İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KALINLIKLI ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Ceyhun GÜDÜL

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KALINLIKLI ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Ceyhun GÜDÜL
501021083

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan ENGİN
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Necla KADIOĞLU (İ.T.Ü.)
Doç.Dr. İrfan ÇOŞKUN (Y.T.Ü.)

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Bu çalışmada ihtiyacım olduğunda benden yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, Prof. Dr. Hasan ENGİN' e, çalışmamda olduğu kadar lisans hayatımda da bugünlere gelmemde emeği olan tüm İ.T.Ü. öğretim üyelerine teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca her zaman arkamda olup beni maddi manevi destekleyen aileme ve bana her zaman moral desteği vererek yoluma devam etmeme yardımcı olan Derya Kut' a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

MAYIS 2005 İnş. Müh. Ceyhun GÜDÜL

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ **iv**
ŞEKİL LİSTESİ **v**
SEMBOL LİSTESİ **vii**
ÖZET **viii**
SUMMARY **ix**

1. GİRİŞ **1**
1.1 Genel Bilgiler 1
1.2 Konu ile İlgili Diğer Çalışmalar 3
1.3 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı 6

2. PROBLEMİN TANIMI VE TEMEL DENKLEMLER **7**
2.1 Problemin Tanımı 7
2.2 Homojen Elastik Zeminin Çekme ve Basınç Alması Halinde Temel Diferansiyel Denklemler 8
2.2.1 Zemin Tabakasının Düzgün Derinlikte Olması Durumu 8
2.2.2 Zemin Tabakasının Değişken Derinlikte Olması Durumu 12
2.3 Homojen Elastik Zeminin Sadece Basınç Alması Hali 13

3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ **15**
3.1 Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü 15
3.1.1 Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Durumlar 15
3.2 Sonlu Farklar Metodu ve Sayısal Çözüm 23
3.2.1 Yüksek Mertebeden Türevlerin Sonlu Farklar Yöntemi ile Formülasyonu 24
3.2.2 Kiriş Denge Denklemi İçin Merkezi Sonlu Farklar Uygulanması 25
3.2.3 Kiriş Uçlarının Bittiği Yerden İtibaren Başlayan Serbest Zemin Tabakasının Denkleminin Merkezi Sonlu Farklar İle İfade Edilmesi 27

4. ZORLANMIŞ TİTREŞİM DURUMU **30**
4.1 Temel Denklemler 30

5. SAYISAL UYGULAMALAR ve SONUÇLAR **33**
5.1 Genel Bilgi ve Açıklamalar 33
5.2 Sayısal Çözüm için Gerekli Parametreler 34

KAYNAKLAR **35**

EKLER **37**

ÖZGEÇMİŞ **51**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No:

Tablo 3.1 Diferansiyel denklem çözüm denkleminin kök fonksiyonları……. 20

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No:
Şekil 1.1 :	Winkler zemin modeli…….	2
Şekil 1.2 :	Winkler zemin modelindeki yayların üzerinde elastik membran olduğu kabulünün temsili şekli……...	2
Şekil 1.3 :	Vlasov zemin modeli……..	3
Şekil 2.1 :	Değişken kalınlıkta zemine oturan kiriş…….	7
Şekil 2.2 :	Vlasov zeminine oturan *p(x)* yüklemesi altındaki sonlu kiriş……	8
Şekil 2.3 :	Çift parametreli δ genişlikte elastik zemin üzerine oturan kiriş……..	11
Şekil 2.4 :	Elastik zemin üzerine oturan plak……...	11
Şekil 2.5 :	Problemin tanımına ilişkin elastik zemine oturan kiriş gösterimi……	12
Şekil 2.6 :	Zeminin sadece basınç alması halinde elastik zemine oturan kirişin temsili şekil değiştirmesi…….....	13
Şekil 3.1 :	İki tekil yük ile 3 bölgeye ayrılmış elastik zemine oturan kiriş…….	22
Şekil 3.2 :	Sonlu farklar şekilsel gösterimi……..	23
Şekil 3.3 :	Elastik zemin üzerindeki kirişin deformasyonu…….	25
Şekil 3.4 :	Serbest zemin yüzeyinin deformasyonu…….	28
Şekil 4.1 :	P$\cos wt$ yükü ile yüklü kirişin zorlanmış titreşim durumuna ait gösterim……	30
Şekil A.1 :	*q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği……	38
Şekil A.2 :	*q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği…….	38
Şekil A.3 :	*q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuv. değerleri grafiği……	39
Şekil A.4 :	*q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tep. değerleri grafiği…….	39
Şekil A.5 :	*q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği……	40
Şekil A.6 :	*q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği…….	40
Şekil A.7 :	*q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuv. değerleri grafiği……	41
Şekil A.8 :	*q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tep. değerleri grafiği…….	41
Şekil A.9 :	η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği……	42
Şekil A.10 :	η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği…….	42

Şekil A.11 : η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği…… 43
Şekil A.12 : η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği……. 43
Şekil A.13 : η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği……. 44
Şekil A.14 : η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği…... 44
Şekil A.15 : η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği…… 45
Şekil A.16 : η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği……. 45
Şekil A.17 : η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği.. 46
Şekil A.18 : η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği 46
Şekil A.19 : η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında k.k. değerleri grafiği…… 47
Şekil A.20 : η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında z. t. değerleri grafiği…… 47
Şekil B.1 : Program veri giriş formu……... 48
Şekil B.2 : Program katsayılar matrisi formu…….. 48
Şekil B.3 : Program deplasman çıktıları Formu…….. 49
Şekil B.4 : Program yayılı yük tipi ve büyüklüğü giriş formu…… 49
Şekil B.5 : Program yükleme tipi seçimi formu…….. 50

SEMBOL LİSTESİ

E	**:** Kiriş elastisite modülü
I	**:** Kiriş eylemsizlik momenti
2l	**:** Kiriş boyu
L	**:** Kiriş karakteristik boyu
$\mathbf{E_o}$	**:** Zemin elastisite modülü
ν_o	**:** Zemin poisson oranı
$\mathbf{H_0}$	**:** Kiriş sol ucu altındaki zemin tabaksı derinliği
$\mathbf{H_1}$	**:** Kiriş sağ ucu altındaki zemin tabaksı derinliği
k	**:** Zemin yatak katsayısı
t	**:** Kayma gerilmeleri etkisini temsil eden terim
V	**:** Çökme
M	**:** Moment
T	**:** Kesme kuvveti
P	**:** Tekil kuvvet
p(x)	**:** Kiriş üzerindeki yayılı yük
q(x)	**:** Zemin tepkisi
γ	: Zemin karakterine bağlı boyutsuz sabit
η	: Boyutsuz koordinat değeri
δ	: Zemin tabakası genişliği
ϕ	: Zemin katsayılarını belirleyen biçim fonksiyonu
α	: Karakteristik denklem kökünün reel kısmı
β	:Karakteristik denklem kökünün sanal kısmı
λ	**:** Karakteristik denklemin kökü
A,B,C,D	**:** Diferansiyel denklemlerin bilinmeyen katsayıları
$\mathbf{r^2}$	**:** Çift parametreli Vlasov zemininde, kiriş denge denkleminde kayma gerilmeleri etkisini temsil eden katsayı
$\mathbf{s^4}$	**:** Çift parametreli Vlasov zemininde, kiriş denge denkleminde zemin yatak katsayısını temsil eden katsayı

DEĞİŞKEN KALINLIKLI ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, değişken kalınlıklı Vlasov zemin modeli üzerine oturan sonlu uzunlukta elastik bir kirişin denklemleri elde edilmiş ve örneklerin çözümünde kullanılmak üzere VisualBasic 6.0 ile bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Birinci bölümde elastik zeminin değişken karakterinden bahsedilmiş ve problemin çözümü için yapılabilecek idealleştirmelerden bahsedilmiştir. Elastik zemin üzerine yapılmış ilk çalışma olan Winkler teorisi ana hatlarıyla anlatılmış daha sonra bizim çalışmamızda ele aldığımız Vlasov modeli ve bunun gibi iki parametreli modeller hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılmış ve zemin tabakasının değişken veya sabit kalınlıkta olması durumları üzerinde durulmuştur. Her iki durum için Vlasov zemini üzerindeki bir kirişin yönetici denklemleri verilmiştir.

Üçüncü Bölümde ise elde edilen yönetici denklemlerin çözüm yöntemleri üzerinde durulmuş, diferansiyel denklemlerin genel çözümü ve sayısal çözüm yöntemi olarak da Sonlu Farklar Yöntemi anlatılmıştır. İkinci bölümde probleme ait elde edilmiş olan denklemler, Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi ile yazılmıştır.

Dördüncü bölümde ise zorlanmış titreşim durumuna ait inceleme yapılmıştır. $P.\cos\omega t$ yüklemesi altındaki değişken derinlikli elastik zemine oturan kirişin temel denklemleri verilmiştir. Bu denklemlere ait sonlu farklar açılımları yapılmıştır.

Beşinci bölümde, kullanılan parametreler tanımlanmıştır. Yapılan örneklerle kesit tesirleri ve zemin tepkisini gösteren grafikler elde edilmiştir. Sonuçların elde edilmesinde yazılan bilgisayar programından yararlanılmıştır. Elde edilen sonuçlara ait grafikler ve program hakkında kısa bir bilgi eklerde verilmiştir.

BEAMS ON VARIABLE DEPTH ELASTIC FOUNDATION

SUMMARY

In this thesis, equations of beams with finite length on variable depth Vlasov elastic foundation model are figured out and a computer program with Visual Basic 6.0 is assembled to make use of it during the setting of examples.

In the first chapter, the variable characteristics of the foundation and the idealizations that can be made for solving the problem are considered. Major points of Winkler's hypothesis, which is the first analysis about beams on elastic foundation, are explained, after that Vlasov model and models with two parameters like Vlosov's are briefly mentioned.

In chapter two, the general definition of the problem is made and variable and uniform depth cases are considered. Governed equations of a beam on Vlasov foundation are given for both cases.

In chapter three, the methods of solutions are explained for the equations handled in chapter two. The general solutions of the differantial equations and numerical solution methods like finite differences method are explained in this chapter. Equations found in chapter two are expressed with central finite differences.

In chapter four, forced vibration problem is studied. The general equations of a beam on elastic, variable depth foundation is given. Finite difference formulas are applied to these general equations.

In the fifth chapter, the parameters that are used in calculations are defined. Stress resultants and soil reaction graphics are given for several examples. These results are calculated by the program written for this purpose. The graphical expressions of the results and a simple definition of the program is given in the appendix.

1. GİRİŞ

1.1 Genel Bilgiler

Elastik zemine oturan yapıların uygulama sahalarının genişliği, bu konu üzerine bir çok çalışma yapılmasını gerektirmiştir. Bu çalışmaların hepsinde esas zorluğu, zeminin, karmaşık elastik veya plastik deformasyonlar yapabilme özelliği teşkil etmektedir. Bu nedenle elastik zemine oturan yapıları incelerken zeminin etkisinin önemi hiçbir zaman göz ardı edilmemeli ve unutulmamalıdır. Yapının bünye denklemleri kadar, zeminin de bünye denklemlerini ve ikisi arasındaki ilişkiyi bilmek gerekir.

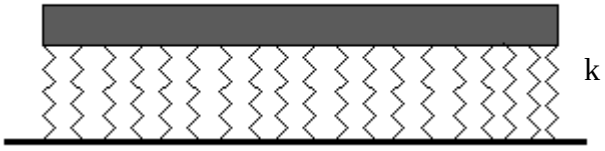
Yukarıda bahsettiğimiz zeminin karmaşık özelliklerinden dolayı, elastik zemine oturan yapılar incelenmeye başlanmadan önce zeminle ilgili bir takım idealleştirmeler yapılması gerekmektedir. Fakat zemin ile ilgili bu idealleştirmelerin yapılması, matematik çözümün gerçeğe yakınlığını sınırlayan bir etkendir. Elastik zemin üzerine çalışmış araştırmacılar zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik tiplerde düşünmüş ve modellemişlerdir.

Elastik zemin davranışı ile ilgili ilk önemli çalışma 1867 yılında Winkler **[1]** tarafından yapılmış ve kendi adıyla anılan Winkler zemini hipotezini yaratmıştır. Bu hipotez zemine oldukça basit bir yaklaşımı beraberinde getirdiğinden, kiriş ve plak problemlerinde geniş bir uygulama sahası kazanmıştır. Hipotez kısaca, elsatik zemin üzerinde bulunan prizmatik bir kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisi, o noktadaki çökme ile doğru orantılıdır, başka bir deyişle zemin malzemesinin Hooke kanununa uyduğunu belirtir. $q(x)$ zemin tepkisi ve $V(x)$ düşey doğrultudaki çökme olarak alınırsa, zemin yatak katsayısı (1.1) denkleminden bulunabilir.

$$q(x) = kV(x) \tag{1.1}$$

Winkler hipotezi küçük şekil değiştirme değerleri için uygulanabilir. Hipoteze göre k yatak katsayısı, zeminin homojen olmaması durumunda noktadan noktaya değişir, ayrıca zemin tabakası kalınlığıda k değerini etkilemektedir. Ancak yatak katsayısı zemin tepkisinden bağımsız bir değerdir.

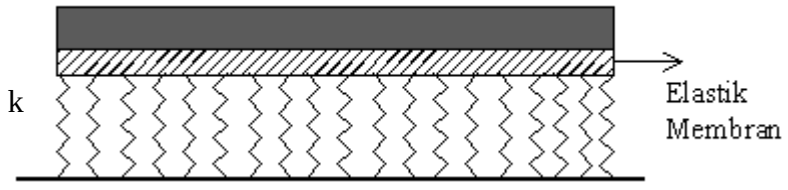
Hipotezin diğer bir kabulü de, zemine etkiyen bir kuvvetin sadece etkidiği noktada şekil değiştirmeye neden olduğudur yani Winkler, elastik zemini Şekil 1.1'de göründüğü gibi, birbirine sonsuz yakın ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen yaylar sistemi olarak düşünmüştür .



Şekil 1.1: Winkler Zemin Modeli

Hipotezi basit kılan her yayın diğer komşularından bağımsız olduğu yani bir yayın sıkışmasının diğerlerini etkilemediği , başka bir deyişle herhangi bir noktanın çökmesi diğer noktalardaki yüklerden bağımsız olduğu yaklaşımıdır. Ancak bu yaklaşım hipoteze zeminin tamamen süreksiz olduğu yaklaşımını getirmektedir.

Winkler'in modelinde zemin karakterini gösteren tek *k* parametresi vardır. Zeminin fiziksel özellikleri Winkler'in basit matematiksel bağıntısı ile ifade edilmekten daha karışık bir durum gösterir. Bu nedenle zeminin karakterini daha iyi modelleyebilmek açışından, kayma gerilmelerini de içeren iki parametreli modeller de geliştirilmiştir . Bunlardan bazılarını Filonenko-Borodich, Pasternak, Reissner ve Vlasov olarak sayabiliriz. Filonenko-Borodich modelinde getirilen yeni yaklaşım, Winkler zeminini temsil eden yayların üstünde yayların birbirleri ile etkileşimini sağlayan elastik bir membran tabakası olduğu kabulüdür (Şekil 1.2).



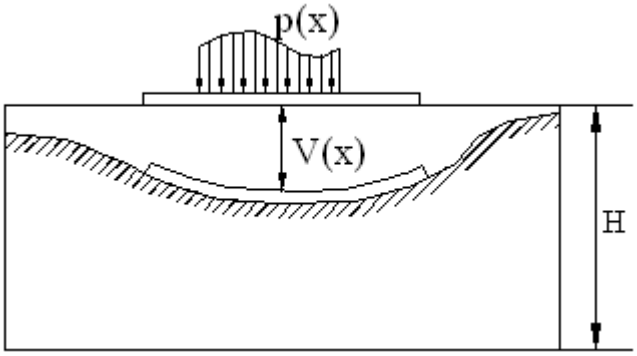
Şekil 1.2: Winkler zemin modelini temsil eden yayların üstüne değişik bir yaklaşım olarak getirilen elastik membran tabaka

Pasternak modelinde ise, yaylar arasındaki kesme kuvveti yaylar üzerinde alınan elastik bir kayma tabakası ile alınır. Vlasov modelinde zemin yarı sonsuz bir ortam olarak ele alınır ve zemin parametresini elde etmek için zeminin elastisite modülü,

poisson oranı, derinliği ile genişliğinden yararlanılmaktadır **[2].** Vlasov zemin modelinde (Şekil 1.3) tek katmanlı zemin için denge denklemi (1.2) de verilmiştir.

$$-2tV'' + kV = q(x)\phi(0) \tag{1.2}$$

Burada *q(x)* zemin tepkisi, *k* zemin yatak katsayısını, *2t* ise Winkler modelinde ihmal edilen yaylar arasındaki kesme deformasyonunu temsil eden zemin parametresini göstermektedir. Diğer bir ifadeyle *2t* sıfıra eşit alındığında Winkler modeline ait denklem elde edilmektedir. Bu iki zemin parametresini hesaplayabilmek için Vlasov ve Leontev elastik zemin derinliğince düşey deplasman profilini temsil eden diğer bir parametre, γ, tanımlamışlardır. Bu yaklaşımın avantajı zemin modülü *k* ile yaylar arası etkileşimi temsil eden *2t*'nin zemin ve kirişin/plağın geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanmasıdır.



Şekil 1.3: Vlasov zemin modeli

1.2 Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar

Winkler'in geliştirdiği, özellikle zeminin elastik karakteristiği ve yüklü alanın boyutları olmak üzere birçok parametreye bağlı yatak katsayısının değeri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Zimmermann **[3]**, bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla, k yatak katsayısı değerlerini çeşitli zemin türleri için hesap etmiştir.

Dodge **[4]** de elastik zemin üzerine oturan sonlu ve yarı sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranışları ile ilgili tesir fonksiyonları ve bunlara ait eğrileri hazırlamıştır. Aynı inceleme ile ingili bir tartışmada Donalt **[5]**, bu tür kirişlerin orta noktalarından tekil yük ve eğilme momentiyle yüklenmeleri durumunu ele almıştır

Krasheninnikova **[6,7]** , rijit taban üzerine oturan sıkışabilir tabakanın çökmelerini elastisite teorisinden alarak temel çözümü, Zemochlin'in rijit çubuk teorisi ve Gorbunov ve Posadov **[8]** 'un çalışmalarından yararlanarak yapmıştır.

Terzaghi **[9]** şerit yük etkisindeki esnek radye temeller için yatak katsayısı değerlerini belirleyen bir çalışma yapmıştır.

Biot **[10]** tam elastik ortama oturan yüklü kirişler için *k* yatak katsayısının yalnız kiriş genişliğine değil, bir dereceye kadar kirişin eğilme rijitliğine bağlı olduğunu göstermiş bunun göz önüne alınabilmesini mümkün kılan bağıntılar sunmuştur.

Heteyni **[11]** kitabında yatak katsayılarının sayısal değerleri hakkında hiçbir bilgi vermemiş, daha çok kesin çözümlerle ilgilenmiştir. Ancak kesin çözümlerin çok zaman alması, diğer araştırmacıları daha hızlı sonuç veren çeşitli genelleme ve methodlara itmiştir.

Durelli ve Parks **[12],** elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışması yapılmıştır. Bir ve iki noktadan yüklenen bu kirişlerden elde edilen sonuçlar teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Munther **[13]** sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve bulduğu sonuçları fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğriler üzerinde vermiştir.

Terzaghi ve Peck **[14]**, yaptıkları, deneysel araştırmalar sonucu aynı p taban basıncı değerleri için çökmelerin kiriş genişliğine bağlı olarak değişimini gösteren bir bağıntı vermişlerdir. Terzaghi basit ve çok karşılaşılan yükleme durumlarındaki kohezyonsuz kum ve sert kil için yatak katsayıları değerlerini belirleyen faktörleri incelemiş, yatak katsayısı olarak, zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlı uygun değerler seçmek için kurallar vermiştir.

Bakioğlu ve Özkan **[15]** yaptıkları çalışmada temellerin çökmeleriyle eğilme momentleri arasındaki diferansiyel denklemi, sonlu farklar denklemleri şeklinde yazıp, taban basıncının bu noktalar arasında parabolik değiştiğini varsaymışlardır. Ayrıca bu çalışmada taban basınçları cinsinden ifade edilen moment bağıntılarından yararlanarak, çökmeler ile taban basınçları arasında lineer denklem takımları elde edilmiştir.

Miranda ve Nair **[16]** ise sonlu uzunlukta kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yaparak buna ilişkin sayısal örnekler vermişlerdir.

Ding **[17]**, kiriş boyunca değişen Winkler zeminine oturan kirişlerin titreşimini inceleyerek çözüm için zemin tepkilerini kirişin yer değiştirmesini içeren bir integral denklem şeklinde dış yük olarak almış ve sayısal çözüm yaparak frekans parametrelerini elde etmiştir.

Karamanlidis ve Prakash **[18]**, iki parametreli elastik yarı düzleme oturan kişilerin burkulma ve titreşimini analitik ve sonlu elemanlar yöntemlerinden faydalanarak incelemiş ve çeşitli mesnetlenme durumları için öz frekansları elde etmişlerdir.

Lai, Ting, Lee ve Becker **[19]**, elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizini, kütle ve rijitlik matrislerinin bulunması için yeni bir formülasyon yaparak, sonlu elemanlar metoduyla incelemiş ve kiriş doğal frekansını elde etmişlerdir.

Elmas **[20]**, ortasından tekil yükle yüklenmiş sonlu uzunlukta ahşap ve betonarme kirişlerin davranışını incelemiştir.

Prolović ve Bonić **[21]**, elastik zemine oturan iki konsollu basit temel kirişlerinin, zemin elastisite modülü, zemin tabakalarının dağılımı, yükleme tipi ve büyüklüğü, zemin tabakası kalınlığı gibi elastik eşdeğer sabitlere dayanarak hesabı üzerinde durmuşdurlar.

Weistman **[22]**, çekme gerilmesi almayan, sadece basınca çalışan Winkler ve Reissner modelini kullanarak, elastik zemin üzerine oturan tekil yük etkisindeki kiriş ve plaklarda çökme ve kesit tesirlerine ait grafikler vermiştir.

Tüm bu çalışmardan ayrı olarak, Winkler zemini dışında Pasternak, Filolenko-Borodich, Vlasov zemini gibi elastik ve viskoelastik zemin türlerini alarak bunlar üzerindeki kiriş ve plakların davranışı, çeşitli araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Bu araştırmalara örnek olarak Kerr **[23,24]**, Harr **[25]** ve Tsai **[26]**'nın yaptığı çalışmalar verilebilir.

1.3 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu çalışmada, zemin davranışına daha gerçekçi bir yaklaşım getiren Vlasov modeline dayalı homojen elastik bir zemin üzerine oturan sonlu kirişlerin, "Sonlu Farklar Yöntemi" ne dayalı analizi açıklanmıştır. Çalışmada ayrıca, elastik zemine oturan sonlu kirişlerin "Sonlu Farklar Yöntemi" ile sayısal hesabının pratik uygulamalarda kullanılabilmesi için VISUALBASIC 6.0 diliyle kodlanmış **"**H.E.ZEM**"** isimli bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. H.E.ZEM bilgisayar programı ile çözülen değişik örnekler ve çıkan sonuçlar grafikler üzerinde gösterilerek irdelenmiştir.

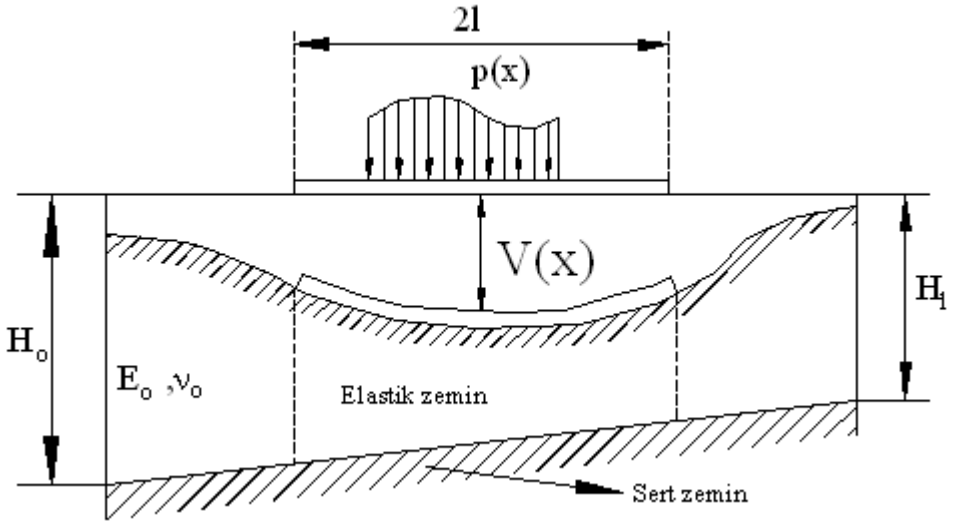
2. PROBLEMİN TANIMI VE TEMEL DENKLEMLER

2.1 Problemin tanımı

Bu tez çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki (*2l*) bir kirişin, zemin hakkında yapılan çeşitli kabullere dayanarak denklemlerinin kurulması ve çeşitli tipte yüklemeler altında sonlu farklar yöntemi ile çözümü üzerinde durulmuştur.

Problemin çözümünde kullanılan zemin Vlasov zeminidir. Dolayısıyla elastik sonlu uzunluktaki kirişin üstünde bulunduğu ortam sürekli ve çift parametreli bir zemin olup, kesme deformasyonlarını da göz önüne almaktadır. Vlasov zemin modelinin avantajı zemin modülü ile yaylar arası etkileşimi temsil eden parametrenin zemin ve kirişin geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanmasıdır. Problemde kullanılan kirişin malzemesi betonarme olarak ele alınmıştır.

Kirişin oturduğu zemin tabakasının kalınlığı lineer değişmektedir (Şekil 2.1)



Şekil 2.1: Değişken kalınlıkta zemine oturan kiriş

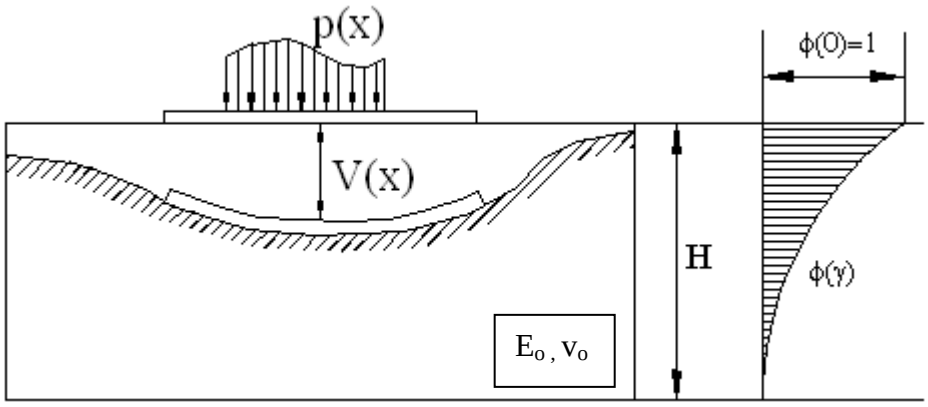
2.2 Homojen Elastik Zeminin Çekme ve Basınç Alması Halinde Temel Diferansiyel Denklemler

2.2.1 Zemin Tabakasının Düzgün Derinlikte Olması Durumu

Tek katmanlı elastik Vlasov zemini üzerine oturan kiriş Şekil 2.2 de görülmektedir. Eğilme sırasında kesitin düzlem kaldığı ve kiriş ile zemin arasındaki sürtünmenin ihmal edildiği varsayılmaktadır. Bu durumda kirişin eğilmesini gösteren diferansiyel denklem (2.1) deki gibidir.

$$EIV^{IV}(x) = p(x) - q(x) \qquad (V^{IV}(x) = \frac{d^4V(x)}{dx^4}) \qquad (2.1)$$

q(x) zemin tepkisi (=zemine etkiyen kuvvet) ve *V(x)* kirişin düşey deplasmanıdır. (2.1) denkleminde bilinmeyen iki fonksiyon vardır. Bunlar *q(x)* ve *V(x)* tir. Bu fonksiyonları belirleyebilmek için, zemine etkiyen kuvvet ve deplasmanlar arasındaki ilişkiyi belirlemek gerekmektedir. Bu ilişki kirişin yaptığı deplasmanın, zeminin yaptığı deplasmana eşit olduğu koşulundan elde edilebilir.



Şekil 2.2: Vlasov zeminine oturan *p(x)* yüklemesi altındaki sonlu kiriş

Tek katmanlı elastik zemin için denge denklemi:

$$-2tV'' + kV = q(x)\phi(0) \qquad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{E_o \delta}{1-\nu_0^{\,2}} \int_o^H \phi'^2(y)dy \\ t &= \frac{E_o \delta}{4(1+\nu_0)} \int_o^H \phi^2(y)dy \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

(2.3) deki *k* zemin yatak katsayısını, *t* ise denge denkleminde kayma gerilmelerinin etkisini ifade eden terimlerdir. Burada $\phi(y)$ zemin yüzeyinden kaya tabakaya doğru yer değiştirmenin değişimini göstermektedir ve (2.4) denklemindeki gibi ifade edilmektedir.

$$\phi(y) = \frac{\sinh \gamma \dfrac{H-y}{L}}{\sinh \gamma \dfrac{H}{L}} \qquad (2.4)$$

$\phi(y)$ fonksiyonunu $\phi(0)=1$ olacak şekilde seçmek en uygun olanıdır. Bu durumda (2.2) denklemi:

$$-2tV'' + kV = q(x) \qquad (2.5)$$

Başlangıçta da bahsettiğimiz kiriş deplasmanının zemin deplasmanına eşit olma koşulunu da göz önünde bulundurarak (2.1) ve (2.2) yi birlikte değerlendirebiliriz.

$$\left.\begin{aligned} -2tV'' + kV &= q(x) \\ EIV^{IV} &= p(x) - q(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

(2.6) daki denklemleri taraf tarafa toplarsak (2.7) deki iki parametreli elastik zemine oturan kirişin diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz.

$$EIV^{IV} - 2tV'' + kV = p(x) \qquad (2.7)$$

Bu denklemdeki $2tV''$ terimi zemin kayma gerilmelerini temsil eden terimdir ve iki parametreli zemin modelinin daha gerçekçi bir model olmasını sağlamaktadır. Bu adımdan sonra işlemlerde sadelik için ifadeleri $\eta = \frac{x}{L}$ boyutsuz koordinatında ifade etmek daha uygun olacaktır. Bu ifadedeki L değeri karakteristik elastik kiriş boyudur ve (2.8) denkleminde verilmiştir.

$$L = \sqrt[3]{\frac{2EI(1-\nu_o^{\,2})}{E_o\delta}} \tag{2.8}$$

(2.7) denkleminin boyutsuz koordinatlardaki ifadesi için her teriminin dönüştürülmüş ifadesi aşağıda (2.9) de verilmiştir.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4V(x)}{dx^4} \xrightarrow{\eta=\frac{x}{L}} \frac{1}{L^4}\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} \\ &\frac{d^2V(x)}{dx^2} \xrightarrow{\eta=\frac{x}{L}} \frac{1}{L^2}\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} \\ &V(x) \xrightarrow{\eta=\frac{x}{L}} V(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

(2.9) denklemindeki ifadeler (2.5) ve (2.7) denklemlerinde yerine konursa, boyutsuz koordinatlardaki kiriş ve zemine ait diferansiyel denklemler (2.10a-2.10b) deki gibi elde edilir.

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + s^4V(\eta) = \frac{pL^4}{EI} \tag{2.10a}$$

$$-\frac{2t(\eta)}{L^2}\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + k(\eta)V(\eta) = q \tag{2.10b}$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{tL^2}{EI} = \frac{1-\nu_o}{2L}\int_o^H \phi_1^{\,2}dy \\ s^4 &= \frac{kL^4}{EI} = 2L\int_o^H \phi_2^{\,'2}dy \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

(2.4) ifadesi (2.3) ve (2.11) de yerine konursa buradan hesaplamalarda kullanılacak aşağıdaki değerler bulunur.

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{E_0\delta}{H(1-\nu^2{}_0)}\phi_K \qquad t = \frac{E_0\delta H}{12(1+\nu_0)}\phi_T \\ s^4 &= 2\frac{L}{H}\phi_K \qquad\qquad r^2 = \frac{1-\nu_0}{6}\frac{H}{L}\phi_T \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_K &= \frac{1}{2}\frac{\gamma H}{L}\frac{\sinh\frac{\gamma H}{L}\cosh\frac{\gamma H}{L}+\frac{\gamma H}{L}}{\sinh^2\frac{\gamma H}{L}}\\ \phi_T &= \frac{3}{2}\frac{L}{\gamma H}\frac{\sinh\frac{\gamma H}{L}\cosh\frac{\gamma H}{L}-\frac{\gamma H}{L}}{\sinh^2\frac{\gamma H}{L}}\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

V(η) boyutsuz koordinatlardaki deplasman fonksiyonudur. Buradan yola çıkarak diğer tesirleri (2.13) ,(2.14), (2.15) deki gibi bulabiliriz.

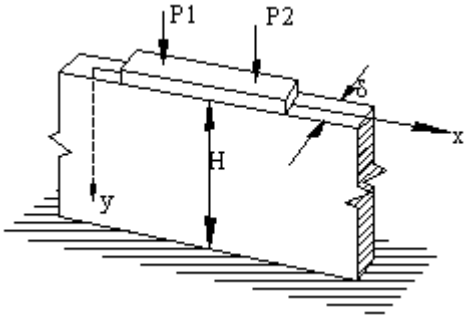
$$\varphi(\eta) = \frac{1}{L}V'(\eta) \qquad (2.13)$$

$$M(\eta) = -\frac{EI}{L^2}\frac{d^2V}{d\eta^2} \qquad (2.14)$$

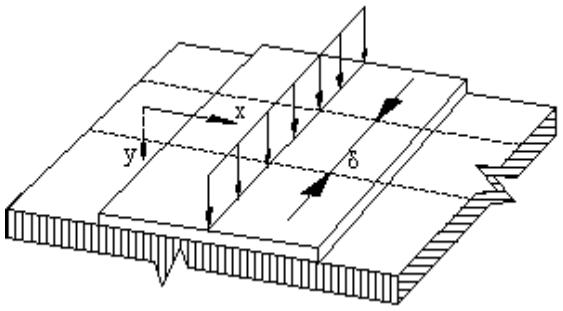
$$T(\eta) = -\frac{EI}{L^3}\left[V'''(\eta) - 2r^2V'(\eta)\right] \qquad (2.15)$$

Burada $\phi(\eta)$ dönmeyi, $M(\eta)$ eğilme momentini, $T(\eta)$ da kesme kuvvetini göstermektedir.

Bulunan sonuçlar elastisite teorisinin iki boyutlu problemine karşılık gelmektedir. (2.7) denklemi (yada (2.10)) hem δ genişliğinde elastik zemin üzerine oturan kiriş için (Şekil 2.3), hem de elastik zemine oturan plaktan enine alınmış δ genişli şerit için (Şekil 2.4) geçerlidir.



Şekil 2.3:Çift parametreli δ genişlikte E. Zemin üzerine oturan kiriş

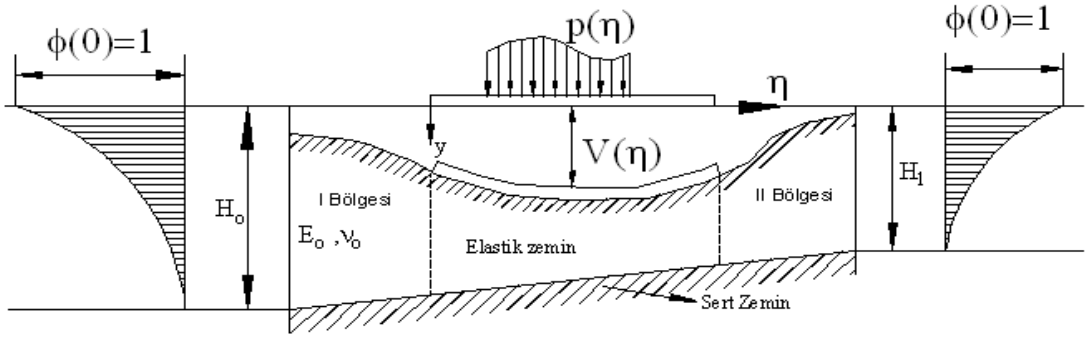


Şekil 2.4:Elastik zemin üzerine oturan plak

2.2.2 Zemin Tabakasının Değişken Derinlikte Olması Durumu

Zemin derinliğinin Şekil 2.5' deki gibi, kiriş sol ucunda H_0 gibi bir değerde olduğu ve sol uca doğru lineer azalarak H_1 değerine ulaştığı kabulünden yola çıkarak, $H(\eta)$ derinlik fonksiyonu :

$$\mathrm{H}(\eta)=\frac{L}{2l}\left[H_0\left(\frac{2l}{L}-\eta\right)+H_1\eta\right] \tag{2.16}$$



Şekil 2.5: Problemin tanımına ilişkin elastik zemine oturan kiriş gösterimi

H derinliğinin kiriş boyunca değişken olması (2.3) ve (2.10) da verilen denklemlerin formunu değiştirmemekte ancak denklemlerde bulunan r^2, s^4 , k ve t değerlerini η ya bağlı fonksiyonlar olarak yazma zorunluluğu getirmektedir.

$H(\eta)$ fonksiyonunu (2.3) ve (2.11) de yerine koyarsak:

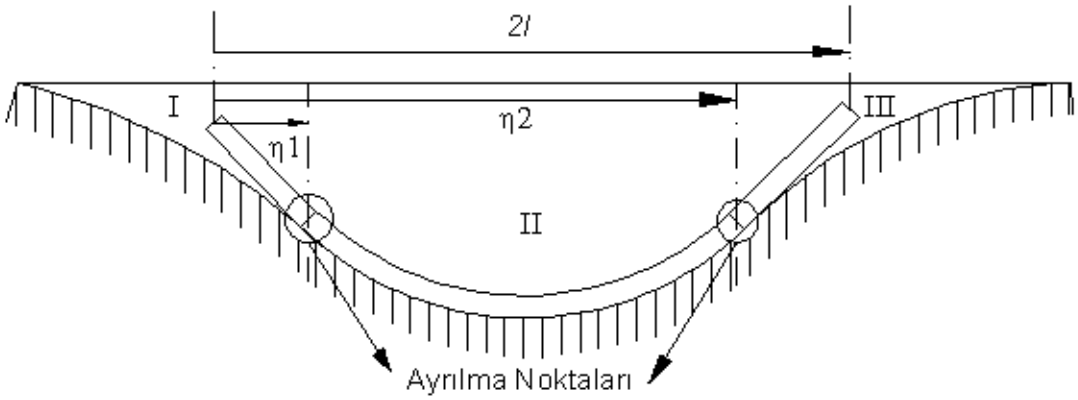
$$\left.\begin{aligned}
&k(\eta)=\frac{E_0\delta}{H(1-\nu^2{}_0)}\phi_K(\eta) \qquad t(\eta)=\frac{E_0\delta H}{12(1+\nu_0)}\phi_T(\eta)\\
&s^4(\eta)=2\frac{L}{H}\phi_K(\eta) \qquad r^2(\eta)=\frac{1-\nu_0}{6}\frac{H}{L}\phi_T(\eta)\\
&\phi_K(\eta)=\frac{1}{2}\frac{\gamma H(\eta)}{L}\frac{\sinh\frac{\gamma H(\eta)}{L}\cosh\frac{\gamma H(\eta)}{L}+\frac{\gamma H(\eta)}{L}}{\sinh^2\frac{\gamma H(\eta)}{L}}
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$$\phi_T(\eta)=\frac{3}{2}\frac{L}{\gamma H(\eta)}\frac{\sinh\frac{\gamma H(\eta)}{L}\cosh\frac{\gamma H(\eta)}{L}-\frac{\gamma H(\eta)}{L}}{\sinh^2\frac{\gamma H(\eta)}{L}}$$

Bu durumda kiriş için elde ettiğimiz (2.10a) genel denge denklemi de (2.18) deki gibi ifade edilir.

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4}-2r^2(\eta)\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2}+s^4V(\eta)=\frac{pL^4}{EI} \tag{2.18}$$

2.3 Homojen Elastik Zeminin Sadece Basınç Alması Hali



Şekil 2.6: Zeminin sadece basınç alması halinde elastik zemine oturan kirişin temsili şekil değiştirmesi

Bu kısımda, zeminin çekme almaması durumunda Vlasov tipi homojen elastik zemine oturan kiriş probleminin diferansiyel denklemlerinin alacağı hal ve problemin çözümüne dair bilgiler verilmiştir. Zeminin sadece basınç alması diğer bir değişle çekme almaması halinde zemin ve kiriş Şekil 2.6 da görüldüğü gibi şekil alır. Bu durumda kiriş uçlarına yakın bölgelerde ayrılmalar oluşur. Ayrılma noktasından sonra zeminin çekme almadığı kabul edildiğinden bu duruma zeminin sadece basınç alma durumu denir. Kirişin sol ucundan η_1 ve η_2 kadar uzaklıktaki noktalar ayrılma noktalarıdır. Problemin temel denklemleri olan, kiriş ve zemine ait boyutsuz koordinatlara göre düzenlenmiş diferansiyel denklemlere bakarsak değişmediklerini görürüz. Önceki durumlara göre oluşan değişiklik sınır koşullarında meydana gelmiştir.

Yani genel denklemler, kiriş için (2.18) de verildiği gibi, zemin içinse (2.10b) de verildiği gibidir. Sınır koşulları ise:

Sınır Koşulları

- Ayrılma noktalarındaki zemin çökme değeri ve kiriş çökme değerleri eşittir.

$$V_I(\eta=\eta_1)=V_{II}(\eta=\eta_1) \tag{2.19a}$$

$$V_{II}(\eta=\eta_2)=V_{III}(\eta=\eta_2) \tag{2.19b}$$

- Ayrılma noktalarında kiriş ve zemine ait teğetler ortaktır.

$$V'_I(\eta=\eta_1)=V'_{II}(\eta=\eta_1) \tag{2.20a}$$

$$V'_{II}(\eta=\eta_2)=V'_{III}(\eta=\eta_2) \tag{2.20b}$$

- Ayrılma noktalarında moment değeri sıfır olmalıdır.

$$M(\eta=\eta_1)=0=-\frac{EI}{L^2}V_{II}(\eta=\eta_1) \tag{2.21a}$$

$$M(\eta=\eta_2)=0=-\frac{EI}{L^2}V_{II}(\eta=\eta_2) \tag{2.21b}$$

- Ayrılma noktalarında kesme kuvvetine ilişkin sınır koşulu:

$$T(\eta=\eta_1)=-\frac{EI}{L^3}[V'''_{II}(\eta)-2r^2V_{II}(\eta)]=2t(\eta)V'_I(\eta) \tag{2.22a}$$

$$T(\eta=\eta_2)=-\frac{EI}{L^3}[V'''_{II}(\eta)-2r^2V_{II}(\eta)]=2t(\eta)V'_{III}(\eta) \tag{2.22b}$$

3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1 Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü

(2.18) denkleminin çözümü için önce (3.1) homojen diferansiyel denkleminin çözümüne ihtiyaç vardır.

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + s^4V(\eta) = 0 \tag{3.1}$$

Düzgün derinlikte elastik zemine oturan kiriş durumunu temsil eden (3.1) sabit katsayılı dördüncü dereceli diferansiyel denkleminin çözümü için $V_h=Ae^{k\eta}$ alınarak (3.2) de yerine yerleştirilirse:

$$Ae^{k\eta}(k^4 - 2r^2k^2 + s^4) = 0 \tag{3.2}$$

(3.2) ifadesinin sıfır olabilmesi için parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekir.

$$k^4 - 2r^2k^2 + s^4 = 0 \tag{3.3}$$

$$k^2_{1,\,3} = r^2 \mp\sqrt{r^4 - s^4} \tag{3.4}$$

(3.4) ifadesindeki kareköklü ifade çözümün ve problemin karakterini belirlemektedir. Denklemde bulunan *r* ve *s* katsayıları negatif olamazlar bu nedenle *s/r* oranı her zaman pozitiftir.
(3.4) denklemi için olası durumlar aşağıda listelenmiştir.

3.1.1 Çözüm Sırasında Karşılaşılabilecek Durumlar

r > s Olması Durumu

r>s olması halinde → $\sqrt{r^4 - s^4} > 0$ ve $\sqrt{r^4 - s^4} < r^2$ (3.5)

(3.4) ifadesinin köklerini ifade eden "*k*" teriminin yatak katsayısı "*k*" ile bir ilgisi yoktur.

$$k^2_1 = r^2 + \sqrt{r^4 - s^4} < 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1 = k_1 = -k_2 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}$$
$$k^2_3 = r^2 - \sqrt{r^4 - s^4} < 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_2 = k_3 = -k_4 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}} \tag{3.6}$$

Bulduğumuz denklem köklerine göre çözüm denklemini yazarsak:

$$V(\eta) = A_1 e^{k_1 \eta} + A_2 e^{k_2 \eta} + A_3 e^{k_3 \eta} + A_4 e^{k_4 \eta} \tag{3.7a}$$

$$V(\eta) = A e^{\lambda_1 \eta} + B e^{-\lambda_1 \eta} + C e^{\lambda_2 \eta} + D e^{-\lambda_2 \eta} \tag{3.7b}$$

yada bilinen diğer bir formda ifade etmek gerekirse;

$$V(\eta) = A \sinh \lambda_1 \eta + B \cosh \lambda_1 \eta + C \sinh \lambda_2 \eta + D \cosh \lambda_2 \eta \tag{3.7c}$$

Bu denklemin bilinmeyenleri "A, B, C, D" katsayılarıdır ve bu katsayılar sınır koşullarından saptanır.

Sınır Koşulları

Problemimizde dört adet sınır koşulu vardır. Bunlar sırasıyla:

1) Kiriş sol ucunda ($\eta=0$) momentin sıfır olması şartı
2) Kiriş sağ ucunda ($\eta=2l/L$) momentin sıfır olması şartı
3) Kiriş sol ucunda ($\eta=0$) kesme kuvveti ile ilgili sınır şartı
4) Kiriş sağ ucunda ($\eta=2l/L$) kesme kuvveti ile ilgili sınır şartı

Bunlardan 3. ve 4. şartı biraz açmak gerekirse:

Kesme kuvveti ifadesi daha önce (2.15) deki gibi verilmişti. Kiriş uçlarında kesme kuvvetinin değeri:

Sol uç ($\eta=0$) için: $$T(\eta) = -\frac{EI}{L^3}\left[V'''(\eta) - 2r^2 V'(\eta)\right] = 2tV_I'(\eta = 0) \tag{3.8a}$$

Sağ uç için ($\eta=2l/L$): $$T(\eta) = -\frac{EI}{L^3}\left[V'''(\eta) - 2r^2 V'(\eta)\right] = 2tV_{II}'(\eta = \frac{2l}{L}) \tag{3.8b}$$

olarak verilir. Denklemlerin sağ tarafındaki V_I ve V_{II} ifadeleri Şekil 2.5 de görünen I ve II bölgelerindeki çökme değerlerini ifade eden parametrelerdir.

1. ve 2. sınır koşulları da aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$-\frac{EI}{L^2}V^{"}(\eta=0)=0 \tag{3.8c}$$

$$-\frac{EI}{L^2}V^{"}(\eta=\frac{2l}{L})=0 \tag{3.8d}$$

(3.8a-3.8d) arası ifadelerde geçen L, (2.8) denkleminde verilmiştir. (3.8a) ve (3.8b) de sözü geçen α ise $\sqrt{k/2t}$ dir.

r=s Olması Durumu

r=s olması halinde → $\sqrt{r^4-s^4}=0$ (3.9)

$$\left.\begin{aligned} k_1=k_2=r \\ k_3=k_4=-r \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Bu durumda (3.1) homojen diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$V(\eta)=A_1e^{k_1\eta}+A_2\eta e^{k_3\eta}+A_3e^{k_4\eta}+A_4\eta e^{k_2\eta} \tag{3.11a}$$

$$V(\eta)=Ae^{r\eta}+Be^{-r\eta}+C\eta e^{-r\eta}+D\eta e^{r\eta} \tag{3.11b}$$

hiperbolik-trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazmak gerekirse;

$$V(\eta)=A\sinh r\eta+B\cosh r\eta+C\eta\cosh r\eta+D\eta\sinh r\eta \tag{3.11c}$$

(3.11c) denkleminde de bilinmeyenlerimiz "A, B, C, D" katsayılarıdır ve (3.8a)-(3.8d) denklemlerinde verilen sınır koşullarından tespit edilebilirler.

s>r Olması Durumu

s>r olması durumu problemimiz için geçerli olan ve diğerleri arasında tek katmanlı elastik zemine oturan kiriş problemi analizinde en önemli durumdur.

s>r olması halinde → $\sqrt{r^4-s^4}<0$ (3.12)

$k^2_{1,3} = r^2 \mp \sqrt{r^4 - s^4}$ denklemine bakıldığında (3.12) ifadesini de göz önünde bulundurursak denklemin köklerinin gerçek ve sanal sayılardan oluştuğunu görürüz.

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \mp\sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}} \\ k_3 &= \mp\sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}} \end{aligned}\right\} \qquad k = \pm\alpha \pm \beta i \tag{3.13}$$

α' nın (3.8a) ve (3.8b) de sözü geçen α ile ilgisi yoktur ve karıştırılmamalıdır. α ve β sayıları reel ve pozitif sayılardır. Denklem köklerinden biri alınarak (3.13) deki gibi α ve β cinsinden yazılmış köke eşitlenirse ve işlemler aşağıdaki (3.14)-(3.20) sırasıyla sürdürülürse;

$$k = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}} = \alpha - \beta i \tag{3.14}$$

$$k^2 = r^2 - i\sqrt{s^4 - r^4} = (\alpha - \beta i)^2 \tag{3.15}$$

$$k^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 i = r^2 - i\sqrt{s^4 - r^4} \tag{3.16}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = r^2 \qquad 4\alpha^2\beta^2 = s^4 - r^4 \tag{3.17}$$

$$4(r^2 - \beta^2)\beta^2 = s^4 - r^4 \tag{3.18}$$

$$4\beta^4 + 4r^2\beta^2 - s^4 + r^4 = 0 \tag{3.19}$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}} \tag{3.20}$$

(3.19) denkleminin kökü bulunarak β katsayısı (3.20) deki gibi bulunur. Daha önce α ve β için reel pozitif sayılar olduğunu söylediğimiz için β için eksi olan değeri kullanamayız. O yüzden β (3.21) denklemi olarak bulunur. Bulduğumuz bu ifadeyi (3.17) de yerine koyarsak buradan da α (3.22) deki gibi bulunur.

$$\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}} \tag{3.21}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}} \tag{3.22}$$

α ve β katsayılarını r ve s cinsinden belirlediğimize göre, genel çözüm ifadesi (3.13) da bulduğumuz kökler göz önüne alınarak (3.23c) deki gibi bulunur.

$$V(\eta) = A_1 e^{k_1 \eta} + A_2 e^{k_2 \eta} + A_3 e^{k_3 \eta} + A_4 e^{k_4 \eta} \tag{3.23a}$$

$$V(\eta) = Ae^{(\alpha - i\beta)\eta} + Be^{-(\alpha + i\beta)\eta} + Ce^{(-\alpha + i\beta)\eta} + De^{(\alpha + i\beta)\eta} \tag{3.23b}$$

$$\begin{aligned} V(\eta) = {} & A \sinh \alpha\eta \cos \beta\eta + B \cosh \alpha\eta \cos \beta\eta + C \cosh \alpha\eta \sin \beta\eta \\ & + D \sinh \alpha\eta \sin \beta\eta \end{aligned} \tag{3.23c}$$

Bu denklemin de bilinmeyenleri "A, B, C, D" katsayılarıdır ve bu katsayılar (3.8a-3.8d) denklemlerinde bahsedilen sınır koşullarından saptanır.

Bölüm 3.1 de anlatıldığı gibi (2.18) genel denge denkleminin çözümü için önce (3.1) homojen diferansiyel denkleminin genel integralini bulmak gerekir. Bu integralin genel formu (3.24) deki gibidir

$$V(\eta) = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4 \tag{3.24}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 integral sabitleri ve Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, *r* ve *s*'nin birbirine göre durumları için bulduğumuz (3.7c), (3.11c) ve (3.23c) yardımcı denklemlerinin içerdikleri fonksiyonlardır.

α ve β katsayılarının önemli rolü bu noktadan sonra ortaya çıkmaktadır.

Tek katmanlı elastik zemine oturan kiriş analizinde en önemli durum olan s>r durumu için Tablo 3.1 deki fonksiyonları, elastik Winkler zeminine oturan kirişin eğilmesine ilişkin fonksiyonlardan ayıran parametreler α ve β dır. Tablo 1'de s>r, s=r ve s<r durumları için Φ fonksiyonunun kendisi ve ilk sırasıyla ilk üç terimine denk gelen $\Phi^{'}, \Phi^{''}, \Phi^{'''}$ değerleri ve Φ fonksiyonunun ilk integraline karşılık gelen $\Phi^{(I)}$ degerleri listelenmiştir.

Dikkat edilirse (3.7c), (3.11c) ve (3.23c) yardımcı denklemlerinin formu (3.24) ile uyuşmaktadır ve Tablo 1 de her durum için başta verilmiş olan Φ fonksiyonu yardımcı denklemlerdeki A, B, C, D katsayılarına ait fonksiyonlardır. Tablo 1'deki

diğer değerler ($\Phi^{'}$, $\Phi^{''}$, $\Phi^{'''}$ ve $\Phi^{(I)}$) başta verilen Φ fonksiyonu ile yapılan türev ve integral işlemleri sonucunda bulunmuştur.

Örneğin; s>r durumu için verilen Φ_1 fonksiyonu, bu durum için bulduğumuz (3.23c) denkleminde A katsayısının yanındaki fonksiyondur ve $\Phi^{'}_1$ değeri:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \sinh\alpha\eta\cos\beta\eta \\ \Phi_1^{'} &= \alpha\cosh\alpha\eta\cos\beta\eta + (-\beta\sin\beta\eta\sinh\alpha\eta)\end{aligned} \tag{3.25}$$

$\cosh\alpha\eta\cos\beta\eta$ ifadesi Tablo 1'den bakıldığında Φ_2 ve $\sinh\alpha\eta\sin\beta\eta$ ifadesi ise Φ_4 e eşittir bu durumda $\Phi^{'}_1$ için:

$\Phi_1^{'} = \alpha\Phi_2 - \beta\Phi_4$ yazılabilir. (3.26)

Tablo 3.1 : Diferansiyel denklemin çözüm denkleminin kök fonksiyonları

s ve r'nin durumu	Fonksiyonlar ve Türevleri	Φ_1 (TEK)	Φ_2 (ÇİFT)	Φ_3 (TEK)	Φ_4 (ÇİFT)
s>r	Φ	$\mathrm{sh}\,\alpha\eta\cos\beta\eta$	$\mathrm{ch}\,\alpha\eta\cos\beta\eta$	$\mathrm{ch}\,\alpha\eta\sin\beta\eta$	$\mathrm{sh}\,\alpha\eta\sin\beta\eta$
	$\Phi^{'}$	$\alpha\Phi_2 - \beta\Phi_4$	$\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3$	$\alpha\Phi_4 + \beta\Phi_2$	$\alpha\Phi_3 + \beta\Phi_1$
	$\Phi^{''}$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_1 - 2\alpha\beta\Phi_3$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_2 - 2\alpha\beta\Phi_4$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_3 + 2\alpha\beta\Phi_1$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_4 + 2\alpha\beta\Phi_2$
	$\Phi^{'''}$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_2 + \beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_4$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_1 + \beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_3$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_4 - \beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_2$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_3 - \beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_1$
s=r	Φ	$\sinh r\eta$	$\cosh r\eta$	$\eta\sinh r\eta$	$\eta\cosh r\eta$
	$\Phi^{'}$	$r\Phi_2$	$r\Phi_1$	$\Phi_2 + r\Phi_4$	$\Phi_1 + r\Phi_3$
	$\Phi^{''}$	$r^2\Phi_1$	$r^2\Phi_2$	$2r\Phi_1 + r^2\Phi_3$	$2r\Phi_2 + r^2\Phi_4$

Tablo 3.1'in devamı:

	$\Phi^{'''}$	$r^3\Phi_2$	$r^3\Phi_1$	$3r^2\Phi_2 + r^3\Phi_4$	$3r^2\Phi_1 + r^3\Phi_3$
s<r	Φ	$\sinh\lambda_1\eta$	$\cosh\lambda_1\eta$	$\sinh\lambda_2\eta$	$\cosh\lambda_2\eta$
	$\Phi^{'}$	$\lambda_1\Phi_2$	$\lambda_1\Phi_1$	$\lambda_2\Phi_4$	$\lambda_2\Phi_3$
	$\Phi^{''}$	$\lambda_1^{\,2}\Phi_1$	$\lambda_1^{\,2}\Phi_2$	$\lambda_2^{\,2}\Phi_3$	$\lambda_2^{\,2}\Phi_4$
	$\Phi^{'''}$	$\lambda_1^{\,3}\Phi_2$	$\lambda_1^{\,3}\Phi_1$	$\lambda_2^{\,3}\Phi_4$	$\lambda_2^{\,3}\Phi_3$
s=0	Φ	η	1	$\sinh r_1\eta$	$\cosh r_1\eta$
	$\Phi^{'}$	$\Phi_2 = 1$	0	$r_1\Phi_4$	$r_1\Phi_3$
	$\Phi^{''}$	0	0	$r_1^{\,2}\Phi_3$	$r_1^{\,2}\Phi_4$
	$\Phi^{'''}$	0	0	$r_1^{\,3}\Phi_4$	$r_1^{\,3}\Phi_3$
s>r	$\Phi^{(I)}$	$\frac{\alpha\Phi_2 + \beta\Phi_4}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_4 + \beta\Phi_2}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_3 + \beta\Phi_1}{\alpha^2+\beta^2}$
s=r	$\Phi^{(I)}$	$\frac{1}{r}\Phi_2$	$\frac{1}{r}\Phi_1$	$\frac{1}{r}\Phi_4 - \frac{1}{r^2}\Phi_2$	$\frac{1}{r}\Phi_3 - \frac{1}{r^2}\Phi_1$
s<r	$\Phi^{(I)}$	$\frac{1}{\lambda_1}\Phi_2$	$\frac{1}{\lambda_1}\Phi_1$	$\frac{1}{\lambda_2}\Phi_4$	$\frac{1}{\lambda_2}\Phi_3$
s=0	$\Phi^{(I)}$	$\frac{1}{2}\Phi^2{}_1 = \frac{\eta^2}{2}$	Φ_1	$\frac{1}{r_1}\Phi_4$	$\frac{1}{r_1}\Phi_3$

(2.18) denkleminin genel çözümü, homojen çözümler ve özel çözümün toplanmasından oluşur. Yükün düzgün yayılı yük olması durumunda (2.18) için özel çözüm:

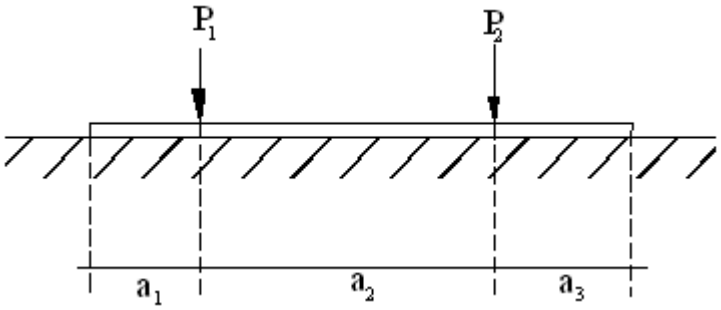
$$V_{ö} = A \ \ (Sabit)$$
$$V'_{ö} = V''_{ö} = V'''_{ö} = V^{IV}{}_{ö} = 0 \quad ((2.18)'\,de\ yerine\ konursa) \tag{3.27}$$
$$s^4 A = \frac{PL^4}{EI} \ \rightarrow \ A = \frac{PL^4}{s^4 EI} \ \rightarrow \ V_{ö} = \frac{PL^4}{s^4 EI} \quad olur$$

Dolayısıyla (2.18) denkleminin genel çözümünü (3.28) deki gibi olur.

$$V(\eta) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4 + \frac{PL^4}{s^4 EI} \tag{3.28}$$

Bu çözüm metodu prensipte kolay görünse de integrasyon sabitleri olan A, B, C, D nin sınır koşullarından yararlanılarak bulunması dörtlü denklem takımı çözmeyi gerektirir. Eğer yükleme çeşitli bölgelerde değişiyorsa o zaman her bölge için dört integrasyon sabiti daha işlemlere girecektir.

Örneğin Şekil 3.1'deki kirişi ele alırsak. Bu kirişi üç bölgeye ayırıp incelemek ve her bölge için ayrı ayrı denklemleri çözmek gerekir buda 12 integrasyon sabiti yada başka bir deyişle 12 bilinmeyeni tespit etmek demektir.



Şekil 3.1: İki tekil yük ile 3 bölgeye ayrılmış elastik zemine oturan kiriş

3. Bölümde buraya kadar yazılanlar ışığında kendi problemimiz için şunları söyleyebiliriz. Daha önce 2.Bölümde bahsettiğimiz üzere, kirişin oturduğu zemin tabakasının değişken derinlikte olması k ve t katsayıları ve bunlara bağlı olarak da s

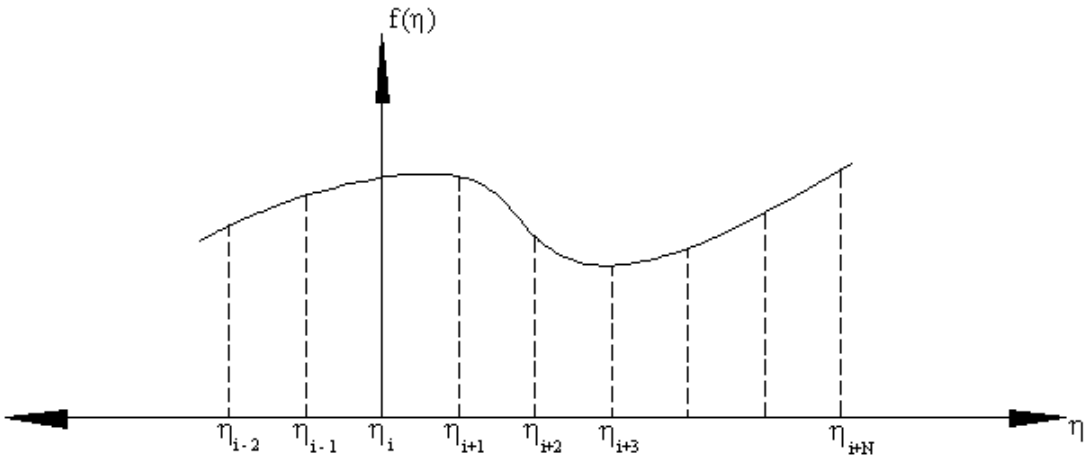
ve r'nin η 'nın fonksiyonları olacağı sonucunu doğuracağını biliyoruz. Bu durumda sabit kalınlıkta elastik zemin üzerine oturan kiriş için verilen (2.10) denklemi (2.18) de verilen, değişken katsayılı diferansiyel denkleme dönüşecektir. Buda problemin çözümünü daha da zorlaştırmaktadır. Bu nedenle problemin karakterine ve örneklemeye daha uygun çözüm yöntemlerinden "Sonlu Farklar" yöntemi üzerine yoğunlaşılmıştır.

3.2 Sonlu Farklar Metodu ve Sayısal Çözüm

Sonlu farklar yönteminin en önemli uygulaması diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde görülür. Diferansiyel denklemlerdeki türevler, fonksiyonun değerleri cinsinden ifade edilerek, diferansiyel denklem cebirsel denkleme indirgenir. Bu yöntem diferansiyel denklemlerin çözümünde çok kullanılır. Sonlu farklar metodunu üç başlıkta değerlendirebiliriz.

- İleri Sonlu farklar
- Geri Sonlu Farklar
- Merkezi Sonlu Farklar

En çok karşılaşılan ve kullanılan durum aralıkların eşit olması durumudur.



Şekil 3.2: Sonlu farklar şekilsel gösterimi

İleri sonlu farklar yönteminin esası bir noktadaki türevin, örneğin $f^n(\eta_i)$, artı yönde ilerleyen noktalardaki fonksiyon değerleri cinsinden ifade edilmesine dayanır.

Geri sonlu farklar yönteminin esası ise bir noktadaki türevin, örneğin $f^n(\eta_i)$, eksi yönde ilerleyen noktalardaki fonksiyon değerleri cinsinden ifade edilmesine dayanır.

Merkezi sonlu farklar yöntemi ise diğerlerinden daha çok kullanılmakla beraber esası, bir noktadaki türevin etrafındaki noktalardaki fonksiyon değerleri cinsinden ifade edilmesine dayanır.

3.2.1 Yüksek Mertebeden Türevlerin Sonlu Farklar Yöntemi İle Formülasyonu

Amacımız (2.18) ifadesinin sonlu farklar yöntemi ile nümerik çözümünü elde etmek olduğundan, yüksek mertebeden türevlerin Sonlu Farklar Metodu ile formülasyonuna ihtiyacımız olacaktır.

Eşit Aralıklı İleri Sonlu Farklar

1. Mertebeden Türev $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ (3.29)

2. Mertebeden Türev $f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}$ (3.30)

3. Mertebeden Türev $f'''_i = \frac{-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}}{h^3}$ (3.31)

4. Mertebeden Türev $f^{IV}{}_i = \frac{f_i - 4f_{i+1} + 6f_{i+2} - 4f_{i+3} + f_{i+4}}{h^4}$ (3.32)

Eşit Aralıklı Geri Sonlu Farklar

1. Mertebeden Türev $f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$ (3.29)

2. Mertebeden Türev $f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}$ (3.30)

3. Mertebeden Türev $f'''_i = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3}$ (3.31)

4. Mertebeden Türev $f^{IV}{}_i = \frac{f_i - 4f_{i-1} + 6f_{i-2} - 4f_{i-3} + f_{i-4}}{h^4}$ (3.32)

Eşit Aralıklı Merkezi Sonlu Farklar

1. Mertebeden Türev $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ (3.29)

2. Mertebeden Türev $f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$ (3.30)

3. Mertebeden Türev $f'''_i = \frac{f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_{i-1} - f_{i-2}}{h^3}$ (3.31)

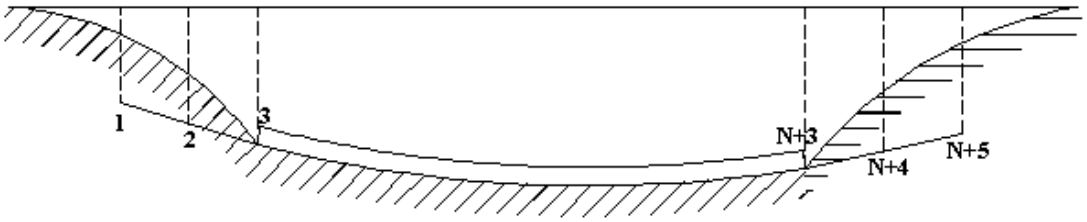
4. Mertebeden Türev $f^{IV}_i = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4}$ (3.32)

Yukarıdaki ifadelerde geçen "*h*" iki nokta arasındaki uzaklık diğer bir deyişle aralıktır. Genel çözüm için kirişin N adet eşit parçaya bölündüğünü düşünerek devam edilmiştir. Bu durumda kiriş üzerinde N+1 adet nokta bulunur. Her bir noktanın çökme dönme, moment kesme kuvveti devam eden kısımlarda "Merkezi Sonlu Farklar" ile hesap edilecektir.

3.2.2 Kiriş Denge Denklemi İçin Merkezi Sonlu Farklar Uygulanması

2. Bölüm' de kirişin denge denklemi (2.18) ifadesi ile verilmiş olup aşağıdaki gibiydir.

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2(\eta)\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + s^4V(\eta) = \frac{pL^4}{EI} \quad (3.33)$$



Şekil 3.3: Elastik zemin üzerindeki kirişin deformasyonu

Kirişin başlangıç noktasından itibaren merkezi farklar denklemlerimizi yazmaya başlamadan önce başlangıç ve bitiş noktalarında yazacağımız merkezi sonlu farklar denklemlerine bir göz atarsak:

3 Noktası:

$$\frac{V_5 - 4V_4 + 6V_3 - 4V_2 + V_1}{h^4} - 2r^2(\eta_3)\frac{V_4 - 2V_3 + V_2}{h^2} + s^4(\eta_3)V_3 = 0 \tag{3.34}$$

N+3 Noktası:

$$\frac{V_{N+5} - 4V_{N+4} + 6V_{N+3} - 4V_{N+2} + V_{N+1}}{h^4} - 2r^2(\eta_{N+3})\frac{V_{N+4} - 2V_{N+3} + V_{N+2}}{h^2} + \\ + s^4(\eta_{N+3})V_{N+3} = 0 \tag{3.35}$$

(3.34) ve (3.35) denklemlerinde gerçekte kiriş üzerinde olmayan ancak denklemlerde bulunan ve Şekil 3.3 de görülen 1, 2, N+4, N+5 noktalarının kullanıldığını görürüz. Bu noktalar hayali noktalardır ve bu noktaların varlığı bilinmeyen sayısını N+1 den N+5 e çıkarır.

Kiriş üzerindeki N+1 nokta için (3.34) ve (3.35) deki gibi denklemleri yazabiliriz ancak buradan N+1 adet denklem elde edebiliriz. N+5 adet bilinmeyeni belirleyebilmek için gereken dört denklemi de (3.8a-3.8d) de verilen sınır koşullarını kullanarak yazabiliriz.

Bu denklemler şöyledir:

1. Kiriş sol ucunda moment sıfırdır

$$M(\eta_3) = -\frac{EI}{L^2}V''(\eta_3 = 0) = 0 \tag{3.36}$$

$$M(\eta_3) = -\frac{EI}{L^2}\frac{V_4 - 2V_3 + V_2}{h^2} = 0 \tag{3.37}$$

2. Kiriş sağ ucunda moment sıfırdır

$$M(\eta_{N+3}) = -\frac{EI}{L^2}V''(\eta_{N+3} = \frac{2l}{L}) = 0 \tag{3.38}$$

$$M(\eta_{N+3}) = -\frac{EI}{L^2}\frac{V_{N+4} - 2V_{N+3} + V_{N+2}}{h^2} = 0 \tag{3.39}$$

3. Kiriş sol ucunda kesme kuvvetinin değeri ile ilgili koşul

$$T(\eta_3) = -\frac{EI}{L^3}\left[V'''(\eta_3) - 2r^2(\eta_3)V'(\eta_3)\right] = 2t(\eta_3)V_I'(\eta_3) \tag{3.40}$$

$$T(\eta_3) = -\frac{EI}{L^3}\left[\frac{V_5 - 3V_4 + 3V_2 - V_1}{h^3} - 2r^2(\eta_3 = 0)\frac{V_4 - V_2}{2h}\right] = 2\alpha(\eta_3 = 0)t(\eta_3 = 0)V_3 \tag{3.41}$$

4. Kiriş sağ ucunda kesme kuvvetinin değeri ile ilgili koşul

$$T(\eta_{N+3}) = -\frac{EI}{L^3}\left[V'''(\eta_{N+3}) - 2r^2(\eta_{N+3})V'(\eta_{N+3})\right] = 2t(\eta_{N+3})V_{II}'(\eta_{N+3}) \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} T(\eta_{N+3}) &= -\frac{EI}{L^3}\left[\frac{V_{N+5} - 3V_{N+4} + 3V_{N+2} - V_{N+1}}{h^3} - 2r^2(\eta_{N+3} = \frac{2l}{L})\frac{V_{N+4} - V_{N+2}}{2h}\right] = \\ &= 2t(\eta_{N+3} = \frac{2l}{L})V_{II}'(\eta_{N+3} = \frac{2l}{L}) \end{aligned} \tag{3.43}$$

N adet eşit parçaya bölünmüş elastik zemine oturan kiriş için sol uçtan başlayarak sonlu farklar denklemleri yazılırsa N+1 adet denklem elde edilir, dört adet denklem de kiriş uçlarındaki sınır koşullarından gelir ve N+5 bilinmeyen için N+5 denklem elde edilir ki buda bilinmeyenlerin bulunması için yeterlidir.

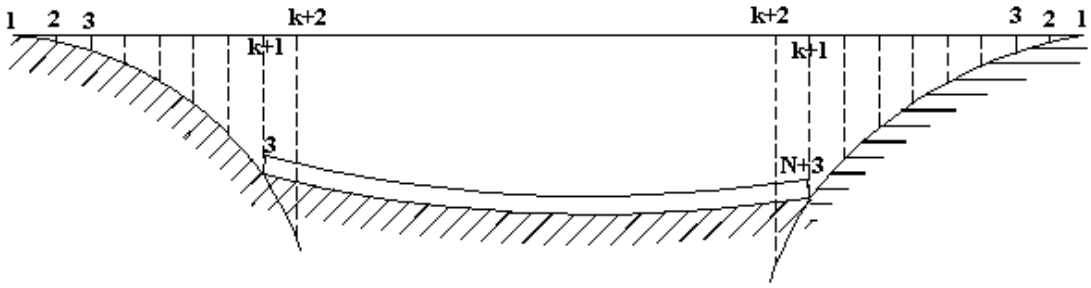
3.2.3 Kiriş Uçlarının Bittiği Yerden İtibaren Başlayan Serbest Zemin Tabakasının Denkleminin Merkezi Sonlu Farklar İle İfade Edilmesi

Zemin için denge denklemi daha önce (2.6) da verilmişti ve aşağıda belirtildiği gibiydi.

$$-2tV'' + kV = q(x) \tag{3.44}$$

Ancak bu denklem kiriş altındaki zemin için geçerlidir. Serbest zemin tabakası için zemin tepkisini gösteren *q(x)*, herhangi bir yükleme söz konusu olmadığından sıfır olur. Serbest zemin tabakasının denklemi de (3.45) deki gibi ifade edilir.

$$-2tV'' + kV = 0 \tag{3.45}$$



Şekil 3.4: Serbest zemin yüzeyinin deformasyonu

Serbest zemin tabakasına sonlu farklar uygulamak için k adet parçaya bölündüğünü düşünürsek ve 2 noktasından başlayarak k noktasına kadar zemin denkleminin (3.44) merkezi sonlu farklar açılımını yazarsak:

2 Noktası:

$$-\frac{2t(\eta_2)}{L^2}\frac{V_3-2V_2+V_1}{h^2}+k(\eta)V_2=0 \tag{3.46}$$

k Noktası:

$$-\frac{2t(\eta_k)}{L^2}\frac{V_{k+1}-2V_k+V_{k-1}}{h^2}+k(\eta_k)V_k=0 \tag{3.47}$$

(3.46) ve (3.47) denklemlerini incelediğimizde V_1 ve V_{k+1} terimleri dikkati çeker. Şekil 3.4 de gördüğümüz gibi V_1 değeri sıfır ve V_{k+1} değeri de kirişin sol ucundaki çökme değerine eşittir. Bunlar daha sonra sınır koşulları olarak kullanılacak bağıntılardır.

2 noktasından k ya kadar k-1 adet denklem yazılabilir fakat aranan parametre sayısı k+1 adettir. Gerekli 2 denklem de yukarıda bahsedilen koşullardan elde edilir ve k+1 denklem, k+1 bilinmeyenli bir sistem elde edilir.

Yapılan işlemler sağ uçtan sonra devam eden serbest zemin tabakası için de geçerlidir. Dikkat edilmesi gereken nokta k+1 noktasındaki V_{k+1} bilinmeyeninin Şekil 3.4'den de fark edilebileceği gibi kirişin sağ ucundaki çökmeye eşit olduğudur.

Tüm bu Merkezi sonlu farklar işlemlerini düşündüğümüzde üç bölge için işlem yapmakta olduğumuzu görürüz. Bunlar:

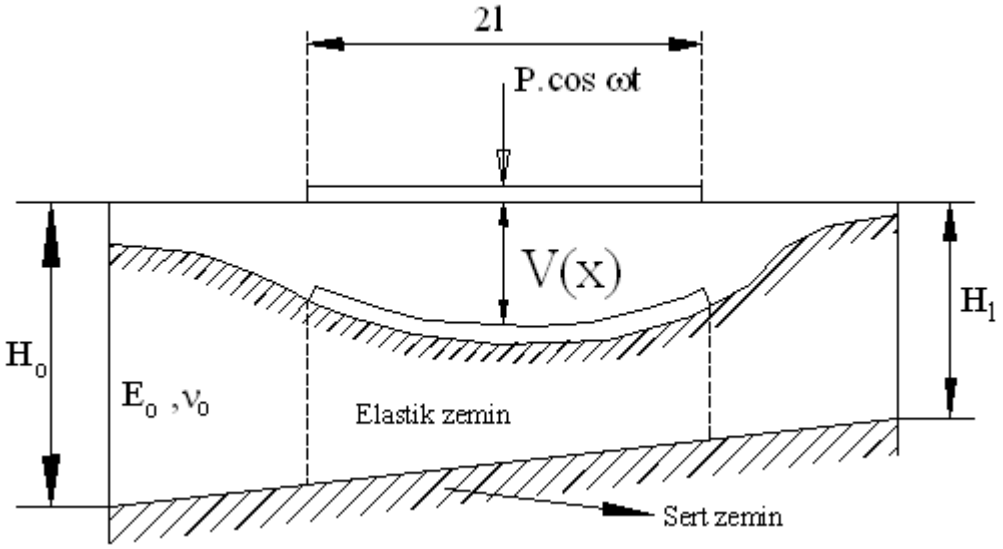
5. Kirişin sol ucundan sonraki serbest zemin tabakası
6. Kirişin elastik zemine oturduğu bölge

7. Kiriş sağ ucundan sonraki serbest zemin tabakası

Yapılması gereken her bölge için elde edilen denklem takımlarında V_i terimlerinin katsayılarından bir katsayılar matrisi oluşturmak ve her bölge için birde yükleme (sonuç) matrisi oluşturmak, sonra elde ettiğimiz tüm matrisleri kiriş zemin sistemimizi ifade edecek şekilde süperpoze ederek global bir matris yaratmaktır. En son olarak da matris işlemlerini kullanarak bilinmeyen değerleri belirlemektir.

4. ZORLANMIŞ TİTREŞİM DURUMU

4.1 Temel Denklemler



Şekil 4.1: Pcos*wt* yükü ile yüklü kirişin zorlanmış titreşim durumuna ait gösterim

Zorlanmış titreşim durumunda kirişin Şekil 4.1 de göründüğü gibi bir P.cos ωt yüklemesi altındaki davranışı incelenecektir. Zorlanmış titreşim durumda probleme ait diferansiyel denklemler, 2.Bölümde 2.10 denklemi ile verilen ifadeden 3.48 de verilen denkleme ve serbest zemin tabakasına ait diferansiyel denklem de 2.2 de verilen denklemden 3.49 da verilen denkleme dönüşmüştür.

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \lambda\left[1-(1+\rho)\bar{\Omega}^2\right]V(\eta) = \frac{L^4}{EI}\,p\delta(\eta-\xi) \tag{3.48}$$

$$\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\lambda}{\lambda_G}\left(1-\frac{1}{\rho}\bar{\Omega}^2\right)V(\eta) = 0 \tag{3.49}$$

3.48 ve 3.49 denklemlerinde geçen parametreler ve bu parametrelerin ifadeleri aşağıda verilmiştir. Burada δ Dirac Delta fonksiyonudur.

$$\lambda = \frac{kL^4}{EI} = s^4 \tag{3.50}$$

$$\lambda_G = \frac{G_1 L^2}{EI} = 2r^2 \qquad G_1 = 2t \tag{3.51}$$

$$\rho = \frac{m_k}{m_z} \qquad \bar{\Omega} = \sqrt{\frac{m_k}{k}}\Omega \tag{3.52}$$

3.50-3.52 de verilen ifadeleri 3.48 ve 3.49 da yerine koyarsak ve tekrar düzenlersek:

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \left[s^4 - (1+\rho)\frac{kL^4}{EI}\frac{m_k}{k}\Omega^2 \right] V(\eta) = \frac{pL^4}{EI} \tag{3.53}$$

$$\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\dfrac{kL^4}{EI}}{\dfrac{2tL^2}{EI}}\left(1 - \frac{1}{\rho}\bar{\Omega}^2\right)V(\eta) = 0 \tag{3.54}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa:

$$\frac{d^4V(\eta)}{d\eta^4} - 2r^2\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \left[s^4 - (1+\rho)\bar{\Omega}^2 \right] V(\eta) = \frac{pL^4}{EI} \tag{3.55}$$

$$\frac{d^2V(\eta)}{d\eta^2} + \frac{s^4}{2r^2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\bar{\Omega}^2\right)V(\eta) = 0 \tag{3.56}$$

3.55 de geçen $\bar{\omega}$ ifadesi ise aşağıda verilmiştir:

$$\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{\frac{m_k L^4}{EI}} \tag{3.57}$$

Zorlanmış titreşim durumu için de problemin sınır koşulları aynıdır ve 3.Bölümde 3.36-3.43 de verildiği gibidir. Zorlanmış titreşim durumu için 3.34 ve 3.35 de örnek olarak verilmiş olan 3 ve N+3 noktaları için merkezi sonlu farklar açılımı 3.58 ve 3.59daki hali alacaktır.

$$\frac{V_5-4V_4+6V_3-4V_2+V_1}{h^4}-2r^2(\eta_3)\frac{V_4-2V_3+V_2}{2h}+\left[s^4(\eta_3)-(1+\rho)\bar{\underline{\Omega}}^2\right]V_3=0 \qquad (3.58)$$

$$\frac{V_{N+5}-4V_{N+4}+6V_{N+3}-4V_{N+2}+V_{N+1}}{h^4}-2r^2(\eta_{N+3})\frac{V_{N+4}-2V_{N+3}+V_{N+2}}{h^2}+ \qquad (3.59)$$
$$+\left[s^4(\eta_{N+3})-(1+\rho)\bar{\underline{\Omega}}^2\right]V_{N+3}=0$$

Görüleceği gibi temel denklemlerdeki değişiklikler merkezi sonlu farklar açılımı yapıldığında V_i terimlerinin başındaki katsayıların değişmesine neden olmaktadır. Problemin çözüm yönteminde herhangi bir değişiklik olmaz. Sonuç yine global matris ve yük matrisinin matris işlemleri ile işleme sokulması ile elde edilir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR ve SONUÇLAR

5.1 Genel Bilgi ve Açıklamalar

Yukarıdaki bölümlerde anlatılan prosedür basit gibi görünmesine karşın sayısal uygulamalarda N'nin (parça sayısı) değeri büyüdükçe oluşturacağımız global matrisin elle çözüm yapılamayacak kadar büyümesini de yanında getirir. Örneğin N=10 parçaya bölünmüş bir kiriş için serbest zemin uzunlukları kiriş uzunluğunun yarısı olarak düşünülürse 29x29 luk bir global matris ile işlem yapılmasını gerektirmektedir. Tüm bu işlemleri her problem için baştan uygulamak yada tek bir verinin değişmesi durumunda bile tekrar yapmak oldukça zahmetli ve karışık olduğundan işlem hatası yapmaya müsait bir durumdur. Bu nedenle sayısal çözümlerin hızla ve hatasız gerçekleştirilebilmesi için Visual Basic 6.0 da çeşitli yükleme tipleri ve değişik fiziksel parametrelerin girilmesi durumunda hızla sonuca varabilen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Programlamada gerekli bazı kabuller yapılmıştır. Bunları aşağıda açıklandıkları gibidir.

- P tekil yüklemesi durumunda yük (yada sonuç) matrisinin oluşturulması sırasında herhangi bir noktaya etkimekte olan P tekil kuvveti:

$$q(\eta) = Pe^{-100\left|(\eta-\eta_p)^2\right|} \tag{3.60}$$

(3.48) ifadesi ile tüm diğer noktalarda sönümlenen sadece yüklendiği noktada P kadar etki yaratan bir yayılı yük fonksiyonuna dönüştürülmüştür. İfadedeki η_p, P nin yüklendiği yerin boyutsuz koordinat değeridir.

- M tekil moment yüklemesi durumunda momentin iki nod arasında olduğu durumlar incelenmiş ve moment kuvvet çiftine çevrilmiş sonra bu kuvvet çifti de (3.48) ifadesiyle yayılı yük karakterinde ifade edilmiştir.

5.2 Sayısal Çözüm İçin Gerekli Parametreler

Problemin tanımı ve çözümü için gerekli parametreler. E_0, v_o zemin elastisite modülü ve poisson oranı, H_o kiriş sol ucundaki zemin kalınlığı, H_1 zemin sağ ucundaki zemin kalınlığı, 2l kiriş boyu, E kiriş elastisite modülü, I kiriş atalet momenti, γ zemin karakterine bağlı katsayı, δ kirişin oturduğu zemin tabakasının genişliği, q yayılı yükün en yüksek değeri, P tekil yük değeri, M tekil moment değeri ve N kirişin bölündüğü eşit parça sayısı.

Sayısal uygulamalarda yazılan bilgisayar programının bir faydası olarak yukarıda adı geçen parametrelere çeşitli değerler verilmiş ve sonuç olarak M, T kesit tesirleri, V çökme ve q zemin tepkisi gibi sonuçlar elde edilmiş ve grafiklerle temsil edilmiştir.

Ek A' da grafik ve tabloları verilen örneklerde kullanılan problem değerleri aşağıdaki gibidir.

$E = 30,000,000\ KN/m^2$

$E_0 = 100,000\ KN/m^2$

$v_0 = 0.3$

$I = 0.2\ m^4$

$2l = 10\ m$

$\gamma = 1\text{-}1.5$

$\delta = 1$

$H_0 = 25\ m$

$H_1 = 15\ m$

N= Seçime bağlı

Yazılan program kullanılarak elde edilmiş çeşitli yükleme durumlarına ilişkin sonuçlara ait grafikler EK A da, programın görünüşüne ilişkin çıktılar EK B de ve programın kendisi ile kodu EK C de verilmiştir. Sonuç olarak problem çözümü için seçilen parça sayısının arttırılması Sonlu Farklar Yöntemi'nin bir getirisi olarak, EK A daki grafiklerde de görülebileceği üzere, çözümü gerçeğe daha da yaklaştırmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Winkler,E.,** 1867. Die Lehre vonder Elastızıtat und Festigkeit, Prag

[2] **Vlasov, V.Z. and Leontev, U.N.,** 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Jeruselam.

[3] **Zimmerman, K.,** 1942. Die Berechnung der Soldruckverteilung unter Grundungskörpern, Der Eauingeneuer.

[4] **Dodge, A.**, 1964. Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proc. ASCE, August.

[5] **Donalt, D., Ely, F.J., Sergev, S., Barberito, B.,** 1965. Influence Functions for Beams on Elastic Foundation, Diss. ASCE, April.

[6] **Krasheninnikova, G.V.**, 1973. Limits of Influence of an Elastic Layer Upon the Results of Beam Analysis. Taking into Account the Cohesion of Soil with an Undeformable Underlying Layer, Osnovania, Fundamenty, Mekhanika Gruntov, 2: 25-28.

[7] **Krasheninnikova, G.V.,** 1964. Analysis of Beams on Elastic Foundations of Finite Depth, Energiye.

[8] **Gorbunov, M.J. - Pasadov,** 1954. Analysis of Structures on Elastic Foundation, Gosstroizzdat.

[9] **Terzaghi, K.,** 1955. Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, Volume V, pp. 297-326, I.C.E., London.

[10] **Biot, A.M.,** 1937. Bending of an Infinite Beam on Elastic Foundation. Appl. Mech. 4, 1, A1-47.

[11] **Heteyni, M.,** 1955. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Pres, Ann Arbor, Michigan.

[12] **Durelli, A. J., Parks, V. J., Moc, C.K.C.,** 1966. Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp.1713-1725.

[13] **Munther, J. H.,** 1970. Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussion ASCE, Vol.96, April 1970, pp. 864-870.

[14] **Terzaghi, K., Peck, R. B.,** 1948. Soil Mechanics in Engineering Practice, J. Wiley, New York.

[15] **Bakioğlu, M., Özkan, T.,** 1980. Sonlu Kalınlıkta Zemin Üzerine Oturan Yüzeysel Temellerin Hesabı Hakkında Bir Yöntem, Tübitak, VII. Bil. Kong.

[16] **Miranda, C. K., Nair, K.,** 1966. Finite Beams on Elastic Foundation, App. Div. Proc. ASCE, April.

[17] **Ding, Z. A.,** 1993. A General Solution to Vibrations of Beams on Variable Winkler Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol. 47, No:1, pp. 83-90.

[18] **Karamanlidis, D. And Prakash, V.,** 1988. Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space, Earthquake Eng. And Structural Dynamics, Vol. 16, pp. 1103-1114.

[19] **Lai, C.L., Ting, B.Y., Lee, W.S. And Becker, B.R.,** 1992. Dynamic Response of Beams on Elastic Foundation, Journal of Struct. Engineering

[20] **Elmas, M.,** 1988. Elastik Zemine Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelemesi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Ens., Doktora Tezi, İstanbul.

[21] **Prolović V., Bonić Z.,** 1999. The Calculation of Foundation Girders in Equivalent Elastic Semispace, Architecture and Civil Engineering

[22] **Weistman, Y.,** 1970. On Foundation That React in Compression Only, Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME, Vol. 37

[23] **Kerr, A. D.,** 1964. Elastic and Viscoelastic Foundation Models, J. App. Mech., Vol. 31, pp. 491-498.

[24] **Kerr, A. D.,** 1979. Improved Stress Analysis for Cross Tie Tracks, J. Eng. Mech. Div. August.

[25] **Harr, M.E., Davidson, J.L., Ho, D.M., Pompo, L.E., Rama, S.V.,** 1969. Euler Beams on a two Parameter Foundation Model, J. App. Mech. Soil Mech. And Foundation Div., ASCE, July.

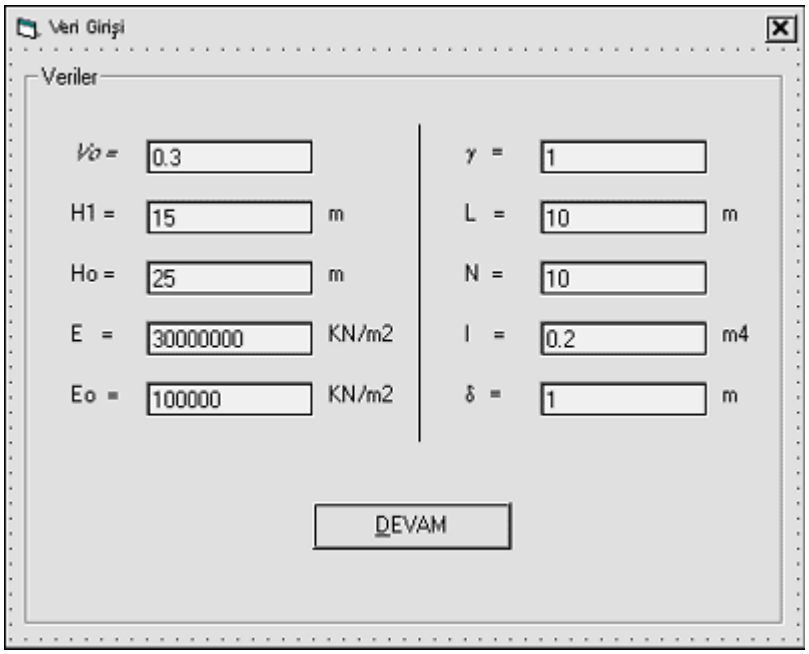
[26] **Tsai, N.C., Westman, R.A.,** 1969. Beam on Tensionless Foundation, J. App. Mech. End. Div., ASCE, November.

[27] **Bakioğlu, M.,** 2004. Sayısal Analiz, Birsen Yayınevi, İstanbul.

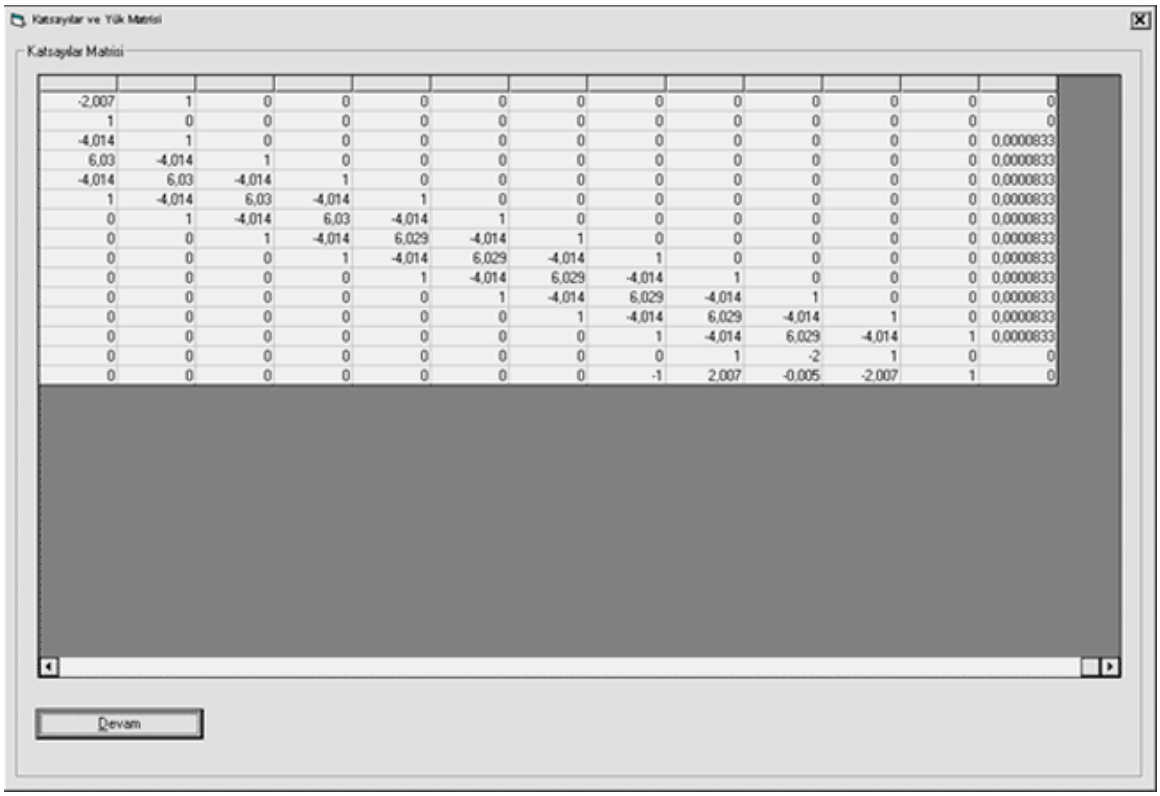
[28] **Fox, L.,** 1957. The Numerical Solutions of Two-Point Boundary Value Problems in Ordinary Differantial Equations, Oxford.

EKLER

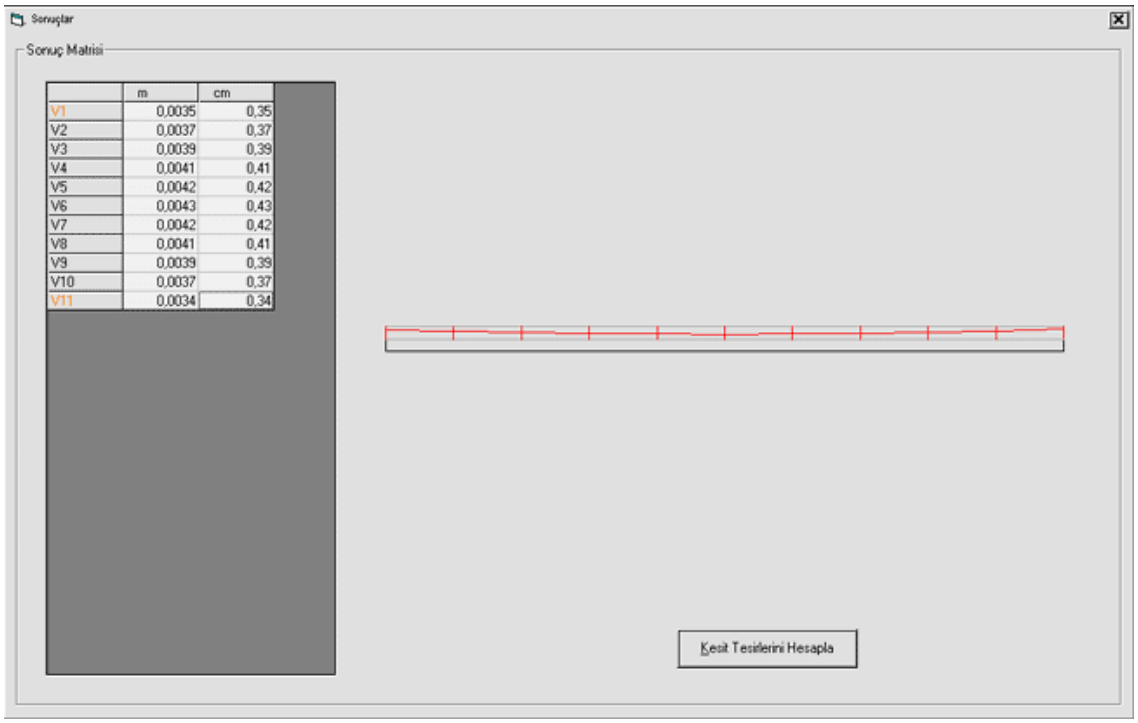
EK B



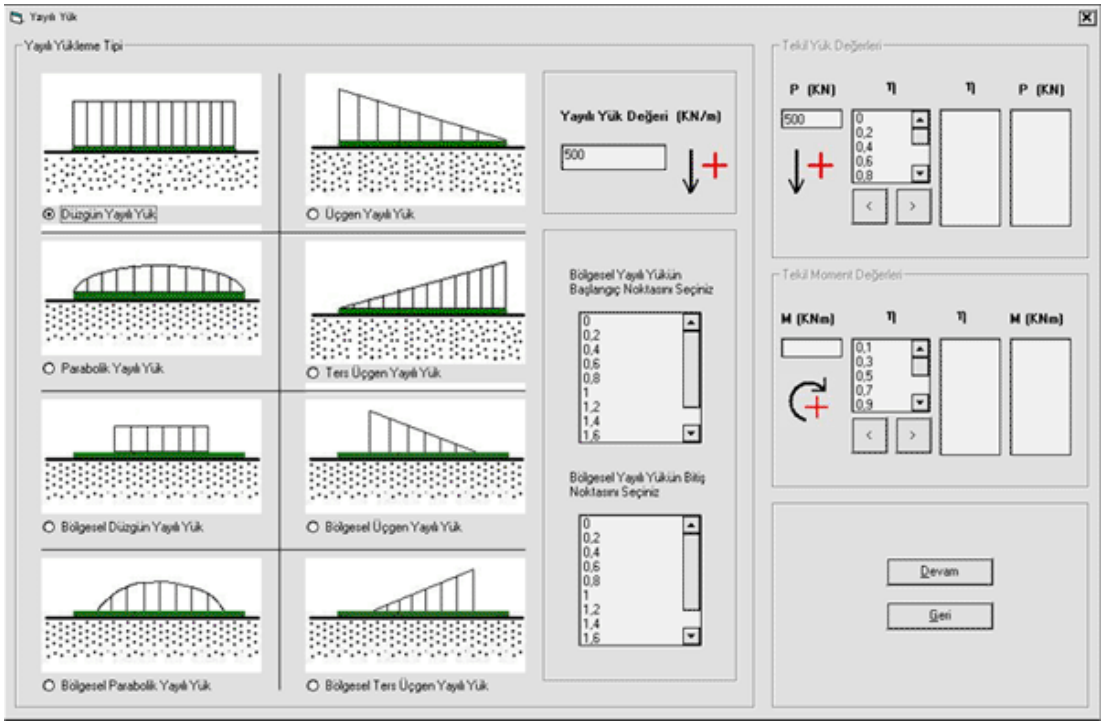
Şekil B.1 Program veri giriş formu



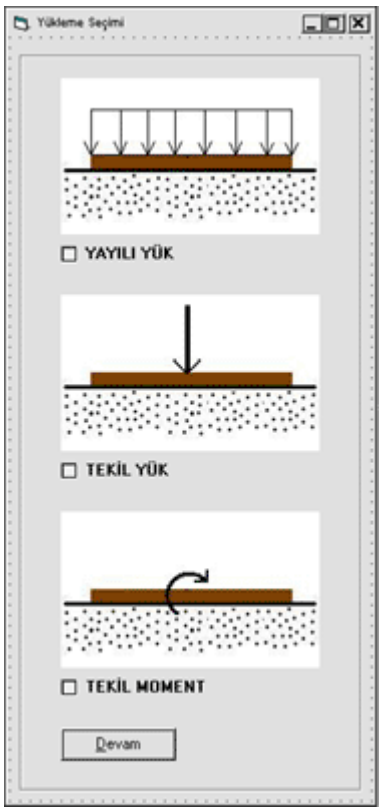
Şekil B.2 Program katsayılar matrisi formu



Şekil B.3 Program deplasman çıktıları Formu

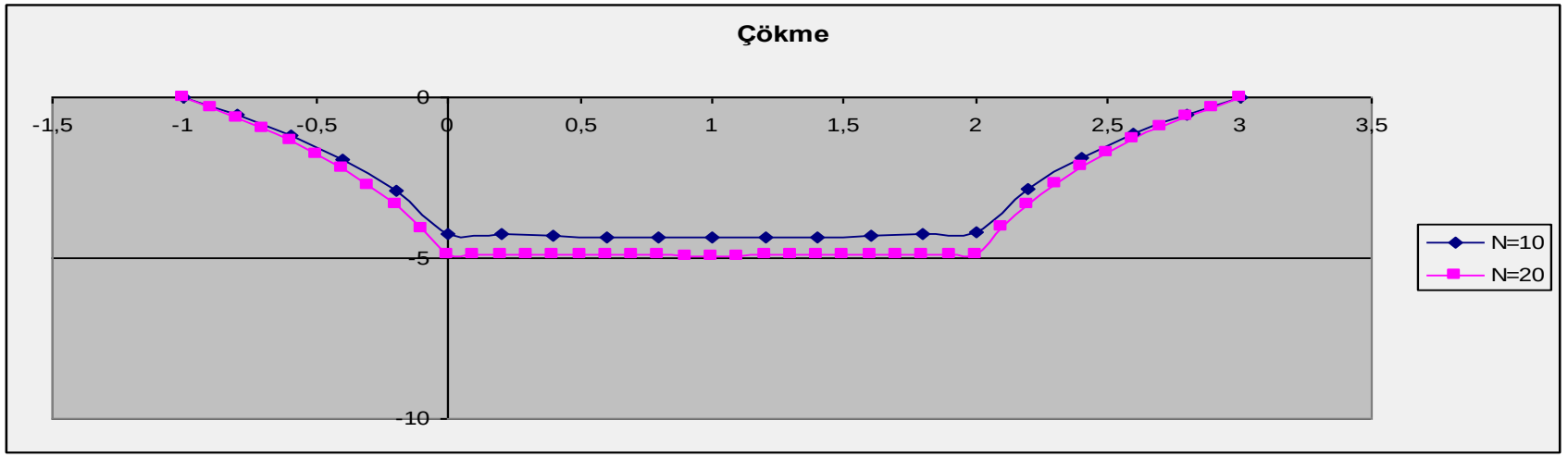


Şekil B.4 Program yayılı yük tipi ve büyüklüğü giriş formu

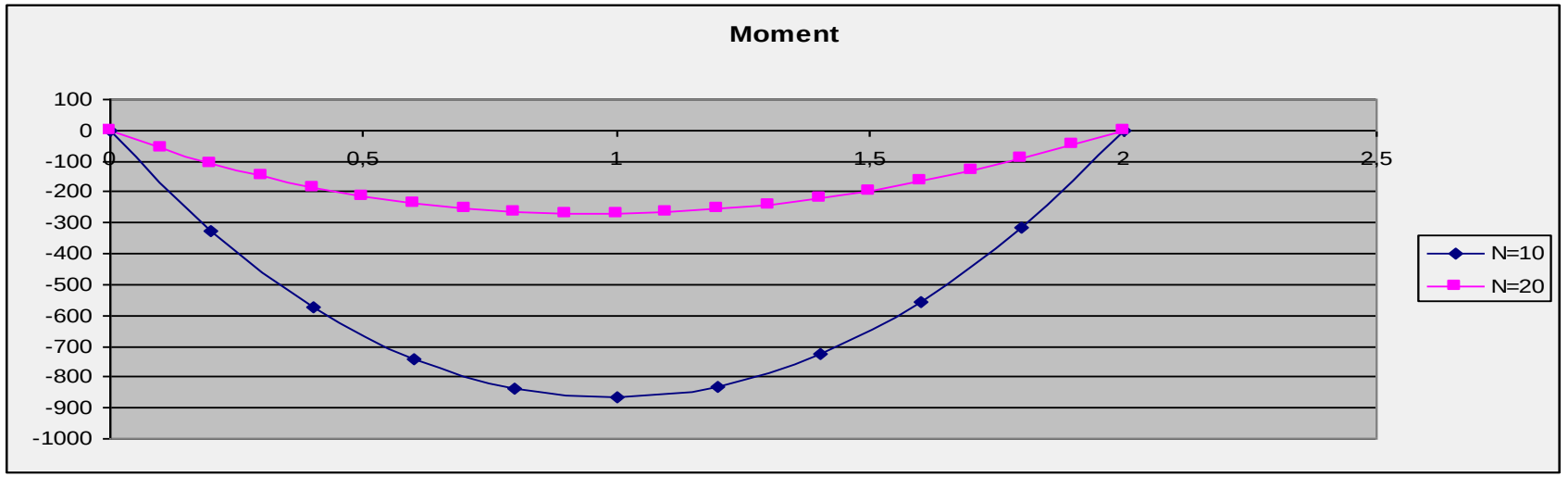


Şekil B.5 Program yükleme tipi seçimi formu

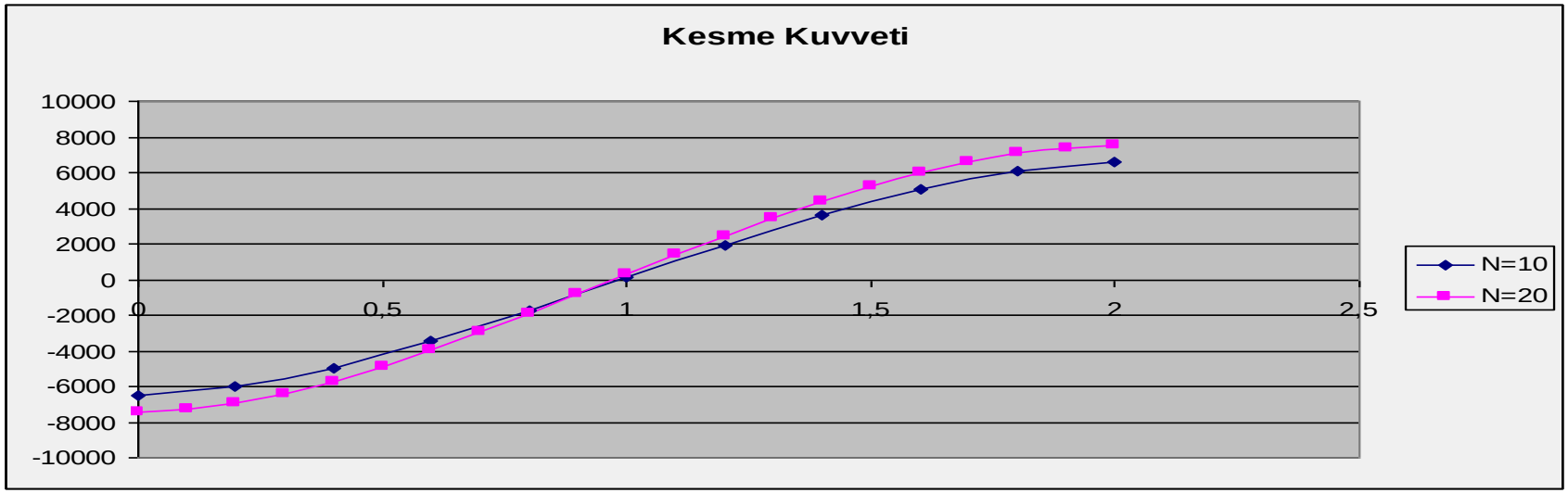
EK C



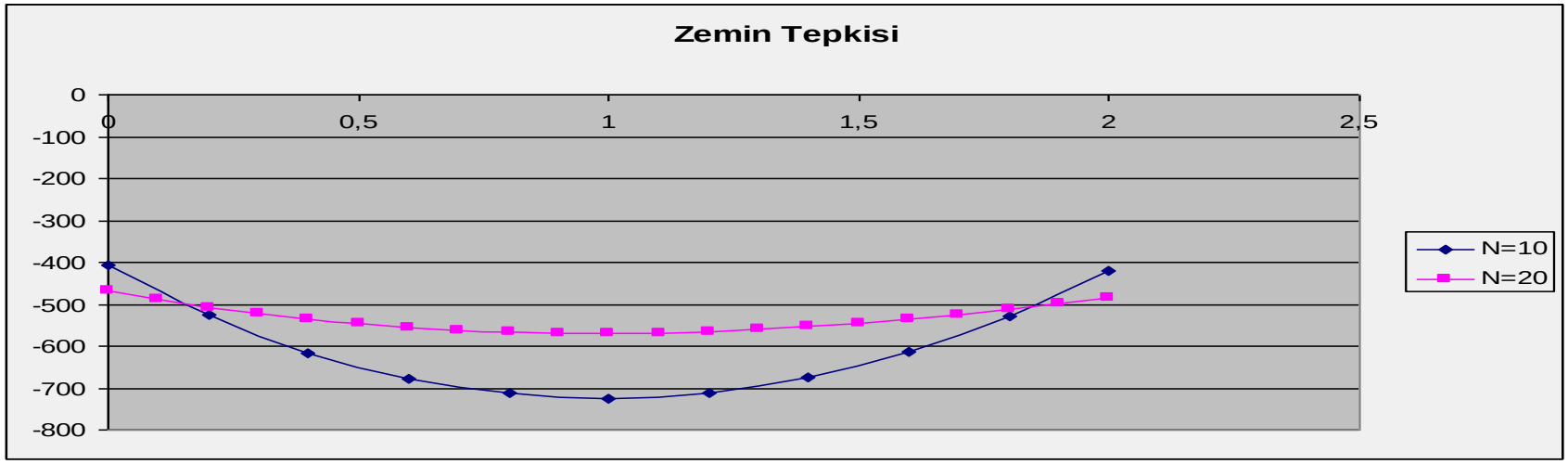
Şekil A.1 *q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği



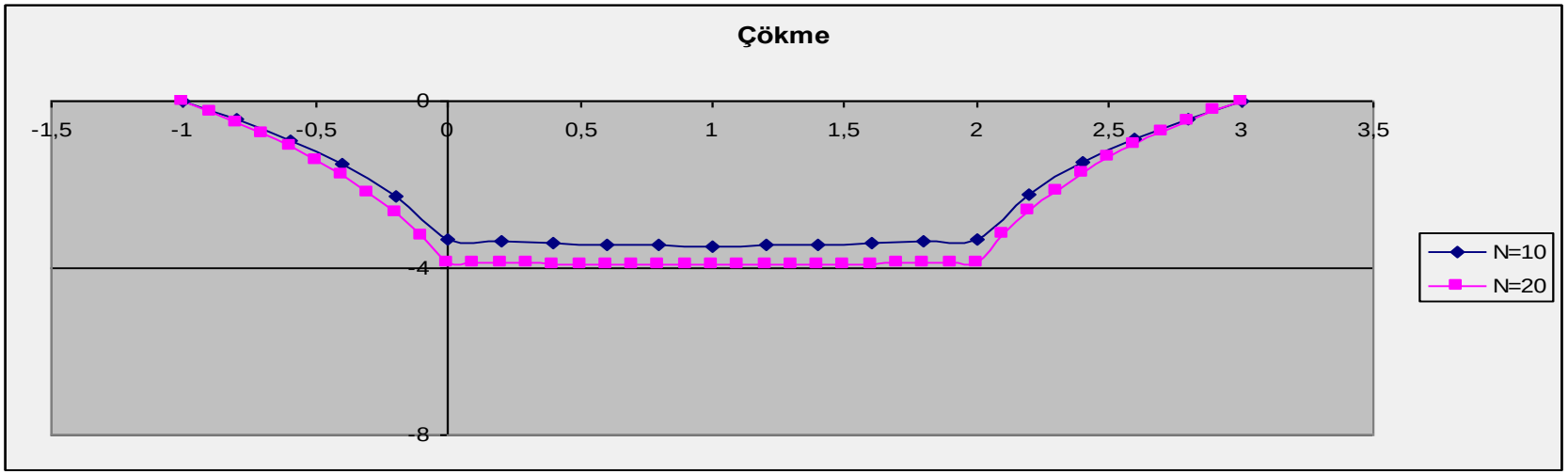
Şekil A.2 *q*=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği



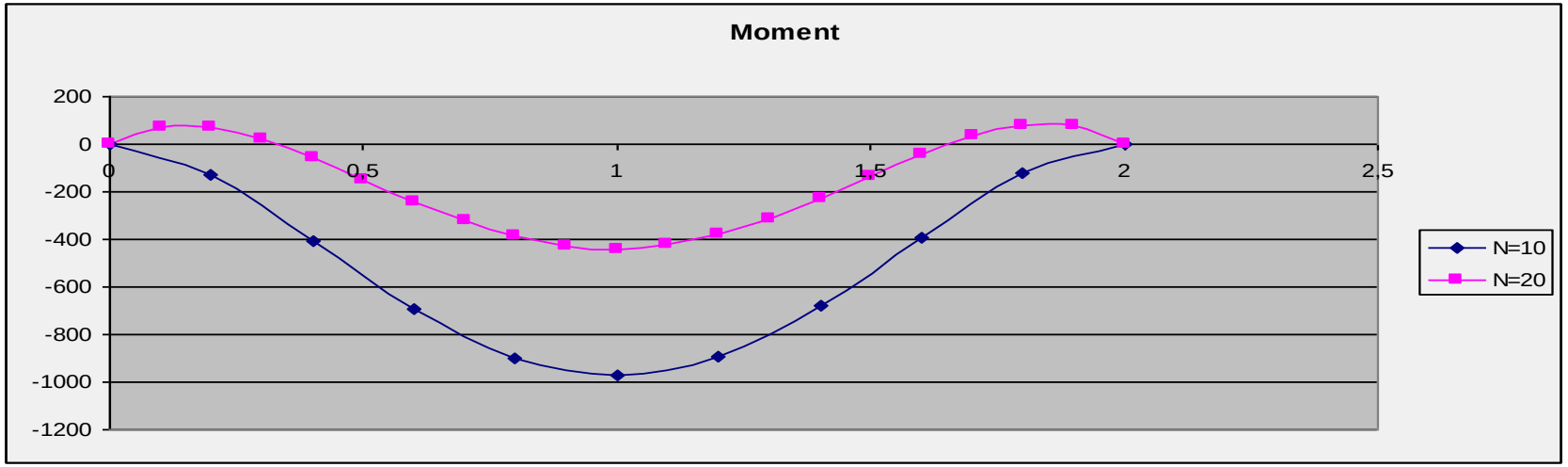
Şekil A.3 q=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği



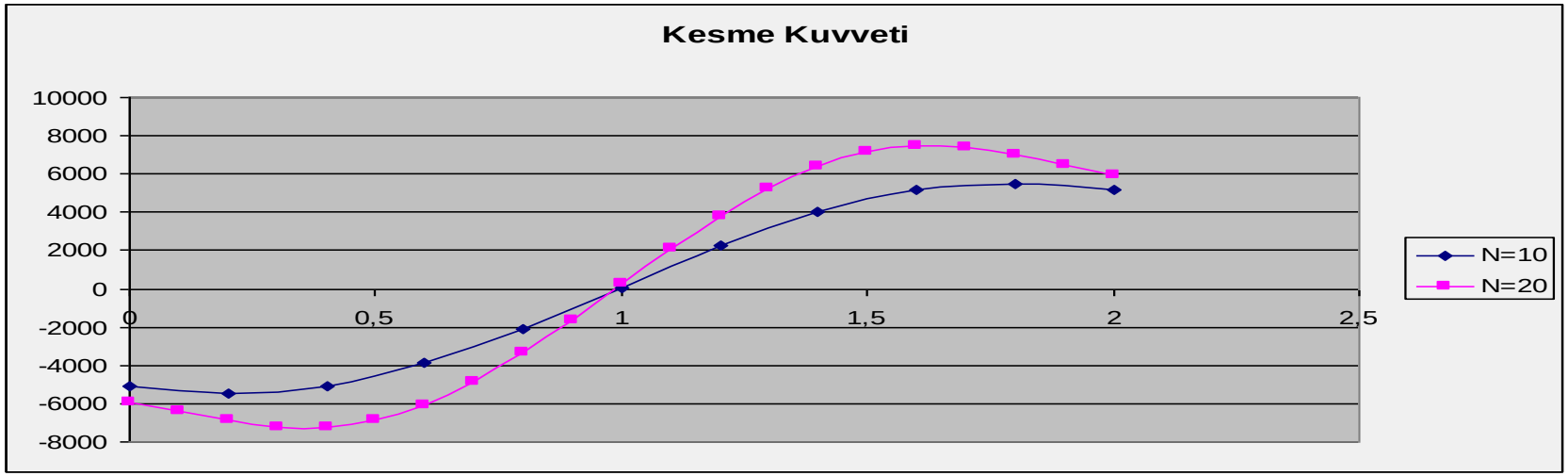
Şekil A.4 q=500KN/m Düzgün yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği



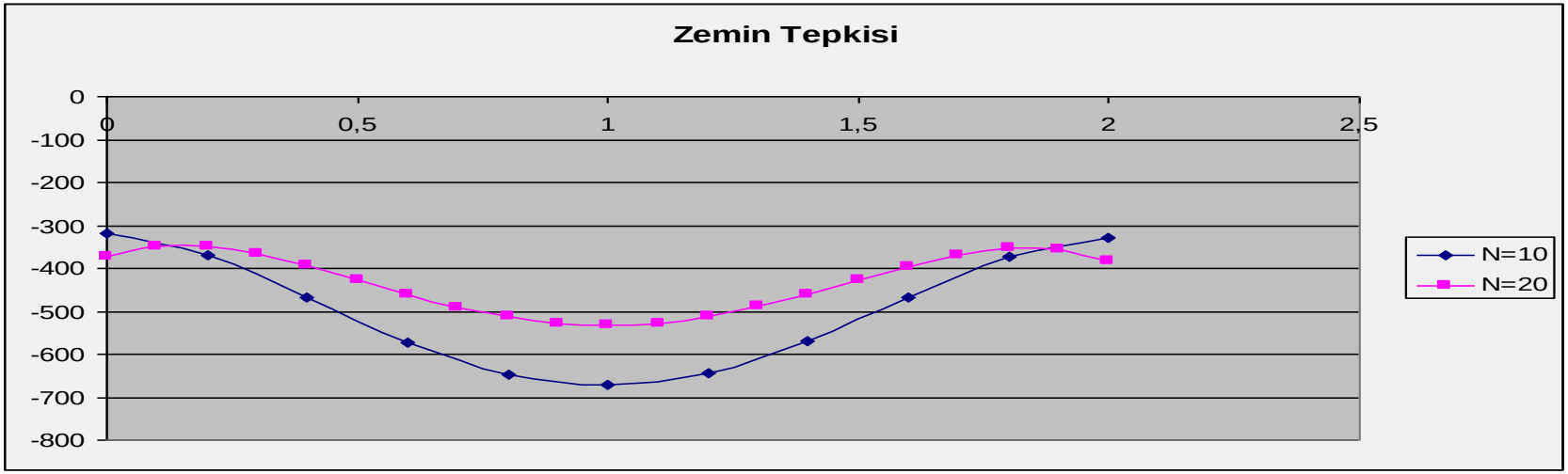
Şekil A.5 *q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği



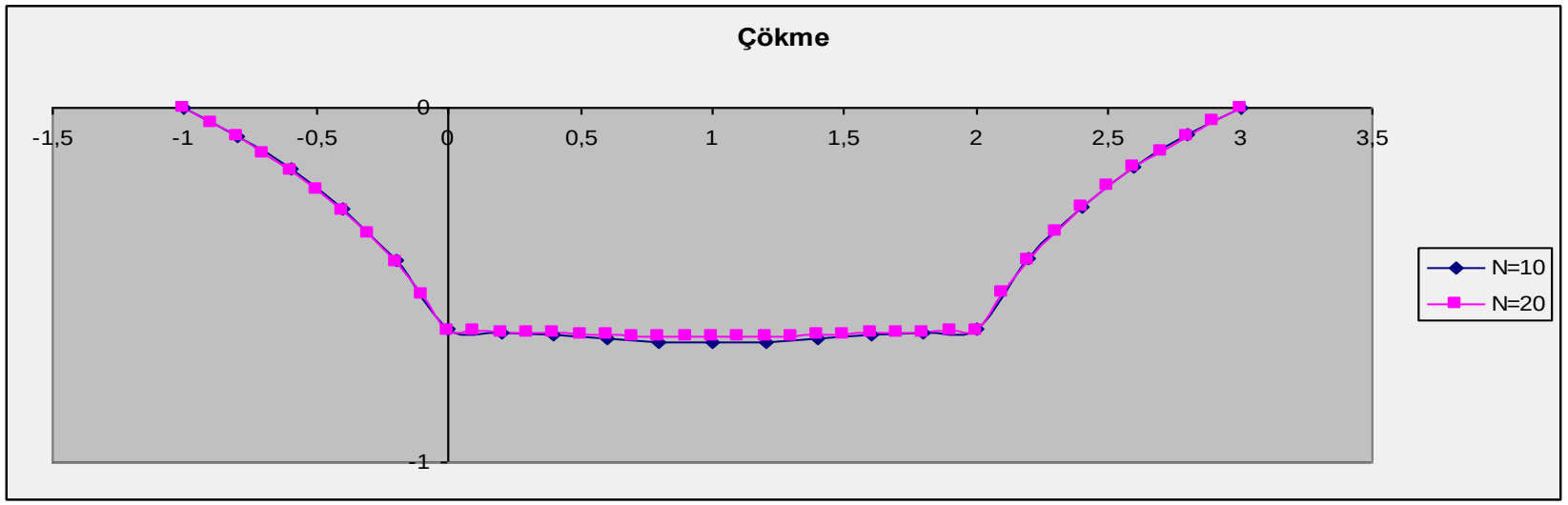
Şekil A.6 *q*=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği



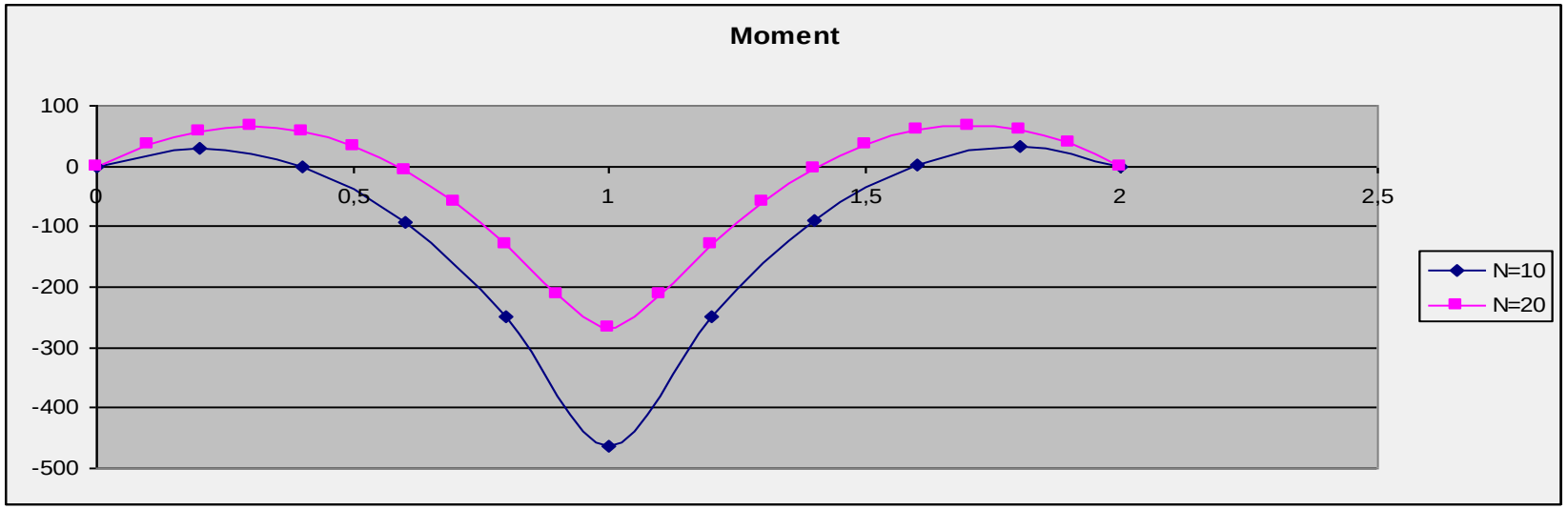
Şekil A.7 q=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği



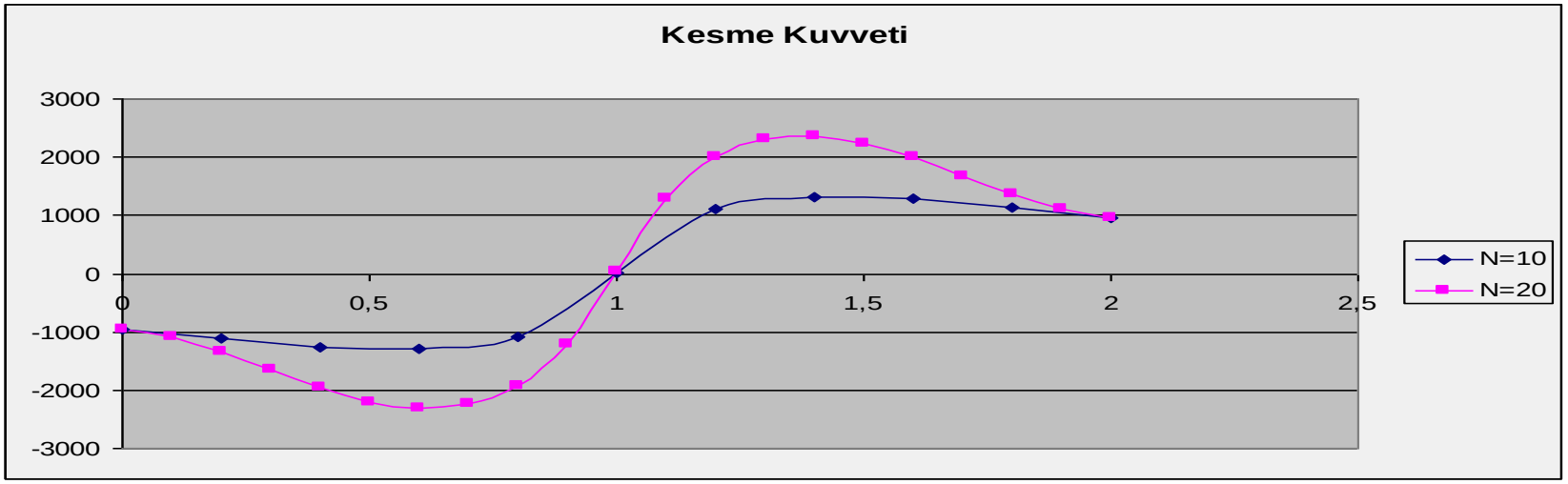
Şekil A.8 q=500KN/m Parabolik yayılı yük tipi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği



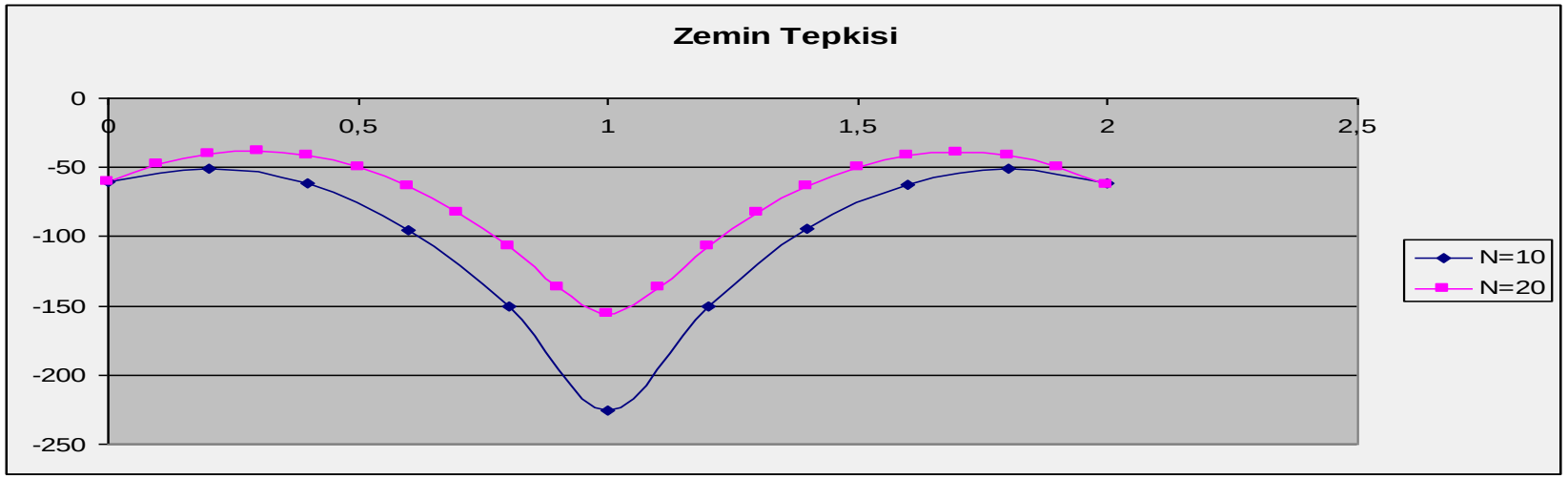
Şekil A.9 η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği



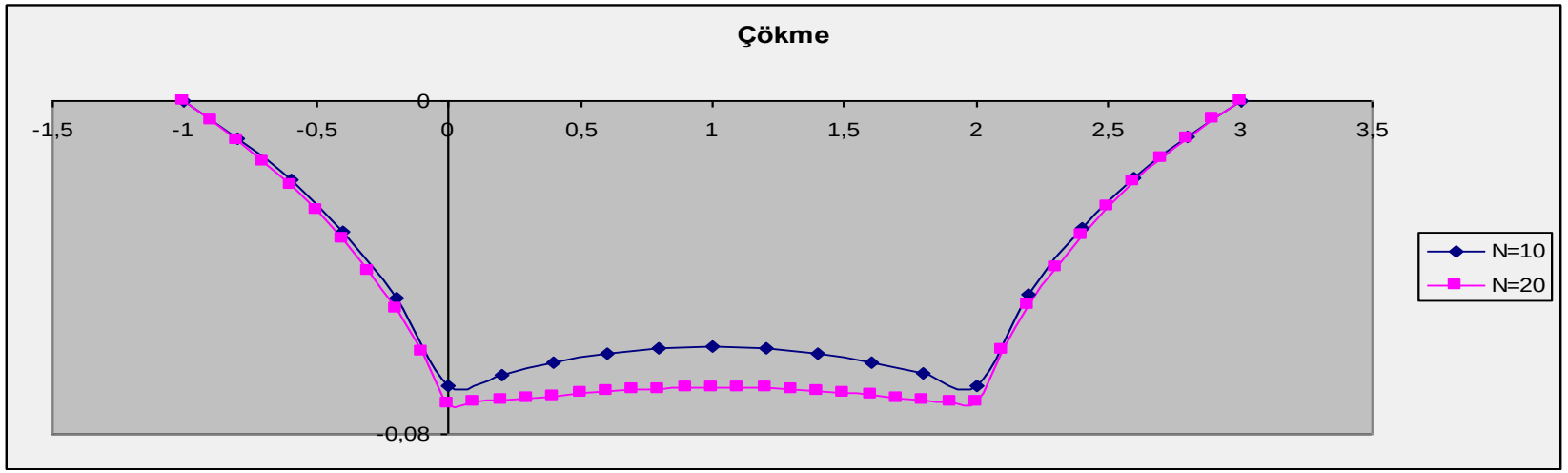
Şekil A.10 η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği



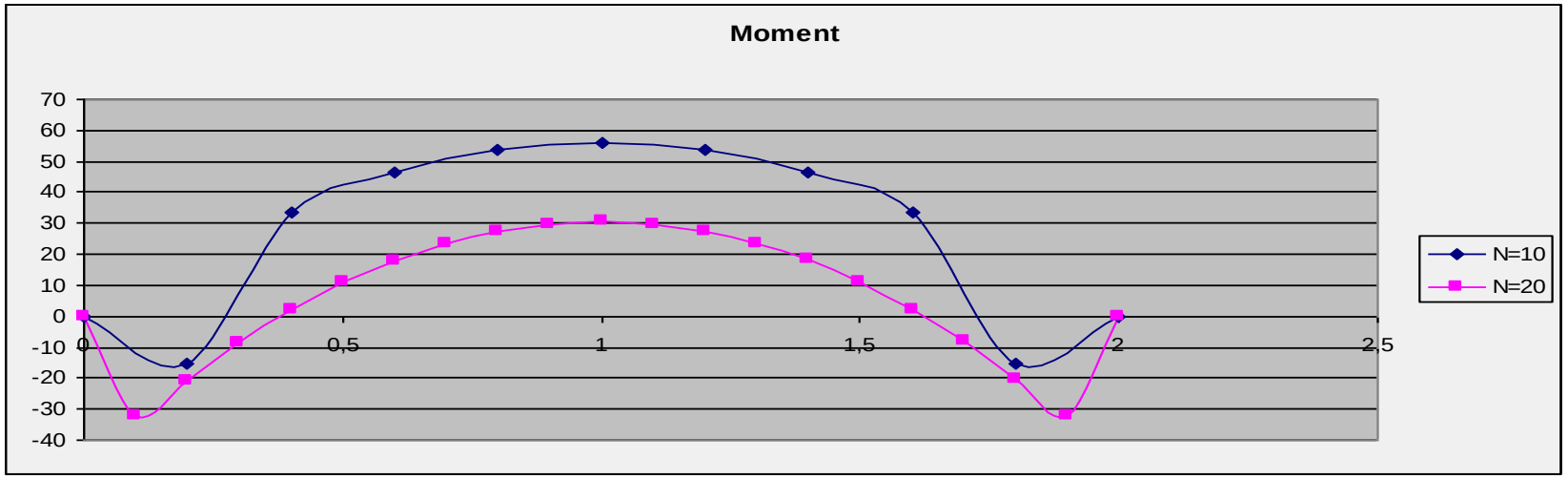
Şekil A.11 η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği



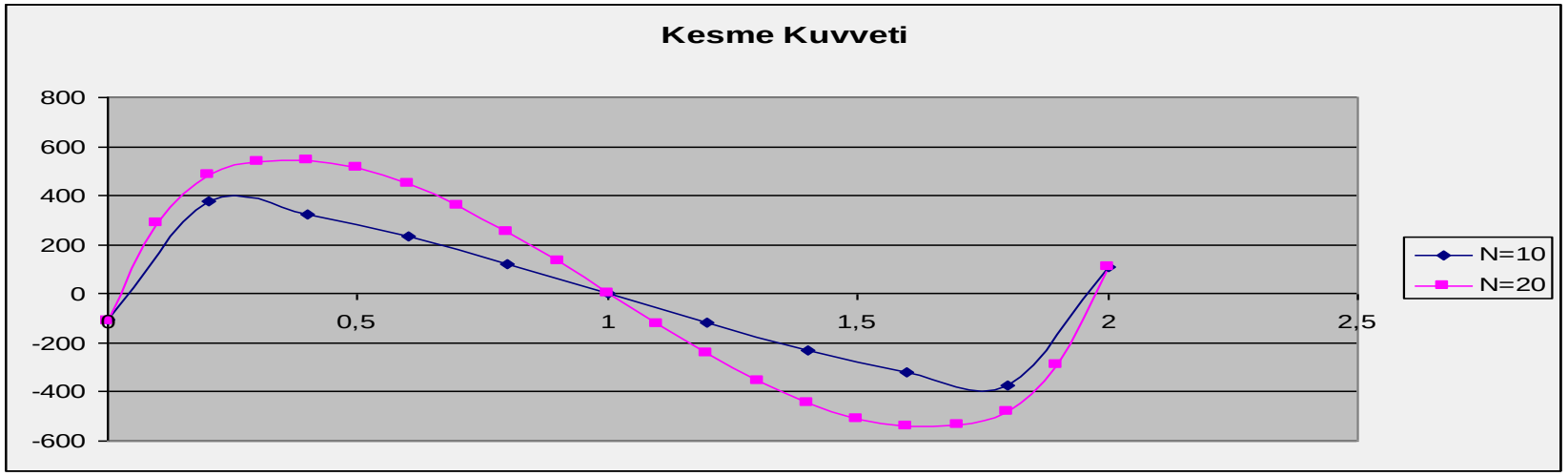
Şekil A.12 η=1 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği



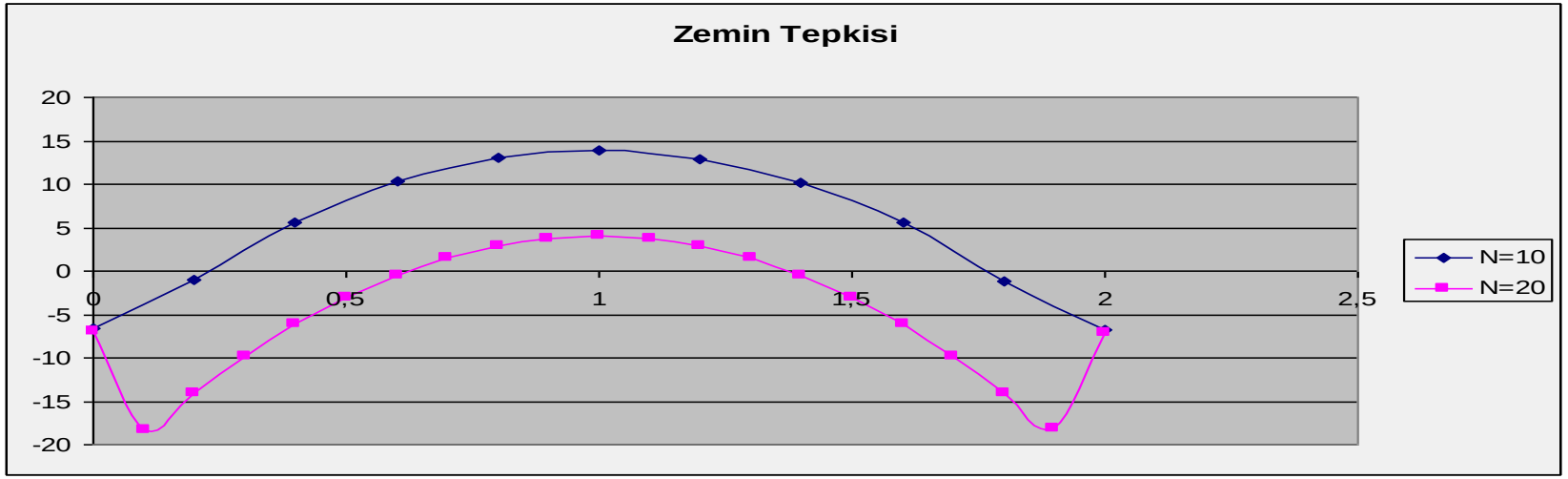
Şekil A.13 η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği



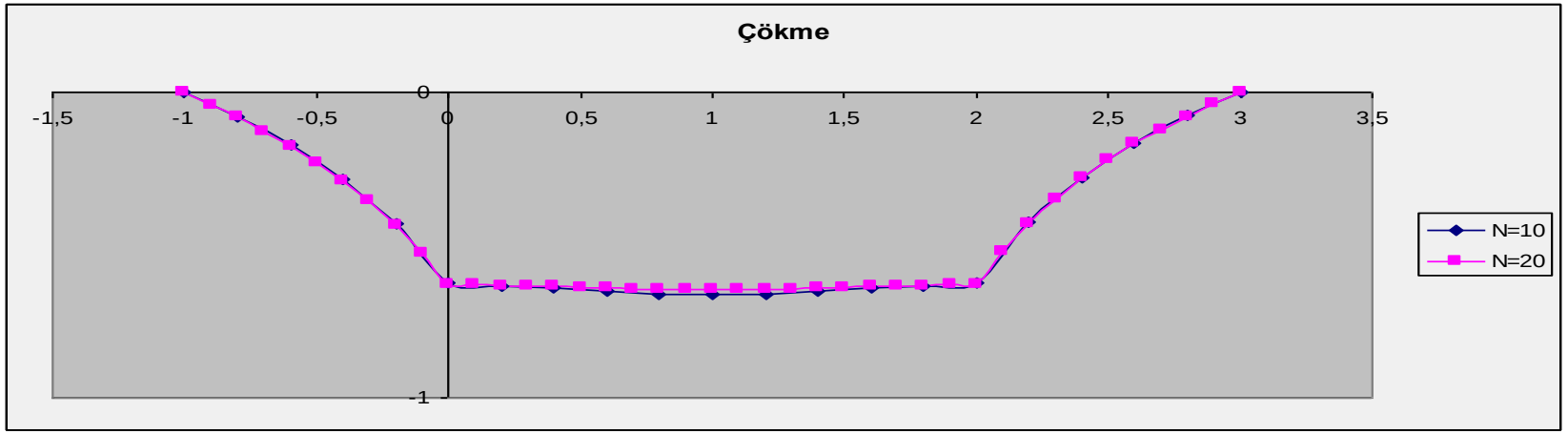
Şekil A.14 η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği



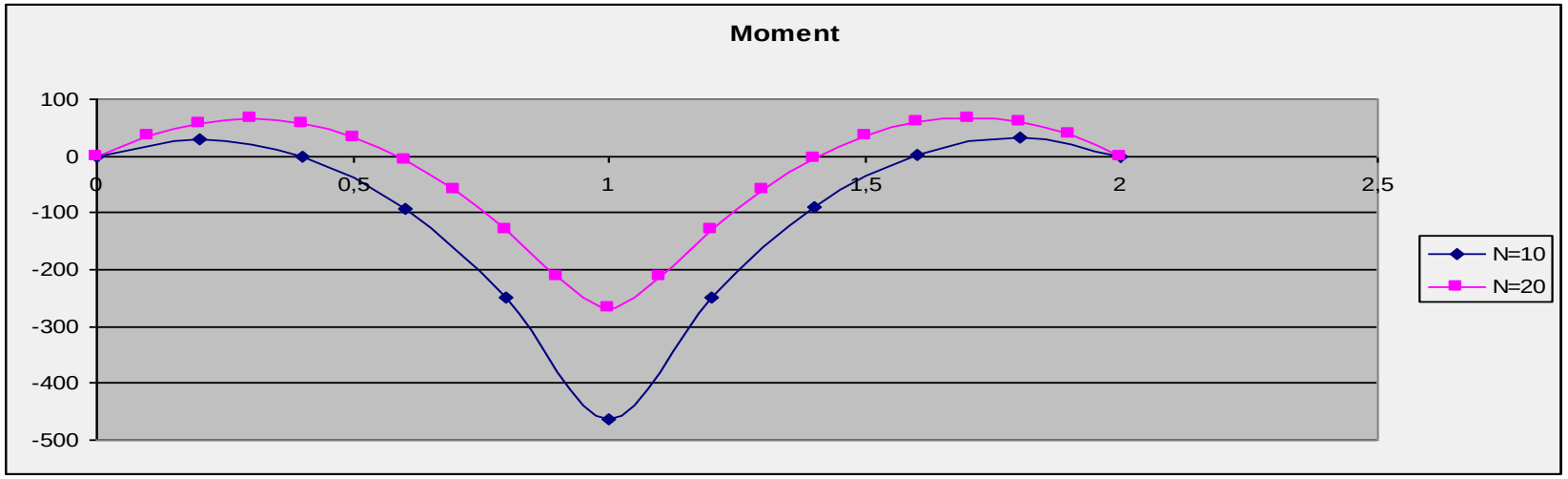
Şekil A.15 η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme kuvveti değerleri grafiği



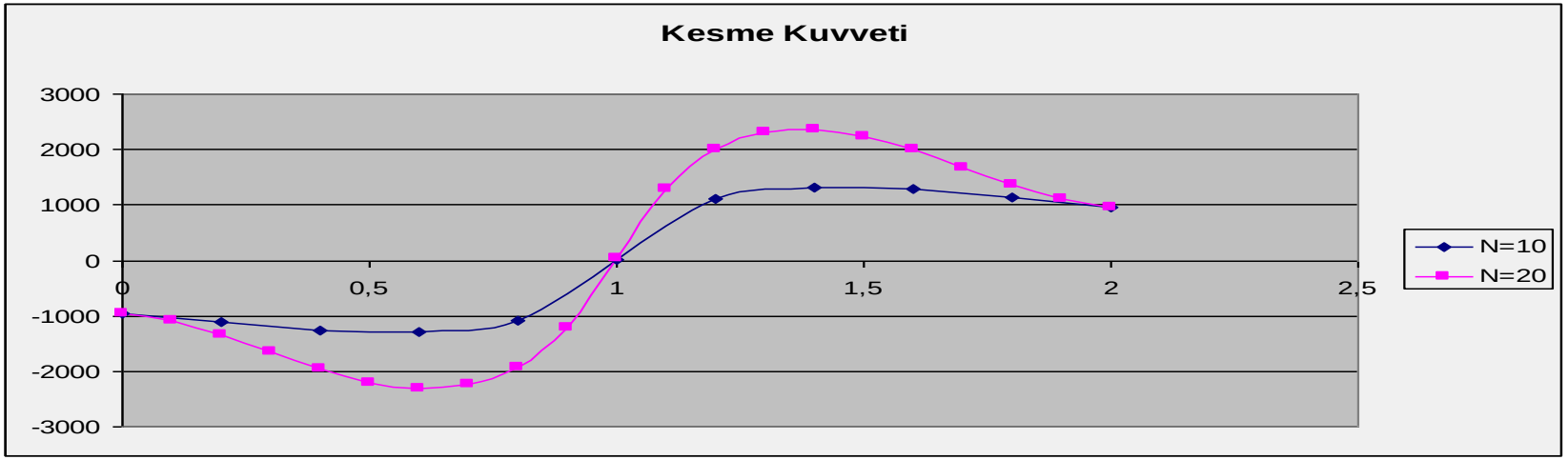
Şekil A.16 η=0 ve η=2 de P=500KN Tekil yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin tepkisi değerleri grafiği



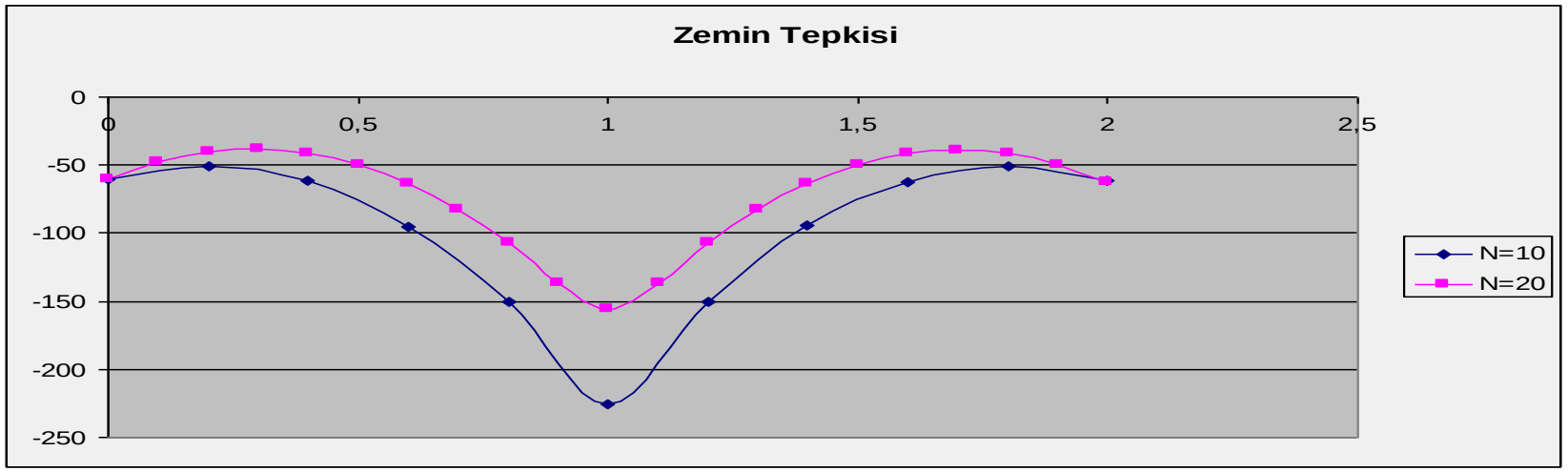
Şekil A.17 η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında çökme değerleri grafiği



Şekil A.18 η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında moment değerleri grafiği



Şekil A.19 η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında kesme k. değerleri grafiği



Şekil A.20 η=1 de *p*=1000KN *w*=15 olmak üzere *p*cos*wt* yüklemesi için N=10 ve N=20 durumlarında zemin t. değerleri grafiği

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Sansun' da doğdum. İlk ve ortaokulu Samsun'da okudum. 1998' de İzmir Bornova Anadolu Lisesi'nden mezun oldum. 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun oldum. Halen İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Programında Yüksek Lisans yapmaktayım.