizmler denir.

Her $X,Y,Z,W \in Ob\mathbb{K}$ için $(X,Y) \neq (Z,W)$ ise $M(X,Y) \cap M(Z,W) = \emptyset$ dir. (Yani, tanım ve değer bölgeleri tek türlü belirlidir.)

Bazen $M(X,Y)$ kümesi, $Mor(X,Y)$ ya da $Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ile gösterilir.

(K3) $\mathbb{K}$ nın objelerinin her X,Y,Z üçlüsü için bir $\circ$ dönüşümü ki bileşke adı verilen bu dönüşüm

$$\circ: M(X,Y) \times M(Y,Z) \longrightarrow M(X,Z), \quad \circ(f,g) \coloneqq g \circ f$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Bileşke asosyatiftir. Yani, $\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ ve $h \in Mor(Z,W)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) $\mathbb{K}$ nın her X objesi için X in idantik (birim) morfizmi adı verilen bir

$1_X \in Mor(X,X)$ elemanı vardır öyle ki,

$\forall f \in Mor(X,Y), g \in Mor(Y,Z)$ için $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$ dir.

Kategorideki objelerin sınıfının kümelerden oluşması gerekmez (o yalnızca bir sınıftır). Buna rağmen herhangi iki obje için birinden diğerine olan morfizmler bir küme formunda olmak zorundadır.

$X,Y \in Ob\mathbb{K}$ ve $f \in Mor(X,Y)$ için X kümesine f nin tanım bölgesi, Y ye ise değer bölgesi denir. X ve Y nin küme olmadığı durumlarda f nin de bir fonksiyon olması gerekmez (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

Örnek 1.2.2: (1) En önemli kategori örneklerinden birisi kümeler ve fonksiyonların oluşturduğu $\mathbb{SET}$ kategorisidir. Yani,

(a) $Ob(\mathbb{SET}) \coloneqq \{ X \mid X$ bir küme $\}$,

(b) $Mor(X,Y) \coloneqq \{ f \mid f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi,

(d) $X \in Ob(\mathbb{SET})$ için $1_X: X \longrightarrow X, 1_X(x) \coloneqq x$ özdeşlik fonksiyon.

Burada bütün kümeleri ya da bir kümeden diğerine tanımlı bütün fonksiyonları almak gerekli değildir. (K3) koşulu kaldığı müddetçe seçilen bazı fonksiyonlarla da

(örneğin, bire-bir örten fonksiyonlar) bir kategori yapılabilir. Buna ileride alt kategori diyeceğiz.

(2) $\mathbb{TOP}$: Topolojik uzaylar ve bunlar arasındaki sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategori, yani

(a) $Ob(\mathbb{TOP}) \coloneqq \{\, (X,T) \mid (X,T)$ bir topolojik uzay $\}$,

(b) $Mor\big((X,T),(Y,T^*)\big) \coloneqq \{\, f \mid f\colon (X,T) \longrightarrow (Y,T^*)$ bir sürekli fonksiyon $\}$,

(c) Bileşke dönüşümü sürekli fonksiyonların bileşkesi.

(3) $(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye aşağıda açıklandığı gibi bir $\mathbb{K}$ kategorisi gözüyle bakılabilir.

$Ob\mathbb{K} \coloneqq \{\, x \mid x \in X \,\}, \qquad \forall\, x,y \in Ob\mathbb{K} \qquad$ için $\qquad Mor(x,y) \coloneqq \begin{cases} \{(x,y)\}, & x \leq y \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$

$\leq$ bağıntısının geçişme özelliği $\mathbb{K}$ nın her üç objesi için bir tek bileşke olduğunu, yansıma özelliği de idantik morfizmin varlığını garanti eder (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

(4) $\mathbb{Frm}$: Çatılar kategorisi, yani

(a) $Ob\mathbb{Frm} \coloneqq \{\, L \mid L$ bir çatı $\}$,

(b) $Mor(L,K) \coloneqq \{\, f \mid f$ sonlu infimum ve keyfi supremum koruyan dönüşüm$\}$.

(5) $\mathbb{G}$: Gruplar ve grup homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{R}$: Halkalar ve halka homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{Lat}$: Latisler ve latis homomorfizmleri kategorisi,

$\mathbb{Bool}$: Boole cebirleri ve homomorfizmleri kategorisi (Johnstone, 1992).

Tanım 1.2.3: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\mathbb{L}$ ye $\mathbb{K}$ nın bir alt kategorisi (subcategory) denir.

(a) $Ob\mathbb{L} \subset Ob\mathbb{K}$,

(b) $\forall\, X,Y \in Ob\mathbb{L}$ için $Mor_{\mathbb{L}}(X,Y) \subset Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$,

(c) $\forall\, X,Y,Z \in Ob\mathbb{L}$ ve $\forall\, f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{L}}(Y,Z)$ için

$g \circ f \in Mor_{\mathbb{L}}(X,Z) \implies g \circ f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Z)$,

(d) $\forall\, X \in Ob\mathbb{L}$ için $1_X \in Mor_{\mathbb{L}}(X,X) \implies 1_X \in Mor_{\mathbb{K}}(X,X)$.

Eğer yukarıda verilen (b) koşulu için eşitlik sağlanıyorsa $\mathbb{L}$ ye $\mathbb{K}$ nın bütünüyle alt kategorisi (full subcategory) denir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

Örnek 1.2.4: (1) Objeleri kümeler, morfizmleri bire-bir örten fonksiyonlar olan kategori $\mathbb{SET}$ kategorisinin bir alt kategorisidir. Objeleri bütün sonlu kümeler ve morfizmleri fonksiyonlar olan kategori de $\mathbb{SET}$ kategorisinin bütünüyle alt kategorisidir.

(2) Objeleri kompakt (veya bağlantılı, Hausdorff vs.) topolojik uzaylar ve morfizmleri homeomorfizmler olan kategori $\mathbb{TOP}$ kategorisinin bir alt kategorisidir.

Tanım 1.2.5: $\mathbb{K}$ herhangi bir kategori olsun. Aşağıda tanımlanan kategoriye $\mathbb{K}$ nın dual kategorisi (duali) denir ve $\mathbb{K}^o$ ile gösterilir.

$Ob\mathbb{K}^o \coloneqq Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, X,Y \in Ob\mathbb{K}^o$ için $Mor_{\mathbb{K}^o}(X,Y) \coloneqq Mor_{\mathbb{K}}(Y,X)$

Yani, $\mathbb{K}^o$ nin morfizmleri $\mathbb{K}$ nın morfizmlerinin tanım ve değer kümelerinin yer değiştirilmesi ile elde edilir. Açık olarak, $(\mathbb{K}^o)^o = \mathbb{K}$ dir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

Örnek 1.2.6: (1) $(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kümeye Örnek 1.2.2 (3) den bir kategori gözüyle bakılabileceğinden, bu kategorinin duali $(X,\geq)$ kısmi sıralı kümesidir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

(2) $\mathbb{Frm}$ çatılar kategorisinin dualine lokaller kategorisi denir ve bu kategori $\mathbb{Loc}$ ile gösterilir (Johnstone, 1992).

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $\mathbb{K}$ bir kategori ve $f: X \longrightarrow Y$, $\mathbb{K}$ da bir morfizm olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.2.7: (a) $\forall\, Z \in Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, g_1, g_2: Y \longrightarrow Z$ morfizmleri için

$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow\ g_1 = g_2$ sağlanıyorsa f ye bir epimorfizm denir.

(b) $\forall\, Z \in Ob\mathbb{K}$ ve $\forall\, h_1, h_2: Z \longrightarrow X$ morfizmleri için

$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Longrightarrow\ h_1 = h_2$ sağlanıyorsa f ye bir monomorfizm denir.

Eğer f hem bir epimorfizm hemde bir monomorfizm ise f ye bimorfizm denir.

$\mathbb{SET}$ kümeler kategorisinde bir epimorfizm örten fonksiyon ve bir monomorfizm de bir bire-bir fonksiyondur.

Bu ifadenin diğer kategoriler için genel olarak doğru olması gerekmez.

Eğer $\mathbb{K}$ morfizmleri fonksiyonlar olan bir kategori ise bu kategoride örten fonksiyon olan her morfizm bir epimorfizmdir, fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Örneğin, Hausdorff topolojik uzayların kategorisinde, eğer X bir Y Hausdorff uzayının yoğun bir alt uzayı ise $i : X \longrightarrow Y, i(x) \coloneqq x$ olarak tanımlanan dönüşüm bir epimorfizm olmasına rağmen örten fonksiyon değildir. (Mitchell, 1965)

Tanım 1.2.8: Eğer f'nin sağ tersi varsa, yani $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise f ye bir büzülme (retraction) adı verilir. Eğer f sol terse sahip ise f ye bir karşı (eş) büzülme (co-retraction) denir.

Her retraksiyon bir epimorfizmdir. Kümeler kategorisinde bunun terside doğrudur, ancak genelde doğru olması gerekmez (Mitchell, 1965).

Tanım 1.2.9: $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g : Y \longrightarrow X$ morfizmi mevcut ise f ye $\mathbb{K}$ da bir özdeşlik veya izomorfizm denir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

Kolaylıkla görülebilir ki, $\mathbb{SET}$ kategorisinde izomorfizm bir bijeksiyon, $\mathbb{TOP}$ kategorisinde izomorfizm bir homeomorfizm ve $\mathbb{G}$ de ise bir grup izomorfizmine karşılık gelir.

Tanım 1.2.10: $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan F ye $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{L}$ ye bir kovaryant (kontravaryant) funktor denir ve $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ biçiminde yazılır (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

(a) $\forall\, X \in Ob\mathbb{K}$ için $F(X) \in Ob\mathbb{L}$,

(b) $\forall\, f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $F(f) \in Mor_{\mathbb{L}}\big(F(X),F(Y)\big)$

($\forall\, f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ için $F(f) \in Mor_{\mathbb{L}}\big(F(Y),F(X)\big)$),

(c) $\forall\, f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

($\forall\, f \in Mor_{\mathbb{K}}(X,Y), g \in Mor_{\mathbb{K}}(Y,Z)$ için $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$),

(c) $\forall\, X \in Ob\mathbb{K}$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Örnek 1.2.11: (1) Z sabit bir küme olmak üzere, $F: \mathbb{SET} \longrightarrow \mathbb{SET}$ dönüşümü $F(X) \coloneqq X \times Z$ ve $f : X \longrightarrow Y$ için $F(f): X \times Z \longrightarrow Y \times Z,\ F(f) \coloneqq f \times 1_Z$ olarak tanımlanırsa F bir kovaryant funktordur.

(2) $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{TOP}$ ve $\mathbb{L} \coloneqq$ Halkalar kategorisi olmak üzere, $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ dönüşümü,

$F(X) \coloneqq C(X) = \{\, \lambda : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid \lambda$ sürekli fonksiyon $\}$ ve $F(f) \coloneqq f^*$

($\lambda \in C(Y)$ için $f^*(\lambda) \coloneqq \lambda \circ f$) olarak tanımlanırsa, F bir kontravaryant funktordur.

(3) $\Omega : \mathbb{TOP} \longrightarrow \mathbb{L}\text{ø}\mathbb{c},\ \Omega(X,\tau) \coloneqq \tau$ ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için $f^{-1} : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ fonksiyonu olmak üzere $\Omega(f) \coloneqq f^{-1}$ olarak tanımlanan Ω bir kontravaryant funktordur.

(4) $\mathbb{K}^o$, $\mathbb{K}$ nın dual kategorisi olsun. Bu takdirde, $I: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^o, I(X) \coloneqq X$ ve $I(f) \coloneqq f$ olarak tanımlanan I bir kontravaryant funktordur. Ayrıca, $F: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ herhangi bir

funktor olmak üzere, $F^o \circ I = F$ olacak şekilde bir tek $F^o : \mathbb{K}^o \longrightarrow \mathbb{L}$ funktoru vardır. Açık olarak,

F funktoru kovaryanttır $\Leftrightarrow$ F^o funktoru kontravaryanttır (Adamek ve diğ., 2004).

Funktorlar bir kategori hakkındaki verileri diğer bir kategoriye taşır. Bazı kategorilerin objeleri diğer bir kategorinin objeleri üzerine ilave bazı yapılar koyularak elde edilirler. Örneğin, bir topolojik uzay bir küme (yani, $\mathbb{SET}$ kategorisinin bir objesi) üzerine topolojik yapı ilave edilmesi ile elde edilir. Bir halka bir Abel grubundan, bir Abel grubu da bir kümeden elde edilebilir. Bu durumların her birinde ilk kategoriden ikinci (yani, ilave özelliğin unutulduğu) kategoriye bir funktor tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan funktorlara unutkan (forgetful) funktor adı verilir.

Örneğin, $F : \mathbb{TOP} \longrightarrow \mathbb{SET}, F(X,\tau) := X$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir unutkan funktordur. Çünkü, X objesini ikinci tarafa götürürken üzerindeki τ topolojisini ve f morfizmini götürürken de sürekliliğini dikkate almıyor. Benzer şekilde, $\mathbb{G}$ gruplar kategorisinden ve $\mathbb{R}$ halkalar kategorisinden $\mathbb{SET}$ kümeler kategorisine unutkan funktorlar tanımlanabilir.

Unutkan funktorların tersine olarak, bir kategoriden diğer bir kategoriye ilk kategorinin objelerine daha fazla yapı ekleyecek şekilde funktorlarda tanımlanabilir. Örneğin, $F : \mathbb{SET} \longrightarrow \mathbb{TOP}$, $F(X) := (X, \tau_D)$ ve $F(f) \coloneqq f$ olarak tanımlı dönüşüm bir funktordur. Benzer şekilde, $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ diskret topoloji yerine $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ trivial topoloji de alınabilir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

Tanım 1.2.12: (1) Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, $\mathbb{K}$ kategorisine, $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{SET}$ kategorisine tanımlanan unutkan funktora göre bir topolojik kategori denir.

(TC1) Başlangıç yapısının varlığı: Bir X kümesi, J sınıfı, $\{(X_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ $\mathbb{K}$-objelerin ailesi ve $\{f_j : X \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ dönüşümler ailesi için, X kümesi üzerinde $\{f_j : X \longrightarrow (X_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ kaynağına göre başlangıç olan bir tek φ $\mathbb{K}$-yapısı vardır. Bunun anlamı, bir (Y, ψ) $\mathbb{K}$-objesi için bir $g : (Y, \psi) \longrightarrow (X, \varphi)$ dönüşümü bir $\mathbb{K}$-

morfizmdir ancak ve ancak her $j \in J$ için $f_j \circ g : (Y, \psi) \longrightarrow (X_j, \varphi_j)$ dönüşümleri bir $\mathbb{K}$-morfizmdir.

(TC2) Yapı (fibre) küçüklüğü: Herhangi bir X kümesi için $\mathbb{K}(X)$ ile gösterilen X in $\mathbb{K}$-fibresi, yani X üzerindeki tüm $\mathbb{K}$-yapıların sınıfı bir kümedir.

(2) $\mathbb{L}$ bir kategori ve E, $\mathbb{L}$-bimorfizmlerin bir sınıfı olsun.

$\mathbb{L}$ nin $\mathbb{K}$ bütünüyle alt kategorisine $\mathbb{L}$ de E-reflektif (E-yansımalı) (ya da, bireflektif) denir : $\Leftrightarrow$ Her $\mathbb{L}$-objesi bir bimorfizm olarak E de bir $\mathbb{K}$-yansıma okuna sahiptir.

Bunun anlamı, $\mathbb{L}$ deki herhangi bir B objesi için, A $\mathbb{K}$ nın bir objesi olmak üzere en az bir $r : B \longrightarrow A$ $\mathbb{K}$-yansıma (ya da, $\mathbb{K}$-yansıma bimorfizmi) vardır öyle ki aşağıdaki özellik sağlanır:

A', $\mathbb{K}$ nın bir objesi olmak üzere, herhangi bir $f : B \longrightarrow A'$ için bir tek $f' : A \longrightarrow A'$ $\mathbb{K}$-morfizmi vardır öyle ki $f' \circ r = f$ dir (Adamek, Herrlich ve Strecker, 2004).

1.3. L-Bulanık Kümeler

Tanım 1.3.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir tam latis olmak üzere her $f : X \longrightarrow L$ fonksiyonuna X in bir L-bulanık alt kümesi adı verilir (Goguen, 1973).

X in tüm L-bulanık alt kümelerinin ailesi $L(X)$ ile gösterilir. Şu halde,

$L(X) := \{ f \mid f : X \longrightarrow L$ bir fonksiyon$\}$.

$x \in X$ ve $f \in L(X)$ olmak üzere $f(x)$ değerine x noktasının f L-bulanık alt kümesine ait olma (üyelik) derecesi denir.

Özel olarak, $L = I$ olması halinde her $f : X \longrightarrow I$ fonksiyonu X in bir bulanık alt kümesi olarak adlandırılır.

X in tüm bulanık alt kümelerinin ailesi $F(X)$ ile gösterilir. Yani

$F(X) := \{ f \mid f : X \longrightarrow I$ bir fonksiyon$\}$.

$\{ x \in X \mid f(x) > 0_L \} \subset X$ klasik alt kümesine f L-bulanık alt kümesinin desteği denir ve supp$f$ ile gösterilir.

Her $\alpha \in L$ için $\{ x \in X \mid f(x) \geq \alpha \} \subset X$ klasik alt kümesine f L-bulanık alt kümesinin α-seviyesi denir ve $(f)_\alpha$ notasyonu ile gösterilir.

$c \in L$ olmak üzere her $x \in X$ için $f(x) \coloneqq c$ olarak tanımlanan bulanık kümesi X' in sabit L-bulanık alt kümesi olarak adlandırılır ve $\overline{c}$ ile gösterilir.

Buna göre, $\forall\, x \in X$ için $\overline{0}(x) \coloneqq 0_L$ ve $\overline{1}(x) \coloneqq 1_L$ biçiminde tanımlanır.

X kümesinin herhangi bir A klasik alt kümesi de A nın karakteristik fonksiyonu, $\chi_A \colon X \longrightarrow 2 \coloneqq \{0,1\}$

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile X in bir bulanık alt kümesi olarak göz önüne alınabilir. Dolayısıyla, her klasik küme bir bulanık kümedir (Zadeh, 1965).

Not 1.3.2: Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece X boştan farklı klasik bir kümeyi ve L ise bir bulanık latisi ifade edecektir.

Tanım 1.3.3: $f, g \in L(X)$ olmak üzere,

(a) $f = g \coloneqq \Leftrightarrow\ \forall\, x \in X$ için $f(x) = g(x)$.

(b) $f \leq g \coloneqq \Leftrightarrow\ \forall\, x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$.

(c) $f' \colon X \longrightarrow L, \forall\, x \in X$ için $f'(x) \coloneqq (\, f(x))'$. ($L = I$ ise, $f'(x) \coloneqq 1 - f(x)$).

(d) f, g L-bulanık alt kümelerinin birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(f \vee g)(x) \coloneqq maks\{f(x), g(x)\}$ ve $(f \wedge g)(x) \coloneqq min\{f(x), g(x)\},\ (\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

(e) Daha genel olarak, $\{f_i\}_{i \in \Gamma} \subset L(X)$ ailesi için birleşim ve arakesit işlemleri sırasıyla

$(\bigvee_{i \in \Gamma} f_i)(x) \coloneqq \bigvee_{i \in \Gamma} f_i\,(x)$ ve $(\bigwedge_{i \in \Gamma} f_i)(x) \coloneqq \bigwedge_{i \in \Gamma} f_i\,(x),\ (\forall\, x \in X)$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki işlemler ile $L(X)$ de bir bulanık latisdir. Ayrıca,

(i) $(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i)' = \bigwedge_{i\in\Gamma} f_i'$,

(ii) $(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i)' = \bigvee_{i\in\Gamma} f_i'$

De-Morgan kuralları da sağlanır (Zadeh, 1965).

Tanım 1.3.4: $M(L)$, L nin sıfırdan farklı indirgenemez elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde,

$M\big(L(X)\big) = \{\, x_\alpha \mid x \in X, \alpha \in M(L) \,\}$

kümesinin elemanları x_α lar X in L-bulanık noktaları olarak adlandırılır. Burada,

$x_\alpha : X \longrightarrow L,\ \forall\, y \in X$ için $x_\alpha(y) := \begin{cases} \alpha, & y = x \\ 0_L, & y \neq x \end{cases}$

şeklinde tanımlanır.

Burada x'e x_α L-bulanık noktasının desteği, α değerine de x_α L-bulanık noktasının değeri (yüksekliği) denir ve sırasıyla supp$x_\alpha = x$ ve $h(x_\alpha) = \alpha$ ile gösterilir.

$x_\alpha \in M\big(L(X)\big)$ olmak üzere

$x_\alpha \in f :\Leftrightarrow\ \alpha \leq f(x)$ (Dongsheng, 1987).

Uyarı 1.3.5: X üzerindeki her L-bulanık kümesi $M\big(L(X)\big)$ deki bazı L-bulanık noktaların birleşimi şeklinde ifade edilebilir.

Diğer bir deyişle, $f = \bigvee_{x_\alpha \in f} x_\alpha$ sağlanır.

Tanım 1.3.6: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $f \in L(X)$ ve $g \in L(Y)$ L-bulanık alt kümelerinin φ fonksiyonu altındaki görüntü ve ters görüntüsü sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\varphi(f)(y) := \begin{cases} \bigvee\{ f(x) : x \in X,\ y = \varphi(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$, $(\forall\, y \in Y)$ ve

$\varphi^{-1}(g)(x) \coloneqq (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x))$ $(\forall\, x \in X)$.

Açık olarak, $\varphi^{-1}(g)$ ve $\varphi(f)$ sırasıyla X ve Y klasik kümelerinin birer L-bulanık alt kümeleridir (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 1.3.7: $\varphi: X \longrightarrow Y$, $\psi: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon, $f, f_1, f_2 \in L(X)$, $g, g_1, g_2 \in L(Y)$ ve $h \in L(Z)$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varphi(f))$.

(2) $(\psi \circ \varphi)^{-1}(h) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(h))$.

(3) $f \leq \varphi^{-1}(\varphi(f))$ dir. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ bire-bir ise $f = \varphi^{-1}(\varphi(f))$ sağlanır.

(4) $g \geq \varphi(\varphi^{-1}(g))$ dir. Eğer $\varphi: X \longrightarrow Y$ örten ise $g = \varphi(\varphi^{-1}(g))$ sağlanır.

(5) $f_1 \leq f_2 \implies \varphi(f_1) \leq \varphi(f_2)$.

(6) $g_1 \leq g_2 \implies \varphi^{-1}(g_1) \leq \varphi^{-1}(g_2)$.

(7) $\varphi(f') \geq (\varphi(f))'$.

(8) $\varphi^{-1}(g') = (\varphi^{-1}(g))'$.

(9) $\{f_i : i \in \Gamma\} \subset L(X)$ ailesi için

$\varphi(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi(f_i)$

$\varphi(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i) \leq \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi(f_i)$.

(10) $\{ g_i \mid i \in \Gamma \} \subset L(Y)$ ailesi için

$\varphi^{-1}(\bigvee_{i\in\Gamma} g_i) = \bigvee_{i\in\Gamma} \varphi^{-1}(g_i)$

$\varphi^{-1}(\bigwedge_{i\in\Gamma} g_i) = \bigwedge_{i\in\Gamma} \varphi^{-1}(g_i)$ (Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 1.3.8: X, Y boştan farklı iki klasik küme ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x_\alpha \in M(L(X))$ ise $\varphi(x_\alpha) \in M(L(Y))$ ve $\varphi(x_\alpha) = (\varphi(x))_\alpha$ dir.

1.4. L- Bulanık Topolojik Uzaylar

Tanım 1.4.1: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L(X)$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ya X üzerinde bir (Chang-Goguen) L-topoloji veya bulanık kümelerin bir topolojisi adı verilir.

(CT1) $\overline{0}, \overline{1} \in \tau$,

(CT2) $f_1, f_2 \in \tau \implies f_1 \wedge f_2 \in \tau$,

(CT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} f_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine bir (Chang-Goguen) L-topolojik uzay adı verilir. τ nun elemanlarına da açık L-bulanık alt kümeler adı verilir.

Eğer, $f' \in \tau$ ise f ye (X, τ) da kapalı L-bulanık alt küme denir (Chang, 1968).

Örnek 1.4.2: T X kümesi üzerinde bir klasik topoloji ise, $\tau = \chi_T \coloneqq \{\, \chi_G : G \in T \,\}$ ailesi X üzerinde bir L-topolojidir. O halde, klasik anlamdaki her topoloji bir (Chang-Goguen) L-topolojidir.

Tanım 1.4.3: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-topolojik uzay ve $\varphi\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

(a) φ L-süreklidir : $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in \tau_2$ için $\varphi^{-1}(g) \in \tau_1$.

(b) φ L-açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in \tau_1$ için $\varphi(f) \in \tau_2$ (Chang, 1968).

Chang-Goguen anlamında L-topolojik uzaylar ile bunlar arasında tanımlı L-sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategori $\mathbb{CL} - \mathbb{TOP}$ ile gösterilir.

Uyarı 1.4.4: Açıkça görülebilir ki, klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonlar sürekli olduğu halde (Chang-Goguen) L-topolojik uzaylar arasında sabit

fonksiyonların L-sürekli olması gerekmez. Bu önemli özelliği L-topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen (Lowen 1976), L-topolojik uzay tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir. Ancak bu seferde L-topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeği kaybedilmiştir.

Tanım 1.4.5: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Eğer $\tau \subset L(X)$ L-bulanık alt kümelerinin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ya X üzerinde bir (Lowen) L-topoloji denir.

(LT1) $\forall\, c \in L$ için $\overline{c} \in \tau$,

(LT2) $f_1, f_2 \in \tau \implies f_1 \wedge f_2 \in \tau$,

(LT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in \tau \implies \bigvee_{i\in\Gamma} f_i \in \tau$.

(X, τ) ikilisine de bir (Lowen) L-topolojik uzay adı verilir (Lowen, 1976).

Lowen anlamındaki L-topolojik uzaylar ve bunlar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlar kategorisi $\mathbb{L} - \mathbb{TOP}$ ile gösterilir. Ayrıca, Lowen anlamındaki her L-topolojik uzay Chang-Goguen anlamında bir L-topolojik uzaydır. Buna göre, $\mathbb{L} - \mathbb{TOP} \subset \mathbb{CL} - \mathbb{TOP}$ ifadesi sağlanır.

X üzerindeki bir τ L-topolojisi aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir $\tau: L(X) \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak da göz önüne alınabilir.

(1) $\tau(\overline{0}) = \tau(\overline{1}) = 1$, ($\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\overline{c}) = 1$),

(2) Eğer $\tau(f_1) = \tau(f_2) = 1$ ise $\tau(f_1 \wedge f_2) = 1$,

(3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $\tau(f_i) = 1$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) = 1$.

Yukarıda verilen her iki L-topolojinin tanımında da kümeler bulanık olmasına rağmen topoloji aksiyomları klasiktir. Bu eksikliği gidermek ve bulanık kümelerin açıklığını derecelendirmek için Sostak (1985) aşağıdaki bulanık topoloji tanımı vermiştir.

Tanım 1.4.6: X boştan farklı klasik bir küme ve L bir bulanık latis olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau: L(X) \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir (Sostak) L-bulanık topoloji veya açıklığın bir derecelendirmesi veya smooth (pürüzsüz) topoloji denir.

(BT1) $\tau(\overline{0}) = \tau(\overline{1}) = 1$,

(BT2) $\forall\, f_1, f_2 \in L(X)$ için $\tau(f_1 \wedge f_2) \geq \tau(f_1) \wedge \tau(f_2)$,

(BT3) $\forall\, i \in \Gamma$ için $f_i \in L^X$ ise $\tau(\bigvee_{i\in\Gamma} f_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau(f_i)$.

(X, τ) ikilisine de bir L-bulanık topolojik uzay veya smooth topolojik uzay denir. $f \in L(X)$ olmak üzere $\tau(f)$ değerine de f L-bulanık alt kümesinin açıklık derecesi denir (Sostak, 1985).

Uyarı 1.4.7: (1) Tanımlar karşılaştırıldığında; bir L-topoloji L-bulanık kümelerin klasik bir ailesi $(\tau \subseteq L(X))$ iken bir L-bulanık topoloji ise L-bulanık kümeler ailesinin bir L-bulanık alt kümesi $(\tau \in L(L(X)))$ dir.

(2) Aslında L ve M farklı bulanık latisler olmak üzere, bulanık topoloji $\tau : L(X) \longrightarrow M$ biçiminde de tanımlanabilir. Ayrıca, Tanım 1.4.6 daki (BT1) aksiyomu yerine

(BT1)′ $\forall\, \alpha \in L$ için $\tau(\overline{c}) = 1$ aksiyomu alınırsa, (X, τ) ikilisine bir tabakalaşmış (stratified, laminated) L-bulanık topolojik uzay denir.

(3) Her klasik topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçektende T, X üzerinde klasik bir topoloji olmak üzere $T: 2^X \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa $T = \chi_T$ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

(4) Her L-topoloji bir L-bulanık topolojidir. Gerçekten, X üzerindeki bir τ L-topolojisi için $\tau: L(X) \longrightarrow 2$ dönüşümü olarak göz önüne alınırsa τ, X üzerinde bir L-bulanık topoloji olur.

Önerme 1.4.8: $\{\tau_k : k \in \Lambda\}$ ailesi X üzerinde L-bulanık topolojilerin bir ailesi ise $\tau := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k,\ \tau(f) := \bigwedge_{k\in\Lambda} \tau_k(f)$

ile tanımlanan τ dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık topolojidir (Ramadan, 1992).

Tanım 1.4.9: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau' : L(X) \longrightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir L-bulanık kotopoloji (eş topoloji) veya kapalılığın bir derecelendirmesi denir.

(1) $\tau'(\underline{0}) = \tau'(\underline{1}) = 1$,

(2) $\forall\ f_1, f_2 \in L(X)$ için $\tau'(f_1 \vee f_2) \geq \tau'(f_1) \wedge \tau'(f_2)$,

(3) $\forall\ i \in \Gamma$ için $f_i \in L(X)$ ise $\tau'(\bigwedge_{i\in\Gamma} f_i) \geq \bigwedge_{i\in\Gamma} \tau'(f_i)$.

$(X.\tau')$ ikilisine de bir L-bulanık kotopolojik uzay adı verilir (Sostak, 1985).

Tanım 1.4.10: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

φ fonksiyonuna L-bulanık sürekli (veya kısaca, LB-sürekli) denir : $\Leftrightarrow$

$\forall\ g \in L(Y)$ için $\tau_1(\varphi^{-1}(g)) \geq \tau_2(g)$ sağlanır (Sostak, 1985).

Önerme 1.4.13: (X, τ_1), (Y, τ_2) ve (Z, τ_3) L-bulanık topolojik uzay olsun. Eğer $\varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ ve $\psi : (Y, \tau_2) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ fonksiyonları LB-sürekli ise $\psi \circ \varphi : (X, \tau_1) \longrightarrow (Z, \tau_3)$ bileşkesi LB-süreklidir.

İspat: Tanımlardan kolaylıkla görülür (Sostak, 1985).

Objeleri L-bulanık topolojik uzaylar ve morfizmleri LB-sürekli fonksiyonlar olan kategori $\mathbb{L} - \mathbb{BTOP}$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.11: (X, τ_1') ve (Y, τ_2') iki L-bulanık kotopolojik uzay ve $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

φ LB-süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in L(Y)$ için $\tau_1'(\varphi^{-1}(g)) \geq \tau_2'(g)$ sağlanır (Sostak, 1985).

Tanım 1.4.12: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki L-bulanık topolojik uzay ve $\varphi: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

(a) φ LB-açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in L(X)$ için $\tau_1(f) \leq \tau_2(\varphi(f))$.

(b) φ LB-kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $\forall\, f \in L(X)$ için $\tau_{\tau_1}^*(f) \leq \tau_{\tau_2}^*(\varphi(f))$.

(c) φ LB-homeomorfizmdir : $\Leftrightarrow$ φ bijektif, LB-sürekli ve φ^{-1} LB-süreklidir (Ramadan, 1992).

2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle esnek küme kavramı tanıtılmış ve bu kümeleri temel alan esnek topolojik uzaylar tanımlanmıştır. Buna ek olarak, esnek topolojik uzaylarda süreklilik, taban ve kompaktlık kavramları verilerek genel topolojideki temel teoremlerden olan Alexander alttaban teoremi ve Tychonoff teoremi bu uzaylara genelleştirilmiştir.

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1: (Molodtsov, 1999) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $\mathcal{P}(X)$, X' in güç kümesi olsun.
(f, E) çiftine X üzerinde bir esnek küme denir : $\Leftrightarrow f: E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.
Diğer bir deyişle, esnek küme X' in alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen ailesidir.

Örnek 2.1.2: (Aktaş ve Çağman, 2007) (F, E) esnek kümesi, bir A kişisinin satın almayı düşündüğü evlerin özelliklerini tanımlasın.
$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evlerin kümesi ve
$E = \{\text{pahalı}, \text{güzel}, \text{ahşap}, \text{ucuz}, \text{bahçeli}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ karar parametrelerinin kümesi olsun.
F dönüşümünü düşünelim: Örneğin, $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır ve fonksiyon değeri $\{h \in X : h \text{ pahalı ev}\}$ kümesidir.
$F(e_1) = \{h_2, h_4\},\ F(e_2) = \{h_1, h_3\},\ F(e_3) = \emptyset,\ F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve
$F(e_5) = \{h_1\}$ olsun.
$(F, E) = \{(\text{pahalı ev}, \{h_2, h_4\}), (\text{güzel ev}, \{h_1, h_3\}), (\text{ahşap ev}, \emptyset),$
$(\text{ucuz ev}, \{h_1, h_3, h_5\}), (\text{bahçeli ev}, \{h_1\})\}$.

Örnek 2.1.3: (Pei ve Miano, 2005) A, X üzerinde bir bulanık küme ve $E = [0,1]$ olsun. $F: E \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$F(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$.

$F(\alpha)$, A bulanık kümesinin α-seviye kümesidir.

Buradan, bir bulanık kümenin bir esnek küme olarak gösterilebildiğini söyleriz.

Tanım 2.1.4: (Maji, Biswas ve Roy, 2001) E parametrelerin kümesi ve $A \subset E$ olsun. (f, A) çiftine X üzerinde bir bulanık esnek küme denir : $\Leftrightarrow f: A \longrightarrow F(X)$

$\forall a \in A$ için $f(a) = f_a: X \to I$, X üzerinde bir bulanık kümedir.

Tanım 2.1.5: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek küme olsun.

(F, A)' ya (G, B)' nin alt kümesi denir : $\Leftrightarrow$ (1) $A \subset B$

(2) $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$.

$(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) X üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine eşittir denir : $\Leftrightarrow (F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ve $(G, B) \sqsubseteq (F, A)$ sağlanır.

Tanım 2.1.7: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. E kümesinin değili $\neg E$ ile gösterilir ve $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$' dir. Burada $\neg e_i$, her i için e_i' nin değiline eşittir.

Tanım 2.1.8: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) X üzerindeki (F, A) esnek kümesinin tümleyeni, $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ şeklinde tanımlanır. Burada, $F^c: \neg A \to I^X$ bir fonksiyon ve $\forall a \in \neg A$ için $F^c(a) = (F(\neg a))^c = X - F(\neg a)$' dır. F^c' ye F' nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $((F, A)^c)^c = (F, A)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.9: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) X üzerindeki (F, A) esnek kümesine boş esnek küme denir : $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$.

Boş esnek küme Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) X üzerindeki (F,A) esnek kümesine evrensel esnek küme denir : $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ için $F(a) = X$.
Evrensel esnek küme $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) X üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesidir : $\Leftrightarrow C = A \cup B$ ve $\forall c \in C$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c), & c \in A \backslash B \\ G(c), & c \in B \backslash A \\ F(c) \cup G(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

$(F,A) \sqcup (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.12: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu esnek kümelerin kesişimi (h,C) esnek kümesidir
: $\Leftrightarrow C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ için $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir.
$(F,A) \sqcap (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.1.13: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) $(F,A), (G,B)$ ve (H,C) X üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır.
(1) $(F,A) \sqcup (G,B) = (G,B) \sqcup (F,A)$
(2) $(F,A) \sqcup \big((G,B) \sqcup (H,c)\big) = \big((F,A) \sqcup (G,B)\big) \sqcup (H,c)$
(3) $(F,A) \sqsubseteq (F,A) \sqcup (G,B)$ ve $(G,B) \sqsubseteq (F,A) \sqcup (G,B)$
(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \sqcup (G,B) = (G,B)$.

Önerme 2.1.14: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) $(F,A), (G,B)$ ve (H,C) X üzerinde üç esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır.
(1) $(F,A) \sqcap (F,A) = (F,A)$
(2) $(F,A) \sqcap (G,B) = (G,B) \sqcap (F,A)$
(3) $(F,A) \sqcap (G,B) \sqsubseteq (F,A)$ ve $(F,A) \sqcap (G,B) \sqsubseteq (G,B)$
(4) $(F,A) \sqsubseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \sqcap (G,B) = (F,A)$
(5) $\big((F,A) \sqcap (G,B)\big) \sqcap (H,C) = (F,A) \sqcap \big((G,B) \sqcap (H,C)\big)$

Teorem 2.1.15: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır.

(1) $[(F,A) \sqcup (G,B)]^c \sqsubseteq (F,A)^c \sqcup (G,B)^c$

(2) $(F,A)^c \sqcap (G,B)^c \sqsubseteq [(F,A) \sqcap (G,B)]^c$.

Teorem 2.1.16: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A)^c \sqcap (G,B)^c \sqsubseteq [(F,A) \sqcup (G,B)]^c$

(2) $[(F,A) \sqcap (G,B)]^c \sqsubseteq (F,A)^c \sqcup (G,B)^c$.

Teorem 2.1.17: (Maji, Biswas ve Roy, 2003) (F,A) ve (G,A) X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A)^c \sqcap (G,A)^c = [(F,A) \sqcup (G,A)]^c$

(2) $[(F,A) \sqcap (G,A)]^c = (F,A)^c \sqcup (G,A)^c$.

2.2. Genişletilmiş Esnek Kümeler

X evrensel küme, E X için uygun olan tüm parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F,A), X üzerinde bir esnek küme $(F: A \longrightarrow \wp(X))$ olmak üzere aşağıdaki düşünceyle (F,A) esnek kümesi $(\bar{F},E)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir:

$$\bar{F}: E \longrightarrow \wp(X),\ \bar{F}(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \\ \emptyset, & e \notin A \end{cases}$$

Eğer F dönüşümü biliniyorsa her bir (F,E) esnek kümesi $F = \{F(e) : e \in E\}$ parametrelerle ifade edilmiş aile olarak karakterize edilebilir.

Esnek kümeleri (F,E) çifti yerine $F_A: E \longrightarrow \wp(X)$ dönüşümü olarak ele alınacaktır. Burada A indisi F_A dönüşümünün (esnek kümesinin) değerinin boştan farklı olduğu parametreler kümesini gösterir. Bu tarz kümelere "genişletilmiş-esnek küme" (g-e küme) denir.

X üzerindeki tüm g-e kümelerin ailesini $S(X,E)$ ile gösterelim.

Tanım 2.2.1: $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A' ye G_B' nin alt kümesi denir : $\Leftrightarrow$ $\forall\, e \in E$ için $F_A(e) \subseteq G_B(e)$.
$F_A \sqsubseteq G_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B eşittir denir. : $\Leftrightarrow$ $F_A \sqsubseteq G_B$ ve $G_B \sqsubseteq F_A$.

Tanım 2.2.4: $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B g-e kümelerin birleşimi H_C g-e kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cup G_B(e)$.

H_C, $F_A \sqcup G_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5: $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. F_A ve G_B g-e kümelerin kesişimi H_C g-e kümesidir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cap G_B(e)$.

H_C, $F_A \sqcap G_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.6: $F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. $F_A \sqsubseteq G_B \Rightarrow F_A = F_A \sqcap G_B$ veya $G_B = F_A \sqcup G_B$' dır.

Tanım 2.2.7: Bir F_A g-e kümesinin tümleyeni F_A^c ile gösterilir ve $F_A^c : E \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $F_A^c(e) = X - F_A(e)$ şeklinde tanımlanır.
F_A^c' ye F_A ' nin esnek tümleyen fonksiyonu denir. $(F_A^c)^c = F_A$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.8: (Boş genişletilmiş esnek küme) X üzerindeki bir F_A g-e kümesine boş g-e küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F_A(e) = \emptyset$.
Boş g-e küme Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9: (Evrensel genişletilmiş esnek küme) X üzerindeki bir f_E g-e kümesine evrensel g-e küme denir : $\Leftrightarrow \forall e \in E$ için $F_E(e) = X$.
Evrensel g-e küme $\tilde{E}$ ile gösterilir.
$(\tilde{E})^c = \Phi$ ve $(\Phi)^c = \tilde{E}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.10: (Yerel evrensel g-e küme) X üzerindeki bir F_A g-e kümesine yerel evrensel g-e küme denir. : $\Leftrightarrow \forall e \in A \subset E$ için $F_A(e) = X$ ve $\forall\, e \in E \backslash A$ için $F_A(e) = \emptyset$. Yerel evrensel g-e küme $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.11: (Esnek nokta) X üzerindeki bir F_A g-e kümesine mutlak esnek nokta denir $:\Leftrightarrow \forall e \in A \subset E$ için $F_A(e) = \{x_0\}$ ve $\forall e \in E\backslash A$ için $F_A(e) = \emptyset$. F_A soft noktası $F_A^{x_0}$ olarak gösterilir.

$F_E^{x_0}$ esnek noktasına mutlak esnek nokta denir.

$F_A^{x_0}$ esnek noktasının G_B g-e kümesinin elemanı olması sembolik olarak $F_A^{x_0} \tilde{\in} G_B$ olarak gösterilir ve her $e \in A$ için $x_0 \in G_B(e)$ ile tanımlanır.

X üzerindeki esnek noktaların ailesini $SP(X, E)$ olarak gösterelim.

Önerme 2.2.12: $G_B \in S(X, E)$ ise $G_B = \bigsqcup\{F_A^x : F_A^x \tilde{\in} G_B\}$.

İspat: Açıktır.

Önerme 2.2.13: $F_A^x, G_B^x \in SP(X, E)$ olsun. Bu durumda $F_A^x \sqcup G_B^x = (F_A \sqcup G_B)^x$ dir.

Önerme 2.2.14: J indeks kümesi ve $F_A, G_B, H_C, (F_A)_i, (G_B)_i \in S(X, E)$ olsun.

(1) $F_A \sqcap F_A = F_A$, $F_A \sqcup F_A = F_A$

(2) $F_A \sqcap G_B = G_B \sqcap F_A$, $F_A \sqcup G_B = G_B \sqcup F_A$

(3) $F_A \sqcup (G_B \sqcup H_C) = (F_A \sqcup G_B) \sqcup H_C$, $F_A \sqcap (G_B \sqcap H_C) = (F_A \sqcap G_B) \sqcap H_C$

(4) $F_A \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in J}(G_B)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}(F_A \sqcap (G_B)_i)$,

$F_A \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in J}(G_B)_i\right) = \bigsqcap_{i\in J}(F_A \sqcup (G_B)_i)$

(5) $\Phi \sqsubseteq F_A \sqsubseteq \tilde{A} \sqsubseteq \tilde{E}$

(6) $(F_A^c)^c = F_A$

(7) $\left(\bigsqcap_{i\in J}(F_A)_i\right)^c = \bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i^c$, $(\bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i)^c = \bigsqcap_{i\in J}(F_A)_i^c$

(8) $F_A \sqsubseteq G_B \Rightarrow G_B^c \sqsubseteq F_A^c$

İspat: (3), (4) ve (7)' nin ispatlarını verelim, diğerleri benzer şekilde yapılır.

(3) Birleşim tanımından ve $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}\left(F_A \sqcup (G_B \sqcup H_C)\right)(e) &= F_A(e) \cup (G_B \sqcup H_C)(e)\\ &= F_A(e) \cup (G_B(e) \cup H_C(e))\\ &= (F_A \sqcup G_B)(e) \cup H_C(e)\\ &= (F_A \sqcup G_B)(e) \cup H_C(e)\\ &= ((F_A \sqcup G_B) \sqcup H_C)(e)\end{aligned}$$

Böylece, $f_A \sqcup (G_B \sqcup H_C) = (F_A \sqcup G_B) \sqcup H_C$ elde edilir.

(4) Birleşim ve kesişim tanımlarından $\forall e \in E$ için

$$\begin{aligned}\left(F_A \sqcap \left(\sqcup_{i\in J}(G_B)_i\right)\right)(e) &= F_A(e) \cap \left(\sqcup_{i\in J}(G_B)_i\right)(e)\\ &= F_A(e) \cap \left(\cup_i (G_B)_i\,(e)\right)\\ &= \cup_i (\, F_A(e) \cap (G_B)_i\,(e))\\ &= \cup_i (\, F_A \sqcap (G_B)_i)(e)\\ &= \left(\sqcup_{i\in J}(\, F_A \sqcap (G_B)_i)\right)(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

(7) $\forall e \in E$ için

$$\begin{aligned}\left(\sqcap_{i\in J}(F_A)_i\right)^c(e) &= X - \left(\sqcap_{i\in J}(F_A)_i\right)(e)\\ &= X - \left(\cap_i (F_A)_i\,(e)\,\right)\\ &= \cup_i \left((F_A)_i(e)\right)^c\\ &= \left(\sqcup_{i\in J}(F_A)_i^c\right)(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

Tanım 2.2.15: $\varphi: X \to Y$, $\psi: E \to F$ iki fonksiyon ve E, F sırasıyla X ve Y için parametre evrensel kümeleri olsun. φ_ψ fonksiyonuna X' den Y' ye esnek fonksiyon denir.

(1) $F_A \in S(X,E)$ olsun. F_A' nin φ_ψ esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(F_A)$, Y üzerinde bir g-e kümedir ve her $k \in F$ için

$\varphi_\psi(F_A)(k) = \cup_{\psi(e)=k}\, \varphi(F_A(e))$ şeklinde tanımlanır.

(2) $G_B \in S(Y,F)$ olsun. G_B' nin φ_ψ esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü ${\varphi_\psi}^{-1}(g_B)$, X üzerinde bir g-e kümedir ve her $e \in E$

${\varphi_\psi}^{-1}(G_B)(e) = \varphi^{-1}\left(G_B\left(\psi(e)\right)\right)$ şeklinde tanımlanır.

Eğer φ ve ψ bire-bir ise φ_ψ esnek dönüşümü de bire-birdir.

Eğer φ ve ψ örten ise φ_ψ esnek dönüşümü de örtendir.

Eğer φ sabit bir dönüşüm ise φ_ψ esnek dönüşümüne sabit esnek dönüşüm denir.

φ_ψ X' den Y' ye ve γ_δ Y' den Z' ye birer esnek fonksiyon olsun. Bu durumda φ_ψ ve γ_δ nın bileşke fonksiyonu $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi \coloneqq (\gamma \circ \varphi)_{(\delta\circ\psi)}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.16: X ve Y crisp kümeler ve $F_A, (F_A)_i \in S(X,E)$ ve $g_B, (g_B)_i \in S(Y,F)$ olsun.

(1) $(F_A)_1 \sqsubseteq (F_A)_2 \Rightarrow \varphi_\psi((F_A)_1) \sqsubseteq \varphi_\psi((F_A)_2)$

(2) $(G_B)_1 \sqsubseteq (G_B)_2 \Rightarrow {\varphi_\psi}^{-1}((G_B)_1) \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}((G_B)_2)$

(3) $F_A \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}\left(\varphi_\psi(F_A)\right)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_\psi\left({\varphi_\psi}^{-1}(G_B)\right) \sqsubseteq G_B$, φ_ψ örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_\psi\left(\prod_{i\in J}(F_A)_i\right) \sqsubseteq \prod_{i\in J}\varphi_\psi((F_A)_i)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_\psi\left(\bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}\varphi_\psi((F_A)_i)$

(7) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\bigsqcup_{i\in J}(G_B)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}((G_B)_i)$

(8) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\prod_{i\in J}(G_B)_i\right) = \prod_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}((G_B)_i)$

(9) ${\varphi_\psi}^{-1}(G_B^c) = \left({\varphi_\psi}^{-1}(G_B)\right)^c$

(10) $(\varphi_\psi(F_A))^c \sqsubseteq \varphi_\psi(F_A^c)$

(11) ${\varphi_\psi}^{-1}\left(\tilde{E}_Y\right) = \tilde{E}_X$, ${\varphi_\psi}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$

(12) φ_ψ örten ise $\varphi_\psi\left(\tilde{E}_X\right) = \tilde{E}_Y$

(13) $\varphi_\psi(\Phi_X) = \Phi_Y$

(14) $\varphi_\psi(F_A^x) = \varphi(F)^{\varphi(x)}_{\psi(A)}$

İspat: (3) $e \in \psi^{-1}(F_A)$ için

$$
\begin{aligned}
{\varphi_\psi}^{-1}\left(\left(\varphi_\psi(F_A)\right)\right)(e) &= \varphi^{-1}\left(\left(\varphi_\psi(F_A)\right)\left(\psi(e)\right)\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\bigcup_{\psi(e)=\psi(a)}\varphi(F_A(a))\right) \\
&= \bigcup_{\psi(e)=\psi(a)}\varphi^{-1}\left(\varphi(F_A(a))\right) \\
&\supseteq F_A(e).
\end{aligned}
$$

φ_ψ bire-bir olması durumunda eşitliğin sağlanacağı açıktır.

Tanım 2.2.17: (İki esnek kümenin Kartezyen çarpımı) $F_A \in S(X_1, E_1)$ ve $G_B \in S(X_2, E_2)$ olsun. F_A ve G_B esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $F_A \times G_B$ olarak gösterilir. Burada her $(e,k) \in A \times B$ için $(F_A \times G_B)(e,k) = F_A(e) \times G_B(k)$ dir.

Bu tanıma göre $F_A \times G_B$ esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 2.2.18: Her $i \in \Delta$ için $(F_A)_i \coloneqq (F_i)_{A_i} \in S(X_i, E_i)$ olsun. $(F_A)_i$ bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ olarak gösterilir ve her $e = (e_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta} E_i$ için $(\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i)(e) \coloneqq \prod_{i\in\Delta}(F_A)_i(e_i)$ ile tanımlanır. Burada $\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ bulanık esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ Kartezyen çarpımı üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Tanım 2.2.19: $p_j: \prod_{i\in\Delta} X_i \to X_j$ ve $q_j: \prod_{i\in\Delta} E_i \to E_j$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Esnek kümeler üzerindeki $(p_q)_j \coloneqq (p_j)_{q_j}$ izdüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ üzerinde bir esnek küme olsun. $i \in \Delta$ için
$(p_q)_j(\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i) = (F_A)_j$.

2.3. Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 2.3.1: (Shabir ve Naz, 2011) $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-e kümelerin bir ailesi ise (X, τ) çiftine esnek topolojik uzay denir.

(1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau$

(2) $F_E, G_E \in \tau \Rightarrow F_E \sqcap G_E \in \tau$

(3) $\forall i \in J$ için $(F_i)_E \in \tau \Rightarrow \bigsqcup_{i\in J}(F_i)_E \in \tau$.

Tanım 2.3.2: $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan g-e kümelerin bir ailesi ise (X, τ) çiftine Lowen anlamında esnek topolojik uzay denir.

(1) Her $A \subseteq E$ için $\tilde{A} \in \tau$ ve $\Phi \in \tau$.

(2) $F_A, G_B \in \tau \Rightarrow F_A \sqcap G_B \in \tau$

(3) $\forall i \in J$ için $(F_A)_i \in \tau \Rightarrow \bigsqcup_{i\in J}(F_A)_i \in \tau$.

τ' ya X üzerinde g-e kümelerin topolojisi denir. τ' nun her elemanına açıktır denir.

$G_B, (X, \tau)$' da kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $G_B^c \in \tau$.

Klasik topolojide olduğu gibi g-e kümelerin trivial topolojisi Φ ve $\tilde{E}$' yi içerir. Diskret topoloji X' deki tüm g-e kümeleri içerir. Trivial topolojiyi τ^0 ile, diskret topolojiyi τ^1 ile gösterelim.

τ_1 esnek topolojisine τ_2 esnek topolojisinden daha zayıftır (kaba) denir : $\Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$. Bu durumda, τ_2' ye τ_1' den daha güçlüdür (incedir) denir.

Örnek 2.3.3: IR reel sayılar olmak üzere $E = IR^+$ verilsin. Her $\lambda \in E$ için $(F_\lambda)_E \coloneqq \{(x, (x-\lambda, x+\lambda) : x \in IR)\}$ olmak üzere, $\tau \coloneqq \{(F_\lambda)_E : \lambda \in E\} \cup \{\Phi, \tilde{E}\}$ ailesi tanımlansın. Bu takdirde (IR, τ) bir esnek topolojik uzaydır.

Örnek 2.3.4: $\tau = \{(F_A)_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ olmak üzere (X, τ) esnek topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şekilde her bir parametreden topolojiler elde edebiliriz:

$\forall\, e_i \in E$ için $\tau_{e_i} = \{(F_A)_\lambda(e_i) : \ (F_A)_\lambda \in \tau\}$ olsun. τ_{e_i}, X üzerinde topolojidir.

Bu topolojiye X' deki bir esnek topolojinin "e_i-parametre topolojisi" denir.

Teorem 2.3.5: $\{\tau_i : i \in J\}$ ailesi X üzerinde g-e kümelerin esnek topolojilerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\sqcap \{\tau_i : i \in J\}$ X üzerinde esnek topolojik uzaydır.

İspat: Açıktır.

Teorem 2.3.6: (X, τ) esnek topolojik uzay ve τ' tüm kapalı esnek kümelerin ailesini göstersin. Bu takdirde, aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\Phi, \tilde{E} \ \in \tau'$

(2) $F_A, G_B \ \in \tau' \ \Rightarrow F_A \sqcup G_B \in \tau'$

(3) $\forall i \in J$ için $(F_A)_i \in \tau' \ \Rightarrow \ \prod_{i \in J}(F_A)_i \in \tau'$.

İspat: Açıktır.

Tanım 2.3.7: (X, τ) bir esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesine τ için bir tabandır denir : $\Leftrightarrow \tau$' nun her elemanı $\mathcal{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.8: (X, τ) bir esnek topolojik uzay ve $F_A \in S(X, E)$ olsun. F_A kümesinin içi $\mathrm{int}(F_A)$, kapanışı ise $\mathrm{cl}(F_A)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\mathrm{int}(F_A) = \sqcap\{G_B | G_B$ açık ve $G_B \subseteq F_A\}$,

$\mathrm{cl}(F_A) = \sqcap\{H_C | H_C$ kapalı ve $H_C \subseteq F_A\}$.

Açıktır ki

(a) F_A kapalıdır $\Leftrightarrow \mathrm{cl}(F_A) = F_A$

(b) F_A açıktır $\Leftrightarrow \mathrm{int}(F_A) = F_A$

Önerme 2.3.9: (X, τ) bir esnek topolojik uzay ve $F_A, G_B \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\mathrm{int}(F_A) \subseteq F_A \subseteq \mathrm{cl}(F_A)$

(2) Eğer $F_A \subseteq G_B$ ise $\mathrm{int}(F_A) \subseteq \mathrm{int}(G_B)$ ve $\mathrm{cl}(F_A) \subseteq \mathrm{cl}(G_B)$.

(3) $\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(F_A)\big) = \mathrm{int}(F_A)$ ve $\mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(F_A)\big) = \mathrm{cl}(F_A)$.

(4) $\mathrm{int}(F_A \sqcap G_B) = \mathrm{int}(F_A) \sqcap \mathrm{int}(G_B)$

(5) $\mathrm{cl}(F_A \sqcup G_B) = \mathrm{cl}(F_A) \sqcup \mathrm{cl}(G_B)$

(6) $\mathrm{int}\big(\tilde{E}\big) = \tilde{E}$ ve $\mathrm{cl}(\Phi) = \Phi$.

Tanım 2.3.10: (X, τ) ve (Y, τ^*) iki esnek topolojik uzay olsun.

(1) $\varphi_\psi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ esnek fonksiyonuna süreklidir denir: $\Leftrightarrow \forall\, G_B \in \tau^*$ için ${\varphi_\psi}^{-1}(G_B) \in \tau$.

(2) $\varphi_\psi : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ esnek fonksiyonuna açıktır denir : $\Leftrightarrow \forall\, F_A \in \tau$ için $\varphi_\psi(F_A) \in \tau^*$.

Eğer $\varphi_\psi : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ ve $\gamma_\delta : (Y, \tau_2) \to (Y, \tau_3)$ sürekli ise $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Gerçekten, her $e \in E$ için

$$(\gamma \circ \varphi)^{-1}(F_A)(e) = (\gamma \circ \varphi)^{-1}\big(F_A(\delta(\psi(e)))\big) = \varphi^{-1}\left(\gamma^{-1}\left(F_A\left(\delta\big(\psi(e)\big)\right)\right)\right) \text{ dir.}$$

Diğer taraftan

$$\varphi_\psi^{-1}\left(\gamma_\delta^{-1}(F_A)\right)(e) = \varphi^{-1}\left(\gamma_\delta^{-1}(F_A)\big(\psi(e)\big)\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma^{-1}\left(F_A\left(\delta\big(\psi(e)\big)\right)\right)\right) \text{ dir.}$$

Böylece $\big(\gamma_\delta \circ \varphi_\psi\big)^{-1}(F_A) = \varphi_\psi^{-1}\big(\gamma_\delta^{-1}(F_A)\big)$ olur.

Örnek 2.3.11: Sabit esnek dönüşümlerin sürekli olması gerekmez. Örneğin, $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ ve $E = \{e_0, e_1, e_2\}$ parametre kümesi için $\varphi_\psi : (X, \tau^0) \to (X, \tau^1)$ esnek dönüşümü her $x_i \in X$ için $\varphi(x_i) = x_0$ ve her $e_i \in E$ için $\psi(e_i) = e_i$ şeklinde

tanımlansın. $A = \{e_0, e_1\}$ olmak üzere $F_A \coloneqq \{(e_0, \{x_0, x_1\}), (e_1, \{x_0\}), (e_2, \emptyset)\}$ esnek kümesi verilsin. Bu takdirde $\varphi_\psi^{-1}(F_A) = \tilde{A} \notin \tau^0$ olur. Böylece sabit φ_ψ dönüşümü sürekli değildir.

Teorem 2.3.12: (X, τ_1) ve (Y, τ_2) Lowen anlamında iki esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde $\varphi_\psi: (X, \tau^0) \to (X, \tau^1)$, $\varphi(x) = y_0, \forall x \in X$ sabit esnek dönüşümü süreklidir.

İspat: $G_B \in \tau_2$ için ve her $e \in E$ için

$$\varphi_\psi^{-1}(G_B)(e) = \varphi^{-1}\left(G_B\left(\psi(e)\right)\right) = \begin{cases} X, & \psi(e) \in B \text{ ve } y_0 \in G_B\left(\psi(e)\right) \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}.$$

Buradan $A = \psi^{-1}\left(G_B^{-1}(\{y_0\})\right)$ olmak üzere $\varphi_\psi^{-1}(G_B) = \tilde{A} \in \tau_1$ olur.

Tanım 2.3.13: (X, τ) bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer bir $\mathcal{S} \subseteq S(X, E)$ ailesinin tüm elemanlarının sonlu arakesitleri τ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$' ye τ için bir alt tabandır denir.

Teorem 2.3.14: $\mathcal{S} \subseteq S(X, E)$ ve $\Phi, \tilde{E} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki τ ailesi X üzerinde bir esnek topolojidir.

$\tau = \left\{\sqcup_{i \in \Delta}\left(\sqcap_{j \in J_i}(F_A)_{i,j}\right) \mid (F_A)_{i,j} \in \mathcal{S}, \Delta - \text{keyfi}, J_i - \text{sonlu index kümesi}\right\}$.

İspat: Açıktır.

Tanım 2.3.15: X boştan farklı kümesi, her $i \in \Delta$ için (Y_i, τ_i) topolojik uzayları ve $\left(\varphi_\psi\right)_i$, X kümesinden (Y_i, τ_i) ye esnek fonksiyonları verilsin. X üzerinde $\mathcal{S} = \left\{\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(F_A) : F_A \in \tau_i, i \in \Delta\right\}$ alttabanı yardımıyla üretilen τ esnek topolojisine $\left\{\left(\varphi_\psi\right)_i\right\}_{i \in \Delta}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç topolojisi denir.

Teorem 2.3.16: X üzerinde $\left\{\left(\varphi_\psi\right)_i\right\}_{i \in \Delta}$ ailesi yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisi τ, her $i \in \Delta$ için $\left(\varphi_\psi\right)_i$ esnek fonksiyonlarını sürekli yapan en kapa topolojidir.

İspat: Açıktır.

Tanım 2.3.17: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\Delta}$ topolojik uzayları verilsin. $X(=\prod_{i\in\Delta}X_i)$ üzerindeki $\left\{\left(p_q\right)_i\right\}_{i\in\Delta}$ izdüşüm fonksiyonları yardımıyla üretilen başlangıç esnek topolojisine X üzerindeki esnek çarpım topolojisi denir. Esnek çarpım topolojisi $\prod\tau_i$ olarak gösterilir.

Teorem 2.3.18: $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in\Delta}$ esnek topolojik uzayları, $X(=\prod_{i\in\Delta}X_i)$ üzerindeki τ esnek çarpım topolojisi ve (Y,τ') esnek topolojik uzayı verilsin. Bu durumda $\varphi_\psi\colon(Y,\tau')\to(X,\tau)$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $i\in\Delta$ için $\left(p_q\right)_i\circ\left(\varphi_\psi\right)\colon(Y,\tau')\to(X_i,\tau_i)$ sürekli olmasıdır.

Teorem 2.3.19: $\left(p_q\right)_i\colon(\prod_{i\in\Delta}X_i\,,\prod_{i\in\Delta}\tau_i)\to(X_i,\tau_i)$ izdüşüm fonksiyonları açıktır.

İspat: Her $i\in\Delta$ için X_i kümeleri için E_i evrensel parametre kümeleri verilsin.

$H_A=\bigcap_{k=1}^{n}\left(p_q\right)_k^{-1}((F_A)_k)$ taban elemanını alalım. Burada $A_k\subseteq E_k$ ve $A=\bigcap_{k=1}^{n}q_k^{-1}(A_k)$ dır.

$\beta\neq 1,2,\dots,n$ ve $e_{\beta_i}\in q_\beta(\bigcap_{k=1}^{n}q_k^{-1}(A_k))=E_\beta$ için,

$$p_\beta(H_A)\left(e_{\beta_i}\right)=\bigcup_{q_\beta(e)=e_{\beta_i}}p_\beta(H_A(e))=\bigcup_{q_\beta(e)=e_{\beta_i}}p_\beta\left(\bigcap_{k=1}^{n}p_k^{-1}\left((F_A)_k\left(q_k(e)\right)\right)\right)$$
$$=X_\beta$$

Buradan $\left(p_q\right)_\beta(h_A)=\widetilde{E_\beta}\in\tau_\beta$

$\beta=k_0$, $1\leq k_0\leq n$, ve $e_{\beta_i}\in q_\beta(\bigcap_{k=1}^{n}q_k^{-1}(A_k))=A_{k_0}$ için,

$$p_\beta(H_A)\left(e_{\beta_i}\right)=\bigcup_{q_\beta(e)=e_{\beta_i}}p_\beta\left(H_A(e)\right)=\bigcup_{q_\beta(e)=e_{\beta_i}}p_\beta\left(\bigcap_{k=1}^{n}p_k^{-1}\left((F_A)_k\left(q_k(e)\right)\right)\right)$$
$$=(F_A)_{k_0}\left(e_{\beta_i}\right)$$

elde edilir.

Buradan $\left(p_q\right)_\beta(H_A)=(F_A)_{k_0}\in\tau_\beta$

2.4. Esnek Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 2.4.1: (X,τ) esnek topolojik uzayı verilsin.

(1) $\{(F_A)_i : i \in \Delta\} \subset S(X,E)$ ailesi için $\bigsqcup_{i\in\Delta}(F_A)_i = \tilde{E}$ koşulunu sağlıyorsa bu aileye X' in bir esnek örtümüdür denir.

(2) (X,τ) esnek topolojik uzayının her açık örtümünün bir sonlu alt örtümü varsa bu topolojik uzaya esnek kompakttır denir.

Tanım 2.4.2: (X,τ) bir esnek topolojik uzay, F_A kompakt ve G_B kapalı esnek küme olsun. Bu takdirde $F_A \sqcap G_B$ kompakttır.

İspat: Açıktır.

Teorem 2.4.3: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ sürekli ve örten bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda (X,τ_1) esnek kompakt ise (Y,τ_2) de esnek kompakttır.

İspat: Açıktır.

Teorem 2.4.4: (Alexander alttaban teoremi) $\mathcal{S}$, (X,τ) esnek topolojik uzayının bir alttabanı olsun. Eğer X' in alttaban elemanlarından oluşan her örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa X esnek kompakttır.

İspat: Varsayalım ki $\mathcal{S}$ den alınan her örtümün sonlu bir alt örtümü olsun fakat X esnek kompakt olmasın. Zorn Lemma'sından sonlu alt örtümü olmayan bir $\mathcal{C}$ maksimal örtümü bulunabilir. Yani, eğer $H_A \notin \mathcal{C}$ ise $\mathcal{C} \cup \{H_A\}$ ailesinin sonlu bir alt örtümü vardır.

Alttaban elemanlarından oluşan $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ ailesini ele alalım. Eğer $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ ailesi X'i örterse hipotezden bu ailenin sonlu bir alt örtümü vardır. Fakat $\mathcal{C}$'nin böyle bir alt örtümü olmayacağından $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ ailesi X'i örtmez. O halde $\exists e \in E$ için $\mathcal{C}_e \coloneqq \{G_B(e) : G_B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}\}$ ailesi X'i örtmez. $\mathcal{C}$, X'in bir örtümü olduğundan $\exists F_A \in \mathcal{C}$ için $e \in A$ ve $x \in F_A(e)$ dir. F_A açık olduğundan $\exists\{(F_A)_i : i \in \Delta\}$ taban elemanlarından oluşan ailesi için $F_A = \bigsqcup(F_A)_i$ yazılabilir. $\mathcal{S}$ alttaban olduğundan $\exists\{(G_B)_j : j \in J - \text{sonlu}\} \subset \mathcal{S}$ için $(F_A)_i = \prod(G_B)_j$ olur. $e \in A = \bigcup_{i\in\Delta} A_i$

olduğundan $\exists i_0 \in \Delta$ için $e \in A_{i_0}$ ve $x \in (F_A)_{i_0}(e)$. Ayrıca $A_{i_0} = \bigcap_{j\in J} B_j$ olduğundan $\forall j \in J$ için $e \in B_j$ ve $x \in (G_B)_j(e)$ olur. Buradan

$x \in \prod(g_B)_j\,(e) = (F_A)_{i_0}(e) \subseteq F_A(e)$ olur.

x örtülmediğinden, her $j \in J$ için $(G_B)_j \notin \mathcal{C}$ olur. $\mathcal{C}$'nin maksimalliğinden, $\forall j \in J$, $(G_B)_j$ senek kümesi ile bu esnek kümeye karşılık gelen $\mathcal{C}$'nin sonlu alt ailesi $\mathcal{C}_j$ ailesi X'i örter. Fakat bu durumda F_A ve tüm $\mathcal{C}_j$ aileleri birlikte X' örter. Bu ise çelişkidir.

Teorem 2.4.5: (Tychonoff teoremi) Eğer $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\Delta}$ esnek kompakt topolojik uzayların bir ailesi ise $(\prod_{i\in\Delta} X_i\,, \prod_{i\in\Delta} \tau_i)$ esnek çarpım topolojisi de esnek kompakttır.

İspat: $\mathcal{S}$ esnek çarpım topolojisinin alttabanı olsun. Alexander alttaban teoreminden $X = \prod_{i\in\Delta} X_i$'in alttaban elemanlarından oluşan her örtümünün sonlu bir alt örtümünün olduğunu göstermek yeterlidir.

$\Gamma \subset \mathcal{S}$, X'in bir örtümü olsun. Her $i \in \Delta$ için, $\mathcal{S}_i \coloneqq \left\{\left(p_q\right)_i^{-1}(F_A) : F_A \in \tau_i\right\}$ ailelerini tanımlayalım.

Bir $\beta \in \Delta$ için, $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$, X'i örter. Gerçekten, her β için $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$, X'i örtermeseydi $\exists e^\beta \in E = \prod_{i\in\Delta} E_i$ için $\exists y^\beta \in X : y^\beta$ elemanı

$\left(\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta\right)_{e^\beta} \coloneqq \left\{G_B\left(e^\beta\right) :\ G_B \in \Gamma \cap \mathcal{S}_\beta\right\}$ tarafından örtülemez. $x_\beta \coloneqq p_\beta\left(y^\beta\right) \in X_\beta$ elemanını ve $a_\beta \coloneqq q_\beta\left(e^\beta\right) \in E_\beta$ alalım. $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$ ailesinin elemanları $F_A \in \tau_\beta$ olmak üzere $\left(p_q\right)_\beta^{-1}(F_A)$ formunda olduğundan, kolayca görülebilir ki, $\forall G_B \in \Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$ için, $p_\beta\left(G_B\left(a_\beta\right)\right)$ kümeleri x_β elemanını kapsamaz. Fakat bu durumda $e = \left(a_\beta\right)_{\beta\in\Delta}$ için, $\Gamma_e \coloneqq \{J_C(e) : J_C \in \Gamma\}$ ailesi $x = \left(x_\beta\right)_{\beta\in\Delta}$ elemanını kapsamaz. Bu ise Γ ailesinin bir örtüm olması ile çelişir. O halde böyle bir $\beta \in \Delta$ vardır ve $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$ X'i örter.

$\{(F_A)_i : i \in J\} \subset \tau_\beta$ için $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta \coloneqq \left\{\left(p_q\right)_\beta^{-1}(F_A)_i : j \in J\right\}$ olarak gösterelim.

$\left(p_q\right)_\beta\left(\tilde{E}\right) = \widetilde{E_\beta}$ olduğundan ve $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$ X'i örttüğünden $\{(F_A)_i : i \in J\}$ ailesi de X_β örter. (Burada $\tilde{E}$, X üzerindeki, $\widetilde{E_\beta}$ ise X_β üzerindeki evrensel kümelerdir.)

X_β kompakt olduğundan J' nin sonlu bir J_0 alt kümesi vardır ve $\widetilde{E_\beta} = \bigsqcup_{j\in J_0}(F_A)_j$.

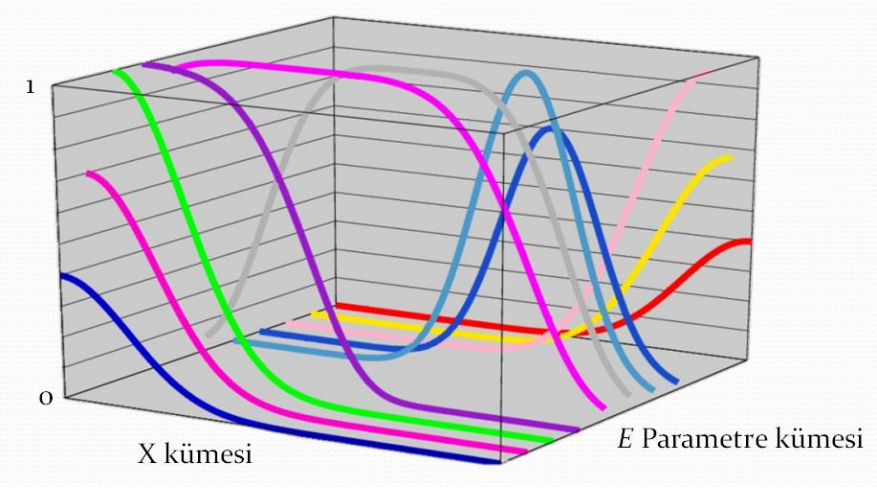
Böylece $\left\{\left(p_q\right)_\beta^{-1}(F_A)_i : j \in J_0\right\}$ ailesi $\Gamma \cap \mathcal{S}_\beta$ nin sonlu bir alt örtümü olur.

3. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle bulanık esnek kümeler ve temel özellikleri özetlenmiştir Daha sonra bulanık esnek topolojik uzay kavramı Sostak anlamında tanımlanmıştır. Taban ve süreklilik kavramları tanımlanarak detaylı olarak incelenmiş ve bulanık esnek topolojik uzaylar için başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi kavramları tanımlanarak incelenmiştir.

3.1. Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 3.1.1: (Roy ve Maji, 2007) X boştan farklı bir küme olsun ve $A \subseteq E$ olsun. $f_A : E \to F(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir bulanık esnek küme denir (Şekil 3.1).
Tanıma göre bir bulanık esnek küme bulanık kümelerin bir ailesi olarak göz önüne alınabilir. Buna göre $f_A := \{f_e : e \in E\}$ olarak yazılabilir. Burada her $e \in A$ için $f_e := f_A(e) : X \to I$ boştan farklı bir bulanık küme ve her $e \in E \backslash A$ için $f_e := f_A(e) : X \to I$ ($f_e = \bar{0}$) boş bulanık kümedir.
X üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin ailesi $F(X, E)$ olarak gösterilir.



Şekil 3.1 f_A bulanık esnek kümesi

Örnek 3.1.2: X üzerindeki F_A esnek kümesini bir bulanık esnek kümesi olarak düşünebiliriz:

$e \in E$ için $F_A(e)$ kümesinin karakteristik fonksiyonu f_e olarak tanımlansın. Yani,

$$f_e(x) = \chi_{F_A(e)}(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in F(e) \\ 0 \ , & \text{diğer} \end{cases}$$

Buradan, F_A esnek kümesi bir f_A bulanık esnek kümesi olarak göz önüne alınabilir.

Örnek 3.1.3: f_E bulanık esnek kümesi bir A kişisinin satın almayı düşündüğü elbiselerin özelliklerini tanımlasın.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ elbiselerin kümesi olsun.

$E = \{\text{uzun}, \text{pahalı}, \text{renkli}, \text{sade}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

$f_{e_1} = \left\{\frac{x_1}{1.0}, \frac{x_2}{0}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0.4}\right\}$, $\quad f_{e_2} = \left\{\frac{x_1}{0.5}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0}, \frac{x_4}{0}\right\}$,

$f_{e_3} = \left\{\frac{x_1}{0.2}, \frac{x_2}{1.0}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_4}{1.0}\right\}$, $\quad f_{e_4} = \left\{\frac{x_1}{0.1}, \frac{x_2}{0}, \frac{x_3}{0.7}, \frac{x_4}{1.0}\right\}$ olarak alalım.

Böylece, $F(X)$' in $\{f_{e_i} : i = 1,2,3,4\}$ alt ailesi f_E bulanık esnek kümesidir.

Tanım 3.1.4: (Roy ve Maji, 2007) $f_A, g_B \in F(X, E)$ iki bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e \leq g_e$ sağlanıyorsa f_A bulanık esnek kümesine g_B bulanık esnek kümesinin bir alt kümesi denir ve $f_A \sqsubseteq g_B$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.5: (Roy ve Maji, 2007) $f_A, g_B \in F(X, E)$ iki bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = g_e$ sağlanıyorsa f_A bulanık esnek kümesi g_B bulanık esnek kümesine eşittir denir ve $f_A = g_B$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.6: (Roy ve Maji, 2007) $f_A, g_B \in F(X, E)$ iki bulanık esnek kümesi verilsin. f_A ve g_B bulanık esnek kümelerinin birleşimi $h_C = f_A \sqcup g_B$ olarak gösterilir ve $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için $h_e = f_e \vee g_e$ dir.

Tanım 3.1.7: (Roy ve Maji, 2007) $f_A, g_B \in F(X, E)$ iki bulanık esnek kümesi verilsin. f_A ve g_B bulanık esnek kümelerinin kesişimi $h_C = f_A \sqcap g_B$ olarak gösterilir ve $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$ için $h_e = f_e \wedge g_e$ dir.

Tanım 3.1.8: Bir bulanık esnek f_A kümesinin tümleyeni f_A^c oarak gösterilir ve her $e \in E$ için $f_e^c = \bar{1} - f_e$ dir.
Açık olarak görülebilir ki $(f_A^c)^c = f_A$ dır.
Tanım 3.1.9: (Roy ve Maji, 2007) (Boş bulanık esnek küme) $f_E \in F(X,E)$ bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{0}$ ise f_E bulanık esnek kümesine boş bulanık esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 3.1.10: (Roy ve Maji, 2007) (Evrensel bulanık esnek küme) $f_E \in F(X,E)$ bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{1}$ ise f_E bulanık esnek kümesine evrensel bulanık esnek küme denir ve $\tilde{E}$ ile gösterilir.
Açıkça görülebilir ki $\Phi^c = \tilde{E}$ ve $\tilde{E}^c = \Phi$ dir.

Tanım 3.1.11: (λ-Evrensel bulanık esnek küme) $f_E \in F(X,E)$ bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{\lambda}$ ise f_E bulanık esnek kümesine λ-evrensel bulanık esnek küme denir ve $\tilde{E}^\lambda$ ile gösterilir.
Bu tanıma göre $\tilde{E} = \tilde{E}^1$ ve $\Phi = \tilde{E}^0$ dir.
Açıkça görülebilir ki $\left(\tilde{E}^\lambda\right)^c = \tilde{E}^{1-\lambda}$ dır.

Önerme 3.1.12: (Ahmad ve Kharal, 2009) J bir indeks kümesi ve $f_A, g_B, h_C, (f_A)_i, (g_B)_i \in F(X,E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.
(1) $f_A \sqcap f_A = f_A$, $f_A \sqcup f_A = f_A$
(2) $f_A \sqcap g_B = g_B \sqcap f_A$, $f_A \sqcup g_B = g_B \sqcup f_A$
(3) $f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$, $f_A \sqcap (g_B \sqcap h_C) = (f_A \sqcap g_B) \sqcap h_C$
(4) $f_A \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in J}(g_B)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)$,
$f_A \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in J}(g_B)_i\right) = \bigsqcap_{i\in J}(f_A \sqcup (g_B)_i)$
(5) $\Phi \sqsubseteq f_A \sqsubseteq \tilde{E}$, $\tilde{E}^\lambda \sqsubseteq \tilde{E}$
(6) $\left(\bigsqcap_{i\in J}(f_A)_i\right)^c = \bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i^c$, $\left(\bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i\right)^c = \bigsqcap_{i\in J}(f_A)_i^c$
(7) $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow g_B^c \sqsubseteq {f_A}^c$.

Tanım 3.1.13: (Aygünoğlu ve Aygün, 2009) $\varphi : X \to Y$, $\psi : E \to F$ iki fonksiyon ve E, F sırasıyla X ve Y için parametre evrensel kümeleri olsun. φ_ψ fonksiyonuna X' den Y' ye bir bulanık esnek fonksiyon denir.

(1) $f_A \in F(X,E)$ olsun. f_A' nin φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(f_A)$, Y üzerinde bir bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varphi_\psi(f_A)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\psi(e)=k} \bigvee_{\varphi(x)=y} f_e(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad \forall\, k \in F, \forall y \in Y.$$

(2) $g_B \in F(Y,F)$ olsun. g_B' nin φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $\varphi_\psi{}^{-1}(g_B)$, X üzerinde bir bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\varphi_\psi{}^{-1}(g_B)_e(x) = g_{\psi(e)}\big(\varphi(x)\big)$, $\forall\, e \in E, \forall x \in X$.

Eğer φ ve ψ bire-bir ise φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu da bire-birdir.

Eğer φ ve ψ örten ise φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu da örtendir.

φ_ψ X' den Y' ye ve γ_δ Y' den Z' ye birer bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu durumda φ_ψ ve γ_δ nın bileşkesi $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi := (\gamma \circ \varphi)_{(\delta \circ \psi)}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.14: (Kharal ve Ahmad, 2009) X ve Y crisp kümeler ve $f_A, (f_A)_i \in F(X,E)$ ve $g_B, (g_B)_i \in F(Y,F)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $(f_A)_1 \sqsubseteq (f_A)_2 \;\Rightarrow\; \varphi_\psi((f_A)_1) \sqsubseteq \varphi_\psi((f_A)_2)$

(2) $(g_B)_1 \sqsubseteq (g_B)_2 \;\Rightarrow\; \varphi_\psi{}^{-1}((g_B)_1) \sqsubseteq \varphi_\psi{}^{-1}((g_B)_2)$

(3) $f_A \sqsubseteq \varphi_\psi{}^{-1}\left(\varphi_\psi(f_A)\right)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_\psi\left(\varphi_\psi{}^{-1}(g_B)\right) \sqsubseteq g_B$, φ_ψ örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_\psi\big(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i\big) \sqsubseteq \sqcap_{i\in J}\varphi_\psi((f_A)_i)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_\psi\big(\sqcup_{i\in J}(f_A)_i\big) = \sqcup_{i\in J}\varphi_\psi((f_A)_i)$

(7) $\varphi_\psi{}^{-1}\big(\sqcup_{i\in J}(g_B)_i\big) = \sqcup_{i\in J}\varphi_\psi{}^{-1}((g_B)_i)$

(8) $\varphi_\psi{}^{-1}\big(\sqcap_{i\in J}(g_B)_i\big) = \sqcap_{i\in J}\varphi_\psi{}^{-1}((g_B)_i)$

(9) $\varphi_\psi{}^{-1}({g_B}^c) = (\varphi_\psi{}^{-1}(g_B))^c$

(10) $(\varphi_\psi(f_A))^c \sqsubseteq \varphi_\psi({f_A}^c)$

(11) $\varphi_\psi{}^{-1}(\tilde{E}_Y) = \tilde{E}_X \quad , \quad \varphi_\psi{}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$

(12) φ_ψ örten ise $\varphi_\psi(\tilde{E}_X) = \tilde{E}_Y$

(13) $\varphi_\psi(\Phi_X) = \Phi_Y$.

Tanım 3.1.15: (Bulanık esnek kümelerin kartezyen çarpımı) X_1 ve X_2 iki boştan farklı evrensel küme ve $f_A \in F(X_1, E_1)$ ve $g_B \in F(X_2, E_2)$ olsun. $f_A \times g_B$ kartezyen çarpımı $(f \times g)_{A\times B}$ olarak gösterilir ve her $(e,k) \in E_1 \times E_2$ için $(f \times g)_{(e,k)}(x,y) = f_e(x) \wedge g_k(y)$ (her $(x,y) \in X_1 \times X_2 \ için$) olarak tanımlanır.
Bu tanıma gore $(f \times g)_{A\times B}$ bulanık esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Tanım 3.1.16: Her $i \in \Delta$ için $(f_A)_i \coloneqq (f_i)_{A_i} \in F(X_i, E_i)$ olsun. $(f_A)_i$ bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i \coloneqq (\prod_{i\in\Delta} f_i)_{\prod_{i\in\Delta} A_i}$ olarak gösterilir ve her $e = (e_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta} E_i$ için $(\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i)(e) \coloneqq (\prod_{i\in\Delta} f_i)_{(e_i)_{i\in\Delta}}(x) = \wedge_{i\in\Delta}(f_i)_{e_i}(x_i)$ ile tanımlanır ($\forall x = (x_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta} X_i$). Burada $\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i$ bulanık esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ kartezyen çarpımı üzerinde bir bulanık esnek kümedir.

Tanım 3.1.17: $p_j: \prod_{i\in\Delta} X_i \to X_j$ ve $q_j: \prod_{i\in\Delta} E_i \to E_j$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Bulanık esnek kümeler üzerindeki $(p_q)_j \coloneqq (p_j)_{q_j}$ izdüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.
$\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i$ esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ üzerinde bir esnek küme olsun. $i \in \Delta$ için
$(p_q)_j(\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i) = (f_A)_j$.

3.2. Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

Bulanık esnek topolojik uzayları detaylı olarak tanımlayabilmek için öncelikle bulanık topolojik uzayları hatırlayalım: Bir bulanık topoloji (X, δ) ikilisi ile gösterilir ve burada $\delta : F(X) \to I$ her bulanık kümeyi ne derecede açık olduğunu belirten bir reel sayıya götüren dönüşümdür. Bu yaklaşım ile δ, $F(X)$ üzerinde bir bulanık kümedir. Bu yaklaşımı temel alarak bulanık esnek topoloji $F(X,E)$ üzerinde

parametrelere göre bir bulanık esnek kümenin ne derecede açık olduğunu gösteren bir bulanık esnek küme olmalıdır.

Tanım 3.2.1: $\mathcal{T}_E : E \to F\big(F(X,E)\big)$ dönüşümü her $e \in E$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{T}_E$ ye X üzerinde bir bulanık esnek topoloji denir.

(O1) $\mathcal{T}_e(\Phi) = \mathcal{T}_e\big(\tilde{E}\big) = 1.$

(O2) $\mathcal{T}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \mathcal{T}_e(f_A) \wedge \mathcal{T}_e(g_B), \forall f_A g_B \in F(X,E).$

(O3) $\mathcal{T}_e\big(\bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i\big) \leq \bigwedge_{i\in J} \mathcal{T}_e((f_A)_i), \forall (f_A)_i \in F(X,E), i \in J.$

$(X, \mathcal{T}_E)$ ikilisine bulanık esnek topolojik uzay denir ve $\mathcal{T}_e(f_A)$ değeri ise $e \in E$ parametresine göre f_A bulanık esnek kümesinin açıklık derecesini gösterir.

X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_E^1$ ve $\mathcal{T}_E^2$ bulanık esnek topolojileri verilsin. Eğer her $e \in E$ ve $f_A \in S(X,E)$ için $\mathcal{T}_e^2(f_A) \leq \mathcal{T}_e^1(f_A)$ sağlanıyor ise $\mathcal{T}_E^1$ bulanık esnek topolojisine $\mathcal{T}_E^2$ bulanık esnek topolojisinden daha incedir denir ve bu $\mathcal{T}_E^2 \sqsubseteq \mathcal{T}_E^1$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.2: δ, X üzerinde bir Sostak anlamında bir bulanık topoloji olsun. $E = I$ ve $\mathcal{T}_E: E \to F(X)$, $\mathcal{T}_e \coloneqq \{\mu : \delta(\mu) \geq e\}$, $\forall e \in E$ (her parametreye karşılık Chang anlamında seviyesel bulanık topoloji) olarak tanımlansın. Öte yandan Chang anlamındaki her topoloji Sostak anlamında bir topoloji belirteceğinden $\mathcal{T}_E$ dönüşümü X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

Örnek 3.2.3: Bir esnek topolojideki (Tanım 2.3.1) tüm açık esnek kümelerin derecesini her bir parametre için 1 değerine açık olmayan esnek kümelerin derecesini 0 değerine götüren dönüşüm bir bulanık esnek topolojidir. Böylece her esnek topoloji bir bulanık esnek topoloji olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bulanık esnek topolojik uzaylar esnek topolojik uzayların bir genelleştirilmesidir.

Tanım 3.2.4: $(X, \mathcal{T}_E)$ ve $(Y, \mathcal{T}_F^*)$ bulanık esnek topolojik uzayları ve X' den Y' ye φ_ψ bulanık esnek dönüşümü verilsin. Eğer her $e \in E$ ve $g_B \in F(Y,F)$ için $\mathcal{T}_e\big(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\big) \geq \mathcal{T}^*_{\psi(e)}(g_B)$ sağlanıyorsa φ_ψ dönüşümüne süreklidir denir.

Bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisi $\mathbb{FSTOP}$ ile gösterilir ve morfizmleri sürekli bulanık esnek dönüşümlerdir.

Önerme: X üzerinde bulanık esnek topolojilerinin bir $\{\mathcal{T}_E^j\}_{j\in J}$ ailesi verilsin. Bu takdirde $\mathcal{T}_E \coloneqq \bigwedge_{j\in J}\mathcal{T}_E^j$, $\mathcal{T}_e(f_A) = \bigwedge_{j\in J}\mathcal{T}_e^j(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü de X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

Tanım 3.2.5: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{C}_E : E \to F\big(F(X,E)\big)$ dönüşümüne X üzerinde bir bulanık esnek kotopoloji denir. Her $e \in E$ için

(C1) $\mathcal{C}_e(\Phi) = \mathcal{C}_e\big(\tilde{E}\big) = 1.$

(C2) $\mathcal{C}_e(f_A \sqcup g_B) \geq \mathcal{C}_e(f_A) \wedge \mathcal{C}_e(g_B), \forall f_A, g_B \in F(X,E).$

(C3) $\mathcal{C}_e\big(\bigsqcap_{i\in J}(f_A)_i\big) \leq \bigwedge_{i\in J}\mathcal{C}_e((f_A)_i)\,, \forall (f_A)_i \in F(X,E), i \in J.$

$(X, \mathcal{C}_E)$ ikilisine bulanık esnek kotopolojik uzay denir.

$\mathcal{T}_E$, X üzerinde bir bulanık esnek topoloji olsun. Bu durumda $\mathcal{C}_E : E \to F\big(F(X,E)\big)$, $\mathcal{C}_e(f_A) \coloneqq \mathcal{T}_e^c(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü X üzerinde bir kotopolojidir.

$\mathcal{C}_E$, X üzerinde bir bulanık esnek topoloji olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_E : E \to F\big(F(X,E)\big)$, $\mathcal{T}_e(f_A) \coloneqq \mathcal{C}_e^c(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 3.2.6: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{B}_E : E \to F(F(X,E))$ dölüşümüne X üzerinde bir bulanık esnek taban denir. Her $e \in E$ için

(B1) $\mathcal{B}_e(\Phi) = \mathcal{B}_e\big(\tilde{E}\big) = 1.$

(B2) $\mathcal{B}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \mathcal{B}_e(f_A) \wedge \mathcal{B}_e(g_B), \forall f_A g_B \in F(X,E).$

Teorem 3.2.7: $\mathcal{B}$, X üzerinde bir bulanık esnek taban olsun. $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E : E \to F\big(F(X,E)\big)$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A) = \bigvee\big\{\bigwedge_{j\in\Delta}\mathcal{B}_e\big((f_A)_j\big) : f_A = \bigsqcup_{i\in J}(f_A)_j\big\}, \forall e \in E.$

Bu durumda $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E$, $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A) \geq \mathcal{B}_e(f_A)$, $\forall e \in E, f_A \in F(X,E)$, koşulunu sağlayan en dar topolojidir.

İspat: (O1) $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E$' nin tanımından açıktır.

(O2) Her $\big\{(f_A)_j : f_A = \bigsqcup_{i\in\Delta}(f_A)_j\big\}$ ve $\{(g_B)_k : g_B = \bigsqcup_{k\in\Gamma}(g_B)_k\}$ aileleri için en az bir $\big\{(f_A)_j \sqcap (g_B)_k\big\}$ ailesi vardır öyle ki

$f_A \sqcap g_B = \big(\bigsqcup_{i\in\Delta}(f_A)_j\big) \sqcap \big(\bigsqcup_{k\in\Gamma}(g_B)_k\big) = \bigsqcup_{i\in\Delta,k\in\Gamma}((f_A)_j \sqcap (g_B)_k).$

Buradan her $e \in E$ için,

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A \sqcap g_B) \geq \bigwedge_{i\in\Delta,k\in\Gamma} \mathcal{B}_e\big((f_A)_j \sqcap (g_B)_k\big)$$
$$\geq \bigwedge_{i\in\Delta,k\in\Gamma} \mathcal{B}_e\big((f_A)_j\big) \wedge \mathcal{B}_e((g_B)_k)$$
$$\geq \bigwedge_{i\in\Delta,k\in\Gamma} \mathcal{B}_e\big((f_A)_j\big) \wedge \bigwedge_{i\in\Delta,k\in\Gamma} \mathcal{B}_e((g_B)_k)$$
$$\geq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A) \wedge (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(g_B)$$

elde edilir.

(O3) $e \in E$ ve $\{(f_A)_{i_k} : (f_A)_i = \bigsqcup_{i\in K_i}(f_A)_{i_k}\}$ koşulunu sağlayan K_i indeks kümelerinin ailesi P_i ve $f_A = \bigsqcup_{i\in\Gamma}(f_A)_i = \bigsqcup_{i\in\Gamma}\bigsqcup_{k\in K_i}(f_A)_{i_k}$ olsun. Her $i \in \Gamma$ ve $\Psi(i) = K_i$ olacak şekilde $\Psi \in \prod_{i\in\Gamma} P_i$ için $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A) \geq \bigwedge_{i\in\Delta}\big(\bigwedge_{k\in K_i} \mathcal{B}_e\big((f_A)_{i_k}\big)\big)$' dir.

$a_{i,\Psi_i} = \bigwedge_{k\in K_i} \mathcal{B}_e\big((f_A)_{i_k}\big)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır:

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e(f_A) \geq \bigvee_{\Psi\in\prod_{i\in\Gamma} P_i}\big(\bigwedge_{i\in\Gamma} a_{i,\Psi_i}\big)$$
$$= \bigwedge_{i\in\Gamma}\big(\bigvee_{M_i\in P_i} a_{i,M_i}\big)$$
$$= \bigwedge_{i\in\Gamma}\big(\bigvee_{M_i\in P_i}\big(\bigwedge_{m\in M_i} \mathcal{B}_e\big((f_A)_{i_m}\big)\big)\big)$$
$$\geq \bigwedge_{i\in\Gamma}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e((f_A)_i).$$

Böylece $(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E$, X üzerinde bir bulanık esnek topoloji olur.

$\mathcal{T}_E$, X üzerinde $\mathcal{T}_E \sqsupseteq \mathcal{B}_E$ koşulunu sağlayan bir bulanık esnek topoloji $f_A = \bigsqcup_{j\in\Delta}(f_A)_j$ olsun. Bu durumda,

$\mathcal{T}_e(f_A) \geq \bigwedge_{j\in\Delta}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e\big((f_A)_j\big) \geq \bigwedge_{j\in\Delta} \mathcal{B}_e\big((f_A)_j\big)$ olur.

Eğer $\{(f_A)_j : (f_A)_i = \bigsqcup_{j\in\Delta}(f_A)_j\}$ ailesi için supremum alınırsa $\mathcal{T}_E \sqsupseteq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E$ elde edilir.

Lemma 3.2.8: X üzerinde $\mathcal{T}_E$ bulanık esnek topolojisi ve Y üzerinde $\mathcal{B}_F$ bulanık esnek tabanı verilsin. Bu takdirde X' den Y' ye φ_ψ bulanık esnek dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $g_B \in F(Y,F)$ için $\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\right) \geq \mathcal{B}_{\psi(e)}(g_B)$ dir.

İspat: ($\Rightarrow$) φ_ψ, X' den Y' ye sürekli bir bulanık esnek dönüşüm ve $g_B \in F(Y,F)$ olsun. Bu durumda her $e \in E$ için $\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\right) \geq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_{\psi(e)}(g_B) \geq \mathcal{B}_{\psi(e)}(g_B)$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Her $e \in E$ ve $g_B \in S(Y,F)$ için $\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\right) \geq \mathcal{B}_{\psi(e)}(g_B)$ olsun. Her $\{(h_C)_j : h_C = \bigsqcup_{j\in\Gamma}(h_C)_j\}$ ailesi için,

$$\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}(h_C)\right) \geq \mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\sqcup_{j\in\Gamma}(h_C)_j\right)\right)$$
$$= \mathcal{T}_e\left(\sqcup_{j\in\Gamma}\varphi_\psi^{-1}\left((h_C)_j\right)\right)$$
$$= \wedge_{j\in\Gamma}\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}\left((h_C)_j\right)\right)$$
$$\geq \wedge_{j\in\Gamma}\mathcal{B}_{\psi(e)}\left((h_C)_j\right).$$

Eğer $\left\{(h_C)_j : h_C = \sqcup_{j\in\Gamma}(h_C)_j\right\}$ ailesi üzerinden supremum alınırsa

$\mathcal{T}_e\left(\varphi_\psi^{-1}(h_C)\right) \geq (\mathcal{T}_\mathcal{B})_{\psi(e)}(h_C)$.

Teorem 3.2.9: $\left\{\left(X_i, (\mathcal{T}_i)_{E_i}\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi X bir küme ve E, X için uygun parametreler kümesi ve $\varphi_i : X \to X_i$, $\psi_i : E \to E_i$ olsun. $\mathcal{B}_E : E \to F\left(F(X,E)\right)$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım. $\vee$ ile $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \Gamma$ sonlu indeks kümeleri üzerinden supremum alınmak üzere

$$\mathcal{B}_E(f_A) = \vee\left\{\wedge_{j=1}^{n}\left(\mathcal{T}_{k_j}\right)_{\psi_{k_j}(e)}\left((f_A)_{k_j}\right) : f_A = \sqcap_{j=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{k_j}^{-1}\left((f_A)_{k_j}\right)\right\}.$$

Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $\mathcal{B}_E$, X üzerinde bir bulanık esnek tabandır.

2) $\mathcal{B}_E$ ile üretilen $(\mathcal{T}_\mathcal{B})_E$ bulanık esnek topolojisi $\left(\varphi_\psi\right)_i$, $i \in \Gamma$, dönüşümlerini sürekli yapan X üzerindeki en dar bulanık esnek topolojidir ve bu topolojiye başlangıç bulanık esnek topoloji denir.

3) $\varphi_\psi: (Y, \mathcal{T}_F^*) \to (X, (\mathcal{T}_\mathcal{B})_E)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_\psi\right)_i \circ \varphi_\psi : (Y, \mathcal{T}_F^*) \to \left(X_i, (\mathcal{T}_i)_{E_i}\right)$ süreklidir.

İspat: 1) (B1) $\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}(\Phi) = \Phi$ ve $\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}\left(\tilde{E}\right) = \tilde{E}$ olduğundan her $e \in E$ için $\mathcal{B}_e(\Phi) = \mathcal{B}_e\left(\tilde{E}\right) = 1$ dir.

(B2) Γ' nın $f_A = \sqcap_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)$ ve $g_B = \sqcap_{j=1}^{m}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left((g_B)_{j_i}\right)$ koşullarını sağlayan sonlu $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ ve $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ alt kümeleri göz önüne alınsın. Bu takdirde $f_A \sqcap g_B = \sqcap_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right) \sqcap \sqcap_{j=1}^{m}\left(\varphi_\psi\right)_{j_i}^{-1}\left((g_B)_{j_i}\right)$ olur.

Ayrıca her $k \in K \cap J$ için

$\left(\varphi_\psi\right)_k^{-1}((f_A)_k) \sqcap \left(\varphi_\psi\right)_k^{-1}((g_B)_k) = \left(\varphi_\psi\right)_k^{-1}((f_A)_k \sqcap (g_B)_k)$ olur.

Buna göre $f_A \sqcap g_B = \sqcap_{m_i\in K\cup J}\left((h_C)_{m_i}\right)$ yazılabilir. Burada

$$(h_C)_{m_i} = \begin{cases} (f_A)_{m_i}, & m_i \in K - (K \cap J) \\ (g_B)_{m_i}, & m_i \in J - (K \cap J) \\ (f_A)_{m_i} \sqcap (g_B)_{m_i}, & m_i \in K \cap J \end{cases}$$ dir.

Böylece her $e \in E$ için

$$\mathcal{B}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \wedge_{j \in K \cup J} (\mathcal{T}_j)_{\psi_j(e)}((h_C)_j)$$
$$\geq \left(\wedge_{i=1}^{n} (\mathcal{T}_{k_i})_{\psi_{k_i}(e)}((f_A)_{k_i})\right) \wedge \left(\wedge_{i=1}^{m} (\mathcal{T}_{j_i})_{\psi_{j_i}(e)}((g_B)_{j_i})\right)$$

elde edilir. Eğer bu özelliği sağlayan tüm sonlu K ve J kümeleri için supremum alınırsa, her $e \in E$ için

$\mathcal{B}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \mathcal{B}_e(f_A) \sqcap \mathcal{B}_e(g_B)$ elde edilir.

2) Her $(f_A)_i \in S(X_i, E_i)$, $i \in \Gamma$, ve her $e \in E$ için

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_e\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}((f_A)_i)\right) \geq \mathcal{B}_e\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}((f_A)_i)\right)$$
$$\geq (\mathcal{T}_i)_{\psi_i(e)}((f_A)_i)$$

elde edilir.

Böylece her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_\psi\right)_i : (X, (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E) \to \left(X_i, (\mathcal{T}_i)_{E_i}\right)$ süreklidir.

$\mathcal{T}_E'$, X üzerinde bir bualnık esnek topoloji ve her $i \in \Gamma$ için $\left(\varphi_\psi\right)_i : (X, \mathcal{T}_E') \to \left(X_i, (\mathcal{T}_i)_{E_i}\right)$ sürekli olsun. Bu takdirde her $i \in \Gamma$ ve $e \in E$ için

$\mathcal{T}_e'\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}((f_A)_i)\right) \geq (\mathcal{T}_i)_{\psi_i(e)}((f_A)_i)$ sağlanır.

Γ' nın $f_A = \prod_{i=1}^{n} \left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ altkümeleri için

$$\mathcal{T}_e'(f_A) \geq \wedge_{i=1}^{n} \mathcal{T}_e'\left(\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)\right) \geq \wedge_{i=1}^{n} (\mathcal{T}_{k_i})_{\psi_{k_i}(e)}\left((f_A)_{k_i}\right)$$ dir.

Tüm sonlu K altkümeleri için supremum alındığında her $e \in E$ için $\mathcal{T}_e'(f_A) \geq \mathcal{B}_e(f_A)$ elde edilir. Buna göre Teorem 2.1 den $\mathcal{T}_E' \sqsupseteq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E$ elde edilir.

3) ($\Rightarrow$) φ_ψ: $(Y, \mathcal{T}_F^*) \to (X, (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_E)$ sürekli olsun. Her $i \in \Gamma, d \in F$ ve $(f_A)_i \in F(X_i, E_i)$ için

$$\mathcal{T}_d^*\left((\varphi_i \circ \varphi)^{-1}_{\psi_i \circ \psi}((f_A)_i)\right) = \mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}((f_A)_i)\right)\right)$$
$$\geq (\mathcal{T}_{\mathcal{B}})_{\psi(d)}\left(\left(\varphi_\psi\right)_i^{-1}((f_A)_i)\right)$$
$$\geq (\mathcal{T}_i)_{(\psi_i \circ \psi)(d)}((f_A)_i)$$

olur. Buradan $\left(\varphi_\psi\right)_i \circ \varphi_\psi$ sürekli olur.

($\Leftarrow$) Γ' nın $f_A = \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)$ koşullunu sağlayan tüm sonlu $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ altkümeleri için $\left(\varphi_\psi\right)_{k_i} \circ \varphi_\psi : (Y, \mathcal{T}_F^*) \to \left(X_{k_i}, \left(\mathcal{T}_{k_i}\right)_{E_{k_i}}\right)$ sürekli olduğundan her $d \in F$ için $\mathcal{T}_d^*\left(\left(\varphi_{k_i} \circ \varphi\right)_{\psi_{k_i}\circ\psi}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)\right) \geq \left(\mathcal{T}_{k_i}\right)_{\left(\psi_{k_i}\circ\psi\right)(d)}\left((f_A)_{k_i}\right)$ sağlanır.

Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(f_A)\right) &= \mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)\right)\right) \\
&= \mathcal{T}_d^*\left(\prod_{i=1}^{n}\varphi_\psi^{-1}\left(\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)\right)\right) \\
&\geq \bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}\left(\left(\varphi_\psi\right)_{k_i}^{-1}\left((f_A)_{k_i}\right)\right)\right) \\
&\geq \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\mathcal{T}_{k_i}\right)_{\left(\psi_{k_i}\circ\psi\right)(d)}\left((f_A)_{k_i}\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tüm sonlu K altkümeleri için supremum alındığında her $d \in F$ ve $f_A \in F(X, E)$ için $\mathcal{T}_d^*\left(\varphi_\psi^{-1}(f_A)\right) \geq \mathcal{B}_{\psi(d)}(f_A)$ elde edilir. Lemma 3.2.8 den $\varphi_\psi : (Y, \mathcal{T}_F^*) \to (X, (\mathcal{T}_\mathcal{B})_E)$ sürekli olur.

Teorem 3.2.10: Bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisi $\mathbb{FSTOP}$ kümeler kategorisi $\mathbb{SET}$ üzerinde $V(X, \mathcal{T}_E) = X$ ve $V\left(\varphi_\psi\right) = \varphi$ olarak tanımlanan $V : \mathbb{FSTOP} \to \mathbb{SET}$ unutkan funktoruna göre bir topolojik kategoridir.

İspat: Teorem 3.2.9 den kolayca görülür.

Tanım 3.2.11: $\left\{\left(X_i, (\mathcal{T}_i)_{E_i}\right)\right\}_{i\in\Gamma}$ bulanık esnek topolojik uzayların bir ailesi $X \coloneqq \prod_{i\in\Gamma} X_i$ ve $E \coloneqq \prod_{i\in\Gamma} E_i$ olsun. Her $i \in \Gamma$ için $p_i : X \to X_i$, $q_i : E \to E_i$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. Bu takdirde X üzerinde $\left\{\left(p_q\right)_i\right\}_{i\in\Gamma}$ bulanık esnek izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan en dar topolojiye çarpım bulanık esnek topolojisi denir.

4. L-BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, öncelikle L-bulanık esnek kümeler tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra L-bulanık esnek topolojik uzay ve güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay kavramları verilerek kompaktlık kavramı ve kompaktlığın farklı karakterizasyonları detaylı olarak incelenmiştir.

4.1. L-Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 4.1.1: X boştan farklı bir küme olsun ve $A \subseteq E$ olsun. $f_A : E \to L(X)$ dönüşümüne X üzerinde bir bulanık esnek küme denir.
Tanıma göre bir bulanık esnek küme bulanık kümelerin bir ailesi olarak göz önüne alınabilir. Buna göre $f_A \coloneqq \{f_e : e \in E\}$ olarak yazılabilir. Burada her $e \in A$ için $f_e \coloneqq f_A(e) : X \to L$ boştan farklı bir L-bulanık küme ve her $e \in E \backslash A$ için $f_e \coloneqq f_A(e) : X \to I$ ($f_e = \bar{0}$) boş bulanık kümedir.
X üzerindeki tüm L-bulanık esnek kümelerin ailesini $L(X, E)$ olarak gösterilir.

Tanım 4.1.2: $f_A, g_B \in L(X, E)$ iki L-bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e \leq g_e$ sağlanıyorsa f_A L-bulanık esnek kümesine g_B L-bulanık esnek kümesinin bir alt kümesi denir ve $f_A \sqsubseteq g_B$ olarak gösterilir.

Tanım 4.1.3: $f_A, g_B \in L(X, E)$ iki L-bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = g_e$ sağlanıyorsa f_A L-bulanık esnek kümesi g_B L-bulanık esnek kümesine eşittir denir ve $f_A = g_B$ olarak gösterilir.

Tanım 4.1.4: $f_A, g_B \in L(X, E)$ iki L-bulanık esnek kümesi verilsin. f_A ve g_B L-bulanık esnek kümelerinin birleşimi $h_C = f_A \sqcup g_B$ olarak gösterilir ve $C = A \cup B$ olmak üzere her $e \in C$ için $h_e = f_e \vee g_e$ olarak tanımlanır.

Tanım 4.1.5: $f_A, g_B \in L(X,E)$ iki L-bulanık esnek kümesi verilsin. f_A ve g_B L-bulanık esnek kümelerinin kesişimi $h_C = f_A \sqcap g_B$ olarak gösterilir ve $C = A \cap B$ olmak üzere her $e \in C$ için $h_e = f_e \wedge g_e$ dir.

Tanım 4.1.6: Bir L-bulanık esnek f_A kümesinin tümleyeni f_A^c oarak gösterilir ve her $e \in E$ için $f_e^c = f_e'$ olarak tanımlanır.
Ayrıca açık olarak görülebilir ki $(f_A^c)^c = f_A$ dır.

Tanım 4.1.7: (Boş L-bulanık esnek küme) $f_E \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{0}$ ise f_E L-bulanık esnek kümesine boş L-bulanık esnek küme denir ve bu Φ ile gösterilir.

Tanım 4.1.8: (Evrensel L-bulanık esnek küme) $f_E \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{1}$ ise f_E L-bulanık esnek kümesine evrensel L-bulanık esnek küme denir ve bu $\tilde{E}$ ile gösterilir.
Açıkça görülebilir ki $\Phi^c = \tilde{E}$ ve $\tilde{E}^c = \Phi$ dir.

Tanım 4.1.9: (λ-Evrensel L-bulanık esnek küme) $f_E \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kümesi verilsin. Eğer her $e \in E$ için $f_e = \bar{\lambda}$ ise f_E L-bulanık esnek kümesine λ-evrensel L-bulanık esnek küme denir ve $\tilde{E}^\lambda$ ile gösterilir.
Bu tanıma göre $\tilde{E} = \tilde{E}^1$ ve $\Phi = \tilde{E}^0$ olur.
Açıkça görülebilir ki $\left(\tilde{E}^\lambda\right)^c = \tilde{E}^{\lambda'}$ dir.

Önerme 4.1.10: J bir indeks kümesi ve $f_A, g_B, h_C, (f_A)_i, (g_B)_i \in l(X,E)$ olsun.
(1) $f_A \sqcap f_A = f_A$, $f_A \sqcup f_A = f_A$
(2) $f_A \sqcap g_B = g_B \sqcap f_A$, $f_A \sqcup g_B = g_B \sqcup f_A$
(3) $f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$, $f_A \sqcap (g_B \sqcap h_C) = (f_A \sqcap g_B) \sqcap h_C$
(4) $f_A \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in J}(g_B)_i\right) = \bigsqcup_{i\in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)$,
$f_A \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in J}(g_B)_i\right) = \bigsqcap_{i\in J}(f_A \sqcup (g_B)_i)$
(5) $\Phi \sqsubseteq f_A \sqsubseteq \tilde{E}$, $\tilde{E}^\lambda \sqsubseteq \tilde{E}$
(6) $(\bigsqcap_{i\in J}(f_A)_i)^c = \bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i^c$, $(\bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i)^c = \bigsqcap_{i\in J}(f_A)_i^c$
(7) $f_A \sqsubseteq g \Rightarrow g^c \sqsubseteq {f_A}^c$.

Tanım 4.1.11: $\varphi : X \to Y$, $\psi : E \to F$ iki fonksiyon ve E, F sırasıyla X ve Y için parametre evrensel kümeleri olsun. φ_ψ fonksiyonuna X' den Y' ye bir bulanık esnek fonksiyon denir.

(3) $f_A \in L(X,E)$ olsun. f_A' nin φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(f_A)$, Y üzerinde bir L-bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varphi_\psi(f_A)_k(y) = \begin{cases} \bigvee_{\psi(e)=k} \bigvee_{\varphi(x)=y} f_e(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad \forall\, k \in F, \forall y \in Y.$$

(4) $g_B \in L(Y,F)$ olsun. g_B' nin φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü ${\varphi_\psi}^{-1}(g_B)$, X üzerinde bir L-bulanık esnek kümedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

${\varphi_\psi}^{-1}(g_B)_e(x) = g_{\psi(e)}\big(\varphi(x)\big)$, $\forall\, e \in E, \forall x \in X$.

Eğer φ ve ψ bire-bir ise φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu da bire-birdir.

Eğer φ ve ψ örten ise φ_ψ bulanık esnek fonksiyonu da örtendir.

φ_ψ X' den Y' ye ve γ_δ Y' den Z' ye birer bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu durumda φ_ψ ve γ_δ nın bileşkesi $\gamma_\delta \circ \varphi_\psi := (\gamma \circ \varphi)_{(\delta \circ \psi)}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.1.12: X ve Y crisp kümeler ve $f_A, (f_A)_1, (f_A)_2, (f_A)_i \in L(X,E)$ ve $g_B, (g_B)_1, (g_B)_2, (g_B)_i \in L(Y,F)$ olsun.

(1) $(f_A)_1 \sqsubseteq (f_A)_2 \;\Rightarrow\; \varphi_\psi((f_A)_1) \sqsubseteq \varphi_\psi((f_A)_2)$

(2) $(g_B)_1 \sqsubseteq (g_B)_2 \;\Rightarrow\; {\varphi_\psi}^{-1}((g_B)_1) \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}((g_B)_2)$

(3) $f_A \sqsubseteq {\varphi_\psi}^{-1}\big(\varphi_\psi(f_A)\big)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(4) $\varphi_\psi\big({\varphi_\psi}^{-1}(g_B)\big) \sqsubseteq g_B$, φ_ψ örten ise eşitlik sağlanır.

(5) $\varphi_\psi\big(\prod_{i\in J}(f_A)_i\big) \sqsubseteq \prod_{i\in J}\varphi_\psi((f_A)_i)$, φ_ψ bire-bir ise eşitlik sağlanır.

(6) $\varphi_\psi\big(\bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i\big) = \bigsqcup_{i\in J}\varphi_\psi((f_A)_i)$

(7) ${\varphi_\psi}^{-1}\big(\bigsqcup_{i\in J}(g_B)_i\big) = \bigsqcup_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}((g_B)_i)$

(8) ${\varphi_\psi}^{-1}\big(\prod_{i\in J}(g_B)_i\big) = \prod_{i\in J}{\varphi_\psi}^{-1}((g_B)_i)$

(9) ${\varphi_\psi}^{-1}({g_B}^c) = ({\varphi_\psi}^{-1}(g_B))^c$

(10) $(\varphi_\psi(f_A))^c \sqsubseteq \varphi_\psi({f_A}^c)$

(11) ${\varphi_\psi}^{-1}\big(\tilde{E}_Y\big) = \tilde{E}_X$, ${\varphi_\psi}^{-1}(\Phi_Y) = \Phi_X$

(12) φ_ψ örten ise $\varphi_\psi(\tilde{E}_X) = \tilde{E}_Y$

(13) $\varphi_\psi(\Phi_X) = \Phi_Y$.

Tanım 4.1.13: (L-Bulanık esnek kümelerin kartezyen çarpımı) X_1 ve X_2 iki boştan farklı evrensel küme ve $f_A \in L(X_1, E_1)$ ve $g_B \in L(X_2, E_2)$ olsun. $f_A \times g_B$ kartezyen çarpımı $(f \times g)_{A\times B}$ olarak gösterilir ve her $(e,k) \in E_1 \times E_2$ için $(f \times g)_{(e,k)}(x,y) = f_e(x) \wedge g_k(y)$ (her $(x,y) \in X_1 \times X_2$ için) olarak tanımlanır.
Bu tanıma gore $(f \times g)_{A\times B}$ bulanık esnek kümesi $X_1 \times X_2$ üzerinde bir L-bulanık esnek kümedir.

Tanım 4.1.14: Her $i \in \Delta$ için $(f_A)_i \coloneqq (f_i)_{A_i} \in F(X_i, E_i)$ olsun. $(f_A)_i$ L-bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i \coloneqq (\prod_{i\in\Delta} f_i)_{\prod_{i\in\Delta} A_i}$ olarak gösterilir ve her $e = (e_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta} E_i$ için $(\prod_{i\in\Delta}(f_e)_i)(e) \coloneqq (\prod_{i\in\Delta} f_i)_{(e_i)_{i\in\Delta}}(x) = \wedge_{i\in\Delta}(f_i)_{e_i}(x_i)$ ile tanımlanır ($\forall x = (x_i)_{i\in\Delta} \in \prod_{i\in\Delta} X_i$). Burada $\prod_{i\in\Delta}(F_A)_i$ L-bulanık esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ kartezyen çarpımı üzerinde bir L-bulanık esnek kümedir.

Tanım 4.1.15: $p_j: \prod_{i\in\Delta} X_i \to X_j$ ve $q_j: \prod_{i\in\Delta} E_i \to E_j$ izdüşüm fonksiyonları verilsin. L-bulanık esnek kümeler üzerindeki $(p_q)_j \coloneqq (p_j)_{q_j}$ izdüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.
$\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i$ esnek kümesi $\prod_{i\in\Delta} X_i$ üzerinde bir L-bulanık esnek küme olsun. $i \in \Delta$ için $(p_q)_j(\prod_{i\in\Delta}(f_A)_i) = (f_A)_j$.

4.2. *L*-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 4.2.1: $\mathcal{T}_E : E \to L(L(X,E))$ dönüşümü her $e \in E$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{T}_E$ ye X üzerinde bir L-bulanık esnek topoloji denir.

(O1) $\mathcal{T}_e(\Phi) = \mathcal{T}_e(\tilde{E}) = 1$.

(O2) $\mathcal{T}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \mathcal{T}_e(f_A) \wedge \mathcal{T}_e(g_B), \forall f_A g_B \in L(X,E)$.

(O3) $\mathcal{T}_e(\sqcup_{i\in J}(f_A)_i) \leq \wedge_{i\in J} \mathcal{T}_e((f_A)_i), \forall (f_A)_i \in L(X,E), i \in J$.

$(X, \mathcal{T}_E)$ ikilisine L-bulanık esnek topolojik uzay denir ve $\mathcal{T}_e(f_A)$ değeri ise $e \in E$ parametresine göre f_A L-bulanık esnek kümesinin açıklık derecesini gösterir.

Örnek 4.2.2: $L = I$ durumunda Tanım 3.2.1 ile Tanım 4.2.1 in benzer olduğu görülür. Böylece L-bulanık esnek topolojik uzaylar bulanık esnek topolojik uzayların bir genelleştirilmesi olur.

Tanım 4.2.3: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{T}_E : E \to L\big(L(X,E)\big)$ dönüşümüne X üzerinde bir güçlü L-bulanık esnek topoloji denir.

(S1) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e(\Phi) = \bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e\big(\tilde{E}\big) = 1.$

(S2) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e(f_A \sqcap g_B) \geq \bigvee_{e\in E}\big(\mathcal{T}_e(f_A) \wedge \mathcal{T}_e(g_B)\big), \forall f_A g_B \in L(X,E).$

(S3) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e\big(\bigsqcup_{i\in J}(f_A)_i\big) \leq \bigvee_{e\in E} \bigwedge_{i\in J} \mathcal{T}_e((f_A)_i), \forall (f_A)_i \in L(X,E), i \in J.$

Açıkça görülebileceği gibi her güçlü L-bulanık esnek topoloji bir L-bulanık esnek topolojidir.

X kümesi üzerinde $\mathcal{T}_E^1$ ve $\mathcal{T}_E^2$ L-bulanık esnek topolojileri verilsin. Eğer her $e \in E$ ve $f_A \in L(X,E)$ için $\mathcal{T}_e^2(f_A) \leq \mathcal{T}_e^1(f_A)$ sağlanıyor ise $\mathcal{T}_E^1$ L-bulanık esnek topolojisine $\mathcal{T}_E^2$ L-bulanık esnek topolojisinden daha incedir denir ve $\mathcal{T}_E^2 \sqsubseteq \mathcal{T}_E^1$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.4: $(X, \mathcal{T}_E)$ ve $(Y, \mathcal{T}_F^*)$ L-bulanık esnek topolojik uzayları ve X' den Y' ye φ_ψ bulanık esnek dönüşümü verilsin.

(1) Eğer her $g_B \in L(Y,F)$ için $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e\big(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\big) \geq \bigvee_{k\in F} \mathcal{T}^*_{\psi(e)}(g_B)$ sağlanıyorsa φ_ψ dönüşümüne güçlü süreklidir denir.

(2) $S \subset E$ olsun. Eğer her $g_B \in L(Y,F)$ için $\bigwedge_{e\in S} \mathcal{T}_e\big(\varphi_\psi^{-1}(g_B)\big) \geq \bigvee_{k\in\psi(S)} \mathcal{T}_k^*(g_B)$ sağlanıyorsa φ_ψ dönüşümüne güçlü S-süreklidir denir.

L-bulanık esnek topolojik uzaylar kategorisi $\mathbb{LFSTOP}$ ile gösterilir ve morfizmleri sürekli bulanık esnek dönüşümlerdir.

Önerme 4.2.5: X üzerinde L-bulanık esnek topolojilerinin bir $\{\mathcal{T}_E^j\}_{j\in J}$ ailesi verilsin. Bu takdirde $\mathcal{T}_E \coloneqq \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}_E^j$, $\mathcal{T}_e(f_A) = \bigwedge_{j\in J} \mathcal{T}_e^j(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü de X üzerinde bir L-bulanık esnek topolojidir.

Tanım 4.2.6: Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{C}_E : E \to L\big(L(X,E)\big)$ dönüşümüne X üzerinde bir güçlü L-bulanık esnek kotopoloji denir. Her $e \in E$ için

(C1) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{C}_e(\Phi) = \bigwedge_{e\in E} \mathcal{C}_e\big(\tilde{E}\big) = 1.$

(C2) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{C}_e(f_A \sqcup g_B) \geq \bigvee_{e\in E}\big(\mathcal{C}_e(f_A) \wedge \mathcal{C}_e(g_B)\big), \forall f_A g_B \in L(X,E).$

(C3) $\bigwedge_{e\in E} \mathcal{C}_e\big(\prod_{i\in J}(f_A)_i\big) \leq \bigvee_{e\in E} \bigwedge_{i\in J} \mathcal{C}_e((f_A)_i), \forall (f_A)_i \in L(X,E), i \in J.$

$(X, \mathcal{C}_E)$ ikilisine L-bulanık esnek bulanık esnek kotopolojik uzay denir.

$\mathcal{T}_E$, X üzerinde bir L-bulanık esnek topoloji olsun. Bu durumda $\mathcal{C}_E : E \to L\big(L(X,E)\big)$, $\mathcal{C}_e(f_A) \coloneqq \mathcal{T}_e^c(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık esnek kotopolojidir.

$\mathcal{C}_E$, X üzerinde bir L-bulanık esnek topoloji olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_E : E \to L\big(L(X,E)\big)$, $\mathcal{T}_e(f_A) \coloneqq \mathcal{C}_e^c(f_A)$, $\forall e \in E$, dönüşümü X üzerinde bir L-bulanık esnek topolojidir.

4.3. L-Bulanık Esnek Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

Kompaktlık kavramını L-bulanık esnek topolojik uzaylara genelleştirmek için öncelikle genel topolojik uzaylardaki kompaktlık kavramını inceleyelim. (X,τ) bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. G' nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul G' nin her açık $\mathcal{U}$ örtümünün sonlu bir $\mathcal{V}$ alt örtümü vardır. Kompaktlık kavramını karakteristik fonksiyonlar ile karakterize edersek eğer:

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{x\in X}(\chi'_G(x) \vee \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \chi'_G(x) \vee \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \chi'_G(x) \neq 1 \Rightarrow \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \chi_G(x) = 1 \Rightarrow \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \chi_G(x) \leq \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x) = 1
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklik göz önüne alındığında, G kümesinin kompaktlığı için aşağıdaki ifade söylenebilir. G kompakttır $\Leftrightarrow$

$\bigwedge_{x\in X}(\chi'_G(x) \vee \bigvee_{A\in\mathcal{U}} \chi_A(x)) = 1 \Rightarrow \bigvee_{\mathcal{V}\in 2^u}(\bigwedge_{x\in X}(\chi'_G(x) \vee \bigvee_{A\in\mathcal{V}} \chi_A(x))) = 1.$

Bu ifade göz önüne alındığında güçlü L-bulanık esnek topolojik uzaylar için kompaktlık kavramı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 4.3.1: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay ve $S \subset E$ olsun.

(1) $f_A \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{U} \subseteq L(X,E)$ için

$$\wedge_{g_B\in\mathcal{U}} \vee_{e\in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\wedge_{e\in E} \wedge_{x\in X}\left(f_e^c(x) \vee \vee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$$
$$\leq \vee_{\mathcal{V}\in 2^{(\mathcal{U})}} \wedge_{e\in E} \wedge_{x\in X}\left(f_e^c(x) \vee \vee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right).$$

(2) $f_A \in L(X,E)$ L-bulanık esnek S-kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{U} \subseteq L(X,E)$ için

$$\wedge_{g_B\in\mathcal{U}} \vee_{e\in S} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\wedge_{e\in S} \wedge_{x\in X}\left(\left(f_e^c(x)\right) \vee \vee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$$
$$\leq \vee_{\mathcal{V}\in 2^{(\mathcal{U})}} \wedge_{e\in S} \wedge_{x\in X}\left(\left(f_e^c(x)\right) \vee \vee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right).$$

Teorem 4.3.2: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay ve $S \subset E$ olsun.

(1) $f_A \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{P} \subseteq L(X,E)$ için

$$\vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \left(\vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right)$$
$$\leq \wedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\right).$$

(2) $f_A \in L(X,E)$ L-bulanık esnek S-kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{U} \subseteq L(X,E)$ için

$$\vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in S} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \left(\vee_{e\in S} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right)$$
$$\leq \wedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \vee_{e\in S} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\right).$$

İspat: Tanımda " $'$ " işlemi kullanılarak kolayca görülür.

Teorem 4.3.3: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay (ve $S \subset E$) olsun. Eğer $f_A, g_B \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kompakt (ya da S-kompakt) ise $f_A \sqcup g_B$ de L-bulanık esnek kompakttır (ya da S-kompakttır).

İspat:

$$\vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \left(\vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left((f_e \vee g_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right) =$$
$$= \vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee$$
$$\left(\vee_{e\in E}\left(\left\{\vee_{x\in X}\left((f_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right\} \vee \left\{\vee_{x\in X}\left((g_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right\}\right)\right)$$
$$= \left\{\vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left((f_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right\}$$
$$\vee \left\{\vee_{h_C\in\mathcal{P}} \wedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left((g_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\right)\right\}$$
$$\geq \left\{\wedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\right)\right\}$$
$$\vee \left\{\wedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left(f_e(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\right)\right\}$$
$$= \wedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \vee_{e\in E} \vee_{x\in X}\left((f_e \vee g_e)(x) \wedge \wedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\right)$$

S-kompaktlık için ispat benzer adımlarla yapılır.

Teorem 4.3.4: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay (ve $S \subset E$) olsun. Eğer $f_A \in L(X,E)$ L-bulanık esnek kompakt (S-kompakt) ve $\mathcal{T}_e(g_B^c) = 1, \forall e \in E$ ($\mathcal{T}_e(g_B^c) = 1, \forall e \in S$) ise $f_A \sqcap g_B$ de L-bulanık esnek kompakttır (S-kompakttır).

İspat:

$$\bigvee_{h_C \in \mathcal{P}} \bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \Big(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \Big((f_e \wedge g_e)(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\Big)\Big) =$$

$$= \bigvee_{h_C \in \mathcal{P}} \bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \Big(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \Big(\big(f_e(x) \wedge g_e(x)\big) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_e(x)\Big)\Big)$$

$$= \bigvee_{h_C \in \mathcal{P}\cup\{g_B\}} \bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(h_C^c) \vee \Big(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \Big((f_e)(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}\cup\{g_B\}} h_e(x)\Big)\Big)$$

$$\geq \bigwedge_{\mathcal{F}\in 2^{(\mathcal{P}\cup\{g_B\})}} \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{F}} h_e(x)\big)$$

$$= \Big\{\bigwedge_{\mathcal{F}\in 2^{(\mathcal{P})}} \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{F}} h_e(x)\big)\Big\}$$

$$\wedge \Big\{\bigwedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \Big(\big(f_e(x) \wedge g_e(x)\big) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\Big)\Big\}$$

$$= \bigwedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \Big((f_e \wedge g_e)(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_e(x)\Big).$$

Lemma 4.3.5: L bir De Morgan çatısı $f_A \in L(X,E)$, $\mathcal{P} \subseteq L(Y,F)$ ve φ_ψ X' den Y' ye bir bulanık esnek dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(1) $$\bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \big(\varphi_\psi(f_A)_k(y) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_k(y)\big) =$$
$$= \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\big).$$

(2) $S \subset E$ için
$$\bigvee_{k\in \psi(S)} \bigvee_{y\in Y} \big(\varphi_\psi(f_A)_k(y) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_k(x)\big) =$$
$$= \bigvee_{e\in S} \bigvee_{x\in X} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\big).$$

İspat: (1)

$$\bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \big(\varphi_\psi(f_A)_k(y) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_k(y)\big) =$$

$$= \bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \Big(\big(\bigvee_{e\in\psi^{-1}(k)} \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} f_e(x)\big) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_k(y)\Big)$$

$$= \bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \Big(\big(\bigvee_{e\in\psi^{-1}(k)} \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_{\psi(e)}(\varphi(x))\big)\big)\Big)$$

$$= \bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \bigvee_{e\in\psi^{-1}(k)} \bigvee_{x\in\varphi^{-1}(y)} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_{\psi(e)}(\varphi(x))\big)$$

$$= \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \big(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\big)$$

(2) Benzer olarak yapılır.

Teorem 4.3.6: $(X,\mathcal{T}_E)$ ve $(Y,\mathcal{T}_F^*)$ güçlü L-bulanık esnek topolojik uzaylar $\varphi_\psi : (X,\mathcal{T}_E) \to (Y,\mathcal{T}_F^*)$ bir bulanık esnek dönüşüm ve $S \subset E$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(1) φ_ψ güçlü sürekli ve $f_A \in L(X,E)$, $(X,\mathcal{T}_E)$' de L-bulanık esnek kompakt ise $\varphi_\psi(f_A)$' da $(Y,\mathcal{T}_F^*)$' da L-bulanık esnek kompakttır.

(2) φ_ψ güçlü S-sürekli ve $f_A \in L(X,E)$, $(X,\mathcal{T}_E)$' de L-bulanık esnek S-kompakt ise $\varphi_\psi(f_A)$' da $(Y,\mathcal{T}_F^*)$' da L-bulanık esnek $\psi(S)$-kompakttır.

İspat: (1) Her $\mathcal{P} \subseteq L(Y,F)$ için, Lemma ve f_A' kompaktlığını kullanarak

$\bigvee_{h_C\in\mathcal{P}} \bigwedge_{k\in F} \mathcal{T}_k^{*\prime}(h_C^c) \vee \left(\bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \left(\varphi_\psi(f_A)_k(y) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} h_k(y)\right)\right) =$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{h_C\in\mathcal{P}} \bigwedge_{k\in F} \mathcal{T}_k^{*\prime}(h_C^c) \vee \left(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \left(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\right)\right)\\
&\geq \bigvee_{h_C\in\mathcal{P}} \bigvee_{k\in F} \mathcal{T}_e'(\varphi_\psi^{-1}(h_C^c)) \vee \left(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \left(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\right)\right)\\
&\geq \bigvee_{h_C\in\mathcal{P}} \bigwedge_{e\in E} \mathcal{T}_e'(\varphi_\psi^{-1}(h_C^c)) \vee \left(\bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \left(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\right)\right)\\
&\geq \bigwedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \bigvee_{e\in E} \bigvee_{x\in X} \left(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{P}} \varphi_\psi^{-1}(h_C)_e(x)\right)\\
&= \bigwedge_{\mathcal{H}\in 2^{(\mathcal{P})}} \bigvee_{k\in F} \bigvee_{y\in Y} \left(\varphi_\psi(f_A)_k(y) \wedge \bigwedge_{h_C\in\mathcal{H}} h_k(y)\right)
\end{aligned}
$$

(2) Benzer olarak yapılır.

4.4. Kompaktlığın Farklı Karakterizasyonları

Tanım 4.4.1: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay, $a \in L - \{1\}$, $f_A \in L(X,E)$ ve $\mathcal{U} \subseteq L(X,E)$ olsun.

(1) $\mathcal{U}$' ya "f_A' nın a-gölgelemesi" denir $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x) \not\leq a$' dir.

(2) $\mathcal{U}$' ya "f_A' nın güçlü a-gölgelemesi" denir $\Leftrightarrow$

$\bigwedge_{e\in E} \bigwedge_{x\in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right) \not\leq a$ dir.

Açıkça görülebilir ki her güçlü a-gölgeleme bir a-gölgelemedir.

Tanım 4.4.2: $(X,\mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay, $a \in L - \{0\}$, $f_A \in L(X,E)$ ve $\mathcal{P} \subseteq L(X,E)$ olsun.

(1) $\mathcal{P}$' ya "f_A' nın a-uzak ailesi" denir $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C \in \mathcal{P}} h_e(x) \not\geq a$' dir.

(2) $\mathcal{P}$' ya "f_A' nın güçlü a-uzak ailesi" denir ⇔

$\bigvee_{e \in S} \bigvee_{x \in X} \left(f_e(x) \wedge \bigwedge_{h_C \in \mathcal{P}} h_e(x)\right) \not\geq a$ dir.

Açıkça görülebilir ki her güçlü a-uzak aile bir a-uzak ailedir ve $\mathcal{P}$ nin güçlü a-uzak aile olmasi ile $\mathcal{P}'$ nun güçlü a-gölgeleme olması denktir.

Tanım 4.4.3: $(X, \mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay, $a \in L - \{0\}$, $f_A \in L(X, E)$ ve $\mathcal{P} \subseteq L(X, E)$ olsun.

(1) $\mathcal{U}$' ya "f_A' nın β_a örtümü" denir ⇔ Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$a \in \beta\left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)$.

(2) $\mathcal{U}$' ya "f_A' nın güçlü β_a örtümü" denir ⇔

$a \in \beta\left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$.

Açıkça görülebilir ki her güçlü β_a örtümü bir β_a örtümdür.

Tanım 4.4.4: $(X, \mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay, $a \in L - \{0\}$, $f_A \in L(X, E)$ ve $\mathcal{U} \subseteq L(X, E)$ olsun. Eğer $f_e(x) \not\leq a'$ olan her $e \in E$ ve $x \in X$ için $\bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x) \geq a$ sağlanıyorsa $\mathcal{U}$ ailesine "f_A' nın Q_a-örtümü" denir.

Açıkça görülebilir ki, $a \in M(L)$ için $\mathcal{U}$, f_A' nın Q_a-örtümü olması için gerek ve yeter koşul $a \leq \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)$.

Teorem 4.4.5: $(X, \mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay ve $f_A \in L(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f_A, L-bulanık esnek kompakttır.

(2) Her $a \in M(L)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{h_C \in \mathcal{P}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e'(h_C) \not\leq a'$ koşulunu sağlayan her güçlü a-uzak $\mathcal{P}$ ailesinin en az bir sonlu bir $\mathcal{H}$ alt ailesi vardır ve $\mathcal{H}$ bir güçlü a-uzak ailedir.

(3) Her $a \in M(L)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{h_C \in \mathcal{P}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e'(h_C) \not\leq a'$ koşulunu sağlayan her güçlü a-uzak $\mathcal{P}$ ailesinin en az bir sonlu bir $\mathcal{H}$ alt ailesi ve $b \in \beta^*(a)$ vardır öyle ki $\mathcal{H}$, f_A' nın güçlü b-uzak ailesidir.

(4) Her $a \in P(L)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq a$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{U}$ güçlü a-gölgelemesinin en az bir sonlu bir $\mathcal{V}$ vardır ve $\mathcal{V}$ bir f_A' nın bir güçlü a-gölgelemesidir.

(5) Her $a \in P(L)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq a$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{U}$ güçlü a-gölgelemesinin en az bir sonlu bir $\mathcal{V}$ ailesi ve $b \in \alpha^*(a)$ vardır öyleki $\mathcal{V}$ bir f_A' nın bir güçlü b-gölgelemesidir.

(6) Her $a \in M(L)$, $b \in \beta^*(a)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \geq a$, $(\forall g_B \in \mathcal{U})$ koşulunu sağlayan her Q_a-örtümü $\mathcal{U}$' nun sonlu bir $\mathcal{V}$ alt örtümü vardır ve $\mathcal{V}$, f_A' nın Q_b-örtümüdür.

(7) Her $a \in M(L)$, $b \in \beta^*(a)$ ve f_A' nın $\bigwedge_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \geq a$, $(\forall g_B \in \mathcal{U})$ koşulunu sağlayan her Q_a-örtümü $\mathcal{U}$' nun sonlu bir $\mathcal{V}$ alt örtümü vardır ve $\mathcal{V}$, f_A' nın bir güçlü β_b-örtümüdür.

İspat: (1)⇒(4) f_A, L-bulanık esnek kompakt olsun $a \in P(L)$ ve $\mathcal{U}$ f_A' nın $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq a'$ koşulunu sağlayan bir güçlü a- gölgelemesi olsun.

Her $\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}$ için $\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \leq a$ olsun.

f_A kompakt olduğundan

$$\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right) \leq \bigvee_{\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}} \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \leq a$$

sağlanır.

Buradan $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \leq a$ veya $\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right) \leq a$ olur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}$ vardır ve $\mathcal{V}$ bir f_A' nın bir güçlü a-gölgelemesidir.

(4)⇒(1) Keyfi $\mathcal{U} \subset L(X, E)$ ve $a \in P(L)$ için

$\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right) \not\leq a$ olsun. Buradan

$\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right) \not\leq a$ ve $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq a$ olur.

Hipotezden, en az bir $\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}$ vardır öyle ki $\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \not\leq a$ ve böylece $\bigvee_{\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}} \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \not\leq a$ olur. Buradan

$$\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right) \leq \bigvee_{\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}} \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \text{ olur.}$$

(1)⇔(2) Benzer şekilde ispatlanır.

(4)⇒(5) $a \in P(L)$ ve $\mathcal{U}$, f_A' nın $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq a$ koşulunu sağlayan bir güçlü a-gölgelemesi olsun. Buradan $\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right) \not\leq a$ olur.

$c \in \alpha^*(a) = \alpha(a) \cap P(L)$, $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq c$ ve

$\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)$ koşullarını sağlasın. Buradan $\mathcal{U}$, f_A' nın $\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \not\leq c$ koşulunu sağlayan bir güçlü c-gölgelemesidir. (4) ten sonlu bir $\mathcal{V}$ vardır ve $\mathcal{V}$, f_A' nın bir güçlü c-gölgelemesidir. $c \in \alpha^*(b)$ olacak şekilde $b \in \alpha^*(a)$ seçilirse $\mathcal{V}$, f_A' nın bir güçlü b-gölgelemesidir.

(5)⇒(4) Kolayca görülür.

(2) ve (3) ün denkliği dual işlemlerle kolaylıkla görülür.

Teorem 4.4.6: $(X, \mathcal{T}_E)$ bir güçlü L-bulanık esnek topolojik uzay ve $f_A \in L(X, E)$ olsun. Eğer $\beta(c \wedge d) = \beta(c) \wedge \beta(d)$, $\forall c, d \in L$, ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f_A, L-bulanık esnek kompakttır.

(2) Her $a \in M(L)$ ve f_A' nın $a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B \in U} \bigvee_{e \in E} T_e(g_B)\right)$ koşulunu sağlayan her güçlü β_a-örtümü $\mathcal{U}$' nun en az bir sonlu $\mathcal{V}$ alt ailesi vardır ve $\mathcal{V}$, f_A' nın bir güçlü β_a-örtümüdür.

(3) Her $a \in M(L)$ ve f_A' nın $a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B)\right)$ koşulunu sağlayan her güçlü β_a-örtümü $\mathcal{U}$' nun en az bir sonlu $\mathcal{V}$ alt ailesi ve $a \in \beta^*(b)$ olacak şekilde bir $b \in M(L)$ vardır ve $\mathcal{V}$, f_A' nın bir güçlü β_b-örtümüdür.

İspat: (1)⇒(2) f_A, L-bulanık esnek kompakt, $a \in M(L)$ ve $\mathcal{U}$ $a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B)\right)$ koşulunu sağlayan bir güçlü β_a-örtümü olsun. $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$' nun bir sonlu alt ailesi ve $D \subseteq L$ için $\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \leq \bigvee D$ olsun.

f_A, L-bulanık esnek kompakt olduğundan

$$\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$$

$$\leq \bigvee_{\mathcal{V} \in 2^{(\mathcal{U})}} \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{V}} g_e(x)\right) \leq \bigvee D \text{ olur.}$$

$a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B)\right) \cap \beta\left(\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$ olduğundan, hipoteze göre $a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \vee \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$ olur. Bu yüzden, $a \lhd \left\{\bigwedge_{g_B \in \mathcal{U}} \bigvee_{e \in E} \mathcal{T}_e(g_B) \wedge \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x \in X} \left(f_e^c(x) \vee \bigvee_{g_B \in \mathcal{U}} g_e(x)\right)\right\}$ dir. Buradan en az bir $d \in D$ vardır öyle ki $a \leq d$ dir. Tanımdan

$a \in \beta\left(\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right)\right)$ olur. Böylece $\mathcal{V}$ sonlu alt örtümü f_A' nın bir güçlü β_a-örtümüdür.

(2)⇒(1) $a \in M(L)$ ve $a \lhd \left\{\bigwedge_{g_B\in\mathcal{U}}\bigvee_{e\in E}\mathcal{T}_e(g_B)\wedge\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right\}$ olsun. Hipotezden

$a \lhd \left(\bigwedge_{g_B\in\mathcal{U}}\bigvee_{e\in E}\mathcal{T}_e(g_B)\right)$ ve $a \lhd \left(\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$ olur. Bu ise

$a \in \beta\left(\bigwedge_{g_B\in\mathcal{U}}\bigvee_{e\in E}\mathcal{T}_e(g_B)\right)$ ve $a \in \beta\left(\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right)$ olması ile denktir. Böylece (2) den, bir $\mathcal{V}$ sonlu bir alt örtümü vardır ve $\mathcal{V}, f_A$' nın güçlü β_a-örtümüdür. Ayrıca $a \in \beta\left(\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right)\right)$ olur. Buradan da $a \leq \bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right)$ olur ve böylece

$a \leq \bigvee_{\mathcal{V}\in 2^{(\mathcal{U})}}\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right)$ olur. Sonuç olarak

$$\bigwedge_{g_B\in\mathcal{U}}\bigvee_{e\in E}\mathcal{T}_e(g_B)\wedge\left(\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{U}} g_e(x)\right)\right) \leq \bigvee_{\mathcal{V}\in 2^{(\mathcal{U})}}\bigwedge_{e\in E}\bigwedge_{x\in X}\left(f_e^c(x)\vee\bigvee_{g_B\in\mathcal{V}} g_e(x)\right)$$

elde edilir.

(2)⇔(3) denkliği Teorem 3.5 de (4)⇔(5) denkliğine benzer olarak yapılır.

5. LOWEN ANLAMINDA BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

5.1. Lowen Anlamında Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar

Bu bölümde kategorik kavramlarda uyumlu olması için bulanık esnek küme yapısının farklı bir gösterimi ele alınacaktır.

Kolayca gösterilebilir ki her $f_E: E \to F(X)$ bulanık esnek kümesine karşılık gelen bir $\overline{f_E}: X \to \prod_{e\in E}[0,1]$ dönüşümü vardır. Bu ifadenin tersi de sağlanacağı için bulanık esnek kümelerin diğer bir gösterimi olarak $\overline{f_E}: X \to \prod_{e\in E}[0,1]$ dönüşümleri ele alınabilir. Kolaylık olması açısından ifadeler den olduğu göz önüne alınarak $\overline{f_E}$ gösterimi yerine f_E kullanılacaktır. Diğer bir ifade ile her f_E bulanık esnek kümesi $f_E = (f_e)_{e\in E}$ olarak gösterilebilir. Burada her $e \in E$ için f_e önceki bölümlerde geçtiği gibi bir bulanık kümedir.

Tanım 5.1.1: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\Gamma \subseteq F(X, E)$ ailesine X üzerinde bir yarı bulanık esnek topoloji denir.

(YO1) $\Phi, \tilde{E} \in \Gamma$

(YO2) $f_E, g_E \in \Gamma \Rightarrow f_E \sqcap g_E \in \Gamma$

(YO3) $\forall \lambda \in \Delta, f_E^{\lambda} \in \Gamma \Rightarrow \sqcup_{\lambda\in\Delta} f_E^{\lambda} \in \Gamma$

(X, Γ, E) üçlüsüne bir yarı bulanık esnek topolojik uzay denir.

Tanay ve Kandemir (2011)' deki tanıma göre (X, Γ, E) üçlüsü $\tilde{E}$ üzerinde bir bulanık esnek topolojidir.

Örnek 5.1.2: $X = I$ ve $E = (0,1)$ olsun. X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $f_E = (f_e)_{e\in E}, g_E = (g_e)_{e\in E}$ bulanık esnek kümeleri verilsin. Her $e \in E$ ve $x \in X$ için

$$f_e(x) = \begin{cases} -\frac{1}{e}x + 1, & 0 \le x \le e; \\ 0, & e \le x \le 1. \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le e; \\ \frac{1}{x}e - 1, & e \le x \le 1. \end{cases}$$

Bu takdirde $\Gamma \coloneqq \{\Phi, \tilde{E}, f_E, g_E, f_E \sqcup g_E\}$ ailesi X üzerinde bir yarı bulanık esnek topolojidir.

Lowen anlamında bulanık esnek topoloji tanımını verebilmek için öncelikle sabit bulanık esnek küme tanımı verilecektir.

Tanım 5.1.3: $\alpha : E \to I$ keyfi fonksiyonu verilsin ve her $e \in E$ için $\alpha_e : X \to I$, $\alpha_e(x) = \alpha(e)$ tanımlansın. Bu takdirde $f_E = (\alpha_e)_{e \in E} \in F(X, E)$ bulanık esnek kümesine X üzerinde bir α-sabit bulanık esnek küme denir ve bu $\overline{\alpha}$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.4: Φ ve $\tilde{E}$ sırasıyla $\overline{0}$-sabit ve $\overline{1}$-sabit bulanık esnek kümelerdir.

Örnek 5.1.5: $\alpha : \mathbb{N} \to I, \alpha(n) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, fonksiyonu tanımlansın ve $F(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ bulanık esnek kümeler ailesini verilsin. $f_E = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F(\mathbb{R}, \mathbb{N}), f_n(x) = \alpha(n)$ şeklinde tanımlanan bulanık esnek küme bir α-sabit bulanık esnek kümedir.

Tanım 5.1.6: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{T} \subseteq F(X, E)$ ailesine X üzerinde bir Lowen anlanımda bulanık esnek topoloji (veya kısaca bulanık esnek topoloji) denir.

(O1) $\forall \alpha : E \to I, \overline{\alpha} \in \mathcal{T}$.

(O2) $f_E, g_E \in \mathcal{T} \Rightarrow f_E \sqcap g_E \in \mathcal{T}$.

(O3) $\forall \lambda \in \Delta, f_E^{\lambda} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Delta} f_E^{\lambda} \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T}, E)$ üçlüsüne Lowen anlamında bir bulanık esnek topolojik (kısaca bulanık esnek topolojik uzay) uzay denir.

Açıkça görülebilir ki Lowen anlamındaki her bulanık esnek topoloji yarı bulanık esnek topolojidir.

$\mathcal{T}$' nun elemanlarına bulanık esnek açık kümeler denir. Eğer $g_E^c \in \mathcal{T}$ ise g_E ye kapalı bulanık esnek küme denir. Tüm kapalı bulanık esnek kümelerin ailesi $\mathcal{T}^c$ ile gösterilir.

Kapalı bulanık esnek kümeler için aşağıdaki özellikler sağlanır.

Önerme 5.1.7: $(X, \mathcal{T}, E)$ bir Lowen anlamında bulanık esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(C1) $\forall \alpha : E \to I, \overline{\alpha} \in \mathcal{T}^c$.

(C2) $f_E, g_E \in \mathcal{T} \Rightarrow f_E \sqcup g_E \in \mathcal{T}^c$.

(C3) $\forall \lambda \in \Delta, f_E^\lambda \in \mathcal{T} \Rightarrow \prod_{\lambda \in \Delta} f_E^\lambda \in \mathcal{T}^c$.

Örnek 5.1.8: X boştan farklı bir küme ve E bir parametre kümesi olsun. Bu takdirde tüm sabit bulanık esnek kümelerden oluşan $\mathcal{T} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha : E \to I\}$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde ki basit bulanık esnek topoloji denir.

Örnek 5.1.9: X boştan farklı bir küme ve E bir parametre kümesi olsun. Bu takdirde tüm bulanık esnek kümelerden oluşan $\mathcal{T} = F(X, E)$ ailesi X üzerinde bir bulanık esnek topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde ki ayrık bulanık esnek topoloji denir.

Örnek 5.1.10: Bir $\mathcal{T} \subset F(\mathbb{R}, I)$ ailesi aşağıdaki koşulu sağlasın.

$f_E = (f_e)_{e \in E} \in \mathcal{T} \Leftrightarrow [e \leq f_e(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ve f_e monoton artan] veya f_e sabit fonksiyon.

Bu takdirde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, I)$ bir bulanık esnek topolojik uzaydır.

Önerme 5.1.11: $(X, \mathcal{T}, E)$ bir bulanık esnek topolojik uzay olsun. Bu takdirde, her $e \in E$ için $\mathcal{T}(e) \coloneqq \{f_e \mid f_E = (f_e)_{e \in E} \in \mathcal{T}\}$ ailesi X üzerinde Lowen anlamında bir bulanık topolojidir.

Bu önermenin tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 5.1.12: X boştan farklı bir küme olsun ve $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi ve $\mathcal{T} = \left\{f_E^\lambda = \left(f_{e_1}^\lambda, f_{e_2}^\lambda\right) \mid f_{e_1}^\lambda(x) = \lambda, f_{e_2}^\lambda(x) = 1 - \lambda, \forall x \in X, \forall \lambda \in I\right\}$ bulanık esnek kümelerinin ailesi verilsin. Bu takdirde $\mathcal{T}(e_1)$ ve $\mathcal{T}(e_2)$ aileleri Lowen anlamında birer bulanık topoloji olmasına karşın $\Phi, \tilde{E} \notin \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}$ bir bulanık esnek topolojik uzay değildir.

Tanım 5.1.13: $\alpha : E \to I$ sıfırdan farklı bir fonksiyon (yani $\exists e \in E : \alpha(e) > 0$), $x \in X$ ve $f_E \in F(X,E)$ olsun. Eğer her $y \neq x$ için $f_E(y) = (0)_{e\in E}$ ve $f_E(x) = \big(\alpha(e)\big)_{e\in E}$ ise f_E' ye X üzerinde bir bulanık esnek nokta denir. Bulanık esnek nokta x^α ile gösterilir ve x noktasına x^α bulanık esnek noktasının desteği denir.

Diğer bir ifade ile bir bulanık esnek nokta bulanık esnek noktaların bir ailesi olarak göz önüne alınabilir. Yani $x^\alpha = \big(x^{\alpha(e)}\big)_{e\in E}$ olur ve burada her $e \in E$ için $x^{\alpha(e)}$ lerden en az bir tanesi bir bulanık noktadır.

Bulanık esnek x^α noktasının bir bulanık esnek f_E kümesime ait olması $x^\alpha \in f_E$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$x^\alpha \in f_E \Leftrightarrow x^\alpha \sqsubseteq f_E \Leftrightarrow \alpha(e) \leq f_e(x), \forall e \in E.$

E parametre kümesine göre X üzerindeki tüm bulanık esnek noktaların kümesini $PF(X,E)$ ile gösterilir.

Önerme 5.1.14: $\{f_E^\lambda \mid \lambda \in \Delta\} \subseteq F(X,E)$, $x^\alpha, y^\beta \in PF(X,E)$ ve $\varphi : X \to Y$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $x^\alpha \in \sqcap\{f_E^\lambda \mid \lambda \in \Delta\} \Leftrightarrow x^\alpha \in f_E^\lambda, \forall \lambda \in \Delta.$

(2) $x^\alpha \in y^\beta \Leftrightarrow x = y$ ve $\alpha(e) \leq \beta(e).$

(3) $\varphi(x^\alpha) = \varphi(x)^\alpha.$

(4) $x^\alpha \in f_E$ ise $\varphi(x^\alpha) \in \varphi(f_E)$ dir.

(5) $g_E \in F(Y,E)$ olmak üzere $x^\alpha \in \varphi^{-1}(g_E)$ ise $\varphi(x^\alpha) \in g_E$ dir.

Tanım 5.1.15: $(X, \mathcal{T}, E)$ bir bulanık esnek topolojik uzay, $x^\alpha \in PF(X,E)$ ve u_E bir bulanık esnek küme olsun. Eğer en az bir $f_E \in \mathcal{T}$ için $x^\alpha \in f_E \sqsubseteq g_E$ sağlanıyorsa, u_E bulanık esnek kümesine x^α bulanık esnek noktasının komşuluğudur denir.

Bir x^α bulanık esnek noktasının tüm komşuluklarının ailesi $\mathcal{U}(x^\alpha)$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.16: Örnek 5.1.10 daki $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, I)$ bulanık esnek topolojik uzayı verilsin.

$\beta : I \to I, \beta(e) = \frac{1}{2}e$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için x^β noktasının bir komşuluğu $\alpha : I \to I, \alpha(e) = e$ olmak üzere $\bar{\alpha}$ sabit bulanık esnek kümesidir.

Önerme 5.1.17: $(X,\mathcal{T},E)$ bir bulanık esnek topolojik uzay ve $x^{\alpha} \in PF(X,E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(N1) $u_E \in \mathcal{U}(x^{\alpha})$ ise $x^{\alpha} \in u_E$ dir.

(N2) $u_E, v_E \in \mathcal{U}(x^{\alpha})$ ise $u_E \sqcap v_E \in \mathcal{U}(x^{\alpha})$ dir.

(N3) $u_E \in \mathcal{U}(x^{\alpha})$ ve $u_E \sqsubseteq v_E$ ise $v_E \in \mathcal{U}(x^{\alpha})$ dir.

Tanım 5.1.18: $(X,\mathcal{T},E)$ ve $(Y,\mathcal{T}',E)$ iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $g_E \in \mathcal{T}'$ için $\varphi^{-1}(g_E) \in \mathcal{T}$ sağlanıyorsa φ dönüşümüne bulanık esnek süreklidir denir.

Örnek 5.1.19: Sabit fonksiyonlar bulanık esnek süreklidir. Gerçekten, $(X,\mathcal{T},E)$ ve $(Y,\mathcal{T}',E)$ iki bulanık esnek topolojik uzay ve $\varphi : X \to Y$ bir sabit dönüşüm olsun, yani sabit bir $y_0 \in Y$ ve her $x \in X$ için $\varphi(x) = y_0$ olsun. Keyfi $g_E \in \mathcal{T}'$ ve $x \in X$ için

$$\varphi^{-1}(g_E)(x) = \left(\varphi^{-1}(g_e)(x)\right)_{e\in E} = \left(g_e(\varphi(x))\right)_{e\in E} = \left(g_e(y_0)\right)_{e\in E}.$$

Eğer $\alpha : E \to I$ dönüşümü her $e \in E$ için $\alpha(e) = g_e(y_0)$ olarak tanımlanırsa $\varphi^{-1}(g_E)$ kümesi bir α-sabit bulanık esnek küme olur böylece açık olur.

Fakat sabit dönüşümlerin yarı bulanık esnek topolojik uzaylarda sürekli olması gerekmez. Aşağıdaki örnekle bu gösterilebilir.

Örnek 5.1.20: Örnek 5.1.2 deki (X,Γ,E) yarı topolojik uzayı ve $y_0 \in X$ noktası için $\varphi : X \to X$, $\varphi(x) = y_0$ sabit dönüşümü verilsin. $f_E \in \Gamma$ için

$$\varphi^{-1}(f_E)(x) = \left(\varphi^{-1}(f_e)(x)\right)_{e\in E} = \left(f_e(\varphi(x))\right)_{e\in E} = \left(f_e(y_0)\right)_{e\in E}.$$

Böylece her $e \in E$ için

$$\alpha(e) = \begin{cases} 0, & 0 < e \le y_0; \\ -\frac{1}{e}y_0, & y_0 \le e < 1. \end{cases}$$

tanımlanırsa $\varphi^{-1}(f_E) = \bar{\alpha} \notin \Gamma$ olur. Buradan φ sabit dönüşümü sürekli değildir.

5.2. $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{I}$ Funktorları

$\mathbb{R}$ üzerinde $T_r := \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ sağ topolojisi, I üzerinde alt uzay topolojisi ve $\prod_{e\in E} I$ üzerinde de çarpım topolojisi verilsin. I_r ile alt topolojik uzay $\prod_{e\in E} I_r$ ile de çarpım topolojik uzayı gösterilsin.

f dönüşümü (X,δ) topolojik uzayından Öklid topolojisi ile I' ya alttan yarı-süreklidir $\Leftrightarrow$ f dönüşümü (X,δ) topolojik uzayından I_r' ye süreklidir.

Buna göre aşağıdaki denklik söylenebilir.

$f_E = (f_e)_{e\in E} : (X,\delta) \to \prod_{e\in E} I_r$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $e \in E$ için f_e alttan yarı-süreklidir.

X üzerindeki tüm topolojilerin ailesi $\mathfrak{T}(X)$ ile ve tüm bulanık esnek topolojilerin ailesi de $\mathfrak{W}(X)$ ile gösterilsin.

(1) $i : \mathfrak{W}(X) \to \mathfrak{T}(X)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

Her $\mathcal{T} \in \mathfrak{W}(X)$ bulanık esnek topolojisi için $i(\mathcal{T})$, X üzerindeki X' den $\prod_{e\in E} I_r$' ye tanımlı tüm dönüşümleri sürekli yapan başlangıç topolojisidir.

$i(\mathcal{T})$' nin bir alttaban elemanı, $f_E = (f_e)_{e\in E} : X \to \prod_{e\in E} I$ sürekli ve $\alpha_{e_{\lambda_i}} \in [0,1)$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, olmak üzere $\bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\left(\alpha_{e_{\lambda_i}}, 1\right]\right)$ şeklindedir.

(2) $w : \mathfrak{T}(X) \to \mathfrak{W}(X)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

Her $\delta \in \mathfrak{T}(X)$ topolojisi için $w(\delta) = \mathcal{C}\left((X,\delta), \prod_{e\in E} I_r\right)$ dir. Yani $w(\delta)$, (X,δ)' den $\prod_{e\in E} I_r$' ye tanımlı tüm sürekli dönüşümlerin ailesidir.

Bilindiği gibi altta yarı-sürekli dönüşümlerin ailesi Lowen anlamında bulanık topoloji belirtir. Buna göre kolayca gösterilebilir ki $w(\delta)$, X üzerinde bir bulanık esnek topoloji belirtir. (Lowen 1976)

Tanım 5.2.1: $\mathcal{T}$, X üzerinde bir bulanık esnek topoloji olsun. Eğer bir δ topolojisi için $\mathcal{T} = w(\delta)$ sağlanıyorsa $\mathcal{T}$' ye topolojik üretilmiştir denir.

Önerme 5.2.2: i ve w dönüşümleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $i \circ w = I_{\mathfrak{T}(X)}$

(2) w dönüşümü monoton artan ve bire-bir, i dönüşümü ise monoton artan ve örtendir.

(3) $\mathcal{T} \in \mathfrak{W}(X)$ için $\big(i(\mathcal{T})\big)$, $\mathcal{T}$' yi içeren en dar topolojik üretilmiş bulanık esnek topolojidir ve $\bar{\mathcal{T}}$ ile gösterilir.

(4) $\mathcal{T}$ topolojik üretilmiştir $\Leftrightarrow \mathcal{T} = \bar{\mathcal{T}}$ dir.

İspat: δ, X üzerinde bir topoloji olsun. Sonlu her $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}\}$ ailesi ve $\alpha_{e_{\lambda_1}}, \alpha_{e_{\lambda_2}}, \dots, \alpha_{e_{\lambda_n}} \in [0,1)$ sayıları için

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\left(e_{\lambda_i}, 1\right]\right) \in i\big(w(\delta)\big) \Leftrightarrow f_E \in \mathcal{C}\left((X,\delta), \prod_{e\in E} I_r\right)$$

$\Leftrightarrow$ her $e \in E$ için $f_e : X \to I_r$ süreklidir.

$\Leftrightarrow$ her $e \in E$ için $f_e : X \to I_r$ alttan yarı-süreklidir.

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\left(e_{\lambda_i}, 1\right]\right) \in \delta.$$

2) $w : \mathfrak{T}(X) \to \mathfrak{W}(X)$ dönüşümünün bire-bir olduğu gösterilecektir. δ_1 ve δ_2 X üzerinde iki topoloji ve $w(\delta_1) = w(\delta_2)$ olsun.

$G \in \delta_1$ olsun. χ_G, G kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $f_E \coloneqq (\chi_G)_{e\in E}$ bir bulanık esnek kümedir. χ_G alttan yarı-sürekli olduğundan, $f_E \in w(\delta_1) = w(\delta_2)$ olur ve $G = \chi_G^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) \in \delta_2$. Buradan $\delta_1 \subseteq \delta_2$ olur. Benzer yolla $\delta_2 \subseteq \delta_1$ olduğu gösterilir. Böylece eşitlik sağlanır.

(1)' den i örtendir.

3) $\mathcal{T}$ bir bulanık esnek topoloji olmak üzere $\delta \coloneqq i(\mathcal{T})$ olsun. $w\big(i(\mathcal{T})\big) = w(\delta)$ olduğundan $w\big(i(\mathcal{T})\big)$ topolojik üretilmiştir.

Gösterilmesi gereken, her $\mathcal{T} \in \mathfrak{W}(X)$ için $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$ dir.

$f_E \in \mathcal{T}$ olsun. Bu takdirde sonlu her $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}\}$ ailesi ve $\alpha_{e_{\lambda_1}}, \alpha_{e_{\lambda_2}}, \dots, \alpha_{e_{\lambda_n}} \in [0,1)$ sayıları için

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\left(e_{\lambda_i}, 1\right]\right) \in i(\mathcal{T})$$

olur. Buradan her $e \in E$ için $f_e : X \to I_r$ süreklidir. Böylece $f_E \in w\big(i(\mathcal{T})\big) = \overline{\mathcal{T}}$.

4) ($\Rightarrow$) $\mathcal{T}$ topolojik üretilmiş olsun. Yani en az bir $\delta \in \mathfrak{T}(X)$ için $\mathcal{T} = w(\delta)$. Buradan $i(\mathcal{T}) = i\big(w(\delta)\big) = \delta$ olur. Böylece $w\big(i(\mathcal{T})\big) = w(\delta)$. Yani $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ dir.

($\Leftarrow$)$\mathcal{T} \in \mathfrak{W}(X)$ için $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ olsun. i örten olduğundan, en az bir $\delta \in \mathfrak{T}(X)$ için $i(\mathcal{T}) = \delta$. Buradan $w(\delta) = w\big(i(\mathcal{T})\big) = \overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ olur.

Önerme 5.2.3: φ, X' den Y' ye bir dönüşüm olsun.

(1) $\varphi : (X, \delta) \to (Y, \delta')$ sürekli ise $\varphi : (X, w(\delta), E) \to (Y, w(\delta'), E)$ bulanık esnek süreklidir.

(2) $\varphi : (X, \mathcal{T}, E) \to (Y, \mathcal{T}', E)$ bulanık esnek sürekli ise $\varphi : \big(X, i(\mathcal{T})\big) \to \big(Y, i(\mathcal{T}')\big)$ süreklidir.

(3) $\mathcal{T}$ topolojik üretilmiş olsun, yani X üzerindeki en az bir δ topolojisi için $\mathcal{T} = w(\delta)$ dir. Bu durumda bulanık esnek sürekli her $\varphi : (X, \mathcal{T}, E) \to (Y, \mathcal{T}', E)$ dönüşümü (X, δ) topolojik uzayından $\big(Y, i(\mathcal{T}')\big)$' ye süreklidir.

İspat: 1) $f_E \in w(\delta')$ verilsin. Bu takdirde her $e \in E$ için $f_e : X \to I_r$ süreklidir (ya da $f_e : X \to I$ alttan yarı-süreklidir). Gösterilmesi gereken $\varphi^{-1}(f_E) \in w(\delta)$ dir. Diğer bir ifade ile $\varphi^{-1}(f_E) = \big(\varphi^{-1}(f_e)\big)_{e \in E}$ bir dönüşüm olarak X' den $\prod_{e \in E} I_r$ ye süreklidir veya denk olarak her $e \in E$ için $\varphi^{-1}(f_e)$ X' den I_r' ye süreklidir.

$\alpha \in [0,1)$ verilsin. $f_e : X \to I$ alttan yarı-sürekli olduğundan $f_e^{-1}\big((\alpha, 1]\big) \in \delta'$ olur. Ayrıca φ dönüşümü sürekli olduğundan

$$\big(\varphi^{-1}(f_e)\big)^{-1}\big((\alpha, 1]\big) = (f_e \circ \varphi)^{-1}\big((\alpha, 1]\big) = \varphi^{-1}\left(f_e^{-1}\big((\alpha, 1]\big)\right) \in \delta$$

olur. Böylece $\varphi^{-1}(f_e)$ alttan yarı-sürekli olur. Buradan da $\varphi^{-1}(f_E) \in w(\delta)$ olur.

2) $f_E \in \mathcal{T}'$ olmak üzere sonlu $\{e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}\}$ ailesi ve $\alpha_{e_{\lambda_1}}, \alpha_{e_{\lambda_2}}, \dots, \alpha_{e_{\lambda_n}} \in [0,1)$ sayıları için $\bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\big(e_{\lambda_i}, 1\big]\right) \in i(\mathcal{T}')$ alttaban elemanı verilsin. φ bulanık esnek sürekli olduğundan, $\varphi^{-1}(f_E) = \big(\varphi^{-1}(f_e)\big)_{e \in E} \in \mathcal{T}$ sağlanır. $i(\mathcal{T})$' nin tanımından $\varphi^{-1}(f_E)$ süreklidir, yani her $e \in E$ için $\varphi^{-1}(f_e)$ dönüşüm olarak alttan yarı-süreklidir. Buradan

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\big(e_{\lambda_i}, 1\big]\right)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(f_{e_{\lambda_i}}^{-1}\left(\big(e_{\lambda_i}, 1\big]\right)\right)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \left(\varphi^{-1}\left(f_{e_{\lambda_i}}\right)\right)^{-1}\left(\big(e_{\lambda_i}, 1\big]\right) \in i(\mathcal{T})$$

olur. Böylece $\varphi : \big(X, i(\mathcal{T})\big) \to \big(Y, i(\mathcal{T}')\big)$ süreklidir.

3) (2) ve Önerme 5.2.2 ten kolaylıkla görülür.

Bir E parametre kümesine göre Lowen anlamında bulanık esnek topolojik uzayların kategorisi $\mathbb{FSTOP}_1$ ile gösterilir.

Önerme 5.2.2 ve Önerme 5.2.3 e göre aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.2.4:

(1) $\mathcal{W} : \mathbb{TOP} \to \mathbb{FSTOP}_1$, $\mathcal{W}(X, \delta) = (X, w(\delta), E)$ ve $\mathcal{W}(\varphi) = \varphi$ bir kovaryant funktordur.

(2) $\mathcal{I} : \mathbb{FSTOP}_1 \to \mathbb{TOP}$, $\mathcal{I}(X, \mathcal{T}) = \big(X, i(\mathcal{T})\big)$ ve $\mathcal{I}(\varphi) = \varphi$ bir kovaryant funktordur.

6. SONUÇLAR

1. Esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylarda süreklilik, kompaktlık gibi kavramlar, taban, alttaban, başlangıç topolojisi ve çarpım topolojisi gibi yapılar detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca Alexander alttaban teoremi ve Tychonoff teoremi gibi önemli teoremler bu uzaylar için ispatlanmıştır.

2. Bulanık esnek topolojik uzaylar Sostak anlamında tanımlarak bu uzaylarda taban ve süreklilik ilişkisi detaylı bir şekilde incelenmiş. Bu özellikler baz alınarak bulanık esnek topolojik uzayların başlangıç ve çarpım topolojileri tanımlanmıştır.

3. $\boldsymbol{L}$ bir De Morgan cebri olmak üzere $\boldsymbol{L}$- Bulanık esnek topolojik uzaylar ve güçlü $\boldsymbol{L}$ bulanık esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylardaki kompaktlık kavramları farklı karakterizasyonlarla birlikte detaylı olarak incelenmiştir.

4. Lowen anlamında bulanık esnek topolojik uzaylar tanımlanmış ve Lowen funktorları olarak bilinen $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{I}$ funktorları yardımıyla kategorik özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Adamek, J., H. Herrlich, ve G. E. Strecker. "*Abstract and Concrete Categories"* ***Online edition, Wiley***, 2004.

Ahmad, B., ve A. Kharal. "On Fuzzy Soft Sets" ***Advances in Fuzzy Systems***, 2009: Article ID 586507.

Aktaş, H., ve N. Çağman. "Soft set and soft groups" ***Information Sciences***, no. 177 (2007): 2726-2735.

Ali, M. I., F. Feng, X. Y. Liu, W. K. Min, ve M. Shabir. "On some new operations in soft set theory" ***Computers and Math. with Appl***. 57 (2009): 1547–1553.

Aygünoğlu, A., ve Aygün, H., "Introduction to fuzzy soft groups" ***Computers and Mathematics with Applications*** 58 (2009): 1279-1286.

Birkhoff, G. "*Lattice Theory"* ***Third Edition. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications***, 1967.

Chang, C. L. "Fuzzy Topological Spaces" ***Journal of Mathematical Analysis and Applications*** 24, no. 1 (1968): 182-190.

Chen, D. "The parametrization reduction of soft sets and its applications" ***Computers and Mathematics with Applications*** 49 (2005): 757–763.

Dongsheng, Z. "The N-compactness in L-fuzzy Topological Spaces" ***Journal of Mathematical Analysis and Applications*** 128 (1987): 64-79.

Feng, F., Y. B. Jun, ve X. Z. Zhao. "Soft semirings" ***Computers and Mathematics with Applications.*** 56 (2008): 2621–2628.

Feng, F., Y.B. Jun, ve X. Zhao. "Soft semirings" ***Computers and Mathematics with Applications*** 56 (2008): 2621-2628.

Gierz, G., K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, ve D. S. Scott. "*A Compendium of Continuous Lattices"* ***Springer-Verlag***, 1980.

Goguen, J. A. "The fuzzy Tychonoff theorem" ***Journal of Mathematical Analysis and Applications*** 43 (1973): 734-742.

Johnstone, P. T. "*Stone Spaces"* ***Cambridge University Press,***, 1992.

Jun, Y. B. "Soft BCK/BCI-algebras" ***Computers and Mathematics with Applications*** 56 (2008): 1408–1413.

Jun, Y.B., ve C.H. Park. "Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras" ***Information Sciences,*** no. 178 (2008): 2466-2475.

Kharal, A., ve B. Ahmad. "Mappings on fuzzy soft classes" ***Adv. Fuzzy Syst.***, 2009.

Kharal, A., ve B. Ahmad. "Mappings on Fuzzy Soft Classes" ***Advances in Fuzzy Systems***, 2009: ID 407890.

Kong, Z., L. Gao, L. Wong, ve S. Li. "The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm" ***J. Comp. Appl. Math***. 56 (2008): 3029–3037.

Lowen, R. "Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness" ***J.Math. Anal. Appl***. *56*, 1976: 621-633.

Maji, P. K., R. Biswas, ve A. R. Roy. "Fuzzy soft sets" ***J. Fuzzy Math***. 9 (2001): 589–602.

Maji, P. K., R. Biswas, ve A. R. Roy. "Soft set theory" ***Computers and Mathematics with Applications*** 45 (2003): 555-562.

Maji, P. K., R. Biswas, ve R. Roy. "An application of soft sets in a decision making problem" ***Computers and Mathematics with Applications*** 44 (2002): 1077-1083.

Mitchell, B. "*Theory of Categories*" ***Academic Press***, 1965.

Molodtsov, D. "Soft set theory- First results" ***Computers and Mathematics with Applicaitons*** 37, no. 415 (1999): 19-31.

Pei, D., ve D. Miano. "From soft sets to information systems" ***Granular Computing, 2005 IEEE International Conference on (2).*** 2005. 617-621.

Ramadan, A. A. "Smooth Topological Spaces" ***Fuzzy Sets and Systems*** 48 (1992): 371-375.

Roy, A.R., ve P.K. Maji. "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems" ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, no. 203 (2007): 412-418.

Shabir, M., ve M. I. Ali. "Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups" ***New Math. Nat. Comput***. 5 (2009): 599–615.

Shabir, M., ve M. Naz. "On soft topological spaces" ***Computers and Mathematics with Applications*** 61 (2011): 1786–1799.

Sostak, A. P. "On a fuzzy topological structure" ***Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo Ser II***, no. 11 (1985): 89-103.

Tanay, B., ve M. B. Kandemir. "Topological structure of fuzzy soft sets" ***Computers and Mathematics with Applications*** 61 (2011): 2952–2957.

Terziler, M., ve T. Öner. "*Kafes Teorisi" Cilt no:178.* ***Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Ders Kitapları Serisi***, 2002.

Wang, G.-J. “Theory of topological moleculer lattices” ***Fuzzy Sets and Systems*** 47 (1992): 351-376.

Yang, X., D. Yu, J. Yang, ve C. Wu. “Generalization of soft set theory: from crisp to fuzzy case” ***Fuzzy Inform. Engin***. 40 (2007): 345–354.

Ying-Ming, L., ve L. Mao-Kang. “*Fuzzy Topology”* ***Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Uto-Print***, 1997.

Zadeh, L.A. “Fuzzy Sets” ***Information and Control*** 8 (1965): 338-353.

KİŞİSEL YAYIN ve ESERLER

Bu Tez Çalışmasından Elde Edilen sonuçlar SCI kapsamındaki aşağıdaki dergilerde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir:

1. Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications (Kabul edildi)

2. Aygünoğlu, A., Çetkin, V., Aygün, H., An Introduction to Fuzzy Soft Topological Spaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (Kabul edildi)

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İstanbul' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul' da tamamladı. 2000 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2005 yılında fakülte ve bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında ise Yüksek Lisans öğrenimini bitirerek TÜBİTAK burslusu olarak Doktora öğrenimine başladı. 2005 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.