İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

ZAMANDAN BAĞIMSIZ VE ZAMANA BAĞLI NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet MERCİMEK

Enerji Bilim ve Teknoloji Anabilim Dalı

Enerji Bilim ve Teknoloji Programı

NİSAN 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

ZAMANDAN BAĞIMSIZ VE ZAMANA BAĞLI NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet MERCİMEK
(301082003)

Enerji Bilim ve Teknoloji Anabilim Dalı

Enerji Bilim ve Teknoloji Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Atilla ÖZGENER

NİSAN 2014

İTÜ, Enerji Enstitüsü'nün 301082003 numaralı Doktora Öğrencisi **Mehmet MERCİMEK**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ZAMANDAN BAĞIMSIZ VE ZAMANA BAĞLI NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Atilla ÖZGENER** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Melih GEÇKİNLİ** Beykent Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Cemal YILDIZ İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Üner ÇOLAK İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Tayfun BÜKE Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **30 Ocak 2014**
Savunma Tarihi : **04 Nisan 2014**

Eşime ve Anne-Babama,

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında emeği geçen danışmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Atilla Özgener'e ve tezim süresince desteğini esirgemeyen Prof. Dr. Bilge Özgener'e, katkılarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamın uygulama kısımını destekleyen İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.
Doğduğum günden bu yana hep yanımda olan, ilgi ve sevgisini esirgemeyen anneme ve babama, anlayışını ve sevgisini her zaman hissettiğim sevgili eşime ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

Ocak 2014

Mehmet Mercimek
(Nükleer Enerji Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
KISALTMALAR ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
SEMBOL LİSTESİ ..... **xvii**
ÖZET ..... **xix**
SUMMARY ..... **xxi**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Gerekçesi 1
1.2 Tezin Amacı 4
1.3 Literatür Araştırması 5
2. KÜRESEL GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ AYRIKLAŞTIRMA YÖNTEMLERİ **9**
2.1 Nötron Transport Denklemi 9
2.1.1 Zamana bağlı nötron transport denklemi 9
2.1.2 Ani nötron transport denklemi 13
2.1.3 Zamandan bağımsız nötron transport denklemi 14
2.1.4 Küresel geometri transport denklemi 16
2.2 Zaman Ayrıklaştırması 18
2.2.1 Açık farklama 19
2.2.2 Kapalı farklama 19
2.2.3 Açık ve kapalı farklamaların karşılaştırılması 21
2.2.4 Elmas farklaması 21
2.3 Yönsel Ayrıklaştırma 22
2.3.1 Ayrık ordinatlar yöntemi 22
2.4 Uzaysal Farklama Yöntemleri 25
2.4.1 Elmas farklaması 26
2.4.2 Süreksiz sonlu elemanlar yöntemi 29
2.5 Saçılma Kaynağı ve Üs İterasyonları 31
2.5.1 Saçılma kaynağı iterasyonu 31
2.5.2 Üs iterasyonu 32
2.6 Sınır ve Merkez Koşulları 34
2.6.1 Sınır koşulları 34
2.6.2 Merkez koşulları 35
3. ÖZGÜN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ **37**
3.1 Ayrık Ordinatlar Küresel Geometri Transport Denklemi Ağırlaştırılmış Kalıntılar Yöntemi Formu 38
3.1.1 DS2 ve KSSEY formülasyonları için ağırlaştırılmış kalıntılar formu 39
3.1.2 DS1 formülasyonu için ağırlaştırılmış kalıntılar formu 40
3.1.3 Özel yön formülasyonları için ağırlaştırılmış kalıntılar formu 41

3.2 Doğrusal (DS2) ve Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yaklaşımları 42
3.3 Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yaklaşımı (DS1) 47
3.4 Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri 50
3.4.1 DS2 formülasyonu 51
3.4.2 DS1 formülasyonu 55
3.5 Kuadratik (İkinci Derece) Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri .. 58
3.6 Ortalama Skaler Akılar 64
3.7 Negatif Akı Düzeltmesi 65
4. KABA IZGARA YENİDEN DENGELEME HIZLANDIRMA YÖNTEMİ.. 67
4.1 Dış İterasyon Hızlandırması 68
4.1.1 Kritik altı reaktör ve zamana bağlı transport denklemleri için hızlandırma 68
4.1.2 Özdeğer problemi için hızlandırma 75
4.2 İç İterasyon Hızlandırması 78
5. UYGULAMALAR 81
5.1 Zamandan Bağımsız Transport Denkleminin Çözümüne Yönelik Uygulamalar 81
5.1.1 Uzaysal farklama yöntemlerinin karşılaştırılması 82
5.1.1.1 Tek grup, kritik reaktör problemleri 83
5.1.1.2 İki grup, kritik reaktör problemleri 88
5.1.1.3 Eş yönsüz saçılmanın olduğu kritik reaktör problemleri 90
5.1.1.4 İki bölgeli kritik reaktör problemleri 92
5.1.1.5 İki bölgeli yutucu küre 95
5.1.2 Hızlandırma yönteminin değerlendirilmesi 99
5.1.2.1 Baskınlık oranının KIYDHY'ye etkisi 99
5.1.2.2 Saçılma oranının KIYDHY'ye etkisi 103
5.1.2.3 Optik kalınlığın KIYDHY'ye etkisi: 105
5.2 Zamana Bağlı Transport Denkleminin Çözümüne Yönelik Uygulamalar 108
5.2.1 Sonsuz ortam problemleri 110
5.2.1.1 Üniform kaynaklı, çoğaltkan olmayan sonsuz ortam 110
5.2.1.2 Üniform kaynaklı çoğaltkan, sonsuz ortam 113
5.2.1.3 Kaynaksız, çoğaltkan, sonsuz ortam 119
5.2.1.4 Koşma zamanları ve negatif akı sayıları 122
5.2.2 Sonlu ortam problemleri 124
5.2.2.1 Tamamen yutucu, sonlu, çıplak küre 124
5.2.2.2 Kritik, çıplak küre 127
5.2.2.3 Çoğaltkan olmayan dış kabuğunda kaynak bulunan çıplak küre 130
5.2.3 Hızlandırma yönteminin değerlendirilmesi 140
5.2.3.1 Sonsuz ortam problemleri 141
5.2.3.2 Sonlu ortam problemi 145
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 149
KAYNAKLAR 155
EKLER 163
ÖZGEÇMİŞ 181

KISALTMALAR

AKY : Ağırlaştırılmış Kalıntılar Yöntemi
AOY : Ayrık Ordinatlar Yöntemi
DİS : Dış İterasyon Sayısı
DSHY : Difüzyon Sentetik Hızlandırma Yöntemi
DS1 : Birinci Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi
DS2 : İkinci Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi
DSSEY : Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi
EF : Elmas Farklaması
ES : Eleman Sayısı
EY : Eksponansiyel Yöntem
GE : Geriye Euler
HV : Hızlandırma Var
HY : Hızlandırma Yok
IMSL : International Mathematics and Statistics Library
Ir. : Iraksama
İİS : İç İterasyon Sayısı
KF : Kapalı Farklama
KIBS : Kaba Izgara Bölge Sayısı
KIYDHY : Kaba Izgara Yeniden Dengeleme Hızlandırma Yöntemi
KSSEY : Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi
NS : Nokta Sayısı
osy : ortalama serbest yol
osz : ortalam serbest zaman
SEY : Sonlu Elemanlar Yöntemi
SFY : Sonlu Farklar Yöntemi
SSEY : Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Sonlu eleman deneme fonksiyonları. 43
Çizelge 3.2 : DS2 ve DS1 denklemlerinde kullanılan geometrik fonksiyonlar. 54
Çizelge 3.3 : KSSEY denklemlerinde kullanılan geometrik fonksiyonlar. 63
Çizelge 5.1 : U-D_2O sisteminin tesir kesitleri (cm^{-1})..... 83
Çizelge 5.2 : Farklı uzaysal farklama yöntemleri için DİS ve göreli CPU zamanları84
Çizelge 5.3 : Farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemleri için ES, NS, DİS ve t. 85
Çizelge 5.4 : Pu-239 sisteminin tesir kesitleri (cm^{-1}). 85
Çizelge 5.5 : %93 zenginleştirilmiş uranyum sisteminin iki-grup tesir kesitleri (cm^{-1}). 88
Çizelge 5.6 : İki-grup reaktör için göreli koşma zamanları. 89
Çizelge 5.7 : U-Al-H_2O yakıtlı sistemi iki-grup tesir kesitleri (cm^{-1}). 89
Çizelge 5.8 : Eşyönsüz saçılmanın olduğu U-D_2O reaktörü için tesir kesitleri (cm^{-1}). 90
Çizelge 5.9 : Eşyönsüz saçılma problemi için göreli CPU zamanları. 91
Çizelge 5.10 : Su yansıtıcılı, U-235 yakıtlı kritik sistem için tesir kesitleri (cm^{-1}). .. 93
Çizelge 5.11 : Küre merkezinde skaler akılarda görülen yüzde hatalar. 97
Çizelge 5.12 : Arayüzeyde skaler akılarda görülen yüzde hatalar..... 97
Çizelge 5.13 : Büyük boyutlu, iki gruplu reaktör için tesir kesitleri. 99
Çizelge 5.14 : Baskınlık oranı 0.9993 olan iki gruplu problem için DİS'ler. 100
Çizelge 5.15 : Koşma zamanları ve toplam iç iterasyon sayıları. 101
Çizelge 5.16 : Baskınlık oranı 0.4116 olan iki gruplu problem için DİS'ler. 102
Çizelge 5.17 : Tek gruplu reaktör için tesir kesitleri. 102
Çizelge 5.18 : Baskınlık oranı 0.3640 olan tek gruplu problem için DİS'ler. 103
Çizelge 5.19 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler. 103
Çizelge 5.20 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler (50 eleman). 104
Çizelge 5.21 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler (20 eleman). 105
Çizelge 5.22 : İç iterasyon sayıları (c=0.9, S_{16}, p=2)..... 105
Çizelge 5.23 : Tamamen saçıcı ortamda farklı p değerleri için kararlılık bölgeleri. 106
Çizelge 5.24 : Optik kalınlığa göre optimum p değerlerinin değişimi. 108
Çizelge 5.25 : Kritik altı reaktörde küre merkezinde skaler akı değerleri. 109
Çizelge 5.26 : Sonsuz ortam problemleri için koşma zamanları ve negatif akı sayıları. 123
Çizelge 5.27 : Normalize ortalama skaler akılar. 129
Çizelge 5.28 : KSSEY için farklı koşu durumları. 138
Çizelge 5.29 : KSSEY için KF, EF ve hızlandırma var (HV), hızlandırma yok (HY) durumları için her bir zaman adımında DİS'ler. 142
Çizelge 5.30 : İki farklı zaman adımında koşma zamanlarını p ile değişimi. 144
Çizelge 5.31 : Farklı S_N dereceleri için koşma zamanlarının p ile değişimi. 144
Çizelge 5.32 : Kritik üstü reaktörde koşma zamanlarının p ile değişimi..... 145
Çizelge 5.33 : Kritik çıplak reaktörde koşma zamanlarının p ile değişimi. 146
Çizelge 5.34 : DİS'in zamanla değişimi. 146

Çizelge 5.35 : Optik kalınlıkla değişen yüzde kazançlar. 147
Çizelge A.1 : SPDOT programı giriş verileri. 164
Çizelge A.2 : INPUT altprogramı değişkenleri. 171
Çizelge A.3 : DFEM altprogramı değişkenleri. 173

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Yön vektörlerinin ve dikme vektörünün gösterimi. 34
Şekil 3.1 : SSEY formülasyonu için birim hücre. 39
Şekil 3.2 : (i,m)'inci hücrede yönsel akının DSSEY gösterimi. 51
Şekil 4.1 : Kaba ızgara bölgeleri. 73
Şekil 4.2 : Kaba ve ince ızgara bölgeleri ve akım vektörleri. 73
Şekil 5.1 : Nokta sayısına göre k_{etk} değerlerinin değişimi. 84
Şekil 5.2 : Küre yarıçapının ¼'ünde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi. 86
Şekil 5.3 : Küre yarıçapının ½'sinde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi. 86
Şekil 5.4 : Küre yarıçapının 3/4'ünde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi. 87
Şekil 5.5 : Küre yüzeyinde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi. 87
Şekil 5.6 : İki-grup, çıplak reaktör için NS'ye göre k_{etk} dağılımı. 88
Şekil 5.7 : U-Al-H_2O sisteminde k_{etk}'de hesaplanan yüzde hatanın nokta sayısına göre değişimi. 89
Şekil 5.8 : KSSEY'in S_N derecesi ile yakınsaması. 90
Şekil 5.9 : Eşyönsüz saçılma problemi için k_{etk} değerlerinin nokta sayısına göre dağılımı. 91
Şekil 5.10 : Eşyönsüz saçılmanın olduğu U-D_2O yakıtlı reaktörde k_{etk}'da hesaplanan hatanın nokta sayısına göre değişimi. 92
Şekil 5.11 : Su yansıtıcılı, U-235 yakıtlı kritik sistem. 92
Şekil 5.12 : İki bölgeli kritik reaktör için k_{etk} değerlerinin NS'ye göre dağılımı. 93
Şekil 5.13 : k_{etk}'nde görülen yüzde hatanın koşma zamanına göre dağılımı. 94
Şekil 5.14 : Yansıtıcılı kritik reaktör için k_{etk} değerlerinin kalp bölgesindeki NS'ye göre dağılımı. 95
Şekil 5.15 : İki bölgeli yutucu küre problemi. 95
Şekil 5.16 : İki bölgeli yutucu kürede ~101 nokta için skaler akı dağılımı. 96
Şekil 5.17 : Birinci bölgede skaler akılarda yüzde hatanın dağılımı. 96
Şekil 5.18 : İki bölgeli yutucu kürede ~21 nokta için skaler akı dağılımı. 98
Şekil 5.19 : 4 farklı c değeri için İİS'nin optik kalınlıkla değişimi. 106
Şekil 5.20 : 4 farklı c değeri için İİS'de elde edilen yüzde kazançın optik kalınlıkla değişimi. 107
Şekil 5.21 : 4 farklı τ durumu için İİS'nin p ile değişimi. 107
Şekil 5.22 : Alt-kritik reaktör için difüzyon-transport (S_2) karşılaştırması. 109
Şekil 5.23 : Zaman adımı Δt=0.01 s alındığında skaler akı dağılımı. 111
Şekil 5.24 : Zaman adımı Δt=1 s alındığında skaler akı dağılımı. 111
Şekil 5.25 : Zaman ayrıklaştırması yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=1 s). 112
Şekil 5.26 : Zaman ayrıklaştırması yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=2 s). 112
Şekil 5.27 : Kritiklik durumunda skaler akıların zamanla değişimi. 114

Şekil 5.28 : Kritiklik durumu için EF ve KF yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=1 s). 114
Şekil 5.29 : Kritiklik durumu için EF ve KF yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=2 s). 115
Şekil 5.30 : Kritik altı reaktör için skaler akıda yüzde hatanın zamanla değişimi. . 116
Şekil 5.31 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=0.01 s). 116
Şekil 5.32 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=0.1 s). 116
Şekil 5.33 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=1 s). 117
Şekil 5.34 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=2 s). 117
Şekil 5.35 : Kritik üstü reaktörde skaler akılarda hatanın zamanla değişimi (KF).. 118
Şekil 5.36 : Kritik üstü reaktörde skaler akılarda hatanın zamanla değişimi (EF). . 118
Şekil 5.37 : KF yöntemine göre skaler akıda hatanın zamanla değişimi. 120
Şekil 5.38 : EF yöntemine göre skaler akıda hatanın zamanla değişimi. 121
Şekil 5.39 : KF yöntemi, skaler akı hatalarının zamana göre dağılımı. 122
Şekil 5.40 : EF yöntemi, skaler akı hatalarının zamana göre dağılımı. 122
Şekil 5.41 : Ortalama skaler akıların zamanla değişimi. 125
Şekil 5.42 : Tamamen yutucu kürede skaler akı dağılımı. 126
Şekil 5.43 : Ortalama skaler akıların nokta sayısı ile değişimi: (a) KF ve Δt=1 s. (b) KF ve Δt=0.1 s. (c) EF ve Δt=1 s. (d) EF ve Δt=0.1 s. 127
Şekil 5.44 : Küre merkezine yakın noktalarda normalize skaler akı dağılımı. 129
Şekil 5.45 : Küre merkezindeki akıya göre normalize edilmiş ortalama skaler akıların zamanla değişimi. 130
Şekil 5.46 : Küresel kabuk kaynağı problemi. 131
Şekil 5.47 : Skaler akılarda L_2 hatalarının zamana göre dağılımı:
(a) KF, Δt=0.01 s, S_{32}, NS=20. (b) EF, Δt=0.01 s, S_{32}, NS=20.
(c) KF, Δt=0.5 s, S_{14}, NS=10. (d) KF, Δt=0.1 s, S_{32}, NS=100.
(e) KF, Δt=0.5 s, S_{12}, NS=20. (f) KF, Δt=0.5 s, S_{32}, NS=20.. 133
Şekil 5.48 : Farklı S_N dereceleri için KSSEY'in yakınsaması. 134
Şekil 5.49 : Farklı zaman adımları için KSSEY'in yakınsaması, (KF). 135
Şekil 5.50 : Farklı zaman adımları için KSSEY'in yakınsaması, (EF). 135
Şekil 5.51 : Δt=1 s zaman adımı için 8 farklı yöntemin L_2 hatasının zamanla değişimi. 136
Şekil 5.52 : Eleman sayısı arttıkça KSSEY'nin yakınsaması. 136
Şekil 5.53 : Eleman sayısı (ES) arttıkça DS1 ve DS2'nin yakınsaması. 137
Şekil 5.54 : KSSEY'de akıların zamanla, zamandan bağımsız çözüme yakınsaması. 138
Şekil 5.55 : Dört farklı durum için KSSEY'nin zamandan bağımsız ve zamana bağlı skaler akıları arasındaki mutlak farkın radyal uzaklığa göre değişimi. 138
Şekil 5.56 : Farklı ızgara durumları için zamana bağlı skaler akılardaki yüzde hatanın radyal uzaklığa göre değişimi. 139
Şekil 5.57 : Zaman farklaması olarak KF kullanılması durumunda uzaysal farklama yöntemlerinin L_2 hatalarının koşma zamanları ile değişimi. 140
Şekil 5.58 : Zaman farklaması olarak EF kullanılması durumunda uzaysal farklama yöntemlerinin L_2 hatalarının koşma zamanları ile değişimi. 140
Şekil 5.59 : p'ye göre koşma zamanlarının değişimi: (a) DS1. (b) EF. (c) DS2. (d) KSSEY. 142
Şekil 5.60 : KSSEY için KF, EF ve hızlandırma var (HV), hızlandırma yok (HY) durumları için her bir zaman adımında iç iterasyon sayıları. 143
Şekil 5.61 : Her bir zaman adımında İİS'nin değişimi. 146
Şekil A.1: SPDOT programının basitleştirilmiş akış diyagramı. 178

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{\beta}$	: Gecikmiş nötron kesri
$\mathbf{J}$	: Nötron akımı
$\boldsymbol{\chi}$	: Nötron spektrum kesri
$\boldsymbol{\nu}$	: Fisyon başına çıkan ortalama nötron sayısı
$\mathbf{H}$	: Transport operatörü
$\mathbf{h}$	: Deneme fonksiyonu
$\mathbf{w}$	: Ağırlık fonksiyonu
ξ	: Yerel uzaysal değişken
$\mathbf{k_{etk}}$	: Etkin çoğaltma katsayısı
$\boldsymbol{\mu}$	: Nötron yönünün radyal bileşeni
$\boldsymbol{\rho}$	: Küre merkezinden radyal uzaklık, baskınlık oranı
$\boldsymbol{\tau}$	: Optik kalınlık
$\boldsymbol{\Omega}$	: Nötron yönünü gösteren katı açı
$\boldsymbol{\sigma}$	: Makroskopik tesir kesiti
$\boldsymbol{\phi}$	: Skaler akı
Γ	: İki kaba ızgara bölgesi arasında kalan yüzey alanı
$\boldsymbol{\psi}$	: Yönsel akı
$\mathbf{V}$	: Hacim elemanı
$\mathbf{z}$	: Geometrik fonksiyon

ZAMANDAN BAĞIMSIZ VE ZAMANA BAĞLI NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ

ÖZET

Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi yüksüz parçacık transport denkleminin ayrık ordinatlar yöntemi ile formülasyonunda kullanılabilecek en esnek ve başarılı, karakteristik olmayan yöntemler arasındadır. Sürekli Sonlu Elemanlar Yöntemi ile aynı fonksiyon uzayını kullanır. Fakat eleman sınırlarında süreklilik gevşetilmiştir. Şekil fonksiyonları, alan değişkeni, onun türevi veya her ikisi birden eleman sınırlarında süreksiz olacak şekilde seçilir. Bu yöntem ve alt kümeleri hem sonlu elemanlar hem de sonlu farklar yöntemini içerir. Bu nedenle, hem sonlu farklar hem sonlu elemanlar yöntemlerinin avantajlarını içerir.

Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak zamana bağlı ve zamandan bağımsız nötron transport denklemini çözen çeşitli kodlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada da SPDOT ismi verilen ve değişik sayısal yöntemler kullanarak küresel geometride transport denklemini çözebilen bir FORTRAN programı geliştirilmiştir. Bu programda yönsel ayrıklaştırma Ayrık Ordinatlar Yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Uzaysal farklamada ise ilk olarak Elmas Farklaması yöntemi kullanılmış ve zamandan bağımsız bençmark problemleri ve aynı yöntemi kullanan PARTISN kodu ile test edilerek doğrulanmıştır. Daha sonra TIMEX kodunda kullanılan Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi farklı bir formülasyonla geliştirilmiştir. Yeni geliştirilen Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi aynı kodun farklı bir sürümüne eklenmiş ve bu yöntemler zamana bağlı ve zamandan bağımsız bençmark problemleri koşularak karşılaştırılmıştır.

Yüksek dereceden Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi reaktör fiziği dışındaki diğer disiplinlerde oldukça ilerlemiştir. Fakat bu alanda nükleer mühendislikte sınırlı bir araştırma yapılmıştır. Bu çalışmada ikinci amaç zamana bağlı nötron transport denklemi için yüksek dereceden Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi geliştirmektir. Zamandan bağımsız bençmark problemleri ile yapılan sayısal analizler sonucu yeni geliştirilen Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi, TIMEX kodunda kullanılan yönteme göre daha doğru sonuçlar vermiştir. Buradan hareket edilerek, aynı metodoloji ile Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemler için gerekli formülasyonların türetim aşamaları bu tez çalışmasında verilmektedir.

Bu türetimlerde geleneksel Lagrange polinomları temel fonksiyonları kullanılmıştır. Yeni Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemleri ağırlık fonksiyonlarının şekil fonksiyonları ile aynı seçildiği Galerkin Yöntemi kullanılarak geliştirilmiştir. Uzaysal farklamada kullanılan dört yöntemin doğruluk derecesi ve hesaplama performansı zamandan bağımsız bençmark problemleri ile test edilmiştir. Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin, Elmas Farklaması'ndan ve diğer iki doğrusal süreksiz sonlu elemanlar yöntemlerinden hem hesaplama performansı hem de doğruluk açısından daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Zaman farklamasında ise Kapalı Farklama ve Elmas Farklaması yöntemleri kullanılmıştır. SPDOT zamana bağlı bençmark problemleri için koşularak yeni yöntemlerin performansı değerlendirilmiştir. Zaman farklaması yöntemlerinden Elmas Farklaması, Kapalı Farklama yöntemine göre özellikle sonsuz ortam problemlerinde daha doğru sonuçlar üretmiştir. Hesaplama yükü olarak bakıldığında aynı doğrulukta bir skaler akı sonucunu diğer yöntemlere göre daha kısa sürede hesaplayabildiği için uzaysal farklamada Kuadratik Süreksiz, zaman farklamasında Elmas Farklaması birleşimi daha etkili olmuştur. Sonuç olarak Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin zamandan bağımsız ve zamana bağlı nötron transport denkleminin küresel geometride çözümünde uzaysal farklama yöntemi olarak oldukça etkili bir yöntem olduğu gözlenmiştir.

Özellikle zamana bağlı nötron transport denklemi hesaplamalarında her zaman adımında çok sayıda iterasyon gerekmektedir. Ayrıca optik kalın ve oldukça saçıcı bölgelerde iterasyonların yakınsama hızının oldukça yavaşladığı ve bunun büyük bilgisayar koşma zamanlarına neden olduğu iyi bilinmektedir. Bu tür problemler yakınsama hızını arttırmak için hızlandırma yöntemlerine gerek duymaktadır. Bu çalışmada Kaba Izgara Yeniden Dengeleme Hızlandırma Yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem transport teorisinin hem iç hem dış iterasyonlarının hızlandırılmasında kullanılmıştır. Dış iterasyonların hızlandırılmasında özdeğer problemi ile kritik altı reaktör problemleri ve zamana bağlı problemler ayrı ele alınmıştır. Bu çalışmada bu hızlandırma yönteminin farklı durumlar için türetimleri verilmiştir. Sayısal analizler sonucunda bu hızlandırma yönteminin uygun problemlerde önemli ölçüde hesaplama zamanını azalttığı gösterilmiştir. Ayrıca bu yöntemin baskınlık oranı bire yaklaşan problemlerde dış iterasyonları, saçılma oranı bire yaklaşan ve yöntemin ıraksamadığı problemlerde ise iç iterasyonları daha etkili hızlandırdığı gözlenmiştir. Sonuç olarak kararlı ve doğru sonuçlar üreten yeni geliştirilen Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemleri, Kaba Izgara Yeniden Dengeleme Hızlandırma Yöntemi algoritması ile iyi bir etkileşim göstermiştir.

DISCONTINUOUS FINITE ELEMENT METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF TIME-INDEPENDENT AND TIME-DEPENDENT NEUTRON TRANSPORT EQUATION

SUMMARY

The Discontinuous Finite Element Method is among the most flexible numerical methods in discrete ordinates formulations of neutral particle transport. The method was first introduced for the solution of the hyperbolic neutron transport equation in the early 1970s. It uses piecewise polynomial spaces similar to the (Continuous) Finite Element Method but with relaxed continuity conditions at interelement boundaries. Trial functions can be chosen so that the field variable, its derivative or both are discontinuous across interelement boundaries. The method includes as its subsets both the Finite Element and Finite Difference methods. Hence, it has many good features of both methods. An important distinction between the Discontinuous and Continuous Finite Element Methods is that in the Discontinuous Methods the resulting equations are local to the generating element. The solution within each element is not reconstructed by looking to neighbouring elements. Its compact formulation can be applied near boundaries without special treatment, which greatly increases the robustness and accuracy of any boundary condition implementation. Because of the local formulation, a discontinuous finite element algorithm will not result in an assembled global matrix and thus in-core memory demand is not as strong. Also, the local formulation makes it very easy to parallelize the algorithm, taking advantage of either shared memory parallel computing or distributed parallel computing. In this Thesis, Linear and Quadratic Discontinuous Finite Element methods have been developed for the solution of time-independent and time-dependent neutron transport equation in spherical geometry.

Several computer programs have been developed for neutron transport using the Linear Discontinuous Finite Element Method. ONETRAN and TIMEX are examples of those codes for the solution of time-independent and time-dependent transport, respectively. In this Thesis, a FORTRAN computer program named SPDOT has been written. It includes several discretization methods for the solution of space, angle, energy and time dependent neutron transport equation in spherical geometry. All developed formulations used in the SPDOT code are based on the prompt neutron transport equation. Hence delayed neutron effects are not treated in the code. Discrete Ordinates Method is used as an angular discretization method in this code. First, this code was developed using Diamond Differencing Method in space for the solution of time-independent transport equation. In order to validate first version of SPDOT, some benchmark problems of time-independent transport equation and PARTISN code which employs Diamond Differencing in space too were used. Second, Linear Discontinuous Finite Element Method similar to the method used in TIMEX code were developed and implemented in another version of SPDOT. The method employed in TIMEX code has been reformulated by using newly developed methodology. As the first objective of this study, a new and unique Linear

Discontinuous Finite Element Method has been developed. After comparison of two linear discontinuous methods, it has been shown that newly developed linear discontinuous method gives more accurate results than the older method. Hence, we used the same methodology to develop Quadratic Discontinuous Finite Element Method.

Higher-order Discontinuous Finite Element Method has been extensively investigated in other disciplines. But limited research has been carried out using elements of higher degree in neutron transport. The second objective of this Thesis is to develop a higher-order Discontinuous Finite Element formulation for the solution of neutron transport problems in spherical geometry both for the time-independent and time dependent variety. As a higher-order Discontinuous Finite Element Method, we employ the Quadratic Discontinuous Galerkin Finite Element Method.

In this Thesis, we present the derivations of linear systems of equations for TIMEX type, newly developed Linear Discontinuous Finite Element Method and Quadratic Discontinuous Finite Element Method for the solution of time-independent and time-dependent prompt neutron transport equation in spherical geometry. We use the classical Galerkin method in which the weight functions are taken to be the same as the shape functions which are Lagrange type polynomials with compact support in the newly developed discontinuous methods. Weighted Residual Method is used to obtain matrix equations. Depending on the sign of the angular variable, discontinuity is introduced differently. Hence different matrix equations are obtained for rightward and leftward sweeps. Also for the starting direction equations, there are two options in the SPDOT, starting with equation similar to the equations used in the plane geometry and step-start method. Derivations for the special direction given in this study are based on the former. This is used in all numerical applications of this study. Second option for starting direction equations is step-starting similar to the method described in TIMEX code. Difference in computational accuracy is very small between two methods.

Linear Discontinuous Finite Element Method solves a 2x2 linear system, while Quadratic Discontinuous Finite Element Method must solve 3x3 linear system in every iteration. In order to solve 3x3 linear system in Quadratic Discontinuous Finite Element Method, there are two options in the SPDOT as Gauss Elimination with Partial Pivoting and Cramer's Rule. The Cramer's rule runs about two-times faster than the Gauss Elimination with Partial Pivoting. An analysis with time-independent benchmark problems has shown that CPU times for discontinuous methods are longer than Diamond Difference Method for the same number of elements. But for the fixed number of points, Quadratic Discontinuous Finite Element Method results in the smallest CPU times. If the number of points in all methods is adjusted to get the same accuracy in effective multiplication factor, Quadratic Discontinuous Finite Element Method with Cramer's rule is the most computationally efficient method. Also numerical analysis in this study reveals that Quadratic Discontinuous Finite Element Method developed in this study is well suited for large-scale time-dependent computations in which high accuracy is required.

SPDOT can carry out four different spatial discretization methods as Diamond Difference, two Linear Discontinuous Finite Element Methods and Quadratic Discontinuous Finite Element Methods. In addition to inner and outer iterations, reflective boundary condition iteration is also available in the code. Vacuum boundary condition is used in time-independent and finite medium time-dependent

transport benchmark problems, while reflective boundary condition is employed in infinite medium time-dependent problems. In addition, two possible options are described as central boundary condition in this study. Also negative flux fix up has been implemented to the code. Benchmark problems used in this study include bare and reflected spheres, isotropic and anisotropic scattering regions, multigroup and multiregional problems, critical, multiplying regions and fixed source problems. Numerical applications running SPDOT for different benchmark problems reveals that Quadratic Discontinuous Finite Element Method is the best method among others when accuracy and computational performance of the methods are considered. Also, newly developed Linear Discontinuous Finite Element Method is the second most accurate method in time independent problems. Another advantage of newly developed discontinuous methods is that these methods show no flux dip near centre of the sphere while the other methods have flux dips.

Implicit and Diamond Difference Methods are used for the temporal differencing in time-dependent problems. SPDOT has been run for several time-dependent finite and infinite media benchmark problems to assess the performance of various spatial discretization methods in the solutions of neutron transport problems by the discrete ordinates method. This Thesis demonstrates that Quadratic Discontinuous Galerkin Finite Element Method is the best method for time-dependent problems. In addition, it is possible to increase quadrature order up to S_{256} in SPDOT, hence refinement in S_N order is possible in the code. The refinement in the temporal-spatial-angular mesh results in convergence in this method for time-dependent benchmark problems. It is found in numerical calculations that Diamond Difference Method is more accurate method than the Implicit Method especially infinite media problems. As a result, the combination of quadratic discontinuous in space-diamond difference in time has the highest performance if accuracy and running times are considered.

Every time step in a time-dependent neutron transport problem requires many numbers of iterations. In addition, it is evident that convergence is very slow in optically thick and scattering regions. This causes large computer CPU time. Therefore, acceleration methods are required in this kind of problems. The time-marching scheme using the implicit method requires the solution of the equivalent steady-state subcritical, external source problem in each time step. The solution of this problem is realized by fission source iteration (outer iteration). Scattering source iteration (inner iteration) is also necessary for each energy group. Both of these iterative solution methods require the onset of acceleration techniques in many problems. Rebalance methods normalize the discrete transport solution so that converged solution must satisfy the angularly-integrated neutron balance equation over individual cells (fine mesh rebalance) or groups of fine-mesh cells (coarse mesh rebalance). Coarse Mesh Rebalance can accelerate effectively if the size of the coarse meshes is properly chosen. Thus, the code user must select an optimal coarse mesh to maximize efficiency. The Coarse Mesh Rebalance equation is formulated in terms of rebalance factors. These factors are then used to update the solution in each fine-mesh cell. As the solution converges, the rebalance factors approaches unity. First, derivations of the equations for this method are given in this Thesis. Then, this acceleration method has been implemented to the code. Both acceleration of outer iterations which include eigenvalue problems and subcritical reactor or time-dependent transport problems and inner iterations are possible in SPDOT. Performance of acceleration method has been assessed via numerical calculations for some test problems. The results show that the suggested acceleration procedure is

effective in reducing the number of iterations and computing time requirements if it is applied appropriate problems and number of fine mesh cells in each coarse mesh cell is properly chosen.

Especially, acceleration is valuable tool for Discontinuous Finite Element Methods since they produce stable and accurate results in optically thick or thin regions. On the other hand, Course Mesh Rebalance Acceleration Method is a conditionally stable method and it can be unstable in such regions. Hence, it has been shown in this study that it is an efficient method to accelerate iterations in Discontinuous Finite Element Methods.

Finaly, descriptions of the subroutines and main program of SPDOT are given as an Appendix. There are 19 subroutines in the code. Input and output files for benchmark problems are also included. Another computer program for the calculations of Linear Discontinuous Finite Element Method previously developed (based on formulations similar to the TIMEX code) is given in a different folder.

1. GİRİŞ

Transport teorisinin kökleri bundan yaklaşık yüzyıl önce gazların kinetik teorisi için formüle edilmiş olan Boltzman denklemine uzanmaktadır. Boltzman transport denkleminin doğrusal modeli, radyasyon zırhlamasında, nükleer reaktör sistemlerinde ve tıpta kullanılmaktadır. 1930'larda yıldız atmosferlerinde radyasyon transportu çalışmaları neticesinde transport problemlerinin çok sayıda analitik çözümleri elde edilmiştir. Fakat bu problemlerin fiziği tek boyutlu geometriler ve yarı sonsuz ortamlar ile sınırlı kalmıştır. 1940'larda nükleer zincir reaksiyonlarının bulunması ile nükleer reaktörlerde ve radyasyon zırhlaması uygulamalarında kullanılmak üzere, geniş geometrik konfigürasyonlarda yüksüz parçacık transport problemlerinin çözümüne yönelik ilgi artmıştır.

1940'lardan beri transport problemlerinin çözümü için değişik analitik yöntemler üzerinde durulmuştur. Weiner-Hopf tekniği, tekil özfonksiyon açılımları ve diğer analitik yöntemler, Milne problemi gibi oldukça ideal konfigürasyonlarda transport işleminin doğasını anlamaya yönelik önemli bilgiler sağlamıştır. Her ne kadar uygulamalı matematik alanında çalışan bilim insanları analitik çözümü olan problemlerin sayısını arttırma yönünde araştırmalarını sürdürüyor olsa da, çalışılan problemler mühendislik analizindeki ilgili problemlere göre fazlasıyla idealleştirilmiş geometrik konfigürasyonlara yöneliktir.

Son birkaç on yıldır hızla artan bilgisayarların hesaplama gücüne paralel olarak ileri sayısal yöntemler geliştirilmektedir. Bu yöntemler ile genel amaçlı bilgisayar kodları yazılmakta ve bu kodlar ile nükleer reaktörlerin analizinde karşılaşılan çok bölgeli ve çok boyutlu transport problemleri çözülmektedir [1].

1.1 Tezin Gerekçesi

Transport denklemi zaman, yön, enerji ve uzay değişkenlerine bağlı bir denklemdir. Bu denklemi doğrudan çözmek yerine çözerken karşılaşılan birtakım engelleri aşmak için zaman, uzay, enerji ve yön ayrıklaştırması yapılarak bu denkleme sayısal olarak

yaklaşık bir çözüm bulunabilir. Son yıllarda belirli tip parçacık transport problemlerinin çözümüne yönelik birçok yaklaşık yöntem geliştirilmiştir. Örneğin transport denkleminin yönsel ayrıklaştırması için Kesikli (Ayrık) Ordinatlar (S_N) [1-3] ve Küresel Harmonikler (P_N) [4-6] yöntemleri gibi yaklaşımlar yapılmıştır. Bilgisayar teknolojisindeki son gelişmelerin ışığında bu transport yöntemlerine yüksek dereceden yaklaşımlar yapmak mümkün hale gelmiştir. Her ne kadar bu yöntemler kod paralelleştirme tekniklerine uyarlanabilse de, özellikle zamana bağlı ve bütün kalbi kapsayan bir çözüm için hesaplama bedeli yine de bir engel olarak kalabilmektedir [7].

Bunlardan S_N yöntemi hesapsal doğruluk ve verim arasında iyi bir uyum sağlayan ve yüksüz parçacık transport denklemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemlerden biridir. Bu yöntemde toplam 4π'lik katı açıyı tarayan bir dizi ayrık yön boyunca transport denklemlerinin sayısal çözümü yapılır ve yön üzerindeki integraller sayısal karelemeler ile yer değiştirir. Küresel Harmonikler yöntemi de yine nötronun yönsel ayrıklaştırılmasında kullanılan etkili yöntemlerden biridir [8,9]. Özellikle eğrisel geometrilerde yönsel değişkenin ayrıklaştırma yöntemleri üzerine çalışmak bir zorunluluk haline gelmiştir [10].

Son yıllara kadar özellikle zamandan bağımsız transport denklemlerinin çözümüne daha fazla odaklanılmıştır. Fakat pratik gereksinimlerin artmasıyla bugün çalışılan problemler öncekilere göre daha karmaşıklaşmıştır (örneğin karmaşık yapı, heterojen ortam, eşyönsüzlük özelliği, geniş enerji bölgesi, gelişmiş fiziksel koşullar, hareketlilik durumu vs.). Bu nedenle daha ileri sayısal yöntemler uygulamak ve zamana bağlı transport denklemlerine daha fazla odaklanmak oldukça gerekli hale gelmiştir. Ayrıca bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler neticesinde bu karmaşık problemlerin zamana bağlı çözümü, daha az hesaplama zamanı gerektireceğinden bu konu son yıllarda daha fazla gündeme gelmeye başlamıştır.

Zamana bağlı transport denklemi reaktör fiziği ve astrofizik gibi birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir [11-13]. Zaman değişkeninin ayrıklaştırılmasında kullanılan en çok bilinen iki yöntem açık ve tam kapalı farklama yöntemleridir [1]. Temel olarak açık farklama formülü önceki bilinen sınır koşulları ve değerlerden şu anki noktaların her birinde çözüm bulmayı sağlayan iteratif olmayan adımlama işlemidir. Bu durumlarda kararlılık sorunları kritik önemdedir. Diğer yandan kapalı farklama yöntemleri genel olarak önceki sınır koşulları ve değerlerden şu anki

değerlerin iteratif ve eş-zamanlı olarak hesaplanmasını içerir. Kararlılık sorunu açık farklamadaki kadar önemli değildir. Fakat burada da hesaplamalar daha uzun sürmektedir [14].

Sayısal bir yöntemin amacı transport denklemine ayrık cebrik denklemler sistemi ile doğru bir yaklaşım yapmak ve bu sistemi verimli bir şekilde çözmektir. Dahası, iyi bir sayısal yöntem matematiksel modellerin fiziksel özelliklerine mantıklı bir şekilde benzetim yapabilmeli ve fiziksel olmayan sapmalara müsaade etmemelidir. Örneğin nükleer radyasyon problemlerinin çözümünde, ele alınan fiziksel sistemin bazı uzaysal noktalarında belirli fiziksel büyüklükleri doğru bir şekilde hesaplamak önemlidir. Özellikle fotonik problemlerinde ele alınan sistemin dış sınırlarından çıkan kısmi akımı doğru bir şekilde tahmin etmek gerekmektedir. Oysa transport denklemleri Elmas Farklaması (EF) ve Eksponansiyel Yöntem (EY) kullanılarak zaman boyutunda ayrıklaştırıldığında, bu çıkan kısmi akımların zamana göre türevlerinde fiziksel olmayan sert dalgalanmalar görülmektedir. EF ve EY transport denklemlerinin çözümünde tipik ayrıklaştırma yöntemleri olmalarına rağmen bu yöntemler ile uygun bir fiziksel ve matematiksel analiz yapmak mümkün değildir. Bunların dışında özellikle fiziksel olmayan dalgalanmaların giderilmesinde süreksiz sonlu elemanlar yöntemleri faydalıdır. Ayrıca Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi hücre kenarındaki akılar için EF ve EY'den daha doğru sonuçlar üretmektedir.[15]. EF transport denklemlerine uygulaması kolay bir yöntem olmasına ragmen önemli bir dezavantajı fiziksel olmayan dalgalanmalı sonuçlar üretmesidir [6]. Özellikle zamana bağlı problemlerde zaman adımlarını küçülterek dalgalanmalar bastırılabilse de bu çok büyük hesaplama bedeli getirebilecektir.

EF ve EY haricinde zaman farklamasında kapalı ve açık farklamalar ya da bunlardan türetilebilecek Crank-Nicolson, Geriye Euler veya Kapalı Farklama (KF) gibi farklamalar kullanılabilir. Daha önceki çalışmalarda KF yönteminin etkinliği gösterilmiştir [16]. Bunların zaman farklamasında kullanılması sonucu akıda fiziksel olmayan dalgalanmalar görülebilir. Uzaysal farklamada ise daha önce akıdaki dalgalanmaları bastırmak için faydalı olduğu gösterilen süreksiz sonlu elemanlar yönteminin türevi bir yöntem (tam yada kısmi değişkenli) geliştirilebilir.

Transport denkleminde saçılma kaynağı iterasyonunu hızlandırmak üzere çeşitli sayısal teknikler kullanılmıştır. Bunlardan Chebychev ve iki-döngülü aşırı gevşeme teknikleri genel matris iterasyon tekniklerinin uyarlamasıdır. En çok kullanılan

hızlandırma tekniklerinin kökeni ise çözümün özelliklerine ilişkin fiziksel argümanlardan gelir. Bu sınıfa giren hızlandırma yöntemleri ise Kaba Izgara Yeniden Dengeleme Hızlandırma Yöntemi (KIYDHY) ve sentetik yöntemlerdir (Difüzyon Sentetik Hızlandırıcı, Transport Sentetik Hızlandırıcı..) [1,17,18]. Özellikle zamana bağlı transport denkleminin sayısal çözümünde hızlandırma yöntemleri kullanmak önemli ve gereklidir.

Bugün reaktör modellemede kullanılan kodların çoğunluğu 1970 ve 1980'lerde seri platformlar için yazılmıştır. Oysa yeni yazılan kodlar paralel programlamaya elverişli olarak yazılmaktadır. Özellikle zamana bağlı transport kodları için bu bir gereklilik halini almıştır. Bu tür kodlara örnek olarak PARTISN4.0 ve en son Argonne Ulusal Laboratuarı'nda geliştirilen UNIC kodları gösterilebilir [19]. Süreksiz sonlu elemanlar yöntemlerinin yerel formülasyon özelliği algoritmayı paralel programlamaya uygun hale getirmeyi oldukça kolaylaştırmaktadır.

Sonuç olarak zamandan bağımsız ve zamana bağlı transport denkleminin çözümü için bilgisayar koşma zamanından çalmayacak, kararlı ve gerçekçi sonuçlar üreten bir sayısal yöntem geliştirilmesi ve bunun analitik çözümü bulunabilecek problemlerle test edilmesi gerekmektedir. Bu tez çalışmasında zamandan bağımsız ve zamana bağlı transport denkleminin çözümüne yönelik diğer yöntemler gözden geçirildikten sonra, hesaplama bedelini azaltan bunu yaparken de ortaya çıkabilecek fiziksel olmayan dalgalanmarı da bastıran yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amaçları kısaca şu şekilde özetlenebilir:

- Zamandan bağımsız ve zamana bağlı ani nötron transport denklemi çözümü için yeni bir sayısal yöntem geliştirmek,
- Uygun bir hızlandırma tekniği ile bu yöntemin optimizasyonunu sağlamak,
- Küresel koordinatlarda bençmark problemleri ile yöntemi test etmek ve diğer yöntemlerle karşılaştırmak,
- Geliştirilen yöntemin bilgisayar programının yazılması, hesaplama bedeli ve doğruluk açısından diğer karşılaştırılan yöntemlerden daha üstün bir yöntem olduğunu göstermek.

1.3 Literatür Araştırması

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) mühendislikte karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en güçlü sayısal yöntemlerden biridir. İlk olarak 1950'lerin ortalarında inşaat mühendislerince yapısal mekanikte karşılaşılan karmaşık problemlerine uygulanmıştır. Kısa süre içerisinde akışkanlar mekaniği, elektrostatik, nötron difüzyonu ve ısı transferi gibi birçok farklı alanda kullanılan standart bir araç haline gelmiştir [20-22]. Bu yöntemin nükleer reaktör analizinde ilk uygulamarı nötron difüzyon denkleminin sayısal çözümü üzerinedir ve geleneksel sonlu farklar yöntemleri ile karşılaştırıldığında oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir [23-25]. SEY ilk olarak transport hesaplamaları için 1971'de Kaper ve diğ. tarafından levha geometride bir boyutlu transport denkleminin çözümü için önerilmiştir [26]. Ohnishi, SEY'nin transport denklemine olası uygulamaları üzerine çalışmış ve dikdörtgen ızgaralı Sonlu Farklar Yöntemi (SFY) yerine üçgen ızgaralı SEY'nin kullanılabileceğini göstermiştir [27]. Ukai, eşyönsüz saçılma ve enerjiye bağlı çok boyutlu transport denklemine SEY'nin uygulanmasını çalışmıştır [28]. Bu çalışmada SEY'nin genel integral yasası (Galerkin ya da kalıntı) formülasyonu kullanılmış diğer araştırmacıların kullandığı varyasyonel (Ritz) yaklaşımı tercih edilmemiştir. Galerkin Yöntemi'nin avantajı transport denklemi ve sınır koşullarının doğrudan uygulanmasıdır. Oysa Ritz Yöntemi için transport denkleminin kendine eş hale getirilmesi gerekmektedir. O yıllardaki çalışmaların sonucunda SEY'nin avantajları şu şekilde sıralanmıştır [29].

- Dik olmayan ızgaralar kolaylıkla SEY ile ayrıklaştırılabilir. Çünkü SEY'inde üçgen ve dikdörtgen eleman kullanımı ile örneğin bazı reaktör tiplerinde kullanılan altıgen yakıtlı kalp geometrileri kolaylıkla ele alınabilir.
- Ayrık Ordinatlar Yöntemi'nde (AOY) sıkça rastlanan ışın etkisi azaltılabilir veya tamamen yok edilebilir [30].
- İntegral denklem çözümlerinde karşılaşılan tam matris yerine SEY'inde cebrik denklem sistemi seyrek matris oluşturur. Bu ise bilgisayarda depolama ve çözümü kolaylaştırır.
- Sınır koşulları, eş yönsüz saçılmalar ve eş yönsüz kaynaklar kolaylıkla ele alınabilir.

- Yüksek dereceden SEY'lerinin kullanımı ile verilen doğruluk derecesini başarmak için geçen hesaplama zamanı önemli ölçüde azaltılabilir.

Fakat SEY'nin ele aldığı problem çok boyutlu nötron transportunda karşılaşılan büyük problemlerden biri olduğunda katsayı matrisinin depolanması ve tersine çevrilmesi zorlaşmaktadır. Bu sorun SEY'nin transport problemlerine uygulanmasında en büyük engel olarak görülmüştür [31]. Reed ve diğ. iki boyutlu transport denkleminin çözümüne yönelik uzaysal değişkenin ayrıklaştırılmasında SEY'ni, yönsel değişkenin ayrıklaştırılmasında ise AOY'ni başarı ile uygulamıştır. AOY nötron akışını boyunca ızgara akılarını çözdüğü için ızgara üçgenlerle sınırlı tutulmuş ve bu yöntem iki boyutlu TRIPLET koduna uygulanmıştır. TRIPLET üçgen sınırlarında süreksiz deneme fonksiyonları kullanmıştır [32]. Bu kodun bir boyutlu benzeri ONETRAN ise her bir ızgara hücresinde yönsel akıya Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi (DSSEY) ile yaklaşım yapmıştır [33]. Daha sonra Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi (SSEY) nötron transportu dışında elastik ortamda şok dalgası yayılımı, viskoelastik akış, zamana bağlı parabolic denklemler, hiperbolik denklemler, Navier-Stokes denklemleri ve hidrodinamik gibi birçok alanda popülerlik kazanmıştır [34-38]. SSEY'nin tarihi ve son gelişmeleri Cockburn ve diğ. tarafından ele alınmıştır [39,40]. Bu yöntem her ne kadar 30 yılı aşkın süredir değişik formlarda kullanılıyor olsa da özellikle son on yılda önemli bir gelişme göstermiştir [41]. Birçok araştırmacı bu yöntemi transport denklemlerinin çözümünde kullanmıştır [42-46]. Bu konuya ilişkin diğer çalışmalardan 3. bölümde bahsedilmektedir.

Zamana bağlı transport denkleminin çözümü için çok sayıda çalışma yapılmış ve yöntem denenmiştir. Bu çalışmaların bir kısmından aşağıda bahsedilmiştir:

Ravetto ve diğ. kaynak güdümlü sistemlerde zamana bağlı transport hesaplamaları için Kapalı Farklama (KF) yöntemini analiz etmiştir Yöntemin özelliklerini değerlendirmek için basitleştirilmiş bir geometride zaman-harmonik analizi, zaman ve uzay-yön ayrıklaştırmalarının ayrı ayrı etkileri analiz edilerek gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerde alt-kritik sistemlerde olduğu gibi yavaşça değişen kaynaklar için KF yöntemi uygun zaman basamakları ele alındığında doğru sonuçlar vermiştir. Daha sonra modifiye difüzyon sentetik yöntemine dayalı yeni bir hızlandırma yöntemi ile nümerik algoritmanın optimizasyonu yapılmıştır. Sonuçlar hesaplamadaki çabayı azaltarak algoritmanın etkinliğini ortaya koymuştur [47].

Diğer bir çalışmada tek-hızlı transport denkleminin hem durağan hem süreksiz koşullarda A_∞ formu türetilmiştir. Tek boyutlu düzlem geometrideki model çift-parite formülasyonu ile karşılaştırılmış ve farklılıklar ve teorik zorluklar gösterilmiştir. Son olarak açıkça görülen bazı tutarsızlıkların nasıl üstesinden gelineceği gösterilmiş ve bazı fiziksel değerlendirmeler sunulmuştur [48].

El Wakil ve diğ.'nin çalışmasında zamana bağlı tek enerjili nötron transport denklemi, doğrusal eşyönsüz saçılmanın olduğu sonlu paralel düzlem ortamında ayna yansıtıcılı sınırlarda ele alınmıştır. Problem Pomraning-Eddington yaklaşımı ve sınır koşullarını karşılamaya zorlamak için ağırlık fonksiyonları kullanılarak çözülmüştür. Farklı zaman ve kalınlıklarda önerilen ortam için yansıtıcılık ve transmisivite hesaplamaları yapılmıştır [49].

Radyasyon transport problemlerinde zaman domenini çözümlemek için geleneksel yaklaşım kapalı zaman adımlaması yöntemidir. Özellikle Geriye Euler (GE) Yöntemi veya KF sayısal sağlamlığı nedeniyle en yaygın zaman farklaması yöntemidir. Örneğin TIMEX kodu süreksiz Galerkin uzaysal farklaması ile GE zaman adımlamasını birarada kullanır. TRANZIT ve NIKE/ATHENA kodları ya Crank-Nicholson ya da GE zaman farklamasını kullanabilir. Sonlu elemanlar küresel harmonikler kodu EVENT ise Crank-Nicholson, Galerkin yada uyarlanabilir adımlamalı GE gibi değişik kapalı zaman farklaması yöntemleri kullanabilir. Yine kapalı zaman adımlaması kullanan TDA (Time-dependent ANISN) ve TDTORT (time-dependent TORT) kodları da zamana bağlı radyasyon kodlarına örnek olarak verilebilir. Pain ve diğ. zamana bağlı transport kodlarından kısaca bahsettikten sonra Boltzman Transport Denklemi için Petrov-Galerkin yöntemini önermiştir. Uzay-zaman Petrov-Galerkin yönteminin uygulanması ile elde edilen sonuçlar Boltzman transport denkleminin çift-parite formu için varyasyonel ilkeye dayanan ve ayrıca GE zaman adımlaması da kullanılan zamana bağlı sonlu elemanlar radyasyon transport kodu ile karşılaştırılmıştır. Neticede uzay-zaman Petrov-Galerkin yönteminin hem sayısal olarak sağlam (gerçekçi olmayan dalgalanmaları bastıran) hem de kaba ağlarda (eşyönsüz, kötü en/boy oranlı elemanlar) bile hassas bir yöntem olduğu gösterilmiştir [50].

Zamana bağlı hiperbolik denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerin bir sınıfı da Rieman çözücüleridir. Brunner ve Holloway yüksek

dereceden Riemann çözücü kullanılarak iki boyutta zamana bağlı küresel harmonikler denklemlerinin çözümü için sayısal bir yöntem geliştirmiştir [51].

Bunların dışında zamana bağlı transport denkleminin çözümüne yönelik hücresel sinir ağlarının kullanımı ve ızgarasız yöntem kullanımı gibi çalışmalar da yapılmıştır [52,53].

Bu tez çalışmasında kullandığımız iterasyon hızlandırma yöntemi KIYDHY transport hesaplamalarında yaygın olarak kullanılmıştır [54-61]. KIYDHY, algoritması ve geometrik uygulamasında esnekliği gibi özellikleri nedeniyle birçok transport koduna eklenmiştir.

KIYDHY'nin avantaj ve dezavantajları vardır [62]. Örneğin, yeniden dengeleme denklemlerinin cebrik formu herhangi bir yardımcı denkleme değil yalnızca denge denklemine bağlıdır. Bu özellik yöntemin uygulanmasını kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle denge denklemini kullanan herhangi bir uzaysal ayrıklaştırma yöntemi yeniden dengeleme ile koşulabilir. Fakat bazı araştırmacılar eğer saçılma oranı c (saçılma tesir kesitinin toplam tesir kesitine oranı) bire yakınsa ya da optik kalın ve ince ortamlar söz konusuysa bu yöntemin kararsız olduğunu bulmuşlardır [59].

KIYDHY önemli ölçüde hesaplama zamanını azalttığı için zamandan bağımsız transport kodlarında geniş bir şekilde kullanılmıştır [63]. Son zamanlarda bu yöntem çeşitli yöntemlere uygulanmış ve bu yöntemde geliştirmeler yapılmıştır [64-67].

Bu tez çalışmasının literatüre en önemli katkısı küresel geometride uzaysal farklama yöntemi olarak özgün DSSEY ve Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemleri'nin (KSSEY) geliştirilmesidir. Toplam sekiz farklı yöntem kullanılarak FORTRAN dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bençmark problemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalar sonucu en doğru sonuçları en kısa sürede veren yöntemler bulunmuştur.

Zamandan bağımsız transport denkleminin sayısal çözümünde iç ve dış iterasyonları hızlandırmak için kullanılan KIYDHY'nin etkinliği baskınlık oranı, saçılma oranı ve optik kalınlık gibi faktörlere bağlı olarak araştırılmıştır. Ayrıca zamana bağlı transport denkleminin sayısal çözümünde iç ve dış iterasyonları hızlandırmak için KIYDHY geliştirilmiştir.

2. KÜRESEL GEOMETRİDE NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ AYRIKLAŞTIRMA YÖNTEMLERİ

2.1 Nötron Transport Denklemi

Reaktör kalbinde nötronların etkileşimini ve nötron transportunu modellemek ve benzetim yapmak için iki yöntem vardır. Deterministik yöntemler Boltzman transport denklemine modellenmiş sistem boyunca heryerde sayısal olarak yaklaşım yaparak çözer. Deterministik yöntemler reaktör kalbi modellemesinde önemli bir rol oynarlar. Rastgele yöntemler ise (Monte Carlo yöntemleri) bir nükleer sistemi nerdeyse tam olarak modeller ve bu modele istatistiksel bir yaklaşım yapar. Doğrusallaştırılmış Boltzman transport denklemi büyük hesaplama kaynaklarına ihtiyaç duyar, çünkü ele alınan problem 7 boyutludur: 3 uzaysal boyut, 2 yön boyutu, 1 enerji ve 1 zaman boyutu. Bu tez çalışmasında bir boyutlu küresel geometride nötron transport denkleminin çözümüne yönelik deterministik yöntemler geliştirilecektir.

2.1.1 Zamana bağlı nötron transport denklemi

Zamana bağlı nötron transport denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v}\frac{\partial\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E,t\right)}{\partial t}+\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E,t\right)+\sigma\left(\vec{r},E\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E,t\right)\\
&=\int dE^{'}\int d\Omega'\sigma_{s}\left(\vec{r},E^{'}\rightarrow E,\Omega'.\Omega\right)\psi_{\mathrm{g}'}\left(\vec{r},\Omega',E^{'},t\right)\\
&+\chi_{p}(E)\sum_{i=1}^{I}\left(1-\beta^{i}\right)\int dE^{'}\upsilon\sigma_{f}^{i}\left(\vec{r},E^{'}\right)\phi\left(\vec{r},E^{'},t\right)\\
&+\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{M}}\lambda_{\mathrm{m}}\chi_{m}(E)C_{m}\left(\vec{r},t\right)+\mathrm{q}^{\mathrm{e}}\left(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega},\mathrm{E},\mathrm{t}\right)
\end{aligned}\qquad \textbf{(2.1)}$$

(2.1)'e enerji ayrıklaştırması uygulandıktan sonra, bir nükleer reaktörde uzay, yön ve zamana bağlı yönsel nötron akısının çok gruplu denklemi G grup sayısı olmak üzere G adet denklemle tarif edilir [1].

$$\frac{1}{v^g}\frac{\partial \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)}{\partial t}+\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\sigma_g(\vec{r})\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)$$
$$=\sum_{g'=1}^{G}\int d\Omega'\sigma_{gg'}(\vec{r})\psi_{g'}(\vec{r},\Omega',t)+\chi_p^g\sum_{i=1}^{I}(1-\beta^i)\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}^i(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r},t) \qquad \textbf{(2.2)}$$
$$+\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{M}}\lambda_{\mathrm{m}}\chi_m^g C_m(\vec{r},t)+\mathrm{q}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{e}}(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega},\mathrm{t})\ ,\mathrm{g}=1,2,\cdots,\mathrm{G}$$

Bu denklemde:

v^g = g'inci grup nötronlarının ortalama hızı,

$\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)$ = Uzay ($\vec{r}$), yön ($\vec{\Omega}$) ve zamana (t) bağlı g'inci grup yönsel akı,

$\vec{\Omega}$ = Nötronların gidiş yönü, $\vec{\Omega}'$ ise nötronların saçıldığı yön

σ_g = g'inci grup makroskopik toplam tesir kesiti,

$\sigma_{gg'}$ = Gruptan gruba saçılma (g'inci gruptan den g'inci gruba) makroskopik tesir kesiti, $\chi_{\mathrm{p}}^{\mathrm{g}}$ = g'inci grup ani nötron spektrum kesri (fisyon esnasında açığa çıkan ani nötronun enerjisinin g'inci grupta olma olasılığı),

I = Fisil ya da fisyon yapabilir izotop sayısı,

β^i = i numaralı izotop için gecikmiş nötron kesri (fisyon sonucunda açığa çıkan bir nötronun gecikmiş nötron olma olasılığı),

$\sigma_{fg'}^i$ = i'inci izotop, g'inci grup makroskopik fisyon tesir kesiti,

υ = fisyon başına çıkan ortalama nötron sayısı,

$\phi_{g'}$ = g'inci grup skaler akı,

M = Gecikmiş nötron öncül (gecikmiş nötron doğuran fisyon ürünü çekirdek) gruplarının sayısı (genellikle M=6),

λ_{m} = m'inci öncül grup için bozunma sabiti,

$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{g}}$ = m'inci öncül grup ve g'inci enerji grubu için gecikmiş nötron spektrum kesri (m'inci grup öncüllerinden çıkan bir gecikmiş nötronun g'inci grupta enerji ile çıkma olasılığı),

C_m = Birim hacim başına m'inci öncül grup çekirdeklerinin sayısı,

q_g^e = g'inci grup dış nötron kaynağıdır.

(2.2) denklemi (G+M) bilinmeyen içermektedir. Bu bilinmeyenler grup yönsel akılar ($\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)$, g=1,2,…,G) ve öncül çekirdek yoğunlukları ($C_m(\vec{r},t)$, m=1,2,…,M.)'dır. Bu nedenle M adet daha denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler öncül çekirdek yoğunlukları için denge denklemi yazılarak elde edilir.

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}(\vec{r},t)=\sum_{i=1}^{I}\beta_m^i\sum_{g=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg}^i(\vec{r})\phi_g(\vec{r},t)-\lambda_m C_m(\vec{r},t),\quad m=1,2,\cdots,M \tag{2.3}$$

Burada β_m^i = i'inci tip izotopun fisyonu neticesinde m'inci öncül grup için gecikmiş nötron kesri (i'inci tip izotopun fisyonu neticesinde m'inci öncül gruptan gecikmiş nötronun çıkma olasılığı) olarak tanımlanır. (2.2) ve (2.3) denklemleri birbirleriyle kupledir. Bu nedenle bu denklemleri kompakt matris formunda yazmak uygundur. Bu amaçla G boyutlu aşağıdaki 5 vektör tanımlanır:

$$\underline{\psi}^T(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\left[\psi_1(\vec{r},\vec{\Omega},t)\ \cdots\ \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t)\ \cdots\ \psi_G(\vec{r},\vec{\Omega},t)\right] \tag{2.4}$$

$$\underline{\chi}_p^T=\left[\chi_p^1\ \cdots\ \chi_p^g\ \cdots\ \chi_p^G\right] \tag{2.5}$$

$$\underline{\chi}_m^T=\left[\chi_m^1.....,\chi_m^g....\chi_m^G\right]\quad m=1,2,.....M \tag{2.6}$$

$$\underline{\tilde{f}}_i^T(\vec{r})=\left[\upsilon\sigma_{f1}^i(\vec{r})\ \cdots\ \upsilon\sigma_{f2}^i(\vec{r})\ \cdots\ \upsilon\sigma_{fG}^i(\vec{r})\right]\quad i=1,.....,I \tag{2.7}$$

$$\underline{q}^{eT}(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\left[q_1^e(\vec{r},\vec{\Omega},t)\ \cdots\ q_g^e(\vec{r},\vec{\Omega},t)\ \cdots\ q_G^e(\vec{r},\vec{\Omega},t)\right] \tag{2.8}$$

Ayrıca M boyutlu vektör şu şekilde tanımlanır:

$$\underline{C}^T(\vec{r},t)=\left[C_1(\vec{r},t)\ \cdots\ C_m(\vec{r},t)\ \cdots\ C_M(\vec{r},t)\right] \tag{2.9}$$

Ayrıca 2 matris tanımlamaya ihtiyacımız vardır. Bunlardan ilki G boyutlu kare, grup hız matrisidir:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} v^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & v^g & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & v^G \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

İkincisi ise GxG boyutlarında çok gruplu transport operatörüdür:

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}\vec{\nabla} + \sigma_1 - \int d\Omega' \sigma_{11}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ -\int d\Omega' \sigma_{g1}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) & \cdots & \vec{\Omega}\vec{\nabla} + \sigma_g - \int d\Omega' \sigma_{gg}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ -\int d\Omega' \sigma_{G1}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) & \cdots & -\int d\Omega' \sigma_{Gg}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) & \cdots & \vec{\Omega}\vec{\nabla} + \sigma_G - \int d\Omega' \sigma_{GG}\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

burada açık bir ifade elde edebilmek için tesir kesitlerinin zaman ve konum bağımlılıkları yazılmamıştır.

Bu matris ve vektör tanımları kullanılarak (2.2)'nin içerdiği G adet denklem kompakt formda şu şekilde yazılır:

$$\underline{\underline{V}}^{-1} \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, t\right) + \underline{\underline{H}}\,\underline{\psi}\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, t\right) = \underline{\chi}_p \sum_{i=1}^{I} \left(1-\beta^i\right) \underline{\tilde{f}}_i^T \int d\Omega' \underline{\psi} + \sum_{m=1}^{M} \underline{\chi}_m \lambda_m C_m + \underline{q}^e \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}\left(\vec{r}, t\right) = \sum_{i=1}^{I} \beta_m^i \, \underline{\tilde{f}}_i^T\left(\vec{r}\right) \underline{\phi}\left(\vec{r}, t\right) - \lambda_m \mathrm{C_m}\left(\vec{r}, t\right) \quad m=1,...,M \tag{2.13}$$

Fisil ve fisyon yapabilir izotoplar üzerindeki toplam sembolünü kaldırmak için yine vektör notasyonuna başvurmamız gerekmektedir. Önce fisyon operatörü ani ve gecikmiş olarak ikiye ayrılır:

$$\underline{f} = \underline{f}_p + \sum_{m=1}^{M} \underline{f}_{dm} \tag{2.14}$$

$$\underline{\mathrm{f}}_\mathrm{p} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{I}} \left(1-\beta^{\mathrm{i}}\right) \underline{\tilde{\mathrm{f}}}_\mathrm{i} \tag{2.15}$$

$$\underline{f}_{dm} = \sum_{i=1}^{I} \beta_m^i \, \underline{\tilde{f}}_i \tag{2.16}$$

(2.12) ve (2.13) toplam sembolü olmadan şu şekilde yazılır:

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\underline{\underline{H}}\underline{\psi}(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\underline{\chi}_p\underline{f}_p^T\int d\Omega'\underline{\psi}+\sum_{m=1}^{M}\underline{\chi}_m\lambda_m C_m+\underline{q}^e \qquad \textbf{(2.17)}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}(\vec{r},t)=\underline{f}_{dm}^T\int d\Omega\psi-\lambda_m C_m(\vec{r},t) \qquad m=1,\ldots,M \qquad \textbf{(2.18)}$$

2.1.2 Ani nötron transport denklemi

Bazı koşullar altında (2.17)'nin zamana bağlı davranışı çok hızlı olabilir ve gecikmiş nötronların davranışı çok ağır kalır. Bu koşullar reaktör ani süper kritik olduğunda meydana gelir. Ani süper kritik reaktörde nötron nüfusu gecikmiş nötronlar ihmal edilse de artmaya devam edecektir. Eğer ani özdeğer problemi:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\psi}=\frac{1}{k_p}\underline{\chi}_p\underline{f}_p^T\int d\Omega\underline{\psi} \qquad \textbf{(2.19)}$$

reaktör hacmi içerisinde $\psi>0$ için büyük bir özdeğere sahipse ($k_p>1$) reaktör ani süper kritik denir. Bu gibi durumlarda (2.17)'de bozunma sabitleri sıfıra eşitlenerek ani nötron yaklaşımı elde edilir.

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\underline{\underline{H}}\underline{\psi}(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\underline{\chi}_p\underline{f}_p^T\int d\Omega'\underline{\psi}+\underline{q}^e \qquad \textbf{(2.20)}$$

(2.20) zamana bağlı çok gruplu ani nötron transport denklemlerinin matris formu diye adlandırılır.

Tek grup yaklaşımı çok grup yaklaşımının özel bir durumunudur ve basitliğinden dolayı yaygın bir kullanımı vardır. Bu nötron transport modeli yeni sayısal yöntemlerin etkinliğini test etmek için oldukça uygundur. Gecikmiş nötronlar olmadan zamana bağlı bir grup nötron transport denklemi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\sigma(\vec{r})\psi(\vec{r},\vec{\Omega},t)\\&=\int d\vec{\Omega}'\sigma_s(\vec{r},\vec{\Omega}'..\vec{\Omega})\psi(\vec{r},\vec{\Omega}',t)+\int d\vec{\Omega}'\upsilon\sigma_f(\vec{r})\psi(\vec{r},\vec{\Omega}',t)+q^e(\vec{r},\vec{\Omega},t)\end{aligned} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Eğer bütün tesir kesitleri, kaynaklar, başlangıç ve sınır koşulları pozitif olarak verilirse zamana bağlı transport denkleminin çözümü tekdir ve pozitiftir.

2.1.3 Zamandan bağımsız nötron transport denklemi

Gecikmiş nötronların olmadığı nötron transport denklemi kritikalitenin doğru tanımlanmasına izin verir ve zamandan bağımsız sabit kaynak ve kritikalite problemleri için uygundur. Çoğaltkan olmayan sabit kaynak (bir dış kaynak veya sınır koşulu olarak verilen bir yüzey kaynağı) probleminde zamandan bağımsız bir yönsel akı değeri çözüm olarak bulunur. Ancak çoğaltkan sistemlerde sistemin kritiklik açısından gözden geçirilmesi gerekir.

Zamandan bağımsız, çoğaltkan olmayan, sabit kaynak problemleri için şu denklem geçerlidir:

$$\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma(\vec{r},E)\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E\right)=\int dE'\int d\vec{\Omega}'\sigma_s\left(\vec{r},E'\to E,\vec{\Omega}'..\vec{\Omega}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)+q^e\left(\vec{r},\vec{\Omega},E\right) \quad \textbf{(2.22)}$$

Fiziksel olarak, fisyon yapabilir malzeme içeren bir sistem dış nötron kaynağı olmadığında kendi kendine devam edebilen zamandan bağımsız zincir reaksiyonu gerçekleştirebiliyorsa kritiktir. Bu denge sağlanamadığında nötronların asimptotik dağılımı zamanla eksponansiyel olarak ya artar (kritik üstü), ya da azalır (kritik altı). Bu sisteme zamandan bağımsız bir dış kaynak eklenirse, kritik altı sistem bir süre sonar dengeye gelir ve zamandan bağımsız nötron akı dağılımı ile gösterilebilir. Ancak, sistem kritik veya kritik üstü ise bir dış kaynağın eklenmesi ile böyle bir dengenin sağlanması mümkün değildir. Nötron akı dağılımı zamanla artar.

Matematiksel olarak bir sistem kritikse aşağıdaki dış kaynak olmayan çoğaltkan ortam transport denklemine uygun sınır koşulları ile pozitif bir çözüm bulunur:

$$\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma(\vec{r},E)\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E\right)=\int dE'\int d\vec{\Omega}'\sigma_s\left(\vec{r},E'\to E,\vec{\Omega}'..\vec{\Omega}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)+\chi(E)\int dE'\int d\vec{\Omega}'\upsilon\sigma_f(\vec{r},E')\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right) \quad \textbf{(2.23)}$$

Kritik altı sistemlerde ise aşağıdaki denklemin bir çözümü vardır:

$$\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma(\vec{r},E)\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega},E\right)=\int dE'\int d\vec{\Omega}'\sigma_s\left(\vec{r},E'\to E,\vec{\Omega}'..\vec{\Omega}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)+\chi(E)\int dE'\int d\vec{\Omega}'\upsilon\sigma_f(\vec{r},E')\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)+q^e\left(\vec{r},\vec{\Omega},E\right) \quad \textbf{(2.24)}$$

(2.23)'e bir çözüm bulunamadığında sistemin kritik altı mı yoksa kritik üstü mü olduğunu ve ne derece kritiklikten uzak olduğunu bilemeyiz. Bu nedenle kritikalite

hesapları için özdeğer problemi formu kullanılır. Özdeğer sistemin kritik altı mı yoksa kritik üstü mü olduğunu ve ne kadar kritiklikten uzak olduğunu gösterir. (2.23)'te ν yerine ν/k yazılırsa kritikalite problemleri için transport denkleminin k özdeğer formu elde edilir. Bu denklemin çözümü sonucu bulunan k değerlerinden en büyüğü (temel mod) sistemin kritiklik derecesini belirler. k çoğaltma katsayısı olarak adlandırılır. Eğer ortam sonsuz değilse ortamdan kaçan nötronlar da hesaba katılır. Bu durumda hesaplanan çoğaltma katsayısına etkin çoğaltma katsayısı (k_{etk}) denir.

Sabit kaynaklı çok gruplu transport denklemi grup içi transport denklemine indirgenebilir. Elde edilen grup içi denklemlerine uzay ve yön ayrıklaştırması yöntemleri uygulanabilir. Ayrıca zamana bağlı problemler ve özdeğer hesaplamaları ile iterasyonların yakınsamasını hızlandırma teknikleri için de bu denklemler kullanılabilir. Bu denklemler uzay ve yön ayrıklaştırması yapıldıktan sonra cebrik denklemlere indirgenir. g'inci grup için, grup içi denklemi şu şekilde yazılır:

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)+\sigma\left(\vec{r}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\int d\Omega'\sigma_s\left(\vec{r},\vec{\Omega}.\vec{\Omega}'\right)\psi\left(\vec{r},\Omega'\right)+\mathrm{s}\left(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega}\right) \qquad \textbf{(2.25)}$$

Çoğaltkan olmayan ortam için grup kaynağı ise:

$$\mathrm{s}\left(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega}\right)=\mathrm{s}_{\mathrm{g}}\left(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega}\right)=\sum_{g'\neq g}^{G}\int d\Omega'\sigma_{gg'}\left(\vec{r},\vec{\Omega}.\vec{\Omega}'\right)\psi_{\mathrm{g}'}\left(\vec{r},\Omega'\right)+q_g^e\left(\vec{\mathrm{r}},\vec{\Omega}\right) \qquad \textbf{(2.26)}$$

Grup kaynağı gruptan gruba saçılmayı ve dış kaynağı içerir. Grup içi saçılma ise:

$$\sigma_s\left(\vec{r},\vec{\Omega}.\vec{\Omega}'\right)=\sigma_{gg}\left(\vec{r},\vec{\Omega}.\vec{\Omega}'\right) \qquad \textbf{(2.27)}$$

ile gösterilir. Çoğaltkan ortamlara grup kaynağına fisyon nötron kaynağı da eklenir. Bu denklemlerin çözümünde ise Bölüm 2.5'te bahsedilecek olan iterasyon teknikleri kullanılır.

Eşyönsüz saçılmanın olduğu ortamlar için (2.23)'te saçılma terimi Legendre polinomlarına (P_l) açılır:

$$\begin{aligned}&\int dE'\int d\vec{\Omega}'\sigma_s\left(\vec{r},E'\rightarrow E,\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\int dE'\sigma_{sl}(\vec{r},E'\rightarrow E)\times\int d\vec{\Omega}'P_l\left(\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}',E'\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(2.28)}$$

Burada seri açılımı eş yönsüzlüğün derecesine göre bir yerde kesilir. Birçok durum için sadece ilk birkaç terim eş yönsüzlük için yeterlidir. Sadece ilk terime açılım eş yönlü saçılmalarda yapılır.

Bu tez çalışmasında ani nötron transport denkleminin yukarıda bahsedilen ((2.20)-(2.28)) zamana bağlı ve zamandan bağımsız formlarını (sabit kaynak, çoğaltkan ortam, özdeğer, bir grup ve çok grup, eş yönlü ve eş yönsüz saçılma,) küresel geometride çözebilen SPDOT isimli bir FORTRAN programı geliştirilmiştir (EK B2)

2.1.4 Küresel geometri transport denklemi

Kartezyen koordinat sisteminde akış operatörü bir boyutta şu şekilde yazılabilir:

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi = \mu\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.29}$$

burada x ekseninin yön kosinüsü:

$$\mu = \vec{\Omega}\cdot\vec{e}_x \tag{2.30}$$

olarak tanımlanır. Bu koordinat sisteminde nötronun hareket yönü, $\vec{\Omega}$, yön kosinüsleri cinsinden yazılabilir ve nötron düz bir hat boyunca gittikçe değişmez. Bu nedenle akış operatörü yön türevi içermez. Oysa küresel geometride nötron düz bir hat boyunca hareket ettikçe yönsel koordinatlar da sürekli değişir. Bu nedenle akış operatörü yön türevini de içerir:

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi = \mu\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{(1-\mu^2)}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} \tag{2.31}$$

Bu olguya yönsel yeniden dağılım, yöne göre türevin olduğu ikinci terime ise yönsel yeniden dağılım terimi denir. Bu denklemde ρ radyal değişkendir ve küre merkezinden uzaklığı gösterir. Akış operatörü ayrıca korunum formunda da yazılabilir:

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{\mu}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2\psi)}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\left[(1-\mu^2)\psi\right]}{\rho} \tag{2.32}$$

Bu form özellikle yönsel ayrıklaştırma için tercih edilir. (2.25)-(2.27) grup içi denklemleri bir boyutlu küresel geometride korunum formunda aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\frac{\mu}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2\psi(\rho,\mu))}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\psi(\rho,\mu)+\sigma(\rho)\psi(\rho,\mu)=q(\rho,\mu) \qquad \textbf{(2.33)}$$

Sağ taraf terimi ise aşağıdaki grup kaynağını ve grup içi saçılma kaynağını içerir:

$$q(\rho,\mu)=\sum_{0}^{L}(2l+1)\sigma_l(\rho)P_l(\mu)\phi_l(\rho)+s(\rho,\mu) \qquad \textbf{(2.34)}$$

burada $\phi_l(\rho)$, $\psi(\rho,\mu)$'nin Legendre momentleridir. Legendre momentlerinin diklik özelliğinden faydalanılarak hesaplanırlar. Kolaylık olsun diye grup indislerinin kaldırıldığı bu denklemde g'inci grup için grup kaynağı:

$$\mathrm{s}(\rho,\mu)=\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(\mu)\sum_{g'\neq g}^{G}\int d\Omega'\sigma_{\mathrm{lg}\,g'}(\rho)\phi_{\mathrm{lg}'}(\rho)+q_g^e(\rho,\mu) \qquad \textbf{(2.35)}$$

olarak yazılır. Eğer ortamda fisyon kaynağı da varsa fisyon kaynağı terimi de sağ tarafa eklenir.

Transport denkleminin korunum formunun yöne göre integrali, daha sonra iterasyon hızlandırma yönteminde kullanacağımız küresel geometri nötron denge denklemini verir:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 J(\rho))}{\partial\rho}+\sigma_r(\rho)\phi(\rho)=S(\rho) \qquad \textbf{(2.36)}$$

Bu denklemde yer alan skaler akı (ϕ), akım (J) ve kaynak (S) şu şekilde tanımlanır:

$$\phi(\rho)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\psi(\rho,\mu)d\mu \qquad \textbf{(2.37)}$$

$$J(\rho)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu\psi(\rho,\mu)d\mu \qquad \textbf{(2.38)}$$

$$S(\rho) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} s(\rho,\mu)d\mu \qquad \textbf{(2.39)}$$

(2.36)'da σ_r çıkarma tesir kesiti olup toplam tesir kesitinden grup içi saçılma tesir kesiti çıkarılarak elde edilir. Burada (2.37)-(2.39) arasındaki denklemlerin önüne gelen 1/2, artımsal katı açının 1'e normalize edilmesi nedeniyledir:

$$\int_{4\pi} d\Omega = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{2} = 1 \qquad \textbf{(2.40)}$$

burada ω azimutal açıdır.

2.2 Zaman Ayrıklaştırması

Birçok durum için hem sabit kaynak hem de özdeğer formlarında zamana bağlı transport denklemine sayısal çözümler aramak gerekmektedir. Darbeli nötron deneylerinin analizinde, yıldız atmosferlerinin dinamiğinde, biyomedikal uygulamalarda karşılaşılan foton transport problemlerinde ve nükleer reaktör kinetiğinde parçacık transport problemlerinin zamana bağlı davranışını incelemek gerekmektedir. Bu gibi sistemlerde karakteristik zaman aralığı çok kısadır ve parçacığın doğumu ve ölümü arasındaki ortalama ömrü ile saptanır. Bu aralık, örneğin nötron ömürleri ele alınan sistemlere bağlı olarak 10^{-4} s ile 10^{-8} s arasında değişmektedir.

Bu özelliklerin sonucu olarak transport problemlerinin ayrıklaştırılması, çok kısa zaman adımlarını gerektirmektedir. Reaktör kinetiği zor bir hesaplama problemi sunmaktadır. Çünkü zamana bağlı davranış bir yandan fisyon anında üretilen ani nötronların ömrü 10^{-4} s - 10^{-8} s arasında yönetilirken diğer taraftan fisyon ürünlerinin bozunması sonucu gecikmiş nötronlar açığa çıkmaktadır. Fisyon ürünlerinin yarı ömrü birkaç saniye ile dakika mertebesinde değişmektedir. Bu nedenle gecikmiş nötron davranışının etkin olduğu birçok durumda zaman farklamasında ani nötron ömrü dikkate alınsa da geçişler (transient) birkaç dakikayı aşabilir. Karakteristik zaman aralıklarında meydana gelen bu geniş farklılığın sonucu olarak nötron kinetik denklemlerinin çözümü çok büyük sayıda zaman adımını gerektirmektedir.

Zaman değişkeni için iki ana farklama yöntemi vardır. Bunlar Açık ve Kapalı Farklama olarak adlandırlırlar. Zaman adımları şu şekilde tanımlanır:

$$t_{j+1} = t_j + \Delta_j \tag{2.41}$$

(2.20) denkleminin bu aralıkta zamana göre integrali alınırsa:

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\left(\underline{\psi}_{j+1} - \underline{\psi}_j\right) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left\{ -\underline{\underline{H}}\,\underline{\psi}\left(\vec{r},\vec{\Omega},t\right) + \underline{\chi}_p \underline{f}_p^T \int d\Omega' \underline{\psi} + \underline{q}^e \right\} \tag{2.42}$$

burada $\underline{\psi}_j = \underline{\psi}\left(\vec{r},\vec{\Omega},t_j\right)$'dir. Açık ve kapalı farklama yöntemlerinde, (2.42)'deki zaman integralinin alınış şekli farklıdır.

2.2.1 Açık farklama

Açık farklamada (2.42)'deki integral, parantez içindeki integrandın t_j'deki değeri ile Δ_j'nin çarpımına eşit alınır. Bu yöntemde denklemlerin sağındaki bütün terimler önceki zaman adımından biliniyor olacaktır. Bu durumda aşağıdaki denkleme göre zaman adımlaması ileri yönde yapılabilir.

$$\underline{\psi}_{j+1} = \underline{\psi}_j + \Delta_j \underline{\underline{V}} \left\{ -\underline{\underline{H}}\,\underline{\psi}_j + \underline{\chi}_p \underline{f}_p^T \int d\Omega' \underline{\psi}_j + \underline{q}_j^e \right\} \tag{2.43}$$

2.2.2 Kapalı farklama

Tam kapalı yöntemde (2.42)'nin sağ tarafı parantez içerisindeki integrandın t_{j+1}'deki değeri ile Δ_j'nin çarpımına eşit alınır. Sağ taraftaki terimler $\underline{\psi}_{j+1}$'e bağlı olduğu için denklem kapalı bir forma sahiptir.

$$\left\{ \frac{1}{\Delta_j} \underline{\underline{V}}^{-1} + \underline{\underline{H}} - \underline{\chi}_p \underline{f}_p^T \int d\Omega' \right\} \underline{\psi}_{j+1} = \underline{q}_{j+1}^e + \frac{1}{\Delta_j} \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\psi}_j \tag{2.44}$$

Tam kapalı farklamada $\psi_{j+1}^g\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ için G denklem eşzamanlı olarak çözülmelidir.

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\psi_{j+1}^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})+\left(\sigma_{g,j+1}(\vec{r})+\frac{1}{\Delta_j v_g}\right)\psi_{j+1}^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})=$$

$$\sum_{g'=1}^{g}\int d\Omega'\sigma_{gg',j+1}(\vec{r},\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\psi_{j+1}^{g'}(\vec{r},\vec{\Omega}')+\chi^{g}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg',j+1}\int d\Omega'\psi_{j+1}^{g'}(\vec{r},\vec{\Omega}') \qquad \textbf{(2.45)}$$

$$+q_{j+1}^{ex,g}(\vec{r},\vec{\Omega})+\frac{1}{\Delta_j v_g}\psi_{j}^{g}(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad g=1,2,...,G$$

Burada $\psi_j^g(\vec{r},\vec{\Omega})$ önceki zaman adımından bilinmektedir. $q_{j+1}^{ex,g}(\vec{r},\vec{\Omega})$ ise bilinen dış kaynaktır. Bu denklem daha basit olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\psi^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})+\tilde{\sigma}_g(\vec{r},\vec{\Omega})\psi^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})=$$

$$\sum_{g'=1}^{g}\int d\Omega'\sigma_{gg'}(\vec{r},\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})\psi^{g'}(\vec{r},\vec{\Omega}')+f^{g}(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \textbf{(2.46)}$$

burada zaman terimi aşağıdaki ifadelerin içinde yer almaktadır:

$$\tilde{\sigma}_g(\vec{r})=\sigma_{g,j+1}+\frac{1}{\Delta_j v_g} \qquad \textbf{(2.47)}$$

$$f^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})=\chi^{g}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg',j+1}\int d\Omega'\psi_{j+1}^{g'}(\vec{r},\vec{\Omega}')+s^{g}(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \textbf{(2.48)}$$

$$s^{g}(\vec{r},\vec{\Omega})=q_{j+1}^{ex,g}(\vec{r},\vec{\Omega})+\frac{1}{\Delta_j v_g}\psi_{j}^{g}(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \textbf{(2.49)}$$

Bu denklemlerin çözümü fisyon kaynağı iterasyonunu gerektirmektedir. Başlangıç akı tahmini önceki zaman adımından gelmektedir.

$$\psi^{g(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})=\psi_j^g(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad \textbf{(2.50)}$$

İterasyon aşağıdaki kriter sağlanana kadar devam eder:

$$\max_{g}\max_{\vec{r}\in V}\left|\frac{\phi^{g(k+1))}(\vec{r})-\phi^{g(k)}(\vec{r})}{\phi^{g(k+1))}(\vec{r})}\right|<\varepsilon \qquad \textbf{(2.51)}$$

Yakınsama kriteri (ε) olarak genellikle 10^{-3} veya 10^{-4} seçilir.

2.2.3 Açık ve kapalı farklamaların karşılaştırılması

Zaman farklamasının doğruluk derecesi her iki yöntemde de Δ_j mertebesindedir[1]. Bunun anlamı, uygun doğruluk derecesinde hesaplamalar için her iki yöntemde de zaman adımları çok küçük olmalıdır.

Açık farklamada her zaman adımında transport operatörünün ($\underline{\underline{H}}$) tersini almak gerekmediği için harcanan çaba daha azdır. Oysa kapalı yöntemde bu operatörün tersini almak oldukça zahmetli bir iştir.

Açık farklama her adımda hesaplama zamanı açısından avantajlı olsa da bir diğer kriter olan kararlılık konusunda avantajlı değildir. Zamana bağlı problemlerde her zaman adımında açığa çıkan farklama hatalarının yanı sıra bu hataların bir adımdan diğerine yayılımı da göz önüne alınmalıdır. Eğer hatalar çözümden hızlı artıyorsa algoritma kararsızdır. Bu durumda detaylı bir kararlılık analizi yapmak için denklemlerin uzaysal ve yönsel değişkenlerinin farklaması da yapılmalıdır. Böyle zamana bağlı diferansiyel denklem sistemleri için tam kapalı yöntemler genellikle zaman adımı Δ_j'den bağımsız olarak kararlıdır. Açık farklamanın uzaysal farklanmış formu ise zaman adımı büyük ise kararsızdır. Dahası açık yöntemler için kararlılık kriterleri olan Δ_j / Δ_x ya da Δ_j / Δ_x^2 'nin (Δ_x uzaysal ızgara aralığı) karakteristik bir sayıdan küçük olması gerekliliği sıklıkla zaman adımının genişliğine yönelik bağlayıcı bir kriter getirir ve bu kriter uzaysal ızgara sıklaştıkça daha da sınırlayıcı hale gelir. Sonuç olarak açık farklamada daha küçük zaman adımları gereksinimine karşın kapalı farklamada da zaman adımı başına harcanan eforu azaltma gereksinimi vardır. Bu tez çalışmasında daha kararlı sonuç üreten kapalı farklama yöntemi kullanılmıştır.

2.2.4 Elmas farklaması

Bu tez çalışmasında zaman değişkeninin ayrıklaştırılmasında kapalı farklama dışında kullanılan bir diğer yöntem elmas farklamasıdır. Açık ve kapalı yöntemlerde doğruluk derecesi Δ_j mertebesinde iken bu yöntemde Δ_j^2 mertebesindedir. Bu istenen bir özelliktir. Dahası bu yöntemin kesikli ordinatlar ile birlikte kullanılması neticesinde, her ne kadar akıda oluşan fiziksel olmayan dalgalanmalardan kaçınmak için zaman adımı oldukça sınırlı alınsa da, açık yöntemlerden daha iyi bir kararlılık özelliği elde edilmiştir.

Bu yöntemde (2.42)'de sağ taraftaki integral, integrandın $t_{j+1/2}$ 'deki değeri ile Δ_j çarpılarak alınır:

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\left(\underline{\psi}_{j+1}-\underline{\psi}_{j}\right)=\Delta_j\left\{-\underline{\underline{H}}\underline{\psi}_{j+1/2}=\underline{\chi}_p\underline{f}_p^T\int d\Omega'\underline{\psi}_{j+1/2}+\underline{q}^e_{j+1/2}\right\} \quad \textbf{(2.52)}$$

Bilinmeyenlerden birini yok edebilmek için elmas farklaması formülü kullanılır:

$$\underline{\psi}_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left(\underline{\psi}_{j}+\underline{\psi}_{j+1}\right) \quad \textbf{(2.53)}$$

Bu formül yeniden yazılırsa:

$$\underline{\psi}_{j+1}=2\underline{\psi}_{j+1/2}-\underline{\psi}_{j} \quad \textbf{(2.54)}$$

$\underline{\psi}_{j+1}$ (2.52)'den elenirse:

$$\left[\frac{2\underline{\underline{V}}^{-1}}{\Delta_j}+\underline{\underline{H}}-\underline{\chi}_p\underline{f}_p^T\int d\Omega'\right]\underline{\psi}_{j+1/2}=\underline{q}^e_{j+1/2}+\frac{2}{\Delta_j}\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\psi}_{j} \quad \textbf{(2.55)}$$

(2.55) ve (2.54) $\underline{\psi}_{1/2}$, $\underline{\psi}_{1}$, $\underline{\psi}_{3/2}$, ... için dönüşümlü olarak çözülür. Her zaman adımında solda bulunan transport operatörünün tersi alınmalıdır. Bu nedenle bu yöntemde hesaplama gereksinimleri en azından tam kapalı yöntem kadar olacaktır. İlk yönsel akı değerleri başlangıç koşulu olarak verilmektedir.

2.3 Yönsel Ayrıklaştırma

2.3.1 Ayrık ordinatlar yöntemi

Ayrık ordinatlar yöntemi basitçe ayrık açısal yönlerde transport denkleminin çözümünü sağlar. Yön değişkeni birim küre boyunca ayrıklaştırılır. Temel olarak her bir ayrık ordinat, yön vektörü ($\vec{\Omega}_m$) ve ilgili birim küre alanı (w_m) ile gösterilir. Burada m=1,…..,M ayrık ordinat sayısıdır. Bu M değeri S_N derecesini belirler. Bütün ayrık ordinatlar bazı şartları sağlamak zorundadır:

- Fiziksel simetrilerin ayrıklaştırma sonrası korunmuş olması
- Kaynak terimlerinin doğru gösterimi için küresel harmonikler momentlerine iyi bir yaklaşım yapılması

- Akış operatöründe yer alan yöne göre türeve doğru bir yaklaşım yapılması

İkinci şartı sağlamak için akı momentlerinin kareleme formülü ile doğru olarak hesaplanması gereklidir. Bunun için $\mu \in [-1, 1]$ aralığında M ordinat ve bunlara karşılık w_m ağırlık noktası kullanılır. Skaler akıya ve Legendre momentlerine kareleme yaklaşımı aşağıdaki şekilde yapılır:

$$\phi(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m \psi_m(\rho) \tag{2.56}$$

$$\phi_l(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m P_l(\mu_m)\psi_m(\rho), \quad 0 \le l \le L \tag{2.57}$$

Ağırlıklar pozitiftir ve toplamı 2'yi verecek şekilde normalize edilir:

$$\sum_{m=1}^{M} w_m = 2 \tag{2.58}$$

Grup içi denklemi (2.33) yönsel alt alanda ($\mu_{m-1/2}, \mu_{m+1/2}$) integre edilirse:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho^2}\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu\mu \frac{\partial(\rho^2\psi(\rho,\mu))}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\psi(\rho,\mu) \\ &+ \sigma(\rho)\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu\psi(\rho,\mu) = \int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu q(\rho,\mu) \end{aligned} \tag{2.59}$$

Bu integraller Gauss-Legendre karelemeleri kullanılarak alınır:

$$\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu\mu \frac{\partial(\rho^2\psi(\rho,\mu))}{\partial\rho} = w_m\mu_m \frac{\partial(\rho^2\psi(\rho,\mu_m))}{\partial\rho} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\psi(\rho,\mu) \\ &= 2\left(\alpha_{m+1/2}\psi(\rho,\mu_{m+1/2}) - \alpha_{m-1/2}\psi(\rho,\mu_{m-1/2})\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu\psi(\rho,\mu) = w_m\psi(\rho,\mu_m) \tag{2.62}$$

$$\int_{\mu_{m-1/2}}^{\mu_{m+1/2}} d\mu q(\rho,\mu) = w_m q(\rho,\mu_m) \qquad \textbf{(2.63)}$$

(2.60)-(2.63) denklemlerini (2.59)'da yerine koyacak olursak:

$$\frac{\mu_m}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2\psi_m(\rho))}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho w_m}\left(\alpha_{m+1/2}\psi_{m+1/2}(\rho) - \alpha_{m-1/2}\psi_{m-1/2}(\rho)\right) + \sigma(\rho)\psi_m(\rho) = q_m(\rho) \qquad \textbf{(2.64)}$$

Transport denkleminin en basit problemi (sonsuz ortam eşyönlü sabit kaynak problemi) sağlayabilmesi için yönsel yeniden dağılım terimine (2.61)'deki gibi, alfalı terimlerle yaklaşım yapılmıştır. Bu terimlerin hesaplanabilmesi için sonsuz ortam problemini ele alırsak yönsel akı bu ortamda sabittir, ψ =C=S/σ_r. Bunu (2.64)'te yerine koyacak olursak akış operatöründe yer alan 2 terimin toplamı sıfır olur:

$$2w_m\mu_m C + 2C(\alpha_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2}) = 0 \qquad \textbf{(2.65)}$$

Buradan aşağıdaki tekrarlayan denklem elde edilir:

$$\alpha_{m+1/2} = \alpha_{m-1/2} - w_m\mu_m \qquad \textbf{(2.66)}$$

Bu denklemden tüm alfaları bulabilmek için ilk alfa değerini ($\alpha_{1/2}$) bilmek gerekmektedir. Bu değer ayrık ordinatlar transport denkleminin (2.64) nötron denge şartını (2.36), sağlaması için $\alpha_{1/2=}$ $\alpha_{M+1/2}$=0 alınır (1).

μ=0 etrafında fiziksel simetrinin sağlanması için çift sayıda ordinat seçilir. Çünkü sağa ve sola giden nötron sayısı eş öneme sahiptir:

$$\mu_{M+1-m} = -\mu_m \qquad \mu_m > 0, \qquad m = 1,2 \ldots M/2 \qquad \textbf{(2.67)}$$

$$w_{M+1-m} = w_m \qquad \textbf{(2.68)}$$

Ordinatlar (μ_m, m=1,2….M) Legendre polinomlarının köklerinden bulunur:

$$P_M(\mu_m) = 0 \qquad \textbf{(2.69)}$$

Ağırlıklar (w_m) Legendre polinomlarını doğru şekilde integre edebilen kareleme formülünden bulunur:

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m P_l(\mu_m) = \delta_{l0}, \qquad l = 0,1 \dots, M-1 \tag{2.70}$$

(2.64)'te 2 kenar ve bir merkez yönsel akısı bilinmeyenleri oluşturur. M yön için 2M+1 bilinmeyen vardır. Yön üzerinde elmas farklaması formülü M tane denklem daha getirir:

$$\psi_{m+1/2}(\rho) \cong 2\psi_m(\rho) - \psi_{m-1/2}(\rho) \tag{2.71}$$

(2.71), (2.64)'te yerine konulursa:

$$\frac{\mu_m}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2\psi_m(\rho))}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho w_m}\left(2\alpha_{m+1/2}\psi_m(\rho) - (\alpha_{m+1/2} + \alpha_{m-1/2})\psi_{m-1/2}(\rho)\right) + \sigma(\rho)\psi_m(\rho) = q_m(\rho) \tag{2.72}$$

Eğer $\psi_{1/2}$ bilinirse diğer bilinmeyen yönsel akılar sırasıyla (2.72) ve (2.71)'den bulunur. $\psi_{1/2}$'nin hesaplanması için başlangıç yönü $\mu_{1/2} = -1$, denklemi kullanılır. Bunun için bu tez çalışmasında geliştirilen SPDOT programında 2 yöntem kullanılmıştır. İlk yöntemde başlangıç yönü denklemi düzlem geometrisi transport denklemi olarak alınır. Çünkü $\mu_{1/2} = -1$ için yönsel türev yokolacaktır:

$$-\frac{d\psi_{\frac{1}{2}}}{d\rho} + \sigma(\rho)\psi_{\frac{1}{2}}(\rho) = q_{\frac{1}{2}}(\rho) \tag{2.73}$$

Bu çalışmada sayısal analizlerde $\psi_{1/2}$ (2.73)'ten hesaplanmıştır. TIMEX [68] ve ONETRAN [33] kodlarında kullanılan diğer yöntemde ise aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$\psi_1(\rho) = \psi_{1/2}(\rho) \tag{2.74}$$

2.4 Uzaysal Farklama Yöntemleri

Bu tez çalışmasında uzaysal farklama yöntemleri olarak Elmas Farklaması ve Doğrusal (birinci derece) ve Kuadratik (ikinci derece) Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemleri kullanılmıştır.

2.4.1 Elmas farklaması

Küresel ortam I adet aralığa bölünür. Herbir aralık boyunca tesir kesitleri sabit kabul edilir. Uzaysal farklama (2.72)'nin i'inci (i=1,2,…..,I) küresel kabuk hacmi (V_i) üzerinden integre edilmesi ile başlar:

$$V_i = 4\pi \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}\left(\rho_{i+1/2}^3 - \rho_{i-1/2}^3\right) \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned} &\mu_m\left[A_{i+1/2}\psi_{m,i+1/2} - A_{i-1/2}\psi_{m,i-1/2}\right] \\ &+ \frac{8\pi}{w_m}\left[2\alpha_{m+1/2}\int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho\psi_m(\rho)d\rho\right. \\ &\left. - \alpha_m \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho\psi_{m-1/2}(\rho)d\rho\right] \\ &+ \sigma_i 4\pi \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho^2\psi_m(\rho)d\rho = 4\pi \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho^2 q_m(\rho)d\rho \end{aligned} \tag{2.76}$$

Bu denklemde σ_i, i'inci aralık için toplam tesir kesitidir. Ayrıca:

$$\alpha_m = (\alpha_{m-\frac{1}{2}} + \alpha_{m+\frac{1}{2}}) \tag{2.77}$$

$$A_{i\pm1/2} = 4\pi\rho_{i\pm1/2}^2 \tag{2.78}$$

$$\psi_{m,i\pm1/2} = \psi_m(\rho_{i\pm1/2}) \tag{2.79}$$

olarak tanımlanır. (2.76)'da integralleri kaldırmak için aşağıda tanımlanan i'inci hücre ortalama yönsel akı ve kaynak terimleri kullanılır:

$$\psi_{m,i} = \frac{4\pi}{V_i}\int_{\rho_{i-\frac{1}{2}}}^{\rho_{i+\frac{1}{2}}} \rho^2\psi_m(\rho)d\rho \tag{2.80}$$

$$Q_{m,i} = \frac{4\pi}{V_i}\int_{\rho_{i-\frac{1}{2}}}^{\rho_{i+\frac{1}{2}}} \rho^2 q_m(\rho)d\rho \tag{2.81}$$

Diğer integraller için i'inci aralıkta $\psi_m(\rho) = \psi_{m,i}$ yaklaşımı yapılırsa:

$$4\pi \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho\psi_m(\rho)d\rho = \frac{\Delta A_i}{2}\psi_{m,i} \tag{2.82}$$

$$4\pi \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \rho\psi_{m-1/2}(\rho)d\rho = \frac{\Delta A_i}{2}\psi_{m-1/2,i} \tag{2.83}$$

elde edilir. Burada:

$$\Delta A_i = A_{i+1/2} - A_{i-1/2} \tag{2.84}$$

olarak tanımlanır. (2.80)-(2.83) denklemleri (2.76)'da yerine konulursa:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_m}{V_i}\left[A_{i+1/2}\psi_{m,i+1/2} - A_{i-1/2}\psi_{m,i-1/2}\right] \\ &+ \frac{\Delta A_i}{w_m V_i}\left[2\alpha_{m+1/2}\psi_{m,i} - \alpha_m\psi_{m-1/2,i}\right] + \sigma_i\psi_{m,i} \\ &= Q_{m,i} \end{aligned} \tag{2.85}$$

elde edilir.

Başlangıç yönü denklemini (2.73) uzaysal olarak ayrıklaştırmak için önce türev terimine aşağıdaki yaklaşım yapılır.

$$-\frac{d\psi_{\frac{1}{2}}(\rho)}{d\rho} = -\frac{\Delta\psi_{\frac{1}{2}}(\rho)}{\Delta\rho} = -\frac{\psi_{\frac{1}{2},i+1/2} - \psi_{\frac{1}{2},i-1/2}}{\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}} \tag{2.86}$$

Daha sonra (2.86)'nın V_i üzerinden integrali alınırsa:

$$-\frac{\psi_{\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}}{\rho_{i+\frac{1}{2}} - \rho_{i-\frac{1}{2}}} + \sigma_i\psi_{\frac{1}{2},i} = Q_{\frac{1}{2},i} \tag{2.87}$$

Elmas farklaması kullanılarak (2.87)'deki bilinmeyen sayısı bir azaltılarak 2'ye indirilir:

$$\psi_{\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} = 2\psi_{\frac{1}{2},i} - \psi_{\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} \quad \textbf{(2.88)}$$

Bu durumda başlangıç yönü denklemi şu şekilde yazılır:

$$\psi_{\frac{1}{2},i} = \frac{2\psi_{\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}} + \Delta\rho_i Q_{\frac{1}{2},i}}{2 + \sigma_i \Delta\rho_i} \quad \textbf{(2.89)}$$

Burada $\Delta\rho_i = \rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}$ dir. Nötron yönünü takip ederek dıştan içe doğru hesaplama yapılır. Bu nedenle ilk olarak kürenin dış yüzeyindeki yönsel akının ($\psi_{1/2,I+1/2}$) bilinmesi gerekmektedir. Bu ise boşluk sınır koşulu için sıfırdır. Yansıtıcı sınır koşulu için ise $\psi_{1/2,I+1/2}$'ye başlangıç değeri verilip iterasyon yapılır ve bu iterasyon sonucu olarak hesaplanır. Daha sonra $\psi_{1/2,I}$ (2.89)'dan, $\psi_{1/2,I-1/2}$ ise (2.88)'den hesaplanır. I'inci hücre için hesaplanan $\psi_{1/2,I-1/2}$, I-1'inci hücre için $\psi_{1/2,(I-1)+1/2}$'ye karşılık gelmektedir. Yani yönsel akının sürekliliği sağlanmaktadır. Bu şekilde bütün başlangıç yönü yönsel akıları hesaplanır.

$\mu_m<0$ için (2.85)'te $\psi_{m,i-1/2}$ yerine Elmas Farklaması karşılığı konulur:

$$\psi_{m,i-\frac{1}{2}} = 2\psi_{m,i} - \psi_{m,i+\frac{1}{2}} \quad \textbf{(2.90)}$$

ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\psi_{m,i} = \frac{\left(|\mu_m|\left[A_{i+1/2} + A_{i-1/2}\right]\psi_{m,i+1/2} + \frac{\Delta A_i}{w_m}\alpha_m\psi_{m-1/2,i} + V_i Q_{m,i}\right)}{2|\mu_m|A_{i-1/2} + \frac{2\Delta A_i}{w_m}\alpha_{m+1/2} + V_i\sigma_i} \quad \textbf{(2.91)}$$

Bu denklemde $\psi_{m,i+1/2}$, i=I için sınır koşulundan, i<I için bir önceki uzaysal hücre için yapılan hesaplamalardan bilinmektedir. $\psi_{m-1/2,i}$ ise m=1 için başlangıç yönü hesaplamalarından, M/2≥m>1 için bir önceki yönsel hücre için yapılan hesaplamalardan bilinmektedir. Sırasıyla $\psi_{m,i}$ (2.91)'den, $\psi_{m,i-1/2}$ (2.90)'dan hesaplanır. M/2'ye kadar diğer m değerleri için yönsel akı hesaplamalarında yine EF kullanılır:

$$\psi_{m+\frac{1}{2},i} = 2\psi_{m,i} - \psi_{m-\frac{1}{2},i} \quad \textbf{(2.92)}$$

Daha sonra i=1/2 (küre merkezi) ve m>M/2 (μ_m>0) için küre merkezindeki başlangıç yönsel akıları küre merkezi koşullarından birisi kullanılarak hesaplanır. Bu defa içeriden dışarıya doğru hesap yapılacağı için aşağıdaki EF denklemi:

$$\psi_{m,i+\frac{1}{2}} = 2\psi_{m,i} - \psi_{m,i-\frac{1}{2}} \quad \textbf{(2.93)}$$

(2.85)'te $\psi_{m,i+1/2}$ yerine yazılarak:

$$\psi_{m,i} = \frac{\left(|\mu_m|\left[A_{i+1/2} + A_{i-1/2}\right]\psi_{m,i-1/2} + \frac{\Delta A_i}{w_m}\alpha_m\psi_{m-1/2,i} + V_i Q_{m,i}\right)}{2|\mu_m|A_{i+1/2} + \frac{2\Delta A_i}{w_m}\alpha_{m+1/2} + V_i\sigma_i} \quad \textbf{(2.94)}$$

elde edilir. (2.94)'te $\psi_{m,i-1/2}$, i=1 için küre merkezi koşulundan, i>1 için bir önceki uzaysal hücre için yapılan hesaplamalardan bilinmektedir. $\psi_{m-1/2,i}$ ise m=M/2+1 için, m=M/2 için yapılan hesaplamalardan bilinmektedir. m>M/2+1 için (2.92)'den hesaplanır. Sırasıyla $\psi_{m,i}$ (2.94)'ten, $\psi_{m,i+1/2}$ (2.93)'ten hesaplanır. Bütün yönsel akılar hesaplandıktan sonra skaler akılar (2.56)'dan, eşyönsüz saçılma varsa akı momentleri (2.57)'den hesaplanır. Saçılma kaynağı yeni skaler akılar ile güncellenerek sonraki iç iterasyona geçilir.

Yansıtıcı sınır koşulu için gerekli olan son yön denklemleri de başlangıç yönü denklemlerine benzer bir şekilde çıkartılır. Bu defa μ=1 olduğu için (2.86)'nın önündeki eksi işareti kalkar. (2.88) yerine m=M+1/2 için (2.93) kullanılır. Son yön denklemi, (2.89)'da 1/2 yerine M+1/2 ve yönsel akıda i+1/2 yerine i-1/2 yazılarak elde edilir.

2.4.2 Süreksiz sonlu elemanlar yöntemi

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), çeşitli mühendislik problemlerine kabul edilebilir bir yaklaşımla çözüm arayan sayısal bir yöntemdir. Son 40 yılda bilgisayarların hızlı gelişimine paralel olarak gelişen sayısal hesap yöntemleri içinde çok önemli bir yer tutmaktadır. İlk kullanımı 1950'li yıllarda İnşaat Mühendisliği'nde oldu. Etkin kullanımı ise bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler ile mümkün hale geldi. Bu

sayısal yaklaşım yöntemi her ne kadar orijinal olarak yapı sistemleri için geliştirilmiş olsa da dayandığı esasların genelliği dolayısıyla akışkanlar mekaniği, zemin mekaniği, uçak mühendisliği nükleer mühendislik, kaya mekaniği, elektromanyetik alanlar, termal analiz ve daha sayabileceğimiz pek çok mühendislik ve fizik problemlerinin çözümünde araç olarak kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında uzaysal farklama için elmas farklaması yerine kullanılabilecek süreksiz doğrusal ve kuadratik sonlu elemanlar yöntemleri geliştirilmiştir. Küresel koordinatlarda transport denklemini SEY ile çözerken bilinmeyen $\psi_m(r)$'e, sonlu boyutlu fonksiyon setine üye bazı fonksiyonlar ile yaklaşım yapılabileceği varsayılır. Bu fonksiyon seti deneme uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaydan özel bir fonksiyon seçimi için bir fonksiyonelin minimize edilmesi ya da kalıntının bir set ağırlık fonksiyonuna dik olması yöntemleri kullanılabilir.

SSEY'inin avantajları şöyle sıralanabilir [69]:

- SSEY formülasyonu yerel bir formülasyona dayanır. Sadece eleman ve onun sınırlarında işlemler yapılmaktadır. Uzaysal sistemin boyutu ya da bilinmeyen sayısı ne olursa olsun formülasyon temel olarak aynı kalır.
- Yerel formülasyon nedeniyle SSEY formülasyonu toplu global bir matris üretmez. Bu nedenle bilgisayar bellek ihtiyacı SEY'e göre daha azdır.
- Yerel formülasyon nedeniyle algoritma kolayca paralel programlamaya uygun hale getirilebilir. Paylaşılmış bellek paralel programlama veya dağıtılmış bellek paralel hesaplama avantajlarından yararlanılabilir.
- Uyarlanabilir inceltme (hatanın yüksek beklendiği bölgelerde ızgarayı daha çok aralığa bölebilmek) yerel formülasyon nedeniyle daha kolaydır.

Ayrıca türetimde kullanılacak farklı ağırlık fonksiyonları çözümü daha kolay ve bilgisayar hafızasında daha az yer kaplayan denklemler sisteminin elde edilmesini sağlayabilir. Denklemde kullanılan yerel katsayılarının (sonlu eleman dizilerini içeren büyüklükler) veya yerel matrislerin değiştirilmesi ile silindir ve düzlem geometrisine geçiş kolaylıkla yapılabilir.

Bu yöntemin dezavantajı ise elmas farklamasına göre daha kompleks olması ve ona göre yaklaşık DSSEY için iki kat, KSSEY için 3 kat daha fazla işlem gerektirmesidir. Bunun nedeni elmas farklamasında sadece hücre merkezinde akı ve

kaynak değerleri gerekli iken DSSEY'de hücre kenarındaki akı ve kaynak değerlerine ihtiyaç vardır [68]. KSSEY'de ise hücre kenarındaki ve merkezindeki akı ve kaynak değerlerine ihtiyaç vardır.

2.5 Saçılma Kaynağı ve Üs İterasyonları

Transport denkleminin çözümünde temel olarak saçılma kaynağı veya iç iterasyon ve üs iterasyonu veya dış iterasyon olmak üzere iki farklı iterasyon stratejisi uygulanır. İç iterasyonlar her bir grup için her ızgara noktasındaki skaler akıların yakınsamasıyla ilişkilidir. Özdeğer problemleri için her bir grup kaynağını önceki dış iterasyondan hesaplanan fisyon kaynağı ve grup içi saçılma kaynakları oluşturur. Sabit kaynak probleminde ise her bir grup kaynağını dış kaynak ve grup içi saçılma kaynakları oluşturur. Dış iterasyonlar ise özdeğerin veya fisyon kaynağı dağılımının yakınsaması ile ilgilidir.

2.5.1 Saçılma kaynağı iterasyonu

Eğer (2.33)'te sağ tarafta saçılma ya da fisyon kaynağı yoksa ayrıklaştırma sonrası bulunan sonuç ile hesap tamamlanır. Ancak saçılma kaynağı varsa saçılma kaynağı iterasyonu ile skaler akılar güncellenir. Bu iterasyon von Neumann seri çözümüne dayanır [1].

$$\frac{\mu_m}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2\psi_m^{l+1}(\rho))}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho w_m}\left(\alpha_{m+1/2}\psi_m^{l+1}(\rho)-\alpha_{m-1/2}\psi_m^{l+1}(\rho)\right) \\ +\sigma(\rho)\psi_m^{l+1}(\rho)=q_m^l(\rho) \tag{2.95}$$

$$q_m^l(\rho)=\sum_{n=1}^{N}(2n+1)\sigma_n(\rho)P_n(\mu_m)\phi_n^l(\rho)+s^l(\rho,\mu_m) \tag{2.96}$$

$$\phi_n^l(\rho)=\frac{1}{2}\sum_{m'=1}^{M}w_{m'}P_n(\mu_{m'})\psi^l(\rho,\mu_{m'}) \tag{2.97}$$

burada l iterasyon indisidir. Eğer her bir noktadaki skaler akılar peş peşe iki iterasyon için aşağıdaki kriteri sağlarsa her bir grup için iç iterasyonun yakınsaması gerçekleşir:

$$max\left|\frac{\phi_{i,g}^{l+1}-\phi_{i,g}^{l}}{\phi_{i,g}^{l}}\right|<\epsilon \qquad \textbf{(2.98)}$$

burada $\phi_{i,g}^{l}$ l'inci iç iterasyonda, i'inci ızgara noktasında, g'inci grup sakaler akıdır. ϵ ise kullanıcı tarafından girdi olarak girilen iç iterasyonlar için yakınsama kriteridir. İterasyon yakınsama kriteri sağlandığında veya kullanıcı tarafından belirlenen maksimum iterasyon sayısı aşıldığında iç iterasyon sonlandırılır.

Kaynak iterasyonu genellikle yakınsır. Ancak birçok problemde yakınsama yavaşlayabilir. Eğer parçacık sınırlardan kaçmadan, yutulmadan veya başka bir gruba saçılmadan önce ortalama olarak birkaç çarpışma yaparsa yakınsama hızlı olur. Aksi takdirde oldukça saçıcı ortamlarda yakınsama yavaştır. Bu durumda iç iterasyonun hılzndırılması gerekebilir. Bu tez çalışmasında iç iterasyonun hızlandırılması için KIYDHY geliştirilmiştir.

2.5.2 Üs iterasyonu

Üs iterasyonu çoğaltkan ortam özdeğer problemlerinde kullanılan bir özdeğer algoritmasıdır. Bu algoritma bir A matrisinin özdeğerini (λ) ve sıfır olmayan bir özvektörünü üretir (v): Av= λv. Üs iterasyonu A matrisinin mutlak değeri en büyük olan özdeğerini verir. Çoğaltkan ortam özdeğer probleminin böyle tek bir reel özdeğere (k>0) ve buna karşılık pozitif bir fisyon dağılımına (özvektör, F) sahip olduğu varsayımı yapılırsa, üs iterasyonu uygulanabilir. (2.19)'da verilen özdeğer problemini iterasyon formunda i'inci iterasyon için şu şekilde yazabiliriz:

$$\underline{\tilde{\psi}}_i=\frac{1}{k_i}\underline{\underline{H}}^{-1}\underline{\chi}\,\underline{f}^{T}\int d\Omega\underline{\psi}_i \qquad \textbf{(2.99)}$$

burada $\underline{\tilde{\psi}}_i$'nin üzerindeki işaret hızlandırılmamış yönsel akı olduğunu göstermektedir. Hızlandırılmamış fisyon dağılımı:

$$\tilde{F}_i=\underline{f}^{T}\int d\Omega\underline{\tilde{\psi}}_i \qquad \textbf{(2.100)}$$

ile (2.99)'un her iki yanına $\underline{f}^{T}\int d\Omega$ ile işlem yapılırsa:

$$\underline{f}^T \int d\Omega \underline{\tilde{\psi}}_i = \frac{1}{k_i} \underline{f}^T \int d\Omega \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\chi} \underline{f}^T \int d\Omega \underline{\psi}_i \qquad \textbf{(2.101)}$$

burada sağ taraf için aşağıdaki transport operatörü tanımlanırsa:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{f}^T \int d\Omega \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\chi} \qquad \textbf{(2.102)}$$

(2.101) aşağıdaki forma dönüşür:

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{k_i} \underline{\underline{A}} F_i \qquad \textbf{(2.103)}$$

KIYDHY uygulanmadığı durum için $\tilde{F}_i = F_{i+1}$ ve $\underline{\tilde{\psi}}_i = \underline{\psi}_{i+1}$ yazılır. Hızlandırılmamış özdeğeri bulmak için $\underline{\underline{A}}$F=kF eşitliği bir w ağırlık foksiyonu ile çarpılıp hacim üzerinden integrali alınır:

$$k_{i+1} = \frac{\int w \underline{\underline{A}} F_i dV}{\int w F_i dV} \qquad \textbf{(2.104)}$$

(2.103)'ten yararlanılarak A operatörü yok edilir:

$$k_{i+1} = k_i \frac{\int w F_{i+1} dV}{\int w F_i dV} \qquad \textbf{(2.105)}$$

İlk iterasyon için bir özdeğer $k_0>0$ ve fisyon dağılımı $F_0>0$ tahmini yapılır. İterasyonlar aşağıdaki yakınsama kriteri sağlanana kadar devam eder:

$$\left| \frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1}} \right| < \epsilon \qquad \textbf{(2.106)}$$

burada ϵ yakınsama kriteridir ve genellikle 10^{-6} seçilir. İterasyon sonucu bulunan en büyük özdeğer çoğaltma katsayısıdır. Yakınsama belli bir iterasyon sayısına kadar sağlanamazsa iterasyon durdurulur. Özdeğerin olmadığı zamana bağlı problemlerde dış iterasyon için (2.51) kullanılır.

2.6 Sınır ve Merkez Koşulları

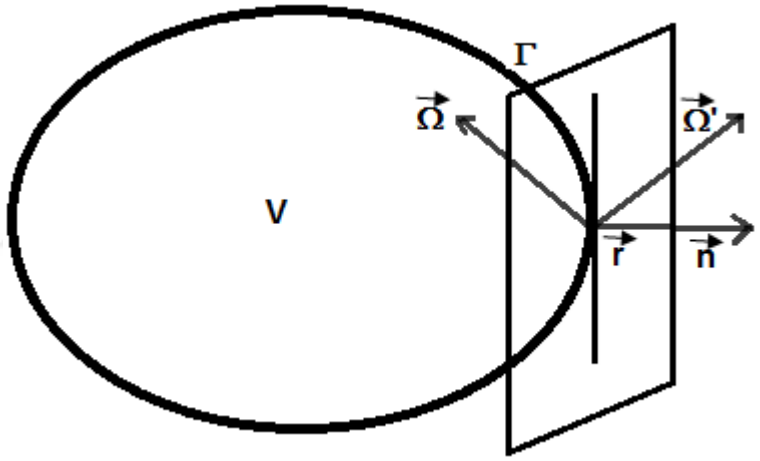
2.6.1 Sınır koşulları

Nükleer mühendislikte birkaç farklı sınır koşulu kullanılır. Bunlardan en yaygın olanları boşluk sınır koşulu ve yansıtıcı sınır koşuludur. SPDOT programında küre dış yüzeyinde boşluk ve yansıtıcı sınır koşulu seçenekleri mevcuttur.

Boşluk sınır koşuluna aynı zamanda sıfır gelen akı sınır koşulu da denilebilir. Çünkü bütün gelen yönlerde sınırda yönsel akı sıfırdır:

$$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) = 0, \qquad \vec{\Omega}.\vec{n} < 0, \qquad \vec{r} \in \Gamma \tag{2.107}$$

burada Şekil 2.1'de gösterildiği gibi $\vec{n}$ dış yüzeye dik vektörü, Γ ise dış yüzeyi göstermektedir.



Şekil 2.1 : Yön vektörlerinin ve dikme vektörünün gösterimi.

Yansıtıcı sınır koşulunda gelen yönde ($\vec{\Omega}$) sınırda yönsel akı giden yönde ($\overrightarrow{\Omega'}$) aynı sınırda yönsel akıya eşittir. $\overrightarrow{\Omega'}$ yansıma yönüdür ve aşağıdaki kuralı sağlar:

$$\vec{\Omega}.\vec{n} = -\overrightarrow{\Omega'}.\vec{n} \quad ve \quad (\vec{\Omega} \times \vec{\Omega}').\vec{n} = 0 \tag{2.108}$$

Bu durumda yansıtıcı sınır koşulu şu şekilde tarif edilir:

$$\psi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) = \psi\left(\vec{r},\overrightarrow{\Omega'},E,t\right), \qquad \vec{\Omega}.\vec{n} < 0, \qquad \vec{r} \in \Gamma \tag{2.109}$$

Ayrık Ordinatlar Yöntemi ile yönsel ayrıklaştırma yapıldıktan sonra boşluk sınır koşulu (2.107) küre yüzeyinde (ρ=R) şu şekilde yazılır:

$$\psi_m(R) = 0, \qquad m = 1,2, \dots \dots \frac{M}{2} \qquad (\mu_m < 0) \tag{2.110}$$

Yansıtıcı sınır koşulu ise aşağıdaki şekilde tarif edilir:

$$\psi_m(R) = \psi_{M+1-m}(R), \qquad m = \frac{M}{2} + 1, \frac{M}{2} + 2, \dots, M \qquad (\mu_m > 0) \tag{2.111}$$

Küre merkezinde simetri olduğu için yansıtıcı sınır koşulu orda da geçerlidir. Bu durumda dış yüzeyde de yansıtıcı sınır koşulu uygulandığında dış yüzeyde yönsel akılar iterasyon yapılmadan bulunamaz. Bunun için μ<0 yönünde küre yüzeyindeki yönsel akılara başlangıç tahmini değerler verilerek yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu başlatılır. İç iterasyonların tamamlanması ile bütün yönsel akılar hesaplanır. (2.111)'de m=1/2 (μ=-1) alındığında başlangıç yönü akılarının m=M+1/2 (μ=1) son yöndeki yönsel akılara eşit olması gerektiği görülür. Bu nedenle yansıtıcı sınır koşulu olan küresel geometri, ayrık ordinatlar transport denkleminin çözümü için m=M+1/2 yönü denklemlerinin de türetilip kullanılması gerekmektedir. Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu başlangıç yönleri (özel yönler) ve diğer yönler için aşağıdaki koşullar sağlanınca tamamlanır:

$$max \left| \frac{\psi_{m,I+1/2}^{l+1} - \psi_{M+1-m,I+1/2}^{l}}{\psi_{m,I+1/2}^{l+1}} \right| < \epsilon_r, \qquad m = 1,2, \dots, M/2 \tag{2.112}$$

$$\left| \frac{\psi_{M+1/2,I+1/2}^{l+1} - \psi_{1/2,I+1/2}^{l}}{\psi_{M+1/2,I+1/2}^{l+1}} \right| < \epsilon_r \tag{2.113}$$

burada ϵ_r yakınsama kriteri, l ise iterasyon indisidir.

2.6.2 Merkez koşulları

Uzay-yön ızgarasında giderken küre merkezinde (ρ=0) uygun bir merkez koşulu uygulamak gereklidir. SPDOT programında kullanılan küre merkezi koşulları 2 tanedir. İlki küre merkezindeki simetriden dolayı yansıtıcı sınır koşulu yaklaşımıdır:

$$\psi_{M+1-m,1/2} = \psi_{m,1/2}, \qquad m = 1,2, \dots, M/2 \tag{2.114}$$

Bu yöntemi ρ=0'da uygulamak kolaydır. Fakat bu yöntem ρ=0'da en uygun sınır koşulu değildir. Bu nedenle ρ=0'da akıda fiziksel olmayan azalma ve orijin civarında uzaysal akı profilinde doğru olmayan sonuçlar gözlenebilir.

Daha uygun bir merkez koşulu elde etmek için nötron transport denklemi uzaysal değişkenle çarpılır ve bu değişkenin sıfıra gitmesi sağlanır. Bunun sonucunda aşağıdaki yöntem elde edilir [1]:

$$\psi_{m-1/2,1/2} = \psi_{m+1/2,1/2}, \qquad m = 1,2,\dots,M \tag{2.115}$$

(2.115)'te m=1 için $\psi_{1/2,1/2}$ başlangıç yönü denkleminden hesaplanır. $\psi_{1/2,1/2}$ bütün yönlerde orijinde diğer yönsel akılara eşitlenir. Uzaysal farklamada elmas farklaması kullanıldığında $\psi_{1/2,1/2}$'i hesaplamak için gelen yönlerde orijine en yakın hücre için elmas farklamasına ihtiyaç yoktur. Fakat DSSEY ve KSSEY'nde $\psi_{1/2,1/2}$ otamatik olarak merkez hücrenin matris denkleminden hesaplanmaktadır. $\psi_{1/2,1/2}$'nin bu hesaplanan değeri yerine başlangıç yönü denkleminden bulunan $\psi_{1/2,1/2}$ hesaba katılır.

3. ÖZGÜN SÜREKSİZ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ

SSEY yüksüz parçacık transport denkleminin ayrık ordinatlar yöntemi formülasyonunda kullanılan en esnek yöntemler arasındadır. SSEY, sürekli SEY'ne benzer bir şekilde parçalı polinom uzayını kullanır. Ancak eleman sınırlarında süreklilik şartı gevşetilmiştir. Bunu sağlamak için deneme fonksiyonları alan değişkeni, onun türevi veya her ikisi birden elemanlararası sınırlarda süreksiz olacak şekilde seçilir. Bu yöntem SEY ve Sonlu Farklar Yöntemleri'nin avantajlarını içerir [69].

DSSEY'ni kullanarak çeşitli bilgisayar programları geliştirilmiştir [32,70-75]. Bu programlardan ONETRAN zamandan bağımsız TIMEX ise zamana bağlı transport denklemini çözebilmektedir [33,68,74]. Son yıllarda TIMEX'de kullanılan formülasyonun benzeri bir formülasyon ile DSSEY'nin transport çözümlerindeki dalgalanmayı yokettiği belirtilmiştir [15]. Bir başka çalışmada iki boyutlu silindirik geometride parçalı DSSEY uygulanmış ve doğru sonuçlar elde edilmiştir [76].

Yüksek dereceli SSEY diğer bilim dallarında geniş bir şekilde çalışılmıştır [77]. Fakat nötron transportunda yüksek dereceli elemanların kullanımı üzerine araştırma oldukça sınırlıdır. Bunlardan birinde zamandan bağımsız transport denkleminin çözümüne yönelik olarak hiyerarşik temel fonksiyonları kullanılarak yüksek dereceden SSEY üzerine çalışılmıştır [78]. Diğer bir çalışmada yüksek dereceden SSEY hem yönsel hem uzaysal ayrıklaştırma yöntemi olarak zamandan bağımsız küresel geometri transport denkleminin tamamen yutucu ortam problemlerinde çözümü için kullanılmıştır [45]. Başka bir çalışmada ise doğrusal ve kuadratik SSEY'leri üçgensel ızgara ayrık ordinatlar hesaplamalarında kullanılmış ve tamamen yutucu ortam problemi ele alınarak karşılaştırılmıştır [79].

Bu bölümde ilk olarak DSSEY küresel geometri ani nötron transport denkleminin zamandan bağımsız ve zamana bağlı çözümü için yeniden formüle edilecektir. Yeni metodoloji kullanılarak türetilen DSSEY formülasyonu bundan böyle DS2 olarak kısaltılacaktır. TIMEX kodunda kullanılan küresel geometri DSSEY ise yeni

metodolojiye göre yeniden türetilecek ve kısaca DS1 olarak isimlendirilecektir. Bu bölümde ikinci amaç küresel geometride, zamana bağlı ve zamandan bağımsız ani nötron transport denkleminin sayısal çözümü için yüksek dereceden bir SSEY geliştirmektir. Bu amaçla DS2 için kullanılan metodoloji ile Kuadratik (İkinci Derece) SSEY formülasyonu için türetimler yapılmıştır.

DS2 ve KSSEY formülasyonlarında ilk olarak klasik Galerkin yöntemi kullanılarak yönsel akılara yaklaşım yapılmıştır. Daha sonra nötron transport denklemi belirli ağırlık fonksyonları ile çarpılarak uzaysal boyutta ilgili birim hücre için integraller alınmıştır. Galerkin yönteminin özelliği olarak ağırlık fonksiyonları, yönsel akılara ve kaynak terimine yaklaşım yapılan Lagrange tipi polinomların oluşturduğu şekil fonksiyonları ile aynı seçilmiştir. Daha sonra doğrusal denklem sistemlerinin türetimi yapılmıştır. Bu sistemler DSSEY için 2x2, KSSEY için 3x3 matrisleri oluşturur. Bu sistemler kullanılarak SPDOT isimli (küresel geometri Ayrık Ordinatlar Yöntemi transport kodu) bilgisayar kodu geliştirilmiştir. DS1 yönteminde ise Lagrange polinomları ile yaklaşım sadece hücre merkezindeki yönsel akı ile kaynak terimine yapılmış, ağırlık fonksiyonları ile şekil fonksiyonları aynı seçilmemiştir. DS1 yöntemi için sayısal analizler ise SPDOT'ın başka bir sürümü ile gerçekleştirilmiştir. Sayısal çözüm için uzay-yön süpürmesi daha önce EF'nda tarif edildiği gibi yapılmıştır.

3.1 Ayrık Ordinatlar Küresel Geometri Transport Denklemi Ağırlaştırılmış Kalıntılar Yöntemi Formu

(2.72)'de zamandan bağımsız, küresel geometri, grup-içi transport denkleminin AOY kullanılarak ayrıklaştırılmış hali gösterilmiştir. Bu denklemi yerel bir uzaysal değişken $\xi \in [-1,+1]$ cinsinden yazarak türetimleri basitleştirebiliriz:

$$\rho(\xi) = \bar{\rho}_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\xi \qquad \textbf{(3.1)}$$

burada $\bar{\rho}_i = (\rho_{i-1/2} + \rho_{i+1/2})/2$ ve $\Delta\rho_i = \rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}$ sırasıyla i'inci ızgara hücresinin orta noktasının orjinden uzaklığını ve bu hücrenin iki ucu arasındaki mesafeyi göstermektedir. Bu birim hücrelerin homojen olduğu varsayımı yapılır.

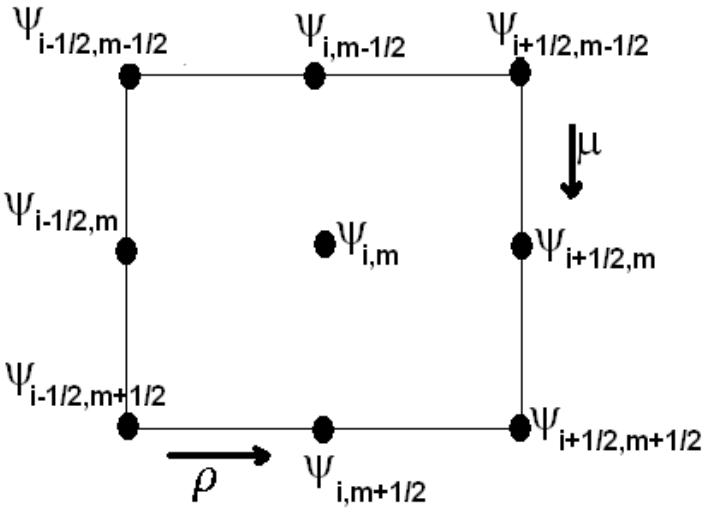
(2.72)'de uzaysal türev ise yerel değişken cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{2}{\Delta \rho_i} \tag{3.2}$$

(2.72) denklemi ρ^2 ile çarpılıp (3.1) ve (3.2) bu denklemde yerine yazılırsa yerel değişken cinsinden grup-içi transport denklemi elde edilir:

$$\frac{2\mu_m}{\Delta \rho_i}\frac{d}{d\xi}[\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)] + \frac{2\rho(\xi)}{w_m}\left[2\alpha_{m+\frac{1}{2}}\psi_m(\xi) - \alpha_m\psi_{m-\frac{1}{2}}(\xi)\right] + \sigma_i\rho^2(\xi)\psi_m(\xi) = \rho^2(\xi)q_m(\xi), \quad -1 \le \xi \le 1 \tag{3.3}$$

Şekil 3.1 (i,m)'inci hücre için, küresel alanda yönsel akıların düğüm noktalarının dizilimini göstermektedir.



Şekil 3.1 : SSEY formülasyonu için birim hücre.

3.1.1 DS2 ve KSSEY formülasyonları için ağırlaştırılmış kalıntılar formu

DS2 ve KSSEY formülasyonları doğrudan (3.3)'e dayanır. Bu denklemde yer alan $\psi_m(\xi)$ ve $\psi_{m-1/2}(\xi)$ yaklaşık çözümlerdir. Bu nedenle (3.3)'ü ızgara aralığının bütün noktalarında sağlamaları beklenmez. Bu yaklaşık çözümler (3.3)'ü ancak integral anlamında sağlar. Bunun için (3.3) bir ağırlık fonksiyonu $w(\xi)$ ile çarpılarak ξ üzerinden integrali alınır. Ağırlık fonksiyonlarının sayısı DSSEY için 2, KSSEY için ise 3 olmak üzere tam olarak bilinmeyenlerin sayısına eşittir. Sonuç olarak aşağıdaki transport denkleminin Ağırlaştırılmış Kalıntılar Yöntemi (AKY) formu veya AKY'nin bir alt sınıfı olan Galerkin formu elde edilir:

$$\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\int_{-1}^{1} w(\xi)\frac{d}{d\xi}[\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)]d\xi + \frac{2}{w_m}\left[2\alpha_{m+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)\psi_m(\xi)d\xi - \alpha_m\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)\psi_{m-\frac{1}{2}}(\xi)d\xi\right] + \sigma_i\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)q_m(\xi)d\xi \quad \textbf{(3.4)}$$

(3.4)'te eşitliğin sol yanında bulunan ilk integrale kısmi integral uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left[w(1)\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_m(1) - w(-1)\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi_m(-1) - \int_{-1}^{1}\frac{dw}{d\xi}\rho^2\psi_m(\xi)d\xi\right] + \frac{2}{w_m}\left[2\alpha_{m+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)\psi_m(\xi)d\xi - \alpha_m\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)\psi_{m-\frac{1}{2}}(\xi)d\xi\right] + \sigma_i\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)q_m(\xi)d\xi \quad \textbf{(3.5)}$$

(3.5) DS2 ve KSSEY formülasyonlarının türetileceği nihai AKY formunu oluşturur.

3.1.2 DS1 formülasyonu için ağırlaştırılmış kalıntılar formu

DS1 formülasyonu için (3.3)'te $\psi_m(\xi)$ ve $\psi_{m-1/2}(\xi)$'e ek yaklaşımlar yapılır:

$$\psi_m(\xi) \cong \psi_{i,m} \cong \frac{1}{2}\left(\psi_{i+1/2,m} + \psi_{i-1/2,m}\right) \quad \textbf{(3.6)}$$

$$\psi_{m-1/2}(\xi) \cong \psi_{i,m-1/2} \quad \textbf{(3.7)}$$

(3.6) ve (3.7), (3.3)'te eşitliğin sol tarafında ikinci terimde (yönsel yeniden dağılım terimi) yerine konulursa:

$$\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\frac{d}{d\xi}[\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)] + \frac{2\rho(\xi)}{w_m}\left[\alpha_{m+\frac{1}{2}}\left(\psi_{i+\frac{1}{2},m} + \psi_{i-\frac{1}{2},m}\right) - \alpha_m\psi_{i,m-\frac{1}{2}}\right] + \sigma_i\rho^2(\xi)\psi_m(\xi) = \rho^2(\xi)q_m(\xi) \quad \textbf{(3.8)}$$

DS1 formülasyonu bu yaklaşık denkleme dayanır.

$\psi_m(\xi)$, (3.8)'i sadece integral anlamında sağlayabilir. Bunun için (3.8) bir ağırlık fonksiyonu $w(\xi)$ ile çarpılır ve ξ üzerinden integrali alınarak AKY formu elde edilir:

$$\begin{aligned} &\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\int_{-1}^{1} w(\xi)\frac{d}{d\xi}[\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)]d\xi \\ &+\frac{2}{w_m}\left[\alpha_{m+\frac{1}{2}}(\psi_{i+\frac{1}{2},m}+\psi_{i-\frac{1}{2},m})\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)d\xi - \right. \\ &\left. \alpha_m\psi_{i,m-\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)d\xi\right] \\ &+\sigma_i\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)q_m(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9)'da eşitliğin sol tarafında yer alan ilk integrale kısmi integral kuralı uygulanırsa:

$$\begin{aligned} &\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left[w(1)\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_m(1) - w(-1)\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi_m(-1) - \int_{-1}^{1}\frac{dw}{d\xi}\rho^2\psi_m(\xi)d\xi\right] \\ &+\frac{2}{w_m}\left[\alpha_{m+\frac{1}{2}}(\psi_{i+\frac{1}{2},m}+\psi_{i-\frac{1}{2},m})\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)d\xi - \right. \\ &\left. \alpha_m\psi_{i,m-\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho(\xi)d\xi\right] \\ &+\sigma_i\int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)\psi_m(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} w(\xi)\rho^2(\xi)q_m(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) DS1 formülasyonunun türetileceği nihai AKY formunu oluşturur.

3.1.3 Özel yön formülasyonları için ağırlaştırılmış kalıntılar formu

Başlangıç yönü ($\mu_{1/2}$=-1) ve yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu için gerekli olan son yön ($\mu_{M+1/2}$=1) özel yönler olarak isimlendirilir. Akış operatörü denklemi (2.31)'de yer alan yönsel yeniden dağılım terimi ($1-\mu^2$)=0 olacağı için yokolur ve bu yönler için transport denkleminin düzlem geometrisindeki formu kullanılır. $\mu_{1/2}$=-1 için (2.73), $\mu_{M+1/2}$=1 için ise aşağıdaki denklem kullanılarak uzaysal ayrıklaştırma yapılır:

$$\frac{d\psi_{M+1/2}(\rho)}{d\rho}+\sigma(\rho)\psi_{M+1/2}(\rho)=q_{M+1/2}(\rho) \tag{3.11}$$

İki denklem arasında tek fark ilk terimin işaretidir. Özel yönler denklemlerinin AKY formu için (2.73) ve (3.11) yerel değişken cinsinden yazılır, ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve yerel değişken üzerinden integralleri alınır. İlk terimlere kısmi integral kuralı uygulandıktan sonra $\mu_{1/2}$=-1 için:

$$-\frac{2}{\Delta r_i}\left[w(1)\psi_{\frac{1}{2}}(1)-w(-1)\psi_{\frac{1}{2}}(-1)-\int_{-1}^{1}\psi_{\frac{1}{2}}(\xi)\frac{dw(\xi)}{d\xi}d\xi\right]+$$
$$\sigma_i\int_{-1}^{1}w(\xi)\psi_{\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi=\int_{-1}^{1}w(\xi)q_{\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi \quad \textbf{(3.12)}$$

elde edilir. $\mu_{M+1/2}$=1 için (3.12)'nin ilk teriminin önündeki eksi işareti artı olur:

$$\frac{2}{\Delta r_i}\left[w(1)\psi_{M+\frac{1}{2}}(1)-w(-1)\psi_{M+\frac{1}{2}}(-1)-\int_{-1}^{1}\psi_{M+\frac{1}{2}}(\xi)\frac{dw(\xi)}{d\xi}d\xi\right]+$$
$$\sigma_i\int_{-1}^{1}w(\xi)\psi_{M+\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi=\int_{-1}^{1}w(\xi)q_{M+\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi \quad \textbf{(3.13)}$$

3.2 Doğrusal (DS2) ve Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yaklaşımları

Lagrange formunda interpolasyon polinomları bilinmeyenleri bir araya getirmek için kullanılır. DSSEY için bilinmeyenler, $\psi_{i-1/2,m}$ ve $\psi_{i+1/2,m}$, KSSEY için bilinmeyenler ise $\psi_{i-1/2,m}$, $\psi_{i,m}$ ve $\psi_{i+1/2,m}$'dir. Sonlu elemanlar yaklaşımı yapıldığında (3.5)'te yer alan yönsel akılar bilinmeyenler cinsinden yazılır:

$$\psi_m(\xi)=\sum_{j=1}^{N+1}h_j^N(\xi)\psi_m^j \quad \textbf{(3.14)}$$

$$\psi_{m-1/2}(\xi)=\sum_{j=1}^{N+1}h_j^N(\xi)\,\psi_{m-1/2}^j \quad \textbf{(3.15)}$$

$$q_m(\xi)=\sum_{j=1}^{N+1}h_j^N(\xi)\,q_m^j \quad \textbf{(3.16)}$$

burada DS2 için N=1, KSSEY için ise N=2'dir. Bu durumda doğrusal ve kuadratik elemanlar için $\psi_m^1=\psi_{i-1/2,m}$ ve $\psi_m^{N+1}=\psi_{i+1/2,m}$'i gösterir. Ek olarak kuadratik elemanlar için $\psi_m^2=\psi_{i,m}$'i göstermektedir. Kaynak terimine de aynı Lagrange polinomları kullanılarak yaklaşım yapılır. Sonlu elemanlar deneme fonksiyonları $(h_j^N(\xi))$ kısaca aşağıdaki formda gösterilebilir:

$$h_j^N(\xi_i)=\delta_{ij}\quad i,j=1,\cdots,N+1 \quad \textbf{(3.17)}$$

burada yerel değişken:

$$\xi_i = -1 + \frac{2(i-1)}{N} \tag{3.18}$$

olarak tanımlanır.

Sonlu eleman deneme fonksiyonları Çizelge 3.1'de gösterildiği gibi eleman boyunca geçerli olan doğrusal ve kuadratik polinomlardır.

Çizelge 3.1 : Sonlu eleman deneme fonksiyonları.

N	$h_1(\xi)$	$h_2(\xi)$	$h_3(\xi)$
1	$\frac{1-\xi}{2}$	$\frac{1+\xi}{2}$	-
2	$\frac{\xi^2-\xi}{2}$	$1-\xi^2$	$\frac{\xi^2+\xi}{2}$

DS2 ve KSSEY formülasyonlarında (3.5)'te yer alan ağırlık fonksiyoları deneme fonksiyonları ile aynı seçilir. Yani:

$$w(\xi) = h_k(\xi) \qquad k = 1,..,N+1 \tag{3.19}$$

(3.14)-(3.16)'da verilen yaklaşımlar ve (3.19), (3.5)'te yerine konulur ve (3.17) kullanılırsa k=1,…,N+1 için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left[\delta_{k(N+1)}\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_m^{N+1} - \delta_{k1}\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi_m^1 - \sum_{j=1}^{N+1} k_{k,j}\psi_m^j\right] +$$
$$\frac{2}{w_m}\left[2\alpha_{m+\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{N+1} l_{k,j}\psi_m^j - \alpha_m \sum_{j=1}^{N+1} l_{k,j}\,\psi^j_{m-\frac{1}{2}}\right] + \sigma_i \sum_{j=1}^{N+1} m_{k,j}\psi_m^j = \tag{3.20}$$
$$\sum_{j=1}^{N+1} m_{k,j} q_m^j$$

(3.20)'de integral terimlerini içeren **K**, **L**, **M**, matris elemanları şu şekilde tanımlanır:

$$k_{k,j} = \int_{-1}^{1} \frac{dh_k}{d\xi}\rho^2(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.21}$$

$$l_{k,j} = \int_{-1}^{1} h_k(\xi)\rho(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.22}$$

$$m_{k,j} = \int_{-1}^{1} h_k(\xi)\rho^2(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.23}$$

(3.21)-(3.23)'te yer alan integraller alındıktan sonra doğrusal elemanlar (DS2) için bu matrislerin açık formu şu şekilde yazılır:

$$K = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{6} - \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) & \left(-\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} - \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{6} - \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) \\ \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} - \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{6} + \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{6} + \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.24)}$$

$$L = \begin{bmatrix} \left(\frac{2\bar{\rho}_i}{3} - \frac{\Delta\rho_i}{6}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i}{3}\right) \\ simetrik & \left(\frac{2\bar{\rho}_i}{3} + \frac{\Delta\rho_i}{6}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.25)}$$

$$M = \begin{bmatrix} \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} - \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{3} + \frac{\Delta\rho_i^2}{15}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{3} + \frac{\Delta\rho_i^2}{60}\right) \\ simetrik & \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{3} + \frac{\Delta\rho_i^2}{15}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.26)}$$

Kuadratik sonlu elemanlar için ise aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$K = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} + \frac{11\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{30} - \frac{3\Delta\rho_i^2}{40}\right) & \left(-\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} + \frac{4\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{15} - \frac{\Delta\rho_i^2}{30}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{6} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{30} + \frac{\Delta\rho_i^2}{40}\right) \\ \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} - \frac{2\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{5} + \frac{\Delta\rho_i^2}{10}\right) & \left(-\frac{8\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{15}\right) & \left(-\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} - \frac{2\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{5} - \frac{\Delta\rho_i^2}{10}\right) \\ \left(-\frac{\bar{\rho}_i^2}{6} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{30} - \frac{\Delta\rho_i^2}{40}\right) & \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{3} + \frac{4\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{15} + \frac{\Delta\rho_i^2}{30}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} + \frac{11\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{30} + \frac{3\Delta\rho_i^2}{40}\right) \end{bmatrix}$$

(3.27)

$$L = \begin{bmatrix} \left(\frac{4\bar{\rho}_i}{15} - \frac{\Delta\rho_i}{10}\right) & \left(\frac{2\bar{\rho}_i}{15} - \frac{\Delta\rho_i}{15}\right) & \left(-\frac{\bar{\rho}_i}{15}\right) \\ & \left(\frac{16\bar{\rho}_i}{15}\right) & \left(\frac{2\bar{\rho}_i}{15} + \frac{\Delta\rho_i}{15}\right) \\ simetrik & & \left(\frac{4\bar{\rho}_i}{15} + \frac{\Delta\rho_i}{10}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.28)}$$

$$M = \begin{bmatrix} \left(\frac{4\bar{\rho}_i^2}{15} - \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{5} + \frac{3\Delta\rho_i^2}{70}\right) & \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{15} - \frac{2\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{15} + \frac{\Delta\rho_i^2}{70}\right) & \left(-\frac{\bar{\rho}_i^2}{15} - \frac{\Delta\rho_i^2}{140}\right) \\ & \left(\frac{16\bar{\rho}_i^2}{15} + \frac{4\Delta\rho_i^2}{105}\right) & \left(\frac{2\bar{\rho}_i^2}{15} + \frac{2\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{15} + \frac{\Delta\rho_i^2}{70}\right) \\ simetrik & & \left(\frac{4\bar{\rho}_i^2}{15} + \frac{\bar{\rho}_i \Delta\rho_i}{5} + \frac{3\Delta\rho_i^2}{70}\right) \end{bmatrix}$$

(3.29)

DS2 ve KSSEY formülasyonlarının başlangıç yönü ($\mu_{1/2}$=-1) denklemleri için aşağıdaki yaklaşımlar kullanılır:

$$\psi_{1/2}(\xi) = \sum_{j=1}^{N+1} h_j^N(\xi)\psi_{1/2}^j \qquad \textbf{(3.30)}$$

$$q_{1/2}(\xi) = \sum_{j=1}^{N+1} h_j^N(\xi)\, q_{1/2}^j \qquad \textbf{(3.31)}$$

(3.30) ve (3.31) yaklaşımları ile (3.19), (3.12)'de yerine konulur ve (3.17) kullanılırsa k=1,…, N+1 için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-\frac{2}{\Delta r_i}\left[\delta_{k(N+1)}\psi_{\frac{1}{2}}^{N+1} - \delta_{k,1}\psi_{\frac{1}{2}}^{1} - \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{k}_{k,j}\psi_{\frac{1}{2}}^{j}\right] + \sigma_i \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{m}_{k,j}\psi_{\frac{1}{2}}^{j} = \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{m}_{k,j}q_{\frac{1}{2}}^{j} \qquad \textbf{(3.32)}$$

Benzer şekilde $\mu_{M+1/2}$=1 yönü için (3.13) denkleminden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{2}{\Delta r_i}\left[\delta_{k(N+1)}\psi_{M+\frac{1}{2}}^{N+1} - \delta_{k,1}\psi_{M+\frac{1}{2}}^{1} - \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{k}_{k,j}\psi_{M+\frac{1}{2}}^{j}\right] + \sigma_i \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{m}_{k,j}\psi_{M+\frac{1}{2}}^{j} = \sum_{j=1}^{N+1}\tilde{m}_{k,j}q_{M+\frac{1}{2}}^{j} \qquad \textbf{(3.33)}$$

Özel yönlerde yönsel yeniden dağılım terimi olmadığı için denklemlerde $\tilde{\boldsymbol{L}}$ matrisi yoktur. (3.32) ve (3.33)'te yer alan ve integralleri içeren $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ ve $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ matris elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\tilde{k}_{k,j} = \int_{-1}^{1} \frac{dh_k}{d\xi} h_j(\xi) d\xi \tag{3.34}$$

$$\tilde{m}_{k,j} = \int_{-1}^{1} h_k(\xi) h_j(\xi) d\xi \tag{3.35}$$

(3.34) ve (3.35)'te yer alan integraller k=1,2 ve j=1,2 için alınır ve doğrusal elemanlar (DS2) için bu matrislerin açık formu elde edilir:

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ simetrik & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

(3.34) ve (3.35)'te yer alan integraller k=1,2,3 ve j=1,2,3 için alındıktan sonra kuadratik elemanlar için aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ & \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ simetrik & & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

3.3 Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yaklaşımı (DS1)

DS1 formülasyonunda ağırlık fonksiyonları $\mu_m > 0$ ve $\mu_m < 0$ için farklıdır.

$$w_1(\xi) = 1, \quad w_2(\xi) = h_2(\xi), \qquad \mu_m > 0 \tag{3.40}$$

$$w_1(\xi) = 1, \quad w_2(\xi) = h_1(\xi), \qquad \mu_m < 0 \tag{3.41}$$

Bu nedenle bir n değişkeni tanımlamak uygun olacaktır:

$$n = \begin{cases} 1, & \mu_m > 0 \\ 2, & \mu_m < 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

(3.14), (3.16), (3.40) ve (3.41)'i (3.10)'da yerine koyacak olursak:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left[(1-\delta_{2k}\delta_{2n})\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi^2_m - (1-\delta_{2k}\delta_{1n})\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi^1_m - \sum_{j=1}^{N+1} k_{k,j}\psi^j_m\right] \\ + \frac{2}{w_m}\left[\alpha_{m+\frac{1}{2}} l_k \sum_{j=1}^{2}\psi^j_m - \alpha_m l_k \bar{\psi}_{m-1/2}\right] \\ + \sigma_i \sum_{j=1}^{2} m_{k,j}\psi^j_m = \sum_{j=1}^{2} m_{k,j} q^j_m \end{aligned} \tag{3.43}$$

burada

$$\bar{\psi}_{m-1/2} = \left(\psi^1_{m-1/2} + \psi^2_{m-1/2}\right)/2 \tag{3.44}$$

olarak tanımlanır. (3.43)'te yer alan **K** ve **M** matrislerinin elemanları şunlardır:

$$k_{k,j} = \int_{-1}^{1} \frac{dw_k}{d\xi}\rho^2(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.45}$$

$$m_{k,j} = \int_{-1}^{1} w_k(\xi)\rho^2(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.46}$$

(3.25) ve (3.28)'de DS2 ve KSSEY için tanımlanan kare matris **L**, DS1 formülasyonunda 2 boyutlu sütun matrisine dönüşür:

$$l_k = \int_{-1}^{1} w_k(\xi)\rho(\xi)d\xi \tag{3.47}$$

(3.45)-(3.47)'de integraller alındıktan sonra bu matrislerin açık formu elde edilir:

$$K = (-1)^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} - \frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{6} + \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) & \left(\frac{\bar{\rho}_i^2}{2} + \frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{6} + \frac{\Delta\rho_i^2}{24}\right) \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2\bar{\rho}_i \\ \bar{\rho}_i + (-1)^{n-1}\frac{\Delta\rho_i}{6} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$M = \begin{bmatrix} \left(\bar{\rho}_i^2 - \frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{3} + \frac{\Delta\rho_i^2}{12}\right) & \left(\bar{\rho}_i^2 + \frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{3} + \frac{\Delta\rho_i^2}{12}\right) \\ \left((1+\delta_{n2})\frac{\bar{\rho}_i^2}{3} + (1+3\delta_{n2})\frac{\Delta\rho_i^2}{60} + \delta_{n2}(-1)^{n-1}\frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{3}\right) & \left((1+\delta_{n1})\frac{\bar{\rho}_i^2}{3} + (1+3\delta_{n1})\frac{\Delta\rho_i^2}{60} + \delta_{n1}(-1)^{n-1}\frac{\bar{\rho}_i\Delta\rho_i}{3}\right) \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

DS1 için özel yön ($\mu_{1/2} = -1$ ve $\mu_{M+1/2} = 1$) denklemleri benzer şekilde türetilir. (3.30), (3.31) ve (3.40), (3.41) denklemleri (3.12) ve (3.13)'te yerine konur ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-\frac{2}{\Delta\rho_i}\left[\delta_{k1}\psi_{\frac{1}{2}}^2 - \psi_{\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j=1}^{2}\tilde{k}_{k,j}\psi_{\frac{1}{2}}^j\right] + \sigma_i\sum_{j=1}^{2}\tilde{m}_{k,j}\psi_{\frac{1}{2}}^j = \sum_{j=1}^{2}\tilde{m}_{k,j}q_{\frac{1}{2}}^j \tag{3.51}$$

Benzer şekilde $\mu_{M+1/2} = 1$ yönü için (3.13)'ten aşağıdaki denklem türetilir:

$$\frac{2}{\Delta\rho_i}\left[\delta_{k1}\psi^2_{M+\frac{1}{2}} - \psi^1_{M+\frac{1}{2}} - \sum_{j=1}^{2}\tilde{k}_{k,j}\psi^j_{M+\frac{1}{2}}\right] + \sigma_i\sum_{j=1}^{2}\widetilde{m}_{k,j}\psi^j_{M+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{2}\widetilde{m}_{k,j}q^j_{M+\frac{1}{2}} \tag{3.52}$$

(3.51) ve (3.52)'de yer alan ve integralleri içeren $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ ve $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ matris elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\tilde{k}_{k,j} = \int_{-1}^{1}\frac{dw_k}{d\xi}h_j(\xi)d\xi \tag{3.53}$$

$$\widetilde{m}_{k,j} = \int_{-1}^{1}w_k(\xi)h_j(\xi)d\xi \tag{3.54}$$

(3.53) ve (3.54)'teki integralleri aldıktan sonra DS1 yönteminin özel yön formülasyonları için matrislerin açık formu elde edilir:

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{1}{3} + \delta_{n2}\frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{3} + \delta_{n1}\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

(3.56)'da $\mu_{1/2} = -1$ için n=2 ve $\mu_{M+1/2} = 1$ için n=1'dir.

Burada tarif edilen DS1 yöntemi ile TIMEX kodunda tarif edilen DSSEY başlangıç yönü denklemleri hariç aynı denklemleri verir [68]. TIMEX kodu özel yönler için basamak fonksiyonu yaklaşımı yöntemi kullanır:

$$\psi_{m+1/2}(\rho) = \psi_{m-1/2}(\rho) = \frac{1}{2}\left(\psi_{m,i+1/2} + \psi_{m,i-1/2}\right) \tag{3.57}$$

burada başlangıç yönü için m=1 ve son yön için m=M'dir. $\alpha_{1/2=}$ $\alpha_{M+1/2}$=0 olduğu için (2.66)'dan:

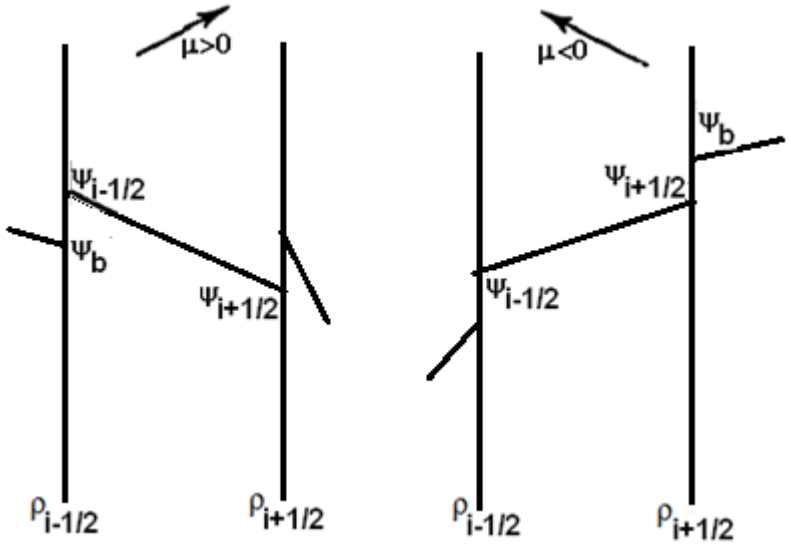
$$\frac{\alpha_{m+1/2}}{w_m} = -\mu_m, \quad m = 1, M \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.58), (3.10)'da yerine konulur. Ağırlık fonksiyonları olarak (3.40) ve (3.41) kullanılır ve yukarıda tarif edilen yol izlenerek özel yön formülasyonları elde edilir. Basamak başlangıç yöntemi (3.12) ve (3.13)'ten yola çıkılarak türetilen özel yön formülasyonlarından daha az hassaslıkta sonuç üretir. Fakat bu kayıp oldukça düşük düzeydedir [80]. SPDOT programında her iki seçenek mevcut olsa da bu tez çalışmasında sayısal analizlerde düzlem geometri transport denkleminden yola çıkılarak türetilen özel yön formülasyonları kullanılmıştır.

DS2 formülasyonunda ağırlık fonksiyonları (3.19)'a göre değil de DS1 formülasyonunda olduğu gibi (3.40) ve (3.41)'e göre seçildiğinde ve DS2 formülasyonu buna göre türetildiğinde etkin çoğaltma katsayısı ve skaler akı sonuçları değişmez. Bunu gözlemlemek için SPDOT programında değişiklik yapılarak LD3 isimli yeni bir program yazılmıştır (EK B3). LD3 ile yapılan sayısal deneylerde bu durum doğrulanmıştır. Bunun sebebi aynı vektör uzayına ait ağırlık fonksiyonlarının seçilmesidir.

3.4 Doğrusal Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri

DSSEY denklemlerinin türetimi $\mu_m > 0$ ve $\mu_m < 0$ için farklıdır. Şekil 3.2'de görüldüğü gibi Ψ_b önceki ızgara hücre sınırından gelen yönsel akı olarak tanımlanır. Ψ_b, $\mu_m > 0$ için (i-1)'inci hücrenin sağ kenarındaki yönsel akıdır. $\mu_m < 0$ için ise (i+1)'inci hücrenin sol kenarındaki yönsel akıdır. (i,m)'inci hücre için denklemler aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2 : (i,m)'inci hücrede yönsel akının DSSEY gösterimi.

3.4.1 DS2 formülasyonu

DS2 yönteminde $\mu_m>0$ için (3.20)'de k=1 alındığında Kronecker deltalı ikinci terimde yönsel akı $\psi_m^1 = \psi_b$ alınır. Böylece süreksizlik sağlanır. $\mu_m>0$ ve k=2 alındığında (3.20) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

Bu sistemin elemanları aşağıdaki denklemlerden bulunur:

$$a_{1,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{1,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{1,j} + \sigma_i m_{1,j}\,, \qquad j = 1,2 \tag{3.60}$$

$$a_{2,j} = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\delta_{2j-} k_{2,j}\right) + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{2,j} + \sigma_i m_{2,j}\,, \qquad j = 1,2 \tag{3.61}$$

$$f_k = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi_b\delta_{k1} + \frac{2\alpha_m}{w_m}\sum_{j=1}^{2} l_{k,j}\psi^j_{m-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2} m_{k,j}q_m^j\,, k = 1,2 \tag{3.62}$$

$\mu_m<0$ için (3.20)'de k=2 alındığında, Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi_m^2 = \psi_b$ alınır. Böylece süreksizlik sağlanır. $\mu_m<0$ için k=1 alındığında (3.20) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir:

$$\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_m^2 \\ \psi_m^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.63)}$$

Bu sistemin elemanları aşağıdaki denklemlerden bulunur:

$$a_{2,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{2,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{2,j} + \sigma_i m_{2,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.64)}$$

$$a_{1,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\delta_{1j} + k_{1,j}\right) + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{1,j} + \sigma_i m_{1,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.65)}$$

$$f_k = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_b\delta_{k2} + \frac{2\alpha_m}{w_m}\sum_{j=1}^{2} l_{k,j}\psi^j_{m-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{2} m_{k,j}q^j_m\,, k = 1,2 \quad \textbf{(3.66)}$$

DS2 yönteminin başlangıç yönü denklemleri yukarıda μ_m<0 için tarif edildiği gibi süreksizlik sağlanarak (3.32)'den elde edilir. (3.32)'de k=2 alındığında Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi^2_{1/2} = \psi_b$ alınır:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{2,2} & \tilde{a}_{2,1} \\ \tilde{a}_{1,2} & \tilde{a}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^2_{1/2} \\ \psi^1_{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.67)}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{2,j} + \sigma_i\tilde{m}_{2,j}\ ,\ j = 1,2 \quad \textbf{(3.68)}$$

$$\tilde{a}_{1,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{1j} + \tilde{k}_{1j}\right) + \sigma_i\tilde{m}_{1,j}\ ,\ j = 1,2 \quad \textbf{(3.69)}$$

$$f_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b\delta_{k2} + \sum_{j=1}^{2}\tilde{m}_{k,j}q^j_{\frac{1}{2}}\,,\ k = 1,2 \quad \textbf{(3.70)}$$

Benzer şekilde $\mu_{M+1/2}$=1 yönü denklemleri yukarıda μ_m>0 için tarif edildiği gibi süreksizlik sağlanarak (3.33)'ten elde edilir. (3.33)'te k=1 alındığında ise Kronecker deltalı ikinci terimde yönsel akı $\psi^1_{M+1/2} = \psi_b$ alınır:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \tilde{a}_{1,2} \\ \tilde{a}_{2,1} & \tilde{a}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^1_{M+1/2} \\ \psi^2_{M+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.71)}$$

$$\tilde{a}_{1,j} = -\frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{1,j} + \sigma_i \tilde{m}_{1,j}\,,\ \ j = 1{,}2 \tag{3.72}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{2,j-}\tilde{k}_{2,j}\right) + \sigma_i \tilde{m}_{2,j}\,,\ \ j = 1{,}2 \tag{3.73}$$

$$\tilde{f}_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b \delta_{k,1} + \sum_{j=1}^{2} \tilde{m}_{k,j} q^j_{M+1/2}\ ,\ \ j = 1{,}2 \tag{3.74}$$

DS2 için yukarıda türetilen denklemler açık olarak yazıldığında aşağıda verilen doğrusal sistemleri oluşturur:

$\mu_m > 0$ için:

$$\begin{bmatrix} \mu_m z_1 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_2 + \sigma_i z_3 & \mu_m z_4 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 \\ -\mu_m z_1 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 & \mu_m (z_7 - z_4) + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_8 + \sigma_i z_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{2w_m}\left(z_2 \psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_5 \psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + \mu_m z_9 \psi_b + q_{i-\frac{1}{2},m} z_3 + q_{i+\frac{1}{2},m} z_6 \\ \dfrac{\alpha}{2w_m}\left(z_5 \psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_8 \psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + q_{i-\frac{1}{2},m} z_6 + q_{i+\frac{1}{2},m} z_{10} \end{bmatrix}$$

(3.75)

$\mu_m < 0$ için:

$$\begin{bmatrix} \mu_m (z_1 - z_9) + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_2 + \sigma_i z_3 & \mu_m z_4 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 \\ -\mu_m z_1 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 & -\mu_m z_4 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_8 + \sigma_i z_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{2w_m}\left(z_2 \psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_5 \psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + q_{i-\frac{1}{2},m} z_3 + q_{i+\frac{1}{2},m} z_6 \\ \dfrac{\alpha}{2w_m}\left(z_5 \psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_8 \psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) - \mu_m z_7 \boldsymbol{\psi_b} + q_{i-\frac{1}{2},m} z_6 + q_{i+\frac{1}{2},m} z_{10} \end{bmatrix}$$

(3.76)

(3.75) ve (3.76)'da yer alan geometrik fonksiyonların (z) açılımı Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2 : DS2 ve DS1 denklemlerinde kullanılan geometrik fonksiyonlar.

	DS2	DS1
z_1	$\Delta\rho_i - 4\rho_i + \frac{12\rho_i^2}{\Delta\rho_i}$	$\Delta\rho_i(3\rho_+^2 + 4\rho_+\rho_- + 3\rho_-^2)$
z_2	$8(-\Delta\rho_i + 4\rho_i)$	$\Delta\rho_i(12\rho_+^2 + 6\rho_+\rho_- + 2\rho_-^2)$
z_3	$0.8((\Delta\rho_i)^2 - 5(\Delta\rho_i)\rho_i + 10\rho_i^2)$	$-5(\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- + 3\rho_-^2)$
z_4	$\Delta\rho_i + 4\rho_i + \frac{12\rho_i^2}{\Delta\rho_i}$	$5(9\rho_+^2 - 2\rho_+\rho_- - \rho_-^2)$
z_5	$16\rho_i$	$20\Delta\rho_i(2\rho_+ + \rho_-)$
z_6	$\frac{(\Delta\rho_i)^2}{5} + 4\rho_i^2$	$\Delta\rho_i(2\rho_+^2 + 6\rho_+\rho_- + 12\rho_-^2)$
z_7	$\frac{24\rho_{i+1/2}^2}{\Delta\rho_i}$	$5(\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- - 9\rho_-^2)$
z_8	$8(\Delta\rho_i + 4\rho_i)$	$5(3\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- + \rho_-^2)$
z_9	$\frac{24\rho_{i-1/2}^2}{\Delta\rho_i}$	$20\Delta\rho_i(\rho_+ + 2\rho_-)$
z_{10}	$0.8((\Delta\rho_i)^2 + 5(\Delta\rho_i)\rho_i + 10\rho_i^2)$	-
$A_{i-1/2}$	-	$4\pi\rho_-^2$
$A_{i+1/2}$	-	$4\pi\rho_+^2$
ΔA_i	-	$A_{i+1/2} - A_{i-1/2}$
$V_{i-1/2}$	-	$\frac{\pi}{3}\Delta\rho_i(\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- + 3\rho_-^2)$
$V_{i+1/2}$	-	$\frac{\pi}{3}\Delta\rho_i(3\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- + \rho_-^2)$

Özel yönler için ise aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir.

$\mu_{1/2} = -1$ için:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\Delta\rho_i} + 2\sigma_i & -\frac{3}{\Delta\rho_i} + \sigma_i \\ \frac{3}{\Delta\rho_i} + \sigma_i & \frac{3}{\Delta\rho_i} + 2\sigma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} \\ \frac{6}{\Delta\rho_i}\psi_b + q_{i-\frac{1}{2}} + 2q_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.77)}$$

$\mu_{M+1/2} = 1$ için:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\Delta\rho_i} + 2\sigma_i & \frac{3}{\Delta\rho_i} + \sigma_i \\ -\frac{3}{\Delta\rho_i} + \sigma_i & \frac{3}{\Delta\rho_i} + 2\sigma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\Delta\rho_i}\psi_b + 2q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} \\ q_{i-\frac{1}{2}} + 2q_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.78)}$$

3.4.2 DS1 formülasyonu

Benzer şekilde DS1 yönteminde $\mu_m>0$ için (3.43)'te k=1 alındığında Kronecker deltalı ikinci terimde yönsel akı $\psi_m^1 = \psi_b$ alınır. Böylece süreksizlik sağlanır. $\mu_m>0$ ve k=2 alındığında (3.43) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir:

$$a_{1,j} = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\delta_{2j-}k_{1,j}\right) + \frac{2\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}l_1 + \sigma_i m_{1,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.79)}$$

$$a_{2,j} = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\delta_{2j-}k_{2,j}\right) + \frac{2\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}l_2 + \sigma_i m_{2,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.80)}$$

$$f_k = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\psi_b\delta_{k1} + \frac{2\alpha_m}{w_m}l_k\bar{\psi}_{m-1/2} + \sum_{j=1}^{2} m_{k,j}q_m^j\,, \qquad k = 1,2 \quad \textbf{(3.81)}$$

$\mu_m<0$ için (3.43)'te k=1 alındığında, Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi_m^2 = \psi_b$ alınır. Böylece süreksizlik sağlanır. $\mu_m<0$ için k=2 alındığında (3.43) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir:

$$a_{1,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\delta_{1j} + k_{1,j}\right) + \frac{2\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}l_1 + \sigma_i m_{1,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.82)}$$

$$a_{2,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\left(\rho^2_{i-\frac{1}{2}}\delta_{1j} + k_{2,j}\right) + \frac{2\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}l_2 + \sigma_i m_{2,j}\,, \qquad j = 1,2 \quad \textbf{(3.83)}$$

$$f_k = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_b\delta_{k1} + \frac{2\alpha_m}{w_m}l_k\bar{\psi}_{m-1/2} + \sum_{j=1}^{2} m_{k,j}q_m^j\,, \quad k = 1,2 \quad \textbf{(3.84)}$$

DS1 yönteminin başlangıç yönü denklemleri yukarıda $\mu_m<0$ için tarif edildiği gibi süreksizlik sağlanarak (3.51)'den elde edilir. (3.51)'de k=1 alındığında, Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi_{1/2}^2 = \psi_b$ alınır:

$$\tilde{a}_{1,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{1j} + \tilde{k}_{1j}\right) + \sigma_i \tilde{m}_{1,j} \ , \ j = 1,2 \qquad \textbf{(3.85)}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{1j} + \tilde{k}_{2j}\right) + \sigma_i \tilde{m}_{2,j} \ , \ j = 1,2 \qquad \textbf{(3.86)}$$

$$f_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{2} \tilde{m}_{k,j} q_{\frac{1}{2}}^{j} \ , \ k = 1,2 \qquad \textbf{(3.87)}$$

Benzer şekilde $\mu_{M+1/2}=1$ yönü denklemleri yukarıda $\mu_m>0$ için tarif edildiği gibi k=1 alındığında (3.52)'de ikinci terimde yönsel akı $\psi_{M+1/2}^1 = \psi_b$ alınır. Böylece süreksizlik sağlanır. k=2 alındığında (3.52) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal sistem elde edilir:

$$\tilde{a}_{1,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{2j} - \tilde{k}_{1j}\right) + \sigma_i \tilde{m}_{1,j} \ , \ j = 1,2 \qquad \textbf{(3.88)}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = -\frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{1j} + \tilde{k}_{2j}\right) + \sigma_i \tilde{m}_{2,j} \ , \ j = 1,2 \qquad \textbf{(3.89)}$$

$$f_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{2} \tilde{m}_{k,j} q_{M+\frac{1}{2}}^{j} \ , \ k = 1,2 \qquad \textbf{(3.90)}$$

DS1 için yukarıda türetilen denklemler açık olarak yazıldığında, düzenlendikten sonra aşağıda verilen doğrusal sistemleri oluştururlar:

$\mu_m > 0$ için:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} + \sigma_i V_{i-\frac{1}{2}} & \mu_m A_{i+\frac{1}{2}} + \Delta A_i \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} + \sigma_i V_{i+\frac{1}{2}} \\ \mu_m z_3 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_1 & \mu_m z_4 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{i-\frac{1}{2}} V_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} V_{i+\frac{1}{2}} + \Delta A_i \dfrac{\alpha}{w_m} \psi_{m-\frac{1}{2}} + \mu_m A_{i-\frac{1}{2}} \psi_b \\ q_{i-\frac{1}{2}} z_1 + q_{i+\frac{1}{2}} z_2 + z_5 \dfrac{\alpha}{w_m} \psi_{m-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

(3.91)

$\mu_m < 0$ için:

$$\begin{bmatrix} -\mu_m A_{i-\frac{1}{2}} + \Delta A_i \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} + \sigma_i V_{i-\frac{1}{2}} & \Delta A_i \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} + \sigma_i V_{i+\frac{1}{2}} \\ \mu_m z_7 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_9 + \sigma_i z_6 & \mu_m z_8 + \dfrac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_9 + \sigma_i z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{i-\frac{1}{2}} V_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} V_{i+\frac{1}{2}} + \Delta A_i \dfrac{\alpha}{w_m} \psi_{m-\frac{1}{2}} - \mu_m A_{i+\frac{1}{2}} \psi_b \\ q_{i-\frac{1}{2}} z_6 + q_{i+\frac{1}{2}} z_1 + z_9 \dfrac{\alpha}{w_m} \psi_{m-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

(3.92)

(3.91) ve (3.92)'de yer alan geometrik fonksiyonların (z) açılımı Çizelde 3.2'de verilmiştir. Çizelge 3.2'de, DS1 yönteminin geometrik fonksiyonlarının gösteriminde kolaylık olsun diye $\rho_+ = \rho_{i+1/2}$ ve $\rho_- = \rho_{i-1/2}$ kısaltmaları yapılmıştır.

Özel yönler için doğrusal sistemler ise aşağıda verilmektedir:

$\mu_{1/2} = -1$ için:

$$\begin{bmatrix} 2 + \sigma_i \Delta\rho_i & \sigma_i \Delta\rho_i \\ 3 + 2\sigma_i \Delta\rho_i & -3 + \sigma_i \Delta\rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}\right) \Delta\rho_i + 2\psi_b \\ \Delta\rho_i \left(2q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.93)}$$

$\mu_{M+1/2} = 1$ için:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i \Delta\rho_i & 2 + \sigma_i \Delta\rho_i \\ -3 + \sigma_i \Delta\rho_i & 3 + 2\sigma_i \Delta\rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2}} \\ \psi_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_i \left(q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} \right) + 2\psi_b \\ \Delta\rho_i \left(q_{i-\frac{1}{2}} + 2q_{i+\frac{1}{2}} \right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.94)}$$

DS1 formülasyonu kullanılarak LQD1 isimli bilgisayar programı yazılmıştır (EK B1). Bu programda özel yönler için (3.93) ve (3.94) denklemlerinin yanında basamak fonksiyonu yaklaşımı da seçenek olarak mevcuttur. Ayrıca LQD1 yukarıda tarif edilen DS1 formülasyonu benzeri bir yolla türetilen kuadratik SSEY'ni de içermektedir. Ancak kuadratik yöntemle yapılan sayısal analizlerde bu yöntemin bazı problemlerde ve koşullarda kararlı sonuçlar üretmediği gözlenmiştir. Bu kararsızlık küre merkezi ρ=0 yanlışlığı olarak isimlendirilen durumdan kaynaklanmıştır. Küre merkezinde yönsel akıda küçük yanlışlıklar iterasyon sayısı artıkça büyümekte ve diğer noktalara da yayılmakta sonuçta sayısal taşma (sayısal değerlerin çok büyük veya çok küçük olması nedeniyle hesaplama bölgesinin dışına çıkması) hatasına neden olmaktadır. Bunu önlemek için (2.114)'te verilen merkez koşulu yerine (2.115)'te verilen koşul uygulanmış, bir miktar düzelme sağlanmış ama kararsızlık tam olarak giderilememiştir. Bu kararsızlığın nedeni olarak $\psi_{m-1/2}(\xi)$ için (3.15)'te verilen Lagrange polinomları kullanılarak süreksiz sonlu elemanlar yaklaşımı yerine (3.44)'te verilen EF yaklaşımının kullanılması olduğu düşünülmüş ve aşağıda tarif edilen KSSEY geliştirilmiştir. Bu yöntemde kararsızlık sorununa rastlanmamıştır.

3.5 Kuadratik (İkinci Derece) Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri

KSSEY'nde μ_m>0 için (3.20)'de k=1 alındığında Kronecker deltalı ikinci terimde yönsel akı $\psi_m^1 = \psi_b$ alınır. Burada ψ_b (i-1)'inci hücrenin 3. noktasındaki yönsel akıyı göstermektedir. İlk hücre (i=1) olduğunda ise ψ_b merkez koşulundan yararlanarak bulunur. Böylece süreksizlik sağlanır. μ_m>0 ve k=2 veya k=3 alındığında (3.20) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak aşağıdaki doğrusal denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \\ \psi_m^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.95)}$$

$$a_{1,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{1,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{1,j} + \sigma_i m_{1,j} \ , \ j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.96)}$$

$$a_{2,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{2,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{2,j} + \sigma_i m_{2,j} \ , \ j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.97)}$$

$$a_{3,j} = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} \left(\rho_{i+\frac{1}{2}}^2 \delta_{3j} - k_{3,j} \right) + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{3,j} + \sigma_i m_{3,j} \ , \ j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.98)}$$

$$f_k = \frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} \rho_{i-\frac{1}{2}}^2 \psi_b \delta_{k1} + \frac{2\alpha_m}{w_m} \sum_{j=1}^{3} l_{k,j} \psi^j{}_{m-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{3} m_{k,j} q_m^j \ , \ k = 1,2,3 \quad \textbf{(3.99)}$$

$\mu_m<0$ için (3.20)'de k=3 alındığında, Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi_m^3 = \psi_b$ alınır. Burada ψ_b (i+1)'inci hücrenin ilk noktasındaki yönsel akıyı göstermektedir. Son hücrede (i=I) ise ψ_b sınır koşulundan bulunur. Böylece süreksizlik sağlanır. $\mu_m<0$ için k=1 veya k=2 alındığında (3.20) değiştirilmeden bırakılır. Sonuç olarak (3.95)'teki doğrusal sistem elde edilir. Bu sistemin elemanları aşağıda verilmiştir:

$$a_{3,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{3,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{3,j} + \sigma_i m_{3,j} \, , \qquad j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.100)}$$

$$a_{2,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} k_{2,j} + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{2,j} + \sigma_i m_{2,j} \, , \qquad j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.101)}$$

$$a_{1,j} = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i} \left(\rho_{i-\frac{1}{2}}^2 \delta_{1j} + k_{1,j} \right) + \frac{4\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} l_{1,j} + \sigma_i m_{1,j} \ , \ j = 1,2,3 \quad \textbf{(3.102)}$$

$$f_k = -\frac{2\mu_m}{\Delta\rho_i}\rho^2_{i+\frac{1}{2}}\psi_b\delta_{k3} + \frac{2\alpha_m}{w_m}\sum_{j=1}^{3} l_{k,j}\psi^j_{m-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{3} m_{k,j}q^j_m\,,\ \ k = 1,2,3 \tag{3.103}$$

Benzer şekilde özel yönler için aşağıdaki matris elemanları türetilir. $\mu_{1/2}$=-1 için: (3.32)'de k=3 alındığında, Kronecker deltalı ilk terimde yönsel akı $\psi^3_{1/2} = \psi_b$ alınır:

$$\tilde{a}_{3,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{3,j} + \sigma_i\tilde{m}_{3,j}\ \ ,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.104}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{2,j} + \sigma_i\tilde{m}_{2,j}\ \ ,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.105}$$

$$\tilde{a}_{1,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{1j} + \tilde{k}_{1,j}\right) + \sigma_i\tilde{m}_{1,j}\,,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.106}$$

$$\tilde{f}_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b\delta_{k3} + \sum_{j=1}^{3}\tilde{m}_{k,j}q^j_{\frac{1}{2}}\,,\ \ k = 1,2,3 \tag{3.107}$$

$\mu_{M+1/2}$=1 için (3.33)'te k=1 alındığında Kronecker deltalı ikinci terimde yönsel akı $\psi^1_{M+1/2} = \psi_b$ alınır:

$$\tilde{a}_{1,j} = -\frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{1,j} + \sigma_i\tilde{m}_{1,j}\,,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.108}$$

$$\tilde{a}_{2,j} = -\frac{2}{\Delta\rho_i}\tilde{k}_{2,j} + \sigma_i\tilde{m}_{2,j}\,,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.109}$$

$$\tilde{a}_{3,j} = \frac{2}{\Delta\rho_i}\left(\delta_{3j-}\tilde{k}_{3,j}\right) + \sigma_i\tilde{m}_{3,j}\,,\ \ j = 1,2,3 \tag{3.110}$$

$$\tilde{f}_k = \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b\delta_{k1} + \sum_{j=1}^{3}\tilde{m}_{k,j}q^j_{M+1/2}\ \ ,\ \ k = 1,2,3 \tag{3.111}$$

KSSEY için yukarıda türetilen denklemler açık olarak yazıldığında, aşağıda verilen doğrusal sistemleri oluştururlar:

$\mu_m > 0$ için:

$$\begin{bmatrix} \mu_m z_1 + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_2 + \sigma_i z_3 & \mu_m z_4 + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 & \mu_m z_7 + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_8 + \sigma_i z_9 \\ \mu_m z_{10} + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_5 + \sigma_i z_6 & -4\mu_m z_8 - \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} 16 z_8 + \sigma_i z_{11} & \mu_m z_{12} + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_{13} + \sigma_i z_{14} \\ \mu_m z_{15} + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_8 + \sigma_i z_9 & \mu_m z_{16} + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_{13} + \sigma_i z_{14} & \mu_m z_{17} + \frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m} z_{18} + \sigma_i z_{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i,m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_2\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_5\psi_{i,m-\frac{1}{2}} + z_8\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + \mu_m z_{20}\psi_b + q_{i-\frac{1}{2},m} z_3 + q_{i,m} z_6 + q_{i+\frac{1}{2},m} z_9 \\ \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_5\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} - 16 z_8\psi_{i,m-\frac{1}{2}} + z_{13}\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + q_{i-\frac{1}{2},m} z_6 + q_{i,m} z_{11} + q_{i+\frac{1}{2},m} z_{14} \\ \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_8\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} + z_{13}\psi_{i,m-\frac{1}{2}} + z_{18}\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right) + q_{i-\frac{1}{2},m} z_9 + q_{i,m} z_{14} + q_{i+\frac{1}{2},m} z_{19} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.112)}$$

$\mu_m < 0$ için:

$$\begin{bmatrix} \mu_m(z_{11}-z_{20})+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_2+\sigma_i z_3 & \mu_m z_4+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_5+\sigma_i z_6 & \mu_m z_7+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_8+\sigma_i z_9 \\ \mu_m z_{10}+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_5+\sigma_i z_6 & -4\mu_m z_8-\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}16z_8+\sigma_i z_{11} & \mu_m z_{12}+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_{13}+\sigma_i z_{14} \\ \mu_m z_{15}+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_8+\sigma_i z_9 & \mu_m z_{16}+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_{13}+\sigma_i z_{14} & \mu_m(z_{17}-z_{21})+\frac{\alpha_{m+\frac{1}{2}}}{w_m}z_{18}+\sigma_i z_{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i,m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_2\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}+z_5\psi_{i,m-\frac{1}{2}}+z_8\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right)+q_{i-\frac{1}{2},m}z_3+q_{i,m}z_6+q_{i+\frac{1}{2},m}z_9 \\ \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_5\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}-16z_8\psi_{i,m-\frac{1}{2}}+z_{13}\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right)+q_{i-\frac{1}{2},m}z_6+q_{i,m}z_{11}+q_{i+\frac{1}{2},m}z_{14} \\ \frac{\alpha}{2w_m}\left(z_8\psi_{i-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}+z_{13}\psi_{i,m-\frac{1}{2}}+z_{18}\psi_{i+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\right)-\mu_m z_{21}\psi_b+q_{i-\frac{1}{2},m}z_9+q_{i,m}z_{14}+q_{i+\frac{1}{2},m}z_{19} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.113)}$$

$\mu_m < 0$ için (3.113)'teki 3x3'lük matrisin sadece ilk a_{11} ve son a_{33} terimleri (3.112)'deki 3x3'lük matristen farklıdır.

(3.112) ve (3.113)'te yer alan geometrik fonksiyonların (z) açılımı Çizelge 3.3'te verilmiştir. Çizelge 3.2 ve 3.3'te verilen geometrik fonksiyonlar düzlem ve silindir gibi farklı geometrilerde değişir. Bu fonksiyonlar iç ve dış iterasyonlar başlamadan hesalanır ve tüm iterasyonlarda geometrik yapı değişmediği için aynı fonksiyonlar kullanılır. TIMEX kodunda olduğu gibi yukarıda verilen doğrusal sistemler farklı geometriler için sadece z'ler değiştirerek kullanılabilir. Bu ise SSEY için bir avantajdır.

Çizelge 3.3 : KSSEY denklemlerinde kullanılan geometrik fonksiyonlar.

z	Fonksiyon	z	Fonksiyon
z_1	$\frac{3}{20}\Delta\rho_i - \frac{11}{15}\rho_i + \frac{\rho_i^2}{\Delta\rho_i}$	z_{12}	$\frac{\Delta\rho_i}{5} + \frac{4}{5}\rho_i + \frac{4\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}$
z_2	$-\frac{2}{5}\Delta\rho_i + \frac{16}{15}\rho_i$	z_{13}	$\frac{4}{15}(2\rho_i + \Delta\rho_i)$
z_3	$\frac{3}{70}(\Delta\rho_i)^2 - \frac{(\Delta\rho_i)\rho_i}{5} + \frac{4\rho_i^2}{15}$	z_{14}	$\frac{(\Delta\rho_i)^2}{70} + \frac{2(\Delta\rho_i)\rho_i}{15} + \frac{2\rho_i^2}{15}$
z_4	$\frac{\Delta\rho_i}{15} - \frac{8}{15}\rho_i + \frac{4\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}$	z_{15}	$\frac{\Delta\rho_i}{20} - \frac{\rho_i}{15} + \frac{\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}$
z_5	$\frac{4}{15}(2\rho_i - \Delta\rho_i)$	z_{16}	$-\left(\frac{\Delta\rho_i}{15} + \frac{8\rho_i}{15} + \frac{4\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}\right)$
z_6	$\frac{(\Delta\rho_i)^2}{70} - \frac{2(\Delta\rho_i)\rho_i}{15} + \frac{2\rho_i^2}{15}$	z_{17}	$\frac{2\rho_{i+1/2}^2}{\Delta\rho_i} - \frac{3\Delta\rho_i}{20} - \frac{11\rho_i}{15} - \frac{\rho_i^2}{\Delta\rho_i}$
z_7	$-\left(\frac{\Delta\rho_i}{20} + \frac{\rho_i}{15} + \frac{\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}\right)$	z_{18}	$\frac{2}{5}\Delta\rho_i + \frac{16}{15}\rho_i$
z_8	$-\frac{4}{15}\rho_i$	z_{19}	$\frac{3(\Delta\rho_i)^2}{70} + \frac{(\Delta\rho_i)\rho_i}{5} + \frac{4\rho_i^2}{15}$
z_9	$-\left(\frac{(\Delta\rho_i)^2}{140} + \frac{\rho_i^2}{15}\right)$	z_{20}	$\frac{2\rho_{i-1/2}^2}{\Delta\rho_i}$
z_{10}	$-\frac{\Delta\rho_i}{5} + \frac{4}{5}\rho_i - \frac{4\rho_i^2}{3\Delta\rho_i}$	z_{21}	$\frac{2\rho_{i+1/2}^2}{\Delta\rho_i}$
z_{11}	$\frac{4(\Delta\rho_i)^2}{105} + \frac{16\rho_i^2}{15}$		

Özel yönler için doğrusal sistemler aşağıda verilmiştir.

$\mu_{1/2} = -1$ için:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta\rho_i}+\frac{4\sigma_i}{15} & -\frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & \frac{1}{3\Delta\rho_i}-\frac{\sigma_i}{15} \\ \frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & \frac{16\sigma_i}{15} & -\frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} \\ -\frac{1}{3\Delta\rho_i}-\frac{\sigma_i}{15} & \frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & \frac{1}{\Delta\rho_i}+\frac{4\sigma_i}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i,m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.114)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{2}{15}q_i-\frac{1}{15}q_{i+\frac{1}{2}} \\ \frac{2}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{16}{15}q_i+\frac{2}{15}q_{i+\frac{1}{2}} \\ \frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b-\frac{1}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{2}{15}q_i+\frac{4}{15}q_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$\mu_{M+1/2} = 1$ için:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta\rho_i}+\frac{4\sigma_i}{15} & \frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & -\frac{1}{3\Delta\rho_i}-\frac{\sigma_i}{15} \\ -\frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & \frac{16\sigma_i}{15} & \frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} \\ \frac{1}{3\Delta\rho_i}-\frac{\sigma_i}{15} & -\frac{4}{3\Delta\rho_i}+\frac{2\sigma_i}{15} & \frac{1}{\Delta\rho_i}+\frac{4\sigma_i}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i-\frac{1}{2},m} \\ \psi_{i,m} \\ \psi_{i+\frac{1}{2},m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.115)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{2}{15}q_i-\frac{1}{15}q_{i+\frac{1}{2}}+\frac{2}{\Delta\rho_i}\psi_b \\ \frac{2}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{16}{15}q_i+\frac{2}{15}q_{i+\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{15}q_{i-\frac{1}{2}}+\frac{2}{15}q_i+\frac{4}{15}q_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

3.6 Ortalama Skaler Akılar

KSSEY için i'inci hücrede ortalama skaler akı şu şekilde bulunur:

$V_-=V_{i-1/2}$, $V_+=V_{i+1/2}$, $\phi_- = \phi_{i-1/2}$, $\phi_+ = \phi_{i+1/2}$ olmak üzere

$$\bar{\phi} = \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} 4\pi\rho^2 (\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi_{i,m}(\rho) d\mu) d\rho}{\int_{\rho_-}^{\rho_+} 4\pi\rho^2 \, d\rho} \tag{3.116}$$

$$\bar{\phi} = \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \left[\frac{8\pi\rho^2}{(\Delta\rho)^2}\right] [(\rho - \rho_i)(\rho - \rho_+)\phi_- - 2(\rho - \rho_-)(\rho - \rho_+)\phi_i + (\rho - \rho_-)(\rho - \rho_i)\phi_+] d\rho}{\frac{4}{3}\pi(\rho_+^3 - \rho_-^3)}$$

(3.117)

$$\bar{\phi} = \frac{V_-\phi_- + V_i\phi_i + V_+\phi_+}{V_- + V_i + V_+} \tag{3.118}$$

şeklinde tanımlanır. Burada geçen hacim elemanları aşağıda verilmiştir:

$$V_- = -\frac{\pi}{15}\Delta\rho_i(\rho_+^2 - 2\rho_+\rho_- - 9\rho_-^2) \tag{3.119}$$

$$V_i = \frac{4\pi}{15}\Delta\rho_i(3\rho_+^2 + 4\rho_+\rho_- + 3\rho_-^2) \tag{3.120}$$

$$V_i = \frac{\pi}{15}\Delta\rho_i(9\rho_+^2 + 2\rho_+\rho_- - \rho_-^2) \tag{3.121}$$

Benzer şekilde her iki DSSEY için ortalama skaler akı:

$$\bar{\phi} = \frac{V_-\phi_- + V_+\phi_+}{V_- + V_+} \tag{3.122}$$

şeklinde tanımlanır. Burada geçen hacim elemanları ise Çizelge 3.2'de verilmiştir. Bu hacim elemanlarının toplamı kürede i'inci kabuğun hacmini verir.

3.7 Negatif Akı Düzeltmesi

Her iki DSSEY için negatif akı düzeltmesi ONETRAN ve TIMEX kodlarındaki [33,68] gibi yapılmıştır. Sağa doğru giderken ($\mu > 0$), $\Psi_{i+1/2}$'nin negatif olup olmadığına bakılır. Eğer negatif ise sıfıra eşitlenir ve $\Psi_{i-1/2}$ doğrusal sistemin ilk denkleminden hesaplanır. Sola doğru giderken ($\mu < 0$), $\Psi_{i-1/2}$'nin negatif olup olmadığına bakılır. Eğer negatif ise sıfıra eşitlenir ve $\Psi_{i+1/2}$ doğrusal sistemin ilk denkleminden hesaplanır.

Benzer şekilde KSSEY için de isteğe bağlı olarak negatif akı düzeltmesi yapılmaktadır. Sağa doğru giderken ($\mu > 0$), $\Psi_{i+1/2}$'nin negatif olup olmadığı kontrol edilir. Eğer negatif ise sıfıra eşitlenir. 3x3'lük sistemden üçüncü denklem elimine edilerek 2x2 sistem elde edilir. İlk iki denklemden $\Psi_{i-1/2}$ ve Ψ_i hesaplanır. İki aşamalı düzeltmede ise eğer Ψ_i'de negatif çıkarsa o da sıfırlanarak ilk denklemden $\Psi_{i-1/2}$ hesaplanır. Sola doğru giderken ise $\Psi_{i-1/2}$'nin negatif olup olmadığına bakılır. Eğer negatif ise sıfıra eşitlenir. $\Psi_{i+1/2}$ ve Ψ_i ilk iki denklemden hesaplanır. Eğer Ψ_i negatifse sıfırlanır ve ilk denklemden $\Psi_{i+1/2}$ hesaplanır.

EF için negatif akı düzeltmesi ise negatif yönsel akıların sıfıra eşitlenmesi ve nötron denge denkleminden yönsel akıların yeniden hesaplanması ile yapılır [1].

4. KABA IZGARA YENİDEN DENGELEME HIZLANDIRMA YÖNTEMİ

Nötron transport denklemi kullanılarak yapılan reaktör kalbi tasarımı simülasyonları karmaşık ve zaman alıcıdır. Bugün, etkin bir iteratif yöntem kullanmayan büyük ölçekli bir transport kodu yazmak düşünülemez. Kod geliştiriciler için iterasyonların yakınsamasını hızlandıran teknikler kullanmak oldukça önemlidir. Özellikle zamana bağlı nötron transport denklemi hesaplamalarında her zaman adımında çok sayıda iterasyon gerekmektedir. Ayrıca optik kalın ve oldukça saçıcı bölgelerde iterasyonların yakınsama hızının oldukça yavaşladığı ve bunun bilgisayar koşma zamanlarının uzamasına neden olduğu iyi bilinmektedir [1]. Bu tür problemler yakınsama hızını arttırmak için hızlandırma yöntemlerine gerek duymaktadır.

KIYDHY ve Difüzyon Sentetik Hızlandırma Yöntemi (DSHY) zamandan bağımsız nötron transport problemlerinde yaygın olarak kullanılan iki hızlandırma tekniğidir. KIYDHY ve DSHY sırasıyla çarpımsal ve toplamsal düzeltme teknikleri sınıfına girmektedir. Yani, KIYDHY hızlandırmayı her kaba ızgara bölgesinde o bölgenin yeniden dengeleme faktörü ile çarparak sağlamaktadır. Bu faktörler her iterasyonda doğrusal denklem sisteminin çözümü ile bulunur. Diğer yandan, DSHY grup akılarına düzeltme terimi ekleyerek hızlandırma sağlamaktadır. Düzeltme terimi difüzyon denkleminin sayısal çözümünden elde edilmektedir.

Yeniden dengeleme faktörleri ayrık transport çözümünü normalize eder. (Her bir kaba ızgara bölgesinde akıların uzay-yön dağılımını etkilemeden, o bölgede akının genliğini ayarlar.) Yakınsamış çözüm, nötron denge denklemini her bir hücrede (ince ızgara yeniden dengeleme) ya da bir grup ince ızgara hücresinde (kaba ızgara yeniden dengeleme) sağlamalıdır. Kaba ızgara büyüklüğü uygun şekilde seçildiğinde KIYDHY etkin bir hızlandırma sağlar. Bu nedenle kod kullanıcısı verimi azami seviyeye çıkarmak için optimal kaba ızgara sayısını belirlemelidir.

KIYDHY, transport teorisinin hem iç hem dış iterasyonlarının hızlandırılmasında kullanılabilir. KIYDHY denklemleri yeniden dengeleme faktörleri cinsinden formüle

edilir. Bu faktörler, her bir ince ızgara hücresindeki çözümleri güncellemek için kullanılır. Çözüm yakınsadıkça yeniden dengeleme faktörleri de bire yaklaşır.

4.1 Dış İterasyon Hızlandırması

4.1.1 Kritik altı reaktör ve zamana bağlı transport denklemleri için hızlandırma

Çok gruplu, zamana bağlı, ani nötron transport denkleminin çözümü, her zaman adımında buna eşdeğer zamandan bağımsız, alt-kritik, dış kaynaklı ve çok gruplu nötron transport denkleminin çözümünü gerektirir. Üst gruba saçılma olmadığı varsayımı ile j'inci zaman adımında bu denklem aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma_1-\tilde{\sigma}_{s,11} & & & & \\ -\tilde{\sigma}_{s,12} & \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma_2-\tilde{\sigma}_{s,22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -\tilde{\sigma}_{s,1g} & -\tilde{\sigma}_{s,2g} & \cdots\ \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma_g-\tilde{\sigma}_{s,gg} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ --\tilde{\sigma}_{s,1G} & -\tilde{\sigma}_{s,2g} & \cdots\ -\tilde{\sigma}_{s,gG} & \cdots\ \vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}+\sigma_G-\tilde{\sigma}_{s,GG} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r},\vec{\Omega}) \\ \psi_2(\vec{r},\vec{\Omega}) \\ \vdots \\ \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega}) \\ \vdots \\ \psi_G(\vec{r},\vec{\Omega}) \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \chi^1\upsilon\sigma_{f1} & \chi^1\upsilon\sigma_{f2} & \cdots & \chi^1\upsilon\sigma_{fg} & \cdots & \chi^1\upsilon\sigma_{fG} \\ \chi^2\upsilon\sigma_{f1} & \chi^2\upsilon\sigma_{f2} & \cdots & \chi^2\upsilon\sigma_{fg} & \cdots & \chi^2\upsilon\sigma_{fG} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi^g\upsilon\sigma_{f1} & \chi^g\upsilon\sigma_{f2} & \cdots & \chi^g\upsilon\sigma_{fg} & \cdots & \chi^g\upsilon\sigma_{fG} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi^G\upsilon\sigma_{f1} & \chi^G\upsilon\sigma_{f2} & \cdots & \chi^G\upsilon\sigma_{fg} & \cdots & \chi^G\upsilon\sigma_{fG} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \\ \vdots \\ \phi_g(\vec{r}) \\ \vdots \\ \phi_G(\vec{r}) \end{bmatrix}}_{\underline{\phi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1(\vec{r}) \\ Q_2(\vec{r}) \\ \vdots \\ Q_g(\vec{r}) \\ \vdots \\ Q_G(\vec{r}) \end{bmatrix}}_{\underline{Q}} \qquad \textbf{(4.1)}$$

burada:

$$\begin{aligned} \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega}) &= \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t_{j+1/k}) \\ \phi_g(\vec{r}) &= \phi_g(\vec{r},t_{j+1/k}) = \int \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t_{j+1/k})d\Omega \end{aligned} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$\tilde{\sigma}_{s,gg'} = \int d\Omega' \sigma_{s,gg'}(\vec{r},\vec{\Omega}'.\vec{\Omega}) \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$\upsilon\sigma_{fg} = \upsilon\sigma_{fg}(\vec{r}) \qquad \textbf{(4.4)}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca toplam tesir kesir kesiti ve kaynak terimi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\sigma_g(\vec{r}) = \left[\sigma_{t,g}(\vec{r}) + \frac{k\delta_{n1}}{v_g \Delta t_j} \right] \tag{4.5}$$

$$Q_g(\vec{r},\vec{\Omega}) = S_g(\vec{r}) + \frac{k\delta_{n1}}{v_g \Delta t_j} \psi_g(\vec{r},\vec{\Omega},t_j) \tag{4.6}$$

burada:

$$\begin{aligned} n = 1, &\quad Zamana\ bağlı\ transport\ denklemi, \\ n \neq 1, &\quad Zamandan\ bağımsız\ transport\ denklemi, \\ k = 1, &\quad Kapalı\ Farklama, \\ k = 2, &\quad Elmas\ Farklaması \end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $S_g(\vec{r})$, g'inci grup dış nötron kaynağıdır ve eşyönlü ve zamandan bağımsız olduğu varsayılır. (4.2)'de zaman alt indisi KF ve EF için farklıdır. Bu nedenle (4.1)'den KF için ψ_{j+1} EF için $\psi_{j+1/2}$ hesaplanır. EF için ψ_{j+1} (2.54)'ten hesaplanır. Grup içi transport denklemi şu formdadır:

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega}) + \sigma_g(\vec{r})\psi_g(\vec{r},\vec{\Omega}) = \sum_{g'=1}^{g} \int \sigma_{s,gg'}(\vec{r},\vec{\Omega}'.\vec{\Omega})\psi_{g'}(\vec{r},\vec{\Omega}')d\Omega' \\ &+ \chi^g \sum_{g'=1}^{G} \upsilon\sigma_{f,g'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + Q_g(\vec{r},\vec{\Omega}) \qquad\qquad ,g = 1,2,\cdots,G \end{aligned} \tag{4.8}$$

Eşdeğer kritik altı - dış kaynak problemi, her zaman adımında, (4.1)'de tanımlanan bölüntülenmiş matris sisteminin:

$$\underline{\underline{H}}\,\underline{\psi} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\phi} + \underline{Q} \tag{4.9}$$

fisyon kaynağı iterasyonu ile çözümünü gerektirir:

$$\underline{\underline{H}}\,\underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\phi}^{(n)} + \underline{Q} \tag{4.10}$$

$$\underline{\phi}^{(n+1)} = \int \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} d\Omega \tag{4.11}$$

Bu iterasyon, (2.51)'deki gibi ardışık iki skaler akı tahmini arasındaki fark önceden belirlenmiş yakınsama kriterini sağlayıncaya kadar devam eder. (4.10) ve (4.11)'de yönsel akının üzerindeki tilda işareti bu akıya henüz KIYDHY uygulanmadığını göstermektedir.

Fisyon kaynağı iterasyonunun yakınsamasına yönelik çalışmalar eğer özdeğer probleminde; aşağıda tanımlanan baskınlık oranı 1'e yakınsa, yakınsamanın çok yavaş olacağını göstermiştir [81].

$$\underline{\underline{G}}\,\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \tag{4.12}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \ldots \tag{4.13}$$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \int d\Omega \underline{\underline{F}} \tag{4.14}$$

baskınlık oranı:

$$\rho = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \tag{4.15}$$

Bu tür problemlerde KIYDHY, yavaş yakınsayan fisyon kaynağı iterasyonu davranışına bir çözüm olarak sunulabilir. Bu bölümde, KIYDHY transport denkleminin zamana bağlı çözümlerini elde edilirken karşılaşılan eşdeğer kritik altı - dış kaynak problemlerinde (4.10)'da verilen fisyon kaynağı iterasyonunu, hızlandırmak için formüle edilmekte ve uygulanmaktadır. KIYDHY'nde (4.11) aşağıdaki denklemle yer değiştirir:

$$\underline{\phi}^{(n+1)}(\vec{r}) = h_i \int \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\Omega \tag{4.16}$$

burada h_i i'inci kaba ızgara için yeniden dengeleme faktörüdür, öyleki:

$$\vec{r} \in V^i, i = 1,2,.....I \tag{4.17}$$

sistem üst üste çakışmayan "I" kaba ızgara bölgesinden oluşmuştur. I adet kaba ızgara bölgesinin hacimleri toplamı sistem hacmini oluşturur:

$$V = \bigcup_{i=1}^{I} V^i \tag{4.18}$$

Yeniden dengeleme faktörlerini (h_i) hesaplamada kullanılan temel denklem grup içi nötron süreklilik denklemidir. Bu denklem (4.8)'in tüm yönlerde integrasyonu ile elde edilir:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r}) + \sigma_g(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^{g}\sigma_{gg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) \\ &+ \chi_g\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + Q_g(\vec{r}), \qquad g = 1,2,\ldots,G \end{aligned} \tag{4.19}$$

burada:

$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \int \vec{\Omega}\psi_g(\vec{r})d\Omega \tag{4.20}$$

$$\sigma_{gg'}(\vec{r}) = \int \sigma_{s,gg'}(\vec{r},\vec{\Omega})d\Omega \tag{4.21}$$

(4.19) tüm enerji grupları üzerinden toplanırsa:

$$\begin{aligned} &\sum_{g=1}^{G}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r}) + \sum_{g=1}^{G}\sigma_g(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) = \sum_{g=1}^{G}\underbrace{\left(\sum_{g'=g}^{G}\sigma_{g'g}(\vec{r})\right)}_{\sigma_{sg}}\phi_g(\vec{r}) \\ &+ \underbrace{\left(\sum_{g=1}^{G}\chi_g\right)}_{1}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + \sum_{g=1}^{G}Q_g(\vec{r}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\sum_{g=1}^{G}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r}) + \sum_{g=1}^{G}\underbrace{\left[\sigma_g(\vec{r}) - \sigma_{sg}\right]}_{\tilde{\sigma}_{ag}}\phi_g(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + \sum_{g=1}^{G}Q_g(\vec{r}) \tag{4.23}$$

aşağıdaki vektörler tanımlanarak:

$$\underline{1}^T = \begin{bmatrix}1 & \ldots & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r})^T = \left[\vec{J}_1(\vec{r}) \quad \ldots \quad \vec{J}_g(\vec{r}) \quad \ldots \quad \vec{J}_G(\vec{r})\right] \tag{4.25}$$

$$\underline{\sigma}_a(\vec{r})^T = \left[\tilde{\sigma}_{a1}(\vec{r}) \quad \ldots \quad \tilde{\sigma}_{ag}(\vec{r}) \quad \ldots \quad \tilde{\sigma}_{aG}(\vec{r})\right] \tag{4.26}$$

$$\underline{\phi}(\vec{r})^T = \left[\phi_1(\vec{r}) \quad \ldots \quad \phi_g(\vec{r}) \quad \ldots \quad \phi_G(\vec{r})\right] \tag{4.27}$$

$$\underline{f}(\vec{r})^T = \left[\upsilon\sigma_{f1}(\vec{r}) \quad \ldots \quad \upsilon\sigma_{fg}(\vec{r}) \quad \ldots \quad \upsilon\sigma_{fG}(\vec{r})\right] \tag{4.28}$$

$$\underline{Q}(\vec{r})^T = \left[Q_1(\vec{r}) \quad \ldots \quad Q_2(\vec{r}) \quad \ldots \quad Q_G(\vec{r})\right] \tag{4.29}$$

(4.23) matris formunda yazılır:

$$\underline{1}^T \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{J}} + \underline{\sigma}_a^T \underline{\phi} = \underline{f}^T \underline{\phi} + \underline{1}^T \underline{Q} \tag{4.30}$$

(4.30)'un kaba ızgara hacimleri V_i üzerinden integrali alınırsa:

$$\underline{1}^T \int_{V_i} dV \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{J}} + \int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \underline{\phi} = \int_{V_i} dV \underline{f}^T \underline{\phi} + \underline{1}^T \int_{V_i} dV \underline{Q} \tag{4.31}$$

(4.31)'in ilk terimine Diverjans teoremi uygulanırsa:

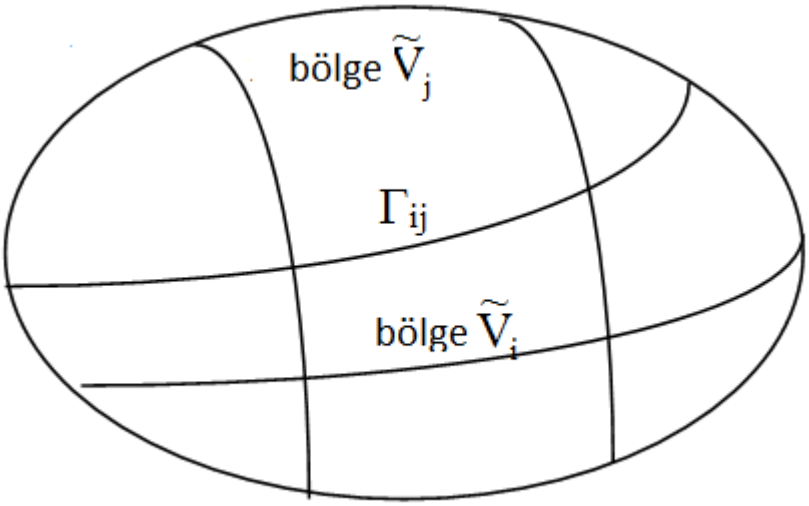
$$\int_{V_i} dV \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{J}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \int_{\Gamma_{ij}} \vec{n} \cdot \underline{\vec{J}} \, d\Gamma = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \int_{\Gamma_{ij}} \underline{J}_n^+ \, d\Gamma - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \int_{\Gamma_{ij}} \underline{J}_n^- \, d\Gamma \tag{4.32}$$

burada Γ_{ij} eğer varsa kaba ızgara bölgeleri i ve j arasında ara yüzeyi göstermektedir. Bu denklem (4.31)'de yerine konulursa:

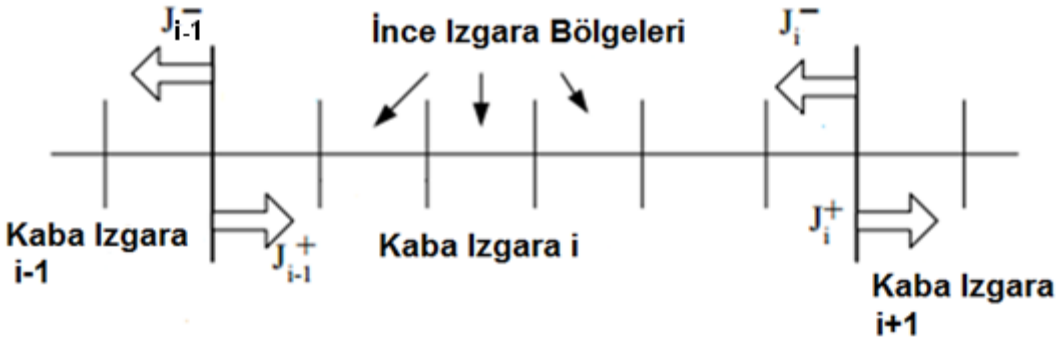
$$\underline{1}^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \int_{\Gamma_{ij}} \underline{J}_n^+ \, d\Gamma - \underline{1}^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \int_{\Gamma_{ij}} \underline{J}_n^- \, d\Gamma + \int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \underline{\phi} = \int_{V_i} dV \underline{f}^T \underline{\phi} + \underline{1}^T \int_{V_i} dV \underline{Q} \tag{4.33}$$

(4.33) fisyon kaynağı iterasyonunun yeniden dengeleme hızlandırması için temel denklemdir.

Şekil 4.1 kaba ızgara bölgelerini ve ara yüzeyleri ($\Gamma_{i,j}$), Şekil 4.2 ise ince ve kaba ızgara hücrelerini ve (4.33)'te yer alan akım vektörlerini göstermektedir.



Şekil 4.1 : Kaba ızgara bölgeleri.



Şekil 4.2 : Kaba ve ince ızgara bölgeleri ve akım vektörleri.

KIYDHY henüz uygulanmamış yönsel akılar (4.10)'dan bulunur. Yeni tahminler ise yeniden dengeleme faktörleri ile bu akıların çarpımına eşittir:

$$\underline{\psi}^{(n+1)} = h_i \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)}, \ \vec{r} \in V_i \qquad \textbf{(4.34)}$$

Skaler akılar ise:

$$\underline{\phi}^{(n+1)} = h_i \int d\Omega \, \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} \quad \vec{r} \in V_i \qquad \textbf{(4.35)}$$

(4.35)'ten bulunur. Ara yüzeyde ($\Gamma_{i,j}$) akımlar:

$$\underline{J}_n^+ = h_i \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} \qquad \textbf{(4.36)}$$

$$\underline{J}_n^- = h_j \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} \tag{4.37}$$

burada $\underline{J}_n^+$'ye katkı veren nötronlar V_i hacminden V_j hacmine doğru giden nötronlardır. Bu nedenle yeniden dengeleme faktörü h_i ile çarpılır. $\underline{J}_n^-$'ye katkı veren nötronlar ise Vj hacminden V_i hacmine giden nötronlardan oluşur. Bu nedenle yeniden dengeleme faktörü h_j ile çarpılır.

(4.34), (4.35), (4.36) ve (4.37) (4.33)'te yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{I} \underline{1}^T \left[\int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)}\right]\right\} h_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{I} \left[\underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)}\right] h_j \\ &+\left[\int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \int d\Omega\, \tilde{\psi}^{(n+1)}\right] h_i = \left[\int_{V_i} dV\, \underline{f}^T \int d\Omega\, \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)}\right] h_i + \underline{1}^T \int_{V_i} dV \underline{Q}\end{aligned} \tag{4.38}$$

Aşağıdaki matris elemanları tanımlanırsa:

$$b_{i,i} = \int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \underline{\tilde{\phi}}^{(n+1)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{I} \underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)} - \int_{V_i} dV\, \underline{f}^T \underline{\tilde{\phi}}^{(n+1)} \tag{4.39}$$

$$b_{i,j} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{I} \underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(n+1)},\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \tag{4.40}$$

$$f_i = \underline{1}^T \int_{V_i} dV \underline{Q} \tag{4.41}$$

ve bu tanımlar (4.38)'de yerine konulursa:

$$\underline{\underline{B}}\, \underline{\mathrm{h}} = \underline{f} \tag{4.42}$$

elde edilir. Bu sistemde $\underline{\underline{B}}$ seyrek matris oluşturur. Çünkü bir boyutlu sistemde i'inci kaba ızgara bölgesine komşu sadece (i-1) ve (i+1)'inci kaba ızgara bölgeleri vardır. Bu durumda (4.39) ve (4.40)'taki toplam sembolleri sadece iki terimden oluşur. Yani j=i-1 ve j=i+1 için terimler toplanır. j=i-1 olunca (4.40)'ta $b_{i,i-1}$ olur ve $\underline{\underline{B}}$ matrisinin

alt köşegen elemanları (4.40)'tan hesaplanır. Benzer bir şekilde j=i+1 olunca (4.40)'ta $b_{i,i+1}$ olur ve $\underline{\underline{B}}$ matrisinin üst köşegen elemanları (4.40)'tan hesaplanır. $\underline{\underline{B}}$ matrisinin köşegen elemanları ise (4.39)'dan hesaplanır. Şekil 4.2'den görüleceği üzere, (4.40)'ta $b_{i,i-1}$ hesabında i ile (i-1) kaba ızgara bölgeleri arasında kalan yüzey alanı ile $\underline{J}_{i-1}^{+}$'nin değeri çarpılır. Benzer şekilde $b_{i,i+1}$ hesabında i ile (i+1) kaba ızgara bölgeleri arasında kalan alan ile $\underline{J}_{i}^{-}$'nin değeri çarpılır. (4.39)'da toplam sembolü ile gösterilen terim, i ve (i-1) kaba ızgara bölgeleri arasında kalan yüzey alanı ile $\underline{J}_{i-1}^{-}$'nin değerinin çarpımı ile i ve (i+1) kaba ızgara bölgeleri arasında kalan yüzey alanı ile $\underline{J}_{i}^{+}$'nın değerinin çarpımının toplamına eşittir. Yalnız küre merkezinde (i=1) ve küre yüzeyinde (i=I) V_i hacmine komşu sadece 1 kaba ızgara bölgesi vardır. Küre yüzeyinde boşluk sınır koşulu varsa $\underline{J}_{i}^{-}=0$ alınır. Küre yüzeyinde yansıtıcı sınır koşulu varsa $\underline{J}_{i}^{-}=\underline{J}_{i}^{+}$ alınır. (4.42)'de verilen doğrusal sistemin çözümü sonrasında yeniden dengeleme faktörleri bulunur ve yeni yönsel akı tahminleri (4.34)'ten, skaler akı tahminleri ise (4.35)'ten hesaplanır.

4.1.2 Özdeğer problemi için hızlandırma

Üs iterasyonu fisyon kaynağı $F(\vec{r})$ cinsinden formüle edilmiş olsa da hızlandırma teknikleri genellikle yönsel ya da skaler akı iterasyonlarında değişikliği gerektirir. Bu nedenle üs iterasyonu formülü yönsel akı cinsinden yeniden formüle edilir. Bunun için (2.100), (2.105)'te yerine konulursa m'inci iterasyon için yönsel akı cinsinden:

$$k_{m+1}=k_m\frac{\int_V dV w(\vec{r})\,\underline{f}^T\int d\Omega\,\underline{\psi}^{(m+1)}}{\int_V dV w(\vec{r})\,\underline{f}^T\int d\Omega\,\underline{\psi}^{(m)}} \qquad \textbf{(4.43)}$$

elde edilir. Yeniden dengeleme faktörleri (g) hızlandırma uygulanmamış yönsel akılar ile çarpılırak (4.43)'teki $\underline{\psi}^{(m+1)}$ hesaplanır:

$$\psi^{(m+1)}(\vec{r})=g(\vec{r})\tilde{\psi}^{(m)}(\vec{r}) \qquad \textbf{(4.44)}$$

(4.44)'te $g(\vec{r})$'ları hesaplamak için $\psi^{(m+1)}$'in transport denklemini ağırlaştırılmış kalıntılar anlamında sağlamalıdır.

Yeniden dengeleme faktörlerinin hesaplanmasında temel denklem grup nötron süreklilik denklemidir:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r})+\sigma_g(\vec{r})\phi_g(\vec{r})=\sum_{g'=1}^{G}\sigma_{gg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r})+\frac{\chi_g}{k}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) \qquad \textbf{(4.45)}$$

burada g=1,2,…G. Önceki bölümde olduğu gibi (4.45) tüm enerji grupları üzerinden toplanır:

$$\sum_{g=1}^{G}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r})+\sum_{g=1}^{G}\sigma_g(\vec{r})\phi_g(\vec{r})=\sum_{g'=1}^{G}\underbrace{\left(\sum_{g=1}^{G}\sigma_{gg'}(\vec{r})\right)}_{\sigma_{sg}}\phi_{g'}(\vec{r})$$
$$+\frac{1}{k}\underbrace{\left(\sum_{g=1}^{G}\chi_g\right)}_{1}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) \qquad \textbf{(4.46)}$$

$$\sum_{g=1}^{G}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_g(\vec{r})+\sum_{g=1}^{G}\underbrace{\left[\sigma_g(\vec{r})-\sigma_{sg}\right]}_{\sigma_{ag}}\phi_g(\vec{r})=\frac{1}{k}\sum_{g'=1}^{G}\upsilon\sigma_{fg'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) \qquad \textbf{(4.47)}$$

(4.47) matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\underline{1}^T\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{J}}+\underline{\sigma}_a^T\underline{\phi}=\frac{1}{k}\underline{f}^T\underline{\phi} \qquad \textbf{(4.48)}$$

(4.48)'in kaba ızgara hacimleri V_i üzerinden integrali alınırsa:

$$\underline{1}^T\int_{V_i}dV\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{J}}+\int_{V_i}dV\underline{\sigma}_a^T\underline{\phi}=\frac{1}{k_{eff}}\int_{V_i}dV\,\underline{f}^T\underline{\phi} \qquad \textbf{(4.49)}$$

(4.49)'un ilk terimine (4.32)'de verildiği gibi Diverjans teoremi uygulanır. (4.32), (4.49)'da yerine konur:

$$\underline{1}^T\sum_{j=1}^{M}\int_{\Gamma_{ij}}\underline{J}_n^+\,d\Gamma-\underline{1}^T\sum_{j=1}^{M}\int_{\Gamma_{ij}}\underline{J}_n^-\,d\Gamma+\int_{V_i}dV\,\underline{\sigma_a}^T\underline{\phi}=\frac{1}{k}\int_{V_i}dV\,\underline{f}^T\underline{\phi} \qquad \textbf{(4.50)}$$

(4.50) özdeğer probleminin yeniden dengeleme hızlandırması için temel denklemdir.

Hızlandırma uygulanmamış yönsel akılar (2.99)'dan hesaplanır. Yeni tahminler ise (4.34) ve (4.35)'e benzer bir şekilde:

$$\underline{\psi}^{(m+1)} = g_i \underline{\tilde{\psi}}^{(m)}, \ \vec{r} \in V_i \tag{4.51}$$

$$\underline{\phi}^{(m+1)} = g_i \int d\Omega \, \underline{\tilde{\psi}}^{(m)} \tag{4.52}$$

bulunur. (4.36) ve (4.37)'ye benzer bir şekilde $\Gamma_{i,j}$ yüzeyinde akımlar bulunur:

$$\underline{J}_n^+ = g_i \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)} \tag{4.53}$$

$$\underline{J}_n^- = g_j \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)} \tag{4.54}$$

Bu denklemler (4.50)'da yerine konur:

$$\begin{aligned} &\left\{\sum_{j=1}^{M} \underline{1}^T \left[\int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)}\right]\right\} g_i - \sum_{j=1}^{M} \left[\underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)}\right] g_j \\ &+ \left[\int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \int d\Omega \, \tilde{\psi}^{(m)}\right] g_i = \frac{1}{k^{(m+1)}} \left[\int_{V_i} dV \, \underline{f}^T \int d\Omega \, \underline{\tilde{\psi}}^{(m)}\right] g_i \end{aligned} \tag{4.55}$$

Aşağıdaki matris elemanları tanımlanırsa:

$$b_{i,i} = \int_{V_i} dV \underline{\sigma}_a^T \underline{\tilde{\phi}}^{(m)} + \sum_{j=1}^{M} \underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)} \tag{4.56}$$

$$b_{i,j} = -\sum_{j=1}^{M} \underline{1}^T \int_{\Gamma_{ij}} d\Gamma \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega \left|\vec{n}\cdot\vec{\Omega}\right| \underline{\tilde{\psi}}^{(m)} \tag{4.57}$$

$$d_{i,j} = \delta_{ij} \int_{V_i} \underline{f}^T \underline{\tilde{\phi}}^{(m)} \tag{4.58}$$

Bu tanımlar (4.55)'de yerine konursa:

$$\underline{\underline{B}} \, \underline{g} = \frac{1}{k^{(m+1)}} \underline{\underline{D}} \, \underline{g} \tag{4.59}$$

(4.59) bir özdeğer-özvektör problemidir. Bu denklem çözüldükten sonra özvektörler bulunur ve yeni yönsel akı tahminleri (4.51)'den hesaplanır. (4.58)'in özdeğeri yeni k_{etk} tahminidir. (4.43) artık kullanılmaz.

4.2 İç İterasyon Hızlandırması

Grup içi denklemin (2.95) çözümü için kullanılan saçılma kaynağı iterasyonu saçılma oranı 1'e yakın olduğunda yavaş yakınsama özelliğine sahip olabilir. Bu nedenle KIYDHY genellikle saçılma kaynağı iterasyonlarını hızlandırmak için kullanılır [82].

KIYDHY'ni küresel geometride uygulamak için önceki bölümlere benzer bir şekilde hızlandırma uygulanmış yönsel akılar ve akımlar için aşağıdaki denklemler tanımlanır.

$$\psi^{(n+1)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)= f_k\tilde{\psi}^{(n)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) \tag{4.60}$$

$$\psi^{(n+1)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)= f_k\tilde{\psi}^{(n)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right),\quad \vec{\mathrm{r}}\in\Gamma_{\mathrm{kj}},\vec{\mathrm{n}}\cdot\vec{\Omega}>0 \tag{4.61}$$

$$\psi^{(n+1)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)= f_j\tilde{\psi}^{(n)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right),\quad \vec{\mathrm{r}}\in\Gamma_{\mathrm{kj}},\vec{\mathrm{n}}\cdot\vec{\Omega}<0 \tag{4.62}$$

burada n iterasyon numarasını, $\vec{\mathrm{n}}$ ise yüzey normal vektörünü göstermektedir. f_k ve f_j yeniden dengeleme faktörleridir. (4.38)'e benzer bir şekilde K kaba ızgara bölgesi için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left[\int_{\tilde{V}_k} dV\sigma_r\left(\vec{r}\right)\tilde{\phi}^{(n)}\left(\vec{r}\right)+\sum_{j=1}^{K}\int_{\Gamma_{kj}} d\Gamma\,\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{n}}^{+(n)}\left(\vec{r}\right)\right]f_k-\left[\sum_{j=1}^{K}\int_{\Gamma_{kj}} d\Gamma\,\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{n}}^{-(n)}\left(\vec{r}\right)\right]f_j\\&=\int_{\tilde{V}_k} dVs\left(\vec{r}\right),\qquad j\neq k\end{aligned} \tag{4.63}$$

(4.63) yeniden dengeleme faktörlerinin hesaplanması için temel denklemdir. Burada hızlandırma uygulanmamış skaler akı ve akımlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\phi}^{(n)}\left(\vec{r}\right)=\int d\Omega\,\tilde{\psi}^{(n)}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) \tag{4.64}$$

$$\tilde{J}_n^{+(n)}(\vec{r}) = \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} d\Omega\, \vec{\Omega}\cdot\vec{n}\, \tilde{\psi}^{(n)}(\vec{r},\vec{\Omega}) \tag{4.65}$$

$$\tilde{J}_n^{-(n)}(\vec{r}) = \int_{\vec{n}\cdot\vec{\Omega}<0} d\Omega\, |\vec{\Omega}\cdot\vec{n}|\, \tilde{\psi}^{(n)}(\vec{r},\vec{\Omega}) \tag{4.66}$$

Saçılma kaynağı iterasyonunun bir veya birden çok yapıldığını varsaydığımızda yakınsamamış ve hızlandırma uygulanmamış yönsel akılar, n'inci iterasyonda hücre merkezi için $\tilde{\psi}_{i,m}^{(n)}$ ve sağ ve sol hücre kenarları için $\tilde{\psi}_{i+1/2,m}^{(n)}$ ve $\tilde{\psi}_{i-1/2,m}^{(n)}$ olarak gösterilir. Hızlandırma sonunda m'inci yön için $\psi_{i,m}^{(n+1)}, \psi_{i+1/2,m}^{(n+1)}, \psi_{i-1/2,m}^{(n+1)}$ elde edilir.

Hücre merkezlerindeki skaler akılar ve hücre kenarlarındaki kısmi akımlar aşağıdaki kareleme formülünden bulunur:

$$\tilde{\phi}_i^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} w_m \tilde{\psi}_{i,m}^{(n)} \tag{4.67}$$

$$\tilde{J}_{i+1/2}^{+(n)} = \frac{1}{2}\sum_{m=M/2+1}^{M} w_m \mu_m \tilde{\psi}_{i+1/2,m}^{(n)} \tag{4.68}$$

$$\tilde{J}_{i+1/2}^{-(n)} = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M/2} w_m \mu_m \tilde{\psi}_{i+1/2,m}^{(n)} \tag{4.69}$$

Kaba ızgara hacmi $\tilde{V}_k$, $\rho_{i(k-1)+1/2}$ ve $\rho_{i(k)+1/2}$ arasında uzanır. Burada i(k), k'inci kaba ızgara bölgesinin en dış hücresinin orta noktasının tam sayı indisidir. Örneğin 9 uzaysal ızgara aralığına böldüğümüz küreyi 3 kaba ızgara bölgesine bölecek olursak, i(0)=0, i(1)=3, i(2)=6 ve i(3)=9 olur.

k'inci kaba ızgara bölgesinin hacmi, bu bölgede yer alan ince ızgara bölgelerinin hacimlerinin toplamına eşittir:

$$\tilde{V}_k = \sum_{i\in k} V_i \tag{4.70}$$

burada $i \in k$ sadece $V_i \in \tilde{V}_k$'nın toplamda yer aldığını gösterir. İki kaba ızgara bölgesi arasında kalan alan ise

$$\Gamma_{j,j+1} = A_{i(j)+\frac{1}{2}} \tag{4.71}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ifadeler kullanılarak (4.63)'teki yeniden dengeleme faktörleri hesaplanabilir. Küresel geometride bir kaba ızgara bölgesine komşu iki kaba ızgara bölgesi vardır. Bu nedenle (4.63), üç köşegen matris ile her bir f_k, f_{k+1} ve f_{k-1}'i birbirine bağlayan bir doğrusal sistem oluşturur:

$$a_{k,k-1} f_{k-1} + a_{k,k} f_k + a_{k,k+1} f_{k+1} = \tilde{s}_k \tag{4.72}$$

burada:

$$a_{k,k} = \sum_{i \in k} V_i \sigma_{ri} \tilde{\phi}_i^{(n)} + A_{i(k)+\frac{1}{2}} \tilde{J}^{+(n)}_{i(k)+\frac{1}{2}} + A_{i(k-1)+\frac{1}{2}} \tilde{J}^{-(n)}_{i(k-1)+\frac{1}{2}} \tag{4.73}$$

$$a_{k,k-1} = -A_{i(k-1)+\frac{1}{2}} \tilde{J}^{+(n)}_{i(k-1)+\frac{1}{2}} \tag{4.74}$$

$$a_{k,k+1} = -A_{i(k)+\frac{1}{2}} \tilde{J}^{-(n)}_{i(k)+\frac{1}{2}} \tag{4.75}$$

$$a_{1,0} = a_{K,K+1} = 0 \tag{4.76}$$

$$\tilde{s}_k = \sum_{i \in k} V_i s_i \tag{4.77}$$

(4.72) f_k için çözülür. (4.60) kullanılarak yeni yönsel akı tahminleri $\psi_{i,m}^{(n+1)}$ hesaplanır ve yakınsama sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir.

Bölüm 4.1.2'de ele alınan özdeğer problemlerinin hızlandırılması için de benzer fark denklemleri türetilebilir.

5. UYGULAMALAR

Bundan önceki bölümlerde bahsedilen teori kullanılarak kişisel bilgisayar platformunda geliştirilen SPDOT isimli FORTRAN 90 programı, küresel geometride zamandan bağımsız (sabit kaynak ve özdeğer problemleri) ve zamana bağlı çok gruplu nötron transport denklemini çözebilme yeteneğine sahiptir. Programda M=256'ya (S_{256}) kadar Gauss-Legendre karelemelerine izin verilmiştir. Uzaysal farklama alternatifleri olarak programda yer alan ana formülasyonlar EF, DS2 ve KSSEY'dir. DS1 yöntemi ise LQD1 isimli kodda yer almıştır. Karşılaştırma amaçlı geliştirilen LQD1'de kullanılan diğer uzaysal farklama alternatifleri, EF ve DS1'de kullanılan metodolojiyle türetilen KSSEY'dir.

Küresel sistem N adet küresel kabuğa bölündüğünde skaler akıların hesaplandığı nokta sayısı EF'de yine N olur. Diğer yandan DSSEY'inde skaler akılar N+1 noktada hesaplanır. KSSEY'inde ise her bir küresel kabuk kuadratik sonlu eleman olarak alınırsa skaler akılar 2N+1 noktada hesaplanır. DSSEY (DS1 ve DS2) ve KSSEY sırasıyla 2x2 ve 3x3'lük doğrusal sistemin çözümünü gerektirir. Bu doğrusal sistemlerin boyutu düşük olduğundan dolayı Cramer kuralı bu sistemlerin çözümünde kullanılmıştır. Alternatif olarak programlarda KSSEY için 3x3 doğrusal sistemi çözen kısmi pivotlamalı Gauss elemesi yöntemi de mevcuttur. Bu çalışmada farklı uzaysal farklama yöntemlerinin karşılaştırılması, bu yöntemlerde skaler akıların hesaplandığı nokta sayısı sabit tutularak yapılmıştır.

5.1 Zamandan Bağımsız Transport Denkleminin Çözümüne Yönelik Uygulamalar

Geliştirilen yöntemleri zamandan bağımsız problemlerde test edebilmek için literatürde tanımlanmış bençmark problemleri kullanılmıştır [45,83]. 83 numaralı kaynakta yer alan problem setinde yer alan 14 problem küresel geometride tanımlanmış ve bu çalışmada doğrulama ve karşılaştırma amaçlı kullanılmıştır. Bu problemlerin hepsinde bütün yöntemler doğrulanmış ve bunlardan bir kısmının sonuçları bu bölümde verilmiştir.

Bütün problemlerde küre yüzeyinde boşluk sınır koşulu uygulanmıştır. Ayrıca Gauss-Legendre kareleme (S_N) derecesi belirtilmemiş örneklerde S_{32} yöntemi ile yönsel ayrıklaştırma yapılmıştır. Bu örneklerde, aksi söylenmediği sürece negatif akı düzeltmesi yapılmamış, iç ve dış iterasyonlar için yakınsama kriteri 10^{-6} seçilmiş, özel yönler için (2.73) ve (3.11), merkez koşulu olarak (2.114) kullanılmış ve KSSEY'de doğrusal denklem sistemi Cramer kuralı ile çözülmüştür.

5.1.1 Uzaysal farklama yöntemlerinin karşılaştırılması

Küresel geometri nötron transport denkleminin sayısal çözümünde kullanılacak yöntemin seçiminde ve yöntemlerin etkinliğini test etmede sıklıkla kullanılan kriterler şunlardır [45]:

1. **Doğruluk:** Yönsel veya skaler akıları ve etkin çoğaltma katsayısını doğru hesaplayabilmek,

2. **Yakınsama:** Izgara aralığı küçüldükçe hatayı azaltabilmek,

3. **Hesaplama yükü:** En kısa koşma zamanında en doğru sonucu hesaplayabilmek,

4. **Küre merkezinde akı düşüşü olmaması:** Küresel geometride transport denklemi r=0 noktası civarında bir tekil nokta davranışı gösterir. Bu durumda birçok sayısal yöntem, orijinde nötron akısını olması gerekenden daha düşük hesaplamaktadır. Küre merkezinde akı profilinde fiziksel olmayan bir çökme meydana gelmekte ve maksimum akı değeri küre merkezinde değil merkeze yakın diğer noktalardan birinde meydana gelmektedir.

5. **Pozitiflik:** Sınır koşulları, tesir kesitleri ve kaynak pozitif verildiği sürece çözümünde mutlaka pozitif olması gerekir. Sayısal yöntem mümkün olduğunca negatif yönsel akı üretmemelidir. Aksi takdirde skaler akıda özellikle iki malzeme arasındaki arayüzeyde fiziksel olmayan dalgalanmalar görülebilir. Bu durumda negatif akı düzeltmesini uygulamak gerekir.

Aşağıda verilen kritik reaktör problemlerinde ilk üç kritere göre yöntemler test edilmiştir. İki bölgeli yutucu küre probleminde ise diğer kriterlere göre yöntemler test edilmiştir.

5.1.1.1 Tek grup, kritik reaktör problemleri

Çıplak ve homojen U-D_2O sistemi:

Uranyum-D_2O sisteminin bir-grup makroskopik tesir kesitleri Çizelge 5.1'de verilmiştir. Bu ortamda saçılmalar eşyönlüdür. Analitik olarak hesaplanan sistemin kritik yarıçapı R_c=22.017156 cm'dir.

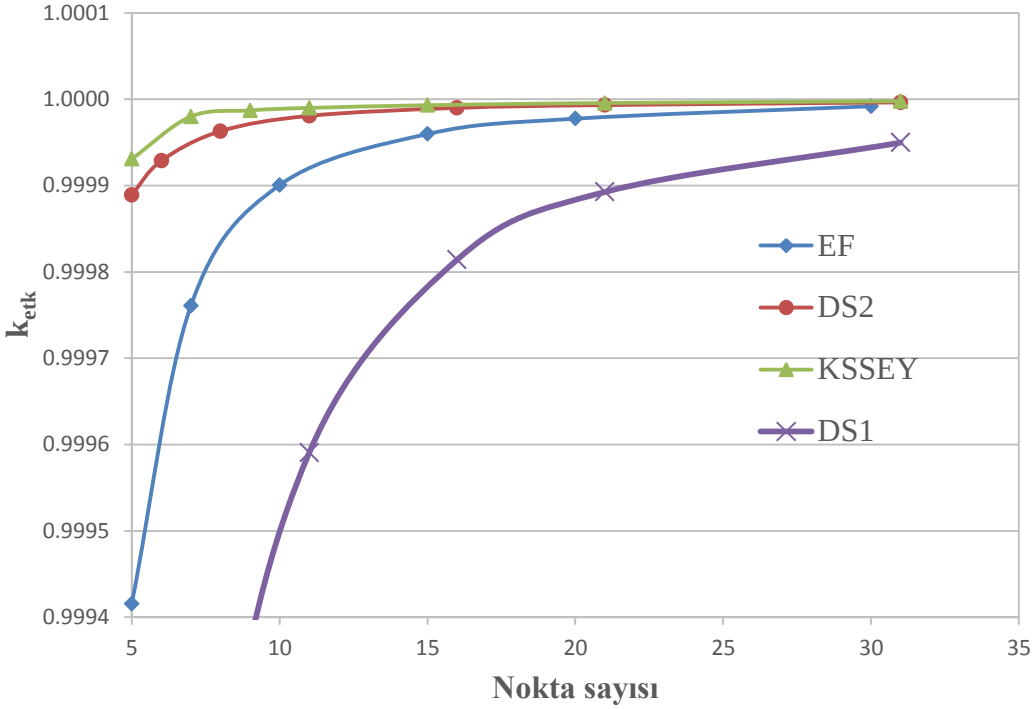
Çizelge 5.1 : U-D_2O sisteminin tesir kesitleri (cm^{-1}).

ν	σ_f	σ_s	σ_t
1.70	0.054628	0.464338	0.54628

Bu problemde dış iterasyonlarda (2.106), iç iterasyonlarda (2.98) kullanılarak yakınsamanın sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

Değişik uzaysal farklama yöntemleri için skaler akıların hesaplandığı nokta sayısının fonksiyonu olarak etkin çoğaltma katsayılarının (k_{etk}) değişimi Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Nokta sayısı tüm yöntemler için aynı alındığında KSSEY'nin diğer yöntemlerden daha doğru k_{etk} değeri hesapladığı görülmüştür. DS2 yönteminde ise DS1'den daha doğru k_{etk} değerleri hesaplanmıştır. EF'nın performansı bu iki DSSEY arasında kalmıştır.

Daha sonra uzaysal farklama yöntemleri yakınsama sağlanıncaya kadar olan fisyon kaynağı (ya da dış) iterasyon sayılarına göre ve yakınsama davranışı ile hesaplama verimini ölçmek için hesaplama zamanlarına göre karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.2 her bir yöntem için dış iterasyon sayılarını (DİS), eleman sayılarını (ES), skaler akıların hesaplandığı nokta sayılarını (NS) ve göreli CPU (merkezi işlem birimi) zamanlarını (t) göstermektedir. Çizelge 5.2'de t, CPU zamanlarının gözlemlenen en küçük CPU zamanına (burada 2 elemanlı EF yöntemi en kısa zamanda koşulmuştur) oranı olarak tanımlanmıştır. Her ne kadar EF'nin kaba ızgaralarda (NS ve ES küçük olduğunda) diğer yöntemlere göre yakınsama için gerekli olan en az sayıda DİS'e sahip olduğu gözlenmişse de, uzaysal ızgara daha fazla sayıda aralığa bölündüğünde (ince ızgara) bütün yöntemler yakınsama için aynı DİS'i gerektirmiştir.



Şekil 5.1 : Nokta sayısına göre k_{etk} değerlerinin değişimi.

Çizelge 5.2 : Farklı uzaysal farklama yöntemleri için DİS ve göreli CPU zamanları

ES	EF			DS1			DS2			KSSEY		
	DİS	NS	t	DİS	NS	t	DİS	NS	t	DİS	NS	t
2	17	2	1.0	22	3	1.9	28	3	1.7	36	5	2.7
4	30	4	2.0	33	5	3.7	34	5	3.4	36	9	6.6
5	33	5	2.7	34	6	5.0	35	6	4.4	36	11	7.6
7	34	7	3.7	35	8	6.6	35	8	6.9	36	15	10.1
10	35	10	5.1	36	11	9.3	36	11	8.6	36	21	14.0
15	35	15	7.6	36	16	13.7	36	16	13.7	36	31	21.4
20	35	20	10.9	36	21	18.3	36	21	18.0	36	41	28.4
30	36	30	15.1	36	31	28.1	36	31	26.6	36	61	41.7
50	36	50	25.4	36	51	45.7	36	51	43.6	36	101	69.3

Eleman sayısı sabit tutulduğunda, KSSEY en uzun koşma zamanlarını üretmiştir. Çünkü KSSEY'de nokta sayısı diğer yöntemlerin nerdeyse iki katıdır. KSSEY'de 3x3'lük doğrusal sistem çözülerek hücre kenarlarındaki iki akıyı ve hücre merkezindeki akıyı hesaplamak gereklidir. DSSEY'de ise hücre kenarlarındaki akıların hesaplanması gerekir. EF'de sadece hücre merkezindeki akıyı hesaplamak yeterlidir. Bu nedenle eleman sayısı sabit tutulduğunda EF beklendiği gibi en kısa koşma zamanını vermiştir.

Diğer yandan nokta sayısı sabit alındığında EF en kısa koşma zamanını verir. KSSEY'in koşma zamanı ise diğer DSSEY'lere göre yaklaşık olarak %20 daha

kısadır. Nokta sayısı eşit alındığında KSSEY'de eleman sayısı DSSEY'lerin eleman sayısının yarısı kadardır. Bu nedenle kuadratik formülasyonda çözülen doğrusal sistem sayısı DSSEY'lerin yarısı kadardır. Bu etkinin DSSEY'lerde çözülen 2x2'lik sistem yerine KSSEY'de çözülen 3x3'lük sistemin getirdiği fazladan hesaplama yükünü fazlasıyla ortadan kaldırdığı ve DSSEY'lere göre daha kısa koşma zamanlarına neden olduğu söylenebilir. Nokta sayısı aynı alındığında her ne kadar KSSEY, EF'den biraz daha uzun koşma zamanına sahip olsa da, çok daha doğru hesaplar yaparak daha avantajlı bir yöntem haline gelmektedir.

Çizelge 5.3, verilen k_{etk} değerlerini yaklaşık olarak elde etmek için kod koşulduğunda gerekli olan göreli CPU zamanlarını, DİS'leri ve NS'leri göstermektedir. Burada t yine CPU zamanının en kısa CPU zamanına (2 elemanla koşulan EF'de gözlenen) oranını göstermektedir. DSSEY ve EF'na eşdeğer doğruluk derecesini elde etmek için KSSEY'nin daha kaba bir ızgara kullanması yeterlidir. Bu durumda koşma zamanı t önemli ölçüde kısalır. Bu nedenle KSSEY'nin dört yöntem arasında hesaplama anlamında en verimli yöntem olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.3 : Farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemleri için ES, NS, DİS ve t.

Yöntem	k_{etk}~0.999932				k_{etk}~0.999990				k_{etk}~0.999999			
	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t
EF	10	10	35	5.1	28	28	36	13.9	59	59	36	29.7
DS1	21	22	36	19.9	72	73	36	65.9	176	177	36	162.3
DS2	5	6	35	4.4	15	16	36	13.7	55	56	36	45.1
KSSEY	2	5	36	2.7	5	11	36	7.6	21	43	36	28.9

Çıplak ve homojen Pu-239 sistemi:

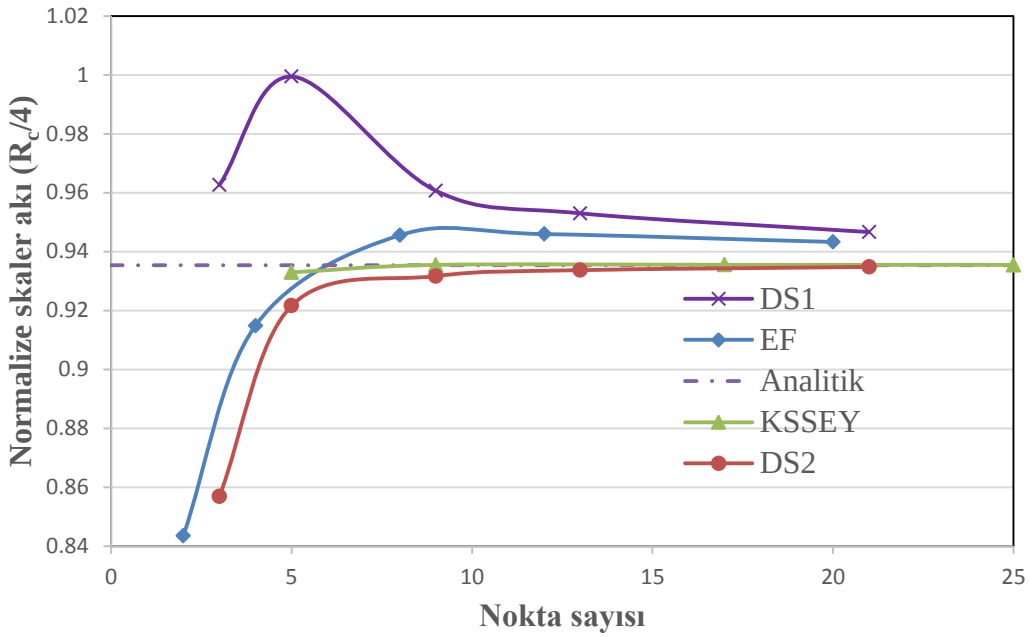
Bu problem için tesir kesitleri Çizelge 5.4'te verilmiştir. Saçılmalar eşyönlüdür. Sistemin kritik yarıçapı R_c=6.082547 cm'dir.

Çizelge 5.4 : Pu-239 sisteminin tesir kesitleri (cm^{-1}).

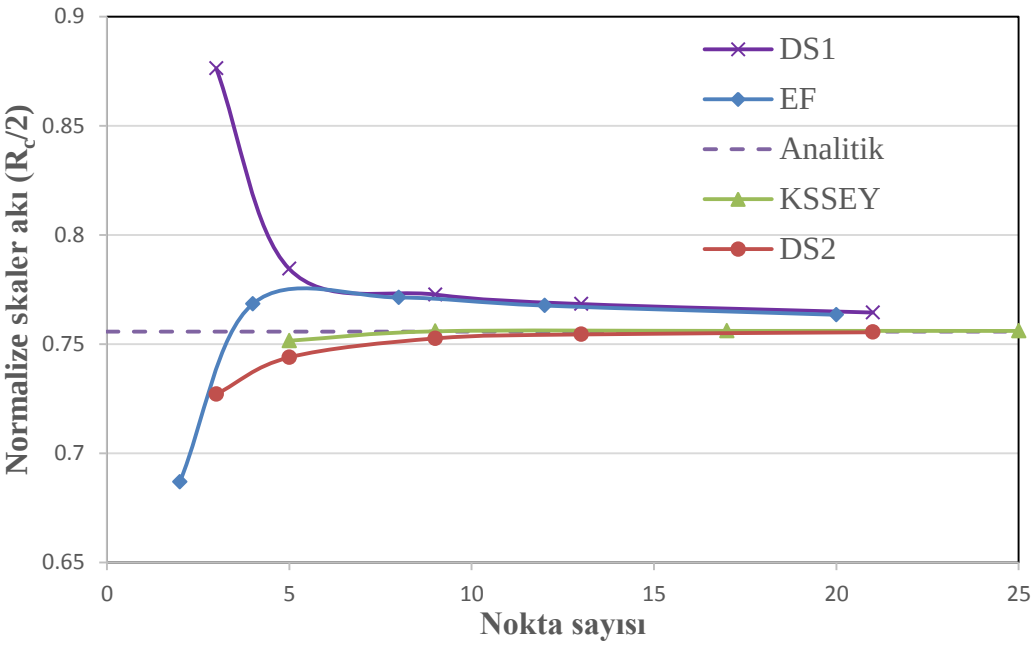
ν	σ_f	σ_s	σ_t
2.84	0.0816	0.225216	0.3264

Kürenin 4 ayrı noktasında analitik skaler akı sonuçları da küre merkezine göre normalize edilmiş olarak ilgili kaynakta verilmektedir [83]. EF, DS1, DS2 ve KSSEY için bulunan skaler akı değerleri küre merkezinde hesaplanan skaler akı değerine bölünerek normalize edilmiş ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

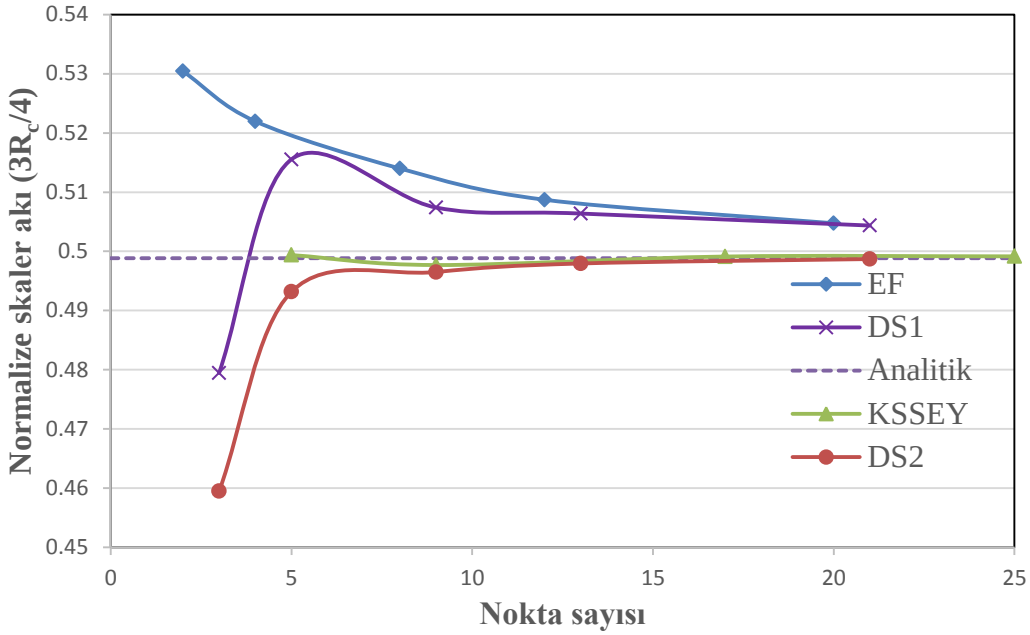
Aşağıdaki 4 şekilde (Şekil 5.2-5) sonuçlar gösterilmektedir. Bu şekillerde yatay kesikli çizgi analitik skaler akı değerini göstermektedir.



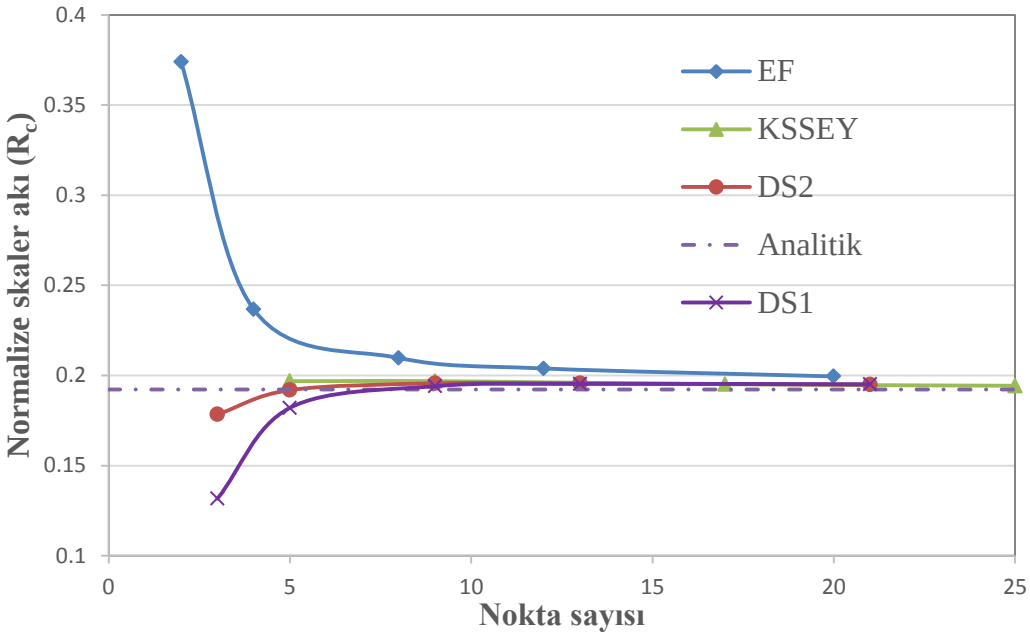
Şekil 5.2 : Küre yarıçapının ¼'ünde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi.



Şekil 5.3 : Küre yarıçapının ½'sinde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi.



Şekil 5.4 : Küre yarıçapının 3/4'ünde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi.



Şekil 5.5 : Küre yüzeyinde skaler akı değerlerinin nokta sayısı ile değişimi.

Bütün yöntemler nokta sayısı arttıkça analitik akı değerine yakınsamaktadır. 4 noktada da analitik sonuca en hızlı yakınsayan ve en doğru sonuçları veren yöntemler sırasıyla KSSEY ve DS2 olmuştur. EF küre yarıçapının dörtte birinde DS1'e göre daha hızlı yakınsamıştır. Küre yarıçapının ortasında her ikisinin performansı hemen hemen aynı iken küre yarıçapının dörtte üçünde ve küre yüzeyinde DS1 EF'den daha doğru akı değerleri üretmiştir.

5.1.1.2 İki grup, kritik reaktör problemleri

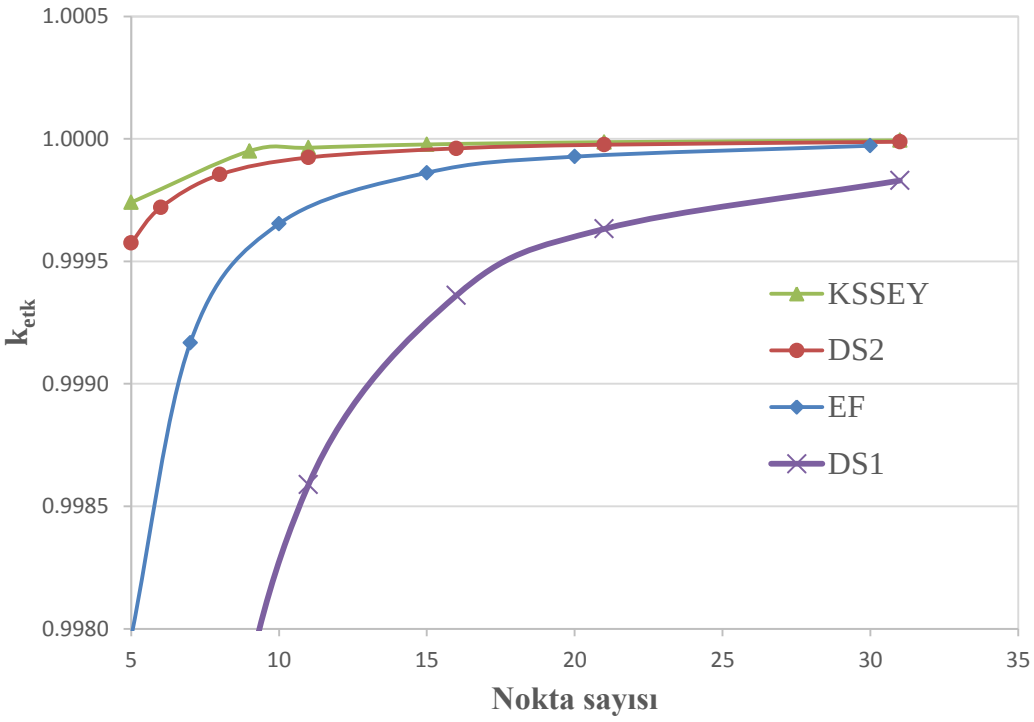
%93 zenginleştirilmiş uranyumdan oluşan, çıplak ve homojen reaktör modeli

Bu problemde de saçılmanın eşyönlü olduğu kabul edilmiştir. Sistemin iki-grup tesir kesitleri Çizelge 5.5'te verilmektedir. Sistemin analitik olarak hesaplanan kritik yarıçapı ise 16.049836 cm'dir.

Çizelge 5.5 : %93 zenginleştirilmiş uranyum sisteminin iki-grup tesir kesitleri (cm^{-1}).

Grup, g	ν	σ_f	$\sigma_{s,gg}$	$\sigma_{s,21}$	σ_t	χ
1	2.50	0.0010484	0.62568	0.029227	0.65696	1.0
2	2.50	0.050632	2.44383	-	2.52025	0.0

Şekil 5.6 farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemleri için hesaplanan k_{etk} değerlerinin nokta sayısına göre değişimini göstermektedir. Nokta sayısı arttıkça bütün yöntemler kritik k_{etk} değerine yakınsamaktadır. Nokta sayısı sabit alındığında KSSEY diğer yöntemlerden daha doğru sonuçlar üretmiştir. Değişik yöntemlerin k_{etk} hesabındaki performansı üzerine buradaki gözlemlerimiz bir önceki problemle aynıdır. KSSEY en iyi peformansı gösterirken DS2 ikinci en iyi performansı göstermiştir.



Şekil 5.6 : İki-grup, çıplak reaktör için NS'ye göre k_{etk} dağılımı.

Çizelge 5.6 verilen k_{etk} değerlerini yaklaşık olarak elde edebilmek için her bir yöntemin göreli CPU zamanlarını göstermektedir. Önceden olduğu gibi yine t, CPU

zamanlarının gözlenen en kısa CPU zamanına (3 elemanlı KSSEY) oranı olarak tanımlanmaktadır. Burada da yine KSSEY en kısa t'leri vermiştir.

Çizelge 5.6 : İki-grup reaktör için göreli koşma zamanları.

Yöntem	k_{etk}~0.999918				k_{etk}~0.999990				k_{etk}~0.999999			
	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t
EF	19	19	16	2.3	44	44	16	5.2	68	68	16	8.2
DS1	44	45	16	9.4	119	120	16	25.4	195	196	16	42.2
DS2	10	11	16	2.0	33	34	16	6.6	63	64	16	12.6
KSSEY	3	7	16	1.0	12	25	16	3.8	23	47	16	7.4

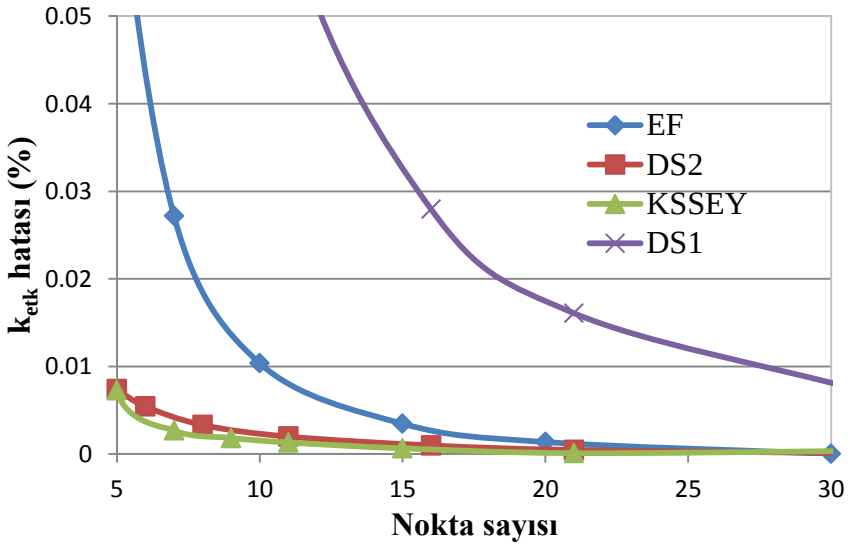
U-Al-H_2O yakıtlı, çıplak reaktör modeli

Bu problemde de saçılmanın eşyönlü olduğu kabul edilmiştir. Sistemin iki-grup tesir kesitleri Çizelge 5.7'de verilmektedir. Sistemin analitik olarak hesaplanmış kritik yarıçapı ise 17.6677 cm'dir.

Çizelge 5.7 : U-Al-H_2O yakıtlı sistemi iki-grup tesir kesitleri (cm^{-1}).

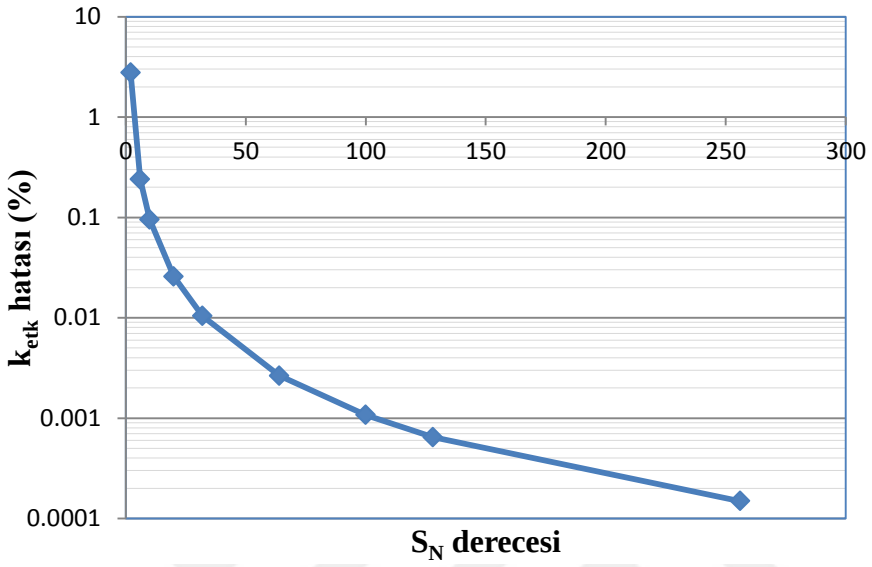
Grup, g	ν	σ_f	$\sigma_{s,gg}$	$\sigma_{s,21}$	σ_t	χ
1	0.0	0.0	0.247516	0.020432	0.268165	1.0
2	2.830023	0.060706	1.213127	-	1.276976	0.0

Bu çalışmada S_{64} yöntemi kullanılmış ve yakınsama kriteri olarak 10^{-6} (% 10^{-4}) alınmıştır. Şekil 5.7'de 4 farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemi için hesaplanan k_{etk} değerlerinde mutlak yüzde hatanın nokta sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Nokta sayısı 5'e kadar DS2, daha sonra KSSEY daha az hatalı sonuçlar üretmiştir.



Şekil 5.7 : U-Al-H_2O sisteminde k_{etk}'de hesaplanan yüzde hatanın nokta sayısına göre değişimi.

Daha sonra KSSEY kullanılarak SPDOT 1000 eleman ve değişik S_N derecelerinde koşulmuştur Bu koşular sonucunda bulunan etkin çoğaltma katsayılarında görülen yüzde hatanın S_N derecesi ile değişimi Şekil 5.8'de gösterilmiştir. KSSEY S_N derecesi arttıkça daha az hatalı k_{etk} hesaplamış ve sıfır hataya doğru yakınsamıştır.



Şekil 5.8 : KSSEY'in S_N derecesi ile yakınsaması.

5.1.1.3 Eş yönsüz saçılmanın olduğu kritik reaktör problemleri

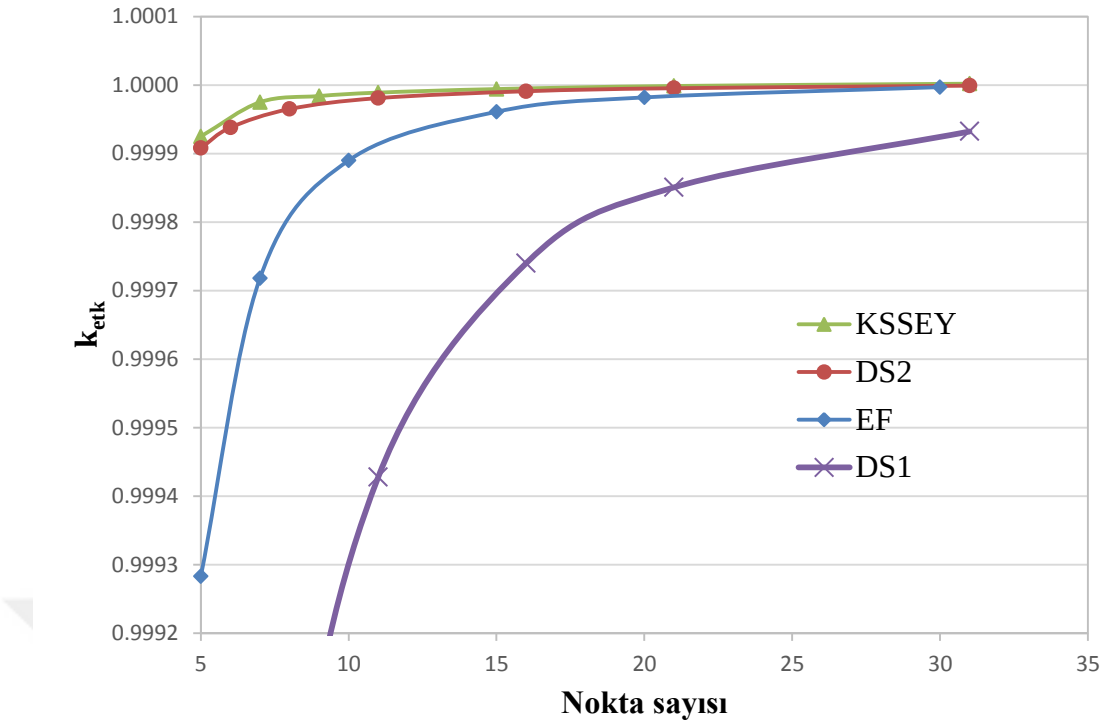
Tek gruplu, çıplak U-D_2O sistemi (1)

Çizelge 5.8'de verilen tesir kesitleri iki istisna hariç ilk problem ile aynıdır. İlk problemden farklı olarak eşyönsüz saçılma, saçılma tesir kesitinin ilk Legendre bileşeni (P_1) sıfırdan farklı alınarak ilave edilmiş ve fisyon başına çıkan ortalama nötron sayısı (ν) artmıştır. Bu değişiklikler nedeniyle analitik olarak hesaplanan kritik yarıçap kısalmış ve R_c=18.30563081 cm olmuştur.

Çizelge 5.8 : Eşyönsüz saçılmanın olduğu U-D_2O reaktörü için tesir kesitleri (cm^{-1}).

ν	σ_f	σ_{s0}	σ_{s1}	σ_t
1.808381	0.054628	0.464338	0.056312624	0.54628

Değişik yöntemler için nokta sayısına karşılık k_{etk} dağılımı Şekil 5.9'da gösterilmiştir. Şekilden görüleceği üzere KSSEY en doğru sonuçları vermektedir. DS2 yöntemi ise ikinci en iyi sonuçları vermektedir. Bu eşyönsüz saçılma probleminde de diğer zamandan bağımsız özdeğer problemi örneklerinde olduğu gibi k_{etk} değerlerini doğru hesaplamada EF üçüncü sırada, DS1 ise son sırada yer almıştır.



Şekil 5.9 : Eşyönsüz saçılma problemi için k_{etk} değerlerinin nokta sayısına göre dağılımı.

Çizelge 5.9 değişik yöntemlerin hesaplama performanlarını ölçmek için göreli CPU zamanlarını göstermektedir. t yine CPU zamanlarının en kısa CPU zamanına (2 elemanlı KSSEY) oranını göstermektedir. Önceden olduğu gibi yine KSSEY verilen k_{etk} değerini diğer yöntemlerden daha kısa sürede hesaplamıştır.

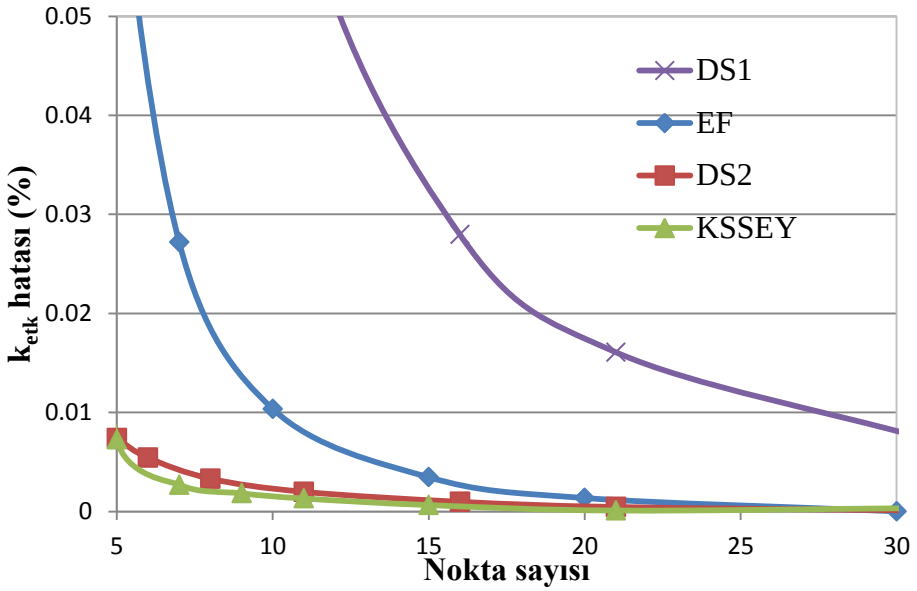
Çizelge 5.9 : Eşyönsüz saçılma problemi için göreli CPU zamanları.

Yöntem	k_{etk}~0.999925				k_{etk}~0.999990				k_{etk}~0.999999			
	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t	ES	NS	DİS	t
EF	12	12	28	1.9	24	24	28	3.6	33	33	28	4.8
DS1	29	30	28	8.0	69	70	28	19.2	104	105	28	29.5
DS2	5	6	28	1.5	14	15	28	3.9	27	28	28	7.0
KSSEY	2	5	28	1.0	5	11	28	2.3	10	21	28	4.4

Tek gruplu, çıplak U-D_2O sistemi (2)

Çizelge 5.8'de verilen tesir kesitleri iki istisna hariç bu problemde de kullanılmıştır. Burada saçılma tesir kesitinin ilk Legendre bileşeni (P_1) σ_{s1}=0.112982569 cm^{-1} alınmış (önceki problemde alınan tesir kesitinin 2 katı) ve kritikliği sağlamak için υ=1.841086'ye çıkartılmıştır. Şekil 5.10'da 4 farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemi için hesaplanan k_{etk} değerlerinde mutlak yüzde hatanın nokta sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Nokta sayısı 5'e kadar DS2, daha sonra KSSEY daha az hatalı

sonuçlar üretmiştir. Ancak aynı eleman sayısı için karşılaştırma yapıldığında ise KSSEY her zaman diğer yöntemlerden daha iyidir.

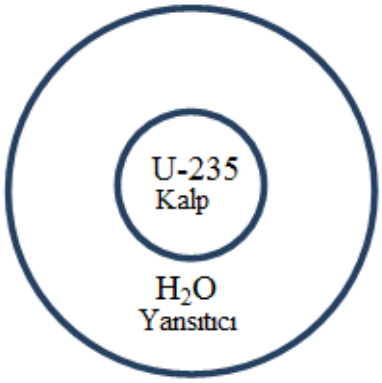


Şekil 5.10 : Eşyönsüz saçılmanın olduğu U-D_2O yakıtlı reaktörde k_{etk}'da hesaplanan hatanın nokta sayısına göre değişimi.

5.1.1.4 İki bölgeli kritik reaktör problemleri

Bir grup, su yansıtıcılı U-235 yakıtlı reaktör (1)

Şekil 5.11 kalp ve yansıtıcı bölgelerinden oluşan iki bölgeli reaktörü göstermektedir. Çizelge 5.10 ise H_2O yansıtıcılı U-235 reaktörü için tesir kesitlerini göstermektedir. Saçılmanın eşyönlü olduğu varsayılır. Kalp ve yansıtıcı bölgelerinin kalınlıkları sırasıyla Rc=6.12745 cm ve 9.191176 cm'dir. Bu boyutlarda kalp bölgesi 2, yansıtıcı su bölgesi ise 3 ortalama serbest yol uzunluğundadır. Sayısal çözümlerde yansıtıcı bölgesindeki eleman sayısı kalp bölgesindeki eleman sayısının 1.5 katı alınmıştır.

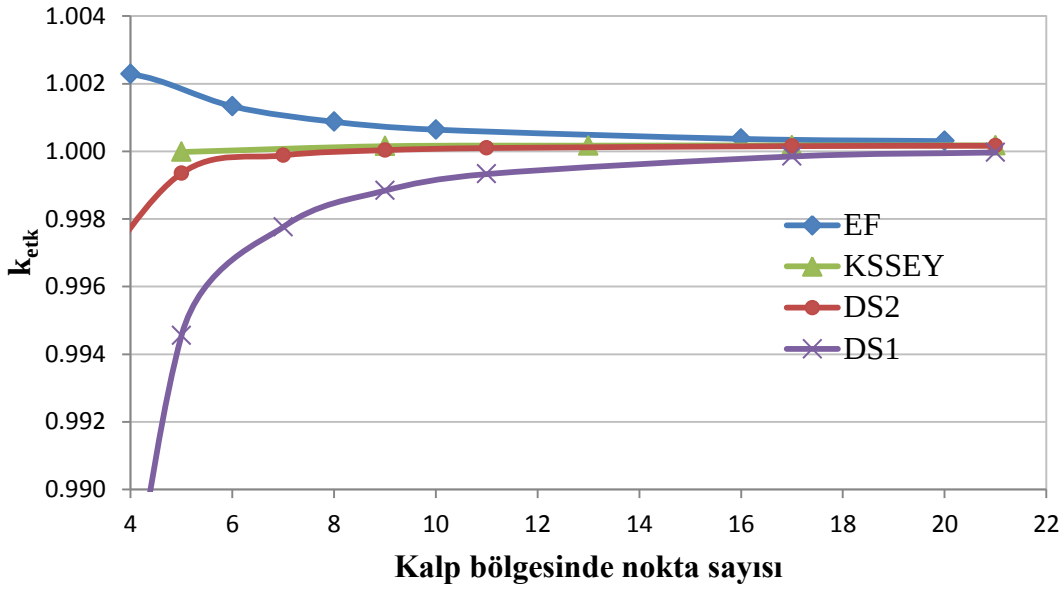


Şekil 5.11 : Su yansıtıcılı, U-235 yakıtlı kritik sistem.

Çizelge 5.10 : Su yansıtıcılı, U-235 yakıtlı kritik sistem için tesir kesitleri (cm^{-1}).

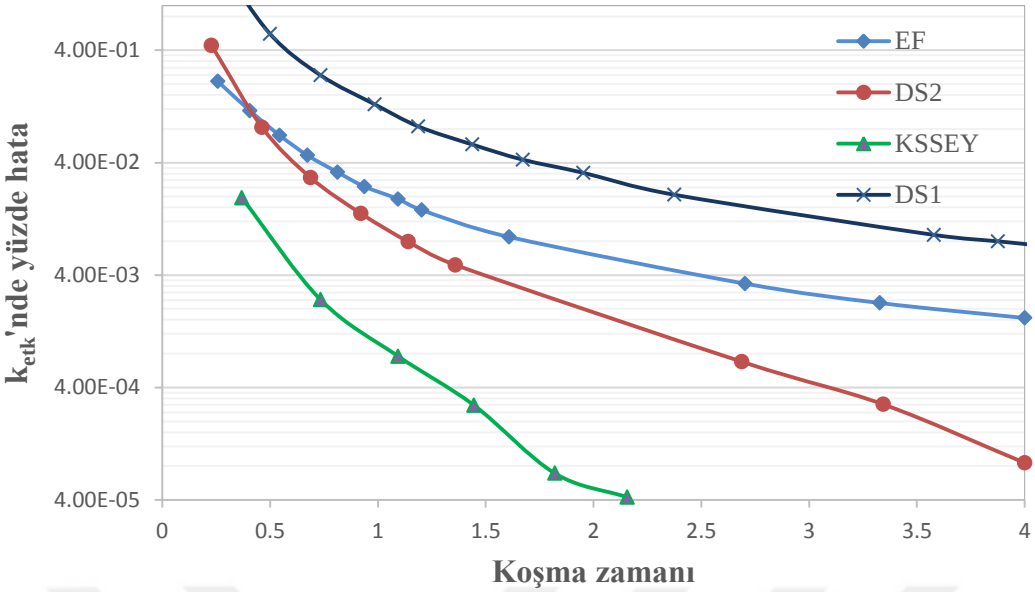
	ν	σ_f	σ_s	σ_t
U-235	2.679198	0.065280	0.248064	0.32640
H_2O	0.0	0.0	0.293760	0.32640

Şekil 5.12'de farklı yöntemler için k_{etk} değerlerinin kalp bölgesindeki nokta sayısına göre dağılımı gösterilmiştir. En doğru k_{etk} sonuçları, özellikle az sayıda nokta alındığında, KSSEY ile elde edilmiştir. Bu yöntemlerin performansı önceki problemlerde görüldüğü gibidir. Tek dikkate değer fark EF'nın analitik k_{etk} değerine yakınsaması yukarıdan olmuştur. Diğer yöntemlerinin yakınsaması ise önceki problemlerde olduğu gibi aşağıdan olmuştur.



Şekil 5.12 : İki bölgeli kritik reaktör için k_{etk} değerlerinin NS'ye göre dağılımı.

Şekil 5.13 4 farklı yöntem için k_{etk}'da görülen hata değerlerine ulaşmak için geçen koşma zamanlarına göre bu hataların dağılımı gösterilmiştir. Burada S_{256} karelemesi kullanılmıştır. Yakınsama kriteri ise 10^{-10} olarak seçilmiştir. Nokta sayısı arttıkça koşma zamanı da artmakta ancak k_{etk} daha doğru hesaplanmaktadır. Bu iki bölgeli reaktör probleminde KSSEY, diğer yöntemlere göre açık ara hesaplama performansı en yüksek olan yöntem olmuştur. İkinci performansı diğerlerinden (EF ve DS1) yüksek yöntem DS2 olmuştur. Sadece ilk veri noktasında DS2'nin 5 eleman sayısı (2'si kalp, 3'ü yansıtıcı bölgesinde) ile yaklaşık EF ile aynı koşma zamanında bulduğu k_{etk} değeri, EF'nin 10 eleman sayısı ile (4'ü kalp, 6'sı yansıtıcı bölgesinde) ile hesapladığı k_{etk} değerinden daha hatalı çıkmıştır. DS1 ise hesaplama performansı en kötü yöntem olmuştur.

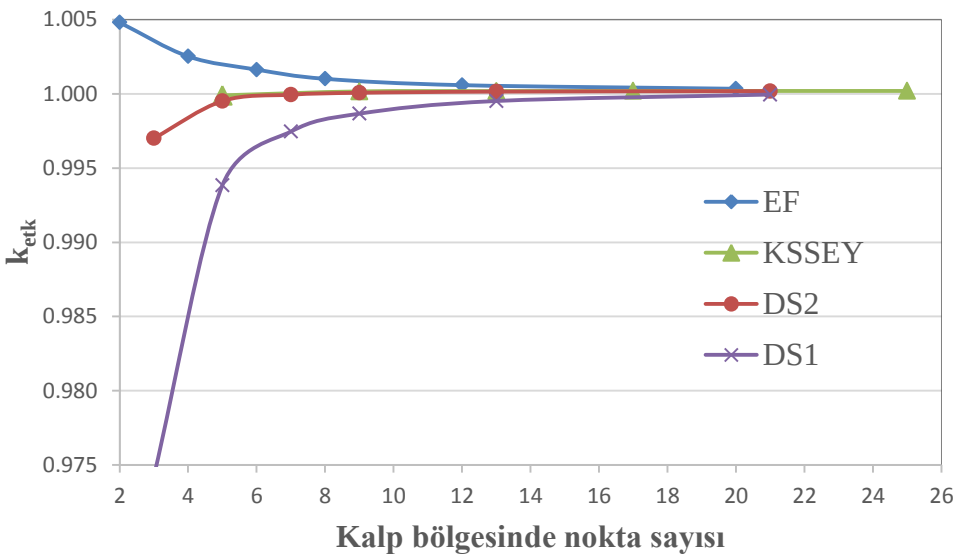


Şekil 5.13 : k_{etk}'nde görülen yüzde hatanın koşma zamanına göre dağılımı.

Bir grup, su yansıtıcılı U-235 yakıtlı reaktör (2)

Bu problemde önceki problemde kullanılan tesir kesitleri kullanılmaktadır. Sadece yansıtıcı kalınlığı 3.063725 cm'ye indirilir. Buna karşılık kritikliği sağlamak için Çizelge 5.10'da verilen υ değeri 2.797101'e çıkartılır. Saçılmanın eşyönlü olduğu varsayılır. Bu boyutlarda kalp bölgesi 2, yansıtıcı su bölgesi ise 1 ortalama serbest yol uzunluğundadır. Sayısal çözümlerde yansıtıcı bölgesindeki eleman sayısı kalp bölgesindeki eleman sayısının yarısı alınmıştır.

Şekil 5.14'te k_{etk} değerlerinin nokta sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Henüz eleman sayısı 2 (NS=5) iken KSSEY k_{etk}=0.999894 bularak analitik değere çok yaklaşmıştır. KSSEY Şekil 5.14'te k_{etk}=1 civarında düz bir çizgi oluşturarak en iyi yöntem olmuştur. Önceki örnekte olduğu gibi DS2 burada da en iyi ikinci sonuçları üreten yöntem olmuştur. EF ve DS1 bu yöntemlere göre özellikle nokta sayısı azken daha kötü k_{etk} değerleri hesaplamış, ancak nokta sayısı arttıkça 1'e yakınsama sağlanmakta ve bütün yöntemlerin performansı birbirine yaklaşmaktadır.

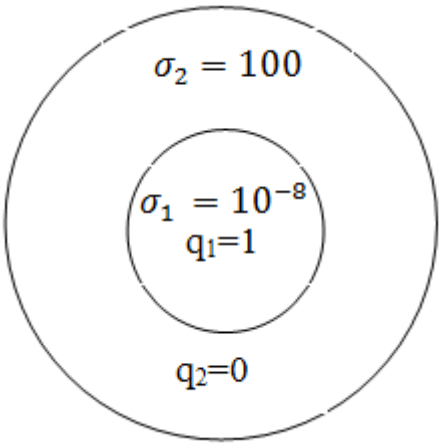


Şekil 5.14 : Yansıtıcılı kritik reaktör için k_{etk} değerlerinin kalp bölgesindeki NS'ye göre dağılımı.

5.1.1.5 İki bölgeli yutucu küre

Bu problemde Şekil 5.15'te görüldüğü gibi ele alınacak küre, farklı malzeme özelliklerinin olduğu iki bölgeden oluşmaktadır. Her iki bölgede de saçılma yoktur. Bu problem r_{ort} malzeme sınırını göstermek üzere şu şekilde tanımlanır [45].

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_1, & eğer\ 0 \le r \le r_{ort}, \\ \sigma_2, & eğer\ r_{ort} \le r \le R \end{cases} \qquad q(r) = \begin{cases} q_1, & eğer\ 0 \le r \le r_{ort}, \\ q_2, & eğer\ r_{ort} \le r \le R \end{cases}$$

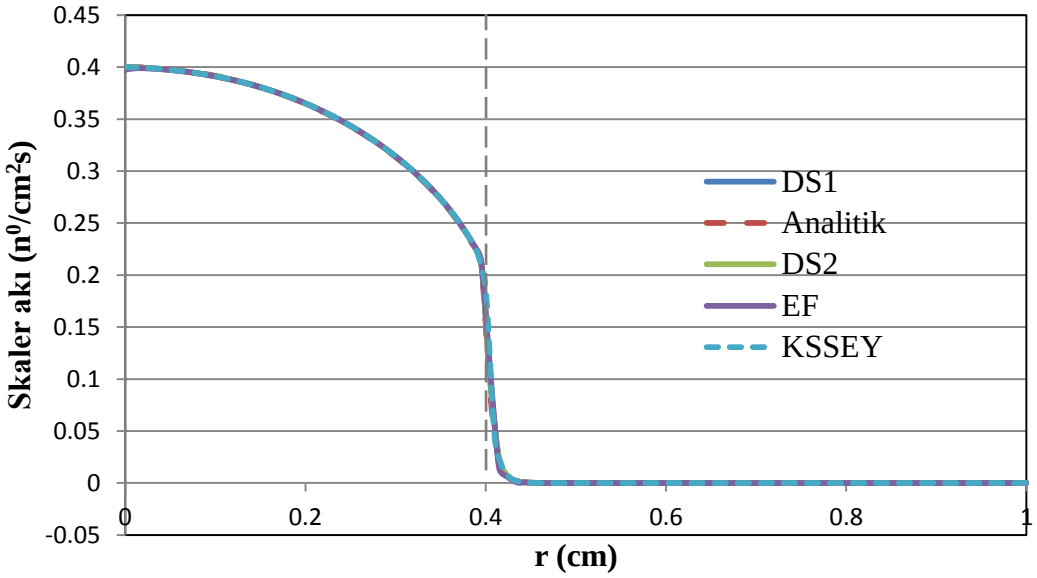


Şekil 5.15 : İki bölgeli yutucu küre problemi.

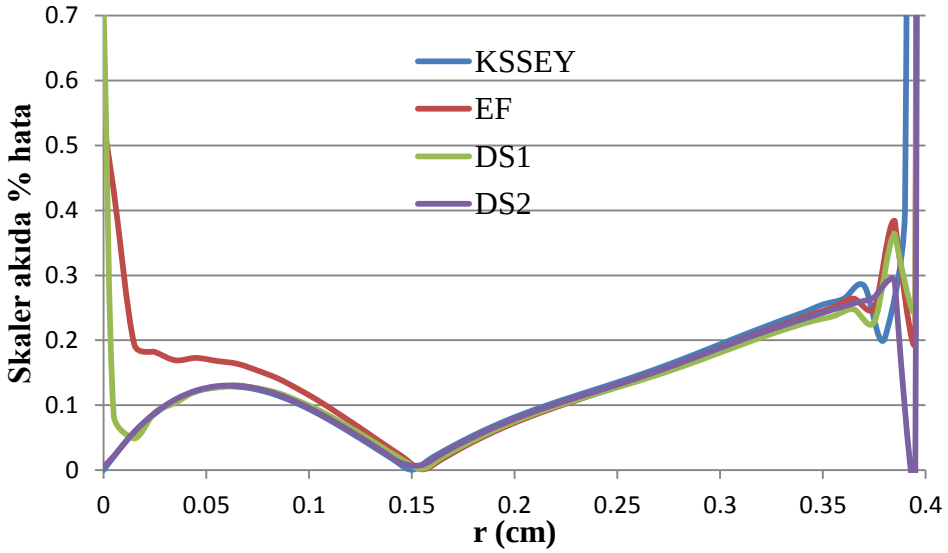
Burada $r_{ort} = 0.4\ cm$, $\sigma_1 = 10^{-8}\ cm^{-1}$, $\sigma_2 = 100\ cm^{-1}$, $q_1 = 1\ cm^{-3}s^{-1}$, $q_2 = 0\ cm^{-3}s^{-1}$, R=1 cm'dir. Küre yüzeyinde boşluk sınır koşulu uygulanmıştır. Bu problemin analitik çözümü için ilgili kaynaklarda 3 fonksiyon verilmektedir [10, 45].

Bu fonksiyonlar çözülerek yönsel ve skaler akılar için gerçek değerler elde edilmiştir.

Şekil 5.16'da 4 farklı yöntemin ve analitik sonuçların grafiği verilmiştir. Bu grafiklerde EF için 100, DS1, DS2 ve KSSEY için 101 nokta kullanılmıştır. Gauss-Legendre kareleme derecesi olarak S_{16} kullanılmıştır. Bu grafikler nerdeyse üst üste çakışmakta gibi gözükse de Şekil 5.17'de gösterildiği gibi özellikle küre merkezi ve akının aniden sıfıra düştüğü r=0.4 cm (iki bölgenin arayüzeyi) civarında skaler akılarda görülen hata diğer noktalara göre oldukça artmaktadır.



Şekil 5.16 : İki bölgeli yutucu kürede ~101 nokta için skaler akı dağılımı.



Şekil 5.17 : Birinci bölgede skaler akılarda yüzde hatanın dağılımı.

Hatanın en fazla görüldüğü küre merkezinde ve arayüzeyde nokta sayısına göre skaler hatada görülen yüzde hata değerleri sırasıyla Çizelge 5.11 ve 5.12'de verilmiştir. EF için nokta sayıları Çizelge 5.11 ve 5.12'de verilen nokta sayılarından "1" eksiktir. KSSEY'de eleman sayısı diğer yöntemlerin eleman sayılarının yarısı alınmıştır. Hem küre merkezinde hem de arayüzeyde KSSEY diğer yöntemler göre daha az hata ile skaler akıyı hesaplamıştır. Küre merkezinde skaler akıyı ikinci en iyi hesaplayan yöntem DS2 olmuştur. DS2 yöntemi akıları gerçek değerinin biraz üzerinde hesaplamıştır. Arayüzeyde KSSEY yine diğer yöntemlere göre daha az hata ile skaler akıyı hesaplamıştır. Nokta sayısı arttıkça süreksiz sonlu eleman yöntemleri EF'ye göre arayüzeyde akıyı çok daha az hatayla hesaplamıştır.

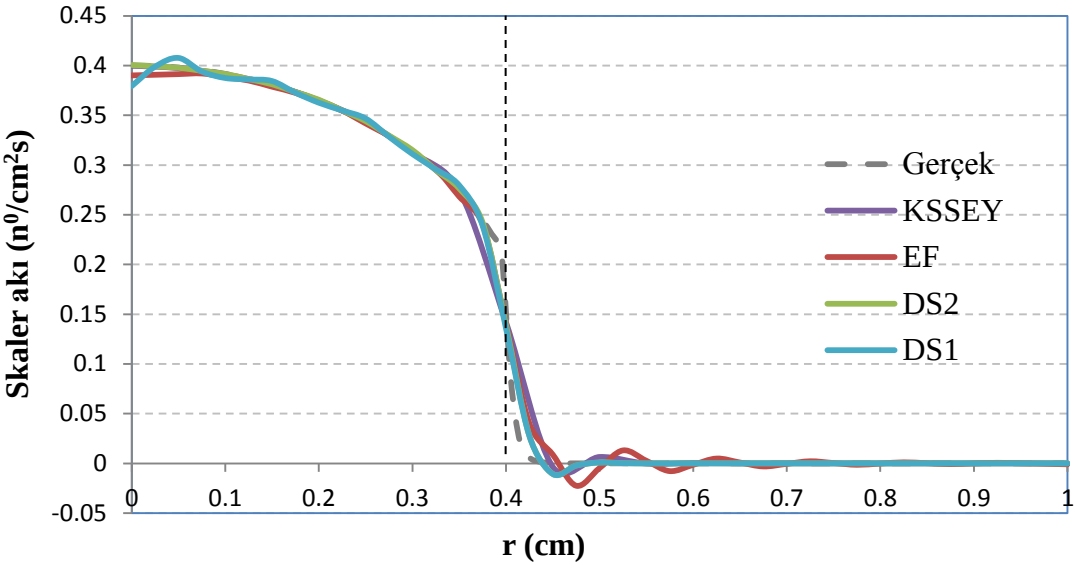
Çizelge 5.11 : Küre merkezinde skaler akılarda görülen yüzde hatalar.

NS	EF	DS1	DS2	KSSEY
21	2.480	5.164	-0.138	0.028
51	1.050	1.466	-0.022	8.71×10^{-4}
101	0.533	0.729	-5.55×10^{-3}	6.23×10^{-5}
201	0.269	0.366	-1.39×10^{-3}	4.59×10^{-6}

Çizelge 5.12 : Arayüzeyde skaler akılarda görülen yüzde hatalar.

NS	EF	DS1	DS2	KSSEY
21	42.54	47.27	43.86	41.04
51	25.93	18.76	18.22	15.35
101	19.96	9.93	9.76	6.99
201	13.60	4.300	4.296	2.45

Sayısal yöntemler orijin civarında fiziksel olmayan hatalı sonuçlar üretebilir. Orijin hatalarının bir tipi ise akı düşmesidir. Değişik yöntemlerde görülen akı düşmelerine örnek grafikler ilgili kaynakta verilmektedir [45]. Nokta sayısı EF için 20 diğer yöntemler için 21 alınarak ve S_{16} yöntemi kullanılarak bu problem çözüldüğünde Şekil 5.18'de gösterilen grafik elde edilir. Küre merkezinde en fazla akı düşmesi DS1'de görülmektedir. Daha sonra EF'de çok az derecede akı düşmesi gözlenmiştir. DS2 ve KSSEY'de akı düşmesi gözlenmemiş ve küre merkezinde akıyı DS1 ve EF'ye göre çok daha az hata ile hesaplamşlardır. Arayüzey civarında sıfıra çok yakın akıların olduğu ikinci bölgede en fazla EF'de akıda fiziksel olmayan dalgalanmalar görülmüştür. EF'de fiziksel olmayan akı dalgalanmaları başka çalışmalarda da gösterilmiştir [15]. Daha fazla nokta sayısı alındığında veya negatif akı düzeltmesi yapıldığında EF'de görülen bu dalgalanmalar kaybolmuştur.



Şekil 5.18 : İki bölgeli yutucu kürede ~21 nokta için skaler akı dağılımı.

Akı düşmesi etkisi yönsel ve uzaysal ayrıklaştırma yöntemlerine ve küre merkezi koşuluna bağlıdır. Akı düşmesini incelemek için nokta sayısını fazla S_N derecesini az almak gereklidir. Çünkü nokta sayısı az alındığında orijine civarındaki noktalar orijine uzak kalmakta ve akı düşmesi gözlenememektedir. Örneğin 1 eleman alındığında akı düşmesini görmek imkansızdır. Ayrıca EF küre merkezinde skaler akıyı doğrudan hesaplayamamakta, orjine en yakın iki noktadaki akı değerlerinden hesaplamaktadır. Burada nokta sayısı EF için 1000 diğer yöntemler için 1001 alınarak akı düşmesi olup olamdığına bakılmıştır. Bu durumda S_2 ve S_4 alındığında tüm yöntemlerde akı düşmesi görülmüş, daha yüksek S_N derecelerinde ise DS1 ve EF'de görülmüş, DS2 ve KSSEY'de görülmemiştir.

Merkez koşulu olarak (2.115) kullanıldığında Çizelge 5.11'de verilen hata değerleri DS1, DS2 ve KSSEY için sıfıra inmiş yani akılar hatasız hesaplanmıştır. EF için ise NS=21, 51, 101 ve201 için sırasıyla %1.47, %0.66, %0.33, %0.17'ye inmiştir. Bu düzelmeye rağmen akı düşmesi sorununu çözememiş yani maksimum akı orijin dışında bir noktada hesaplanmıştır. Ancak küre merkezinde akının mümkün olduğunca az hata ile hesaplanması gereken problemlerde (2.115) koşulu oldukça fayda sağlayacaktır. Küre merkezinde skaler akılarda görülen fiziksel olmayan hatalar iterasyonlar arttıkça giderek büyüyerek komşu hücreleri de etkilebilir ve sayısal taşma hatasına neden olabilir. DS1 yönteminin kuadratik sürümü türetilmiş ancak bazı problemlerde ve bazı koşullarda taşma hatası gözlenmiştir. Bu nedenle bu

tez çalışmasında sayısal analizlerde kullanılmamıştır. Ancak eklerde LQD1 isimli programda yer almaktadır.

5.1.2 Hızlandırma yönteminin değerlendirilmesi

Bu bölümde KIYDHY'nin etkinliğinin baskınlık ve saçılma oranlarına göre nasıl değiştiği araştırılmıştır.

5.1.2.1 Baskınlık oranının KIYDHY'ye etkisi

Baskınlık oranı birkaç farklı yoldan hesaplanabilir [84,85]. Bunlardan difüzyon teorisi kullanılarak elde edilen etkin çoğaltma katsayılarından ikincisinin birincisine oranı baskınlık oranını verir.

$$\rho^{dif} = \frac{k_2}{k_1} \tag{5.1}$$

Burada baskınlık oranları farklı 3 özdeğer problemi ele alınmıştır. Bunlardan ilk ikisi iki gruplu problemdir. İki gruplu difüzyon teorisinde baskınlık oranı aşağıdaki denklemden hesaplanabilir:

$$\rho^{dif} = \frac{\dfrac{\nu_1\sigma_{f1}}{\sigma_{r1}+D_1B_2^2} + \dfrac{\sigma_{s12}}{(\sigma_{r1}+D_1B_2^2)}\dfrac{\nu_2\sigma_{f2}}{(\sigma_{a2}+D_2B_2^2)}}{\dfrac{\nu_1\sigma_{f1}}{\sigma_{r1}+D_1B_1^2} + \dfrac{\sigma_{s12}}{(\sigma_{r1}+D_1B_1^2)}\dfrac{\nu_2\sigma_{f2}}{(\sigma_{a2}+D_2B_1^2)}} \tag{5.2}$$

Burada D difüzyon sabiti, σ_a yutma tesir kesiti ve B geometrik akıbükümdür. Küresel geometride $B_n=n\pi/\tilde{R}$'dir. Burada $\tilde{R}$ kritik yarıçap ve uzatılmış mesafenin toplamıdır. Bu durumda n=1 ve n=2 için $B_2^2 = 4B_1^2$ olur.

İlk olarak yarıçapı ortalama serbest yol (osy) cinsinden oldukça büyük olan kritik bir reaktör ele alalım (Kritik yarıçap R_k=569.430 osy veya R_k=1695.337621 cm). Bu problem için Çizelge 5.13'te tesir kesitleri verilmektedir [83].

Çizelge 5.13 : Büyük boyutlu, iki gruplu reaktör için tesir kesitleri.

Grup	ν	σ_f	σ_c	$\sigma_{g\to gs}$	$\sigma_{g\to g's}$	σ_t	χ
1	2.5	0.002817	0.0087078	0.31980	0.0045552	0.33588	1.0
2	2.5	0.097	0.02518	0.42410	0	0.54628	0.0

Burada σ_c yakalama tesir kesitidir. Bu problemde baskınlık oranı (5.2)'den 0.9993 olarak hesaplanır. Bu oldukça büyük bir baskınlık oranıdır ve bu problemde dış

iterasyonların oldukça yavaş yakınsaması beklenir. Bu problem 500 nokta ve S_{16} yöntemiyle koşulduğunda Çizelge 5.14'te verilen DİS'ler elde edilir. Çizelgeden görüldüğü gibi kaba ızgara bölge sayısı (KIBS) "0" olduğunda yani KIYDHY uygulanmadığı durumda DİS yaklaşık 250 olduğunda yakınsama gerçekleşmiştir.

Çizelge 5.14 : Baskınlık oranı 0.9993 olan iki gruplu problem için DİS'ler.

KIBS	EF	DS1	DS2	KSSEY
0	250	251	251	250
2	238	238	238	238
5	140	140	140	140
10	78	78	78	78
20	70 (%72)	69 (%72.5)	69 (%72.5)	69 (%72.4)
25	72	72	72	72
50	79	79	79	79
100	81	81	81	81
250	83	83	83	83
500	Ir.	84	84	84

Çizelge 5.14'te KIYDHY'nin DİS'i 250'den 69'lara kadar indirebildiği ve DİS'lerde yaklaşık % 72 kazanç sağladığı görülmektedir. KIBS=20 veya p=25 (toplam ince ızgara bölge sayısının KIBS'na oranı) olduğunda en fazla hızlandırma sağlanmıştır. KIBS=500 veya p=1 olduğu durumda sadece EF yönteminde iterasyonlar ıraksamıştır (Ir.). p=1 durumunda her kaba ızgara bölgesi aynı zamanda ince ızgara bölgesi olduğu için bu yönteme ince ızgara yeniden dengeleme hızlandırma yöntemi denilmiştir.

KIYDHY'nin koşma zamanlarına ve toplam iç iterasyon sayılarına (İİS) etkisine bakmak için nokta sayıları EF için 500 diğer yöntemler için 501 olarak alınmış ve S_{16} yöntemi ile koşular yapılmıştır. Eleman sayıları ise EF, DSSEY'ler ve KSSEY için sırasıyla 500, 500 ve 250'dir. Çizelge 5.15'ten görüleceği üzere en iyi hızlandırma DS1, DS2 ve KSSEY için p=1'de elde edilmiştir. EF için p=1 de yakınsama olmamış ve p=2'de en iyi hızlandırma elde edilmiştir. Parantez içerisinde verilen sayılar toplam İİS'lerdir. En hızlı koşular sırasıyla EF, KSSEY, DS2 ve DS1'de gerçekleşmiştir. Koşma zamanlarında en yüksek kazanç EF ve KSSEY'de KIBS=250'de gerçekleşmiş ve sırasıyla % 97.16 ve % 96.62 olmuştur. DS1 ve DS2'de ise KIBS=500'de en iyi hızlandırma elde edilmiş ve kazanç her ikisinde % 96.92 olmuştur. Çizelge 5.15'te hızlandırılmamış koşudan, KIBS 2 olduğu koşuya geçişte toplam İİS azalmasına rağmen koşma zamanlarında küçük bir artış olmuştur.

Bunun nedeni KIYDHY özdeğer problemine uygulandığında k_{etk} hesabı için alt dış iterasyonların devreye girmesinin getirdiği fazladan hesaplama yüküdür.

Çizelge 5.15 : Koşma zamanları ve toplam iç iterasyon sayıları.

KIBS	EF	DS1	DS2	KSSEY
0	45.8 (34389)	84.5 (34536)	77.8 (34536)	62.1 (34414)
2	48.8 (33116)	86.8 (33137)	80.2 (33137)	62.7 (33133)
5	31.0 (20920)	54.8 (20939)	50.9 (20939)	39.8 (20938)
10	17.1 (11507)	30.3 (11530)	28.0 (11530)	21.9 (11525)
20	10.9 (7266)	19.2 (7232)	17.6 (7232)	-
25	9.6 (6377)	16.7 (6398)	15.7 (6398)	12.3 (6388)
50	6.0 (3953)	10.8 (4015)	10.0 (4015)	7.9 (4002)
100	3.2 (2011)	6.1 (2207)	5.5 (2206)	-
250	1.3 (650)	3.0 (949)	2.7 (948)	2.1 (911)
500	IR	2.6 (795)	2.4 (795)	-

Bu problemde k_{etk} değerleri EF ve KSSEY'de 0.999643, DS1 ve DS2'de 0.999644 çıkmıştır. Sistem boyutları çok büyük olduğu için difüzyon teorisinin bile çok doğru sonuçlar üretebileceği bu sistemde, nokta sayısını ve S_N derecesini azaltarak yapılan koşularda da yaklaşık aynı değer bulunmuştur.

İkinci olarak yarıçapı osy cinsinden çok daha küçük (R_k=10.5441 osy veya R_k=16.049836 cm, $\tilde{R} = 16.7311$ cm) olan yine iki gruplu kritik bir reaktör ele alalım. Bu problem için tesir kesitleri Çizelge 5.5'te verilmiştir.

Bu sistemin baskınlık oranı (5.2)'den 0.4116 olarak hesaplanır. Bu problem 50 nokta ve S_{16} yöntemiyle koşulduğunda Çizelge 5.16'da verilen DİS'ler elde edilir. DİS'lerde en fazla azalma KIBS=10 (p=5) olduğunda gerçekleşmiş ve bütün yöntemlerde kazanç % 56.25 olmuştur. KIBS=50 (p=1) olduğunda ise hiçbir yöntemde yakınsama sağlanamamıştır. Baskınlık oranı düşünce KIYDHY'nin de etkinliği ilk probleme göre azalmış ve DİS'lerde kazanç % 72'den % 56'ya inmiştir. Koşma zamanlarında en fazla kazanç ise KIBS=10 olduğunda sağlanmış ve % 84 - %

87 aralığında gerçekleşmiştir. DİS'te olduğu gibi koşma zamanlarındaki kazançta ilk probleme göre azalma olmuştur.

Çizelge 5.16 : Baskınlık oranı 0.4116 olan iki gruplu problem için DİS'ler.

KIBS	EF	DS1	DS2	KSSEY
0	16	16	16	16
2	12	12	12	12
5	9	9	9	9
10	7	7	7	7
25	16	19	19	22
50	IR	IR	IR	IR

Son olarak yarıçapı osy cinsinden daha da küçük (R_k=2.4248249802 osy veya R_k=7.428998 cm, $\tilde{R} = 9.60547$ cm) olan tek gruplu kritik bir reaktör ele alalım. Bu problem için tesir kesitleri Çizelge 5.17'de verilmiştir [83].

Çizelge 5.17 : Tek gruplu reaktör için tesir kesitleri.

ν	σ_f	σ_c	σ_s	σ_t
2.70	0.065280	0.013056	0.248064	0.32640

Tek gruplu özdeğer problemleri için baskınlık oranı aşağıdaki denklemden hesaplanır [84]:

$$\rho^{dif} = \frac{1 + \frac{1}{3\sigma_t\sigma_a}\left(\frac{\pi}{R + 0.7104/\sigma_t}\right)^2}{1 + \frac{4}{3\sigma_t\sigma_a}\left(\frac{\pi}{R + 0.7104/\sigma_t}\right)^2} \quad \textbf{(5.3)}$$

Bu problem için baskınlık oranı 0.3640 olarak hesaplanmıştır. Bu problem 50 nokta ve S_{16} yöntemiyle koşulduğunda Çizelge 5.18'de verilen DİS'ler elde edilir. DİS'lerde en fazla azalma KIBS=5 (p=10) olduğunda gerçekleşmiş ve bu optimum durumda bütün yöntemler için yüzde kazanç değerleri parantez içerisinde verilmiştir. Baskınlık oranı düşünce KIYDHY'nin de etkinliği ilk iki probleme göre azalmış ve DİS'lerde kazanç yaklaşık % 37'lere inmiştir. Bu problemde koşma zamanları çok kısa (0.03 s - 0.1 s) olduğu için hassas bir kazanç yüzdesi hesaplama mümkün olamasa da optimum durumda (p=10) koşma zamanlarında görülen kazanç % 50 ile % 20 arasında değişmiştir. DİS'te olduğu gibi koşma zamanlarındaki kazançta ilk iki probleme göre azalma olmuştur.

Sonuç olarak yukarıda ele aldığımız üç problem için yapılan sayısal analizden, KIYDHY'nin etkinliğinin baskınlık oranı ile doğru orantılı artmakta olduğu ve baskınlık oranı 1'e çok yakın olduğu durumda ise oldukça etkili bir hızlandırma gerçekleştirdiği gözlenmiştir.

Çizelge 5.18 : Baskınlık oranı 0.3640 olan tek gruplu problem için DİS'ler.

KIBS	EF	DS1	DS2	KSSEY
0	16	16	16	16
2	11	11	11	11
5	10 (%37.5)	10 (%37.5)	11 (%31.25)	10 (%37.5)
10	13	13	13	13
25	22	21	21	21
50	36	32	33	33

5.1.2.2 Saçılma oranının KIYDHY'ye etkisi

Bu bölümde saçılma oranı c'nin İİS'leri, KIYDHY uygulanmadığı ve uygulandığı durumlarda ne şekilde değiştirdiğini araştıracağız. Sadece iç iterasyona veya diğer bir deyişle saçılma kaynağı iterasyonuna bakmak için dış iterasyonun olmadığı bir sabit kaynak problemi ele alınır. Bu problemde toplam tesir kesiti ve kaynak değeri sabit kabul edilmiştir. (σ_t=1 cm^{-1} , s=1 $cm^{-3}s^{-1}$). Saçılma tesir kesiti tamamen yutucu ortam (σ_s =0 cm^{-1}) ile tamamen saçıcı ortam (σ_s =1 cm^{-1}) arasında değiştirilerek 0 ile 1 arasında farklı c değerleri için koşular yapılır. Küre yarıçapı 10 cm seçilmiştir. Küre yüzeyinde boşluk sınır koşulu vardır. Başlangıçta optimum p'yi bulmak için c=0.5 seçilerek koşular yapılır. Bu koşularda küre 50 aralığa bölünmüş ve yönsel ayrıklaştırmada S_{16} yöntemi kullanılmıştır. Bu koşuların sonuçları Çizelge 5.19'da verilmiştir. (HY: Hızlandırma Yok)

Çizelge 5.19 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler.

p	EF	DS1	DS2	KSSEY
HY	18	18	18	18
25	14	14	14	14
10	10	10	10	10
5	7	8	8	8
2	6	6	6	7
1	7	7	7	7

Çizelge 5.19 incelendiğinde p=2'nin optimum olduğu görülür. Optimum durumda İİS 18'den 6'ya düşerek % 66.7 kazanç sağlanmıştır. Dış iterasyon olmadığı için İİS ile koşma zamanı doğru orantılı olarak değişir. Bu problem aynı koşullarda (NS:50,

S_{16}) ve farklı c değerleri için, optimum p değerinde (p=2) koşulduğunda Çizelge 5.20'de verilen sonuçlar elde edilir:

Çizelge 5.20 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler (50 eleman).

c	HY	EF	DS1	DS2	KSSEY	Kazanç (%)
0	1	1	1	1	1	0
0.25	9	5	5	5	5	44.4
0.5	18	6	6	6	7	61.1
0.75	41	10	10	10	10	75.6
0.85	66	16	16	16	16	75.8
0.90	91	25	25	25	25	72.5
0.925	112	35	36	36	36	67.9
0.950	146	61	66	64	65	55.5
0.975	210	324	487	414	450	-
0.985	254	IR	IR	IR	IR	-
0.995	323	IR	IR	IR	IR	-
1	375	IR	IR	IR	IR	-

Çizelge 5.20'nin ikinci sütununda yer alan hızlandırma uygulanmadığı durumda İİS'ler 4 uzaysal farklama yönteminde de aynı çıkmıştır. Beklendiği gibi c değeri arttıkça İİS'de artmış, iterasyonlar giderek daha yavaş yakınsamıştır. c=0.95'e kadar hızlandırma sağlanabilmiş, sonrasında iç iterasyonlar ıraksamıştır. Son sütunda KIYDHY'nin KSSEY'ne uygulanması ile iç iterasyon sayısında elde edilen yüzde kazanç gösterilmiştir. Tüm yöntemlerde yaklaşık olarak aynı iterasyon sayıları elde edildiği için sadece KSSEY için yüzde kazançlar yazılmıştır. KIYDHY, c=0.85'e kadar giderek artan oranda hızlandırma sağlamıştır. KIYDHY şartlı kararlı bir hızlandırma yöntemidir ve etkinliği aynı zamanda optik kalınlığa da bağlıdır. Bu problem aynı koşullarda p=2 için 20 aralıkla koşulduğunda ise bütün c değerlerinde yakınsama sağlanmış ve Çizelge 5.21'de verilen sonuçlar elde edilmiştir:

Çizelge 5.21'de c=0.85 ve c=1'de hızlandırmanın olmadığı durumda İİS'ler 4 uzaysal farklama yöntemi için farklı çıkmış ve bu farklı değerler parantez içerisinde gösterilmiştir. Son sütunda KSSEY için KIYDHY'nin sağladığı yüzde kazanç değerleri gösterilmektedir. Saçılma oranı 1'e yaklaştıkça İİS'de sağlanan kazanç artmış ve KIYDHY'nin etkinliği artmıştır.

Sonuç olarak KIYDHY eğer c=1 civarında ıraksamazsa c arttıkça giderek daha iyi bir hızlandırma sağlamaktadır. Bu durumda KIYDHY'nin oldukça saçıcı ortamlarda etkili bir hızlandırma yöntemi olduğu söylenebilir.

Çizelge 5.21 : Sabit kaynak problemi için İİS'ler (20 eleman).

c	HY	EF	DS1	DS2	KSSEY	Kazanç (%)
0	1	1	1	1	1	0
0.25	9	5	6	6	5	44.4
0.5	18	7	8	8	8	55.5
0.75	41	9	10	10	10	75.6
0.85	65,66	11(65)	11(66)	11(66)	11(66)	83.3
0.90	91	12	12	12	12	86.8
0.925	112	14	13	13	13	88.4
0.950	146	16	15	14	15	89.7
0.975	210	18	17	17	18	91.4
0.985	254	20	19	18	19	92.5
0.995	323	21	20	20	20	93.8
1	374,375	22(374)	21(374)	20(375)	21(375)	94.4

5.1.2.3 Optik kalınlığın KIYDHY'ye etkisi:

Üçüncü olarak KIYDHY'nin optik kalınlıkla değişimi incelenmiştir. Optik kalınlık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau = \sigma_t \Delta\rho \tag{5.4}$$

Koşularda toplam tesir kesiti yine sabit alınmış, fakat hücre genişliği ($\Delta\rho$) değiştirilmiştir. c=0.9 ve p=2 alınmış ve S_{16} yöntemi ile koşular yapılmıştır. Aşağıda verilen Çizelge 5.22'de İİS'nin optik kalınlıkla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Hızlandırma olmadığında iterasyon sayısı genellikle 91 olmuş, ancak $\tau = 2$ olduğunda EF'de 90 diğerlerinde 91, $\tau = 5$ olduğunda ise EF, DS1, DS2 ve KSSEY için sırasıyla 87, 90, 92, 91 olmuştur. Son sütunda verilmiş olan yüzde kazanç hesabı yine KSSEY'ye göre yapılmıştır. En fazla kazanç $\tau = 0.5$'te sağlanmıştır. Başka bir çalışmadan da görüleceği üzere [59], τ çok büyük veya küçük olduğunda KIYDHY etkili olamamakta ama ortalardaki τ değerlerinde etkili olmaktadır.

Çizelge 5.22 : İç iterasyon sayıları (c=0.9, S_{16}, p=2).

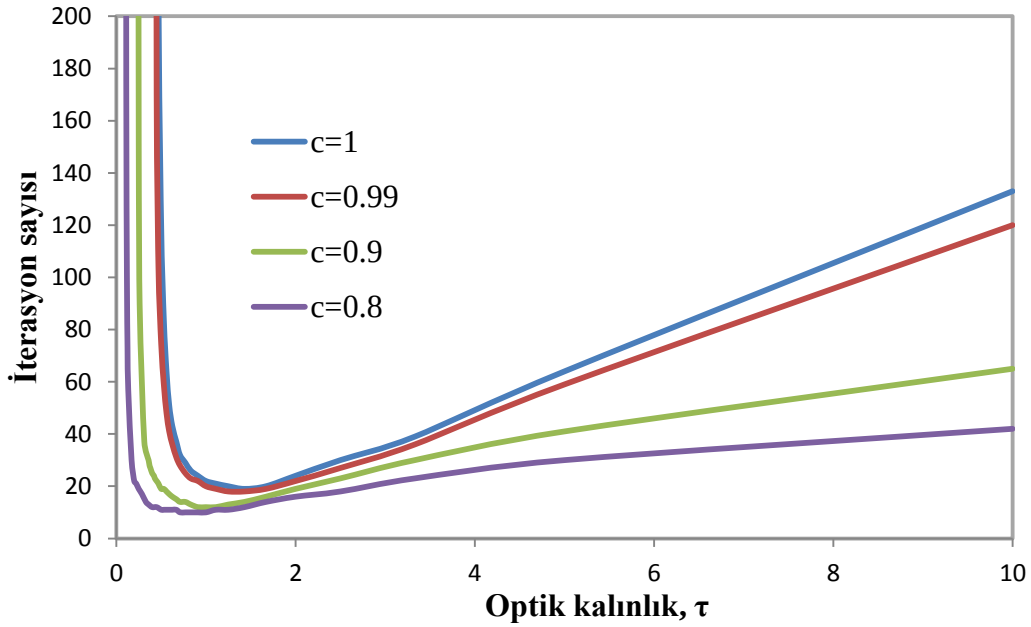
τ	HY	EF	DS1	DS2	KSSEY	Kazanç (%)
0.01	91	IR	IR	IR	IR	-
0.1	91	IR	IR	IR	IR	-
0.2	91	25	25	25	25	72.5
0.5	91	12	12	12	12	86.8
1	91	15	19	19	19	79.1
1.25	91	18	23	23	23	74.7
2	90,91	28	39	40	41	54.9
5	87,90,92,91	39	53	57	62	31.9

Çizelge 5.23'te tamamen saçıcı bir ortamda (c=1) farklı p değerleri için KIYDHY'nin yakınsadığı τ değerlerinin bulunduğu aralıklar verilmiştir. Sadece EF'de p=1 için 2 ayrı kararlılık bölgesi bulunmuştur. Ayrıca sadece p=1 için farklı kararlılık bölgeleri bulunmuş, p>1 için ise KIYDHY tüm yöntemlerde aynı kararlılık bölgelerinde yakınsamıştır.

Çizelge 5.23 : Tamamen saçıcı ortamda farklı p değerleri için kararlılık bölgeleri.

p	EF	DS1	DS2	KSSEY
1	0.43≤τ≤1.43 3.33≤τ≤10	0.43≤τ≤10	0.45≤τ≤10	0.48≤τ≤10
2	0.24≤τ≤5	0.24≤τ≤5	0.24≤τ≤5	0.24≤τ≤5
4	0.12≤τ≤2.5	0.12≤τ≤2.5	0.12≤τ≤2.5	0.12≤τ≤2.5
5	0.095≤τ≤2	0.095≤τ≤2	0.095≤τ≤2	0.095≤τ≤2
8	0.06≤τ≤1.25	0.06≤τ≤1.25	0.06≤τ≤1.25	0.06≤τ≤1.25
10	0.048≤τ≤1	0.048≤τ≤1	0.048≤τ≤1	0.048≤τ≤1
25	0.019≤τ≤0.4	0.019≤τ≤0.4	0.019≤τ≤0.4	0.019≤τ≤0.4

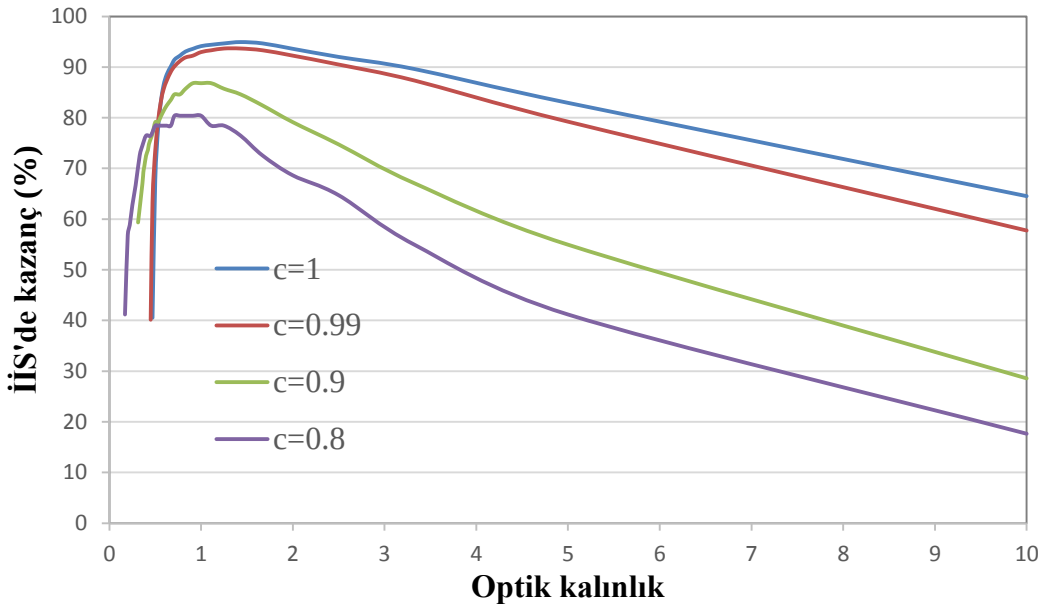
Şekil 5.19'da KSSEY için farklı c değerleri ile yapılan koşuların sonucu gösterilmiştir. Bu koşular p=1 ve 4 farklı c değeri için yapılmış ve İİS'nin optik kalınlıkla değişimi elde edilmiştir. Saçılma oranı arttıkça İİS ve optimum τ değeri de artmaktadır.



Şekil 5.19 : 4 farklı c değeri için İİS'nin optik kalınlıkla değişimi.

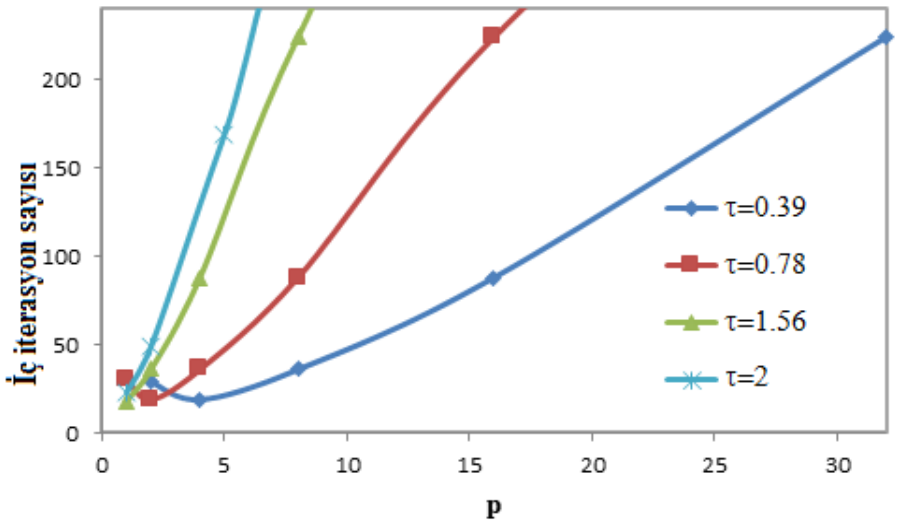
Hızlandırma uygulanmadığı durum için İİS'ler c=1, 0.99, 0.9 ve 0.8 için sırasıyla 375, 284, 91 ve 51 olarak bulunmuştur. Bu değerler çok küçük veya büyük birkaç τ

değeri haricinde optik kalınlığın değişiminden etkilenmemiştir. Bu durumda İİS'lerden elde edilen yüzde kazanç değerlerinin optik kalınlıkla değişimi Şekil 5.20'de gösterilmiştir. En fazla kazanç % 94.9 ile c=1 ve $\tau = 1.43$ olduğunda elde edilmiştir.



Şekil 5.20 : 4 farklı c değeri için İİS'de elde edilen yüzde kazançın optik kalınlıkla değişimi.

Daha sonra İİS'nin 4 farklı τ durumu için p ile değişimi incelenmiştir. p'nin alabileceği değerleri arttırmak için önceki problemin yarıçapı 10 cm'den 100 cm'ye çıkartılmıştır. Saçılma oranı c=0.99 iken KSSEY'nin hızlandırılması yapılmış ve Şekil 5.21'de gösterilen grafik elde edilmiştir.



Şekil 5.21 : 4 farklı τ durumu için İİS'nin p ile değişimi.

Bu probleme hızlandırma uygulanmadığında 4 farklı τ durumu için İİS 916 olmuştur. Optimum p değerleri τ=0.39 için 4, τ=0.78 için 2 diğer τ değerleri için 1 olarak bulunmuştur. Optik kalınlık arttıkça optimum p değeri de 1'e yaklaşmıştır. Optimum p durumunda İİS'de kazanç ilk üç τ değeri için yaklaşık % 98, τ=2 için ise % 97.5 olmuştur.

Son olarak R=10 cm alınmış ve c=0.99 ve c=0.8 olduğu durumlarda optik kalınlık değiştirilerek KSSEY için optimum p değerlerine bakılmıştır. Çizelge 5.24'te görüldüğü gibi optik kalınlık arttıkça ince ızgara yeniden dengeleme yöntemi (p=1) optimum yöntem olmaktadır.

Çizelge 5.24 : Optik kalınlığa göre optimum p değerlerinin değişimi.

c=0.99		c=0.8	
τ	Opt. p	τ	Opt. p
0.1	10	0.1	10
0.2	5	0.2	5
0.33	3,5	0.33	3
0.357	4	0.4	1
0.5	2	0.5	2
1	1	1	1
1.25	1	1.25	1

Sayısal sonuçlar S_N derecesindeki değişimden etkilenmemektedir. Ayrıca diğer uzaysal farklama yöntemleri için de benzer sonuçlar elde edilmektedir. Sadece KIYDHY EF'ye uygulandığında, p=1 olduğu koşularda diğer yöntemlere göre daha fazla oranda kararsız olmaktadır.

5.2 Zamana Bağlı Transport Denkleminin Çözümüne Yönelik Uygulamalar

Zamana bağlı transport denklemi çözülürken her zaman adımında buna eşdeğer kritik altı reaktör problemi çözülmektedir. Bu nedenle zamana bağlı problemlere geçmeden önce SPDOT programı kritik altı reaktör sistemleri için geliştirilmiş ve doğrulanmıştır. Doğrulama için aşağıda tesir kesitleri ve diğer parametreleri verilen reaktör sistemi kullanılmıştır.

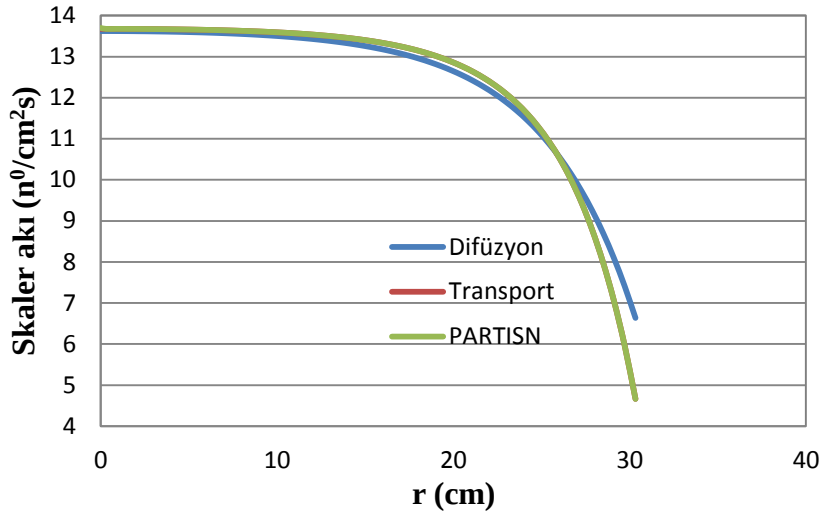
D=1.4842 cm, σ_t=0.3264 cm^{-1}, σ_s=0.225216 cm^{-1}, σ_f=0.01 cm^{-1}, σ_a=0.101184 cm^{-1} k_∞=0.280676786, 1 osy=3.0637255 cm, R=10 osy=30.637255 cm, R_{uzt}=33.7986 cm s=1 $cm^{-1}s^{-1}$.

Bu problemin difüzyon teorisi ile analitik çözümü için gerekli denklem ilgili kaynakta verilmektedir [86]. Transport hesabı ise geliştirilen SPDOT programı ile yapılmıştır. Difüzyon teorisinde hesaplanan sonuçla karşılaştırabilmek için S_2 yöntemi kullanılmıştır. Çizelge 5.25'te EF için 50, diğer yöntemler için 51 nokta alındığında küre merkezinde hesaplanmış skaler akılar gösterilmiştir. Bütün yöntemler birbirine yakın sonuçlar üretmiştir.

Çizelge 5.25 : Kritik altı reaktörde küre merkezinde skaler akı değerleri.

Difüzyon	EF	DS1	DS2	KSSEY
13.6238	13.6773	13.6771	13.6769	13.6767

Şekil 5.22'de geliştirilen transport kodunun yönsel ayrıklaştırmada S_2 yöntemi ve uzaysal ayrıklaştırmada EF ile koşulması sonucu elde edilen skaler akıların dağılımı ve difüzyon teorisi ile karşılaştırılması görülmektedir. Aynı zamanda yine bir transport kodu olan PARTISN4.0 kodunun S_2 ile koşulması sonucu elde edilen akıların dağılımı da bunlara eklenmiştir. PARTISN nötron yada parçacık dağılımının yönsel değişimi için ayrık ordiatlar yaklaşımını kullanmaktadır. Bunun yanında, eğrisel geometrilerde yönsel ayrıklaştırma için elmas farklaması kullanılır [75]. PARTISN sonuçları ile SPDOT sonuçları üst üste çakışmaktadır ve tamamen aynı skaler akı değerlerini üretmiştir.



Şekil 5.22 : Alt-kritik reaktör için difüzyon-transport (S_2) karşılaştırması.

SPDOT kritik altı reaktör probleminde doğrulandıktan sonra KF ve EF kullanılarak zamana bağlı problemleri çözebilecek şekilde geliştirilmiştir. Bu bölümde zamana bağlı test problemleri kullanılarak geliştirilen yöntemler karşılaştırılmaktadır.

5.2.1 Sonsuz ortam problemleri

5.2.1.1 Üniform kaynaklı, çoğaltkan olmayan sonsuz ortam

Analitik çözüm

Bu bölümde üniform bir s kaynağı içeren sonsuz bir ortamı ele alınmıştır. Bu ortamda transport denklemi:

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi(t)}{dt}+\sigma\phi(t)=\sigma_s\phi(t)+s,\quad \phi(0)=0 \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi(t)}{dt}+\sigma_a\phi(t)=s \tag{5.6}$$

$$\frac{d\phi}{dt}+\frac{1}{l_\infty}\phi(t)=sv \tag{5.7}$$

olarak verilir. Burada:

$$l_\infty=\frac{1}{v\sigma_a} \tag{5.8}$$

olarak tanımlanır. (5.7)'de verilen diferansiyel denklemin çözümünden:

$$\phi(t)=svl_\infty(1-e^{-\frac{t}{l_\infty}}) \tag{5.9}$$

(5.7)'nin analitik çözümü elde edilir. Bu problem için kullanılan veriler ise şunlardır:

v=1 cm/s, s=1 cm^{-3} s^{-1}, σ=1 cm^{-1}, σ_s=0.5 cm^{-1}, l_∞=2 s, ortalama serbest zaman (osz), $1/(\sigma_t v)$=1 s

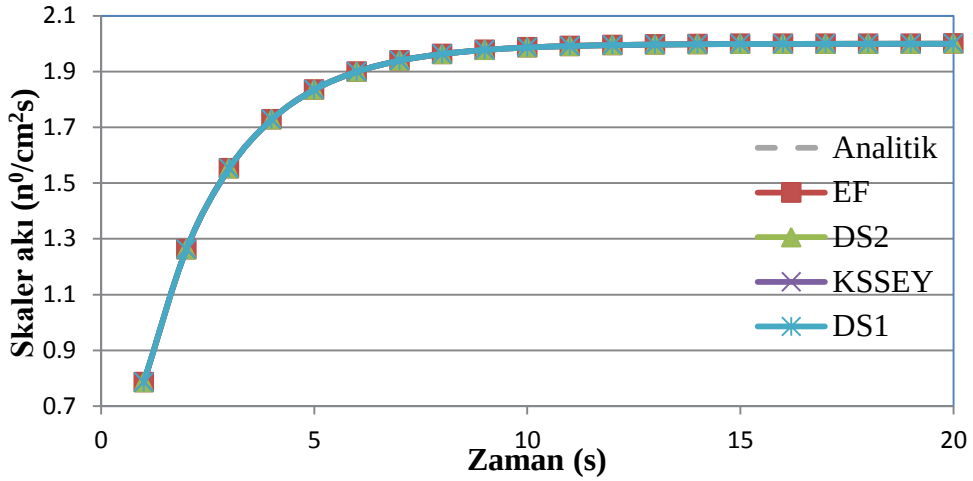
Bu veriler kullanılarak problemin analitik çözümü için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\phi(t)=2(1-e^{-\frac{t}{2}}) \tag{5.10}$$

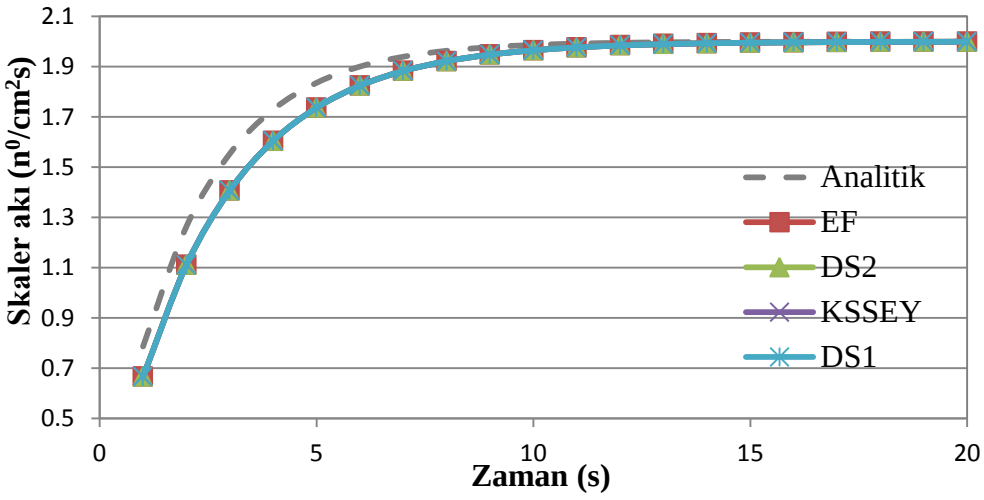
Sayısal çözüm

Bu problemin sayısal çözümü için geliştirilen kodlar kullanılmıştır. Sonsuz ortamı modelleyebilmek için 5 cm yarıçaplı bir küre ele alınmış ve bu kürenin yüzeyinde yansıtıcı sınır koşulu uygulanmıştır. Bu küre EF, DSSEY ve KSSEY için sırasıyla 7,

6 ve 3 kabuğa bölünmüş ve 7 nokta oluşturulmuştur. Yönsel ayrıklaştırmada S_8 karelemeleri kullanılmıştır. Zaman ayrıklaştırmasında ise KF kullanılmıştır. Şekil 5.23'te zaman adımı $\Delta t=0.01$ s alındığında, analitik ve sayısal skaler akı değerlerinin dağılımı gösterilmektedir. $\Delta t=0.01$ s olduğunda bütün yöntemlerin sonuçları analitik sonuçla neredeyse üst üste çakışmaktadır. Aynı durum $\Delta t=0.1$ s için de gözlenmiştir. Şekil 5.24'te görüldüğü gibi $\Delta t=1$ s olunca 10. saniyeye kadar sayısal sonuçlar analitik sonuçlardan daha küçük çıkmış ancak zaman ilerledikçe daha az hata ile akılar hesaplanmıştır.



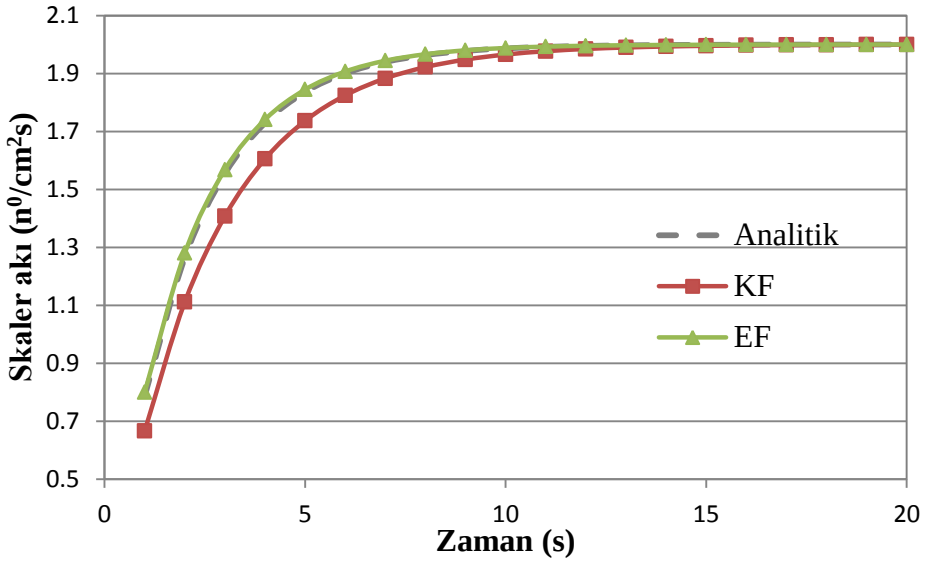
Şekil 5.23 : Zaman adımı $\Delta t=0.01$ s alındığında skaler akı dağılımı.



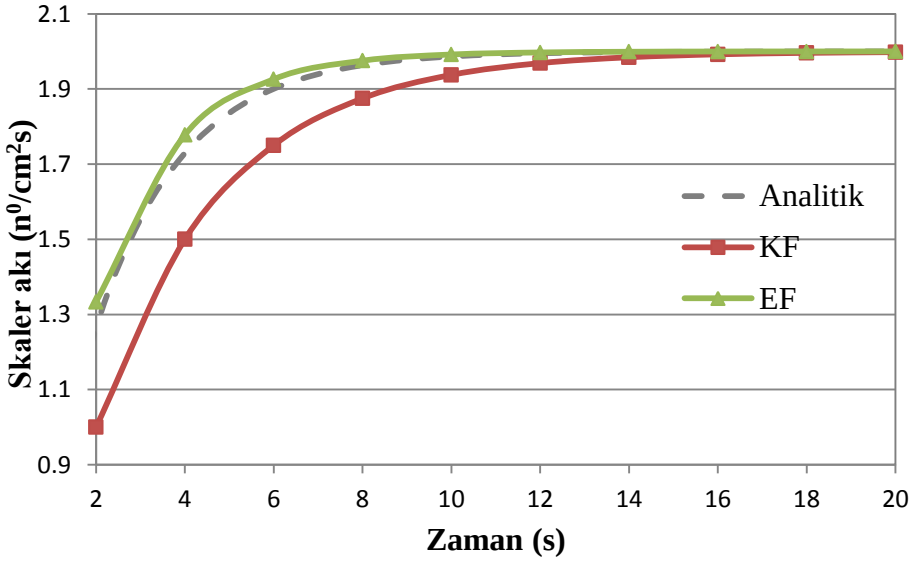
Şekil 5.24 : Zaman adımı $\Delta t=1$ s alındığında skaler akı dağılımı.

Bu problemde uzaysal ayrıklaştırma yöntemlerinin sonuçları birbirine çok yakın çıkmış ve üst üste çakışmıştır. Sonsuz ortam olduğu için analitik sonuçlarla olan farklılık uygulanan uzaysal farklama yöntemlerinden çok, zaman farklamasında

kullanılan yönteme bağlıdır. Şekil 5.25'te zaman adımı Δt=1 s alındığında, Şekil 5.26'da ise Δt=2 s alındığında zaman farklaması yöntemi olarak kullanılan KF ve EF yöntemlerinin karşılaştırması yapılmıştır. Bu problem yine 7 nokta ve S_8 yöntemi ile koşulmuştur. Uzaysal farklamada KSSEY kullanılmıştır. Her iki zaman adımı durumunda EF, KF'den daha iyi sonuçlar üretmiştir. EF Δ_j^2 doğruluk derecesinde sonuçlar üretebilirken, KF Δ_j doğuluk derecesinde akıları hesaplayabilir [1].



Şekil 5.25 : Zaman ayrıklaştırması yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=1 s).



Şekil 5.26 : Zaman ayrıklaştırması yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=2 s).

5.2.1.2 Üniform kaynaklı çoğaltkan, sonsuz ortam

Analitik çözüm

Üniform bir s kaynağı içeren ve aynı zamanda çoğaltkan olan, sonsuz bir ortamı ele alalım. Bu ortamda transport denklemi aşağıda tanımlanmıştır:

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi(t)}{dt}+\sigma\phi(t)=\sigma_s\phi(t)+\upsilon\sigma_f\phi(t)+s,\quad \phi(0)=0 \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi(t)}{dt}+(\sigma_a-\upsilon\sigma_f)\phi(t)=s \tag{5.12}$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt}+\frac{(1-k_\infty)}{l_\infty}\phi(t)=sv \tag{5.13}$$

Burada:

$$k_\infty=\frac{\upsilon\sigma_f}{\sigma_a} \tag{5.14}$$

olarak tanımlanır. $k_\infty\neq1$ olması durumunda (5.13)'ün çözümü:

$$\phi(t)=sv\frac{l_\infty}{k_\infty-1}\left(e^{\frac{(k_\infty-1)t}{l_\infty}}-1\right) \tag{5.15}$$

olarak bulunur. $k_\infty=1$ olması durumunda ise:

$$\phi(t)=svt \tag{5.16}$$

olarak bulunur. olarak bulunur. Bu problem için kullanılan veriler ise:

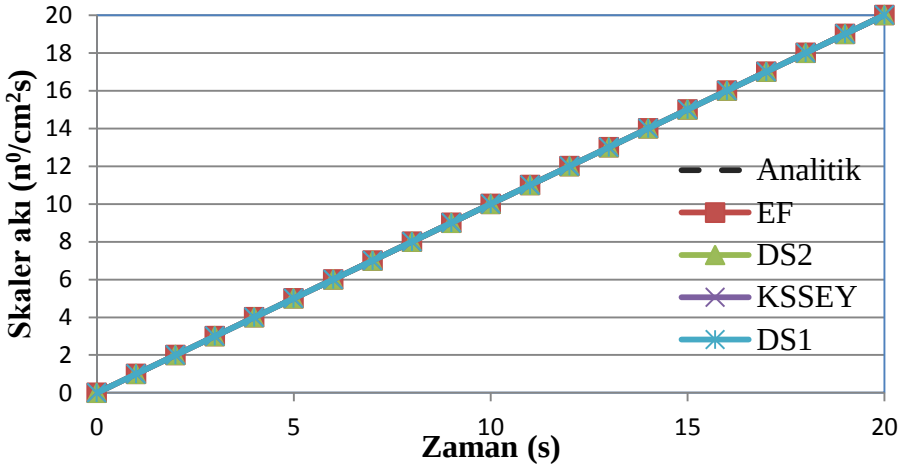
v=1 cm/s, s=1 $cm^{-3}s^{-1}$, σ=1 cm^{-1}, σ_s=0.5 cm^{-1}, l_∞=2 s, osz=1 s.

Bu veriler kullanılarak problemin analitik çözümü elde edilir. Sayısal çözüm için önceki problemde olduğu gibi 5 cm yarıçaplı küre alınmış ve yansıtıcı sınır koşulu uygulanmıştır.

Kritiklik durumu

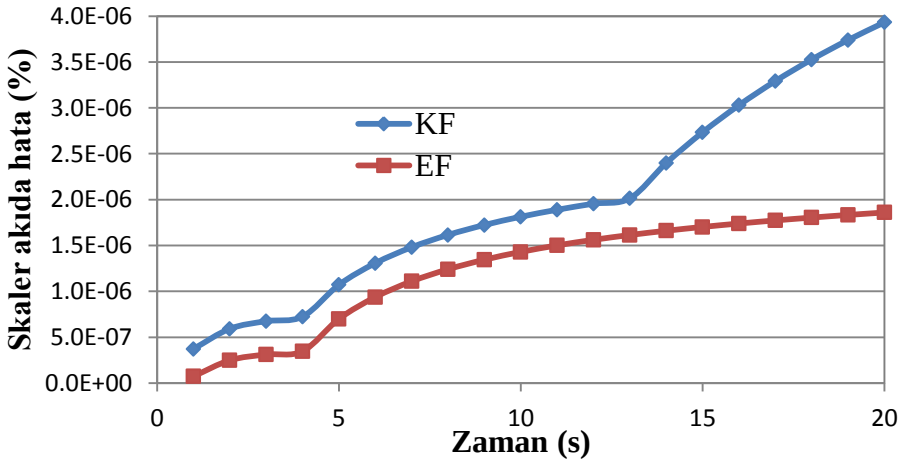
Problemde yer alan ortamın kritik olması için $\upsilon\sigma_f$=0.5 cm^{-1} olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t)=t$ olarak bulunur. Bu problem S_8 yöntemi, 11 nokta,

tüm iterasyonlar için 10^{-8} (% 10^{-6}) yakınsama kriteri, Δt=1 s zaman adımı ve zaman farklaması için KF kullanılması ile koşulduğunda Şekil 5.27'de gösterilen akı profili elde edilir. Bütün yöntemler nerdeyse analitik sonuçla aynı akı değerlerini üretmiştir. Yakınsama kriterinin altında kalan hata değerini (% hata < % 10^{-6}) sıfır hata olarak kabul edecek olursak tüm yöntemler ilk 4 saniyeye kadar hatasız olarak akıları hesaplamıştır. Sonraki zamanlarda ise 20. saniyeye kadar hata % 10^{-6} mertebesinde seyretmiştir.

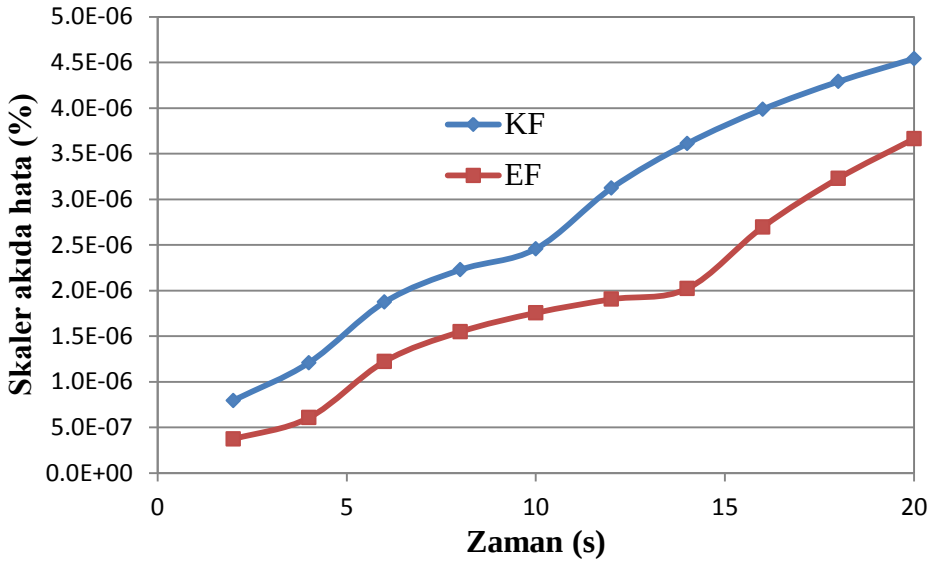


Şekil 5.27 : Kritiklik durumunda skaler akıların zamanla değişimi.

Bu problem için zaman farklaması yöntemlerini karşılaştıracak olursak, 7 nokta, DS2 yöntemi, S_8 kareleme derecesi ve Δt=1 s için skaler akıda görülen yüzde hata dağılımı Şekil 5.28'de gösterilmiştir. Aynı koşullarda Δt=2 s için hata dağılımı ise Şekil 5.29'da gösterilmiştir. İterasyonlarda yakınsama kriteri olarak 10^{-8} alınmıştır. Her iki durumda da EF KF'den daha az hata ile skaler akıları hesaplamıştır.



Şekil 5.28 : Kritiklik durumu için EF ve KF yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=1 s).



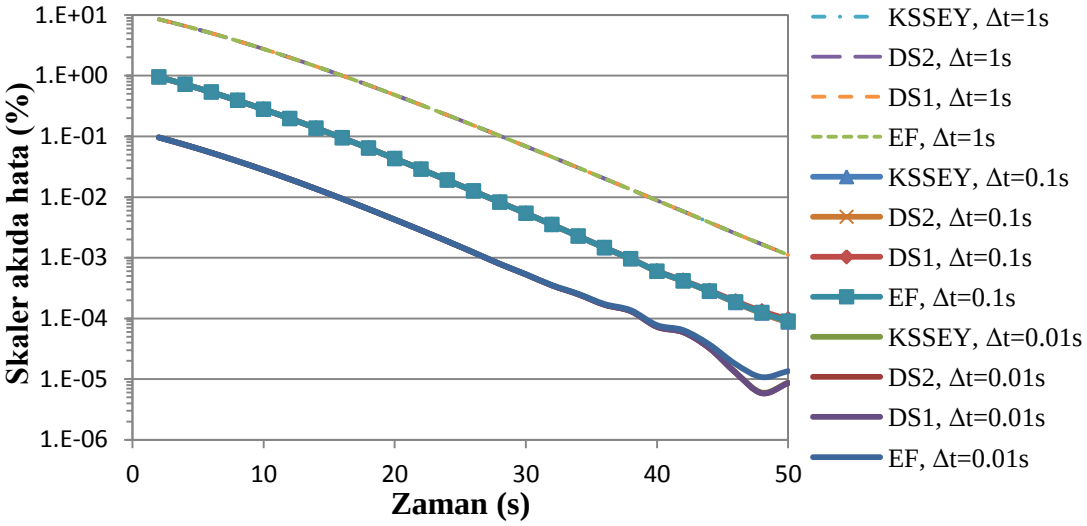
Şekil 5.29 : Kritiklik durumu için EF ve KF yöntemlerinin karşılaştırılması (Δt=2 s).

Kritik altı reaktör durumu

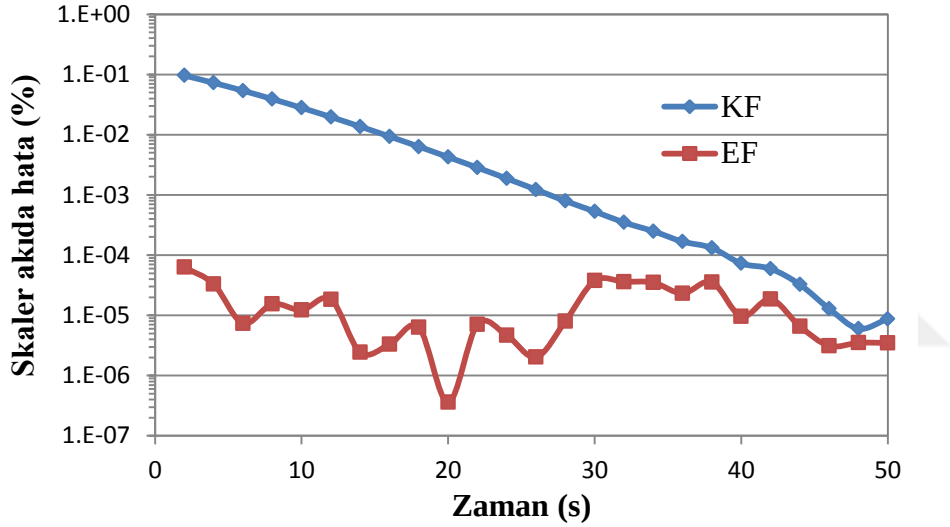
Problemde yer alan ortamın kritik altı olması için $\upsilon\sigma_f$=0.25 cm^{-1} olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t) = 4\left(1 - e^{-t/4}\right)$ olarak bulunur.

Bu problem 11 nokta, S_8 yöntemi ve zaman ayrıklaştırma yöntemi olarak KF ile koşulduğunda elde edilen sonuçlar 3 farklı zaman adımı için Şekil 5.30'da gösterilmiştir. Uzaysal farklama yöntemlerinin sonuçları birbirine çok yakın olduğu için üst üste çakışmaktadır. Sadece Δt=0.01 s durumunda 50. saniye civarında EF diğer 3 yöntemden daha hatalı sonuç üreterek ayrılmıştır. Bu örnek problemde yakınsama kriteri 10^{-6} (% 10^{-4}) alınmıştır. Bu nedenle hatanın % 10^{-4}'ün altına düştüğü Δt=0.01 s durumu için 40. saniyeden sonra, Δt=0.1 s durumu için ise 50. saniyeden sonra 4 yöntemin de hatasız skaler akı sonuçları ürettiği söylenebilir.

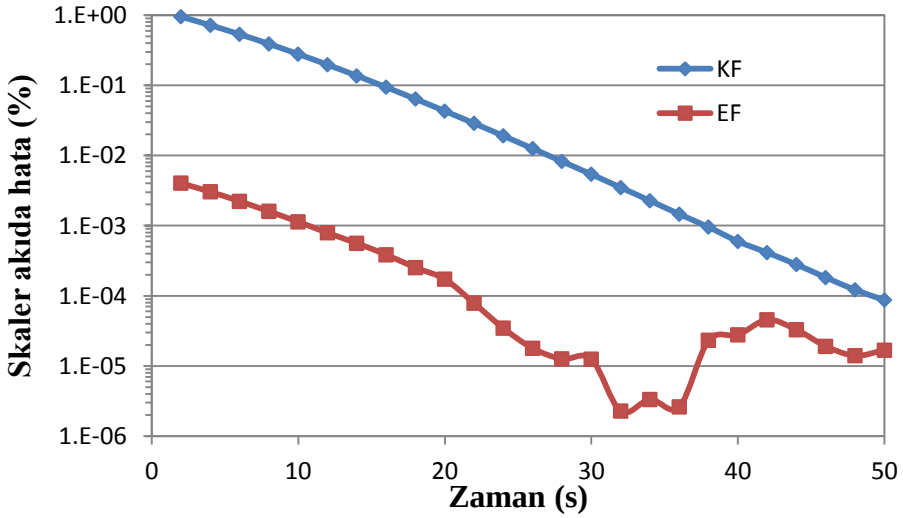
Zaman farklaması yöntemleri KSSEY kullanılarak, aynı koşullarda (11 nokta, S_8, % 10^{-4} yakınsama kriteri) 4 farklı zaman adımı için karşılaştırılmıştır. Bütün durumlarda EF sonuçları KF'den daha hatasız çıkmıştır. Şekil 5.31'de Δt=0.01 s EF EF yönteminin ürettiği sonuçlar dalgalıdır ancak yakınsama kriterinin altında kaldığı için hatasız olduğu kabul edilebilir. Şekil 5.32'de ise Δt=0.1 s için yüzde hataların zamanla değişimi gösterilmiştir. Bu durumda EF 20, Kf ise 50. saniyeden sonra yakınsama kriterinin altına düşmüştür. Şekil 5.33'te Δt=1 s için EF sonuçları 42. saniyeden sonra hatasız kabul edilebilir. Şekil 5.34'te ise Δt=2 s için EF 48. saniyeden sonra yakınsama kriterinin altına düşmüştür.



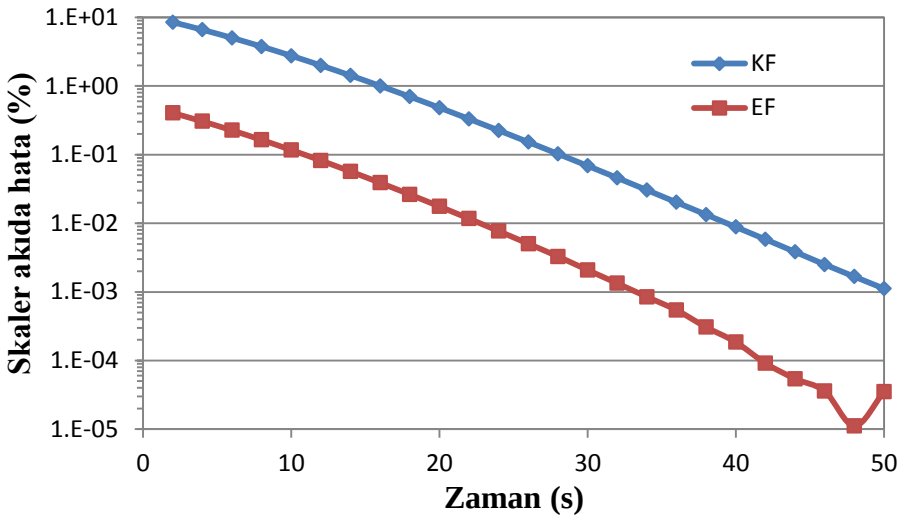
Şekil 5.30 : Kritik altı reaktör için skaler akıda yüzde hatanın zamanla değişimi.



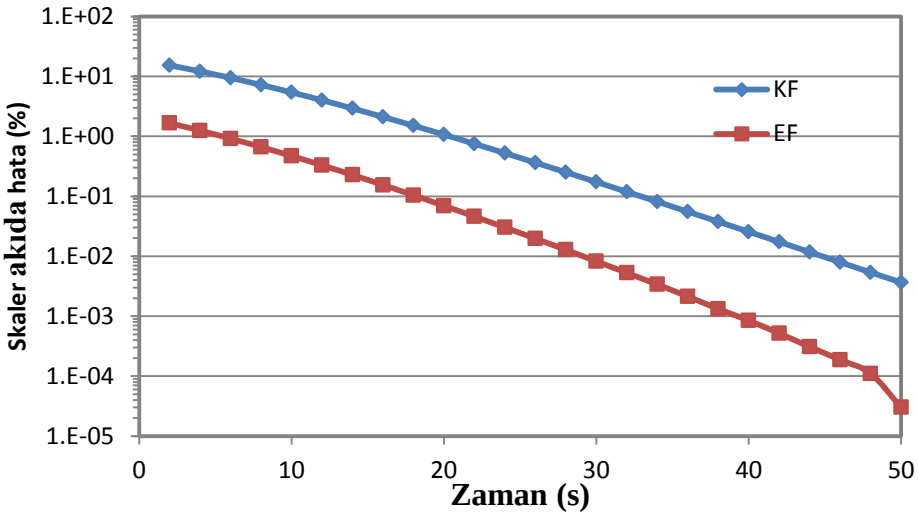
Şekil 5.31 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=0.01 s).



Şekil 5.32 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=0.1 s).



Şekil 5.33 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=1 s).

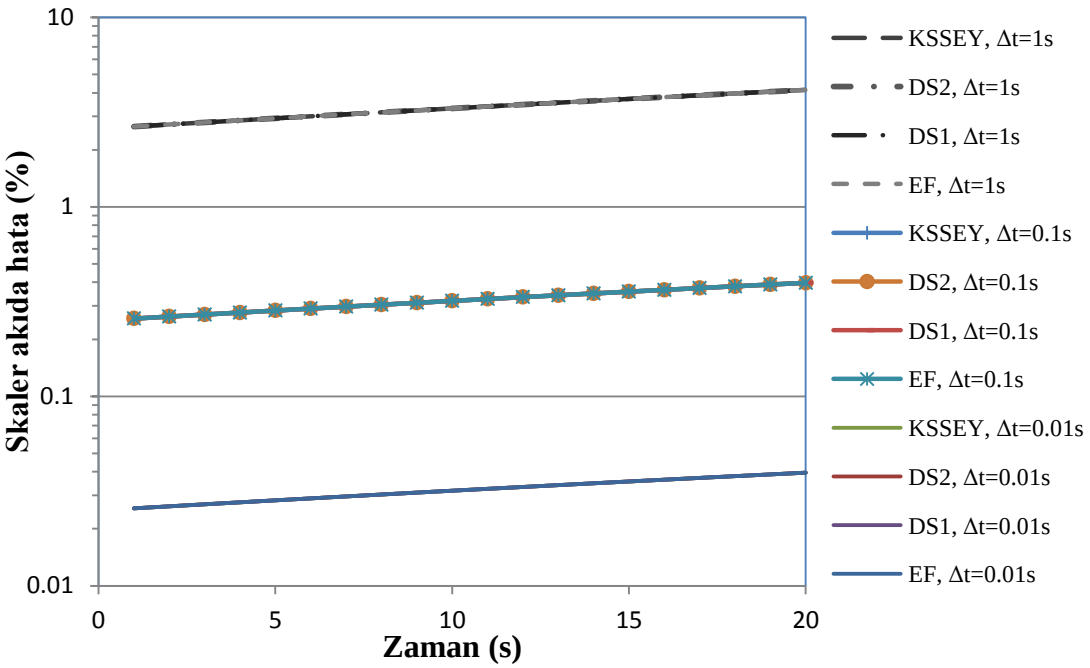


Şekil 5.34 : Kritik altı reaktörde akı hatalarının zamanla değişimi (Δt=2 s).

Kritik üstü reaktör durumu

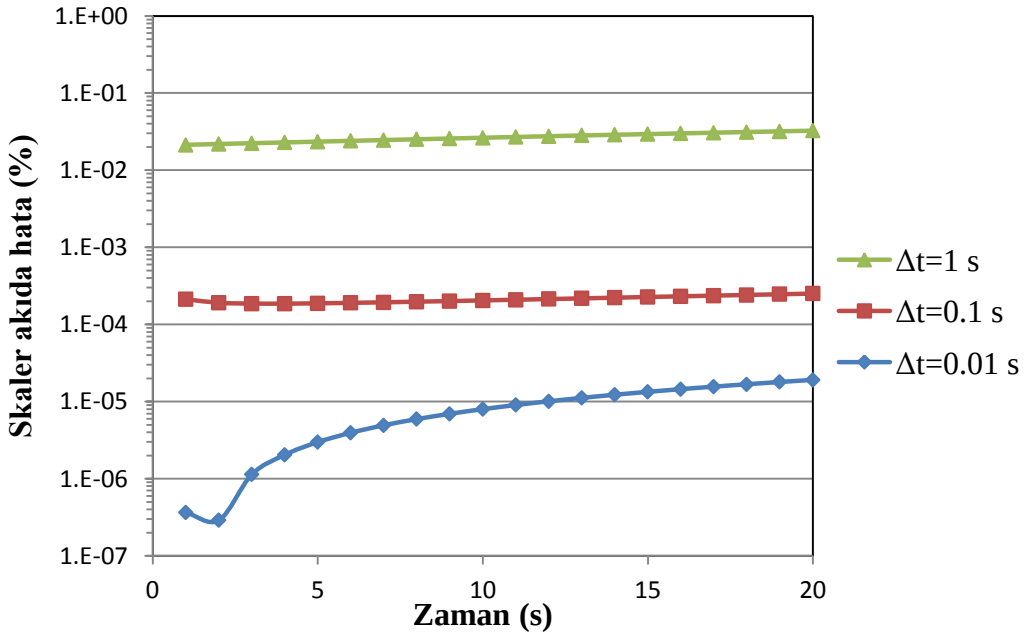
Problemde yer alan ortamın kritik üstü olması için $\upsilon\sigma_f=0.55cm^{-1}$ olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t)=20\left(e^{0.05t}-1\right)$ olarak bulunur.

Bu problem 21 nokta, S_{16} yöntemi ve zaman ayrıklaştırma yöntemi olarak KF ile koşulduğunda 4 farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemi ve 3 farklı zaman adımı için elde edilen skaler akılarda yüzde hata sonuçları Şekil 5.35'te gösterilmiştir. Bu örnekte de yakınsama kriteri 10^{-6} alınmıştır. Önceki sonsuz ortam örneklerinde olduğu gibi yine uzaysal farklama yöntemlerinin sonuçları birbirine çok yakın çıkmış ve üst üste çakışmıştır. Ancak bu defa skaler akılarda görülen hatalar artmıştır.



Şekil 5.35 : Kritik üstü reaktörde skaler akılarda hatanın zamanla değişimi (KF).

Aynı koşullarda EF yöntemi ile SPDOT koşulduğunda elde edilen sonuçlar Şekil 5.36'da gösterilmiştir. Uzaysal farklama yöntemi olarak bu defa DS2 yöntemi kullanılmıştır. Şekil 5.35'te verilen KF sonuçları ile karşılaştırıldığında her üç zaman adımında da EF'nin çok daha hatasız sonuçlar verdiği gözlenmiştir. EF Δt=0.01 s için yaklaşık 2000-100000 kat, Δt=0.1 s için yaklaşık 1200-1500 kat, Δt=1 s için ise yaklaşık 125 kat, daha az hatalı sonuçlar üretmiştir.



Şekil 5.36 : Kritik üstü reaktörde skaler akılarda hatanın zamanla değişimi (EF).

5.2.1.3 Kaynaksız, çoğaltkan, sonsuz ortam

Analitik çözüm

Çoğaltkan olan fakat bir kaynak içermeyen sonsuz bir ortamı ele alalım. Bu ortamda transport denklemi:

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi(t)}{dt}+\sigma\phi(t)=(\sigma_s+\upsilon\sigma_f)\phi(t),\quad \phi(0)=1 \tag{5.17}$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt}-\frac{(k_\infty-1)}{l_\infty}\phi(t)=0 \tag{5.18}$$

olarak tanımlanır. $k_\infty\neq1$ olması durumunda:

$$\phi(t)=\phi(0)e^{\frac{(k_\infty-1)t}{l_\infty}} \tag{5.19}$$

$k_\infty=1$ olması durumunda:

$$\frac{d\phi(t)}{dt}=0\rightarrow\phi(t)=\phi(0) \tag{5.20}$$

olarak bulunur. Bu problemde kullanılacak veriler ise:

v=1 cm/s, σ=1 cm^{-1}, σ_s=0.5 cm^{-1}, l_∞=2 s, osz=1 s.

Bu veriler kullanılarak problemin analitik çözümü elde edilir. Sayısal çözüm için önceki problemde olduğu gibi 5 cm yarıçaplı küre alınmış ve yansıtıcı sınır koşulu uygulanmıştır. Ayrıca Gauss-Legendre kareleme derecesi olarak S_8 kullanılmıştır. Koşularda 11 nokta alınmıştır. Bu ise EF için 11, DS1 ve DS2 için 10 ve KSSEY için 5 elemana karşılık gelmektedir. Yakınsama kriteri ise iç, dış ve yansıtıcı sınır koşulu iterasyonları için 10^{-6} alınmıştır.

Kritiklik durumu

Problemde yer alan ortamın kritik olması için $\upsilon\sigma_f$=0.5 cm^{-1} olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t)=1.0$ n/cm^2s olarak bulunur.

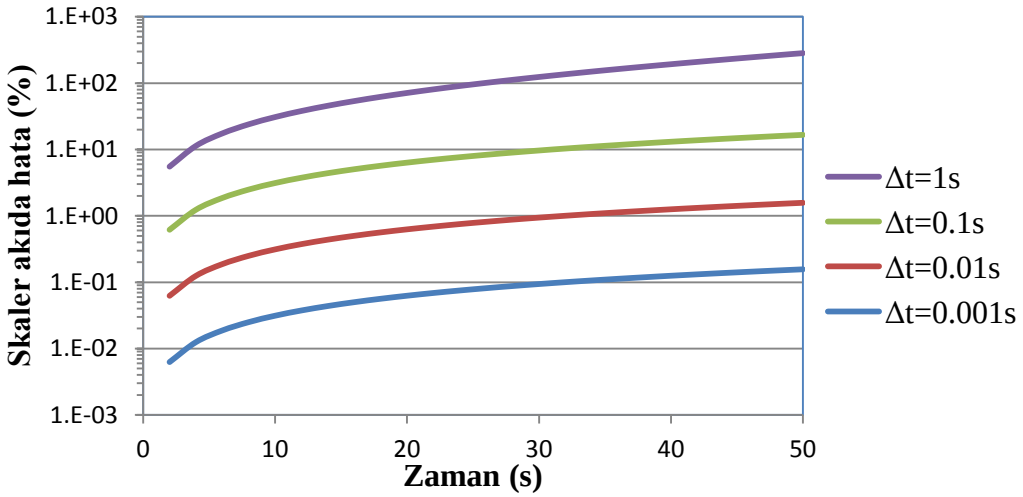
Bu problem KF kullanılarak koşulduğunda tüm uzaysal farklama yöntemleri 3 farklı zaman adımı için (Δt=0.01 s, Δt=0.1 s, Δt=1 s) hatasız bir şekilde skaler akıları hesaplamıştır. Akılarda hata % 10^{-13} mertebesindedir. Bu ise yakınsama kriterinin

oldukça altındadır. En kaba ızgara alındığında bile (S_2, 1 eleman, Δt=50 s) tüm yöntemler 100000. saniyeye kadar yapılan koşularda skaler akı değerini hatasız hesaplamıştır. Zaman farklamasında EF kullanıldığında da uzaysal farklama yöntemlerinin hepsi aynı şekilde hatasız olarak skaler akıları hesaplamıştır. Bu nedenle kritiklik durumu için zaman ayrıklaştırması yöntemlerinin karşılaştırması yapılmamış ancak uzaysal ayrıklaştırma yöntemlerinin doğrulaması yapılmıştır.

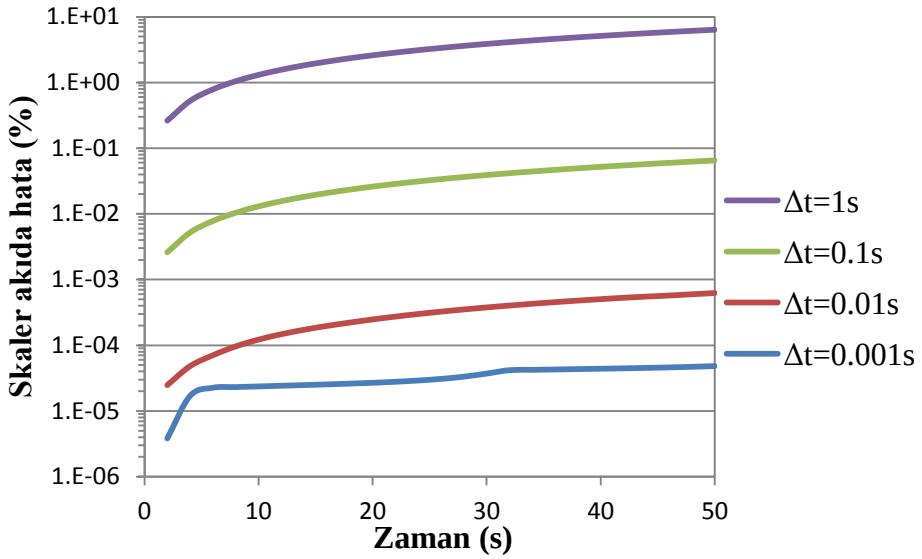
Kritik altı reaktör durumu

Problemde yer alan ortamın kritik altı olması için $\upsilon\sigma_f$=0.25cm^{-1} olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t) = e^{-0.25t}$ olarak bulunur. k_∞=0.5, periyot T=4 s (gücün e kat azalması için geçen zaman) olarak hesaplanır.

Bu problem KF kullanılarak koşulduğunda tüm uzaysal farklama yöntemleri 4 farklı zaman adımı için (Δt=0.001 s, Δt=0.01 s, Δt=0.1 s, Δt=1 s) hemen hemen aynı skaler akıları hesaplamıştır. Bu nedenle sadece KSSEY kullanılarak iki zaman farklaması yöntemi karşılaştırılmıştır. Şekil 5.37 ve Şekil 5.38'de görüldüğü gibi 4 zaman adımına göre de EF KF'den daha hatasız sonuçlar üretmiştir. İki yöntemin hata oranlarına baktığımızda en büyük fark Δt=0.01 s durumu için gerçekleşmiş ve EF KF'den yaklaşık 1600-3200 kat daha az hata ile skaler akıları hesaplamıştır. Ayrıca Δt=0.01 s, Δt=0.1 s ve Δt=1 s durumları için EF, KF'den yaklaşık olarak sırasıyla 2500, 250 ve 21-44 kat daha az hatayla akıları hesaplamıştır. Bu problemde özellikle 20. saniyeden sonra analitik skaler akı değerleri çok küçük değerlere düşmektedir. Zamanla akıların değeri küçüldükçe hesaplamalarda hata da artmaktadır.



Şekil 5.37 : KF yöntemine göre skaler akıda hatanın zamanla değişimi.



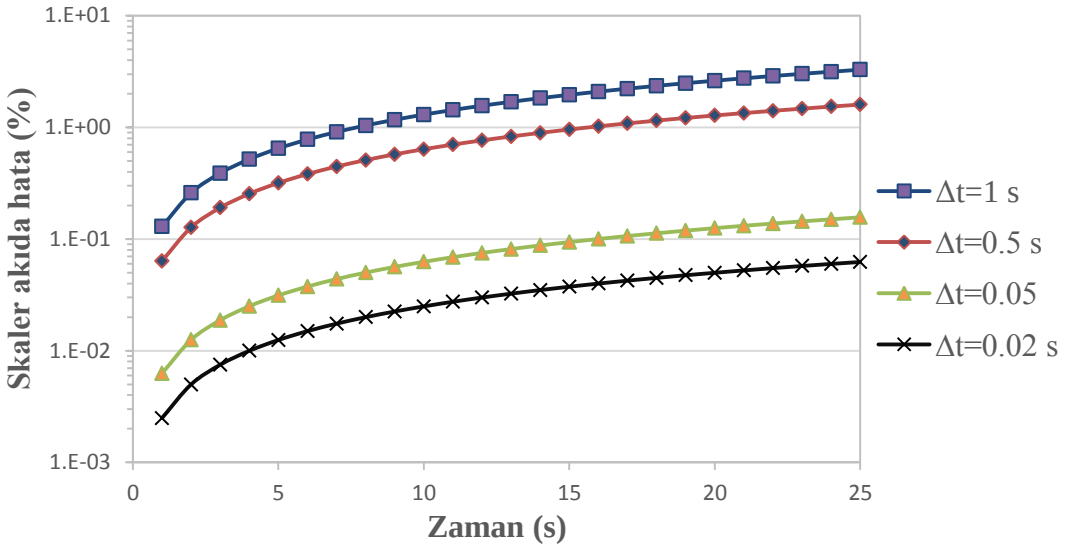
Şekil 5.38 : EF yöntemine göre skaler akıda hatanın zamanla değişimi.

Burada ele alınan problemde osz 1 s olduğu için zaman aralığı 1 s'nin altında iken KF yöntemi etkili olabilmektedir.

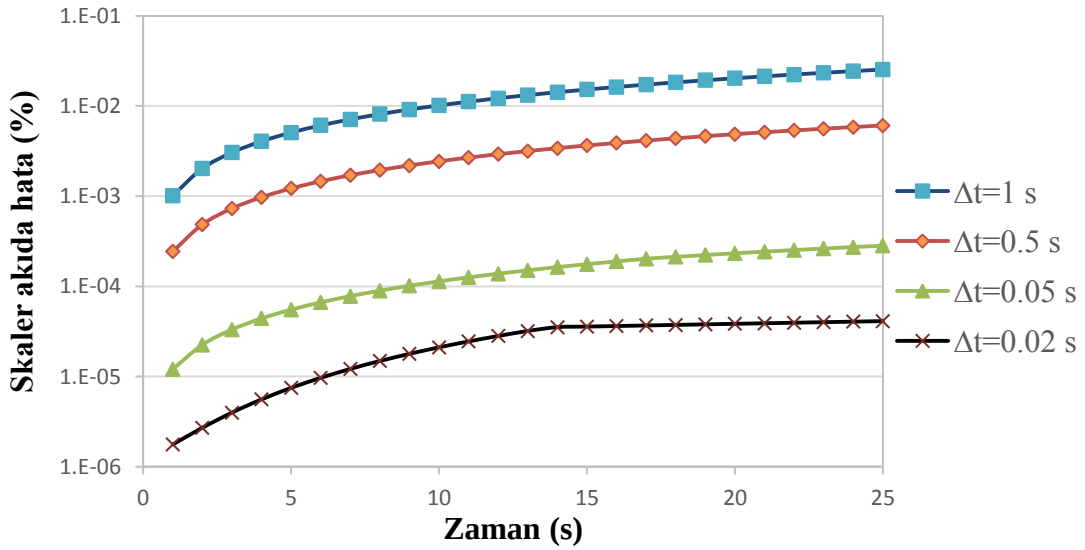
Kritik üstü reaktör durumu

Problemde yer alan ortamın kritik üstü olması için $\upsilon\sigma_f$=0.55 cm^{-1} olarak alınır. Bu durumda analitik çözüm $\phi(t) = e^{0.05t}$ olarak bulunur. k_∞=1.1ve periyot T=20 s olarak hesaplanır.

Önceki sonsuz ortam problemlerinde olduğu gibi skaler akılar yön ve uzaya bağlı değil sadece zamana bağlıdır. Buna paralel olarak sayısal çözümlerin hassasiyetinde uzaysal ve yönsel ayrıklaştırma yöntemlerinden çok zaman ayrıklaştırma yöntemleri etkilidir. Ele alınan uzayda S_N derecesini veya nokta sayısını arttırarak veya uzaysal farklama yöntemini değiştirerek skaler akıların daha hatasız hesaplanması mümkün olmamaktadır. Ancak zaman aralığı küültülerek ve zaman ayrıklaştırması yöntemi değiştirilerek daha az hatalı sonuçlar üretilebilir ve zaman ayrıklaştırması yöntemleri karşılaştırılabilir. Burada da yine 4 farklı zaman adımına göre zaman ayrıklaştırması yöntemleri karşılaştırılmıştır. Uzaysal ayrıklaştırma yöntemi olarak DS2 kullanılmıştır. Şekil 5.39 ve Şekil 5.40'ta sırasıyla zaman ayrıklaştırma yöntemi olarak KF ve EF kullanıldığında skaler akılarda görülen yüzde hatalar gösterilmiştir. Önceki örneklerde olduğu gibi burada da EF KF'den daha az hata ile skaler hataları hesaplamıştır.



Şekil 5.39 : KF yöntemi, skaler akı hatalarının zamana göre dağılımı.



Şekil 5.40 : EF yöntemi, skaler akı hatalarının zamana göre dağılımı.

5.2.1.4 Koşma zamanları ve negatif akı sayıları

Bu bölümde yukarıda ele alınan 7 sonsuz ortam problemi için koşma zamanlarına ve negatif akı sayılarına bakılmıştır. Problemler 51 nokta ile ve S_8 yöntemiyle koşulmuş, zaman adımı olarak 0.01 s seçilmiştir. Koşular 50. saniyeye kadar sürdürülmüştür. Sadece 2. problemde (üniform kaynaklı çoğaltkan ortam kritik reaktör) yakınsama kriteri 10^{-8} alınmış diğerlerinde ise 10^{-6} alınmıştır. Çizelge 5.26'da 7 sonsuz ortam probleminin koşulması ile bulunan, 4 uzaysal farklama ve 2 zaman farklaması yöntemi için koşma zamanları gösterilmiştir. Zaman farklaması yöntemi olarak KF kullanıldığında en kısa koşma zamanı EF ile elde edilmiş onu

sırasıyla KSSEY, DS2 ve DS1 izlemiştir. EF kullanıldığında ise birkaç istisna hariç bu sıralama yine gerçekleimiştir. Ancak 2 problemde KSSEY en kısa koşma zamanını üretmiştir. Yine iki problemde DS1, DS2'den daha kısa koşma zamanını vermiştir. Ancak koşma zamanları arasında fark çok az olmuştur. Zaman farklaması olarak EF kullanıldığında DS1, DS2 ve KSSEY için 1 ve 5. problem hariç KF'ye göre koşma zamanları kısalmıştır.

Çizelge 5.26 : Sonsuz ortam problemleri için koşma zamanları ve negatif akı sayıları.

Problem	Uzaysal farklama yöntemi	KF		EF	
		Koşma zamanı	Negatif akı sayısı	Koşma Zamanı	Negatif akı sayısı
Üniform kaynak	EF	5.9	4786	6.4	9122
	DS1	8.4	168	8.7	111
	DS2	8.1	272	8.4	189
	KSSEY	6.4	38	6.6	28
Üniform kaynak + fisyon kaynağı, kritik	EF	27.5	21667	27.5	35649
	DS1	42.2	825	35.5	478
	DS2	41.2	1325	33.9	750
	KSSEY	32.0	200	26.6	131
Üniform kaynak + fisyon kaynağı, kritik altı	EF	9.6	13791	9.8	22776
	DS1	16.4	504	13.5	352
	DS2	16.0	822	12.8	512
	KSSEY	12.6	128	9.8	84
Üniform kaynak + fisyon kaynağı, kritik üstü	EF	16.1	15344	15.5	23379
	DS1	27.9	528	23.3	400
	DS2	26.8	848	18.7	584
	KSSEY	21.2	128	14.6	96
Fisyon kaynağı, kritik	EF	0.66	0	0.72	0
	DS1	1.11	0	1.17	0
	DS2	1.08	0	1.27	0
	KSSEY	0.84	0	0.97	0
Fisyon kaynağı, kritik altı	EF	28.0	18378325	30.3	25984385
	DS1	40.0	956343	34.8	616578
	DS2	38.1	968629	34.9	728414
	KSSEY	30.2	690173	27.0	561572
Fisyon kaynağı, kritik üstü	EF	15.8	0	11.7	0
	DS1	26.0	0	22.8	0
	DS2	26.0	0	15.5	0
	KSSEY	20.3	0	11.9	0

Negatif akı hesabında yöntemler arasında m'inci yön için fark yoktur. Ancak m+1/2 yönündeki akılar için fark vardır. DS2'de m+1/2 yönünde hücre kenarındaki akılar

hesaplandığı için bunlara, DS1 ve EF'de ise hücre merkezindeki akılar hesaplandığı için bunlara bakılmıştır. KSSEY'de m+1/2 yönünde her ikisi de hesaplandığı için ikisine de bakılmıştır. Negatif akılar en fazla EF'de görülmüştür. Negatif akılar akılarda fiziksel olmayan dalgalanmalara neden olacağından istenmeyen bir durumdur. En az negatif akı KSSEY'de görülmüştür. KSSEY'de diğer yöntemlere göre oldukça az negatif akı çıkması bu yöntem için önemli bir avantajdır. Zaman farklaması olarak EF kullanıldığında DS1, DS2 ve KSSEY için negatif akı sayıları düşmüş, EF için artmıştır. 6. problemde çok fazla negatif akı görülmesinin nedeni kritik altı olan bu reaktörde akıların sıfıra çok yakın küçük değerlerde seyretmesidir.

5.2.2 Sonlu ortam problemleri

5.2.2.1 Tamamen yutucu, sonlu, çıplak küre

Asimptotik analitik çözüm

Bu problemin asimptotik analitik çözümü:

$$\phi(r)=\frac{s}{\sigma}\left\{1-\frac{1}{2}\left\{E_2[\sigma(R-r)]+E_2[\sigma(R+r)]\right\}+\frac{1}{2r\sigma}\left\{E_3[\sigma(R-r)]-E_3[\sigma(R+r)]-\left[e^{-\sigma(R-r)}-e^{-\sigma(R+r)}\right]\right\}\right\} \tag{5.21}$$

ortalama skaler akı ise:

$$\bar{\phi}=\frac{s}{\sigma}\left\{1-\frac{3}{8(\sigma R)^3}\left[2(\sigma R)^2-1+(1+2R\sigma)e^{-2R\sigma}\right]\right\} \tag{5.22}$$

olarak verilmektedir. Burada E üstel integral fonksiyonu [86,87], R küre yarıçapı, σ toplam tesir kesiti, s ise kaynaktır. Bu problemde kullanılan veriler ise R=5 cm, σ=1 cm^{-1}, s=1 cm^{-3} olarak verilir.

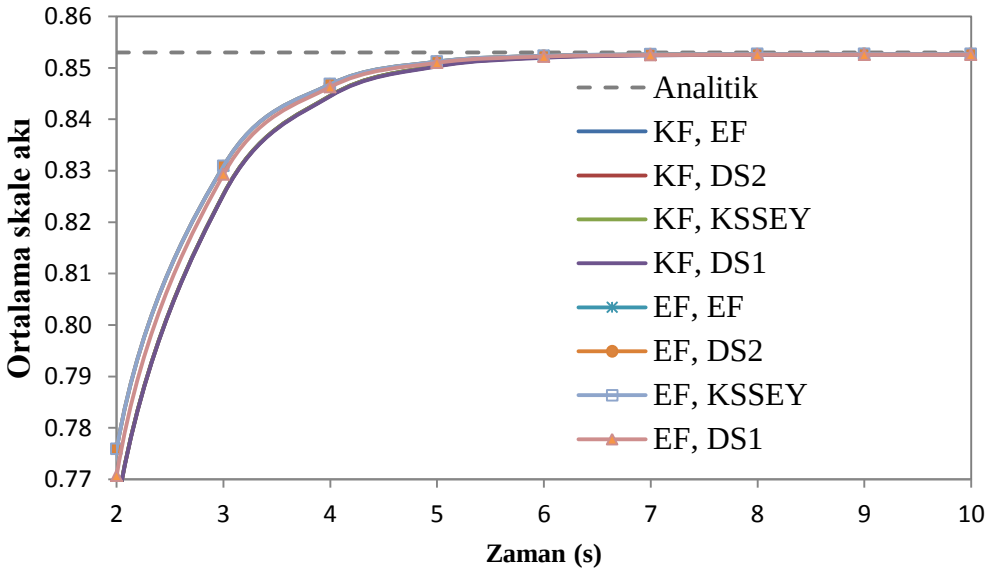
Zamana bağlı çözüm için başlangıç koşulu $\phi(r,0)=0$, $0<r<R$ ve ortalama nötron hızı v=1 cm/s olarak alınmaktadır.

Sayısal çözüm

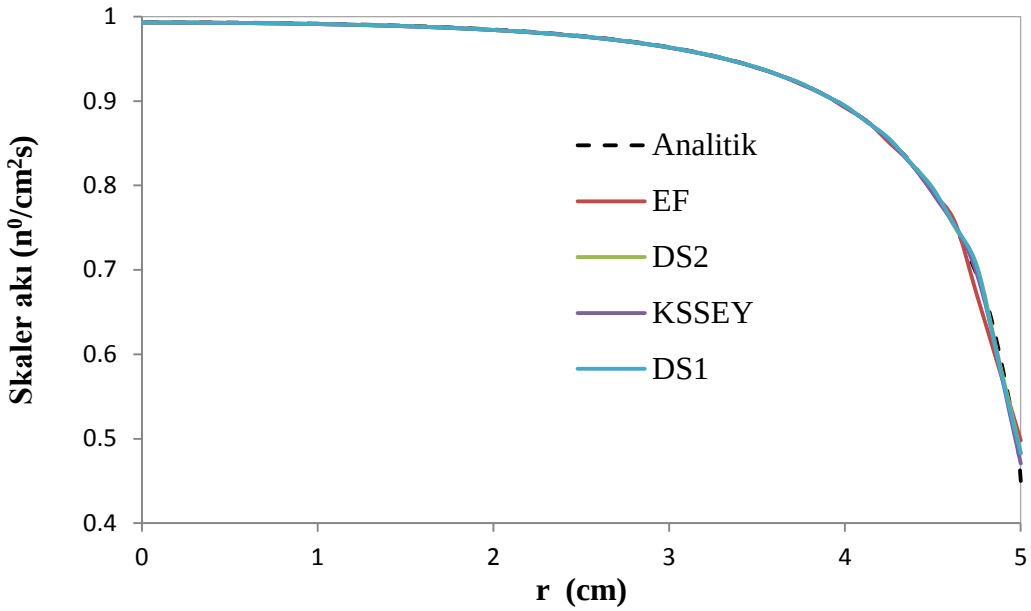
Bu problemin zamana bağlı ve zamandan bağımsız sayısal çözümleri geliştirilen kodlar kullanılarak bulunmuştur. S_N iterasyonunun sonlandırılması için yakınsama kriteri 10^{-6} alınmıştır.

Öncelikle zamandan bağımsız çözüm için 5 cm yarıçaplı tamamen yutucu küre 201 noktaya bölünmüştür. Bu durum EF için 201, DS1 ve DS2 için 200, KSSEY için 100 elemana karşılık gelmektedir. Yönsel ayrıklaştırma için S_{16} karelemesi kullanılmıştır. Analitik olarak ortalama skaler akı (5.22)'den 0.852999 $n^0cm^{-2}s^{-1}$ olarak hesaplanmıştır. Sayısal olarak uzaysal farklamada EF, DS1, DS2 kullanıldığında ortalama skaler akı 0.85297 $n^0cm^{-2}s^{-1}$, DS1 kullanıldığında ise 0.85296 $n^0cm^{-2}s^{-1}$ olarak hesaplanmıştır.

Aşağıda zamandan bağımsız akı sonuçları analitik kabul edilerek grafikler verilmiştir. Zamana bağlı koşu 10. saniyede sonlandırılmaktadır. Şekil 5.41'de gösterildiği gibi 10 saniye sonra sayısal çözümler zamandan bağımsız çözüme yaklaşır. Bu koşularda 51 nokta ve S_8 yöntemi kullanılmıştır. Şekil 5.42'de verilen grafikte ise tüm uzaysal farklama yöntemlerinin KF kullanarak hesapladığı akılar analitik akı sonuçları ile nerdeyse üst üste geldiği gözlenmektedir. Küre yüzeyine yaklaştıkça akı düşmekte ve analitik akı ile fark daha belirginleşmektedir. Bu koşularda ise 21 nokta ve yine S_8 yöntemi kullanılmıştır.

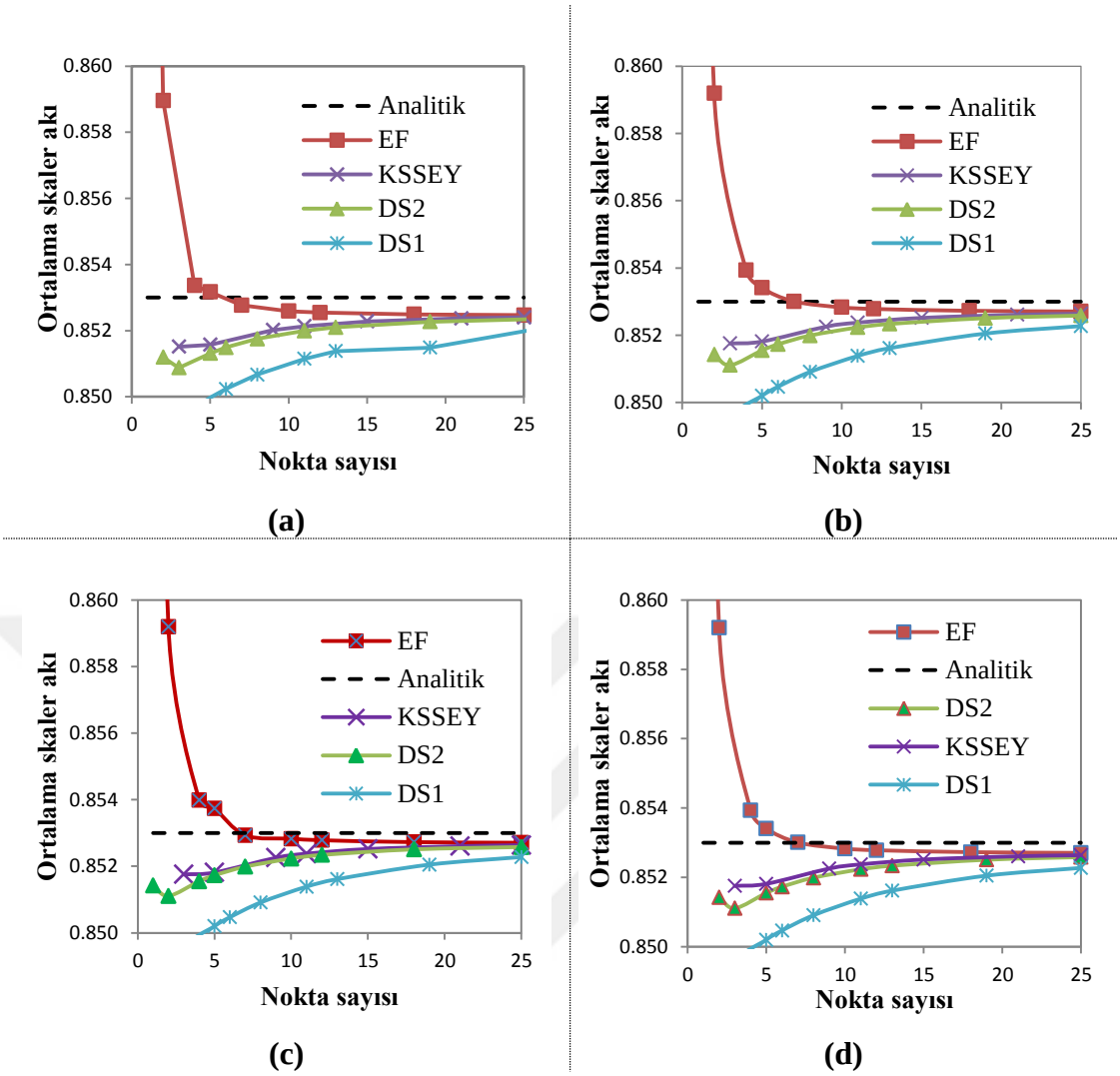


Şekil 5.41 : Ortalama skaler akıların zamanla değişimi.



Şekil 5.42 : Tamamen yutucu kürede skaler akı dağılımı.

Şekil 5.43'te 10. saniye sonunda hesaplanmış ortalama skaler akıların nokta sayısı ile dağılımı gösterilmiştir. Bütün yöntemler nokta sayısı arttıkça zamandan bağımsız çözüme yakınsamaktadır. Analitik skaler akı değerine yakınsama hızı, zaman farklaması yöntemi olarak EF kullanıldığında biraz daha iyi çıkmıştır. Ayrıca zaman adımı 0.1 s alınınca daha iyi yakınsama sağlanmıştır. 25 nokta ile yapılan koşularda tüm yöntemlerde hesaplanan ortalama skaler akılar birbirine çok yakın çıkmıştır. KSSEY'in 25 nokta (12 eleman) kullanarak hesapladığı akılarda analitik akıya göre hatalar, KF ve Δt=1 s için % 0.0700, KF ve Δt=0.1 s için % 0.04226, EF ve Δt=1 s için % 0.04293 ve son olarak EF ve Δt=0.1 s için % 0.04216 (en düşük hata) çıkmıştır. Bu problemde tüm yöntemlerde negatif akı çıkmamıştır.



Şekil 5.43 : Ortalama skaler akıların nokta sayısı ile değişimi: (a) KF ve Δt=1 s. (b) KF ve Δt=0.1 s. (c) EF ve Δt=1 s. (d) EF ve Δt=0.1 s.

5.2.2.2 Kritik, çıplak küre

Analitik çözüm

Bu problemde kritik, çıplak bir küre ele alınmıştır. Bu problem için kullanılan veriler:

σ=1 cm^{-1}, σ_s=0.5 cm^{-1}, $\upsilon\sigma_f$=0.55 cm^{-1}, σ_f=0.25 cm^{-1}, s=0 $n^0cm^{-3}s^{-1}$.

Bu verilere göre bir c sayısı hesaplanabilir:

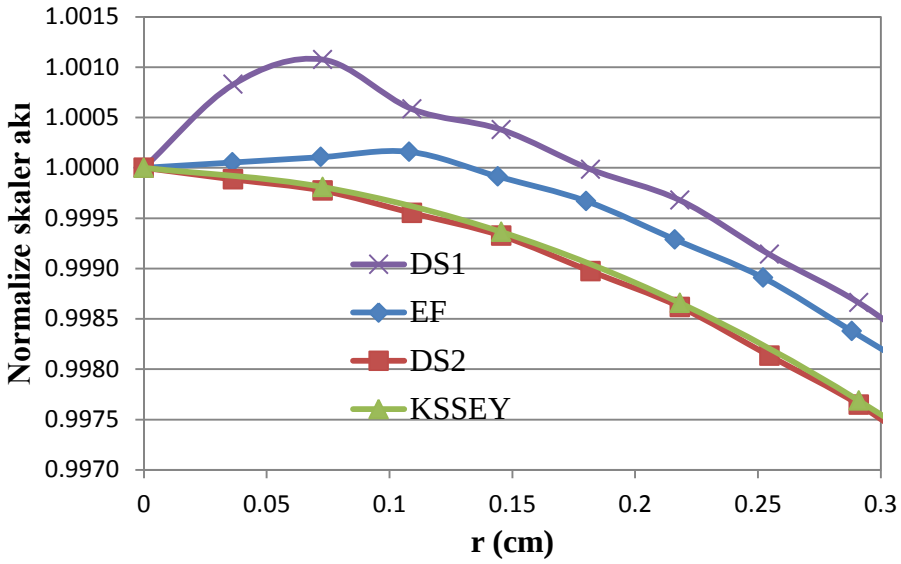
$$c = \frac{\upsilon\sigma_f + \sigma_s}{\sigma} = \frac{0.55 + 0.5}{1} = 1.05 \qquad \textbf{(5.23)}$$

Literatürde bu c sayısının bir fonksiyonu olarak çıplak küre için kritik yarıçaplar hesaplanmıştır [88]. Bunlardan birinde c=1.05 için kritik yarıçap R=7.277181794235 cm. olarak verilmektedir [89].

Bu kritik yarıçapa sahip küre için zamandan bağımsız transport denklemini çözerek bulduğumuz skaler akı profiline, zamana bağlı transport denkleminin çözümünden elde edilen skaler akı profilinin zamanla yakınsaması gerekmektedir. Zamana bağlı çözüm için başlangıç koşulu $\phi(r,0)=1\ n^0cm^{-2}s^{-1}$ $(0<r<R)$ ve ortalama nötron hızı v=1 cm/s alınmıştır. Dış yüzeyde boşluk sınır koşulu uygulanmıştır. İç ve dış iterasyonlar için yakınsama kriteri olarak 10^{-6} alınmıştır.

Sayısal çözüm

Bu verilerle ve S_{16} , 101 nokta kullanılarak geliştirilen SPDOT ve LQD1 kodları zamandan bağımsız olarak koşulmuştur. Bu koşularda EF, DS2 ve KSSEY için k_{etk}=1.000029, DS1 için ise k_{etk}=1.000025 olarak hesaplanmıştır. Ortalama skaler akı ise tüm yöntemler tarafından $\phi(r,0)=0.001126\ n^0cm^{-2}s^{-1}$ olarak bulunmuştur. Ancak normalize skaler akılar farklı hesaplanmıştır. Çizelge 5.27'de görüleceği üzere EF ve DS1 yöntemleri için normalize akılar diğer 2 yönteme göre daha büyük çıkmıştır. Çünkü normalize akılar tüm noktalarda hesaplanan skaler akıların, küre merkezinde hesaplanan skaler akıya bölünmesi ile hesaplanmaktadır ve hem EF hem de DS1 yöntemlerinde küre merkezinde akı düşüşü olmuştur. Şekil 5.44'te küre merkezine yakın noktalarda normalize skaler akı dağılımları gösterilmiştir. Maksimum akı küre merkezi yerine EF için r=0.10808 cm'de DS1 için ise r=0.07277 cm'de hesaplanmıştır. DS2 ve KSSEY'de ise merkezde akı düşmesi sorunu ile karşılaşılmamıştır.



Şekil 5.44 : Küre merkezine yakın noktalarda normalize skaler akı dağılımı.

Daha sonra Δt=0.01 s alınarak aynı verilerle zamana bağlı çözümler bulunmuştur. t=100 s sonraki akı profilinin zamandan bağımsız akı profiline çok yakın olması beklenmektedir. Çizelge 5.27'de görüldüğü gibi zamandan bağımsız normalize ortalama akılar ile zamana bağlı normalize ortalama akılar arasındaki farklar tüm yöntemlerde çok küçüktür ve geliştirilen yöntemleri doğrulamıştır. Zaman farklamasında kullanılan KF ve EF aynı ortalama akıları hesaplamıştır. Ayrıca tüm yöntemlerde fark aynı çıkmıştır. Şekil 5.44'te gösterilen zamandan bağımsız çözümde EF ve DS1'de görülen merkezde akı düşüşleri bu yöntemlerin zamana bağlı akı profillerinde de gözlenmiştir.

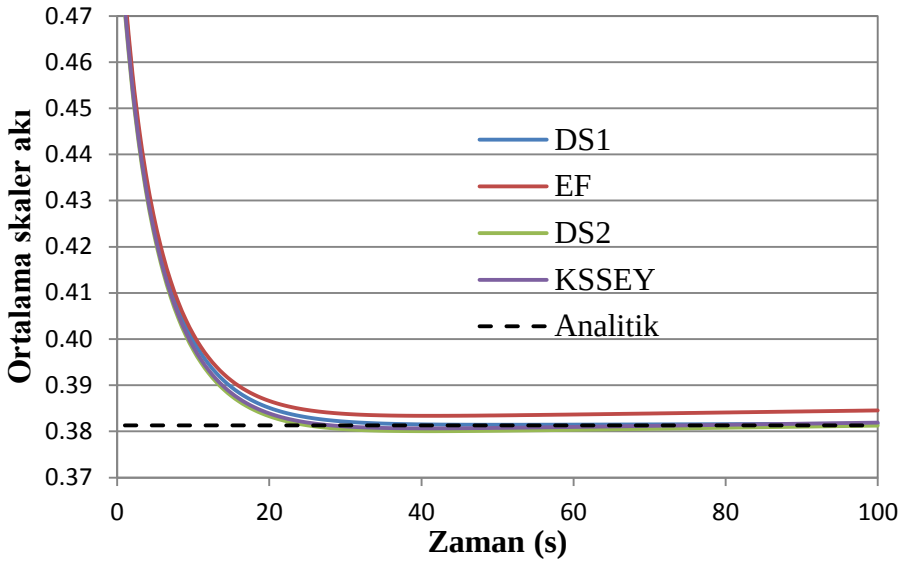
Çizelge 5.27 : Normalize ortalama skaler akılar.

Uzaysal farklama yöntemi	Zamandan bağımsız ortalama akı	Zamana bağlı ortalama akı		Fark
		KF	EF	
EF	0.381907	0.381877	0.381877	$3x10^{-5}$
DS1	0.381817	0.381787	0.381787	$3x10^{-5}$
DS2	0.381498	0.381468	0.381468	$3x10^{-5}$
KSSEY	0.381525	0.381495	0.381495	$3x10^{-5}$

Zamandan bağımsız normalize ortalama akının doğruya çok yakın olabilmesi için mümkün olduğunca ince ızgara alınarak koşular yapılması gereklidir. Bu koşularda 2000 nokta ve S_{256} kullanılarak 4 uzaysal farklama yöntemi için normalize ortalama akılara hesaplandı. Bu akılara EF için 0.381324, DS1 için 0.381345 bulunmuştur. DS2 ve KSSEY her ikisi de ortalama akıları 0.381345 olarak hesapladı. Normalize ortalama akı için 0.381300 değerini analitik sonuç kabul ederek 4 uzaysal farklama

yönteminin bu değere yakınsaması incelendi. Bunun için 21 nokta ve $\Delta t=0.1$ s kullanıldı. Yönsel farklamada ise S_8 kullanuıldı. Zaman farklaması yöntemi olarak KF kullanıldı. Sonuçlar Şekil 5.44'te verilmektedir. Bütün yöntemler analitik sonuca yakınsamaktadır. Ancak 3 süreksiz sonlu elemanlar yönteminin yakınsaması EF'ye göre daha iyidir. Zaman farklaması yöntemi olarak EF kullanıldığında elde edilen sonuçlar KF yöntemi ile elde edilen sonuçlara çok yakın çıktığı için burada verilmemiştir. KF ile EF arasında fark ilk zamanlarda en fazla olmuş zaman ilerledikçe azalmış ve 90. saniyeden sonra her iki yöntemde aynı sonuçları ürettmeye başlamıştır. İlk zamanlarda EF skaler akıları KF'ye göre biraz daha düşük hesaplamıştır.

Bu problemde negatif akı çıkmamaktadır. Koşma zamanlarına baktığımızda 101 nokta ve S_{64} kullanıldığında tüm uzaysal farklama yöntemleri zaman farklamasında EF kullandığında KF'ye göre biraz daha kısa zamanda koşmuştur. Koşma zamanları sıralaması en uzundan en kısaya DS1, DS2, KSSEY ve EF olarak sıralanmıştır.



Şekil 5.45 : Küre merkezindeki akıya göre normalize edilmiş ortalama skaler akıların zamanla değişimi.

5.2.2.3 Çoğaltkan olmayan dış kabuğunda kaynak bulunan çıplak küre

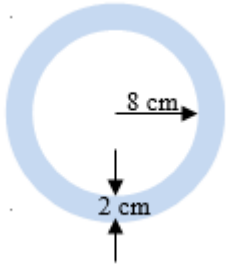
İntegral transport denkleminin analitik çözümü sonucu zamana bağlı nötron transport denkleminin bir-boyutlu, düzlemsel ve küresel geometri problemleri için bençmark çözümleri üretilmiştir [90]. Bunlardan birisi burada zamana bağlı problemlerde yöntemleri karşılaştırabilmek için kullandığımız ve Şekil 5.46'da gösterilen küresel kabuk kaynağı problemidir. Üniform olarak dağılmış bir küresel kabuk kaynağı

kürenin dışına 2 cm kalınlığında yerleştirilmiştir. Bu çıplak küresel sistemin yarıçapı ise 10 cm'dir. Başlangıç anında ortamda parçacık yoktur ve 1 nötron/(cm^3s) gücündeki eşyönlü kaynak t=0 anında devreye girmektedir. Kürenin dış yüzeyinde boşluk sınır koşulu uygulanmaktadır. Küre merkezi sınır koşulu olarak ise (2.114) uygulanmaktadır. Kullanılan diğer veriler aşağıdadır:

$\sigma = 1\,\mathrm{cm}^{-1}, \sigma_s = 0.9\,\mathrm{cm}^{-1}, v = 1\,\mathrm{cm/s}, R = 10\,\mathrm{cm}$ (tesir kesitleri her iki bölge için de aynıdır.)

$$s(\rho) = \begin{cases} 0, & 0\,\mathrm{cm} \le \rho < R_s = 8\,\mathrm{cm} \\ 1, & R_s = 8\,\mathrm{cm} < \rho \le R = 10\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

Başlangıç Koşulu: $\psi(\rho, t) = 0$, eğer $t = 0,\ 0 < \rho < R$



Şekil 5.46 : Küresel kabuk kaynağı problemi.

Skaler akıların bençmark değerleri ayrık noktalarda ($\Delta\rho$=0.5 cm) ve t=1, 2.5, 5, 7.5, 10 (erken zamanlar), 20, 50, 70, 100 s (geç zamanlar) geçtikten sonra bilinmektedir [91]. Burada yapılan bütün hesaplamalarda kaynak bölgesi ile iç bölgede hücre genişliği ($\Delta\rho$) aynı alınmıştır.

Bu bölümde öncelikle skaler akıların L_2 normuna dayalı hatalar hesaplanarak yöntemler arasında bir karşılaştırma yapılmıştır. L_2 normuna dayalı hata şu şekilde tanımlanır:

$$\|\phi^{gerçek} - \phi\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left(\phi_n^{gerçek} - \phi_n\right)^2 \rho_n^2 \Delta\rho_n} \qquad \textbf{(5.5)}$$

Farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemleri için L_2 hatalarının zamana göre dağılımı Şekil 5.47'de gösterilmiştir. Bu problemi kullanarak uzaysal farklama yöntemlerini karşılaştırmak için yönsel ayrıklaştırmada S_{12}, S_{14}, ve S_{32} yaklaşımları kullanılmıştır.

Nokta sayısı olarak 4 örnekte 20 (EF için 20, diğer yöntemler için 21 nokta), 1 örnekte 100 nokta (EF için 100, diğer yöntemler için 101 nokta) ve 1 örnekte 10 nokta (EF için 10, diğer yöntemler için 11 nokta) alınmıştır. Zaman adımı (Δt) için ise 0.5 s, 0.1 s ve 0.01 s kullanılmıştır.

Şekil 5.47a ve b zaman farklaması yöntemlerini karşılaştırmak için verilmiştir. Her iki yöntemde hemen hemen aynı hata ile akıları hesaplamıştır. Ancak bu koşularda DS1 hariç EF KF'den daha az negatif akı üretmiştir. Ayrıca tüm uzaysal farklama yöntemlerinde EF KF'den daha kısa koşma zamanları ile koşulmuştur. Sayısal yöntemler doyuma ulaştıkça (Yön, zaman veya uzay ızgarası inceltildikçe çözümde hata azalır. Ancak bir noktadan sonra yöntem doyuma ulaşmakta ve ızgara inceltmesi daha fazla hatayı azaltamamaktadir.) EF ve KF arasında fark azalmaktadır. Burada Δt=0.01 s'lik zaman adımı için bu fark çok küçülmüştür.

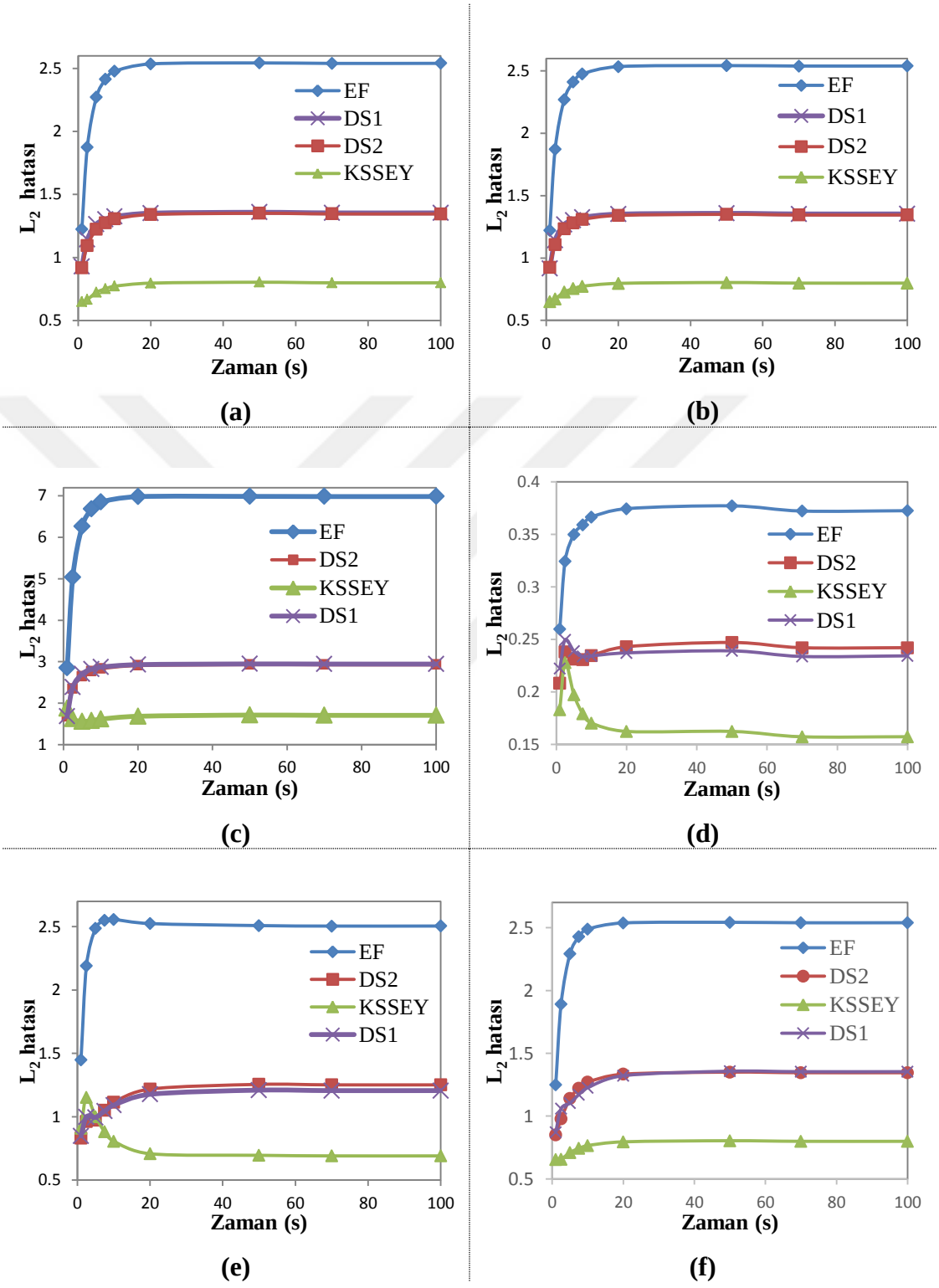
Şekil 5.47c'de kaba ızgara alındığında (NS=10) DS2, DS1'e göre daha az hatalı sonuçlar üretmektedir. Ancak aradaki fark küçük olduğu için grafikler üst üste gelmektedir. NS=10 alındığında verilen analitik sonuçların bir kısmı DS1 ve DS2'nin doğrudan hesaplamadığı hücre ortasına denk gelmektedir. Burada skaler akı kenarlarda hesaplanmış akıların ortalaması olarak hesaplanmıştır. Eğer hücre ortasına rastlayan akıları hesaba katmayıp hücre kenarlarındaki akılara göre L_2 hatası hesaplanırsa yine DS1 DS2'den daha az hata üretmektedir. Izgara inceltildiğinde (NS=100) ise Şekil 5.47d'de görüldüğü gibi DS1 daha doğru sonuçlar vermiştir.

Şekil 5.47e'de görüldüğü gibi S_{12} kullanıldığında KSSEY'de ilk 20 saniyede hata zirve yapmış, ancak Şekil 5.47f'de görüldüğü gibi aynı koşullarda S_{32} kullanıldığında bu durum düzelmiştir.

Sonuçları incelediğimizde KSSEY'in tüm örneklerde diğer yöntemlere göre daha az hatalı sonuç ürettiği ve en iyi yöntem olduğu görülür. DS1 ve DS2 yöntemlerinin sonuçları özellikle ince ızgaralarda birbirine çok yakın çıkmıştır. EF ise en hatalı sonuçları üreten yöntem olmuştur.

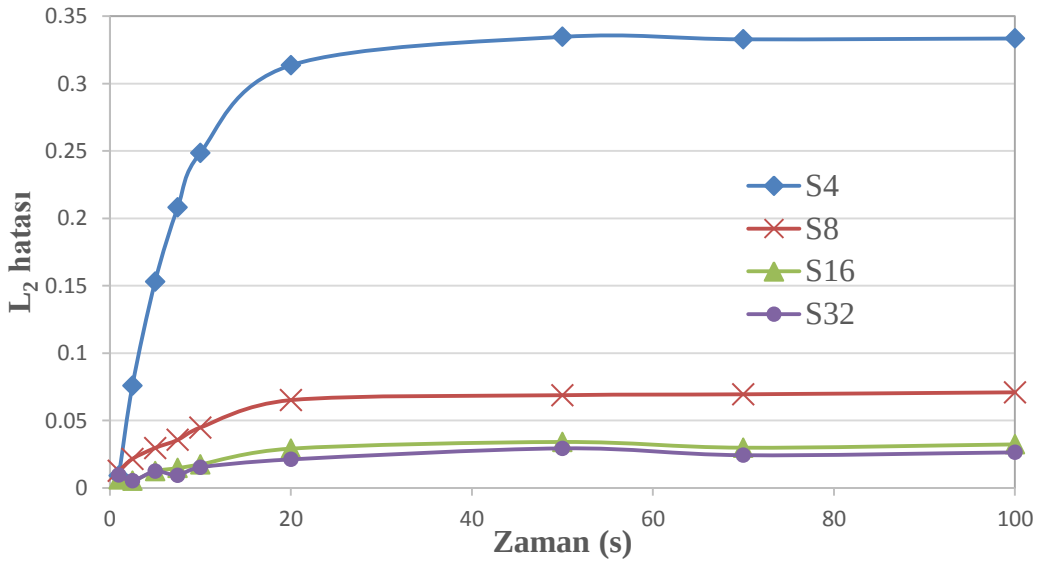
KSSEY'nin ele alınan diğer yöntemlere göre daha doğru bir yaklaşım olduğu yukarıda görüldükten sonra, bu yöntemin yakınsama özellikleri S_N derecesine, zaman adımı büyüklüğüne göre araştırılmıştır. Ayrıca zaman farklaması yöntemleri karşılaştırılmıştır. 3 süreksiz sonlu elemanlar yönteminin eleman sayısının artması ile yakınsaması gösterilmiştir. Daha sonra KSSEY'in zamana bağlı çözümlerinin

zamandan bağımsız çözüme yakınsaması araştırılmıştır. Son olarak yöntemlerin hesaplama performansına bakılmıştır.



Şekil 5.47 : Skaler akılarda L_2 hatalarının zamana göre dağılımı:
(a) KF, Δt=0.01 s, S_{32}, NS=20. (b) EF, Δt=0.01 s, S_{32}, NS=20.
(c) KF, Δt=0.5 s, S_{14}, NS=10. (d) KF, Δt=0.1 s, S_{32}, NS=100.
(e) KF, Δt=0.5 s, S_{12}, NS=20. (f) KF, Δt=0.5 s, S_{32}, NS=20.

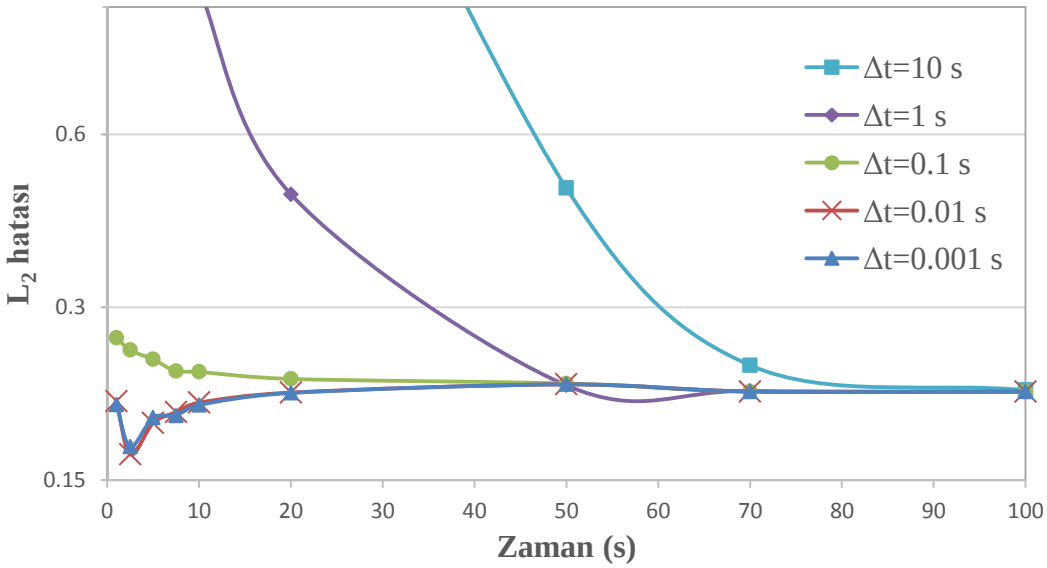
İlk olarak S_N derecelerine göre KSSEY'nin yakınsama özellikleri çalışılmıştır. Bunun için SPDOT programı farklı ayrık ordinat dereceleri ile koşulmuştur. Bu koşularda zaman adımı 0.001 s alınmıştır. Kuadratik eleman sayısı ise 500 alınmıştır. Zaman farklaması yöntemi olarak KF kullanılmıştır. Bu koşular sonunda Şekil 5.48'de görüldüğü gibi kareleme derecesi arttıkça daha düşük L_2 hataları hesaplandığı gözlenmiştir. Yani yönsel ayrıklaştırma ızgarası inceltildikçe yakınsama sağlanmıştır.



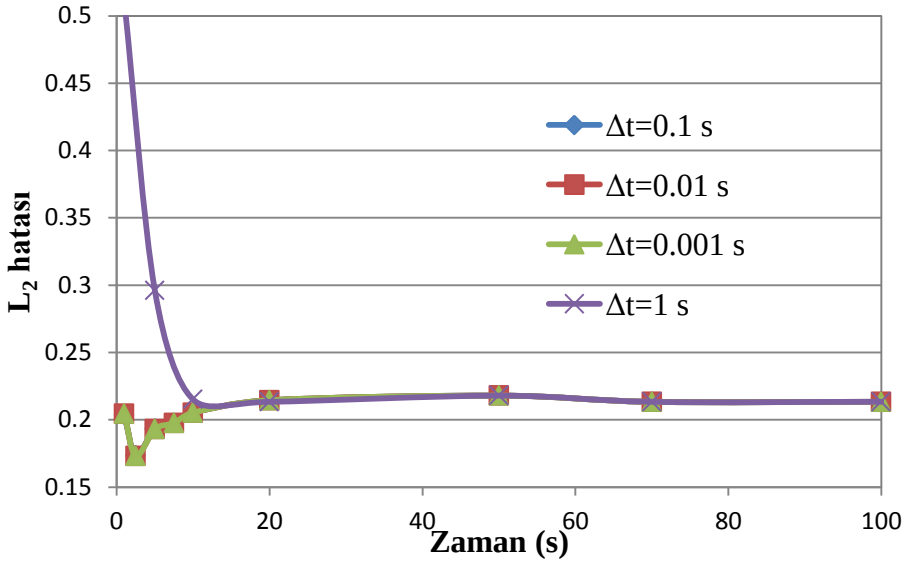
Şekil 5.48 : Farklı S_N dereceleri için KSSEY'in yakınsaması.

İkinci olarak zaman adımı küçüldükçe KSSEY'in yakınsamasını göstermek için 10, 1, 0.1, 0.01 ve 0.001 s'lik zaman adımları seçilerek koşular yapılmıştır. Koşularda S_8 yöntemi ve 20 eleman kullanılmıştır. Şekil 5.49'da değişik zaman adımları için L_2 hatalarının zamanla değişimi gösterilmiştir. Δt=0.001 s ve Δt=0.01 s için L_2 hataları neredeyse aynı çıkmıştır. Şekil 5.49'dan görüleceği üzere zaman adımı genişliği azaltıldıkça KSSEY yakınsamıştır. Ayrıca 100 s sonundaki hataları ise bütün zaman adımları için hemen hemen aynı çıkmıştır. Çünkü geç zamanlarda yakınsama asimptotik, zamandan bağımsız çözüme doğrudur.

Şekil 5.49'da verilen grafiklerde zaman farklaması olarak KF kullanılmıştır. Bunun yerine EF kullanıldığında ise Şekil 5.50'de görüldüğü gibi yine yakınsama gerçekleşmekte ve benzer bir grafik elde edilmektedir. Fakat Δt=1 s durumu daha az hata ile gerçekleşmekte, Δt=0.1, 0.01 ve 0.001 s durumları ise yukarıda Δt=0.01 s ve Δt=0.001 s grafikleri ile aynı grafiği oluşturmakta ve üst üste çakışmaktadır.

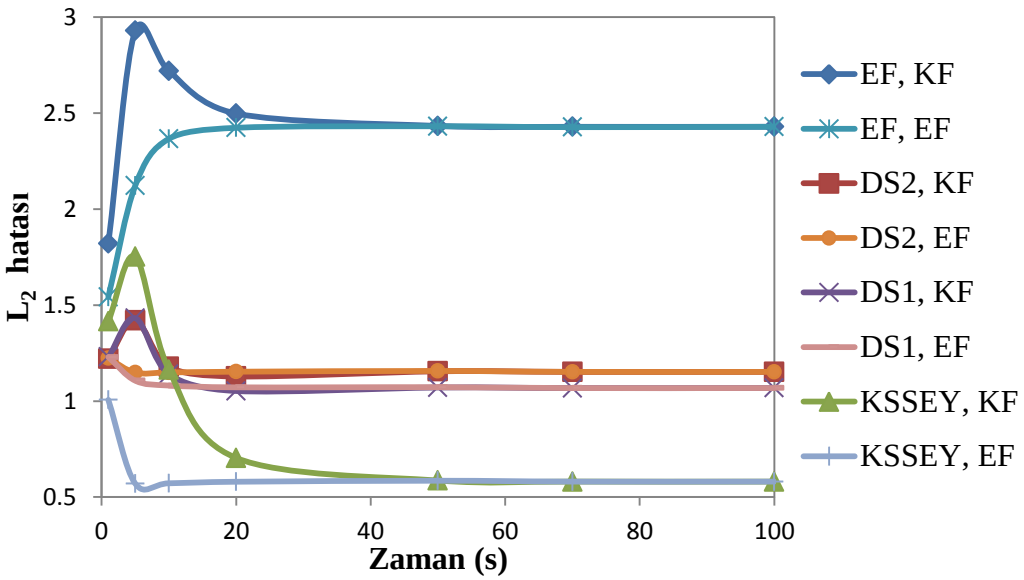


Şekil 5.49 : Farklı zaman adımları için KSSEY'in yakınsaması, (KF).



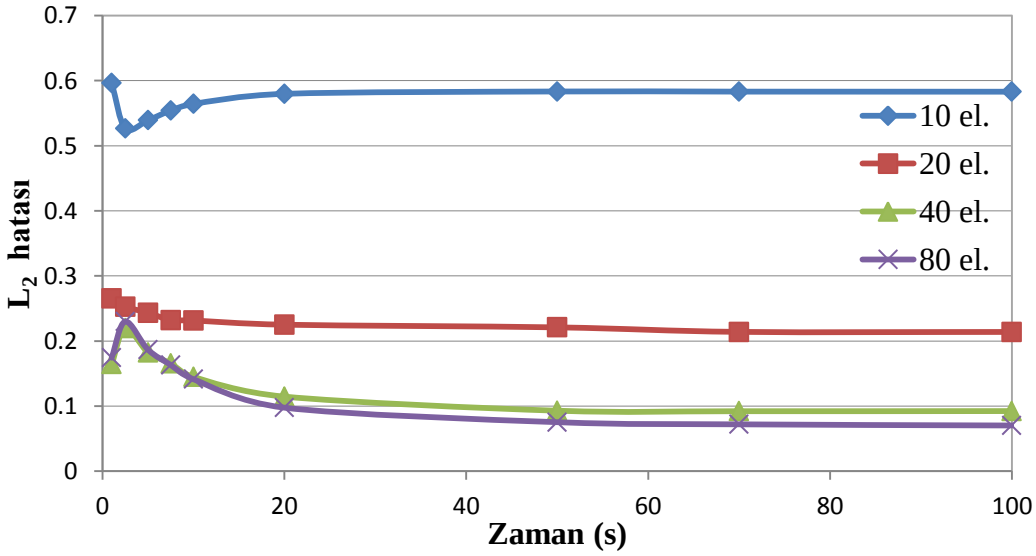
Şekil 5.50 : Farklı zaman adımları için KSSEY'in yakınsaması, (EF).

Bu örnekte zaman farklaması yöntemlerini karşılaştırmak için yakınsamanın henüz gerçekleşmediği Δt=1 s durumu seçilebilir. S_8 yöntemi kullanılarak ve, eleman sayısı EF, DS1 ve DS2 için 20, KSSEY için 10 seçilerek 8 yöntem için koşular yapıldığında Şekil 5.51'de verilen grafik elde edilir. Özelikle erken zamanlarda tüm uzaysal farklama yöntemlerinde EF, KF'den daha iyi sonuçlar vermiştir. Ayrıca KF yönteminde görülen t=2.5 s civarındaki L_2 hatasında zirve EF'de görülmemiştir. Geç zamanlarda ise her iki yöntem aynı uzaysal farklama yöntemi için yaklaşık aynı sonuca yakınsamıştır. Geç zamanlarda ($t \geq 20$) uzaysal farklama yöntemleri için hata sıralaması büyükten küçüğe EF, DS2, DS1 ve KSSEY şeklinde olmuştur.



Şekil 5.51 : Δt=1 s zaman adımı için 8 farklı yöntemin L_2 hatasının zamanla değişimi.

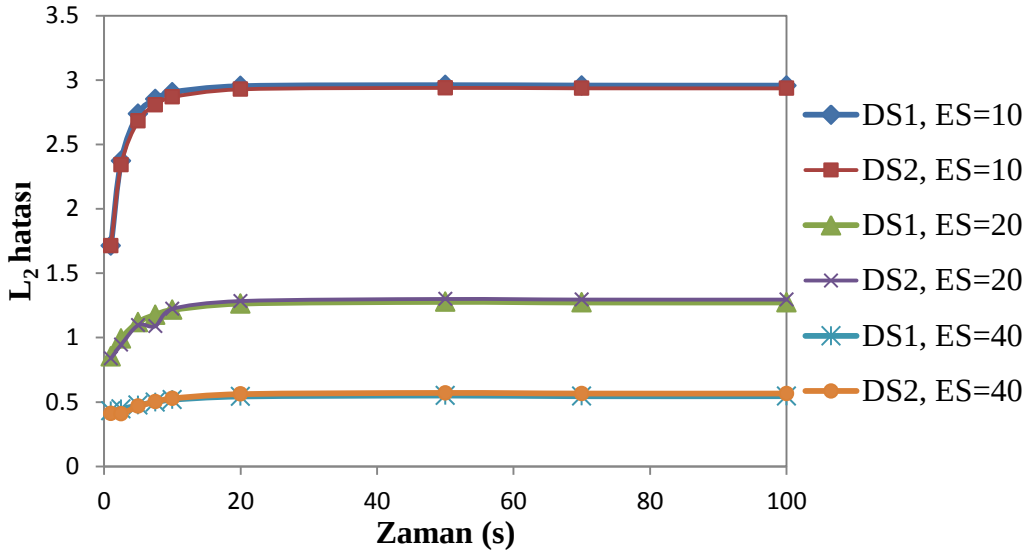
Üçüncü olarak KSSEY'nin eleman sayısı arttıkça yakınsaması araştırılmıştır. Şekil 5.52'de farklı kuadratik eleman sayılarına göre L_2 hatalarının değişimi gösterilmiştir. Bu problem S_8 yöntemi ve 0.1 s zaman adımı ile koşulmuştur. Zaman farklaması olarak KF kullanılmıştır. Şekil 5.52'de eleman sayısı arttıkça KSSEY'nin yakınsaması açıkça görülmektedir.



Şekil 5.52 : Eleman sayısı arttıkça KSSEY'nin yakınsaması.

Bu çalışma DS1 ve DS2 yöntemleri için S_{16} yöntemi kullanılarak ve 0.1 s zaman adımı alınarak tekrarlanacak olursa Şekil 5.53'te verilen grafikler elde edilir. DS1 ve

DS2 sonuçları birbirine çok yakın çıkmış ve her iki yöntem de eleman sayısı arttıkça daha küçük hata üretmiştir.

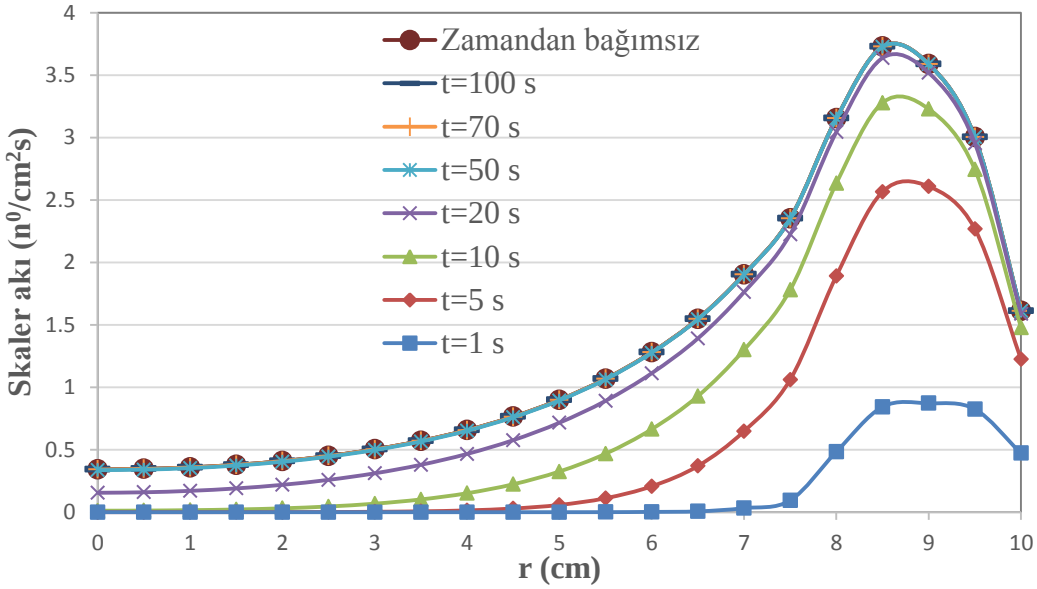


Şekil 5.53 : Eleman sayısı (ES) arttıkça DS1 ve DS2'nin yakınsaması.

Fiziksel olarak erken zamanlarda kürenin iç bölgelerinde hiç nötron bulunmamaktadır. Çünkü bir nötronun kaynak bölgesinden kürenin iç bölgelerine gitmesi belirli bir zaman alacaktır. Zaman ilerledikçe iç bölgelere gidebilen nötron sayısı da artacaktır. Akı profilleri ise zamanla, zamandan bağımsız çözümden elde edilen akı profiline yaklaşacaktır. Zaman ilerledikçe skaler akılar daha yavaş değişir ve hata değerleri de belirli bir değere yakınsar. Bunu göstermek için Şekil 5.54'te verilen grafik çizilmiştir. Bu grafik değişik süreler sonunda skaler akıların uzaysal dağılımını göstermektedir. Koşularda Δt=0.5 s, S_8 kareleme derecesi ve 10 kuadratik eleman kullanılmıştır. Şekil 5.54'te görüldüğü üzere t=50, 70 ve 100 s sonunda akı profilleri ile zamandan bağımsız koşu sonucu bulunan akı profili üst üste binmektedir. Yani zamana bağlı çözümün zamandan bağımsız çözüme yakınsaması açıkça görülmüştür.

Daha sonra SPDOT programı KSSEY'in farklı durumları için zamana bağlı ve zamandan bağımsız koşularak yöntemin yakınsama derecesi ele alınmıştır.. Bunun için Çizelge 5.28'de verilen durumlarda hem zamana bağlı hem de zamandan bağımsız koşular yapılarak t=100 s sonraki akılar karşılaştırıldı. Çizelge 5.28'de verilen durumlar zaman adımı küçültülerek ve kareleme derecesi ile eleman sayısı arttırılarak kaba ızgara durumundan ince ızgara durumuna göre sıralanmıştır. Şekil 5.55'te bu durumlar için elde edilen zamandan bağımsız koşu sonucu bulunan skaler

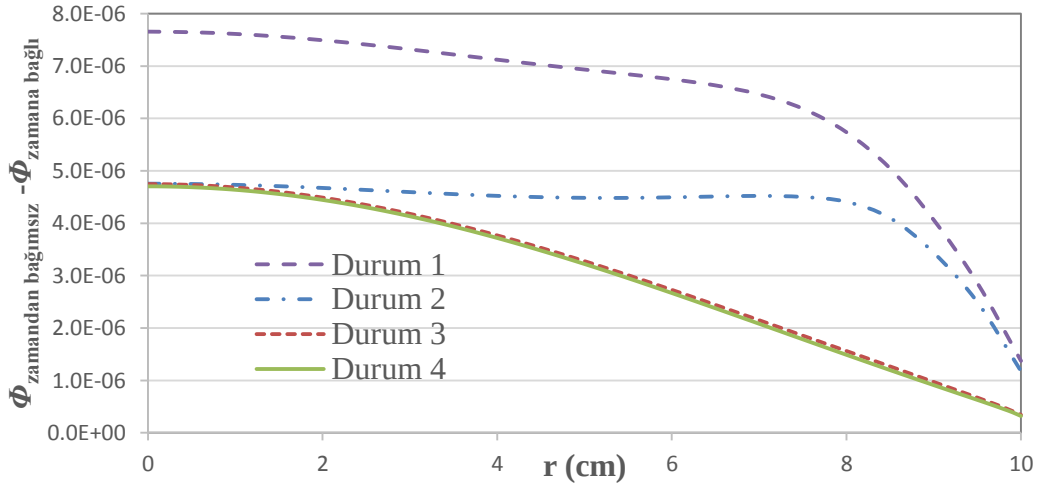
akılar ile zamana bağlı koşu sonucu bulunan skaler akılar arasındaki mutlak farkın küre yarıçapına göre dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 5.54 : KSSEY'de akıların zamanla, zamandan bağımsız çözüme yakınsaması.

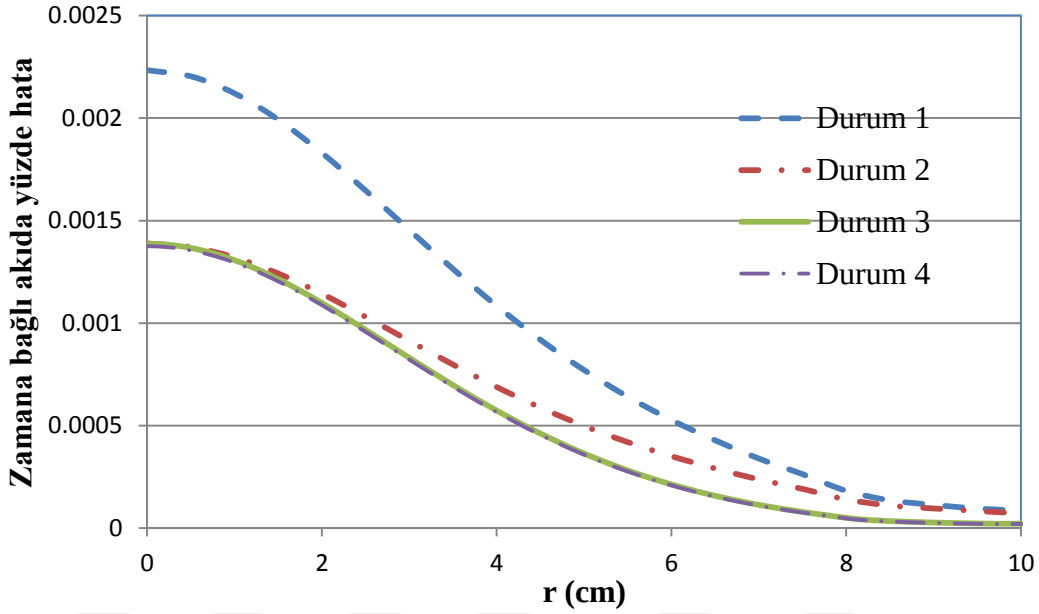
Çizelge 5.28 : KSSEY için farklı koşu durumları.

Durum	Δt (s)	Kareleme Derecesi	Eleman Sayısı
1	0.5	S_8	10
2	0.1	S_{16}	20
3	0.01	S_{32}	50
4	0.001	S_{64}	100



Şekil 5.55 : Dört farklı durum için KSSEY'nin zamandan bağımsız ve zamana bağlı skaler akıları arasındaki mutlak farkın radyal uzaklığa göre değişimi.

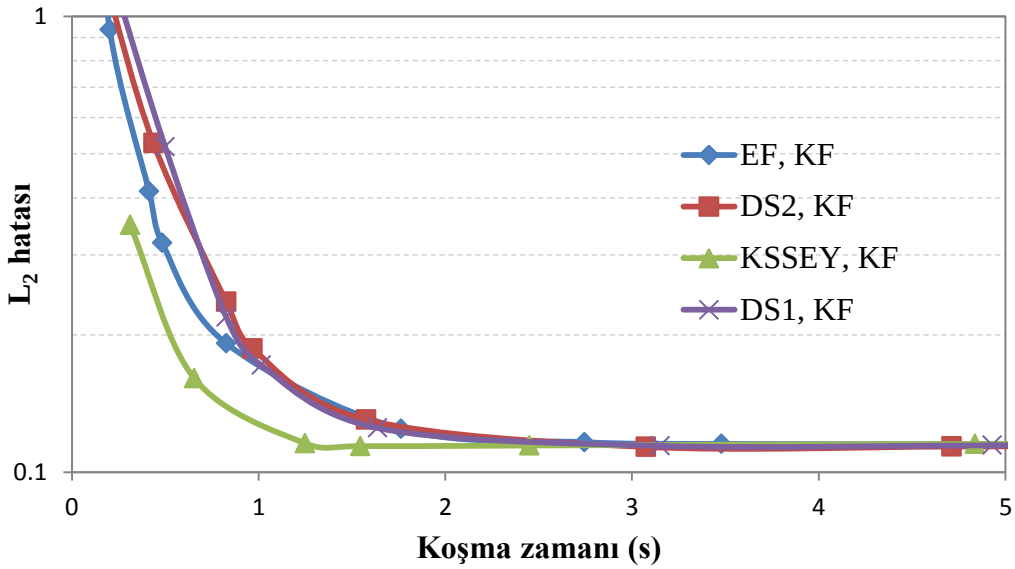
Zamandan bağımsız çözümün gerçek çözüm olduğu varsayımı ile Şekil 5.56'da gösterilen yüzde hatanın küre yarıçapına göre dağılımı bulunmuştur. En büyük fark küre merkezinde gözlenmiştir. Kaynak bölgesinde ise fark azalmış, daha hızlı bir yakınsama gözlenmiştir. En iyi yakınsama beklendiği gibi en iyi durum olan, en ince ızgarayı gösteren Durum 4'te gözlenmiştir



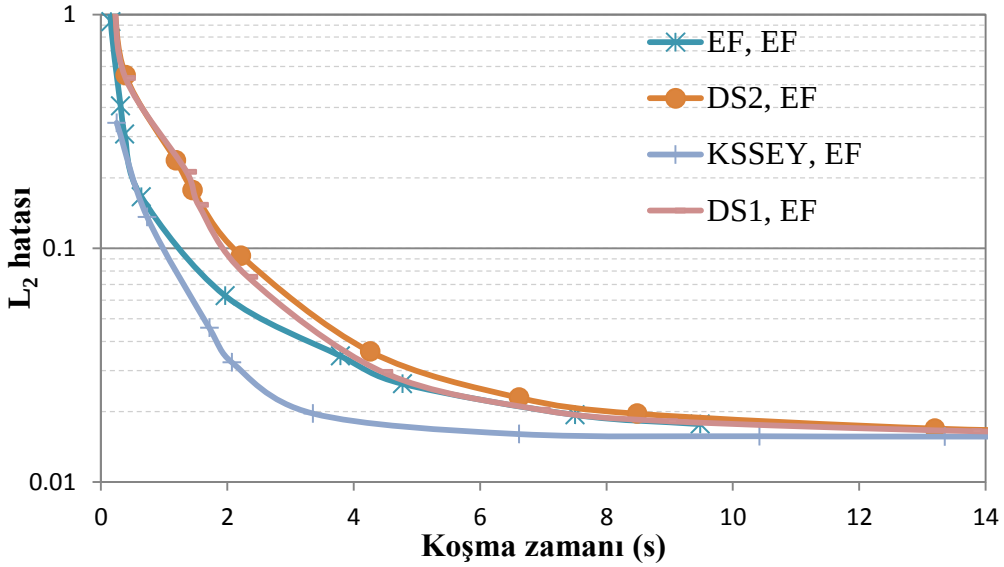
Şekil 5.56 : Farklı ızgara durumları için zamana bağlı skaler akılardaki yüzde hatanın radyal uzaklığa göre değişimi.

Son olarak yöntemlerin hesaplama performanslarına bakılmıştır. En kısa sürede en doğru sonuca ulaşan yöntemi belirleyebilmek için eleman sayısı 20'den 1280'e kadar artırılarak bütün yöntemler için koşular yapıldı. Bu koşularda S_{16} yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca zaman adımı olarak $\Delta t=0.1$ saniye alınmıştır. Koşular yakınsamanın geç zamanlara göre daha geç olduğu erken zamanlardan 10. saniyede durduruldu ve 10. saniyede hatalar ve koşma zamanları hesaplandı. Zaman farklaması olarak KF kullanıldığı durumda L_2 hatalarının koşma zamanına göre değişimi Şekil 5.57'de, EF kullanıldığı durumda ise Şekil 5.58'de gösterilmiştir. Her iki durumda da KSSEY en kısa sürede elde edilebilecek en az hataya yakınsamaktadır. İkinci olarak başlarda EF gelsede DS1 ve DS2 yöntemleri ona yetişmekte ve bu yöntemler elde edilebilecek en az hataya hemen hemen aynı zamanda ulaşmaktadır. Zaman adımlamasında KF kullanıldığında en az hata 0.115 olurken aynı koşullarda EF kullanıldığında ise 0.016 olmaktadır. Bu durumda hem hem daha az hataya düşebilmesi hem de bunu diğer yöntemlerden daha kısa sürede

yapabilmesi nedeniyle KSSEY-EF yöntemi hesaplama performansı en iyi olan yöntem olmuştur.



Şekil 5.57 : Zaman farklaması olarak KF kullanılması durumunda uzaysal farklama yöntemlerinin L_2 hatalarının koşma zamanları ile değişimi.



Şekil 5.58 : Zaman farklaması olarak EF kullanılması durumunda uzaysal farklama yöntemlerinin L_2 hatalarının koşma zamanları ile değişimi.

5.2.3 Hızlandırma yönteminin değerlendirilmesi

KIYDHY'yi analiz etmek için 2 tip bençmark problemi ele alınmıştır. Bunlar sırasıyla sonsuz ve sonlu ortam problemleridir. Yansıtıcı ve boşluk sınır koşulları sırasıyla birinci ve ikinci tip problemlerde uygulanmıştır. KIYDHY ele alınan bu problemlerde hem iç hem de dış iterasyonları hızlandırmak için uygulanmıştır.

5.2.3.1 Sonsuz ortam problemleri

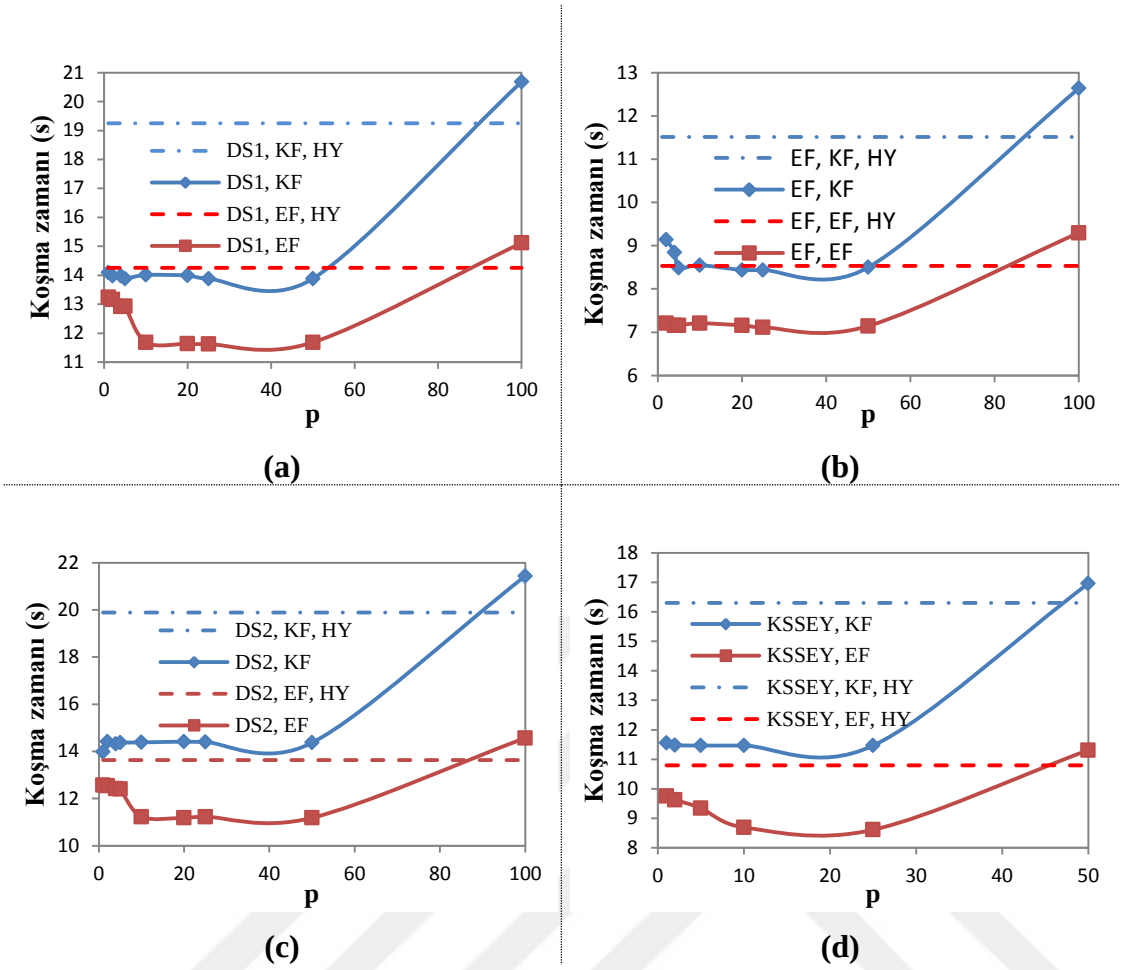
Bu problem üniform kaynaklı ve çoğaltkan ortam problemi olup Bölüm 5.2.1.2'de ele alınmıştı. Burada KIYDHY bu problemin kritik, altkritik ve üstkritik reaktör olmak üzere 3 durumu için uygulanmıştır.

Kritik reaktör

Bu kritik reaktör probleminin analitik çözümü $\varphi(t) = t$ 'dir. Zaman farklamasında KF ve EF kullanılmış ve t=20. saniyeye kadar SPDOT ve LQD1 kodları koşulmuştur. Aşağıdaki tablolarda ve şekillerde bilgisayar koşma zamanları verilmektedir. Bu problemler farklı S_N dereceleri, kabuk sayıları, zaman adımları ve p (kaba ızgara kabuğu başına ince ızgara kabuğu sayısı) sayıları ile koşulmuştur.

KIYDHY şartlı kararlı yöntemdir. Bu nedenle bazen ıraksayabilir. Özellikle EF ve p=1 durumunda buna rastlanmıştır. Tablolarda bu durum IR olarak gösterilmiştir. Karşılaştırma amacıyla önce problemler hızlandırılmadan koşulmuştur. HY hızlandırılmamış koşu sonuçlarını göstermektedir.

Şekil 5.59'da kritik reaktör için 100 kabuk kullanılarak, zaman adımı 0.01 s alınarak, S_8 yöntemiyle yapılan koşular sonucu elde edilen bilgisayar koşma zamanları gösterilmiştir. HY hızlandırma olmadığı durumu göstermektedir. Grafiklerde hızlandırma olmadığı durumda bulunan koşma zamanından yatay kesikli çizgi çekilmiştir. Zaman farklaması olarak her iki yöntem de kullanılmıştır. Grafiklerden görüleceği üzere zaman farklamasında EF kullanılması durumunda daha kısa koşma zamanları bulunmuştur. Ancak zaman farklama yöntemi olarak KF kullnaıldığında KIYDHY'nin etkinliği daha fazla olmuştur. Şekil 5.59a'da DS1 için zaman adımlamasında KF kullanıldığında optimum hızlandırma durumunda zamandan kazanç yaklaşık %27.8 iken EF kullanıldığında ise yaklaşık %18.4'tür. Şekil 5.59b'de gösterilen EF yönteminde p=1 için KIYDHY ıraksamıştır. KF ve EF'de kazançlar sırasıyla %26.7, %16.6 olmuştur. Şekil 5.59c'de gösterilen DS2 için KF ve EF kullanılması durumlarında kazanç yaklaşık olarak sırasıyla %28.0, %18.0 olmuştur. Son olarak Şekil 5.59d'de gösterilen KSSEY'de hızlandırma yöntemiyle optimum durumda elde edilen kazanç KF ve EF için sırasıyla %29.7 ve %20.2 olmuştur. Bütün yöntemlerde p=100 için yani tek bir kaba ızgara bölgesi olması durumunda hızlandırma gözlenmemiştir. Zaman farklamasında KF kullanılması durumunda kazanç EF'den daha fazla olmuştur.



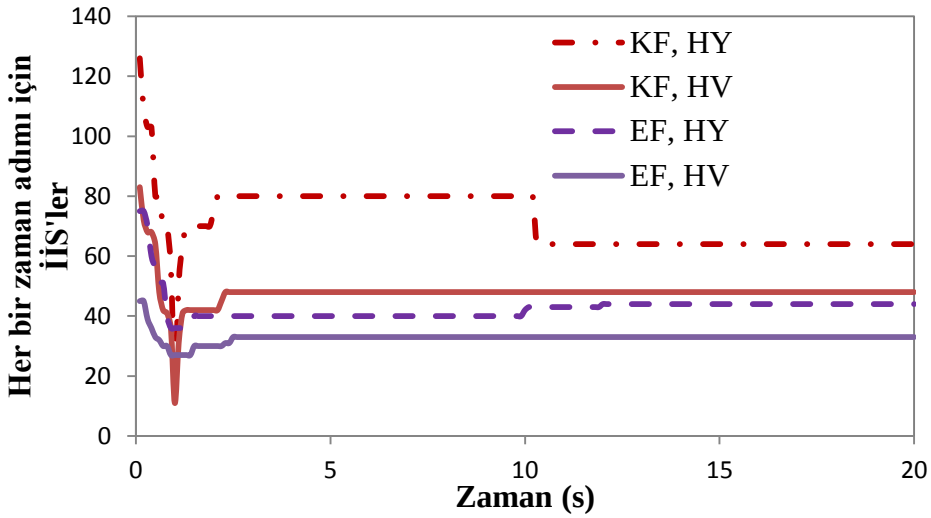
Şekil 5.59 : p'ye göre koşma zamanlarının değişimi: (a) DS1. (b) EF. (c) DS2. (d) KSSEY.

Bu problemde her bir zaman adımı için iç ve dış iterasyon sayılarına (İİS ve DİS) bakacak olursak Çizelge 5.29'da her zaman adımında DİS'lerin, Şekil 5.60'ta ise İİS'lerin zamanla değişimi gösterilmiştir. Her iki durumda da hızlandırma uygulandığında iterasyon sayısı azalmıştır. Uzaysal farklama yöntemi olarak KSSEY, yönsel farklamada S_8, 50 eleman, 0.1 saniyelik zaman adımları ve hızlandırmada p=25 yani iki kaba ızgara bölgesi kullanılmıştır. Çizelge 5.29'da verilen DİS'ler her bir zaman adımı için oldukça az çıkmıştır.

Çizelge 5.29 : KSSEY için KF, EF ve hızlandırma var (HV), hızlandırma yok (HY) durumları için her bir zaman adımında DİS'ler.

Zaman	KF, HY	KF, HV	EF, HY	EF, HV
0.1	6	4	5	3
1.0	5	3	4	3
2.0	5	3	4	3
5.0	5	3	4	3
10.0	5	3	4	3
20.0	4	3	4	3

Şekil 5.60'ta gösterilen grafiklerde KF durumunda İİS'de en fazla kazanç 2.1'inci saniyede (21. zaman adımı) %47.5 ile gerçekleşmiştir. EF durumunda ise en fazla kazanç 0.3'üncü saniyede %44.3 ile gerçekleşmiştir. 12. saniyeden sonra her bir zaman adımında iterasyon sayısı değişmemiştir.



Şekil 5.60 : KSSEY için KF, EF ve hızlandırma var (HV), hızlandırma yok (HY) durumları için her bir zaman adımında iç iterasyon sayıları.

Çizelge 5.30'da ise 50 kabuk ve 2 farklı zaman adımı genişliği kullanılarak elde edilen bilgisayar koşma zamanları gösterilmiştir. Uzaysal farklamada EF, DS2 ve KSSEY, zaman farklamasında yukarıda KIYDHY'nin daha etkili olduğu gösterilmiş olan KF yöntemi, yönsel ayrıklaştırmada ise S_8 kullanılmıştır. Δt=0.01s olması durumunda EF, DS2 ve KSSEY'de maksimum zamandan kazançlar sırasıyla %27.7, %28.5 ve %29.4, optimum p'ler ise sırasıyla p=25, p=1 ve p=2,10 olmuştur. Δt=0.1s kullanılması durumunda ise maksimum kazançlar EF, DS2 ve KSSEY için sırasıyla %30.4, %31.6 ve %31.9, optimum p'ler ise tüm yöntemler için p=1 olmuştur. Her iki durumda da KIYDHY, KSSEY için diğer yöntemlere göre biraz daha etkili hızlandırma yapmıştır. Δt=0.01s ve p=1 alındığında (ince ızgara yeniden dengeleme hızlandırma yöntemi) KIYDHY, EF yönteminde kullanıldığında ıraksamıştır. Tek bir kaba ızgara bölgesi alındığında (p=50) ise önceden olduğu gibi yine KIYDHY etkili olamamıştır.

Çizelge 5.31'de EF ve DS1 için farklı S_N dereceleri ile yapılan koşuların sonucu gösterilmiştir. En kısa süren koşu süreleri altı çizili gösterilmiştir. Bu örnekte genellikle EF için p=25, süreksiz sonlu elemanlar yöntemleri için ise p=1 durumunda KIYDHY diğer p değerlerinden daha etkili hızlandırmayı yapmıştır.

Çizelge 5.30 : İki farklı zaman adımında koşma zamanlarını p ile değişimi.

	Δt=0.01s			Δt=0.1s		
p	EF	DS2	KSSEY	EF	DS2	KSSEY
HY	5.24	8.89	13.48	1.84	3.01	4.42
1	IR	6.36	9.63	1.28	2.06	3.01
2	4.43	6.44	9.52	1.33	2.07	3.12
5	4.35	6.43	9.53	1.36	2.14	3.12
10	3.82	6.44	9.52	1.36	2.12	3.12
25	3.79	6.41	9.55	1.33	2.17	3.10
50	5.71	9.58	14.21	2.01	3.20	4.65

Çizelge 5.31 : Farklı S_N dereceleri için koşma zamanlarının p ile değişimi.

	Δt=0.1s, S_{16}		Δt=0.1s, S_{32}		Δt=0.1s, S_{64}		Δt=1s, S_{32}	
p	EF	DS1	EF	DS1	EF	DS1	EF	DS1
HY	4.37	4.87	12.01	8.46	71.34	16.07	9.42	5.68
1	3.26	3.32	9.48	5.57	77.72	9.98	6.93	2.54
2	3.29	3.26	9.86	5.74	65.66	10.59	6.86	2.64
5	3.18	3.43	9.09	5.99	54.51	11.25	6.38	2.75
10	3.21	3.43	9.08	5.93	54.23	11.17	6.44	3.03
25	3.17	3.45	8.85	5.91	53.54	11.29	6.36	3.40
50	4.71	5.16	12.84	8.88	71.76	16.82	10.97	5.96

Kritik altı ve kritik üstü reaktör

Kritik altı reaktör probleminde KIYDHY hızlandırma sağlamamıştır. KIYDHY baskınlık oranının daha yüksek olabileceği kritik ve kritik üstü reaktör sistemlerinde veya küre yarıçapı osy cinsinden büyük olan sistemlerde daha başarılı olabilir. Bölüm 5.2.1.2'de tarif edilen kritik üstü reaktörü ele aldığımızda Δt=0.01s, S_8, 100 eleman ile yapılan koşu sonuçları Çizelge 5.32'de verilmiştir. Koşularda akılar her 1 saniyede yazdırılmaktadır. En kısa süren koşuların değerleri altı çizili verilmiştir. Ancak hızlandırma yapıldığında elde edilen koşu zamanları birbirine çok yakın çıkmıştır. EF, p=1 drumunda her iki zaman farklaması yönteminde de ıraksamıştır. Optimum p durumları için koşma zamanlarından elde edilen yüzde kazançlara baktığımızda zaman farklamasında KF kullanıldığında EF, DS2, DS1 ve KSSEY için sırasıyla %28.27, %30.21, %27.96, %29.83, EF kullanıldığında ise sırasıyla %26.99, %28.24, %28.94, %24.23 olmuştur. DS1 yöntemi hariç KIYDHY zaman farklamasında KF kullanıldığında EF'ye göre biraz daha etkili olmuştur. Aradaki fark özellikle KSSEY'de daha fazla olmuştur. p=100 durumunda yine tüm yöntemlerde hızlandırma etkisiz kalmıştır.

Çizelge 5.32 : Kritik üstü reaktörde koşma zamanlarının p ile değişimi.

	Δt=0.01 s, KF				Δt=0.01 s, EF			
p	EF	DS2	DS1	KSSEY	EF	DS2	DS1	KSSEY
HY	11.39	19.33	18.60	31.28	9.30	14.87	15.69	23.57
1	IR	13.49	13.57	22.06	IR	12.06	12.73	18.58
2	8.74	13.85	13.54	22.09	6.88	12.07	12.53	18.53
4	8.47	14.01	13.48	22.14	6.79	12.23	12.46	18.53
5	8.19	13.82	13.45	22.11	6.83	11.82	12.43	18.78
10	8.17	13.76	13.40	22.03	6.85	10.67	11.15	18.45
20	8.22	13.76	13.43	22.25	6.82	10.69	11.23	18.28
25	8.30	13.73	13.42	22.00	6.83	10.70	11.19	18.19
50	8.39	13.76	13.42	21.95	6.85	10.69	11.22	17.86
100	12.42	20.47	19.97	32.93	10.16	15.87	16.71	26.40

5.2.3.2 Sonlu ortam problemi

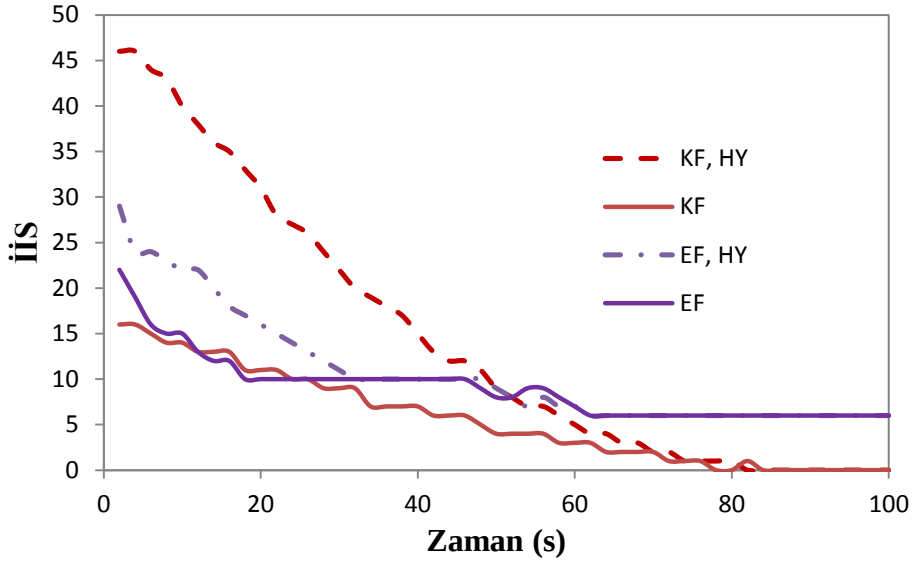
Kritik çıplak küre

Bu problem Bölüm 5.2.2.2'de tarif edilmiştir. Bu problemi Δt=1 s, S_{256}, 100 kabuk için koşacak olursak Çizelge 5.33'te verilen koşma zamanları elde edilir. Koşular 100'üncü saniyeye kadar sürdürülmüş ve 2 saniyede bir akılar yazdırılmıştır. En kısa koşma zamanları altı çizili gösterilmştir. KF kullanılması durumunda etkili bir hızlandırma sağlanmışken, EF kullanılması durumunda sağlanamamıştır. Ancak EF kullanılması durumunda hızlandırılmamış koşu zamanı KF'ye göre daha kısadır. KF kullanılması durumunda optimum p'ler 1 ve 2 olmuştur. EF kullanılması durumunda ise EF, DS1 ve DS2 için p=1 optimum, KSSEY için p=20 optimum olmuştur. Zaman farklamasında KF kullanılması durumunda optimum p için EF, DS2, DS1 ve KSSEY yöntemlerinde koşma zamanlarından yüzde kazançlar sırasıyla %48.78, %49.53, %50.20 ve %49.80 olmuştur. EF kullanılması durumunda ise kodun optimum p'lerde koşulmasıyla elde edilen kazançlar sırasıyla %5.50, %15.82, %15.01 ve %8.96 olmuştur.

KSSEY için optimum p'de (KF için 2, EF için 20) iterasyon sayılarına bakacak olursak belli bir zaman sonra hızlandırmanın olmadığı durumda iterasyon sayısı ile hızlandırmanın olduğu durumdaki İİS üst üste gelmektedir. Şekil 5.61'de İİS'nin zamanla azalması, Çizelge 5.34'te ise DİS'in zamanla azalması gösterilmiştir. Zaman farklamasında EF kullanılması durumunda daha erken zamanlarda, hızlandırmanın olduğu ve olmadığı durumlarda iterasyon sayıları üst üste gelmektedir.

Çizelge 5.33 : Kritik çıplak reaktörde koşma zamanlarının p ile değişimi.

	Δt=1 s, KF				Δt=1 s, EF			
p	EF	DS2	DS1	KSSEY	EF	DS2	DS1	KSSEY
HY	9.41	15.85	17.39	25.08	7.46	13.34	13.99	20.87
1	4.84	8.00	8.66	12.59	7.05	11.23	11.89	19.98
2	4.82	8.02	8.70	12.54	7.52	12.00	12.23	19.81
4	4.90	8.24	8.91	12.79	7.83	12.25	12.23	20.33
5	4.99	8.31	9.08	12.93	7.97	12.31	12.17	20.06
10	5.29	8.91	9.66	13.76	7.77	12.39	12.53	19.62
20	6.35	10.50	11.43	16.35	7.11	12.28	12.67	19.00
25	6.91	11.48	12.43	17.83	7.07	12.48	13.03	19.25
50	8.75	14.38	15.52	22.37	7.58	13.29	13.84	20.53
100	10.56	17.47	18.78	27.13	8.10	14.18	14.88	21.86



Şekil 5.61 : Her bir zaman adımında İİS'nin değişimi.

Çizelge 5.34 : DİS'in zamanla değişimi.

Zaman	KF, HY	KF, HV	EF, HY	EF, HV
2	12	7	9	8
10	11	6	8	6
20	10	6	7	5
50	5	4	5	5
70	3	2	4	4
100	1	2	4	4

Optik kalınlığa bağlı olarak KIYDHY'nin performansını ölçmek için bu problem aynı koşullarda (S_{256}, Δt=1 s) farklı eleman sayıları ile koşulmuştur. Zaman farklamasında KF kullanılmış, EF ve KSSEY için p=2, DS2 için ise p=1 alınmıştır. Yukarıda DS1 sonuçları DS2'ye benzer çıktığı için burada yer verilmemiştir. Çizelge

5.35'te koşma zamanlarından elde edilen yüzde kazançlar gösterilmiştir. Zamandan bağımsız problemlere benzer bir şekilde KIYDHY'nin performansı optik kalınlık artınca düşmüştür.

Çizelge 5.35 : Optik kalınlıkla değişen yüzde kazançlar.

τ	EF	DS2	KSSEY
0.015	48.47	49.40	49.74
0.036	48.80	49.58	50.51
0.073	48.96	49.53	50.18
0.146	48.79	49.28	49.41
0.364	46.02	47.02	45.82
0.728	35.79	43.14	35.37
1.455	-	28.40	-

KIYDHY iterasyon sayısı zamanla azalan zamana bağlı problemlemde özellikle ilk zaman adımlarında etkili olmuştur. Burada da KF'da EF'ye göre daha etkili olmuştur. Ayrıca optik kalınlık uygun seçildiğinde etkinliğinin arttırabileceği de gösterilmiştir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında 4 uzay farklaması yöntemi ve 2 zaman farklaması yöntemi olmak üzere toplam 4x2=8 yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan zamandan bağımsız ve zamana bağlı nötron transport denklemini küresel geometride sayısal olarak çözmek için uzaysal farklamada kullanılmak üzere yeni bir doğrusal ve kuadratik süreksiz Galerkin sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir. Bunların yanında uzaysal farklamada elmas farklaması ve TIMEX kodunda da kullanılan başka bir doğrusal süreksiz sonlu elemanlar yöntemi (DS1) kullanılmıştır. Bu yöntemlerin türetimi yapılmış ve dört farklı uzaysal ayrıklaştırma yöntemi ile iki farklı zaman ayrıklaştırması yöntemi kullanılarak bilgisayar programları geliştirilmiştir. Zaman farklaması olarak kapalı ve elmas farklaması, yönsel ayrıklaştırma yöntemi olarak ayrık ordinatlar yöntemi kullanılmıştır.

İlk olarak DS1, küresel geometri ani nötron transport denkleminin zamandan bağımsız ve zamana bağlı çözümü için yeniden formüle edilmiştir. Bu formülasyonda en önemli iki yenilik ağırlık fonksiyonlarının deneme fonksiyonları ile aynı seçilmesi yani Galerkin tipi bir formülasyon olması ve yönsel adımlamada kullanılan ve ızgara hücresinin alt kenarında bulunan yönsel akıya da hücre merkezinde bulunan yönsel akıda olduğu gibi Lagrange polinomları ile yaklaşımda bulunulmasıdır. Yeni metodoloji kullanılarak türetilen DSSEY formülasyonu DS2 olarak gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında ikinci amaç küresel geometride, zamana bağlı ve zamandan bağımsız ani nötron transport denkleminin sayısal çözümü için yüksek dereceden bir SSEY geliştirmek olmuştur. Bu amaçla DS2 için kullanılan metodoloji ile Kuadratik (İkinci Derece) SSEY formülasyonu için türetimler yapılmıştır.

DS2 ve KSSEY formülasyonlarında ilk olarak klasik Galerkin yöntemi kullanılarak yönsel akılara yaklaşım yapılmıştır. Daha sonra nötron transport denklemi belirli ağırlık fonksyonları ile çarpılarak uzaysal boyutta ilgili birim hücre için integraller alınmıştır. Hücre sınırlarında süreksizlik sağlanmış ve sonuç olarak bu yöntemlerin

bir avantajı olarak büyük bir matris yerine DS1 ve DS2 için 2x2'lik, KSSEY için 3x3'lük matrisler elde edilmiştir.

Bu formülasyonlar kullanılarak FORTRAN dilinde SPDOT ismi verilen bir program ve DS1 yöntemi için LQD1 isminde başka bir program yazılmıştır. Yazılan programlar analitik çözümü bilinen zamandan bağımsız ve zamana bağlı farklı tip bençmark problemleri ile doğrulanmış ve yöntemler karşılaştırılmıştır. Zamandan bağımsız bençmark problemleri olarak dört farklı tip (çıplak, iki bölgeli, eşyönlü ve eşyönsüz saçılmanın olduğu ortamlar, tek ve iki gruplu problemler) özdeğer problemi ve fisyon kaynağı olmayan serbest kaynak problemleri ele alınmıştır.

Analitik çözümü bilinen zamandan bağımsız 16 ve zamana bağlı 10 problem olmak üzere toplam 26 problem çözülerek yöntemler karşılaştırılmıştır. Ele alınan tüm problemlerin giriş dostaları EK'te verilen program cd'sinin içerisinde mevcuttur. Bunlardan bir kısmının sonuçları tezde verilmiştir. Ayrıca EF yöntemi için PARTISN kodu doğrulama amaçlı kullanılmış ve her iki kodun EF kullanıldığında aynı sonuçları verdiği gözlenmiştir.

Küre yüzeyinde iki farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Sonsuz ortam problemlerinde yansıtıcı sınır koşulu kullanılmış, diğer problemlerde ise boşluk sınır koşulu uygulanmıştır. Yansıtıcı sınır koşulu küre merkezinde de mevcut olduğundan çözüm için iç iterasyonlarla birlikte yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu da uygulanmıştır. Her iki sınır koşulu ile yapılan koşularla geliştirilen yöntemler doğrulanmıştır.

Zamandan bağımsız problemlerde kuadratik süreksiz sonlu elemanlar yöntemi aynı nokta sayısı ile karşılaştırma yapıldığında etkin çoğaltma katsayısını diğer yöntemlere oranla daha doğru hesaplayabilmiş, ayrıca hesaplama yükü olarak bakıldığında daha kısa sürede daha hatasız sonuçlar üreterek iyi bir performans göstermiştir. Ayrıca yeni DS2 yönteminin eski DS1 yönteminden daha doğru k_{etk} değerleri hesapladığı görülmüştür. İki bölgeli yutucu küre probleminde KSSEY'in fiziksel olmayan akı dalgalanmalarına karşı daha dayanıklı ve diğer yöntemlere göre daha az negatif akı ürettiği gösterilmiştir. Ayrıca DS2 ve KSSEY'in küre merkezinde akı düşmesi problemi ile karşılaşmadığı da gösterilmiştir. EF ve DS1 ise bu sorunu gidememiştir.

Küre merkezinde iki farklı merkez koşulu uygulanmıştır. Bunlardan ikincisinde $\psi_{1/2,1/2}$ bütün yönlerde orijinde diğer akılara eşitlenir. $\psi_{1/2,1/2}$ başlangıç yönü

denkleminden hesaplanır. Bu merkez koşulu DS1'in kuadratik sürümünde küre merkezi, ρ=0 hatalarını bir ölçüde gidermiştir. Ancak tamamen gidememiş, bu nedenle DS1'in kuadratik sürümüne bu tez çalışmasında yer verilmemiştir. ρ=0 hatası EF ve DS1'de merkezde akı düşüşü şeklinde görülmüştür. İkinci merkez koşulu akı düşüşü problemini gidermese de merkezde akıyı çok doğru bir şekilde hesaplamayı sağlamıştır.

Daha sonra hem dış kaynağın, hem de fisyonun olduğu kritik altı reaktör sistemleri için kodlar geliştirilmiş ve hem hızlandırmanın olmadığı hem de hızlandırmanın olduğu durumlar için doğrulanmıştır.

Zamana bağlı koşularda sonsuz ve sonlu ortam problemleri ele alınmıştır.ise yine KSSEY'nin diğer yöntemlerden daha iyi sonuçlar ürettiği gözlenmiştir. Ayrıca ele alınan problemlerde KSSEY'nin beklenen akı profilini vererek iyi bir yakınsama özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak KSSEY, yüksek hassasiyet gerektiren büyük ölçekli zamana bağlı transport problemlerine uygun bir yöntem olduğu söylenebilir.

Zamana bağlı problemlerde sekiz ayrı yöntem arasından uzaysal farklamada kuadratik süreksiz sonlu elemanlar yöntemi, zaman farklamasında ise elmas farklaması kullanıldığında daha doğru sonuçlar elde edilmiştir. Diğer uzaysal farklama yöntemleri EF ile kullanıldığında ise KF ile kullanıldıkları duruma göre genellikle daha doğru sonuçlar vermiş ve daha kısa sürede koşular yapılmıştır. Bu yöntemlerin hesaplamada kullandığı iç ve dış iterasyonların hızlandırılmasında kaba ızgara yeniden dengeleme hızlandırma yöntemi kullanılmış ve performansı test edilmiştir. Sonuç olarak bu yöntemin uygun problemlerde ve uygun kaba ızgara başına ince ızgara sayısı kullanıldığında etkili bir hızlandırma yaptığı gösterilmiştir.

Hesaplama yükü olarak bakıldığında aynı doğrulukta bir skaler akı sonucunu diğer yöntemlere göre daha kısa sürede hesaplayabildiği için uzaysal farklamada Kuadratik Süreksiz, zaman farklamasında Elmas Farklaması birleşimi daha etkili olmuştur. Kuadratik Süreksiz Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin zamandan bağımsız ve zamana bağlı nötron transport denkleminin küresel geometride çözümünde uzaysal farklama yöntemi olarak oldukça iyi bir yöntem olduğu gözlenmiştir.

Zamana bağlı problemlerden dış kabuğunda kaynak olan küre probleminde doğrusal süreksiz sonlu elemanlar yöntemlerinden DS1, DS2'en genellikle daha iyi sonuçlar

üretmiştir. Ancak aradaki fark küçüktür. Bu problemde kullanılan L_2 normuna dayalı hata formülü küre yarıçapının karesi ile çarpımı içerdiği için küre yüzeyine yakın noktalardaki hatalara daha hassastır. Bu nedenle küre yüzeyi civarında akıları doğru hesaplamanın daha önemli olduğu zamana bağlı problemlerde DS1, DS2'ye göre daha tercih edilebilir. Ancak DS1 yönteminde küre merkezinde akı düşmesi sorunu görülebilmektedir. Bu nedenle küre merkezinde skaler akıları doğru hesaplamanın daha önemli olduğu problemlerde DS2 DS1'e tercih edilebilir. Her iki durumda da KSSEY aynı nokta sayısına (kuadratik yöntemde eleman sayısının doğrusal yöntemlerin eleman sayısının yarısı alındığı durumda) göre karşılaştırma yapıldığında çok daha doğru sonuç ürettiği gözlenmiştir. Bu nedenle KSSEY diğer yöntemlere göre daha tercih edilebilir bir yöntemdir.

Özellikle zamana bağlı nötron transport denklemi hesaplamalarında her zaman adımında çok sayıda iterasyon gerekmektedir. Ayrıca optik kalın ve oldukça saçıcı bölgelerde iterasyonların yakınsama hızının oldukça yavaşladığı ve bunun büyük bilgisayar koşma zamanlarına neden olduğu iyi bilinmektedir. Bu tür problemler yakınsama hızını arttırmak için hızlandırma yöntemlerine gerek duymaktadır. Bu çalışmada Kaba Izgara Yeniden Dengeleme Hızlandırma Yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem transport teorisinin hem iç hem dış iterasyonlarının hızlandırılmasında kullanılmıştır. Bu çalışmada bu yöntem için türetimler verilmiştir. Sayısal analizler sonucunda bu hızlandırma yönteminin uygun problemlerde önemli ölçüde hesaplama zamanını azalttığı gösterilmiştir. Ayrıca bu yöntemin baskınlık oranı bire yaklaşan problemlerde dış iterasyonları, saçılma oranı bire yaklaşan problemlerde ise iç iterasyonları daha etkili hızlandırdığı gözlenmiştir. Ayrıca optik kalın ya da optik ince ortamlar için etkinliği azalmış, ikisinin arasında bir noktada en iyi hızlandırmayı yaptığı gösterilmiştir. KIYDHY zaman farklaması yöntemlerinden KF kullanıldığında EF'ye göre daha etkili olmuştur.

KIYDHY eşit ızgaralar alındığında daha etkili hızlandırma yapmıştır. Bu nedenle tüm hızlandırma çalışmalarında eşit kaba ızgaralar alınmıştır. Bu nedenle kaba ızgara başına ince ızgara sayısı yan p sabit kalmış ve sayısal analizlerde kullanılmıştır. KIYDHY'nin etkinliğinin p'ye bağlı olduğu görülmüştür.

KIYDHY şartlı kararlı bir yöntemdir. Örneğin sonsuz küre probleminde yöntemin kritik altı reaktör için verimsiz kritik ve kritik üstü reaktör için verimli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ince ızgara yeniden dengeleme yönteminin veya p=2

seçeneğinin SSEY için genellikle çoğu durumda etkili olduğu görülmüştür. Tek bir kaba ızgara hücresi seçildiğinde KIYDHY etkisiz olmuştur. p=1 durumunda KIYDHY özellikle zaman adımı küçük alındığında EF yönteminde ıraksamıştır.

Optik kalın ortam problemleri hızlandırma gerektiren ortamlardır. SSEY optik kalın ortamlarda etkili bir yöntemdir. Fakat KIYDHY bu ortamlarda kararsız olabilir. Bu nedenle DSSEY bu tip problemler için KIYDHY ile uyumlu bir ikili oluşturlar.

Sonuç olarak zamandan bağımsız transport denkleminin çözümü için KSSEY hem doğruluk hem de hesaplama yükü olarak diğer yöntemlere oranla daha başarılı olmuştur. Zamana bağlı problemlerde ise KSSEY-EF birleşimi daha daha kısa sürede daha doğru sonuçlar ürettiği için önerilebilir. Bütün yöntemlerin iç ve dış iterasyonları KIYDHY ile başarılı bir şekilde hızlandırılmıştır.

Sonraki çalışmalarda burada geliştirilen doğrusal ve kuadratik süreksiz sonlu elemanlar yöntemleri farklı ağırlık fonksiyonları denenerek daha doğru sonuçlar vermek üzere geliştirilebilir. Üçüncü derece (kübik) süreksiz sonlu elemanlar yöntemi geliştirilerek diğer yöntemler ile karşılaştırılıp etkinliği ve hesaplama yükü test edilebilir. Ayrıca süreksiz sonlu elemanlar yöntemleri zaman farklamasında da kullanılabilir. Paralel programlamaya elverişli yöntemler olduğu için bu yönde çalışmalar yapılabilir. KIYDHY, diğer hızlandırma yöntemleri ile (örneğin Difüzyon Sentetik Hızlandırması) karşılaştırılabilir. Son olarak bir geometride yapılan formülasyondan diğer geometrilere geçiş SSEY'de kolay olduğu için diğer geometrilerde eklenerek SPDOT geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Lewis, E. E. ve Miller W. F.** (1993). *Computational Methods of Neutron Transport*, American Nuclear Society, Inc. Illinois USA.

[2] **Coelho, P. J.** (2002). Bounded skew high-order resolution schemes for the discrete ordinates method. *J. Comput. Phys. 175*, 412–437.

[3] **Siewert, C. E.** (2000). A discrete-ordinates solution for multigroup transport theory with upscattering. *JQSRT 64*, 255–273.

[4] **Frank, M., Klar, A., Larsen, E. W. ve Yasuda, S.** (2007). Time-dependent simplified Pn approximation to the equation of radiative transfer. *J. Comput. Phys. 226*, 2289–2305.

[5] **Sahni, D. C. ve Sharma, A.** (2004) Computation of higher spherical harmonics moments of the angular flux for neutron transport problems in spherical geometry. *Ann. Nucl. Energy 27*, 411–433.

[6] **Klose, A. D. ve Larsen, E. W.** (2006). Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonics equations. *J. Comput. Phys. 220*, 441–470.

[7] **Boroushai, M.,** (2009). Numerical solution of the neutron transport equation using cellular neural networks, *Annals of Nuclear Energy, 36* 15-27.

[8] **Davison, B.** (1972). *Neutron Transport Theory*. Oxford University Press, New York.

[9] **Bell, G. I. ve Glasstone, S.** (1972). *Nuclear Reactor Theory*. Van Nostrand-Reinhold, New York.

[10] **Lathrop, K. D.** (2000). A comparison of angular difference schemes for one-dimensional spherical geometry Sn equations. *Nucl. Sci. Eng*. *134*, 239–264.

[11] **Chadrasekhar, S.** (1960) *Radiative Transfer. Dover Publ*., New York.

[12] **Case, K. M. ve Zweifel, P. F.** (1967). *Linear Transport Theory*. Addison–Wesley Publ. Co., Reading, MA.

[13] **Pomraning, G. C.** (1973). *The Equations of Radiation Hydrodynamics. Pergamon Press*, Oxford.

[14] **Ames, W. F.** (1992). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, San Diego.

[15] **Hong, Z., Yuan, G., Fu, X.** (2010). Oscillations of Numerical Solution for Time-dependent Particle Transport equations, *Progress in Nuclear Energy 52***,** 315-320.

[16] **Ravetto, P., Larosa, A. M., Coppa, G. G. M., Lapenta, G. ve Carta M.,** (2000). Analysis and Optimization of Implicit Methods for Time-

dependent Transport Calculations of Source-Driven Systems, *Journal of Nuclear Science and Technology, 37***,** No. 3, Sf. 215-220.

[17] **Alcouffe, R. E.** (1997). Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Diamond-Difference Discrete-Ordinates Equations, *Nucl. Sci. Eng*., *64*, 344.

[18] **Ramone, G. L., Adams, M. L. ve Novak, P. F.** (1997). A Transport Synthetic Acceleration Method for Transport Iterations, *Nucl. Sci. Eng*., *125*, 257.

[19] **Kaushik, D., Smith, M., Wollaber, A., Smith, B., Siegel, A. ve Yang, W. S.** (2009). Enabling High-Fidelity Neutron Transport Simulations on Petascale Architecture, *Supercomputing 2009*, Portland, Oregon.

[20] **Zienkievich, O. C.** (1971). *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London.

[21] **Zienkievich, O. C.** (1973). Finite Elements – The Background Story, *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, J. R. Whiteman ed., Academic Press, Sf. 1-35.

[22] **Zienkievich, O. C.** (2005). *The Finite Element Method its Basis and Fundamentals*, Elsevier.

[23] **Kaper, H. G., Leaf, G. K. ve Lindeman, A. J.** (1972). A Timing Comparison Study for Some High Order Finite Element Approximation Procedures and a Low Order Finite Differene Approximation Procedure for the Numerical Solution of the Multigroup Neutron Diffusion Equation, *Nuclear Science and Engineering*, *49*, 27-48.

[24] **Hansen, K. F. ve Kang, C. M.** (1975). Finite Element Methods in Reactor Physics Analysis, *Advances in Nuclear Science and Technology*, *8*, 173-253, Academic Press.

[25] **Semenza, L. A., Lewis, E. E. ve Rossow, E. C.** The Application of the Finite Element Method to the Multigroup Neutron Diffusion Equation, *Nuclear Science and Engineering*, *47*, 302-310.

[26] **Kaper, H. G., Leaf, G. K. ve Lindeman, A. J.** (1971). Application of Finite Element Techniques for the Numerical Solution of Neutron Transport and Diffusion Equations. Proc. Conf. On Transport Theory, *Second Conf-710107*, Los Alamos, New Mexico.

[27] **Ohnishi, T.** (1971). Application of Fininte Element Solution Technique to Neutron Diffusion and Transport Equations. Proc. Conf. On New Developments in Reactor Mathematics and Applications, USAEC Report Conf-710302.

[28] **Ukai, S.** (1972). Solution of Multi-Dimensional Transport Equation by Finite Element Method. *Journal of Nuclear Science and Technology, 9,* 366-373.

[29] **Martin, W. R.** (1976). *The Application of Finite Element Method to the Neutron Transport Equation*. Doktora Tezi, The University of Michigan

[30] **Briggs, L. L., Miller, W. F. Ve Lewis, E. E.** (1975). Ray-Effect Mitigation in Discrete Ordinate-Like Angular Finite Element Approximations in Neutron Transport. *Nuclear Science and Engineering*, *57*, 205-217.

[31] **Kaper, H. G., Leaf, G. K. ve Lindeman, A. J.** (1974). Applications of Finite Element Methods in Reactor Mathematics. Numerical Solution of the Neutron Transport Equation. ANL-8126, Argonne National Laboratory.

[32] **Reed, W. H., Hill, T. R., Brinkley, F. W. ve Lathrop, K. D.** (1973). TRIPLET: A Two-Dimensional, Multigroup, Triangular Mesh, Planar Geometry, Explicit Transport Code. LA-5428-MS, Los Alamos Scientific Laboratry.

[33] **Hill, T. R**., (1975). ONETRAN: A discrete Ordinates Finite Element Code for the Solution of the One-Dimensional Multigroup Transport Equation. LA-5990-MS, Los Alamos Scientific Laboratory

[34] **Wellford, L. C. ve Oden, J. T.** (1975). A Theory of Discontinuous Finite Element Approximations for the Analysis of Shock Waves in Nonlinear Elastic Materials. *Journal of Computational Physics, 19,* 179–210.

[35] **Fortin, M. ve Fortin, A.** (1989). New Approach for the Finite Element Simulation of Viscoelastic Flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 32,* 295–310.

[36] **Jamet, P.** (1978). Galerkin-Type Approximations which are Discontinuous in Time for Parabolic Equations in a Variable Domain. *SIAM Journal of Numerical Analysis, 15*, 912–928.

[37] **Hughes, T. J. R. ve Tezduyar, T. E.** (1984). Finite Element Methods for First-Order Hyperbolic Systems with Particular Emphasis on the Compressible Euler Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *45*, 217–284.

[38] **Lomtev, I. ve Karniadakis, G. E.** (1999). A Discontinuous Galerkin Method for the Navier-Stokes Equations. International Journal of Numerical Methods in Fluids, 29, 587–603.

[39] **Cockburn, B., Karniadakis, G. ve Shu, CW.** (200). The Development of Discontinuous Galerkin Methods. In: Cockburn B, Karniadakis G, Shu CW, editors. Discontinuous Galerkin Methods: *Theory, Computation and Applications. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, *11*, New York: Springer-Verlag. 3–50.

[40] **Cockburn, B.** (2001). Devising Discontinuous Galerkin Methods for Non-Linear Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Appl. Math*. *128*: 187–204.

[41] **Di Pietro, D. A. ve Ern, A.** (2012). Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods. Series: Mathématiques et Applications, *69*, XVII.

[42] **Wareing, T. A., McGhee, J. M. ve Morel, J. E.** (2001). Discontinuous finite element Sn methods on 3-D unstructured grids. *Nucl. Sci. Eng., 138*, 256–268.

[43] **Adams, M. L.** (2001). Discontinuous finite element transport solutions in thick diffusive problems. *Nucl. Sci. Eng., 137*, 298–333.

[44] **Morel, J. E. ve Wareing, T. A.** (1996). A linear-discontinuous spatial differencing scheme for Sn radiative transfer calculations. *J. Comput. Phys., 128*, 445–462.

[45] **Machorro, E.** (2007). Discontinuous Galerkin finite element method applied to the 1-d spherical neutron transport equation. *J. Comput. Phys., 223*, 67–81.

[46] **Lang, J. ve Walter, A.** (1991). An Adaptive Discontinuous Finite Element Method for the Transport Equation. *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik.* Berlin.

[47] **Ravetto, P., Larosa, A. M., Coppa, G. G. M., Lapenta, G. ve Carta M.** (2000). Analysis and Optimization of Implicit Methods for Time-dependent Transport Calculations of Source-Driven Systems, *Journal of Nuclear Science and Technology, 37,* No. 3, Sf. 215-220.

[48] **Coppa, G. G. M., Dulla, S., Peano, F. ve Ravetto, P.** (2008). Alternative Forms of the Time-Dependent Neutron Transport Equation, *Progress in Nuclear Energy, 50,* 934-938

[49] **El-Wakil, S. A., Degheidy, A. R. ve Sallah, M.** (2005). Time-dependent neutron transport in finite media using Pomraning–Eddington approximation, *Annals of Nuclear Energy, 32*, 343-353.

[50] **Pain, C. C., Eaton, M. D., Smedley-Stevenson, R. P., Goddard, A. J. H., Piggott, M. D. ve de Oliveira, C. R. E.** (2006). Space–time streamline upwind Petrov–Galerkin methods for the Boltzmann transport equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195*, 4334-4357

[51] **Brunner, T. A. ve Holloway, J. P.** (2005). Two-dimensional time dependent Riemann solvers for neutron transport. *Journal of Computational Physics., 210*, 386-399.

[52] **Hadad, K., Pirouzmand, A. ve Ayoobian, N.** (2008). Cellular neural networks (CNN) simulation for the TN approximation of the time dependent neutron transport equation in slab geometry. *Annals of Nuclear Energy, 35*, 2313-2320.

[53] **Kindelan, M., Bernal, F., Gonzalez-Rodriguez, P. ve Moscoso, M.** (2010). Application of the RBF meshless method to the solution of the radiative transport equation. *Journal of Computational Physics, 229*, 1897-1908.

[54] **Wachspress, E., L.** (1966). Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics, *Prentice-Hall* international series in applied mathematics, Englewood Cliffs, New Jersey.

[55] **Froelich, R.** (1967). A theoretical foundation for coarse mesh variation techniques, *GA-7870*, General Atomic.

[56] **Lathrop, K., D. ve Brinkley, F., W.** (1973). TWOTRAN-II: An interfaced, exportable version of the TWOTRAN code for two-dimensional transport, *LA-4848-MS*, Los Alamos National Laboratory,

[57] **Rhoades, W., A. ve Mynatt**, **F., R. (**1973). The DOT III Two-dimensional discrete ordinates transport code, *ORNL-TM-4280*, Oak Ridge National Laboratory.

[58] **Miller Jr, W., F.** (1976). Generalized Rebalance: A common framework for transport acceleration methods, *Trans. Am. Nucl. Soc.*, 27, *346*.

[59] **Cefus, G., R. ve Larsen, E. W.** (1990). Stability analysis of coarse mesh rebalance, *Nucl. Sci. Eng.*, *105*, 31.

[60] **Hong, S., G. ve Cho, N., Z.** (1996). A rebalance nonlinear iteration method for solving the neutron transport equations, *Proc. Int. Conf. on the Physics of Reactors*, Mito, Japonya, *Cilt 1A*, Sf. 250, Eylül 16-20.

[61] **Hong, S., G. ve Cho, N., Z.** (1997). A rebalance approach to nonlinear iteration for solving the neutron transport equation, *Annals of Nuclear Energy*, *24*, 147.

[62] **Adams, M., L.** (2002). Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations, Progress in Nuclear Energy, *40*, No: 1, Sf. 3-159.

[63] **Lee, G., S., Cho, N., Z. ve Hong, S., G.** (2000). Acceleration and parallelization of the method of characteristics for lattice and whole-core heterogeneous calculations, *Proc. of PHYSOR 2000*, Mayıs.

[64] **Cho, N., Z. ve Park, C., J.** (2003). A comparison of coarse mesh rebalance and coarse mesh finite difference accelerations for the neutron transport calculations, *Proc. Nuclear Mathematical and Computational Sciences: A Century in Review, A Century Anew*, Gatlinburg, Tennessee, Nisan 6–11, American Nuclear Society.

[65] **Hong, S., G. ve Cho, N., Z.** (1997). A rebalance approach to nonlinear iteration for solving the neutron transport equations, *Annals of Nuclear Energy*, *24*, No: 2, Sf. 147-160.

[66] **Yamamoto, A., Kitamura, Y., Ushio, T. ve Sugimura, N.** (2004). Convergence improvement of coarse mesh rebalance method for neutron transport calculations, *Journal of Nuclear Science and Technology*, *41*, No: 8, Sf. 781-789, Ağustos.

[67] **Yamamoto, A.** (2005). Generalized coarse-mesh rebalance method for acceleration of neutron transport calculations, *Nuclear Science and Engineering*, *151*, 274-282.

[68] **Hill, T., R. ve Reed, Wm., H.** (1976). TIMEX: A time-dependent explicit discrete ordinates program for the solution of multigroup transport equations with delayed neutrons. *Technical Report* LA-6201-MS

[69] **Li, B., Q.** (2006). *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer.* Computational Fluid and Solid Mechanics Series ISSN 1860-482X, Springer-Verlag London Limited.

[70] **Reed, W., H., Hill, T., R., Brinkley, F., W. ve Lathrop K., D.** (1977). TRIDENT: A two dimensional multigroup, triangular mesh, explicit neutron transport code. Technical Report LA-6735-MS, Los Alamos National Laboratory.

[71] **Seed, T., J., Miller, W., F. ve Brinkley, F., W.** (1977). TRIDENT: A two-dimensional, multigroup triangular discrete ordinates, explicit neutron transport code. Technical Report LA-5428-M, Los Alamos Laboratory.

[72] **Seed, J., Miller, W., F. ve Bosler, G., E.** (1978). TRIDENT: A new triangular mesh discrete ordinates code. In: Topical Meeting on Advances in Reactor Physics, Gatlinburg, TN., 9-12 Nisan.

[73] **Wareing, T., A., McGhee, J., J. ve Morel, J., E.** (1996). ATTILA: A three-dimensional unstructured tetrahedral mesh discrete ordinates transport code. American Nuclear Society *Annual Winter Meeting, 75,* Washington, D. C.: ANS, Sf. 146.

[74] **Hill, T., R.,** (1977). Application of the ONETRAN and TIMEX codes to shielding problems, *Fifth International Conference on Reactor Shielding*, Knoxville, Tennesse. 18-22 Nisan.

[75] **Alcouffe, R., E., Baker, R., S., Dahl, J., A., Turner, S., A., ve Ward, R., C.** (2005). A Time Dependent Parallel Neutral Partical Transport Code System, Los Alamos National Laboratory, Mayıs.

[76] **Bailey, T., S., Adams, M., L. ve Chang, J., H.** (2009). A piecewise linear discontinuous finite element spatial discretization of the transport equation in 2D cylindrical geometry. *International conference on advances in mathematics, computational methods, and reactor physics*, Saratoga springs, NY, United States. 3-7 Mayıs.

[77] **Hesthaven, J., S. ve Warburton, T.** (2008). Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications. *Springer Texts in Applied Mathematics, 54*, Springer Verlag, New York.

[78] **Wang, Y.** (2009). *Adaptive mesh refinement solution techniques for the multigroup S_N transport equation using a higher-order discontinuous finite element method*. Doktora Tezi, Texas A&M University, Mayıs.

[79] **Chang, J., H. ve Warsa, J., S.**, (2007). Comparison of linear and quadratic discontinuous spatial finite element methods for parallel S_N transport on triangles. *Joint international topical meeting on mathematics and computation and supercomputing in nuclear applications*, Monterey, California, 15-19 Nisan.

[80] **O'Dell, R., D. ve Alcouffe, R., E.** (1987). Transport calculations for nuclear analysis: theory and guidelines for effective use of transport codes. *Report LA-10983-MS,* Los Alamos National Laboratory.

[81] **Özgener, H., A.** (2012). Coarse mesh rebalance acceleration of power iteration in adjoint diffusion calculations. *Fusion Science and Technology, 61,* No:1T, Sf. 281-286.

[82] **Özgener, B.,** (2012). An assessment of acceleration techniques in scattering source iterations, *Fusion Science and Technology, 61,* No:1T, Sf. 308-313.

[83] **Sood, A., Forster, R., A. ve Parsons, D., K.** (2003). Analytical benchmark test set for criticality code verification, *Progress in Nuclear Energy, 42,* No 1, Sf. 55-106.

[84] **Özgener, B., Özgener, H., A.** (2013). A comparison of the coarse mesh rebalance and diffusion synthetic acceleration techniques in discrete ordinates calculations, *22nd international conference nuclear energy for new europe* (NENE), Bled, Slovenya, Eylül 9-12.

[85] **Parsons, D., K. ve Kornreich, D., E.** (2003). Approximations to the dominance ratio using effective and infinite multiplication results, *Nuclear Mathematical and Computational Sciences: A Century in Review, A Century Anew,* Gatlinburg, Tennessee, American Nuclear Society, Sf.1/14-14/14. Eylül 6-11.

[86] **Lewis, E., E.** (2008). *Fundamentals of nuclear reactor physics,* Academic Press, ABD.

[87] **Stankiewicz, A.** (1968). Tables of the integro-exponential functions, *Act A, Astronomica, 18,* No:2.

[88] **Rawat, A. ve Mohankumar, N.** (2011). Benchmark results for the critical slab and sphere problem in one-speed neutron transport theory", *Ann. Nucl. Energy, 38,* 1658-1661.

[89] **Naz, S. ve Loyalka, S., K.** (2007). One-speed criticality problems for a bare slab and sphere: Some benchmark results. *Annals of Nuclear Energy, 34,* 693.

[90] **Olson, K., R. ve Henderson, D., L.** (2004). Numerical benchmark solutions for time-dependent neutral particle transport in one-dimensional homogeneous media using integral transport, *Annals of Nuclear Energy, 31,* 1495-1537.

[91] **Olson, K., R.** (1999). *Neutral particle integral transport in inertial confinement of fusion systems using time dependent integral transport methods,* Doktora Tezi, University of Wisconsin-Madison.

[92] **Lamarsh, J., R.** (1983) *Introduction to nuclear engineering,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

EKLER

EK A: SPDOT programı için kullanıcı kılavuzuz
EK A1: SPDOT programı giriş verileri
EK A2: SPDOT programının ana ve altprogramlarının tanıtımı
EK A3: SPDOT programının basitleştirilmiş akış diyagramı

EK B: Bilgisayar programları CD'si
EK B1: LQD1 programı
EK B2: SPDOT programı
EK B3: LD3 programı

EK A

SPDOT programı için kullanıcı kılavuzuz

SPDOT programı küresel geometride zamana bağlı ve zamandan bağımsız, çok gruplu veya bir grup ve tek veya çok bölgeli nötron transport denkleminin sayısal çözümünü gerçekleştirmek için yazılmıştır. SPDOT programı, kritikalite özdeğer ve sabit kaynak problemlerinin her ikisini de çözebilmektedir. Ayrıca eş yönlü veya eş yönsüz saçılma problemlerini çözebilir. Nötron transport problemlerinde ikinci derecenin üzerinde eşyönsüz saçılma nadir olduğundan, SPDOT'ın en fazla ikinci dereceye kadar eş yönsüz saçılma hesabı yapmasına izin verilmiştir. Küre yüzeyinde boşluk veya yansıtıcı sınır koşullarını uygulamak mümkündür.

Yönsel ayrıklaştırma için AOY kullanılmıştır. Programda izin verilen Gauss-Legendre kareleme dereceleri ise 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 32, 64, 100, 128 ve 256'dır. Uzaysal ayrıklaştırmada EF, DSSEY (DS2) ve KSSEY kullanılmıştır. Zaman ayrıklaştırmasında ise KF ve EF seçenekleri mevcuttur.

İç ve dış iterasyonlar isteğe bağlı olarak KIYDHY ile hızlandırılabilir. KIYDHY her bir dış iterasyona uygulanmaktadır. Ancak iç iterasyona uygulanma sıklığı kullanıcının seçimine bağlıdır.

SPDOT programı FORTRAN 90 programlama dilinde yazılmıştır. Windows işletim sisteminde çalıştırılmış ve doğrulanmıştır. Derleyici olarak Fortran PowerStation 4.0'ün profesyonel sürümü, Linux için ise Intel Fortran kullanılmıştır. Aşağıda SPDOT programının Windows sürümünün tanıtımı yapılmıştır.

EK A1

SPDOT programı giriş verileri

SPDOT programı koşusuna giriş ve çıkış dosyalarının isimleri ekrandan girildikten sonra başlar. Daha sonra program giriş dosyasından Çizelge A.1'deki verileri okur.

Çizelge A.1 : SPDOT programı giriş verileri.

Kart (satır) numarası	Değişken	Açıklama
1	DEF	Problemi kısaca tanıtan metin, karakter formatında ve 90 karakter uzunluğundadır.
2	NGT	Toplam enerji grubu sayısı
	MAT	Toplam malzeme bölgesi sayısı
	NETSOR	Sistemde dış kaynağın olup olmadığını gösterir. Dış kaynak var ise 1, yoksa 0 olur.
	NFISOR	Sistemde fisyon olup olmadığını gösterir. Fisyon varsa 1, yoksa 0 girilir.
	NP	Uzaysal farklamada sistemin bölündüğü toplam aralık sayısı (veya eleman sayısı, hücre sayısı, kabuk sayısı)
	NANG	S_N (Gauss-Legendre kareleme) derecesi

Çizelge A.1 (devam): SPDOT programı giriş verileri.

Kart (satır) numarası	Değişken	Açıklama
2	NSC	Saçılma için Legendre açılımının derecesi. Saçılma eşyönlü ise 1, birinci derece eşyönsüz saçılma varsa 2 , ikinci derece eşyönsüz saçılma varsa 3 girilir.
	NBC	Küre yüzeyinde sınır koşulu, boşluk sınır koşulu için 0, yansıtıcı sınır koşulu için 0'dan farklı bir değer girilir.
	NOUTER	KIYDHY'nin uygulanıp uygulanmayacağını gösterir. Hızlandırma uygulanmayacaksa 0 girilir. Uygulanacaksa 1, Wielandt iterasyonu için 2 girilir. Eğer hızlandırma varsa üçüncü karta hızlandırma ile ilgili veriler girilir.
	NTIMDEP	Problemin zamana bağlı olup olmadığını gösterir. Zamandan bağımsız transport denklemi çözülecekse 0, zamana bağlı transport denklemi çözülecekse 1 ya da 2 girilir. Zaman farklaması olarak KF kullanılacaksa 1, EF kullanılacaksa 2 girilir.
	NFIX	Negatif yönsel akı düzeltmesinin uygulanıp uygulanmayacağını gösterir. Uygulanmayacak ise 0, uygulanacak ise 1 girilir.
	NSD	Uzaysal farklama için kullanılan yöntemi gösterir. EF için 1, DSSEY için 2 ve KSSEY için 3 girilir.
	NR0	Küre merkezindeki simetri için merkez koşullardan (2.114) uygulanacaksa 1, (2.115) uygulanacaksa 2 girilir.
	NVR	Hücre kenarlarında yönsel akıların alınma biçimini gösterir. Genellikle 1 girilmektedir.
NOUTER=0 ise 3 ve 4 numaralı kart atlanır		
3	NCMR	Kaba ızgara bölge sayısı
	NITC	KIYDHY'nin iç iterasyona uygulanma sıklığı
	NEQ	1 ise eşit kaba ızgara bölgeleri alınır.
NOUTER≠2 ise 4 numaralı kart atlanır		
4	EIGEN	Wielandt iterasyonu için özdeğer üst sınırı
NTIMDEP=0 ise 5 numaralı kart atlanır		
5	KN	Toplam zaman adımı sayısı
	DELTI	Zaman adımı büyüklüğü (Δt)

Çizelge A.1 (devam): SPDOT programı giriş verileri.

Kart (satır) numarası	Değişken	Açıklama
5	RIC	Başlangıç koşulu
	NPAR	Akıların kaç kez çıkış dosyasına yazdırılacağını gösterir. NPARxDELTI saniyede bir akılar çıkış dosyasına yazdırılır.
6	ITTMAX	İzin verilecek maksimum iç iterasyon sayısı
	EPSS	İç iterasyon yakınsama kriteri
NBC=0 ise 7 numaralı kart atlanır.		
7	ITRMAX	İzin verilecek maksimum yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu sayısı
	EPSR	Yansıtıcı sınır koşulu yakınsama kriteri
NETSOR=0 veya NFISOR=0 ise 8 numaralı kart atlanır.		
8	ITMAX	İzin verilen maksimum dış iterasyon sayısı
	EPS	Dış iterasyon yakınsama kriteri
NFISOR=0 ise 9 numaralı kart atlanır.		
9	ITMAX	
	EPS	
	ENGEN1	Başlangıç k_{etk} tahmini
	FINOR	Fisyon normalizasyon parametresi girilir
NETSOR=0 ise 10 numaralı kart atlanır. Aşağıdaki kartlarda yan yana (aynı karta) yazılacak döngü değişkenleri parantez içinde, alt alta (kart veya satır atlayarak) yazılacak döngü değişkenleri parantezsiz olarak ve dış döngüden en iç döngüye gidecek şekilde gösterilmiştir.		
10	SKAY(I,J,K) J=1,MAT; I=1,NGT; (K=1,NSC)	Önce küre merkezini kapsayan en içteki malzeme için (J=1) bütün gruplarda (I=1,NGT), sonra içten dışa doğru diğer malzemeler için (J=2,MAT) bütün gruplarda kaynak terimi $1/cm^3s$ biriminde bu ve sonraki kartlara yazılır. Saçılma kaynağı toplam NGTxMAT sayıda karta yazılır. Eşyönsüz saçılma varsa sabit kaynağın Legendre momentleri her malzeme ve her grup için birinci momentten başlayarak bu kartlara yazılır.
Tesir kesitleri girişi. Aynı J=1,MAT döngüsü içinde sırasıyla J=1 için		
10 +NGTxMAT	XT(I,J) (I=1,NGT)	Toplam tesir kesiti (σ_t)

Çizelge A.1 (devam): SPDOT programı giriş verileri.

Kart (satır) numarası	Değişken	Açıklama
11+NGTxMAT	XS(I,K,J,L) I=1,NGT; K=1,I; (L=1,NSC);	K'inci gruptan I'inci gruba saçılma tesir kesitlerinin Legendre momentleri ($\sigma_{s,gg'}$)
NFISOR=0 ise aşağıdaki iki kart atlanır.		
12+NGTxMAT +NGTx(NGT+1)/2	XNF(I,J) (I=1,NGT)	Eğer fisyon varsa, fisyonda yayınlanan ortalama nötron sayısı ile fisyon tesir kesitinin çarpımıdır ($\upsilon\sigma_f$)
13+NGTxMAT +NGTx(NGT+1)/2	XF(I,J) (I=1,NGT)	Fisyon tesir kesiti (σ_f)
NTIMDEP=0 ise aşağıdaki kartlar atlanır		
14+NGTxMAT +NGTx(NGT+1)/2	VEL(I,J) (I=1,NGT)	Zamana bağlı problemler için cm/s biriminde grup nötron hızları (v_g)
J=2,MAT için kart (10+NGTxMAT)'dan kart 14+NGTxMAT +NGTx(NGT+1)/2'ye kadar benzer kartlar sırası ile girilir.		
NFISOR=0 ise aşağıdaki kart atlanır.		
Yeni Kart	SFIS(I) (I=1,NGT)	Tüm gruplar için fisyonda yayınlanan bir nötronun o grupta olma olasılığı (χ_g), I'ncı grup fisyon spektrum kesri
Geometrik değişkenlerin girişi: I=1 için		
Yeni kart	R(I), NR(I) I=1,MAT	R(I): I'ncı malzemenin dış yüzeyinin merkezden uzaklığı (cm), NR(I): I'inci malzemenin uzaysal olarak bölüneceği aralık sayısı
Yukarıdaki kart I=2,MAT için malzeme sayısı kadar tekrarlanır.		
Yeni kart	MSTDIR	Özel yönler için, 1 girilir ise basamak başlangıç yöntemi, 2 girilir ise (2.73) ve (3.11)'deki denklemlerden yola çıkılarak türetilen formülasyonun kullanımı.
NSD≠3 ise aşağıdaki kart atlanır.		
Yeni kart	MET	KSSEY'nde 3x3'lük doğrusal sistemi çözmek için kullanılacak yöntemi belirler. MET=1 girilirse Cramer kuralı, MET=2 girilirse kısmi pivotlamalı Gauss elemesi yöntemi kullanılır.
NOUTER=0 ise aşağıdaki kart atlanır.		
Yeni kart	NSTC(I) (I=1,NCMR)	Her bir kaba ızgara bölgesinde bulunan ince ızgara sayısı

Çizelge A.1 (devam): SPDOT programı giriş verileri.

Kart (satır) numarası	Değişken	Açıklama
Yeni kart	INORM	Fisyon kaynağı var ve INORM=1 ise skaler akılar birinci grup merkez akısına bölünerek normalize edilir.
INORM=1 ise aşağıdaki kart atlanır.		
Yeni kart	P	watt cinsinden reaktör termal gücü

EK A2

SPDOT programının ana ve altprogramlarının tanıtımı

ANA PROGRAM: Ana program ilk olarak MSIMSL modülünü kullan ifadesi ile başlar. Fortran PowerStation 4.0 yaklaşık 1000 kadar matematiksel ve istatiksel fonksiyon koleksiyonu olan IMSL kütüphanesini içerir. Bunlardan CPSEC isimli fonksiyon CPU zamanını vermektedir. Ana programın başlangıç ve bitişinde bu fonksiyon kullanılarak bilgisayar koşma zamanı bulunur.

Birinci derece altprogramları çağırır. Yalnız bu altprogramlarda çok sayıda değişken kullanılmaktadır. Bu değişkenleri her seferinde tekrar tanımlamamak için "INCLUDE" ifadesi ile açılan ve "COMMON" bloklarını içeren comm.fcb, limits.fcb, param.fcb, zldfem.fcb isimlerinde 4 adet harici dosya oluşturulmuştur. Ana program birinci derece altprogramları çağırmadan önce bu dosyaları açar.

Ana program birinci derece altprogramları çağırdığında bilgisayar belleğini verimli kullanmak için bu programlardan ana programa gelen gerçel değişkenli diziler Q isimli ve 2875000 boyutlu bir dizide, tamsayı değişkenli diziler ise JQ isimli ve 1290 boyutlu bir dizide toplanmıştır.

Dış iterasyonu başlatır ve yakınsama kriteri sağlanıncaya veya izin verilen maksimum iterasyon sayısı aşılıncaya kadar devam ettirir. Dış iterasyon numarasını yazar. Zamana bağlı problemlerde her zaman adımı için bir döngü içerir. Ayrıca çok gruplu problemlerde her grup için başka bir döngü daha içerir. Bilgisayar koşma zamanını ve negatife akı sayısını yazar.

INPUT0: Kullanıcının ekrandan girdiği giriş ve çıkış dosyalarının ismini okur. Çıkış dosyasını oluşturur. Giriş dosyasından Çizelge A1'de verilen ilk 9 kartı okur ve çıkış dosyasına yazar. Ayrıca gün-ay-yıl olarak koşma tarihini yazar.

POINTER: Önce gerçel ve tamsayı değişkenli dizilerin toplam kelimelerinin sınırı için LIM1 ve LIM2 parametrelerini tanımlar. Bu parametreler gerekli olan bellek büyüklüğünü belirtir. Kod yürütme için belirli bir miktarda belleğe ihtiyaç duyar. LIM1 ve LIM2 için varsayılan değerler sırasıyla 2875000 ve 5000 olarak verilmiştir. Bu değerler bir boyutlu problemlerin büyük çoğunluğu için yeterlidir. Bu değerler aşılırsa kod koşusunu durdurur ve kullanıcıyı uyarır. Bu değerlerin aşılıp aşılmadığını anlamak için POINTER altprogramı gerçel ve tamsayı değişkenli dizler için toplam kelime hesabı yapar. Örneğin XMU(NANG) dizisi en fazla NANG kadar kelimeye sahiptir. JMAX ve KMAX gerçel ve tamsayı değişkenli dizilerin maksimum kelime sayısıdır. Bu değerlerin LIM1 ve LIM2'den küçük olması gerekir. Aynı zamanda gerçel değişkenli ve tamsayı değişkenli dizilerin Q ve JQ isimli bir boyutlu dizilerde yerleri de belirlenmiş olur.

GAUSS: Kodda XMU olarak tanımlanan yön kosinüslerini (μ_m, m=1,NANG), XW olarak tanımlanan ağırlıkları (w_m) ve alfaları ($\alpha_{m+1/2}$, $\alpha_{m-1/2}$) hesaplar ve çıkış dosyasına yazar. Yön kosinüsleri ve ağırlıklar GAUS isimli harici dosyada depolanmaktadır. Bu altprogram GAUS'tan bu verileri aldıktan sonra (2.67) ve (2.68)'den kullanılacak yön kosinüslerini ve ağırlıkları hesaplar. Daha sonra (2.66)'yı kullanarak alfaları hesaplar.

SKINP: Dış kaynak değerlerini giriş dosyasından okur ve çıkış dosyasına malzeme ve enerji grubu numarasına göre yazar. Eş yönsüz saçılma mevcutsa Legendre momentlerini de okur ve yazar.

INPUT: Grup tesir kesitlerini (σ_t, $\sigma_{s,gg'}$, $\nu\sigma_f$, σ_f) giriş dosyasından okur ve çıkış dosyasına yazar. Daha sonra zamana bağlı problemlerde grup nötron hızlarını giriş dosyasından okur ve çıkış dosyasına yazar. Yine zamana bağlı problemlerde (4.5) kullanılarak KF ve EF için toplam tesir kesiti yeniden hesaplanır. Son olarak sistemde fisyon kaynağı varsa tüm enerji grupları için fisyon spektrumu kesirlerini giriş dosyasından okur ve çıkış dosyasına yazar.

IZJEN: Uzaysal ızgara için verileri okur ve hesaplar. Önce Pi sayısını GAUS isimli dosyadan, malzeme yarıçaplarını ve her malzemenin kaç aralığa bölündüğünü giriş dosyasından okur. Çıkış dosyasına küreyi oluşturan her bir malzemenin nereden nereye uzandığını malzemenin iç ve dış yarıçaplarını hesaplayarak yazar. Ayrıca her bir malzemenin kaç numaralı kabuklar arasında uzandığını da hesaplayıp yazar. Daha sonra her bir malzemenin aralık genişliğini ($\Delta\rho$) hesaplar. (MR(I), I=1,NP) tamsayı değişkenli dizi, hangi kabuğun hangi malzemeye ait olduğunu göstermek için, malzeme numarasını hesaplar. MR sayesinde her malzeme için doğru $\Delta\rho$ hesaplamak mümkün olur. Daha sonra her bir kabuğun iç ($\rho_{i-1/2}$, RBEG) ve dış ($\rho_{i-1/2}$, RFIN) yarıçapını hesaplar. Kabuk orta noktalarının yarıçapları ($\bar{\rho}_i, RR(I)$) da bulunur. Bu yarıçapları kullanarak her bir kabuk için yüzey alanı (AREA(I)) ve hacim (VOL(I)) hesabı yapar. Küre merkezinde yüzey alanı olmayacağı için AREA(1)=0'dır. DS2 ve KSSEY için yüzey alanları farkı (ΔA) hesaplanır. Daha sonra DS2 için Çizelge 3.2'de verilen geometrik fonksiyonları hesaplar. KSSEY için Çizelge 3.3'de verilen geometrik fonksiyonları ve (3.119)-(3.121)'de verilen hacim elemanlarını hesaplar. Son olarak özel yönler hesabı için kullanılacak yöntemi giriş dosyasından okur ve çıkış dosyasına yazar.

IZJENR: KIYDHY'de kullanılacak verileri hesaplar. Bunun için önce (NSTC(I), I=1,NCMR) okunur. Her bir kaba ızgara bölgesinin yarıçapını (RCR(I), I=1,NCMR) hesaplar. I'ncı kaba ızgara bölgesinde hangi malzeme olduğu NREGCR(I) değişkenine malzeme numarası atanarak hesaplanır. Her bir kaba ızgara bölgesinin iç yarıçapı (RIN) ve ilk ince ızgara kabuğunun numarası (NST) bulunur. Kaba ızgara bölgelerinin alanları (ARC(I)) ve çıkarma tesir kesitleri (σ_r) hesaplanır. Son olarak çıkış dosyasına I'ncı kaba ızgara bölgesinin arasında uzandığı iç ve dış yarıçapları ve ince ızgara kabuk numaraları yazdırılır.

FISOR: Bu altprogram dış iterasyon ile ilgili hesaplamalar yapar. Dış iterasyonun akışı önceki bölümlerde bahsedildiği gibi özdeğer problemlerinde, zamana bağlı problemlerde ve KIYDHY'nin uygulandığı durumlarda farklıdır. Ortamda fisyon kaynağı yoksa bu altprogram atlanır.

FISOR ilk olarak zamana bağlı problemlerde KIYDHY uygulandığında ilk dış iterasyonun başlangıcında ve ilk zaman adımında skaler akıları başlangıç koşulu akı değerlerine eşitler. Sonraki zaman adımlarında ve ilk dış iterasyonun başlangıcında ise bir önceki dış iterasyondan hesaplanan (önceki zaman adımının son dış

iterasyonu) yakınsamış skaler akıları, sol kenar akısı için OLD1M, hücre merkezi akısı için OLD1 ve sağ kenar akısı için OLD1P isimli dizilere eşitler. KIYDHY'nde (4.6)'nın tüm yönlerde integrali alınır ve yönsel akı (4.19)'un kaynak teriminde skaler akıya dönüşür. OLD1M, OLD1 ve OLD1P dizileri bu skaler akılara karşılık gelir ve zamana bağlı problemlerin iç iterasyon hızlandırmasında COARSE, dış iterasyon hızlandırmasında ise REBALO adlı altprogramlarda kaynak teriminin hesabında kullanılırlar. Bu diziler, önceki zaman adımında hesaplanmış eski skaler akıları gösterir.

Yeni skaler akılar benzer şekilde PHIM, PHI ve PHIP isimli dizilerle gösterilir. İlk dış iterasyonda bu akılara başlangıç tahmini yapılır. Zamandan bağımsız problemlerde 1, zamana bağlı problemlerde ise başlangıç koşulu, skaler akı tahminleri olarak alınmıştır. Sonraki zaman adımlarının ilk dış iterasyonunda önceki zaman adımında hesaplanan skaler akılar tahmin olarak alınmıştır.

(2.100)'de verilen fisyon terimi SPDOT programında FFM, FF ve FFP dizileri ile gösterilmiştir. Tüm gruplar üzerinden (2.100)'ün toplamı bu dizilere aktarılır. Daha sonra özdeğer problemi için hesaplar yapılır. (2.105)'de verilen ağırlık w=1 alınmıştır. (2.105)'de verilen hacim üzerinden integral değeri FINT isimli değişkene aktarılır. Sadece özdeğer problemlerinde hesaplanan FINT, 3 uzaysal ayrıklaştırma yöntemi için farklıdır. EF için kabuk hacimleri ile kabukların FF değerleri çarpılıp toplanır. DSSEY için FINT (3.122)'nin payındaki terimlerin tüm kabuklar için toplanması ile bulunur. KSSEY için (3.118)'in payındaki terimler tüm kabuklar için toplanır. Bu denklemlerde skaler akılar yerine FFM, FF ve FFP dizileri yazılır. Daha sonra FFM, FF ve FFP dizileri fisyon spektrumları (χ_g) ile çarpılarak ZEM, ZE ve ZEP adlı dizilerin grup fisyon kaynağı bölümünü oluşturur. ZEM, ZE ve ZEP fisyon kaynağı, saçılma kaynağı ve dış kaynak toplamından oluşmuştur.

Daha sonra FISOR dış iterasyonda KIYDHY kullanılmadığı takdirde yeni k_{etk} değerini hesaplar. Yakınsamanın sağlanıp sağlanamadığı kontrol etmek için CHKEG değişkeni tanımlanmıştır. CHKEG bu durumda (2.106)'da verilen mutlak değer işlemi ile hesaplanır. Hızlandırmanın olmadığı zamana bağlı problemlerde ise CHKEG (2.51)'de verilen denklemle hesaplanır. Önceki dış iterasyonda hesaplanan skaler akılar hücre sol kenarı, merkezi ve sağ kenarı için sırasıyla OLDM, OLD ve OLDP dizilerine aktarılır ve yeni akılar ile aralarındaki maksimum farka bakılır. FISOR'dan çıktıktan sonra CHKEG'in dış iterasyon yakınsama kriterinden küçük olup olmadığına bakılır. Yakınsama sağlanmışsa dış iterasyon sonlandırılır. Hızlandırma varsa CHKEG burada hesaplanmaz.

SCASOR: Öncelikle sistemde fisyon kaynağı yoksa ZEM, ZE ve ZEP dizilerine başlangıç değeri olarak 0 atanır. Saçılma kaynakları saçılma tesir kesitleri ile (XS(IEG,JEG,M,1) JEG=1,IEG-1) skaler akıların (PHIM, PHI, PHIP) çarpılması ile bulunur ve ZEM, ZE ve ZEP dizilerine eklenir. Eşyönsüz saçılma varsa benzer şekilde saçılma kaynakları hesaplanarak ZSCM, ZSC ve ZSCP dizilerine atanır. İkinci aşamada dış kaynak varsa bunlar da ZEM, ZE ve ZEP dizilerine eklenir. Dış kaynakta eşyönsüz saçılma durumu varsa benzer şekilde bu saçılma kaynakları hesaplanarak ZSCM, ZSC ve ZSCP dizilerine eklenir.

INNER: Uzaysal farklama yöntemi olarak teorisi Bölüm 2.4.1'de verilen EF kullanıldığında iç iterasyonlar bu altprogramda yapılır. Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu da burada yapılır. İç iterasyon hızlandırmasını COARSE, kaynak teriminin güncellenmesini ise QSOURCE isimli altprogramları çağırarak yapar. Yönsel akılar burada hesaplanır ancak bellekte hepsi depolanmaz. Sadece zamana

bağlı problemlerde KF ve EF yöntemleri (2.44) ve (2.55)'ten görüleceği üzere önceki zaman adımında hesaplanan yönsel akılara ihtiyaç duyduğu için bunlar OLD2, OLD3 ve OLD5 isimli değişkenlerde depolanır. Kullanıcının tercihine bağlı olarak yönsel akıların negatif akı düzeltmesini yapar. Başlangıç, sınır ve merkez koşullarını uygular. Hesaplanan yönsel akıları kullanarak skaler akıları ve hızlandırma varsa akımları hesaplar. Bu altprogramda yer alan bazı önemli değişkenlerin açıklaması Çizelge A.2'de verilmiştir.

Çizelge A.2 : INPUT altprogramı değişkenleri.

Değişken	Açıklama
NITR	Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonu numarası
PHIO(IEG,I,L), PHI(IEG,I,L), IEG=1,NGT; I=1,NP; L=1,NSC.	Bir önceki iç iterasyondan gelen skaler akılar PHIO ile, şimdiki iç iterasyonda hesaplanan skaler akılar ise PHI ile gösterilir.
ANGRRS(2)	Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonunda küre yüzeyinde başlangıç (m=1/2, ANGRRS(1)) ve son yöndeki (m=M+1/2, ANGRSS(2)) yönsel akılar. (2.111)'de verilen şartın sağlanması için bu ikisi arasındaki farkın yakınsama kriterinden küçük olması gerekmektedir.
ANGRR(K); K=1,NANG	Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonunda küre yüzeyinde negatif (μ_m<0, m=1,2…M/2, ANGRR(m)) ve pozitif (μ_m>0, m=M/2+1,M/2+2….M, ANGRR(m)) yönlerdeki yönsel akılar. (2.111)'de verilen şartın sağlanması için bu ikisi arasındaki farkın yakınsama kriterinden küçük olması gerekmektedir.
NIT	İç iterasyon numarasını gösterir.
NREB	NREB=0 olursa KIYDHY uygulanmaz. NREB=1 olursa KIYDHY uygulanır ve akımlar hesaplanır, COARSE çağrılır. NOUTER=1 ise her NITC iterasyonda bir NREB=1 olur. Diğer durumlarda NREB=0'dır.
ANGR	μ_m<0 için $\psi_{m,i+1/2}$'yi gösterir. EF'de süreklilik olduğu için (2.90)'dan hesaplanan $\psi_{m,i-1/2}$, sonraki kabuktaki sağ kenar yönsel akısına eşit olur. Bu nedenle i'nci kabukta hesaplanan $\psi_{m,i-1/2}$ değeri sonraki kabuk hesaplarında kullanılmak üzere ANGR'ye atanır.
ANGL	μ_m>0 için $\psi_{m,i-1/2}$'yi gösterir. EF'nda süreklilik olduğu için (2.93)'den hesaplanan $\psi_{m,i+1/2}$, sonraki kabuktaki sol kenar yönsel akısına eşit olur. Bu nedenle i'nci kabukta hesaplanan $\psi_{m,i+1/2}$ değeri sonraki kabuk hesaplarında kullanılmak üzere ANGL'ye atanır.
ANGQ	Negatif akı düzeltmesi hesaplarında kullanılmak üzere ANGR ve ANGL'nin değerleri (2.90) ve (2.93)'teki işlem ile değiştirilmeden önce bu değişkene atanır.

Çizelge A.2 (devam): INPUT altprogramı değişkenleri.

Değişken	Açıklama
DENO	Başlangıç yönü için (2.89)'un paydasıdır. Son yön denkleminde de aynı payda değişmez.
OLD2(IEG,I), OLD6(IEG,I), IEG=1,NGT, I=NP,1,-1	Zamana bağlı problemlerde $\mu_{1/2}$=-1 için OLD2 önceki zaman adımından gelen yönsel akıyı gösterir. OLD6 ise şimdiki zaman adımında hesaplanan yönsel akılara eşitlenir.
DELR(K)	K malzeme numarası olmak üzere hücre genişliğini ($\Delta\rho$) gösterir.
IND	$\mu_{1/2}$=-1 için IND=1, μ_m<0 için IND=2, μ_m>0 için IND=3, $\mu_{M+1/2}$=1 için IND=4'tür. QSOURCE altprogramında kaynak hesabında kullanılır.
KKK	KKK şimdiki zaman adımı numarasını gösterir.
KKL	KKL ilk döngü sonunda KKK'ya eşitlenir ve sonraki zaman adımına kadar KKK değişmeyeceği için KKL=KKK olur. KKL≠KKK olduğunda OLD2 önceki zaman adımında hesaplanan yönsel akı olan OLD6'ya eşitlenir.
KKM, KKN, KKO	Başlangıç yönünde KKL'nin görevini μ_m<0 için KKM, μ_m>0 için KKN ve $\mu_{M+1/2}$=1 için KKO yapmaktadır.
QS	Transport denkleminin sağ tarafında bulunan fisyon kaynağı, eş yönlü veya eş yönsüz dış kaynak ve saçılma kaynağının toplamıdır.
ANGB(I), I=1,NP	$\mu_{1/2}$=-1 için hücre merkezindeki yönsel akıyı ($\psi_{1/2,i}$) gösterir ve (2.89)'dan hesaplanır. μ_m<0 için (2.91)'de $\psi_{m-1/2,i}$'yi gösterir. EF kullanılarak diğer m+1/2 veya m-1/2 yönlerindeki akılar hesaplanır ve ANGB ile gösterilir. μ_m>0 için (2.94)'te yine $\psi_{m-1/2,i}$'yi gösterir. $\mu_{M+1/2}$=1 için $\psi_{M+1/2,i}$'yi gösterir.
NFL	Negatif akı sayısını gösterir.
ACR	Küre yüzeyinde yansıtıcı sınır koşulu olduğunda başlangıç yönü için küre merkezinde hesaplanan yönsel akı ($\psi_{1/2,1/2}$) daha sonra son yön hesaplarında kullanılmak üzere bu değişkende depolanır. Ayrıca merkez koşulu olarak (2.115) uygulandığında $\psi_{1/2,1/2}$'yi küre merkezinde diğer yönlerdeki yönsel akılara eşitlemek için kullanılır.
ALPHA(K), K=1,NANG	ALPHA(K)= $\alpha_{m-1/2}$, ALPHA(K+1)= $\alpha_{m+1/2}$, ALPHAS=α_m
RJM(IEG,I), RJP(IEG,I), IEG=1,NGT; I=1,NP	KIYDHY uygulandığı durumlar için RJM (4.69)'da RJP ise (4.68)'de verilen akım değerlerini gösterir.
RDEN	μ_m<0 için (2.91), μ_m>0 için (2.94)'te verilen denklemlerin paydasıdır.

Çizelge A.2 (devam): INPUT altprogramı değişkenleri.

Değişken	Açıklama
OLD3(IEG,I,K), OLD7(IEG,I,K), IEG=1,NGT, I=1,NP; K=1,NANG	Zamana bağlı problemlerde özel yönler haricindeki yönlerde OLD3 önceki zaman adımından gelen yönsel akıyı gösterir. OLD7 ise şimdiki zaman adımında hesaplanan yönsel akılara eşitlenir.
ANG	$\mu_m<0$ için (2.91), $\mu_m>0$ için (2.94)'te verilen $\psi_{m,i}$'yi gösterir.
DIFMAX	Şimdiki ve önceki iç iterasyon skaler akıları arasındaki maksimum farkı gösterir.
ANGC(K), K=1,NANG	Küre merkezindeki yönsel akıdır ($\psi_{m,1/2}$).
OLD5(IEG,I), OLD9(IEG,I), I=1,NP	Zamana bağlı problemlerde küre yüzeyinde yansıtıcı sınır koşulu varsa son yönde $\mu_{M+1/2}=1$ OLD5 önceki zaman adımından gelen yönsel akıyı gösterir. OLD9 ise şimdiki zaman adımında hesaplanan yönsel akılara eşitlenir.
CONR	Yansıtıcı sınır koşulu iterasyonunda küre yüzeyinde şimdiki ve önceki iterasyon yönsel akıları arasındaki maksimum farkı gösterir.

DFEM Uzaysal farklama yöntemi olarak teorisi Bölüm 3'te verilen DSSEY (DS2) ve KSSEY kullanıldığında iç iterasyonlar bu altprogramda yapılır. Yukarıda INNER altprogramında bahsedilen görevleri yapar. KF ve EF zaman ayrıklaştırması yöntemleri için gerekli olan önceki zaman adımında hesaplanan hücre kenarları yönsel akıları DS2 için OLD2, OLD3, OLD4, OLD5, OLD6 ve OLD7 isimli değişkenlerde depolar. KSSEY için ise bu değişkenlere ilaveten önceki zaman adımında hesaplanmış hücre merkezi yönsel akıları OLD14, OLD16 ve OLD18 isimli değişkenlerde depolanır. INNER'de QSOURCE sadece hücre merkezindeki kaynak hesabı için çağrılırken burada DS2 yönteminde hücre kenarlarındaki kaynak hesabı için ve KSSEY'nde bunlara ilaveten hücre merkezindeki kaynak hesabı için çağrılır. Çizelge A.2'de INNER altprogramı için verilen değikenlerin bir kısmı burada da aynı isimle aynı görevi yapar. Bu altprogramda yer alan diğer önemli değişkenlerin açıklaması Çizelge A.3'de verilmiştir.

Çizelge A.3 : DFEM altprogramı değişkenleri.

Değişken	Açıklama
PHIO(IEG,I,L), PHIOM(IEG,I,L), PHIOP(IEG,I,L) IEG=1,NGT; I=1,NP; L=1,NSC.	Bir önceki iç iterasyondan gelen skaler akılar i'nci hücre sol kenarı için PHIOM ($\phi_{i-1/2}$), hücre merkezi için PHIO (ϕ_i) ve hücre sağ kenarı için PHIOP($\phi_{i+1/2}$) olarak gösterilir. Şimdiki iç iterasyonda hesaplanan skaler akılar ise benzer şekilde PHIM, PHI ve PHIP olarak gösterilir.
ANGRM	Yeniden hesaplanmadan önce ψ_b'yi, hesaplandıktan sonra $\psi_{m,i-1/2}$'yi gösterir. $\mu<0$ için ilk değerini sınır koşulundan alır.

Çizelge A.3 (devam): DFEM altprogramı değişkenleri.

Değişken	Açıklama
ANGRP	Yeniden hesaplanmadan önce ψ_b'yi, hesaplandıktan sonra $\psi_{m,i+1/2}$'yi gösterir. $\mu>0$ ilk değerini merkez koşulundan alır.
COEF(6)	DS2 yönteminde kullanılır. COEF(1-4) MSTDIR=2 için özel yönlerde (3.77) ve (3.78)'de verilen 2x2'lik matrisin elemanlarını gösterir. Diğer yönlerde (3.75) ve (3.76)'da verilen 2x2'lik matrisin elemanlarını gösterir. COEF(5-6) ise bu denklemlerin sağ taraf vektörlerinin elemanlarını gösterir.
GGG	NVR=2 için ψ_b'yi gösterir.
CF(3,3)	KSSEY'nde kullanılır. MSTDIR=2 için özel yönlerde (3.114) ve (3.115)'de verilen 3x3'lük matrisin elemanlarını gösterir. Diğer yönlerde (3.112) ve (3.113)'de verilen 3x3'lük matrisin elemanlarını gösterir.
QS, QSM, QSP	Transport denkleminin sağ tarafında bulunan fisyon kaynağı, eş yönlü veya eş yönsüz dış kaynak ve saçılma kaynağının toplamıdır. QSM hücre sol kenarı ($q_{i-1/2,m}$), QS hücre merkezi ($q_{i,m}$) ve QSP hücre sağ kenarı ($q_{i+1/2,m}$) için kaynak terimini göstermektedir.
OLD2-19	Zamana bağlı problemlerde DS2 için OLD2-7, KSSEY için bunlara ilaveten OLD14, OLD16, OLD18 önceki zaman adımından hesaplanan yönsel akılardır. DS2 için OLD8-13, KSSEY için bunlara ilaveten OLD15, OLD17 ve OLD19 şimdiki zaman adımında hesaplanan yönsel akılardır.
RHS(3)	KSSEY'nde, MSTDIR=2 için özel yönlerde (3.114) ve (3.115)'te, diğer yönlerde (3.112) ve (3.113)'te verilen denklemlerin sağ taraf vektörlerinin elemanlarını gösterir. Bu doğrusal sistemler ELIM isimli altprogramda çözüldükten sonra sonuçlar RHS değişkenlerine aktarılır.
RHS1, RHS2	KIYDHY'de negatif akı düzeltmesi yapılacaksa hesaplamalarda kullanılmak üzere doğrusal sistem çözülmeden önce RHS1=RHS(1) ve RHS2=RHS(2) değerlerini alır.
FIM(3,I), I=1,NP	INNER altprogramında ANGB(I)'nen yaptığı görevi yapar. ANGB(I) burada FIM(2,I)'ya karşılık gelmektedir. FIM(1,I) ve FIM(3,I) ise hücre kenarlarındaki akılardır. FIM dizisinin elemanları m+1/2 yönündeki EF yöntemi ile akıları hesaplayabilmek için önceki yöndeki (m-1/2) akıların değerini depolar.

QSOURCE: Transport denkleminin sağ tarafında yer alan kaynak teriminin hesaplanmasını sağlar. SCASOR'da hesaplanmış olan ZE ve eşyönsüz saçılma varsa ZSC terimlerine grup içi saçılma kaynağını ekler. Uzaysal farklama yöntemi olarak EF kullanıldığında her yön ($\mu_{1/2}$=-1, μ_m<0, , μ_m>0, $\mu_{M+1/2}$=1) için bir kez, toplamda 4 kez çağrılır. Çünkü sadece $q_{i,m}$ hesabı yeterlidir. DSSEY kullanıldığında her yön için 2 kez toplamda 8 kez çağrılır. Çünkü $q_{i-1/2,m}$ ve $q_{i+1/2,m}$'in hesaplanması için ayrı

ayrı çağrılır. KSSEY kullanıldığında ise her yön için 3 kez, toplamda 12 kez çağrılır. Çünkü $q_{i-1/2,m}$, $q_{i,m}$ ve $q_{i+1/2,m}$'in hesaplanması için ayrı ayrı çağrılır.

DIAMOND: Uzaysal farklama ve zaman ayrıklaştırması yöntemi olarak her ikisinde de EF kullanıldığında bu altprogram çağrılır. İç ve dış iterasyonlar tamamlandıktan sonra (2.55)'te verilen $\underline{\psi}_{j+1/2}$ hesaplanır. Daha sonra DIAMOND çağrıldığında (2.54)'te verilen EF işlemini yaparak $\underline{\psi}_{j+1}$'i hesaplar.

LQD: Uzaysal farklama yöntemi olarak DSSEY veya KSSEY, zaman farklaması olarak EF kullanıldığında bu altprogram çağrılır. DIAMOND'ın yaptığı gibi (2.54)'te verilen EF işlemini yaparak $\underline{\psi}_{j+1}$'i hesaplar.

ELIM: KSSEY'nde 3x3'lük doğrusal sistemleri çözer. Özel yönlerde (3.114) ve (3.115)'te, diğer yönlerde (3.112) ve (3.113)'te verilen denklemleri kullanıcının seçimine göre Cramer kuralı veya kısmi pivotlamalı Gauss elemesi yöntemiyle çözer.

COARSE: İç iterasyon hızlandırmasını yapan altprogramdır. Teorisi Bölüm 4.2'de verilen işlemleri yapar. Bu altprogramda, C(K), K=1,NCMR dizisi elemanlarını (4.74)'te verilen alt köşegen matris elemanları oluşturur. E(K) dizisi elemanları ise (4.75)'te verilen üst köşegen matris elemanlarıdır. D(K) ise matrisin köşegen elemanlarını temsil eder ve denklemi (4.73)'te verilmiştir. DK (4.73)'ün ilk terimindeki toplama işlemini yapar. ZEAVE ise ZE, ZEP ve ZEM ile verilen kaynak terimlerinin hacim üzerinden ortalamasını alır. (4.77)'de verilen $V_i s_i$ işlemini yapar. (4.77)'de verilen toplama işlemi ise SK adlı değişkende yapılır. Zamana bağlı problemlerde OLD1AVE daha önce FISOR'da hesaplanan OLD1, OLD1M ve OLD1P isimli önceki zaman adımından gelen skaler akıların hacim üzerinden ortalamasını alır. Daha sonra OLD1AVE'de ZEAVE ile birlikte SK üzerinde topanarak (4.77)'deki işlem yapılmış olur. K'ncı kaba ızgara için SK üzerinden toplam işlemi tamamlandıktan sonra bu değerler B(K) isimli diziye aktarılarak (4.72)'deki doğrusal sistemin sağ taraf vektörü oluşturulur. Bu doğrusal sistem IMSL kütüphanesinde bulunan DLSLTR isimli altprogram çağrılarak çözülür. Bu altprogram üç köşegen matris sistemini çözebilmektedir. Sonuçlar yeniden dengeleme faktörleri olarak B(K) dizisine aktarılır. Yalnız sistem tek bir kaba ızgara bölgesinden oluşmuşsa yalnız bir elemanlı matris oluşacağından B(1)=B(1)/D(1) işlemi ile yeniden dengeleme faktörü bulunur. Daha sonra bu yeniden dengeleme faktörleri ile çarpılarak akımlar, skaler akılar ve zamana bağlı problemlerde kullanılmak üzere şimdiki zaman adımında hesaplanmış yönsel akılar güncellenir.

REBALO: Dış iter asyön hızlandırmasını yapan altprogramdır. Teorisi Bölüm 4.1'de verilen işlemleri yapar. Bu altprogramda A(I), I=1,NCMR dizisi elemanları (4.40)'ta verilen alt köşegen matris elemanlarıdır. C(I) dizisi ise yine (4.40)'ta verilen üst köşegen matris elemanlarından oluşur. B(I) dizisi (4.39)'da verilen köşegen matris elemanlarından oluşmuştur. (4.41)'de verilen sağ taraf vektörü elemanları ise D(I) dizisiyle gösterilmiştir. İlk önce (4.39)'un ilk teriminde kullanılmak üzere yutma tesir kesitleri hesaplanır. RJPC(K), K=1,NCMR dizisi (4.39)'un ikinci teriminde verilen akım değerlerini tüm gruplar üzerinden toplar. Benzer şekilde RJMC(K) dizimside (4.40)'ta verilen akım değerlerini toplar. Daha sonra şimdiki kaba ızgara bölgesi için bir döngü açılır ve bu döngüde (4.39)'un birinci ve üçüncü terimlerinde ve (4.41)'de verilen hacim üzerinden integraller hesaplanır. Bu döngüde B(K), (4.39)'un ilk terimindeki, GG(K) ise son terimindeki hesapları gösterir. S(K) ise dış kaynak varsa (4.41)'de verilen bunların hacim

üzerinden integralini gösterir. Daha sonra kaba ızgara bölgesinin alanı (ARC(K)) ile uygun akım terimi (RJPC(K), RJMC(K)) çarpılarak A, B, C dizilerinin elemanları hesaplanır. Yalnız (4.56)'da görüldüğü gibi özdeğer problemi olup olmamasına göre değişeceği için fisyon kaynağını içeren son terim (GG(K)) B dizisine değil D dizisine eklenir. Ayrıca D dizisi de probleme göre değişir. Y(I) yeniden dengeleme faktörleri olup özdeğer probleminde iterasyon başlangıcında elemanlarının tahmini değerleri 1 alınır. (4.42) veya (4.59)'da verilen doğrusal sistemler Gauss elemesi yöntemi ile çözülür. Yeni yeniden dengeleme faktörleri D(I) bulunur. Özdeğer problemi için iterasyon yapılır. Yeniden dengeleme faktörleri Y(I) güncellenir. Skaler akılar yeniden dengeleme faktörleri (özdeğer problem için Y(I), diğer problemler için D(I)) çarpılarak güncellenir. Özdeğer problemi için eski ve yeni etkin çoğaltma katsayıları arasındaki farka, diğer problemler için eski ve yeni skaler akılar arasındaki farka bakılır. Böylece ana programda yakınsama kriteri ile karşılaştırmak üzere CHKEG hesaplanmış olur.

NORM: Her enerji grubu için ayrı ayrı olmak üzere skaler akılar çıkış dosyasına yazdırılır. Önce küre merkezindeki skaler akıların yazdırılması ile başlanır. EF için küre merkezindeki akı i=1 ve i=2 hücrelerinin merkezinde bulunan skaler akılardan aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\phi_{g,0} = \frac{3\phi_{g,1} - \phi_{g,2}}{2} \qquad \textbf{(A.2.1)}$$

Daha sonra her bir hücrenin merkezindeki ve sağ kenarındaki skaler akılar yazdırılır. Skaler akıların uzaysal dağılımı için V1 ve V2 değişkenleri hesaplanır. Bunlar sırasıyla hücre merkezindeki ve hücre sağ kenarındaki noktanın küre merkezine olan uzaklığını gösterir. DSSEY ve KSSEY'de hücre kenarında 2 tane skaler akı hesaplandığı için bunların aritmetik ortalaması yazdırılır. EF için küre yüzeyinde skaler akı (A.2.1)'deki denklemin i=I-1 ve i=I için uygulanması ile benzer şekilde bulunur. DSSEY ve KSSEY'de hücre merkezi ve yüzeyinde skaler akılar zaten hesaplanmış olarak gelmektedir.

Daha sonra INORM adlı değişken giriş dosyasından okunur. INORM=1 ve NFISOR=1 olduğunda normalizasyon işlemi yapılır. Bunun için skaler akılar, küre merkezinde hesaplanmış ve FNORM adlı değişkene aktarılmış akı değerine bölünerek çıkış dosyasına yazdırılır. Eğer INORM≠1 ise ekrandan reaktör termal gücü vat cinsinden okunur. Reaktör termal gücü ile skaler akıların uzaysal dağılımı arasında aşağıdaki bağlantı vardır [92].

$$P = AW_f\sigma_f \int \phi(\rho)dV \qquad \textbf{(A.2.2)}$$

Burada W_f fisyon başına çıkan enerjinin jul cinsinden değeri olup $3.20437\text{x}10^{-11}$ olarak verilir. İntegralin değeri F adlı değişkende hesaplanır. Daha sonra A katsayısı hesaplanır. Skaler akılar bu katsayı ile çarpılarak güncellenir ve çıkış dosyasına yazdırılır.

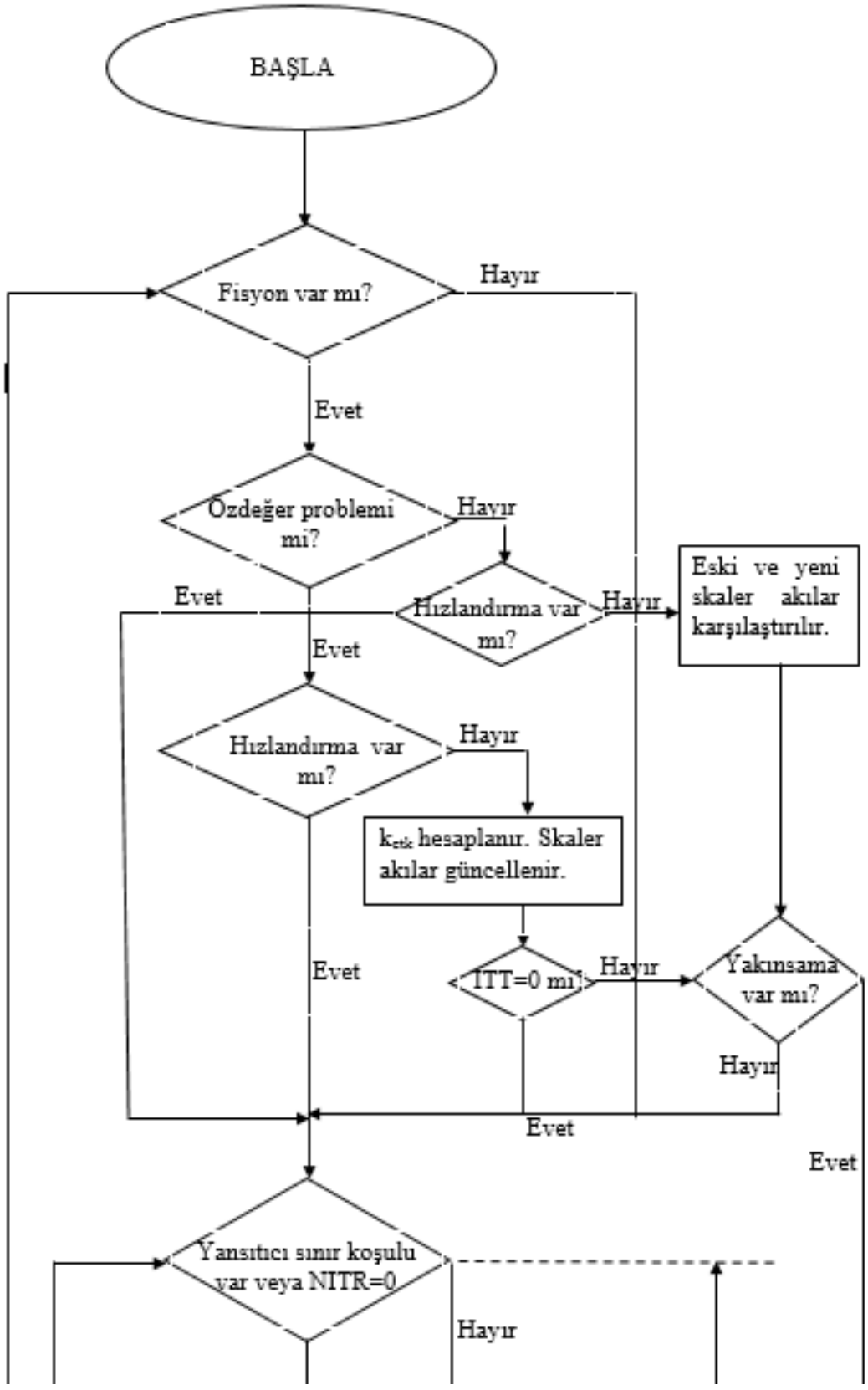
REACT: Her bir grup ve malzeme bölgesi için ortalama skaler akılar hesaplanır ve çıkış dosyasına yazdırılır. Bunun için öncelikle K'ncı malzeme bölgesinin hacmi VOLM(K) isimli değişkende hesaplanır. Ortalama skaler akılar, EF için (3.116)'dan, DSSEY için (3.122)'den ve KSSEY için (3.118)'den hesaplanarak AVEFLX(IEG,K) isimli değişkende toplanır ve çıkış dosyasına yazdırılır.

Zamana bağlı problemlerde akıların yazdırıldığı zaman adımlarında bulunan ortalama skaler akılar PT(mn,k) adlı değişkene aktarılır. Bu değişkende, mn skaler akıların çıkış dosyasına toplamda kaç zaman adımı için yazdırıldığını gösterir. k ise malzeme numarasıdır. Bütün zaman adımları koşulduktan sonra zamana göre ortalama skaler akıların değişimi çıkış dosyasına yazdırılır. Son olarak NFISOR=1 ise küre merkezi akısına bölünerek normalize ortalama akılar hesaplanır.

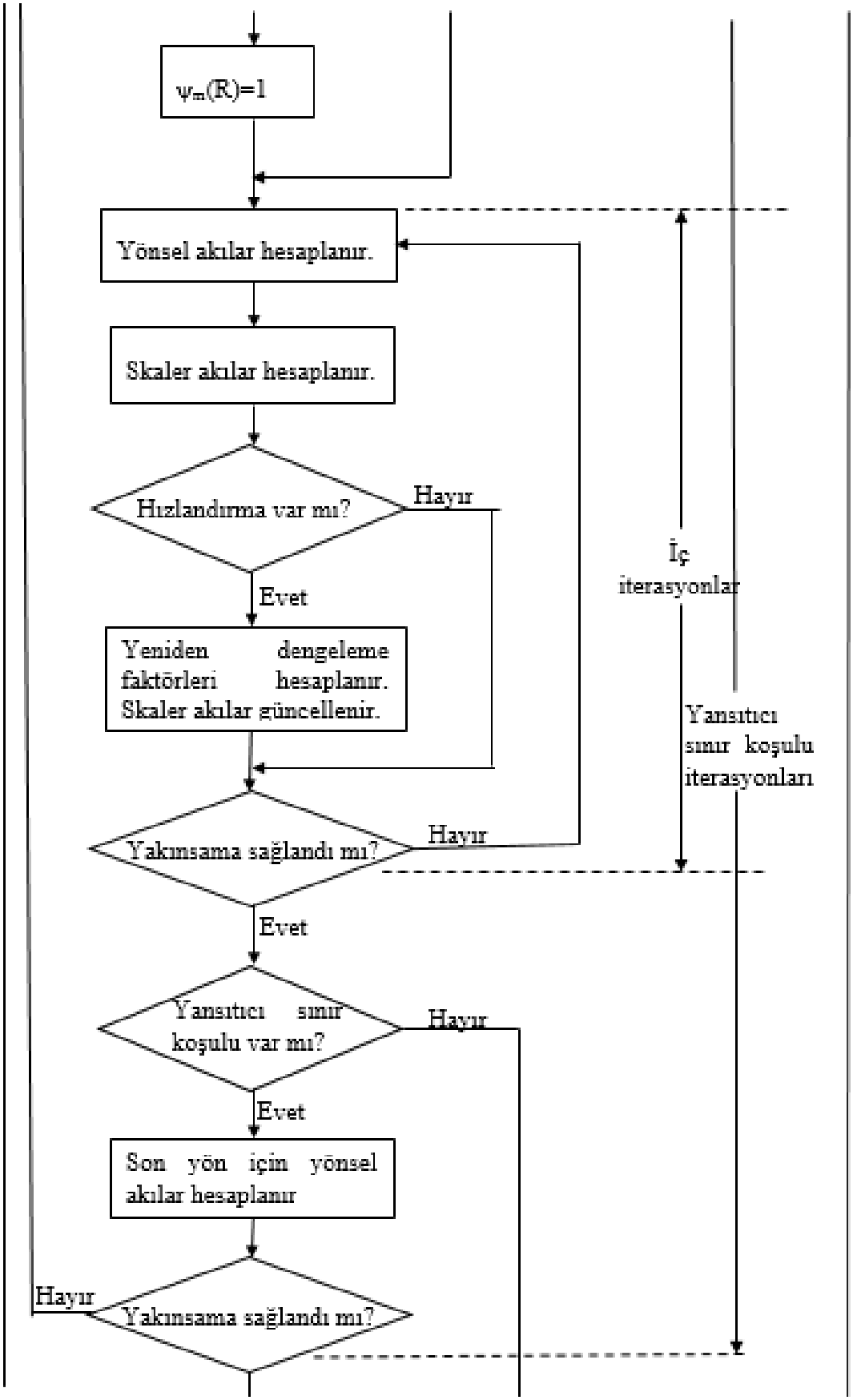
EK A3:

SPDOT programının basitleştirilmiş akış diyagramı:

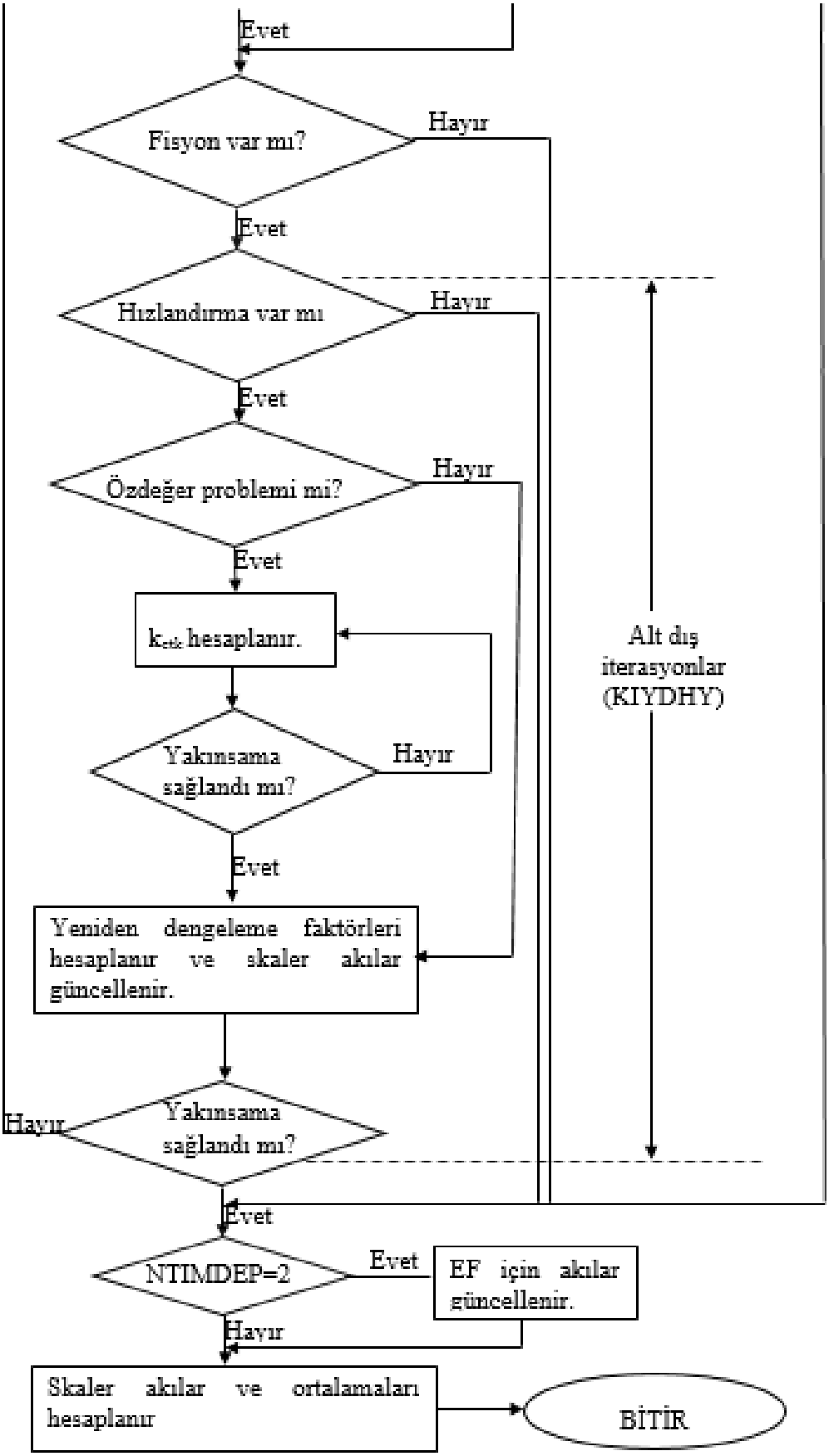
SPDOT programının akış diyagaramı Şekil A.1'de gösterilmiştir.



Şekil A.1: SPDOT programının basitleştirilmiş akış diyagramı.



Şekil A.1 (devam): SPDOT programının basitleştirlmiş akış diyagramı.



Şekil A.1 (devam): SPDOT programının basitleştirlmiş akış diyagramı.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Mehmet Mercimek

Doğum Yeri ve Tarihi: Kayseri/Bünyan, 1976

Adres: İstanbul Teknik Üniversitesi Ayazağa Kampüsü Enerji Enstitüsü 34469 Maslak/İSTANBUL

E-Posta: mercimek@itu.edu.tr, mehmet.mercimek@gmail.com

Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Nükleer Enerji Mühendisliği, (16 Haziran 2003)

Yüksek Lisans : İstanbul Teknik Üniversitesi, Enerji Enstitüsü, Enerji Bilim ve Teknoloji Programı, (30 Haziran 2008)

Mesleki Deneyim ve Ödüller: İTÜ, TRIGA Mark II Eğitim ve Araştırma Reaktörü Operatörlüğü (23 Ekim 2012, -),

İTÜ, TRIGA Mark II Eğitim ve Araştırma Reaktörü Nükleer Madde Sayım ve Kontrol Sorumlusu (24 Ağustos 2010, -),

İTÜ, TRIGA Mark II Eğitim ve Araştırma Reaktörü Yardımcı Operatörlüğü (15 Eylül 2005, 23 Ekim 2012),

Bünyan Anadolu Lisesi Sözleşmeli İngilizce Öğretmenliği (15 Aralık 2003, 30 Haziran 2004)

Yayın ve Patent Listesi:

Uluslararası Bildiriler:

Hacıyakupoglu, S., Esen A., N., Erenturk, S., Camtakan, Z., Kiziltas, S., Okka, M., Genceli, M., **Mercimek, M.**, Genceli, E., Yusan, S., Gur, F., Olgen, K. ve Tanbay, T. (2013). Determining distribution of heavy metal pollution in terms of ecological risk levels in the industrially intensive areas around Istanbul, *Fourth International Conference on Environmental Management, Engineering, Planning and Economics*

(CEMEPE 2013) and SECOTOX Conference, Haziran 24-28, Mykonos Adası, Yunanistan.

Erenturk (Akyil), S., Haciyakupoglu, S., Camtakan, Z., Kiziltas, S., Okka, M., Genceli, M., **Mercimek, M.**, Genceli, E., Yusan, S., Gur, F., Olgen, K. ve Tanbay, T. (2012). Determining spatial distribution of industrial pollution in terms of ecological risk levels. *International Conference Ecology-Interdisciplinary Science and Practice*, 25-26 Ekim, Sofya, Bulgaristan.

Mercimek, M., Camtakan, Z., Okka, M., Tanbay, T., Genceli M., Tuğrul, B., Çolak, Ü., Akyıl Erentürk, S., Reyhancan, İ. ve Hacıyakupoğlu, S. (2012). Strategic and action plan of ITU TRIGA MARK II Research and Training Reactor, *IAEA Technical Meeting on Research Reactor Coalitions: Concerted actions in the Mediterranean Region*, 10-13 Temmuz, Istanbul, Türkiye.

Mercimek, M., Kızıltaş, S., Okka, M. ve Camtakan, Z. (2012). Thermal power calibrations of ITU TRIGA Mark II Reactor, *6th International Ege Energy Symposium and Exhibition* 28-30 Haziran, İzmir, Türkiye.

Mercimek, M., Topuz, A., İ. ve Özgener, H., A. (2010). Comparison of nodal expansion method with finite elements method for the solution of the neutron diffusion equation in cylindrical geometry, *Second International Conference on Nuclear and Renewable Energy Resources,* 04-07 Temmuz, Ankara-Türkiye.

Topuz, A., İ., **Mercimek, M.** ve Özgener, H., A. (2010). Third order nodal expansion method for the solution of the neutron diffusion equation in cylindrical geometry, *Second International Conference on Nuclear and Renewable Energy Resources,* 04-07 Temmuz, Ankara, Türkiye.

Aydın, M., **Mercimek, M.**, Geçkinli, M., Yıldırım, H. ve Aydın, E. D. (2010). A model for optical tomography using artificial neural networks, *Second International Conference on Nuclear and Renewable Energy Resources,* 04-07 Temmuz, Ankara, Türkiye.

Mercimek, M., Yildirim, H., Miguel, A., F. ve Aydin, M. (2009). Investigation of T shape geometry for the collection of pollution particles, *Global Conference on Global Warming* (GCGW-09), 5-9 Temmuz, İstanbul, Türkiye.

Mercimek, **M.** ve Özgener, H., A. (2008). Development of a nodal method for the solution of the neutron diffusion equation in cylindrical geometry, *The Fifth Eurasian Conference on Nuclear Science and Its Applications,* 14-17 Ekim, Ankara, Türkiye.

Mercimek, M., Keklik, E., Aydın, E., D., Aydın, M. ve Atalay, M. A**.** (2008). Analysis of radiation transport in biological tissues using a deterministic code, PARTISN 4.0, *The Fifth Eurasian Conference on Nuclear Science and Its Applications,* 14-17 Ekim, Ankara, Türkiye.

Ulusal Bildiriler:

Mercimek, M., Yıldırım, H., Aydin, E., D., Geçkinli, M. ve Aydin, M. (2009). Optik tomografi amaçlı fotonların biyolojik dokularda eşyönsüz saçılmalarının incelenmesi, *10. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknolojileri Konferansı*, 6-9 Ekim, Muğla, Türkiye.

Mercimek, **M.**, Yıldırım, H., Aydin, E., D., Geçkinli, M. ve Aydin, M. (2009). Optik tomografi amaçlı fotonların insan beyninde saçılmasının incelenmesi, *10. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknolojileri Konferansı,* 6-9 Ekim, Muğla, Türkiye.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

Mercimek M. ve Özgener A. (2014). Discontinuous finite element formulations for neutron transport in spherical geometry, *Annals of Nuclear Energy*, ***64,*** Sf. 244-255.

Mercimek M. ve Özgener A. (2013). Coarse mesh rebalance acceration method for time dependent neutron transport calculations, *Forth International Conference on Mathematical and Computational Applications*, Haziran 11-13, Manisa, Türkiye, Sf. 424-433.