TÜBİTAK

Gravitasyonel Dalgalar ile Çift Sistemlerin İncelenmesi

Program Kodu : 1001

Proje No : 113F097

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Kadri YAKUT

EYLÜL 2016
İZMİR


TÜBİTAK

Önsöz

Gravitasyonel dalgalar, kütlenin ivmeli hareketi nedeni ile uzay-zamanın bozulması sonucu yayılan dalgaları betimler. Bu dalgalar ışık hızında yayılır ve çok uzaklara kadar etkileşmeden yayılabilir. Doğadaki temel etlkileşimlerin en zayıfı olan çekimin etkisini ölçmek, diğer temel etkileşimlere göre oldukça karmaşıktır. Bu nedenle gravitasyonel dalgalara ilişkin gözlemler oldukça zordur. Buna rağmen teknolojideki gelişmeler ışığında çok hassas aletler geliştirilmiş ve astronomide önemli ve büyük bütçeli projeler hazırlanmıştır. Yer konuşlu LIGO, VIRGO, TAMA300, GEO 600 gibi gözlem projeleri ve uzay konuşlu LISA/eLISA ve DECIGO gibi projeler hayata geçirilmiştir. Gravitasyonel dalgaların varlığı Einstein'ın genel görelilik kuramının öngörülerinden biridir. Bu dalgalara ilişkin dolaylı gözlem çift nötron sistemi PSR 1914 +16 pulsar çifti R. Hulse ve J. Taylor tarafından gözlenmesi ile önem kazanmıştır. Özellikle bu tarihten sonra bu alandaki çalışmalar önem kazanmıştır. 14 Eylül 2015 tarihinde LIGO grubu ilk kez gravitasyonel dalga gözlemlerini doğrudan tespit etmiştir. Yapılan gözlemler Şubat 2016 tarihinde kamoyu ile paylaşılmış ve dalgaların kaynağının çift kara delik sisteminin birleşme öncesi ve anına ait olduğu bulunmuştur. Aynı grup daha sonra yeni bir çift kara delik brileşme öncesini daha duyurmuşlardır.

Gravitasyonel dalgalar yeni gözlemler ile hem gözlemsel hem de kuramsal bağlamda birçok çalışmaya konu olmuş ve bu alandaki çalışmalar ivme kazanmıştır. Çekim dalgalarına yönelik çalışmalarımız için Ege Üniversitesi'nde bir çalışma grubu kurulmuş ve gerekli alt yapı sağlanmıştır. Daha sonra bir proje kapsamında hazırlanmış ve TÜBİTAK tarafından destek görmüştür. Proje süresi tamamlanmış fakat kazanılan deneyim ve yetiştirilen genç araştırmacılar ile çalışmalar devam etmektedir.


TÜBİTAK

İçindekiler

Önsöz
İçindekiler
Tablo ve şekiller dizini
Özet
Abstract

1. Giriş 1
2. Literatür özeti 2
3. Gereç ve Yöntem 3
3.1 Çift sistem durumunda oluşabilecek gravitasyonel dalgalar 3
3.2 Çoklu sistem durumu 13
3.3 Çerçeve sürüklenmesi (Lense-Thirring) Etkisi 14
3.4 Kara delik ve nötron yıldızı bileşenli çift dizgelerinde gravitasyonel ışıma ile açısal momentum kaybı 20
4. Bulgular, Sonuç ve tartışmalar 21
5. Kaynaklar 23

Tablo ve şekil dizini

Şekil 1. LIGO'nun H1 ve L1 dedektörlerinden elde edilen gravitasyonel dalga gözlemleri. Orta panelde gözlemlere karşılık gelen nümerik yaklaşımları göstermektedir. Frekans zamanla artması iki çiftin birleşmesi olarak yorumlanmaktadır (detaylar için bknz. Abbott et al. 2016).

Şekil 2. Bu çalışmada elde edilen Denklem 75 ile gösterilen denklemlerin nümerik çözümü (Mavi renk) ve önceki çalışmada elde edilen çalışma ile karşılaştırılması.

Şekil 3. Şekil 1 deki gibi fakat farklı **a** değerleri için.

Şekil 4. Çekim dalgaları ile açısal momentum kaybının x-ışın çiftleri ile ilgili gösterimi. Sol panel nötron yıldızı bileşenli çift sistemleri ve sağ panelde kara delik bileşenli çift dizgeleri göstermektedir. Çekim dalgalarının Hubble zaman ölçeğinden az olan az sayıda sistem bulunmaktadır.

Şekil 5. Beyaz cüce bileşenli çift sistemlerin evrimi. Renklendirme çift sistemlerin oluşturacakları çekim dalgası genliğine göre yapılmış ve logaritmik olarak bar da gösterilmiştir (detaylar için bknz. Kalomeni et al. 2016)

Özet

Astronomi alanında yapılan gözlemsel ve kuramsal çalışmalar bize evrenin maddece çok azını gözlemleyebildiğimizi göstermiştir. Baryonik maddeden oluşan tüm yıldızları, yıldızlararası ortamı ve galaksiler dışında kalan madde evrenin çok önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Öngörüsü yüz yıl önce yapılan çekim dalgaları Eylül 2015 tarihinde ilk kez doğrudan tespit edilmiş ve bu durum gözlemsel astronomide yeni bir çığır açmıştır. Bu gözlemler ile artık evrende optik, UV, IR, X-ışın, vb. dalgaboylarından farklı olarak kütleli cisimlerin uzay-zamanı bozarak/tedirgin ederek oluşturdukları bozulmaları ölçme olanağı vermiştir. Gravitasyonel dalgalar diğer dalgaboylarında gözlenmesi olanaksız olan bir çok fiziksel süreçi anlamamızı sağlar. Bu dalgaları çalışarak hem temel kuvvetlerden biri olan çekim kuvvetini daha iyi anlamamız hem de evrende bulunan karanlıkta kalmış birçok problemin/noktaların aydınlatılması beklenmektedir.

Nötron yıldızı (NY) ve kara delik (KD) çift dizgelerinin tespiti, çok büyük kütleli kara delikler, süpernova aşaması, yıldız birleşmeleri/çarpışmaları, evrenin oluşumu sırasında olası ilksel/ata gravitasyonel dalgaların ölçümü ile başlangıç koşulları hakkında bilgi edinme gibi birçok önemli temel konuları kapsamaktadır. Bu proje kapsamında dejenere ve dejenere olmayan relativistik çift sistemlerin (Y+Y, KD+Y, NY+Y, NY+NY, NY+KD, KD+KD, NY+BC, KD+BC, vb.) relativistik yörüngeleri ve birleşme/çarpışma süreçlerini; dejenere olmayan dönemli yıldızların oluşturabilecekleri gravitasyonel dalga genliklerini kuramsal olarak hesaplama, sonuçların nümerik çözülmesi ve olası çekim dalgası gözlem cihazlarının duyarlılıkları ile test edilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca galaksimizde bulunan yıldızlar için yıldız popülasyonu modelleri yaparak ne tür sistemler hangi evrim yollarından geçerek ileride bu tür çift dejenere sistem olabilecekleri ve bu sistemlerin başta LIGO olmak üzere ne tür çekim dalgası gözlemlerinin yapılmasının mümkün olabileceği tartışılmıştır.

Bu proje çekim dalgaları gözlemlerinden yaklaşık 8 yıl önce hazırlanmış, gerekli altyapılar tamamlanmış ve 3 yıl önce TÜBİTAK'a proje olarak önerilmiştir. Bu proje gravitasyonel dalga astronomisinde ilerlemeyi, yeni çalışmalar ortaya koymayı ve bu yeni fizik alanında genç araştırmacılar kazandırmayı hedeflemektedir. Bu bağlamda proje kapsamnında; "Gravitasyonel Dalga Kayanakları Olarak Çift Sistemler", "Kara Delikler ve Nötron Yıldızların Birleşmesi", "Kara Deliklerde Enerji Taşınımı", "Kara Deliklerin Birleşme Anı ve Gravitasyonel Dalgaların Modellenmesi", "Çift Kara Delik Sistemlerinde Gravitasyonel Dalgalar ve Çerçeve Sürüklenmesi", "Kara Delik Bileşenli Çift Sistemler", "Üçlü Sistemlerde Gravitasyonel Dalgalar" ve "Nötron Yıldızı Bileşenli Çift Sistemler" gibi lisansüstü tezler yürütülmüştür. Proje kapsamında ayrıca ulusal/uluslararası toplantılarda bildiriler sunulmuş ve yayın çalışmaları yapılmış/yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gravitasyonel dalgalar, kara delikler, nötron ve kara delik çiftleri, çekim

Abstract

Observational and theoretical studies in astronomy show a very small portion of the matter in the Universe can be observed. The matter beyond the stars that are in baryonic form, the interstellar medium and galaxies form the important part of the Universe. Gravitational waves, that were predicted a century ago, have been directly detected for the first time in September 2015. Direct detection of gravitational waves is one of the corner stone in observational astronomy. Observations of gravitational waves, unlike wavelength-dependent observations in UV, IR, X-ray etc., provide a way to measure the distortion/perturbation of the space-time produced by a massive objects. Gravitational waves provide a different way to understand many physical processes that are imposible to observe in the optical and/or the other windows of the electromagnetic spectrum. Studying gravitational waves it is expected both to understand better one of the fundamental force, the gravitational force, and to enlight some of the problems/points about the Universe.

Gravitational wave astronomy covers many crucial basic studies like detection of binary systems with neutron star (NS) and black hole (BH), massive black holes, supernova phase of evolution, merger/collision of stars, possible ancestor of gravitational wave sources that were formed during the formation of the Universe. This project aims to study merge/collision processes of both degenerate and non-degenerate relativistic binary systems (S+S, S+BH, NS+S, NS + NS, NS + BH, BH + BH, NS+WD, BH+WD, etc.), theoretical calculations of the gravitational wave amplitudes and numerical simulations that can be built by massive short period non evolved stars, and compare the results with the sensitivity of possible gravitational wave observatories. Additionally, stellar population models of stars in our Galaxy has been made to understand the evolutionary stages of stars that will evolve as double degenerate binary stars and it has been discussed especially for LIGO what kind of gravitational wave observations is possible to observe these systems.

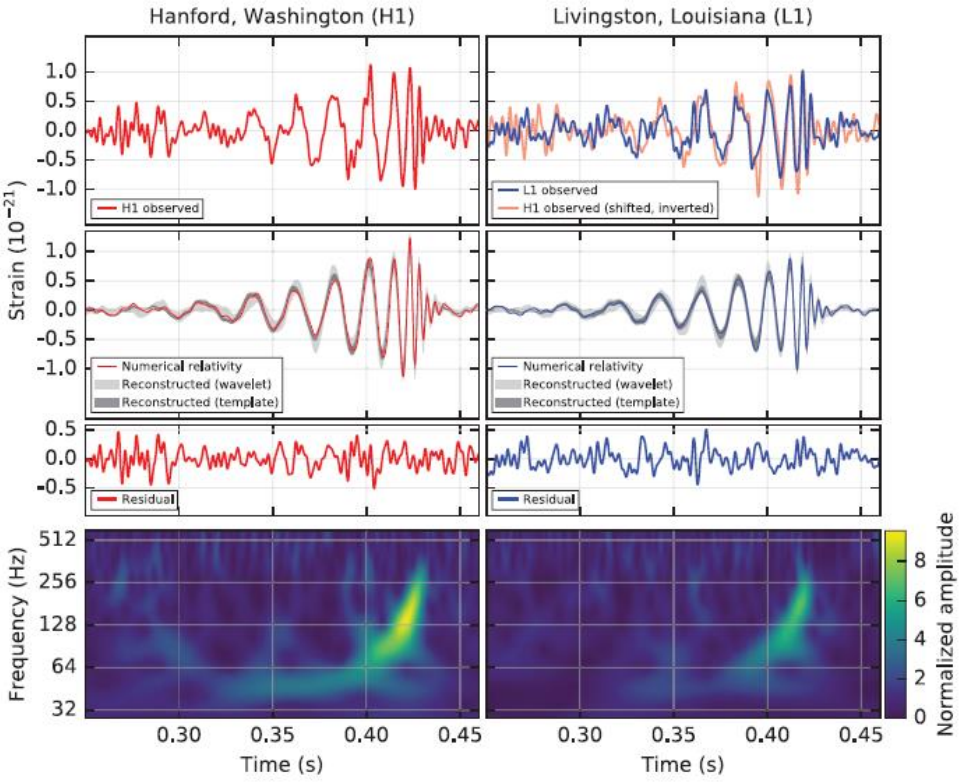
The infrastructure of this project has been completed nearly 8 years before the observations of gravitational waves and has been proposed to TÜBİTAK 3 years ago as a project. This Project aims to advance in gravitational wave astronomy, produce new studies in this field, and educate young scientists in this new field of physics. In this context, graduate thesis entitled “Binary systems As Sources of Gravitational Waves”, “Merging of Black Holes and Neutron Stars”, “Energy Transfer in Black Holes”, “Merging Moment of Black Holes and Modelling Gravitational Waves”, “Gravitational Waves in Double Black Hole Systems and Frame Dragging”, “Binary Systems with Black Holes”, “Gravitaional Waves in Triple Systems”, and “Binary Systems with Neutron Stars” has been performed. In addition, in national and international meetings these studies were presented and we are preparing part of our study for publication.

Keywords: Gravitational waves, black holes, neutron and black hole binaries, gravitation

1. Giriş

Michell (1784) ve Laplace (1796) Newton kütleçekimi kullanarak, bir yıldızın yeteri kadar sıkışabileceğini ve yıldızın yüzeyinden kurtulma hızının ışık hızı mertebesinde olması gerektiği belirtilmiştir. Bu çalışmalar kara deliklere dolayısı ile relativistik yıldızlara ilişkin ilk çalışmalardır. 1960-1970 yılları arasında gözlemsel olarak çok farklı astrofiziksel süreç gözlenmiş ve bu süreçlerin çoğu çekim alanların varlığını bize işaret etmektedir. Hulse ve Taylor (1975) tarafından iki pulsardan oluşan bir çift sisteminin yörünge döneminin değişimi ile gravitasyonel ışınımın dolaylı olarak tespit edilmiştir. O tarihlerden günümüze dek bu gözlemler artmış çok sayıda dolaylı gözlemler ve deliller ortaya konmuştur.

Projenin tamamlanmasına yakın zamanda çekim dalgaları LIGO grubunun iki farklı alıcısı tarafından doğrudan gözlendi. Gözlemler 2015 yılında yapıldı ve GW150914 çift kara delik sistemine ilişkin elde edilen sonuçlar 2016 yılında duyuruldu (Abatt et al. 2016). LIGO ekibi tarafından elde edilen gravitasyonel dalga genliğinin değişimi Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. LIGO'nun H1 ve L1 dedektörlerinden elde edilen gravitasyonel dalga gözlemleri. Orta panelde gözlemlere karşılık gelen nümerik yaklaşımları göstermektedir. Frekans zamanla artması iki çiftin birleşmesi olarak yorumlanmaktadır (detaylar için bknz. Abbott et al. 2016).

LIGO alıcısının duyarlılığı LISA alıcılarına göre oldukça farklıdır. Özellikle çift beyaz cüce veya nötron çiftleri gibi birleşme öncesi aşamaları veya AM CVn gibi sistemleri LISA ile çok daha rahat gözleyebileceğiz. Galaksimizdeki en iyi gravitasyonel dalga üreten kaynaklar sıkışık gök cisimleridir. Bunun dışında evrene baktığımızda çok farklı olay, cisim ve sistemleri gravitasyonel dalga kaynağı olarak gösterebiliriz. Bunlar arasında çift yıldızlar, süpernovalar, sıkışık çiftler, çok büyük kütleli kara delikler, kısa gamma ışın patlamaları, çiftlerin birleşme anları, çok farklı kütle oranına sahip sistemler (EMRIs), faz geçişleri ve CMB sayılabilir.

2. Literatür özeti

Gravitasyonel dalgalar Einstein'ın genel görelilik kuramının doğal sonuçlarından birisidir (A. Einstein, 1916, 1918). Gravitasyonel dalgalar özellikle teknik sınırlamalardan dolayı 2015 yılına dek doğrudan gözlenememiştir. Bununla beraber, dolaylı olarak bir çok gözlemsel çalışması vardır. İlk dolaylı kanıt PSR 1913+16 çift atarcasının dönem değişimi gösteren gözlemleri ile literatüre girmiştir (Hulse ve Taylor 1974, 1975a, 1975b). Gravitasyonel dalgalar, uzaklıkları nedeni ile elektromanyetik (EM) ışınım yolu ile elde edemediğimiz veya hiç EM ışınım salmayan gök cisimleri (karadelikler vb.) hakkında çok önemli bilgiler edinebilmemize imkan sağlayabilecektir. Bu dalgalar farklı kaynaklardan yayılır (örneğin çift kara delikler, büyük kütleli karadelikler, çift nötron sistemleri, süpernovalar, vb.). Gözlenebilirlilik açısından sıkışık çift sistemler bu anlamda çok önemli kaynaklardır. Sıkışık çift sistemler nötron yıldızı-nötron yıldızı (NY-NY), karadelik-karadelik (KD-KD) ve nötron yıldızı-karadelik (NY-KD) bileşenlidirler. Yıldızların evrimini dikkate aldığımızda bu tür sistemlerin evrende sayıca fazla olması, büyük kütleli ve kısa yörünge dönemlerine sahip olmaları onların beklenilenden çok daha önemli/etkili çekimsel dalga kaynakları olduklarını göstermektedir.

Gravitasyonel dalgaların gözlenmesi için birçok önemli proje devreye sokulmuştur. Gravitasyonel dalgaların tespiti interferometre yöntemi ile tasarlanan alıcılar ile olmaktadır. Böylesi gözlem araçlarına sahip gözlemevleri arasında, yer konuşlu (LIGO (Abramovici ve ark.; Abbott ve ark.) -ABD, GEO600 - İngiltere/Almanya, VIRGO - Fransa/İtalya, ACIGA – Avustralya, TAMA300 Japonya) ve yakın gelecekte gözlemlere başlayacak olan uzay konuşlu (LISA/eLISA - NASA/ESA) gözlemevleri bulunmaktadır. Çekim dalagalarının ilk doğrudan gözleminin çift bir kara delik birleşmesinine yönelik olan çalışması Abatt et al. (2016) ile duyurulmuş ve bu andan itibaren bu alandaki gözlemsel ve kuramsal çalışmalar hız kazanmıştır. Bu alandaki tüm çaba evreni daha iyi anlamamız ve dört temel etkileşimden biri olan çekim hakkında daha fazla bilgi edinmek içindir.

Bir çift yıldız sisteminden açısal momentum taşınımı, şu ana kadar gözlenen çift dejenere sistemleri ve kara delik çiftleri ve çiftlerin yaratabilecekleri tahmini gravitasyonel dalga genlikleri daha önce proje yürütücüsünün de içinde bulunduğu birkaç çalışmada incelenmiştir. Bu çalışmalar "Angular Momentum Loss by Magnetic Braking and Gravitational Radiation in Relativistic Binary Stars" (Yakut, K.; Kalomeni, B.; Tout, C. A., 2008); "Black Holes in Binary Systems" (Yakut, 2010); "Double Degenerate Binary Systems" (Yakut, 2011); "Binary Systems As Gravitational Wave Sources" (Köse & Yakut, 2012) şeklinde olup bu çalışmalar özellikle bu tür bir proje için ön çalışma ve hazırlık kısımlarını oluşturmaktadır.

Postnov ve Yungelson (2006) "The Evolution of Compact Binary Star Systems" başlıklı *review* çalışmaları ile bu sistemlerin astrofizikteki önemini ve ileride gözlemler başladığında ne tür sistemlerin gözlenebilir aralıkta olduklarını ortaya koymuşlardır. Bunu yaparken de basitleştirilmiş karmaşık olmayan denklemleri kullanarak tahminde bulunmuşlardır. Campanelli ve ark. (2007) farklı bir metod ile kara delik birleşme süreçlerini simülasyonunu yapmışlar ve farklı spinlerde farklı olasılıkları tartışmışlardır. Shibata ve Taniguchi (2006) nötron çifti birleşme sürecinin kara delik oluşum durumunu irdelemişlerdir. Bunlara ek olarak çok sayıda çalışma yayınlanmış ve gravitasyonel dalga fiziği ilerlemeler göstermiştir. Tüm bu çalışmalar proje çalışmalarının kaynaklarını oluşturmuştur.

3. Gereç ve Yöntem

3.1 Çift sistem durumunda oluşabilecek gravitasyonel dalgalar

Genel Görelilik Kuramı ile ilgili yapılan çalışmalar ışığın sapıncı, zaman genişlemesi, gravitasyonel kırmızıya kayma, çerçeve sürüklenmesi, gravitasyonel dalgalar gibi birçok öngürüler getirmiştir. Genel Görelilik Kuramının Einstein Alan Denklemlerinin (EAD) çözümlerinin bir sonucu gravitasyonel dalga denkleminin elde edilmesidir. Çözümler sırasında temel olarak zayıf alan varsayımı altında doğrusallaştırma kuramı ile dalga bağıntısını elde etmektir. Gravitasyonel dalga genlikleri üzerinde çalıştığımız sistemin fiziksel öğelerine bağlıdır. Bu nedenle farklı özellikteki astrofiziksel koşullarda iyi bir şekilde ele alınması gerekir. EAD ile uzay-zaman geometrisindeki değişim sonucu yayılan dalgaları (1) ile verilen Laplace operatörü (3D) ile gösterebiliriz. d'Alembert operatörü (4D) Minkowski uzay-zaman geometrisinde dalga operatörünü temsil eder ve (2) ifadesi ile verilen şekilde temsil edilir.

$$\nabla^2 := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \tag{2}$$

Varsayımlar altında EAD ifadelerini dalga denklemleri şeklinde ifade edebiliriz. Minkowski uzay-zaman geometrisi genellikle $\eta_{\alpha\beta} = diag[-c^2, 1, 1, 1]$ ile gösterilir. Kartezyen koordinatlarda herhangi bir ds uzay-zaman aralığı (3) ile verilen formda ifade edilir.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3}$$

Herhangi bir metrik üzerinde aşağıdaki gibi bir koordinat dönüşümü tanımlayarak

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha \tag{4}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

aralığında yerine yazılırsa,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \tag{5}$$

dönüşümü elde edilir. Sonsuz küçük koordinat dönüşümleri tanımlayalım:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\mu)$$
$$dx^\alpha \to dx'^\alpha = dx^\alpha + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \Rightarrow$$
$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \tag{6}$$

Burada $\xi^\alpha(x^\mu)$, yer değiştirme vektörü ve δ^α_μ, *Kronecker delta*dır. Ayrıca $\left|\partial_\mu \xi^\alpha\right| \ll 1$ olarak verilir. Metrik tensörün koordinat dönüşümünü veren (5) denkleminde (6) ifadesi yerine yazılırsa,

$$g_{\mu\nu}(x^{\mu}) = g'_{\alpha\beta}(x'^{\mu})\left(\delta^{\alpha}_{\mu} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\delta^{\beta}_{\nu} + \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) \cong g'_{\mu\nu}(x'^{\mu}) + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} g_{\alpha\nu}(x'^{\mu}) + \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\beta}(x'^{\mu})$$

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} g_{\alpha\nu} - \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\beta} + \mathcal{O}((\partial\xi)^2) \tag{7}$$

ilişkisini elde ederiz. Gravitasyonel alanın zayıf olduğu durumda uzay-zaman geometrisi, Minkowski metriğine küçük bir $h_{\mu\nu}$ tedirginlik niceliğinin eklenmesiyle,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2) \tag{8}$$

olarak ifade edilir. Burada tedirginlik niceliği $|h_{ij}| \ll 1$ $(i,j = 1,2,3)$, $|h_{0i}| \ll c$ ve $|h_{00}| \ll c^2$ ve $h^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} h_{\mu\nu}$ olarak verilir. Parçacıkların takip ettiği geodezik eğrilerle ilişkili olan Christoffel sembolleri, (8) ifadesi dikkate alınarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma}) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} h_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} h_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} h_{\beta\gamma}\right] + \mathcal{O}(h^2) \\ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial h_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}\right) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned} \tag{9}$$

ilişkisi elde edilir. 4'lü hız vektörü aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$x^{\mu}(\tau) = \begin{bmatrix} x^0(\tau) = \gamma c\tau \\ x^1(\tau) \\ x^2(\tau) \\ x^3(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{bmatrix}$$

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\frac{dx^{\mu}}{dt}$$

Parçacığın hareketi (10) ve (11) ile ifade edilir.

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\alpha} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u^{\nu}\right] = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u^{\nu}u^{\mu} = 0$$

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 0 \tag{11}$$

Eğer parçacık düşük bir hızla hareket ediyorsa $v \ll c$, 4'lü hızının baskın terimi x^0 bileşenini içerir ve (10) dörtlü hız ifadesi (12) ile verilen formu alır.

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} + \mathcal{O}(v/c) = \frac{d(\gamma c\tau)}{d\tau} + \mathcal{O}(v/c) \cong c \tag{12}$$

(11) yardımı ile parçacığın ivmelenmesi (a^i, i=1, 2, 3) uzaysal ivmelenmesi (13) şeklini alır.

$$a^i = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = -\Gamma^i_{00}u^0u^0 + \mathcal{O}(v/c)$$

$$a^i = -c^2\Gamma^i_{00} + \mathcal{O}(v/c) \tag{13}$$

Durgun durumda,

$$a^i = -c^2\Gamma^i_{00} + \mathcal{O}(v/c) = -\frac{c^2}{2}\eta^{ik}\left(\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}\right) + \mathcal{O}(v/c)$$
$$= \frac{c^2}{2}\eta^{ik}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} + \mathcal{O}(v/c) \Rightarrow$$

ifadesi ile tedirginlik terimlerinin zamana göre değişimleri sıfır olur. Sonuç olarak,

$$a_l = \eta_{il}a^i = \frac{c^2}{2}\eta_{il}\eta^{ik}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} + \mathcal{O}(v/c) = \frac{c^2}{2}\delta^k_l\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} + \mathcal{O}(v/c) = \frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^l} + \mathcal{O}(v/c)$$
$$a_i \approx \frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{14}$$

ilişkisi elde edilir. Newton potansiyelinde ivme $a = -\nabla\phi$ olarak verildiğinden, (14) ilişkisi ile karşılaştırıldığında,

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \tag{15}$$

eşitliği yazılabilir. (8) ile ifade edilen metriğinin kontravaryant formu $g^{\alpha\beta}$ iadesi (16) da veirlen formda elde edilir.

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2) \tag{16}$$

Sonraki adım EAD ifadelerinin lineer hale getirilmesi ve bunun için alan denklemlerde geçen ifadelerin lineer duruma getirilmesidir. Riemann tensörü ve bazı simetri özellikleri,

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right) + g_{\mu\nu}\left(\Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\nu_{\alpha\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\sigma}\Gamma^\nu_{\alpha\gamma}\right) \tag{17a}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} = R_{dcba} = -R_{bacd} = -R_{abdc} \tag{17b}$$

$$R^\mu_{\beta\gamma\sigma} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\gamma\sigma} \tag{17c}$$

$$R^\mu_{\beta\gamma\sigma} = \frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \tag{17d}$$

olarak verilebilir. Gravitasyonel dalgalar Minkowski uzay-zamanındaki küçük tedirginlikler olarak tanımlandıklarından Riemann tensörü,

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right) \tag{17e}$$

$$R^\mu_{\beta\gamma\sigma} = \frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \tag{17f}$$

haline dönüşür. Ricci tensörü (18) ve Ricci skaları (19) ile verilen formda elde edilir.

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \tag{18}$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{19}$$

Riemann tensörünün simetri özellikleri kullanılarak Bianchi özdeşliğinden (20) ifadesi elde edilir ve (20) denklemi $g^{\nu\alpha}$ ile büzülürse (21)-(22) ifadeleri türetilir.

$$\nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} = 0 \Rightarrow$$
$$\nabla_\gamma R^{\gamma}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^{\gamma}_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R^{\gamma}_{\nu\beta\gamma} = \nabla_\gamma R^{\gamma}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha R^{\gamma}_{\nu\gamma\beta}$$
$$= -\nabla^\gamma R_{\gamma\nu\beta\alpha} + \nabla_\beta R_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha R_{\nu\beta} = 0 \tag{20}$$

$$g^{\nu\alpha}\left(-\nabla^\gamma R_{\gamma\nu\beta\alpha} + \nabla_\beta R_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha R_{\nu\beta}\right) = -g^{\nu\alpha}\nabla^\gamma R_{\beta\alpha\gamma\nu} + \nabla_\beta R - \nabla^\nu R_{\nu\beta}$$
$$= g^{\nu\alpha}\nabla^\gamma R_{\alpha\beta\gamma\nu} + \nabla_\beta R - \nabla^\nu R_{\nu\beta} = -\nabla^\gamma R^{\nu}_{\beta\nu\gamma} + \nabla_\beta R - \nabla^\nu R_{\nu\beta} = 0$$
$$= -\nabla^\gamma R_{\beta\gamma} + \nabla_\beta R - \nabla^\nu R_{\nu\beta} = 0 \tag{21}$$

$$-\nabla^\alpha R_{\beta\alpha} + \nabla_\beta R - \nabla^\alpha R_{\alpha\beta} = -2\nabla^\alpha\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = 0$$
$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \tag{22}$$

Burada $G_{\alpha\beta}$, Einstein tensörü olarak bilinir. Şimdi (8) ifadesini Riemann, Ricci ve Einstein alan tensörlerinde yerine koyarak lineerize edelim. Buradan Riemann tensörünün (17e) ifadesi,

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{23}$$

olarak elde edilir. Lineerleştirilmiş Ricci tensörü ise (16) yardımıyla aşağıda verilen formda elde edilir.

$$R_{\beta\sigma} = R^{\gamma}_{\beta\gamma\sigma} = g^{\gamma\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}\left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\gamma\alpha} - h^{\gamma\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\gamma\gamma}\frac{\partial^2 h_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \eta^{\gamma\gamma}\frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$
$$2R_{\beta\sigma} = \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \mathcal{O}(h^2) \tag{24a}$$

ifadesi elde edilir. (24a) eşitliği yeniden düzenlenerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$2R_{\beta\sigma} = \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 h^{\gamma}_{\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \mathcal{O}(h^2)$$
$$2R_{\beta\sigma} = \partial_\beta\left(\partial_\gamma h^{\gamma}_{\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\sigma h\right) + \partial_\sigma\left(\partial_\gamma h^{\gamma}_{\beta} - \frac{1}{2}\partial_\beta h\right) - \Box h_{\beta\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \tag{24b}$$

Lineerleştirilmiş Ricci skaları ise (25) ile verilen formda elde edilir.

$$R = \eta^{\beta\sigma} R_{\beta\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}\left(\frac{\partial^2 h_\sigma^\gamma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_\beta^\gamma}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\beta\sigma}\frac{\partial^2 h_\sigma^\gamma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \eta^{\beta\sigma}\frac{\partial^2 h_\beta^\gamma}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} - \eta^{\beta\sigma}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\beta\sigma}\eta^{\gamma\beta}\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\eta^{\beta\beta}\frac{\partial^2 h_\beta^\gamma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \eta^{\beta\beta}\frac{\partial^2 h_\beta^\gamma}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} - \eta^{\beta\sigma}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} - \eta^{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 h^{\gamma\beta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \Box(2h)\right)$$

$$R = \eta^{\beta\sigma} R_{\beta\sigma} = \frac{\partial^2 h^{\gamma\beta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \Box h + \mathcal{O}(h^2) \tag{25}$$

Buradan (23, 24b, 25) eşitlikleri, (22) de yerine yazılırsa $G_{\beta\sigma}$ ifadesi (26) formunda elde edilir.

$$G_{\beta\sigma} = R_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}g_{\beta\sigma}R$$
$$= \frac{1}{2}\left[\partial_\beta\left(\partial_\gamma h_\sigma^\gamma - \frac{1}{2}\partial_\sigma h\right) + \partial_\sigma\left(\partial_\gamma h_\beta^\gamma - \frac{1}{2}\partial_\beta h\right) - \Box h_{\beta\sigma}\right] - \frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\left(\frac{\partial^2 h^{\gamma\beta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \Box h\right) \tag{26}$$
$$+ \mathcal{O}(h^2)$$

Tedirginlik terimi (27) ifadesi ile yeniden tanımlanır.

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \tag{27}$$

Burada $\bar{h} = \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta}$ olarak tanımlanan yeni tedirginlik terimine *trace-reversed metric permutation* denir. Bu terim için (28) koşulu geçerlidir.

$$\eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}h \Rightarrow \quad \bar{h} = h - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\alpha h = h - 2h$$
$$\bar{h} = -h \tag{28}$$

Bu durumda (29) ilişkisi türetilebilir.

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} \tag{29}$$

Bu ifade (26) ifadesi ile birleştirilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\bar{h}_\beta^\alpha = h_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha h \Rightarrow$$
$$\partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha = \partial_\alpha h_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \partial_\alpha(h) - \frac{1}{2}h\partial_\alpha\left(\delta_\beta^\alpha\right)$$
$$\partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha = \partial_\alpha h_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \partial_\alpha h \tag{30}$$

Buradan (26) ifadesi,

$$G_{\beta\sigma}=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\left(\partial_\gamma h^\gamma_\sigma-\frac{1}{2}\partial_\sigma h\right)+\partial_\sigma\left(\partial_\gamma h^\gamma_\beta-\frac{1}{2}\partial_\beta h\right)-\Box h_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\left(\frac{\partial^2 h^{\gamma\beta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}-\Box h\right)+\mathcal{O}(h^2)$$

$$G_{\beta\sigma}=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\left(\bar{h}_{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\bar{h}\right)\right]-\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\gamma\left(\bar{h}^\gamma_\sigma-\frac{1}{2}\delta^\gamma_\sigma\bar{h}\right)-\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}+\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}\right]-\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\frac{1}{4}\delta^\gamma_\sigma\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}-\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]+\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}-\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\frac{1}{4}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}-\frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\Box\bar{h}-\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}^\sigma_\sigma+\frac{1}{4}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\eta^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}-\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}+\frac{1}{4}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}-\frac{1}{4}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}-\frac{1}{4}\eta_{\beta\gamma}\partial_\beta\partial_\sigma\bar{h}^{\beta\gamma}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\sigma\bar{h}^{\alpha\sigma}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}\right]-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}-\frac{1}{4}\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}+\mathcal{O}(h^2)$$

$$G_{\beta\sigma}=\frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}-\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}\right]+\mathcal{O}(h^2) \qquad (31)$$

olarak lineerize biçimde yazılır. Einstein alan denklemini (31) yardımıyla (32) formunda yazılır.

$$-\Box\bar{h}_{\beta\sigma}-\eta_{\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{h}^{\alpha\gamma}+\partial_\beta\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\sigma+\partial_\sigma\partial_\gamma\bar{h}^\gamma_\beta+\mathcal{O}(h^2)=\frac{16\pi G}{c^4}T_{\beta\sigma} \qquad (32)$$

Denklemin sol tarafındaki ilk terim, daha önce (2) ifadesiyle gösterilen □ operatörüdür. Lineerize Einstein alan denklemlerini Minkowski uzayında dalga denklemleri olarak yazabilmek için özel bir koordinat sistemi seçilmesi gereklidir. Bu koordinat sistemi yaklaşık olarak Lorentz koordinatları olarak tanımlanır. Böyle bir sistemde sonsuz küçük koordinat dönüşümlerine, ayar dönüşümleri denir. Daha önce sonsuz küçük koordinat dönüşümlerinden (7) dönüşümü elde edilmişti. (7) ve (8) ifadeleri incelendiğinde $\mathcal{O}(h)$ ile ξ nin denk olduğu görülür. Dolayısıyla (7) ifadesi,

$$g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}g_{\alpha\nu}-\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}g_{\mu\beta}+\mathcal{O}(h^2) \qquad (33)$$

olarak yazılabilir. Bu sonuç, metriğin sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında $-\left(\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu\right)$ kadar değiştiğini gösterir. Buradan $g_{\alpha\beta}(x)=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}(x)$ ve $g'_{\alpha\beta}(x')=\eta_{\alpha\beta}+h'_{\alpha\beta}(x')$ (33) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\eta_{\alpha\nu}-\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\mu\beta}+\mathcal{O}(h^2) \qquad (34)$$

dönüşümü elde edilir. Böyle bir dönüşüm altında Riemann tensörünün ikinci dereceden değişimi $\mathcal{O}(h^2)$ mertebesinde olduğundan, lineerize Riemann tensörü sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında değişmeden kalır. (27) olarak tanımlanan *trace-reversed* metrik formu sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında,

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h' + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$$

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{\partial\xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) = h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\xi_\mu + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \bar{h}_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\xi_\mu + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\xi_\nu + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial^\nu\xi_\nu + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial^\alpha\xi_\alpha + \mathcal{O}(h^2) = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \to \bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta + \mathcal{O}(h^2) \tag{35}$$

olarak yazılır. Daha sonra (35) eşitliğine şu işlemleri uygulayalım.

$$\eta^{\alpha\mu}\bar{h}'_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\bar{h}_{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\mu}\partial_\alpha\xi_\beta \Rightarrow$$
$$\bar{h}'^{\mu}_{\beta} = \bar{h}^{\mu}_{\beta} - \partial^\mu\xi_\beta \tag{36}$$

Son eşitliğin x'^μ koordinatına göre değişimi,

$$\frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{37}$$

dönüşümüyle verilir. Sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında,

$$x'^\nu = x^\nu + \xi^\nu(x^\mu) \Rightarrow x^\nu = x'^\nu - \xi^\nu \Rightarrow dx^\nu = dx'^\nu - \frac{\partial\xi^\nu}{\partial x'^\mu}dx'^\mu \Rightarrow$$
$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \frac{\partial\xi^\nu(x^\mu)}{\partial x'^\mu} \tag{38}$$

İfadesi bulunur. Bu ifade (37) de yerine yazılırsa (39) elde edilir.

$$\frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\nu}\left(\delta^\nu_\mu - \frac{\partial\xi^\nu(x^\mu)}{\partial x'^\mu}\right) = \frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\mu} \tag{39}$$

(36) ve (37) ifadeleri (39) yardımıyla birleştirilirse (40) nolu denkleme ulaşılır.

$$\frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\bar{h}^{\mu}_{\beta} - \partial^\mu\xi_\beta\right) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{\partial\bar{h}^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\mu} - \partial_\mu\partial^\mu\xi_\beta + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\bar{h}^{\mu}_{\beta}}{\partial x^\mu} - \Box\xi_\beta + \mathcal{O}(h^2) \tag{40}$$

Buradan (40) eşitliğine Lorentz ayar durumu,

$$\frac{\partial\bar{h}'^{\mu}_{\beta}}{\partial x'^\mu} = 0 \tag{41}$$

olarak tanımlanan özel bir ayar durumu uygulanırsa,

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu}_{\beta}}{\partial x^{\mu}} = \Box \xi_{\beta} \tag{42}$$

ilişkisi elde edilir. O halde d'Alembert dalga operatörü ve tedirginlik niceliğinin birbiriyle ilişkili olduğu (42) ile gösterilebilir. Dört harmonik koordinat $x^{\alpha} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ olarak gösterilmek üzere, dört ayrı skalar denklem tanımlar.

$$\nabla_{\beta} x^{\alpha} = \partial x^{\alpha} / \partial x^{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{43}$$

Buradan harmonik koordinatlar,

$$0 = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}x^{\alpha} = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}x^{\alpha} = g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\nabla_{\mu}x^{\alpha}\right) - g^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\left(\nabla_{\gamma}x^{\alpha}\right) = -g^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\gamma}$$

$$0 = -g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha} \tag{44}$$

olarak (44) denklemini sağlar. Christoffel sembolünün açılımından faydalanarak yerine yazılırsa (40) nolu eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2}g^{\nu\mu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \\
&= g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \\
&= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g^{\alpha\rho}g_{\rho\nu}\right) - g^{\mu\nu}g_{\rho\nu}\frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \\
&= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\right) - \delta^{\mu}_{\rho}\frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \\
0 &= -\frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}
\end{aligned} \tag{45}$$

Bu denklemi lineerize yapabilmek için (16) dan yararlanılır. Yerine yazılıp gerekli ara işlemler yapıldığında (46) ile verilen sade durum elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 = &-\frac{\partial\left(\eta^{\alpha\rho} - h^{\alpha\rho} + \mathcal{O}(h^2)\right)}{\partial x^{\rho}} \\
&-\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)\right)\left(\eta^{\alpha\rho} - h^{\alpha\rho} + \mathcal{O}(h^2)\right)\frac{\partial\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)\right)}{\partial x^{\rho}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}h^{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho} - \eta^{\mu\nu}h^{\alpha\rho} - h^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho}\right)\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}h^{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^{\alpha\rho}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}h^{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}\frac{\partial h}{\partial x^{\rho}} + \mathcal{O}(h^2) \\
0 = &\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}h^{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\eta^{\alpha\rho}h)}{\partial x^{\rho}} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\bar{h}^{\alpha\rho} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned} \tag{46}$$

Görüldüğü gibi harmonik koordinat sistemi, (46) ile bulunan Lorentz ayar durumunu sağlar. Bu koşul altında (42) eşitliğinden,

$$\Box \xi_{\beta} = 0 \tag{47}$$

dalga denklemlerinin homojen çözümleri yapılabilir. Lorentz ayar durumu sağlanıyorsa (32) lineerize Einstein alan denklemleri,

$$-\Box\bar{h}_{\beta\sigma} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\sigma} \tag{48}$$

olarak basit bir formda yazılabilir. Bu denklem, $T_{\beta\sigma}$ enerji momentum tensör kaynaklı küçük tedirginliklerin dalga denklemlerine karşılık geldiğini belirtir. Vakum ortamda $T_{\beta\sigma} = 0$ olduğu için tedirginlik ile ilişkili metrik çözümleri, uzay zamanda yayılan dalgalar olarak tanımlanır. Lineerize edilmiş Einstein alan denklemleri Lorentz ayar durumunda dalga denklemlerini verir. Buradan vakumda lineerize Einstein alan denklemleri,

$$\Box\bar{h}_{\beta\sigma} = 0 \tag{49}$$

olarak ve Lorentz ayar durumu,

$$\frac{\partial\bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = 0 \tag{50}$$

olarak daha önce tanımlanmıştı. Bu yüzden vakumda yayılan dalga denklemlerinin çözümleri yapılırken **düzlem-dalga** dikkate alınır. Dalgaların yönü genelde $x^3 = z$ olarak seçilir. Dolayısıyla tedirginlik teriminin bileşenleri, $t - z/c$ gecikme zamanı olarak tanımlanan bir niceliğin fonksiyonu olur. Düzlem dalga çözümleri (50) yardımıyla, $\left(\partial\bar{h}^{0\alpha}/\partial t\right) = \left(\partial\bar{h}^{3\alpha}/\partial z\right) = 0$ olur. Buna bağlı olarak $\bar{h}_{0\alpha}(t - z/c)$ ve $\bar{h}_{3\alpha}(t - z/c)$ terimleri sabit olduğundan $\bar{h}_{0\alpha} = \bar{h}_{3\alpha} = 0$ olarak seçilebilir. Buradan tedirginlik terimlerinin sıfır olmayan terimleri aşağıda belirtilmiştir.

$$\bar{h}_{11} = \bar{h}_{11}(t - z/c) \tag{51a}$$

$$\bar{h}_{22} = \bar{h}_{22}(t - z/c) \tag{51b}$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21}(t - z/c) \tag{51c}$$

Asıl tedirginlik terimleri olan $h_{\alpha\beta}$ için (29) dönüşümü kullanılarak h_{00}, h_{11}, h_{22}, ve h_{12} bileşenleri,

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}\bar{h} = -\frac{1}{2}(-c^2)\bar{h} \Rightarrow$$
$$h_{33} = \bar{h}_{33} - \frac{1}{2}\eta_{33}\bar{h} = -\frac{1}{2}\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{00}\bar{h}_{00} + \eta^{11}\bar{h}_{11} + \eta^{22}\bar{h}_{22} + \eta^{33}\bar{h}_{33} \Rightarrow$$
$$h_{00} = -c^2 h_{33} = \frac{1}{2}c^2\left(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}\right) \tag{52a}$$

$$h_{11} = \bar{h}_{11} - \frac{1}{2}\eta_{11}\bar{h} = \bar{h}_{11} - \frac{1}{2}\left(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}\right) \Rightarrow$$
$$h_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}\right) \quad , \quad h_{22} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{h}_{22} - \bar{h}_{11}\right)$$
$$h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2}\left(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}\right) \tag{52b}$$

$$h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12} - \eta_{12}\bar{h} \Rightarrow$$
$$h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12} \tag{52c}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki (52b-c) ifadeleri $(t - z/c)$ nin fonksiyonu olan 3 bağımsız tedirginlik terimini gösterir. Bunlardan hangilerinin fiziksel, hangilerinin ayar seçimine (*gauge choice*) bağlı olduğu anlayabilmek için (23) Riemann açılımının birinci mertebeden ifadesine bakılmalıdır.

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\sigma}\right) \tag{53}$$

Düzlem dalga çözümünü veren tedirginlik nicelikleri t ve z koordinatlarına bağlı olduğundan $\partial/\partial t$ ve ∂/dz değişimleri de sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla iki operatör arasında,

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial (t - z/c)} \frac{\partial (t - z/c)}{\partial t} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial (t - z/c)}$$
$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial z} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial (t - z/c)} \frac{\partial (t - z/c)}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial (t - z/c)}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{54}$$

ilişkisi olduğu anlaşılır. Metriğin birbirleriyle ilişkili iki terimi olduğu için Riemann tensörünün en az iki indisi 0 olmalıdır. Riemann tensörünün simetriği özellikleri dikkate alınarak dört terimden biri seçilerek (53) denkleminde kullanılır. Burada $R_{0\beta 0\delta}$ terimi alınarak; R_{0000}, R_{0101}, R_{0202}, R_{0303}, $R_{0100} = R_{0001}$, $R_{0200} = R_{0002}$, $R_{0300} = R_{0003}$, $R_{0102} = R_{0201}$, $R_{0103} = R_{0301}$ ve $R_{0203} = R_{0302}$ bileşenlerine (53) uygulandığında,

$$R_{0101} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{01}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2}$$
$$R_{0101} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}) \tag{55a}$$

$$R_{0202} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{02}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2}$$
$$R_{0202} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} = -R_{0101} \tag{55b}$$

$$R_{0102} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{02}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial t^2}$$
$$R_{0102} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{h}_{12} \tag{55c}$$

R_{0101}, R_{0202} ve $R_{0102} = R_{0201}$ sıfırdan farklı olur.

Sonuç olarak Riemann tensörünün iki serbestlik derecesine sahip olduğu söylenilebilir. Sıfır olmayan bu $(t - z/c)$'ye bağlı fonksiyonları,

$$h_+ = h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22})$$
$$h_x = h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} \tag{56}$$

olarak tanımlanır. Sonraki aşamada elde edilen tüm ilişkiler bir çift sistem için yaklaşım yapalım. Çekim dalgaları tarafından taşınan ışıma için türetilen enerji tensörlerini

kullanarak çekimsel dalga ışınımını parlaklığı quadrapole moment tensörü yardımı ile ifade edersek (57) ve bir çift dizgenin gravitasyonel ışımasının şiddeti (58) ile verilir.

$$L_{GW} = -\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle\frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3}\frac{\partial^3 Q_{ij}}{\partial t^3}\rangle \tag{57}$$

$$L_{GW} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 a^4 \Omega^6 = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5} \tag{58}$$

Son olarak yayılan dalga genliği çift sistemin bizden uzaklığına (r), çiftin yörünge frekansına (f) ve bileşenlerin kütlelerine bağlı ifadelere (M, □) bağlı olarak (59) ile verilir.

$$h = 5\times 10^{-22}\left(\frac{M}{2.8M_{\odot}}\right)^{2/3}\left(\frac{\mu}{0.7M_{\odot}}\right)\left(\frac{f}{100Hz}\right)^{2/3}\left(\frac{15Mpc}{r}\right) \tag{59}$$

3.2 Çoklu Sistem Durumu

Çift yıldız olma durumunda ne tür gravitasyonel dalga genliklerinin oluştuğu detaylı bir şekilde önceki bölümde sunuldu. Üçlü sistemlerde oluşacak gravitasyonel dalga genlikleri hesabı kaotik bir durum alabilmektedir. Dalga denkleminin sıfırdan farklı çözümünü yapmak için Einstein gravitasyonel ışınım için *quadrupole* formülünü türettiği ifade ve çözümde Green fonksiyonu kullanarak çözüme gidilir (Denklem 60). Denklem 60'ın genel çözümü bize multipole momenti verir:

$$h_{mn} = -\frac{4G}{c^4}\int_v d^3x' \frac{T_{mn}\left(t-\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|,\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} \tag{60}$$

$$h_{mn}^{TT}(t,x) = \frac{1}{r}\left[\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{4}{l!}I^{(l)}_{mnA_{l-2}}(t-r)N^{A_{l-2}} + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{8l}{(l+1)!}\varepsilon^{b}{}_{c(m}S^{(l)}_{n)bA_{l-2}}(t-r)n^{c}N^{A_{l-2}}\right)\right)\right]^{TT} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{61}$$

Üçlü sistem olma durumunda çok farklı geometriler ile farklı dalga genlikleri türetmek mümkündür. Asada (2009) eşkenar üçgen durumunda üçlü sistem varsayımı ile gravitasyonel dalga genliği hesabı yapmıştır. Üçlü durumda ilk sonuç olarak (+) ve (x) bileşenler için genlik hesabı (62) ve (63) ile verilir. Burada, r kaynağın bizden olan uzaklığı, a, □ ve i sistemin yörünge öğeleridir.

$$h^{+}_{Oct} = -\frac{1}{12r}\sum_p m_p a_p^3 w^3 \sin i \begin{bmatrix} 27\left(1+\cos^2 i\right)\cos 3\left(wt+q_p\right)+ \\ \left(1-3\cos^2 i\right)\cos\left(wt+q_p\right) \end{bmatrix} \quad (62)$$

ve

$$h^{x}_{Oct} = -\frac{1}{12r}\sum_p m_p a_p^3 w^3 \sin 2i \begin{bmatrix} 27\sin 3\left(wt+q_p\right)- \\ \sin\left(wt+q_p\right) \end{bmatrix} \quad (63)$$

Henüz üçlü sistemlere ilişkin olan çalışmamız devam etmektedir. Bu bağlamda yürütülmekte olan yüksek lisans tezinin yıl sonuna kadar tamamlanması hedeflenmektedir.

3.3 Çerçeve sürüklenmesi (Lense-Thirring) Etkisi

Proje kapsamında üzerinde çalıştığımız diğer bir konu ise özellikle de sıkışık gök cisimlerde etkisi önemli olan çerçeve sürüklenmesi ve olası ivmeli süreçlerde oluşacak dalgalardır. Özellikle çift durumundaki kara delik ve nötron çiftlerinde bu durum daha da önemli hale gelmektedir. Bu etkilerin nasıl ve ne kadar olduğu kuramsal olarak proje ekibi tarafından incelenmiştir. Bunun için ilk olarak tek başına dönen bir kara delik çerçeve sürüklenmesi bağlamında ele alındı. Çerçeve sürüklenmesi etkisi Lense & Thirring (1918) tarafından ele alınmış ve bu konuda yapılan birçok çalışma bu çalışmayı referans göstermektedir. Bu çalışma daha sonra düzeltmeler yapılarak yeniden yayınlanmıştır. Fakat hem çalışmanın orjinalinde hem daha sonra yapılan düzeltmesinde bazı hatalar tespit edilmiştir. Proje çalışmalarında bu düzeltmeleri yapmak ve farklarını ortaya koymak için önemli bir zaman harcanmıştır. Aşağıda bu çalışma kısaca özetlenmiştir.

Genel görelilik kuramının öngörülerinden biri olan çerçeve sürüklenmesi (frame dragging veya dragging of inertial frames) ilk defa Josef Lense ve Hans Thirring tarafından 1918'de yayınlanan bir makalede matematiksel olarak ifade edilmiştir (Thirring & Lense, 1918; Thirring, 1918, 1921). Thirring, düz uzay – zaman metriğinde küçük tedirginlikler tanımlayarak (bkz. Thirring, 1918, denklem (3)) Einstein'ın kuramına doğrusal bir yaklaşım uygulamıştır. Sonsuz incelikte *M* kütleli küresel bir kabuğun iç kısmında uzay – zaman metriğini bu yaklaşımlar altında tanımlamıştır. Bu kütleli kabuğun □ açısal hızına bağlı olarak metriğin çapraz bileşenlere sahip olduğunu göstermiştir (bkz. Thirring, 1918, denklem (16)). Sonuç olarak elde edilen bu metriğin geodezik hareket denklemlerinde kullanılmasıyla küresel kabuğun, çevresindeki uzay – zaman bölgesini kendi çevresinde belirli bir açısal hızla sürüklediği sonucuna ulaşılmıştır. Hans Thirring'in 1918a makalesinde (3) nolu denklemde (retarded potentials $\gamma_{\mu\nu}$) yanlışlıkla integralin 4 – boyut üzerinden alınarak işleme konulması, sonraki hesaplamaları da etkilemiş ancak daha sonra 1921 makalesiyle (bir kısmı) düzeltilmiştir. Yaptığımız ara işlemlerde 1921 yılı düzeltme makalesinin de işlem hataları içerdiği görülmüştür. Örneğin (16) denkleminde g_{12} bileşeninde 2 çarpanı yerine 12 çarpanının yazılması gerekmektedir. Bununla birlikte çerçeve sürüklenmesiyle ilgili bu en temel makaleleri incelediğimizde, açısal hız niceliğinde yapılan yaklaşımlar biraz değiştirildiğinde duyarlılığın oldukça değişebileceği sonucuna vardık. Bu nedenle orijinal makalede yapılan işlemleri tekrar analiz ettik. Küresel kabuğun kütle değeri,

$$M = \int \rho_0 \, dV_0 = i\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho_0 \frac{dx_4}{ds} a^2 \, da \sin\theta \, d\theta = \frac{4}{3}\pi a^2 \sigma (3+\omega^2 a^2) \quad (64)$$

şeklinde hesaplanarak (burada $a, \omega, \sigma,$ sırasıyla küresel kabuk yarıçapı, açısal hız, yüzey kütle yoğunluğu ve $\rho_0 da = \sigma$ olarak verilir) tedirginlik denklemlerinde kullanıldığında (65) ve kütle terimi içeren sonraki ifadelerde payda kısmında $(3+\omega^2 a^2)$ çarpanı gelmektedir. Buna göre (65) ifadelerini tekrar hesapladığımızda,

$$\gamma'_{11} = -\frac{\chi}{2\pi}\frac{M}{a(3+a^2\omega^2)}a^2\omega^2\left(1-\frac{r^2}{5a^2}\right)$$

$$\gamma'_{22} = -\frac{\chi}{2\pi}\frac{M}{a(3+a^2\omega^2)}a^2\omega^2\left[1-\frac{r^2}{5a^2}(1-3\sin^2\theta_0)\right]$$

$$\gamma'_{44} = \frac{\chi}{2\pi}\frac{M}{a(3+a^2\omega^2)}\left\{3+2a^2\omega^2\left[1-\frac{r^2}{5a^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\theta_0\right)\right]\right\} \qquad (65)$$

$$\gamma'_{24} = -i\frac{\chi}{2\pi}\frac{M}{a(3+a^2\omega^2)}\omega r\sin\theta_0$$

$$\gamma'_{12} = \gamma'_{14} = \gamma'_{13} = \gamma'_{23} = \gamma'_{33} = \gamma'_{43} = 0$$

ifadeleri elde edilmektedir. Hesaplarımızda ortaya çıkan bu çarpan terimi $\omega^2 = 0$ olarak kabul edildiğinde, 1921 çalışmasında gösterilen ve metriği tanımlayan (16) bileşenleriyle oldukça benzer sonuçlara ulaşıldığını fark ettik. Bunlara ek olarak (65) ifadelerinin hesabında γ'_{44} bileşeni için $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \cong -1$ yaklaşımı uyguladığımızda, $\gamma'_{44} = \frac{\chi}{2\pi}\frac{3M}{a(3+a^2\omega^2)}$ şeklinde daha basit bir forma dönüştüğü görülmektedir. Benzer şekilde γ'_{24} orijinal makaleden farklı olarak yapılan yaklaşımın $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \cong -1 - a^2\omega^2\sin^2\theta$ şeklinde değiştirdiğimizde $\gamma'_{24} = -i\frac{\chi}{2\pi}\frac{M}{a(3+a^2\omega^2)}\omega\left(1+\frac{4}{5}a^2\omega^2\right)r\sin\theta_0$ biçiminde $\sim\omega^3$ ile orantılı bir bileşenin varlığından söz edilebilir. Hareket denklemlerinin elde edilebilmesi için (66) bileşenlerinin tekrar hesap edilmesi gerektiğinden şu işlemler yapılmıştır:

$$g'_{14} = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{11} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{22} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1}\frac{\partial x_3}{\partial x'_4}g_{33} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_1}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{44} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{24} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{42} + \frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{14}$$
$$+ \frac{\partial x_4}{\partial x'_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{41} + \frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{12} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{21} =$$

$$= \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) - y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left\{-1 - \frac{2kM}{a(3+a^2\omega^2)}\left[3+2a^2\omega^2-\frac{2\omega^2}{5}(z^2+x^2-2y^2)\right]\right\}$$
$$+ \sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) - y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left\{-1 - \frac{2kM}{a(3+a^2\omega^2)}\left[3+2a^2\omega^2-\frac{2\omega^2}{5}(z^2-2x^2+y^2)\right]\right\} + \sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left(-i\frac{4kM}{a(3+a^2\omega^2)}\omega x\right)$$
$$+ \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left(i\frac{4kM}{a(3+a^2\omega^2)}\omega y\right)$$
$$+ \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) - y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left(\frac{12kM}{a(3+a^2\omega^2)}\frac{\omega^2}{5}xy\right)$$
$$+ \sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) - y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left(\frac{12kM}{a(3+a^2\omega^2)}\frac{\omega^2}{5}xy\right)$$

$$g'_{14} = -iy'\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right] \qquad (66)$$

ω^2 terimi ihmal edilmezse,

$$g'_{14} = -\frac{i}{5a(3+a^2\omega^2)}\Big\{y'\left[15(a+2kM)+\left(5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right)\omega^2\right]\omega' + 2kM\omega\left[-10y'\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)+3y'(x'^2+y'^2)\omega\omega'\cos\left(2\omega'\frac{x_4}{i}\right)+10x'\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) - 3x'(x'^2+y'^2)\omega\omega'\sin\left(2\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\Big\} \qquad (67)$$

buluruz. Trigonometrik terimler içeren köşeli parantezi ω' göre seriye açarak birinci ve ikinci terimleri yazdığımızda,

$$g'_{14} = -\frac{i}{5a(3+a^2\omega^2)}\Big\{y'\left[15(a+2kM)+\left(5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right)\omega^2\right]\omega' + 2kM\omega\left[-10y'+(10x't+3x'^2y'\omega+3y'^3\omega)\omega'\right]\Big\} \qquad (68)$$

buluruz.

$$g'_{24} = \frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{11}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{22}+\frac{\partial x_3}{\partial x'_2}\frac{\partial x_3}{\partial x'_4}g_{33}+\frac{\partial x_4}{\partial x'_2}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{44}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{24}+\frac{\partial x_4}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{42}+\frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{14} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_2}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{41}+\frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{12}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{21}$$

$$= -\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left\{-1 - \frac{2kM}{a(3+a^2\omega^2)}\left[3+2a^2\omega^2-\frac{2\omega^2}{5}(z^2+x^2-2y^2)\right]\right\} + \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left\{-1 - \frac{2kM}{a(3+a^2\omega^2)}\left[3+2a^2\omega^2-\frac{2\omega^2}{5}(z^2-2x^2+y^2)\right]\right\} + \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left(-i\frac{4kM}{a(3+a^2\omega^2)}\omega x\right) - \sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left(i\frac{4kM}{a(3+a^2\omega^2)}\omega y\right) - \sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left(\frac{12kM}{a(3+a^2\omega^2)}\frac{\omega^2}{5}xy\right) + \cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left(\frac{12kM}{a(3+a^2\omega^2)}\frac{\omega^2}{5}xy\right)$$

$$g'_{24} = ix'\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right] \qquad (69)$$

ω^2 terimi ihmal edilmezse,

$$g'_{24} = \frac{i}{5a(3+a^2\omega^2)}\left\{x'\left[15(a+2kM)+\left(5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right)\omega^2\right]\omega' + 2kM\omega\left[-10x'\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)+3x'(x'^2+y'^2)\omega\omega'\cos\left(2\omega'\frac{x_4}{i}\right)-10y'\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right) + 3y'(x'^2+y'^2)\omega\omega'\sin\left(2\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\right\} \quad (70)$$

buluruz. Trigonometrik terimler içeren köşeli parantezi ω' ya göre seriye açarak birinci ve ikinci terimleri yazdığımızda,

$$g'_{24} = \frac{i}{5a(3+a^2\omega^2)}\left\{x'\left[15(a+2kM)+\left(5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right)\omega^2\right]\omega' + 2kM\omega\left[-10x'+\left(-10y't+3x'y'^2\omega+3x'^3\omega\right)\omega'\right]\right\} \quad (71)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} g'_{44} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_4}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{11}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{22}+\frac{\partial x_3}{\partial x'_4}\frac{\partial x_3}{\partial x'_4}g_{33}+\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{44}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{24}+\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{42}+\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}g_{14} \\ &+\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{41}+\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}g_{12}+\frac{\partial x_2}{\partial x'_4}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}g_{21} \\ &= \left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]^2 g_{11}+\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]^2 g_{22} \\ &+ g_{44}+2\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]g_{24} \\ &+2\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]g_{14} \\ &+2\left[-x'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\left[x'\frac{\omega'}{i}\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)-y'\frac{\omega'}{i}\sin\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]g_{12} \end{aligned} \quad (72)$$

Orjinal makaleden farklı olarak ω^2 terimlerini ihmal edersek,

$$g'_{44} = -1+\frac{2kM}{a}+(x'^2+y'^2)\left[\left(1+\frac{2kM}{a}\right)\omega'^2-\frac{8kM}{3a}\omega\omega'\right]$$

ifadesi elde edilir ve ihmal edilmediği taktirde;

$$g'_{44} = \frac{1}{5a(3+a^2\omega^2)}\left\{-15a+30kM-5a^3\omega^2+40kMa^2\omega^2+4kM\omega^2\left(x'^2+y'^2\right)-8kM\omega^2z^2 + \left(x'^2+y'^2\right)\left[15(a+2kM)+\left[5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right]\omega^2\right]\omega'^2 + 2kM\left(x'^2+y'^2\right)\omega\omega'\left[-20\cos\left(\omega'\frac{x_4}{i}\right)+3\left(x'^2+y'^2\right)\omega\omega'\cos\left(2\omega'\frac{x_4}{i}\right)\right]\right\} \quad (73)$$

değerini buluyoruz Trigonometrik terimler içeren köşeli parantezi ω' ya göre seriye açarak birinci ve ikinci terimleri yazdığımızda,

$$g'_{44} = \frac{1}{5a(3+a^2\omega^2)}\left\{-15a+30kM-5a^3\omega^2+40kMa^2\omega^2+4kM\omega^2\left(x'^2+y'^2\right)-8kM\omega^2z^2 + \left(x'^2+y'^2\right)\left[15(a+2kM)+\left[5a^3+20kMa^2+2kM\left(x'^2+y'^2-2z^2\right)\right]\omega^2\right]\omega'^2 + 2kM\left(x'^2+y'^2\right)\omega\omega'\left[-20+3\left(x'^2+y'^2\right)\omega\omega'\right]\right\} \quad (74)$$

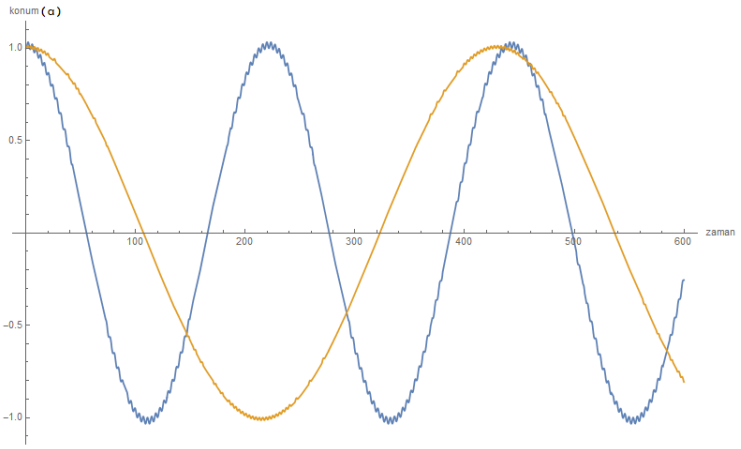
ifadesini elde ederiz. Bulunan bu terimle kullanıldığında orjinal makaleden farklı sonuçlara gidileceği açık olarak görülmektedir. Çerçeve sürüklenmesi her ne kadar Yer gibi küçük kütleli ve yavaş dönen cisimler için oldukça küçük bir etki olsa da evrende nötron yıldızları ve kara delikler gibi oldukça yoğun ve çok hızlı dönen cisimler için önemli hale gelmektedir. Özellikle nötron yıldızlarının çevrelerindeki uzay–zaman geometrisini ve iç yapılarını daha duyarlı betimlemek amacıyla çerçeve sürüklenme etkisi göz önüne

alınmaktadır (bkz. Chakraborty, Modak, & Bandyopadhyay, 2014; Morsink & Stella, 1999; Yu-Wu, De-Hua, & Jian-Xun, 2008). Günümüzde bu tür astrofiziksel cisimlerin gözlemsel verilerinin artmasıyla geçmişte ihmal edilen yaklaşımların tekrar göz önüne alınması bir gereklilik haline gelmektedir. Bu nedenle konuyu en temel makaleden tekrar ele alarak incelemeyi uygun görmekte ve çalışmalarımızı bu yönde devam ettirmekteyiz. Dahası çerçeve sürüklenme etkisi ile gravitasyonel dalgalar arasında fiziksel olarak nasıl bir etkileşimin oluşabileceği, günümüzde nadir rastlanan araştırma konularından biri olup bu çalışmamızın hedefleri arasında yer almaktadır. Özellikle çift durumundaki nötron ve kara delik sistemlerinde çerçeve sürüklenmesi ve yörünge kaynaklı gravitasyonel dalga etkisi yukarıda kısaca yapılanları özetlediğimiz çalışmanın önemli hedeflerinden biridir.

Çalışmanın sonunda ihmal edilen terimlerin etkisi ve hatalı olan katsayının sonuca ne kadar etki edeceği tartışılmıştır. Buna göre (75) ile verilen hareket denklemi türetilmiştir.

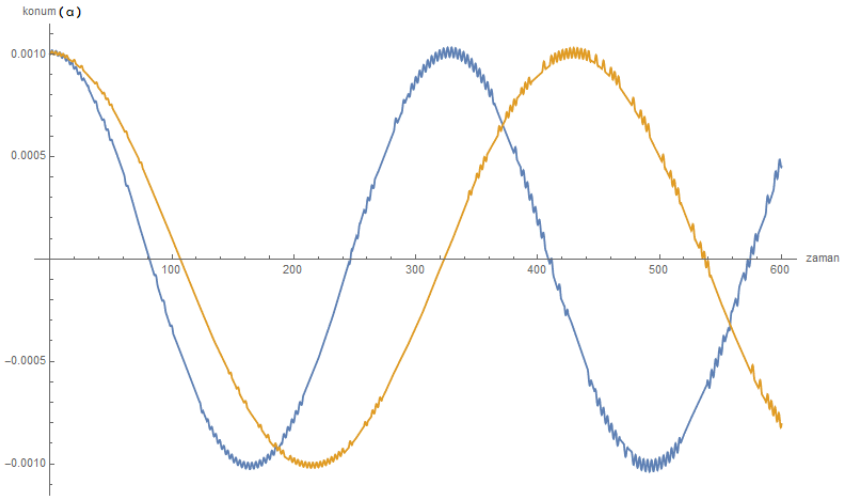
$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}+\frac{2kM}{3}a\omega^2\omega'+\frac{16kM}{15a}\omega^2\omega'\left(x^2+y^2-\frac{z^2}{4}\right)\right]\dot{y}\\
&\quad+\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{8kM}{3a}+\omega^2\frac{4kM}{15a}+\frac{2kM}{3}a\omega^2\omega'^2\right.\\
&\quad\left.+\frac{16kM\omega^2\omega'^2}{15a}\left(x^2+y^2-\frac{z^2}{4}\right)\right\}x-\omega^2\omega'\frac{8kM}{15a}yz\dot{z}\\
\ddot{y} &= -2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}+\frac{2kM}{3}a\omega^2\omega'+\frac{16kM}{15a}\omega^2\omega'\left(x^2+y^2-\frac{z^2}{4}\right)\right]\dot{x}\\
&\quad+\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{8kM}{3a}+\omega^2\frac{4kM}{15a}+\frac{2kM}{3}a\omega^2\omega'^2\right.\\
&\quad\left.+\frac{16kM\omega^2\omega'^2}{15a}\left(x^2+y^2-\frac{z^2}{4}\right)\right\}y+\omega^2\omega'\frac{8kM}{15a}yz\dot{z}\\
\ddot{z} &= -\frac{8kM}{15a}\omega^2 z\left[1+\omega'(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{\omega'^2}{2}(x^2+y^2)\right]
\end{aligned}
\qquad (75)
$$

Denklem 75 de verilen hareket denklemleri ilk olarak analitik olarak çözülmesi için uğraşıldı fakat henüz bu konuda sonuç alınamadı. Çözüm için gerekli bilgisayar programları kullanılması için çalışmamız sürmektedir. Çözüme nümerik olarak yaklaşım çabalarımız sonuç vermiştir. Değişimi göz önüne alınan noktanın küresel kabuğun içinde başlangıçta $x = 0.01a$ ve $y = z = 0$ koordinatlarında olduğu kabul edildi. Yaptığımız hesaplamalarda ilişkili parametreleri $a = M = \omega = 1$ ve $\omega' = 0.1\omega$ şeklinde alınarak elde edilen çözüm sonucu aşağıdaki şekilde verilmiştir. Elde edilen sonuç Thirring (1918) ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 2. Bu çalışmada elde edilen Denklem 75 ile gösterilen denklemlerin nümerik çözümü (Mavi renk) ve önceki çalışmada elde edilen çalışma ile karşılaştırılması.

Şekilden de anlaşıldığı gibi göz önüne alınan noktanın önceki çalışmaya göre daha hızlı koordinat değiştirdiğini ortaya çıkarılmıştır. Bununla birlikte $a < 1$ değerleri için Şekil deki durum elde edilmiştir.

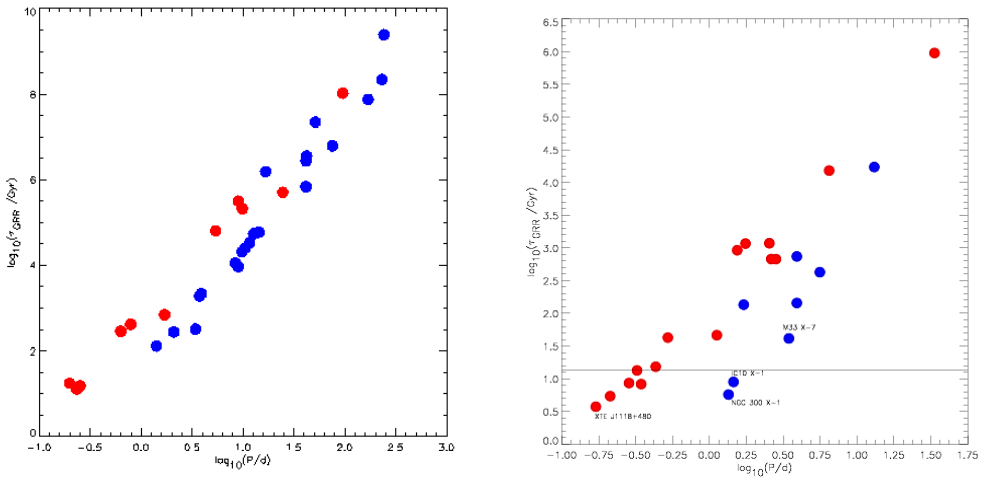


Şekil 3. Şekil 1 deki gibi fakat farklı **a** değerleri için.

Bu yapılan çalışma farklı astrofiziksel laboratuvarlara (Yer, nötron yıldızları, kara delikler, vb.) uygulancaktır. Bu çalışmamız yeni başlatılan bir doktora tezinin bir bölümünü oluşturmaktadır ve bu konudaki çalışmamız sürdürülecektir.

3.4 Kara delik ve nötron yıldızı bileşenli çift dizgelerinde gravitasyonel ışıma ile açısal momentum kaybı

Proje hedef yıldızlarından olan kara delik ve nötron yıldızı bileşenli X-ışın çiftleri bu proje kapsamnında ele alınmıştır. Bu bağlamda iki adet yüksek lisans tezi tamamlanmış ve yakın zamanda tez savunması yapılacaktır. Çift dizgelerde açısal momentum farklı yollardan aktarılabilir. Bu yollardan biri de çift sistemin çekimsel ışıma ile momentum kaybetmesidir. Proje kapsmanında literatürde bulunan ve fiziksel öğeleri tespit edilmiş kara delik ve nötron bileşenli X-ışın çiftleri kataloglandı.
Çift yıldız durumunda yayılacak olan çekim dalgalarının genliği ve ne kadar açısal momentum kayıp edeçeği ve bunların zaman ölçekleri daha önce Yakut vd. (2008) tarafından hesaplanmıştır. Seçilen sistemler için elde edilen zaman ölçekleri Şekil 4'te verilen grafikte gösterilmiştir. Bu şekil hem nötron yıldızı (sol panel) hem de kara delik (sağ panel) içeren çift sistemleri barındırmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar İsviçre'de düzenlenen bir toplantıda sunulmuştur.



Şekil 4. Çekim dalgaları ile açısal momentum kaybının x-ışın çiftleri ile ilgili gösterimi. Sol panel nötron yıldızı bileşenli çift sistemleri ve sağ panelde kara delik bileşenli çift dizgeleri göstermektedir. Çekim dalgalarının Hubble zaman ölçeğinden az olan az sayıda sistem bulunmaktadır.

4. Bulgular, Sonuçlar ve Tartışmalar

Bu proje kapsamında gravitayonel dalga astronomisi başlığı altında çift sistemler ele alınmıştır. Proje ana hedeflerinden bir tanesi bu alanda ülkemizde çalışmalar başlatılması ve ileride yapılacak gözlemsel çalışmalara hazırlık yapmaktır. Bu bağlamda lisansüstü öğrenciler genel görelilik kuramı ve relativistik astrofizik konularında eğitim/dersler verilerek gerekli altyapı oluşturulmuştur. Ayrıca nümerik rölativite için gerekli bilgisayar kodları (CACTUS code, *Einstein Toolkit*, vb.) proje kapsamında alınan Linux sunucusuna kurulmuş/çalıştırılmıştır.

Bu bağlamda proje konusu ile doğrudan veya dolaylı ilgili olan aşağıdaki başlıklarda lisansüstü tezler proje yürütücüsü danışmanlığında bir kısmı tamamlanmış bir kısmı da yıl sonuna kadar tamamlanması hedeflenmektedir.

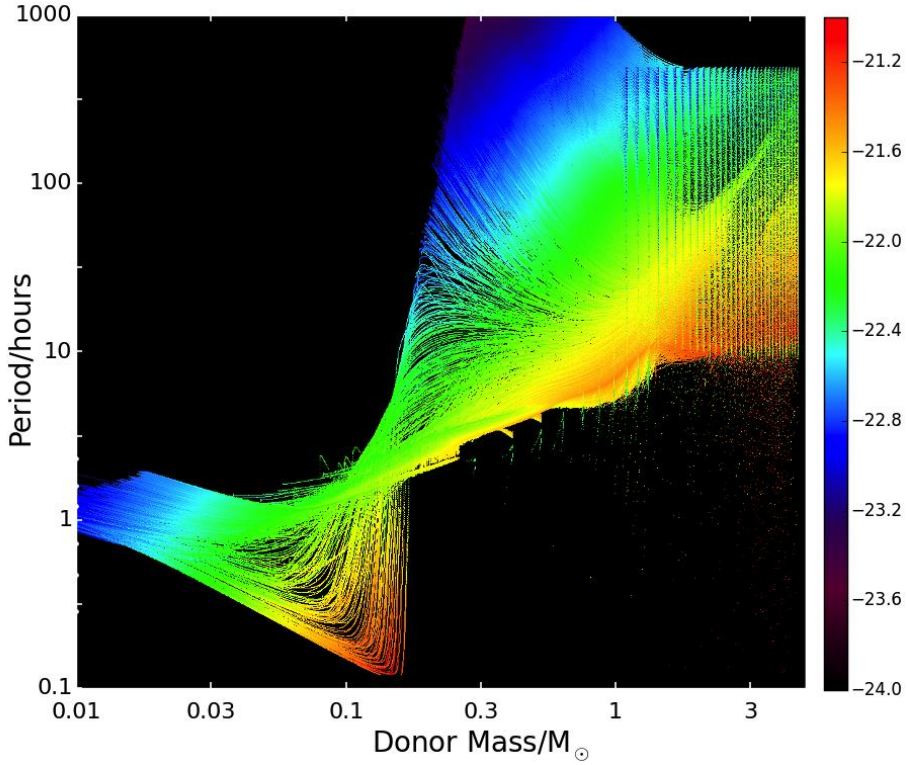
- Gravitasyonel Dalga Kayanakları Olarak Çift Sistemler
- Temel Astrofizik Problemlerin Çöümünde Uydu Teleskoplar: LISA
- Kara Delikler ve Nötron Yıldızların Birleşmesi
- Kara Deliklerde Enerji Taşınımı
- Kara Deliklerin Birleşme Anı ve Gravitasyonel Dalgaların Modellenmesi
- Çift Kara Delik Sistemlerinde Gravitasyonel Dalgalar ve Çerçeve Sürüklenmesi
- Kara Delik Bileşenli Çift Sistemler
- Nötron Yıldızı Bileşenli Çift Sistemler
- Üçlü Sistemlerde Gravitasyonel Dalgalar

Çalışma grubu olarak yıldız evrimi ve yıldız evrimin son aşamaları, kara delikler, çift dejenere sistemler, gravitasyonel dalgalar, nümerik relativite gibi konularda çalışmalar yapılmış ve devam etmektedir. Proje kapsamında elde edilen bulgular hem ulusal hem de uluslararası etkinliklerde sunulmuş ve farklı dergilerde basılmak üzere çalışmalar yapılmıştır. Bu bağlamda;

“Comments on the Effect of Frame Dragging”, “Binary Systems with a Black Hole Component as Sources of Gravitational Waves”, “Angular Momentum Loss and Gravitational wave amplitudes for X-ray Binaries with a Neutron Star Component”, “Long-term photometric monitoring of binary systems with black hole components”, “Long-term photometric monitoring of binary systems with neutron star components”

başlıklı çalışmalar uluslararası toplantılarda poster ve/veya kısa bildirili olarak sunulmuş ve tüm bildirilerde TÜBİTAK desteği belirtilmiştir. Bunun dışında COSPAR toplantısında proje kapsamında farklı öğrencilerin sunacağı 4 adet bildiri kabul edilmiş fakat toplantı iptal edildiğinden sunumlar yapılamamıştır. Son olarak proje ile ilgili detaylı bir sunum Eylül 2016 tarihinde yapılan 20. Ulusal Astronomi Kongresi’nde yapılmış proje çalışmaları Türk astronomları ile paylaşılmıştır. Kongrede ayrıca çalışma grubundan 3 farklı öğrenci de tezleri ile ilgili sunum yapmıştır. Proje tarafından desteklenen lisansüstü tezlerinden elde edilen sonuçlar uluslararası yayın için hazırlanmaktadır.

Proje desteği ile yapılan diğer çalışmalar ise Kara delik bileşenli düşük kütleli X-ışın çiftlerinin ne kadarının çekim dalgası kaynağı olabileceği ve bunların ne kadarı LISA ile gözlenebilir olacağı tartışılan bir çalışma yapılmaktadır. Bu çalışma 2-3 ay içerisinde tamamlanması hedeflenmektedir. Bu çalışmanın dışında CV olarak bilinen çift sistemlerin yaklaşık 55.000 modeli yapılmış ve evrimi tartışılmıştır. Bu çalışmaya çekim dalgaları ile ilgili bir bölüm eklenmiş ve bu proje kapsamında ele alınan bulgular kullanılarak ne tür beyaz cüce bileşenli sistemlerin ne tür çekim dalgası kaynağı olabileceği tartışılmıştır (Şekil 5). Çalışma uluslararası bir dergide kabul görmüş ve yakın zamanda basılacaktır.



Şekil 5. Beyaz cüce bileşenli çift sistemlerin evrimi. Renklendirme çift sistemlerin oluşturacakları çekim dalgası genliğine göre yapılmış ve logaritmik olarak bar da gösterilmiştir (detaylar için bknz. Kalomeni et al. 2016)

5. Kaynaklar

Abbott ve d., LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory , Reports on Progress in Physics, Volume 72, Issue 7, pp. 076901, (2009)

Abramovici ve d., LIGO - The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, Science, 256, 325, (1992)

Asada, H., 2009, “Gravitational wave forms for a three-body system in Lagrange's orbit: Parameter determinations and a binary source test”, PhRvD, 80f4021A

Campanelli ve d., PHYSICAL REVIEW D 75 (2007)

Chakraborty, C., Modak, K. P., and Bandyopadhyay, D., 2014, " Dragging of inertial frames inside the rotating neutron stars", *The Astrophysical Journal*, *790*(1), 2. p. 2. doi:10.1088/0004-637X/790/1/2

Einstein, A., Annalen der Physik, 49, 769, (1916)

Einstein, A., Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsberichte der physikalisch-mathematischen Klasse , 688 (1916)

Einstein, A., Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsberichte der physikalisch-mathematischen Klasse , 154 (1918)

Foucart ve d. PHYSICAL REVIEW D 88, 064017 (2013)

Hulse, R. A.; Taylor, J. H., A High-Sensitivity Pulsar Survey, ApJ, 191, 59 (1974)

Hulse, R. A.; Taylor, J. H., Discovery of a pulsar in a binary system, ApJ, 195L, 51(1975a)

Hulse, R. A.; Taylor, J. H., A deep sample of new pulsars and their spatial extent in the galaxy, ApJ, 201, 55 (1975b)

Köse, O.; Yakut, K., Binary Systems As Gravitational Wave Sources, IAUS, 282, 468 (2012)

Maggiore, M., Gravitational Waves-Theory and Experiments, Oxford University Press (2008)

Misner, C.W.; Thorne, K. S., Wheeler, J. A. Gravitation, (1970)

Morsink, S. M., and Stella, L., 1999, "Relativistic Precession around Rotating Neutron Stars: Effects Due to Frame Dragging and Stellar Oblateness", *The Astrophysical Journal*, *513*(2), 827–844. pp. 827–844. doi:10.1086/306876

Mashhoon, B.; Hehl, F. W.; Theiss, D. S., On the gravitational effects of rotating masses - The Thirring-Lense Papers, 1984, GreGr, 16, 711

Press, William H.; Thorne, Kip S., ARA&A, 10, 335 (1972)

Thirring, H., 1918, "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie", *Physikalische Zeitschrift*, *19, 33*.

Thirring, H., 1921, "Berichtigung zu meiner Arbeit: ‘Über die Wirkung rotierender Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie", *Physikalische Zeitschrift*, *22, 29*.

Thirring, H., and Lense, J., 1918, "Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie", *Physikalische Zeitschrift*, *19, 156*.

Postnov, K. and Yungelson, A., The Evolution of Compact Binary Star Systems, LRR, 9, 6 (2006)

Shibata, M and Taniguchi, K., Merger of binary neutron stars to a black hole: Disk mass, short gamma-ray bursts, and quasinormal mode ringing, PhRvD, 73, 4027 (2006)

Yakut, K.; Kalomeni, B.; Tout, C. A., AML by magnetic breaking and gravitational radiation in relativistic binaries, Proceedings of the VII Microquasar Workshop, 65 (2008)

Yakut, K., Double Degenerate Binary Systems, AIPC, 1379, 206 (2011)

Yakut, K., Black Holes in Binary Systems, AIPC, 1314, 299 (2010)

Yu-Wu, G., De-Hua, W., and Jian-Xun, H., 2008, "Frame Dragging Effect on Properties of Rotating Neutron Stars with Strong Magnetic Field", *Communications in Theoretical Physics*, *50*(6), 1469–1472. pp. 1469–1472. doi:10.1088/0253-6102/50/6/45

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. KADRİ YAKUT
Proje No:	113F097
Proje Başlığı:	Gravitasyonel Dalgalar İle Çift Sistemlerin İncelenmesi
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	EGE Ü. FEN F. ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/09/2013 - 15/09/2016
Onaylanan Bütçe:	247080.0
Harcanan Bütçe:	210045.99
Öz:	Astronomi alanında yapılan gözlemsel ve kuramsal çalışmalar bize evrenin maddece çok azını gözlemleyebildiğimizi göstermiştir. Baryonik maddeden oluşan tüm yıldızları, yıldızlararası ortamı ve galaksiler dışında kalan madde evrenin çok önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Öngörüsü yüz yıl önce yapılan çekim dalgaları Eylül 2015 tarihinde ilk kez doğrudan tespit edilmiş ve bu durum gözlemsel astronomide yeni bir çığır açmıştır. Bu gözlemler ile artık evrende optik, UV, IR, X-ışın, vb. dalgaboylarından farklı olarak kütleli cisimlerin uzay-zamanı bozarak/tedirgin ederek oluşturdukları bozulmaları ölçme olanağı vermiştir. Gravitasyonel dalgalar diğer dalgaboylarında gözlenmesi olanaksız olan bir çok fiziksel süreçi anlamamızı sağlar. Bu dalgaları çalışarak hem temel kuvvetlerden biri olan çekim kuvvetini daha iyi anlamamız hem de evrende bulunan karanlıkta kalmış birçok problemin/noktaların aydınlatılması beklenmektedir. Nötron yıldızı (NY) ve kara delik (KD) çift dizgelerinin tespiti, çok büyük kütleli kara delikler, süpernova aşaması, yıldız birleşmeleri/çarpışmaları, evrenin oluşumu sırasında olası ilksel/ata gravitasyonel dalgaların ölçümü ile başlangıç koşulları hakkında bilgi edinme gibi birçok önemli temel konuları kapsamaktadır. Bu proje kapsamında dejenere ve dejenere olmayan relativistik çift sistemlerin (Y+Y, KD+Y, NY+Y, NY+NY, NY+KD, KD+KD, NY+BC, KD+BC, vb.) relativistik yörüngeleri ve birleşme/çarpışma süreçlerini; dejenere olmayan dönemli yıldızların oluşturabilecekleri gravitasyonel dalga genliklerini kuramsal olarak hesaplama, sonuçların nümerik çözülmesi ve olası çekim dalgası gözlem cihazlarının duyarlılıkları ile test edilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca galaksimizde bulunan yıldızlar için yıldız popülasyonu modelleri yaparak ne tür sistemler hangi evrim yollarından geçerek ileride bu tür çift dejenere sistem olabilecekleri ve bu sistemlerin başta LIGO olmak üzere ne tür çekim dalgası gözlemlerinin yapılmasının mümkün olabileceği tartışılmıştır. Bu proje çekim dalgaları gözlemlerinden yaklaşık 8 yıl önce hazırlanmış, gerekli altyapılar tamamlanmış ve 3 yıl önce TÜBİTAK?a proje olarak önerilmiştir. Bu proje gravitasyonel dalga astronomisinde ilerlemeyi, yeni çalışmalar ortaya koymayı ve bu yeni fizik alanında genç araştırmacılar kazandırmayı hedeflemektedir. Bu bağlamda proje kapsamnında; ?Gravitasyonel Dalga Kayanakları Olarak Çift Sistemler?, ?Kara Delikler ve Nötron Yıldızların Birleşmesi?, ?Kara Deliklerde Enerji Taşınımı?, ?Kara Deliklerin Birleşme Anı ve Gravitasyonel Dalgaların Modellenmesi?, ?Çift Kara Delik Sistemlerinde Gravitasyonel Dalgalar ve Çerçeve Sürüklenmesi?, ?Kara Delik Bileşenli Çift Sistemler?, ?Üçlü Sistemlerde Gravitasyonel Dalgalar? ve ?Nötron Yıldızı Bileşenli Çift Sistemler? gibi lisansüstü tezler yürütülmüştür. Proje kapsamında ayrıca ulusal/uluslararası toplantılarda bildiriler sunulmuş ve yayın çalışmaları yapılmış/yapılmaktadır.
Anahtar Kelimeler:	Gravitasyonel dalgalar, kara delikler, nötron ve kara delik çiftleri, çekim
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır

TÜBİTAK