



T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİTKİ- OTÇUL FARK DENKLEM MODELLERİNİN DAVRANIŞLARI

Düriye KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2011
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Düriye KORKMAZ tarafından hazırlanan "Bitki-Otçul Fark Denklem Modellerinin Davranışları" adlı tez çalışması 15/09/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	.....
Danışman Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU	.....
Üye Yrd. Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU	.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Düriye KORKMAZ

21.09.2011

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİTKİ OTÇUL FARK DENKLEM MODELLERİNİN DAVRANIŞLARI

Düriye KORKMAZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

2011, 67 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. Burak SARAÇOĞLU

Bu çalışmada, Biyoloji anabilim dalında görülen bitki-otçul etkileşim fonksiyonları kullanılarak matematiksel modeller oluşturulmuştur. Ayrıca bu modellerin denge noktalarının dinamikleri incelenmiş ve elde edilen sonuçlarla ilgili nümerik örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Beverton-Holt Fark denklemleri, Bitki-Otçul Modelleri, Lineer olmayan fark denklem sistemi, Denge noktalarının dinamikleri.

ABSTRACT

MS THESIS

BEHAVIOURS OF A PLANT-HERBIVORE DISCRETE MODELS

Düriye KORKMAZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kemal USLU

2011, 67 Pages

Agust

Asst. Prof. Dr. Kemal USLU
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Asst. Prof. Dr. Burak SARAÇOĞLU

In this study, it has been made up *mathematical models* by using functions of plant-herbivore interaction that appear in Biology. Besides, the dynamics of equilibrium points have been examined and numerical illustrations related to obtained results have been given.

Keywords: Beverton-Holt difference equations, Plant-Herbivore model, Non-linear difference equations, The dynamics of equlibrium points.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu Yüksek Lisans Tezi; birinci bölüm Giriş bölümü, ikinci bölüm Literatür Araştırması, üçüncü bölüm Ön Bilgiler, dördüncü bölüm bazı Bitki-Otçul Fark Denklem Sistemleri, beşinci bölüm Sonuç ve Öneriler olmak üzere toplam beş bölümden oluşmaktadır.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek tezimin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Düriye KORKMAZ

KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. ÖN BİLGİLER **6**

3.1. Fark Denklemleri İle İlgili Ön Bilgiler 6
3.2. Fark Denklem Sistemleri İle İlgili Ön Bilgiler 10
3.3. Popülasyon Biyolojisinde Lineer Olmayan Fark Denklem Modelleri 13
3.3.1. Popülasyon Yoğunluğuna Bağlı Tek Tür Modelleri 13
3.3.2. Konak-parazit Sistemleri 16

4. BAZI BİTKİ OTÇUL FARK DENKLEM SİSTEMLERİ **20**

4.1. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^2}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 22

4.2. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 27

4.3. $P_{t+1}=\frac{\alpha rP_t}{1+\beta P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 33

4.4. $P_{t+1}=\frac{r}{1+(r-1)P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 40

4.5. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+(r-1)P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 47

4.6. $P_{t+1}=\frac{rP_t^2}{1+(r-1)P_t^2}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 53

4.7. $P_{t+1}=\frac{KrP_t}{K+(r-1)P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi 58

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **64**

5.1 Sonuçlar 64
5.2 Öneriler 64

KAYNAKLAR 65

ÖZGEÇMİŞ.....67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

$\mathbb{R}^+$: Pozitif Reel Sayılar

$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar

$\mathbb{Z}^+$: Pozitif Tam Sayılar

$\overline{x}$: Denge Noktası

$J_F(x, y)$: Jakobiyen Matris

1. GİRİŞ

Dinamik modellerde bir değişkenin dengeye yakınsayıp yakınsamadığını bulmak için zaman faktörü göz önünde bulundurulur. Değişkenlerin zamanlanması sürekli ya da kesikli değişken olarak iki şekilde yapılır. Sürekli zaman, değişken zamanın her noktasında değişime uğrarken, kesikli zaman değişken zamanının bir zaman döneminde yalnızca bir defa değişmeye uğrar. Sürekli değişim oranları arasındaki denklemler diferansiyel denklemlerle, kesikli değişim oranları arasındaki denklemler ise fark denklemleri ile ifade edilir.

20. yüzyılın başlarında, Fizik biliminde incelenen kuantum teorisindeki ilerlemeler ve Biyoloji bilimindeki genetik olayların gelişmelerinden dolayı tüm doğa olaylarının sürekli değişim oranları ile ifade edilemeyeceği görülmüştür. Günümüzde fark denklemleri, Elektrik- Elektronik mühendisliğinde, devrelerin matematiksel ifadesinde, spektrum analizi ve son yıllarda önemi gittikçe artan yapay zekâ konusunda, Ekonomide arz-talep denklemleri, milli gelir, ekonomik dalgalanmalar gibi problemlerde, Sosyoloji ve Psikoloji gibi sosyal bilimlerde de yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Fark denklem sistemlerinin dinamik modelleri ile gelecekte insan nüfusunun ne olacağı, enerji kaynaklarının kaç yıl yeteceği ve bitki ve otçul popülasyonları incelenerek ekolojik dengenin hangi düzeyde korunacağı gibi soruların yanıtları matematiksel olarak gösterilmektedir.

Biyolojik olaylarda matematiksel sonuçların kullanılması, ileriye yönelik tahminlerde bulunmamızı sağlar. Bu durum doğa problemlerinin çözülmesinde etkin bir rol oynamaktadır. Örneğin orman eko sistemindeki böcek popülasyonun (ağaç güvesi gibi) aşırı bir şekilde büyümesinden dolayı ağaçlarda meydana gelen ciddi tahribatlar orman kayıplarına yol açarak doğal dengeyi bozmaktadır. Böyle bir doğal problemle karşılaşıldığında kimyasal kullanılarak çözüme gitmek hem doğaya hem de insanlara zarar vermektedir. Bu yüzden bu tip doğa problemlerinin matematiksel modelleri incelenerek elde edilen veriler, doğal dengenin hangi düzeyde korunabileceği ya da problemin içinde bulunduğu şartlar altında örneğin 10 yıl veya 100 yıl gibi bir zaman sonra ne kadar büyüyüp azalacağı konusundaki tahminlerde bulunmamızı sağlar. Dolayısıyla bu noktada teorik varsayımların öneminin çok büyük olduğu görülmektedir.

Bu çalışmada amacımız; Biyoloji anabilim dalı üzerinde farklı popülasyon modelleri ile ilgili problemlerde matematiğin özelliklede fark denklemlerinin nasıl

kullanıldığını görebilmek ve elde edilen sonuçların farklı durumlardaki davranışlarını incelemektir. Literatürde bizim çalışmamızı destekleyen pek çok çalışma mevcuttur. Örneğin Henson ve ark. deneysel çalışmalar vasıtasıyla böcek popülasyonun dinamiğini incelemişlerdir. Yine Kang ve ark. ağaç güvesi popülasyon modeli çalışmışlardır.

Bu çalışmanın, birinci bölümünde; çalışmanın içeriği ve amacı hakkında bilgiler verilmiş, ikinci bölümünde; literatürde daha önceden yapılmış örnek makaleler ile ilgili kısa bilgiler verilmiş, üçüncü bölümünde; kullanılan gerekli tanım ve teoremler ile popülasyon modellerinin genel çerçeveleri verilerek daha önce incelemiş örnek modeller gösterilmiş, dördüncü bölümünde; bazı bitki-otçul fark denklem modellerinin dinamiği incelenmiş, elde edilen teorik sonuçlar nümerik örnekler ve grafiklerle desteklenmiş ve beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Henson S.M., Costantino R.F., Cushing J.M., Dennis B., Desharnais R.A. (1999) yapmış oldukları çalışmada,

$$L_{t+1} = bA_t e^{(-c_{ea}A_t - c_{el}L_t)}$$
$$P_{t+1} = (1-\mu_l)L_t$$
$$A_{t+1} = P_t e^{(-c_{pa}A_t)} + (1-\mu_a)A_t$$

otonom fark denklem modelinin dinamiğini incelemişlerdir.

Doebeli M., Jong G.D. (1999) yaptıkları çalışmada,

$$N_{t+1} = N_t \overline{w}(N_t)$$
$$p_{t+1} = P_t \frac{p_t f_1(N_t) + (1-p_t) f_2(N_t)}{\overline{w}(N_t)}$$

fark denklem sistemini elde ederek, bu modelin dinamiğini ve parametrelerin hassasiyetini incelemişlerdir.

Cushing J.M., Henson S.M. (2001) yaptıkları çalışmada,

$$x_{t+1} = r \frac{1}{1+(r-1)\dfrac{x_t}{1+\alpha(-1)^t}} x_t$$

monoton fark denklemlerinin periyodikliğini, popülasyon dinamiği uygulamalarını göz önüne alarak çalışmışlardır.

Briggs C.J., Hoopes M.F. (2004) yaptıkları çalışmada,

$f(p_t) = e^{(-ap_t)}$ (Nicholson-Bailey fonksiyonu, Nicholson ve Bailey, 1935)

$f(p_t) = \left(1 + \dfrac{ap_t}{k}\right)^{-k}$ (Negatif-Binomiyel fonksiyonu, Mayıs 1978)

$f(p_t) = e^{\left(-a(p_t)^{1-m}\right)}$ (Hassel-Varley fonksiyonu, Hassel ve Varley,1969)

parazitizm fonksiyonları olmak üzere

$$H_{t+1} = \lambda H_t f(p_t)$$
$$p_{t+1} = cH_t\left[1 - f(p_t)\right]$$

konak-parazitoit (Host-Parasitioid) modelleri üzerine literatür eleştirisi yapmışlardır.
Buchanan R.J. (2005) yapmış olduğu çalışmada,

$$u_{t+1} = u_t e^{r\left(1-\frac{u_t}{K}\right)-av_t}$$
$$v_{t+1} = u_t(1 - e^{-av_t})$$

fark denklem sisteminin dinamiğini incelemiştir.
Elaydi S., Sacker R.J. (2006) çalışmalarında,

$$x_{n+1} = \frac{\mu K x_n}{K + (\mu - 1)x_n} \ , \ x_0 \geq 0 , \ K > 0$$

Beverton-Holt denklemleri gibi otonom olmayan fark denklemleri üzerinde zaman faktörünü ele alan bir metot geliştirmişlerdir. Bu metot, Beverton-Holt denklemleri ile ilişkili Henson ve Cushing varsayımlarını kanıtlamak amacıyla uygulanmıştır.
Deghan M., Nasri M., Douraki M.J. (2005) çalışmalarında ilk olarak,

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{b + cz_n}$$
$$y_{n+1} = dy_n + ex_{n+1}z_n$$
$$z_{n+1} = fz_n + y_{n+1}$$

fark denklem sistemini, sürekli HIV enfeksiyon modelinin eş fark denklem modeli olarak elde etmişlerdir. Daha sonra, fark denklem sisteminin dengesinin global ve lokal asimptotik kararlılığı, sınırlılığı, kararlılık ve dallanma gibi dinamikleri araştırmışlardır.

Kang Y., Armbruster D., Kuang Y. (2008) çalışmalarında $a > 0$, $r > 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n e^{r[1-x_n]-ay_n}$$
$$y_{n+1} = x_n \left[1 - e^{-ay_n}\right] e^{r[1-x_n]}$$

fark denklem sistemini, belli bir bitki-otçul etkileşimini çalışmak için modellemişlerdir. Elde edilen iki boyutlu fark denklem modelinde durum değişkenleri olarak yaprak ve otçul biyokütlesi kullanılmıştır.

Kang Y., Chesson P. (2010) çalışmalarında,

$$x_{t+1} = x_t f(x_t, y_t)$$
$$y_{t+1} = y_t g(x_t, y_t)$$

fark denklem sisteminin non-lineerliliğe ilişkin kavramlarını geliştirmişler ve bu kavramları popülasyon dalgalanmalarında türlerin uzun sürede ve düşük yoğunluktaki büyüme oranı etkisinin nasıl olacağını göstermek için kullanmışlardır.

Kang Y., Armbruster D. (2010) çalışmalarında,

$$P_{t+1} = F(P_t)e^{-aH_t} \qquad P_{t+1} = F(P_t)e^{-aH_t}$$
$$H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right] \quad \text{ve} \quad H_{t+1} = F(P_t)\left[1 - e^{-aH_t}\right]$$

genel bitki-otçul etkileşim modellerini incelemişler ve genel bitki-otçul modellerinin dinamikleri üzerinde monoton bitki büyüme fonksiyonlarının etkisini çalışmışlardır.

Kang Y., Armbruster D., (2011) çalışmalarında,

$$P^I_{n+1} = P^I_n e^{r(1-P^I_n)-a(1-l)H^I_n}$$
$$H^I_{n+1} = P^I_n e^{r(1-P^I_n)}\left[1 - e^{-a(1-l)H^I_n}\right]$$

bitki-böcek fark zaman model çiftini çalışmışlar ve bu modelin popülasyon dinamiğindeki hem lokal hem de global yayılım etkisinin nasıl yoğunluklarda olduğunu göstermişlerdir.

3. ÖN BİLGİLER

3.1. Fark Denklemleri İle İlgili Ön Bilgiler

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler Kulenovic M. R. S., Merino O., (2002) kitabından alınmıştır.

Tanım 3.1.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı, sürekli ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O halde;

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,... \tag{3.1.1}$$

denklemine birinci mertebeden fark denklemi denir. $x_0=d$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin pozitif yörüngesi

$$\gamma^{+}(d)=\{x_0,x_1,x_2,...\}=\{d,f(d),f(f(d)),...\}$$

dizisidir.

Aşağıda verilen örnekler Keshet L. E., (2005) kitabından alınmıştır.

Örnek 3.1.1. (Hücre Bölünmesi)

Farz edelim ki; popülâsyondaki her hücre eş zamanlı olarak bölünsün. $M_1,M_2,...,M_n$ sırasıyla birinci, ikinci, … , *n*. neslin hücre sayısı olsun. O zaman peş peşe nesiller ile ilişkili bir denklem (reküras bağıntısı)

$$M_{n+1}=aM_n \tag{3.1.2}$$

şeklinde kolayca ifade edilebilir. Burada reel bir popülasyon için;

$a>0$ olması biyolojik olarak anlamlı

$a=0$ olması ilginç olmayan

$a<0$ olması gerçek dışı

bir durumdur. Varsayalım ki başlangıçta M_0 hücre olsun. Acaba *n* nesil sonra popülasyon nasıl değişir? (3.1.2) denkleminde iterasyon işlemi uygulanırsa,

$$M_{n+1} = a(aM_{n-1}) = a[a(aM_{n-2})] = \ldots = a^{n+1}M_0$$

elde edilir. Böylece n. nesil için,

$$M_n = a^n M_0$$

olur. Burada a'nın mutlak değerce değeri, popülâsyonun zamanla büyüyüp büyümediğini veya azalıp azalmadığını belirleyecektir. Yani,

$|a| > 1$ ise M_n önceki nesle göre artan

$|a| < 1$ ise M_n önceki nesle göre azalan

$|a| = 1$ İse M_n sabittir.

Örnek 3.1.2. (Böcek Popülasyonu)

a_n n. nesildeki yetişkin dişi yaprak biti sayısı, p_n n. nesildeki yavru sayısı, m genç yaprak bitlerinin rasyonel ölüm oranı, f dişi yaprak biti başına düşen yavru sayısı, r dişi yaprak bitlerinin tüm yetişkin yaprak bitlerine oranı, a_0 başlangıçtaki dişi yaprak biti sayısı olmak üzere yavru sayısını ifade eden fark denklemi,

$$p_{n+1} = fa_n \tag{3.1.3}$$

şeklinde oluşturulur. Bu denklemde p_{n+1} $(n+1)$. neslin yavru sayısını, f dişi başına düşen yavru sayısını, a_n bir önceki neslin dişi sayısını göstermektedir. Hayatta kalmayı başaran ergenler $1-m$, büyüyen yavruların da dâhil edilmesinden sonraki r oranı göz önüne alınırsa,

$$a_{n+1} = r(1-m)p_{n+1} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. f, r, m sabit olmak üzere (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerinden,

$$a_n = \left[fr(1-m)\right]^n a_0$$

böcek popülâsyonunu ifade eden denklem bulunur.

Tanım 3.1.2. (3.1.1) denklemini ele alalım. Eğer her $n \geq 0$ değeri için

$$f(\overline{x}) = \overline{x} \tag{3.1.5}$$

oluyorsa $\overline{x}$'e (3.1.1) denkleminin denge noktası veya f sürekli fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Tanım 3.1.3. $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$f^r(x^*) = \overline{x} \text{ ve } f^{r-1}(x^*) \neq \overline{x}$$

ise x^*'a (3.1.1) denkleminin er geç (eventually) denge noktası veya f sürekli fonksiyonunun er geç sabit noktası denir.

Tanım 3.1.4. (Kararlılık)

(i) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \overline{x}| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan x_0 başlangıç koşulu için,

$$|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman (3.1.1) denkleminin denge noktası kararlıdır denir.

(ii) Eğer (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktasına kararsızdır denir.

(iii) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve $\delta > 0$ için

$$|x_0 - \overline{x}| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan x_0 başlangıç değeri için,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

ise o zaman (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (sink).

(iv) $I \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

ise, o zaman (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası global çekicidir denir.

(v) Eğer (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası hem kararlı hem de global çekici ise, o zaman denge noktasına global asimptotik kararlı denir.

(vi) $I \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in I$ için

$$0 < |x_0 - \overline{x}| < r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, o zaman (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktasına kaynak noktası (source) denir ve bu durumda

$$|x_N - \overline{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $N \geq 1$ sayısı vardır.

Tanım 3.1.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı, sürekli ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O halde

$$y_{n+1} = f'(\overline{x}) y_n$$

denklemine (3.1.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

Teorem 3.1.1. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $|f'(\bar{x})|<1$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $|f'(\bar{x})|>1$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

(iii) Eğer $|f'(\bar{x})|\neq 1$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası hiperboliktir.

(iv) Eğer $|f'(\bar{x})|=1$ ise, o zaman (3.1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası non-hiperboliktir.

3.2. Fark Denklem Sistemleri İle İlgili Ön Bilgiler

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler Kulenovic M. R. S., Merino O., (2002) kitabından alınmıştır.

Tanım 3.2.1. $f,g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. O halde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \qquad n=0,1,... \tag{3.2.1}$$

sistemine birinci mertebeden fark denklem sistemi denir.

Tanım 3.2.2. (3.2.1) fark denklem sistemini göz önüne alalım. Eğer,

$$\bar{x} = f(\bar{x},\bar{y})$$
$$\bar{y} = g(\bar{x},\bar{y})$$

olacak şekilde bir $(\bar{x},\bar{y})$ noktası varsa, bu noktaya (3.2.1) denklem sisteminin bir denge noktası denir.

Tanım 3.2.3. $(\bar{x},\bar{y})$, (3.2.1) denklem sisteminin bir denge noktası olsun.

i) Her $\varepsilon>0$ için

$$\|(x_0,y_0)-(\bar{x},\bar{y})\|<\delta$$

eşitsizliğini sağlayan her (x_0, y_0) başlangıç koşulu için,

$$\left\|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa, (3.2.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasına kararlıdır denir.

ii) $\left\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\right\| < r$

eşitsizliğini sağlayan tüm (x_0, y_0) başlangıç koşulu için,

$n \to \infty$ iken $(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y})$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, (3.2.1) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 3.2.4. (3.2.1) denklem sistemini göz önüne alalım. $(\bar{x}, \bar{y})$, $\mathrm{F} = (f, g)$ fonksiyonunun bir denge noktası ve ayrıca f ve g fonksiyonları $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasında tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde, F fonksiyonunun $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

dir.

Tanım 3.2.5. $J_{\mathrm{F}}(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen ve lineer bir fonksiyon olsun. O halde

$$J_F(p,q)(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})x+\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})y\\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})x+\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})y\end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

matrisine F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasındaki lineerleştirilmesi denir.

Tanım 3.2.6. $(\bar{x},\bar{y})$, F fonksiyonun denge noktası olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer $J_F(\bar{x},\bar{y})$ Jakobiyen matrisinin birim çember içinde kalan özdeğerleri yoksa o zaman F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasına hiperboliktir denir.

ii) Eğer $J_F(\bar{x},\bar{y})$ Jakobiyen matrisinin birim çember içinde kalan en az bir tane özdeğeri varsa, o zaman F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasına non- hiperboliktir denir.

Teorem 3.2.1. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

F=(f,g), $W\subset\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı, sürekli, diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $(\bar{x},\bar{y})$, F fonksiyonunun bir denge noktası olsun.

i) Eğer $J_F(\bar{x},\bar{y})$ Jakobiyen matrisinin tüm özdeğerlerinin modülü 1'den küçük ise, F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii) Eğer $J_F(\bar{x},\bar{y})$ Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinden en az bir tanesinin modülü 1'den büyük ise, F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası kararsızdır.

iii) F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasının yerel asimptotik olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2-\mathrm{iz}J_F(\bar{x},\bar{y})\lambda+\det J_F(\bar{x},\bar{y})=0 \tag{3.2.4}$$

karakteristik denkleminin her çözümünün birim çember içinde kalmasıdır. Yani,

$$\left|\mathrm{iz}J_F(\bar{x},\bar{y})\right|<1+\det J_F(\bar{x},\bar{y})<2$$

olmasıdır.

iv) F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasının repeller olması için gerek ve yeter şart (3.2.4) karakteristik denkleminin her çözümünün birim çember dışında kalmasıdır. Yani,

$$\left|\mathrm{iz}J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| < \left|1+\det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| \text{ ve } \left|\det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| > 1$$

olmasıdır.

v) F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasının eyer noktası (saddle) olması için gerek ve yeter koşul (3.2.4) denkleminin bir kökünün birim çemberin içinde ve bir kökünün de birim çemberin dışında kalmasıdır. Yani,

$$\left|\mathrm{iz}J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| > \left|1+\det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| \text{ ve } \mathrm{iz}J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})^2 - 4\det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y}) > 0$$

olmasıdır.

vi) F fonksiyonunun $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktasının non-hiperbolik olması için gerek ve yeter koşul (3.2.4) karakteristik denkleminin en az bir kökünün birim çember içinde kalmasıdır. Yani,

$$\left|\mathrm{iz}J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| = \left|1+\det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| \text{ veya } \det J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y}) = 1 \text{ ve } \left|\mathrm{iz}J_{\mathrm{F}}(\bar{x},\bar{y})\right| \le 2$$

olmasıdır.

3.3. Popülasyon Biyolojisinde Lineer Olmayan Fark Denklem Modelleri

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler Keshet L. E., (2005) kitabından alınmıştır.

3.3.1. Popülasyon Yoğunluğuna Bağlı Tek Tür Modelleri

Popülasyon yoğunluğu, büyüme oranı, üreme oranı ve ölüm oranı gibi değişkenlere bağlı olsun. Bu durumda

$$N_{t+1} = f(N_t) \tag{3.3.1.1}$$

fark denklemi popülasyon yoğunluğunu ifade eden bir modeldir. Genellikle tek bir türün popülasyon denklemi (örneğin böcekler) (3.3.1.1) denklemi gibi benzer denklemler ile tanımlanır. Burada, $f(N_t)$ popülasyon yoğunluğunun lineer olmayan bir fonksiyonudur. f fonksiyonu popülasyondaki peş peşe nesillere ait veriler tarafından elde edilir.

Tanım 3.3.1.1. (Varley, Gradwell ve Hassel Modeli, 1973)

λ büyüme oranı, $\frac{1}{\alpha}N_t^{-b}$ yavru döneminden yetişkinlik dönemine kadar geçen süredeki hayatta kalabilme oranı, (λN_t) t nesildeki yavru sayısı ve $\lambda, b, \alpha > 0$ olmak üzere

$$N_{t+1} = \left(\frac{1}{\alpha}N_t^{-b}\right)(\lambda N_t) \tag{3.1.1.2}$$

fark denklemi Varley, Grandwell ve Hassel tarafından ortaya koyulmuştur. Bu denklemde hayatta kalanların oranı 1 ve 1'den küçük olabileceği için $N_t > N_0$ olması biyolojik olarak mantıklıdır. (3.1.1.2) denkleminin denge noktası

$$\overline{N} = \frac{\lambda}{\alpha}\overline{N}^{(1-b)}$$

denkleminin çözümü ile bulunur. Buna göre (3.1.1.2) denkleminin denge noktasının

$$\overline{N} = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{1/b} \tag{3.1.1.3}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3.1.1. (3.1.1.2) denkleminin (3.1.1.3) denge noktasında kararlı olması için gerek ve yeter şart $0 < b < 2$ olmasıdır.

Sonuç 3.3.1.1. (3.1.1.2) denkleminde $b = 0$ durumunda hayatta kalabilme oranı popülasyon yoğunluğuna bağlı değildir. Yani popülasyon λ/α oranında büyür. Buna

göre b'nin kararlılık değerleri için alt sınır anlamlıdır. $b>2$ durumunda popülasyonun ani artış yapabileceği potansiyeli yüzünden popülasyon kararsızdır.

Tanım 3.3.1.2. $\lambda = e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}$ popülasyonun yoğunluğuna bağlı üreme oranı ve r, K pozitif sabitler olmak üzere,

$$N_{t+1} = N_t e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} \tag{3.1.1.4}$$

ifadesi popülasyon biyolojisine uygulanmış bir fark denklemidir. Bu denklemin denge noktası

$$\overline{N} = \overline{N} e^{r\left(1-\frac{\overline{N}}{K}\right)}$$

eşitliğinden elde edilir. Açıktır ki, (3.1.1.4) denklemi $\overline{N} = K$ denge noktasına sahiptir.

Teorem 3.3.1.2. $\overline{N} = K$, (3.1.1.4) denkleminin denge noktası olsun. Bu takdirde (3.1.1.4) denkleminin $\overline{N} = K$ denge noktasında kararlı olması için gerek ve yeter şart $0 < r < 2$ olmasıdır.

Sonuç 3.3.1.2. (3.1.1.4) denklemi göz önüne alınırsa,

$N < K$ olduğu zaman üreme oranı $\lambda > 1$

$N > K$ olduğu zaman üreme oranı $\lambda < 1$

olduğu görülmektedir.

Tanım 3.3.1.3. λ, a, b pozitif sabitler olsun. Buna göre,

$$N_{t+1} = \lambda N_t \left(1 + aN_t\right)^{-b} \tag{3.1.1.5}$$

fark denklemi Hassel tarafından 1975 yılında ortaya atılmıştır. Bu denklemin denge noktası

$$\overline{N} = \lambda \overline{N} \left(1 + a\overline{N}\right)^{-b}$$

denkleminin çözümü ile bulunur. Buradan (3.1.1.5) denkleminin

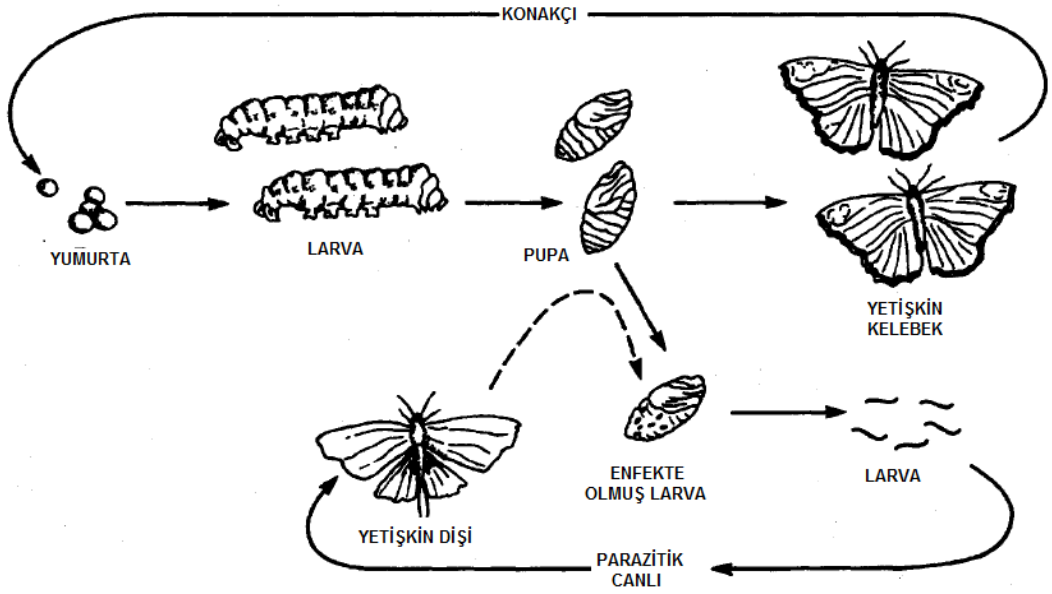
$$\bar{N} = \frac{\lambda^{1/b} - 1}{a} \qquad (3.1.1.6)$$

denge noktasına sahip olduğu açıktır.

Teorem 3.3.1.3. (3.1.1.5) denkleminin (3.1.1.6) denge noktasında kararlı olması için gerek ve yeter şart $0 < b\left(1 - \lambda^{1/b}\right) < 2$ olmasıdır.

3.3.2. Konak-parazit Sistemleri

Konak-parazit modelleri en çok böcek popülasyonlarında görülmektedir. Böyle tip bir modelin bazı ayırt edici özellikleri vardır, örneğin böcekleri model alan bir sistemde, her iki türün yaşam döngüsünde de birden fazla safha bulunur. Bunlar yumurta, larva, pupa ve yetişkin dönemleridir. Parazit tür konak olan türden iki şekilde faydalanır. Parazitoit yumurtalarını konağın dış yüzeyine bırakır, bazen de larva ve pupa dönemlerinde olan konağın etenine enjekte eder. Parazitoitin yumurtalarını etene enjekte ettiği durum konağa zarar veren bir durumdur. Bu şekilde larva parazitoit gelişip büyürken konağı tüketerek öldürür. Konak-parazit sisteminin şematik gösterimi aşağıdaki şekildedir.



Şekil 3.1. Yetişkin dişi parazitoit yumurtalarını konağın üzerine ya da larva veya pupa olan konağın içine depolar. Enfekte olan konak gelişen parazitoit yumurtasından dolayı ölür. Enfekte olmamış konak gelişerek yetişkin olur ve bir sonraki neslin konaklarını oluşturur.

Bu sistemin basit bir modeli aşağıdaki varsayımlara sahiptir;

- Paratize edilmiş konaklar, bir sonraki neslin parazitoitleri olacaklardır.
- Paratize edilmemiş konaklar, kendi yavrularını oluşturacaklardır.
- Paratize edilmiş konakların oranı, iki türün karşılaşma oranına bağlıdır. Genellikle bu oran bir yada iki türün popülasyon yoğunluğuna bağlıdır.

$N_t : t$ nesildeki konak türün yoğunluğu

$P_t : t$ nesildeki Parazit türün yoğunluğu

$f = f(N_t, P_t)$: Paratize edilmemiş konakların oranı

λ : Konak türün üreme oranı

c : Parazitoitin tek bir konak üzerindeki canlı yumurta sayısı

N_{t+1} : Bir önceki nesildeki konakların sayısı × Paratize edilmemiş konakların oranı × Üreme oranı (λ)

P_{t+1} : Bir önceki nesildeki paratize edilmiş konakların sayısı × Paratizoitlerin doğurtkanlık oranı (c)

$\left[1 - f(N_t, P_t)\right]$: Paratize edilmiş konakların oranı

olmak üzere,

$$N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t, P_t)$$

$$P_{t+1} = cN_t\left[1 - f(N_t, P_t)\right]$$

şeklindeki fark denklem sistemi konak-parazit modellerinin genel çerçevesini oluşturmaktadır.

Tanım 3.3.2.1 (Nicholson-Bailey)

Nicholson ve Bailey, konak-parazit türlerinin karşılaşma sayısı ve paratizizm oranı hakkında şu varsayımı ileri sürmüşlerdir;

- Karşılaşma rasgele meydana gelir. Parazitoitler ile konakların karşılaşma sayısı N_e, türlerin popülasyon yoğunluğu ile orantılıdır.

Parazitoitler ile konakların karşılaşma sayısı, a parazitoitlerin konak arama verimliliğini temsil eden bir sabit olmak üzere;

$$N_e = aN_tP_t$$

şeklinde ifade edilir. Av-avcı arasındaki karşılaşmalar gibi rasgele olaylar için tanımlanan olasılık dağılımı poisson dağılımıdır. Konağın yaşam süresi gibi belli bir zaman aralığında meydana gelecek olayların sayısını veren bu olasılık, poisson dağılımındaki peşpeşe terimler tarafından bulunur. Örneğin, r olayın olasılığı;

$$P(r) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}$$

dir. Burada μ verilen zaman aralığındaki olayların ortalama sayısıdır. Konak tür ile parazit türün karşılaşması durumunda, birim zaman başına düşen ortalama karşılaşma sayısı;

$$\mu = \frac{N_e}{N_t} = \frac{aP_tN_t}{N_t} = aP_t$$

olarak bulunur. Böylece, konak türün yaşam boyu parazit türle karşılaşmama olasılığı;

$$f(N_t, P_t) = P(0) = \frac{e^{-aP_t}(aP_t)^0}{0!} = e^{-aP_t}$$

şeklinde elde edilir. Buradan a parazitoitlerin konak türü arama verimliliğinin parametresi olmak üzere, Nicholson-Bailey modeli:

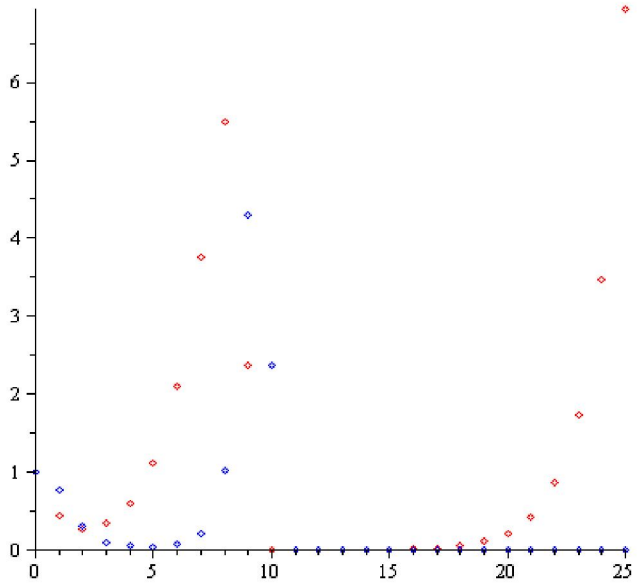
$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} &= cN_t(1-e^{-aP_t}) \end{aligned} \qquad (3.3.2.1)$$

şeklindedir. Bu sistemin denge noktaları,

$$(\bar{N}, \bar{P}) = \left(\frac{\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)ac}, \frac{\ln \lambda}{a} \right) \qquad (3.3.2.2)$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.2.1. (3.3.2.1) Nicholson-Bailey modeli, (3.3.2.2) denge noktasında kararsızdır. Bu durum aşağıdaki şekilde açıkça görülmektedir.



Şekil 3.2. Nicholson-Bailey modeli, $c=1, \lambda=2, a=1.5$

Tanım 3.3.2.2. (Modifiye Edilmiş Nicholson-Bailey Modeli)

Beddington ve ark. konak-parazit modelleri hususunda şu varsayımı ileri sürmüşlerdir;

- Parazitoitlerin varlığında, konak popülasyonu belli bir yoğunluk ile sınırlı bir biçimde büyür.

Böylece, K çevrenin taşıma kapasitesi, $\lambda N_t = e^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}$ büyüme oranı olmak üzere;

$$N_{t+1} = N_t e^{\left[r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)-aP_t\right]}$$

$$P_{t+1} = N_t(1-e^{-aP_t})$$

şeklindeki fark denklem sistemi, Beddington ve ark. (1975) tarafından Nicholson-Bailey modelinin revise edilmesi ile elde edilmiştir. Bu sistemde $P=0$ olursa, konak popülasyonu $N_t = K$ yoğunluğunda büyür, eğer $N_t > K$ ise popülasyon azalır.

4. BAZI BİTKİ OTÇUL FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde, Yun Kang, Dieter Armbruster ve Yang Kuang'ın Nicholson-Bailey modeli üzerine yapmış oldukları çalışmalardan yararlanılmıştır. Buna göre,

P_t: t nesildeki yenilebilir bitki biyokütlesinin yoğunluğu

H_t: t nesildeki otçul popülasyonun yoğunluğu

$f(r,P_t)$: Bitki başına düşen biyokütle yoğunluğunun büyüme oranını gösteren fonksiyon ve $f(r,0)=r$

$g(a,H_t)$: Bitki popülasyonu büyüme oranı üzerinde otçulun etkisini gösteren fonksiyon ve $g(a,0)=1$

r: Bitkinin maksimum büyüme oranını ifade eden parametre

a: Beslenme gibi otçul tarafından bitkiye verilen zararı ifade eden parametre

$h(P_t)$: Popülasyonun bitki yoğunluğu fonksiyonu

$l(H_t)$: Popülasyonun lineer olmayan otçul yoğunluğu fonksiyonu

olmak üzere, Kang, Armbruster ve Kuang bitki-otçul fark denklem modeli;

$$P_{t+1}=P_t f(r,P_t)g(a,H_t)$$
$$H_{t+1}=h(P_t)l(H_t)$$

şeklindedir. Kang, Armbruster ve Kuang aşağıdaki varsayımlara göre;

- Popülasyonda otçul olmadan, bitki popülasyonunun biyokütlesi monoton bir şekilde arttığı düşünülür. O halde $F(r,P_t)$, otçul tüketimi için yeni yaprakların miktarını belirleyici bir fonksiyondur.
- Popülasyonda otçullar bitkiyi rastgele bir biçimde arar. a otçulun tükettiği toplam biyokütle miktarı ile bağlantılı olan sabit bir parametre olduğuna göre, otçulların ataklarından sonra bitki popülasyonundaki biyokütle e^{-aH_t} oranında azalacaktır. Bu durumda, $g(a,H_t)=e^{-aH_t}$ olarak alınırsa $P_{t+1}=P_t f(r,P_t)e^{-aH_t}$ şeklinde bulunur.
- Bitkilerdeki biyokütlenin, otçul biyokütlesine nasıl dönüştüğünü ifade eden $h(P_t)$ fonksiyonudur. Eğer otçul bitki topraktan beslenerek büyümeden önce bitkiye atak yapmışsa, $h(P_t)=P_t$ aksi takdirde $h(P_t)=P_t f(r,P_t)$ şeklinde elde

edilir. Otçulun biyokütlesi yediği bitki biyokütlesi kadar olacağından, $l(H_t)$ otçul tarafından tüketilen $h(P_t)$ oranını ifade eder. Buna göre $l(H_t)=1-e^{-aH_t}$ şeklinde olup, otçulun bitkilere atak yapma zamanına göre otçulun biyokütlesi, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ veya $H_{t+1}=P_t f(r,P_t)\left[1-e^{-aH_t}\right]$ olarak elde edilir.

bitki-otçul fark denklem modelini;

Model 1. Eğer otçul bitkiye, bitki topraktan beslenerek büyümeden önce atak yaparsa sistemin modeli;

$$P_{t+1}=P_t f(r,P_t)e^{-aH_t}=F(r,P_t)e^{-aH_t}$$
$$H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$$

olarak elde etmişlerdir.

Model 2. Şayet otçul bitkiye, bitki topraktan beslenerek büyüdükten sonra atak yaparsa sistemin modeli;

$$P_{t+1}=P_t f(r,P_t)e^{-aH_t}=F(r,P_t)e^{-aH_t}$$
$$H_{t+1}=P_t f(r,P_t)\left[1-e^{-aH_t}\right]$$

olarak elde etmişlerdir.

Bu bölümde, $F(r,P_t)=\dfrac{rP_t}{1+P_t^2}$, $F(r,P_t)=\dfrac{rP_t}{1+P_t^3}$, $F(r,P_t)=\dfrac{\alpha rP_t}{1+\beta P_t}$ fonksiyonları göz önüne alınarak elde edilen fark denklem sistemlerinin denge noktalarının kararlılığı incelenerek, elde edilen teorik sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, Henson ve Cushing tarafından periyodikliği çalışılan $F(r,P_t)=\dfrac{r}{1+(r-1)P_t}$, $F(r,P_t)=\dfrac{rP_t}{1+(r-1)P_t}$ fonksiyonları, Holling tipindeki $F(r,P_t)=\dfrac{rP_t^2}{1+(r-1)P_t^2}$ fonksiyonu ve Elaydi ve Sacker tarafından çalışılan $F(r,P_t)=\dfrac{KrP_t}{K+(r-1)P_t}$ fonksiyonu ile elde edilen belirli fark sistemlerinin denge noktalarının da dinamikleri incelenerek, bunlarla ilgili nümerik sonuçlar grafikler ile gösterilmiştir.

4.1. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^2}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^2}e^{-aH_t},\ H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t=0,1,... \tag{4.1.1}$$

fark denklem sisteminin kararlılığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.1.1. $r>1$ olmak üzere, (4.1.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H}=0$ olsun. Bu takdirde Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P}=\frac{r\bar{P}}{1+\bar{P}^2}$$
$$\bar{P}^3+(1-r)\bar{P}=0$$
$$\bar{P}(\bar{P}^2+(1-r))=0$$

olup, buradan $\bar{P}_1=0$, $\bar{P}_2=\sqrt{r-1}$, $\bar{P}_3=-\sqrt{r-1}$ bulunur. Dolayısıyla $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.1.2. $r>1$ olmak üzere, (4.1.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

$$J_F(\sqrt{r-1},0)=\begin{bmatrix} \frac{2-r}{r} & (-a)\sqrt{r-1} \\ 0 & a\sqrt{r-1} \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

$$J_F(-\sqrt{r-1},0)=\begin{bmatrix} \frac{2-r}{r} & a\sqrt{r-1} \\ 0 & (-a)\sqrt{r-1} \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

dir.

İspat. $F=(f,g)$, (4.1.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{rP}{1+P^2}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{r(1-P^2)e^{-aH}}{\left(1+P^2\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{rP}{1+P^2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(0,0)=\frac{r(1-0^2)e^{-a0}}{\left(1+0^2\right)^2}=r,\ \frac{\partial f}{\partial H}(0,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r0}{1+0^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(0,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(0,0)=a0e^{-a0}=0$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.1.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ denge noktası için,

$$\frac{\partial f}{\partial P}(\sqrt{r-1},0)=\frac{r(1-(\sqrt{r-1})^2)e^{-a0}}{\left(1+(\sqrt{r-1})^2\right)^2}=\frac{2-r}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}(\sqrt{r-1},0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r\sqrt{r-1}}{1+(\sqrt{r-1})^2}\right)=(-a)\sqrt{r-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(\sqrt{r-1},0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(\sqrt{r-1},0)=a(\sqrt{r-1})e^{-a0}=a\sqrt{r-1}$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.1.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(\sqrt{r-1},0)=\begin{bmatrix}\frac{2-r}{r} & (-a)\sqrt{r-1}\\ 0 & a\sqrt{r-1}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktası, elde edilen kısmi türevlerde yerine konulursa,

$$\frac{\partial f}{\partial P}(-\sqrt{r-1},0)=\frac{r(1-(-\sqrt{r-1})^2)e^{-a0}}{\left(1+(-\sqrt{r-1})^2\right)^2}=\frac{2-r}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}(-\sqrt{r-1},0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r(-\sqrt{r-1})}{1+(-\sqrt{r-1})^2}\right)=a\sqrt{r-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(-\sqrt{r-1},0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(-\sqrt{r-1},0)=a(-\sqrt{r-1})e^{-a0}=(-a)\sqrt{r-1}$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.1.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(-\sqrt{r-1},0)=\begin{bmatrix}\frac{2-r}{r} & a\sqrt{r-1}\\ 0 & (-a)\sqrt{r-1}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.1. $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ noktaları (4.1.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) (4.1.1) denklem sisteminin, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

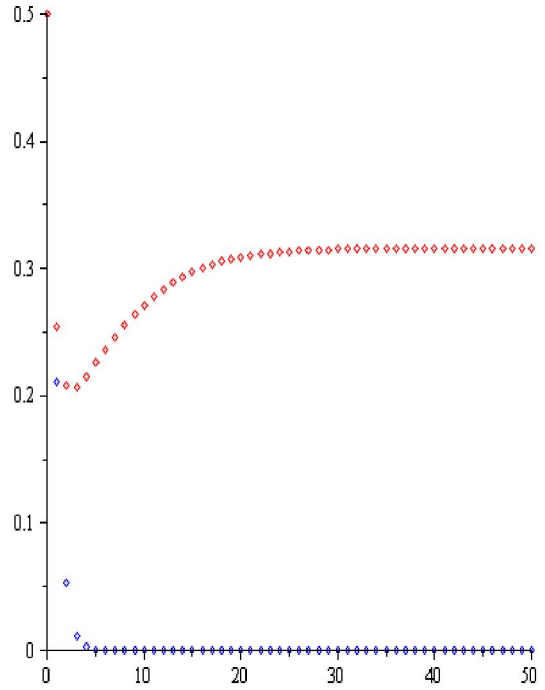
(b) $r>1$ ve $a<\frac{1}{\sqrt{r-1}}$ için (4.1.1) sistemi, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $r>1$ ve $a>\frac{1}{\sqrt{r-1}}$ için (4.1.1) sistemi, $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

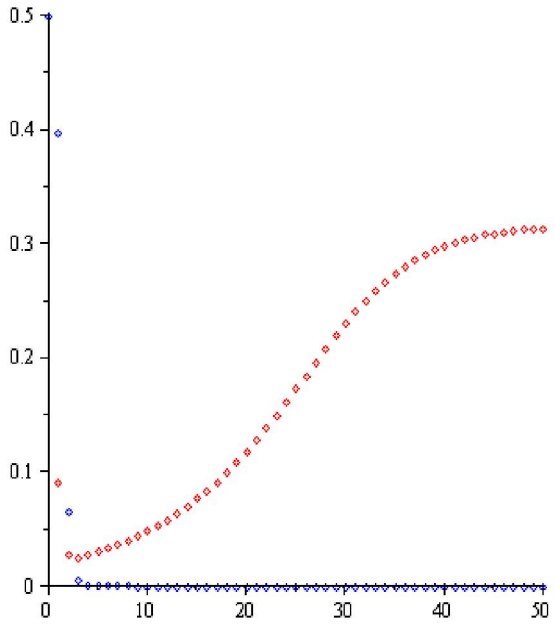
İspat. (a) (4.1.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup $r>1$ olduğundan, Teorem 3.2.1. (v)'e göre öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçük olmasından dolayı, (4.1.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $a<\frac{1}{\sqrt{r-1}}$ olması durumunda (4.1.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{2-r}{r}$ ve $\lambda_2=a\sqrt{r-1}$ olup, $r>1$ olduğundan her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre (4.1.1) sistemi, $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt{r-1},0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $a>\frac{1}{\sqrt{r-1}}$ olması halinde (4.1.4) jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{2-r}{r}$ ve $\lambda_2=(-a)\sqrt{r-1}$ olup, $r>1$ olduğundan her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre (4.1.1) sistemi, $(\bar{P},\bar{H})=(-\sqrt{r-1},0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.



Şekil-1.1 Teorem 4.1.1 (a) şıkkı: $a = 0.5, r = 1.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil-1.2 Teorem 4.1.1 (b) şıkkı: $a = 3.15, r = 1.1, P_0 = 0.5, H_0 = 0.5.$

4.2. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}e^{-aH_t},\ H_{t+1}=\frac{rP_t}{1+P_t^3}\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t=0,1,... \tag{4.2.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.2.1. (4.2.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H}=0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P}=\frac{r\bar{P}}{1+\bar{P}^3}$$

$$\bar{P}^4+(1-r)\bar{P}=0$$

$$\bar{P}(\bar{P}^3+(1-r))=0$$

olup, buradan $\bar{P}_1=0$ ve $\bar{P}_2=\sqrt[3]{r-1}$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.2.2. (4.2.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

$$J_F(\sqrt[3]{r-1},0)=\begin{bmatrix} \frac{3-2r}{r} & (-a)\sqrt[3]{r-1} \\ 0 & a\sqrt[3]{r-1} \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

dir.

İspat. $F=(f,g)$, (4.2.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{rP}{1+P^3}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=\frac{rP}{1+P^3}\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{r(1-2P^3)e^{-aH}}{\left(1+P^3\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{rP}{1+P^3}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\frac{r(1-2P^3)}{\left(1+P^3\right)^2}\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=ae^{-aH}\frac{rP}{1+P^3}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ sıfır denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(0,0)=\frac{r(1-20^3)e^{-a0}}{\left(1+0^3\right)^2}=r,\ \frac{\partial f}{\partial H}(0,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r0}{1+0^3}\right)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(0,0)=\frac{r(1-20^3)}{\left(1+0^3\right)^2}\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(0,0)=ae^{-a0}\left(\frac{r0}{1+0^3}\right)=0$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.2.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}(\sqrt[3]{r-1},0)=\frac{r(1-2(\sqrt[3]{r-1})^3)e^{-a0}}{\left(1+(\sqrt[3]{r-1})^3\right)^2}=\frac{3-2r}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}(\sqrt[3]{r-1},0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r\sqrt[3]{r-1}}{1+(\sqrt[3]{r-1})^3}\right)=(-a)\sqrt[3]{r-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(\sqrt[3]{r-1},0)=\frac{r(1-2\left(\sqrt[3]{r-1}\right)^3)}{\left(1+\left(\sqrt[3]{r-1}\right)^3\right)^2}\left[1-e^{-a0}\right]=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial H}(\sqrt[3]{r-1},0)=ae^{-a0}\left(\frac{r\sqrt[3]{r-1}}{1+(\sqrt[3]{r-1})^3}\right)=a\sqrt[3]{r-1}$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.2.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(\sqrt[3]{r-1},0)=\begin{bmatrix}\frac{3-2r}{r} & (-a)\sqrt[3]{r-1}\\ 0 & a\sqrt[3]{r-1}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2.1. $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ (4.2.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $0<r<1$ için, (4.2.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(b) $1<r<3$ ve $a<\frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ için, (4.2.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $r>3$ ve $a<\frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ için, (4.2.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

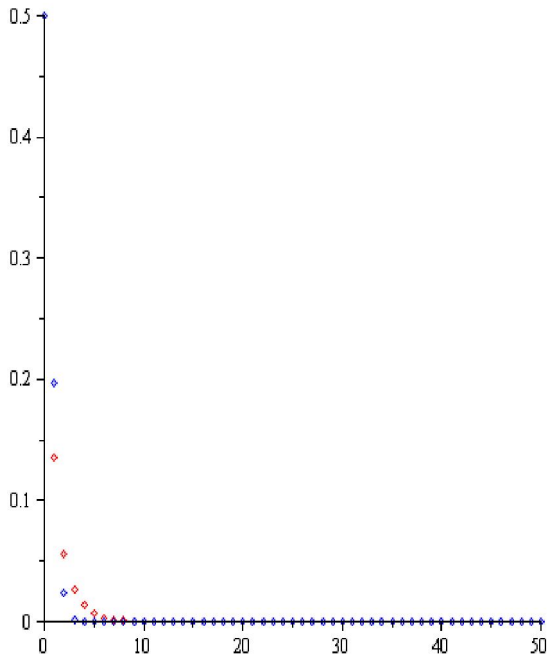
(d) $r>3$ ve $a>\frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ için, (4.2.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(\sqrt[3]{r-1},0)$ denge noktasında kararsızdır.

İspat. (a) $0<r<1$ olması durumunda (4.2.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre (4.2.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

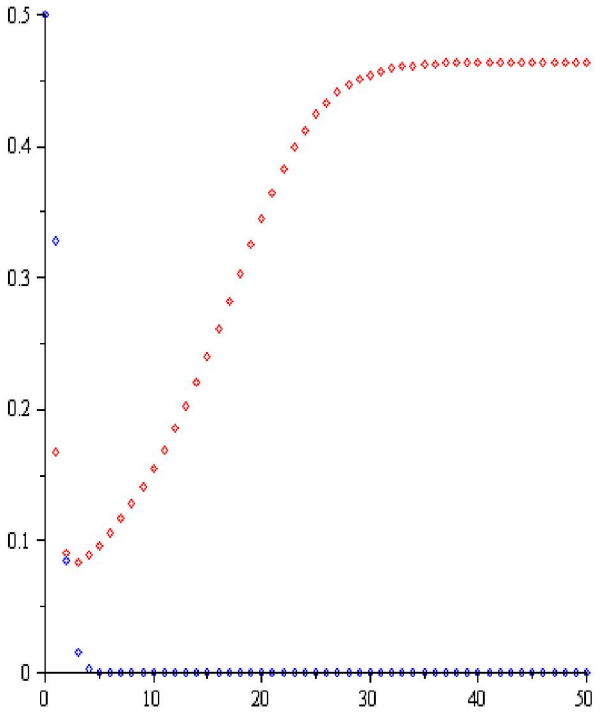
(b) $1 < r < 3$ ve $a < \frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ olması durumunda, (4.2.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{3-2r}{r}$ ve $\lambda_2 = a\sqrt[3]{r-1}$ olup her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.2.1) sistemi $(\bar{P}, \bar{H}) = (\sqrt[3]{r-1}, 0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $r > 3$ ve $a < \frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ olması durumunda, (4.2.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{3-2r}{r}$ ve $\lambda_2 = a\sqrt[3]{r-1}$ olup, öz değerlerden biri 1'den küçük, diğeri 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (v)'ye göre, (4.2.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (\sqrt[3]{r-1}, 0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

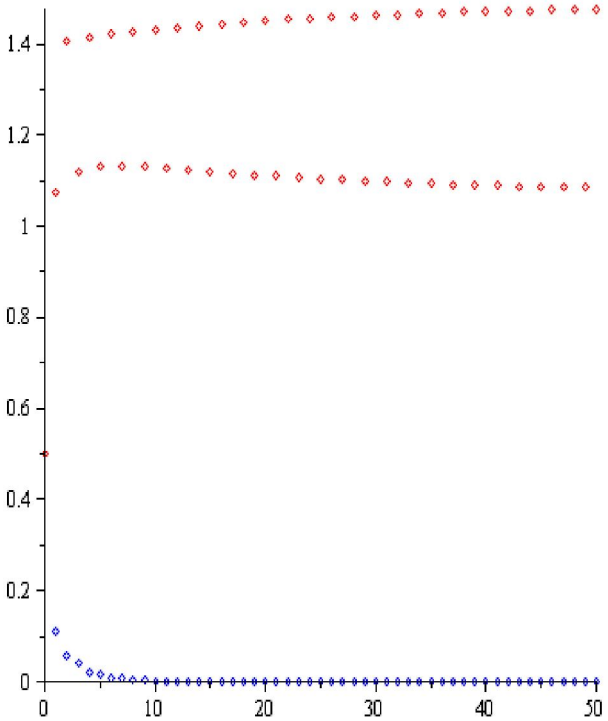
(d) $r > 3$ ve $a > \frac{1}{\sqrt[3]{r-1}}$ olması durumunda, (4.2.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{3-2r}{r}$ ve $\lambda_2 = a\sqrt[3]{r-1}$ olup, her iki öz değerde 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.2.1) sistemi $(\bar{P}, \bar{H}) = (\sqrt[3]{r-1}, 0)$ denge noktasında kararsızdır.



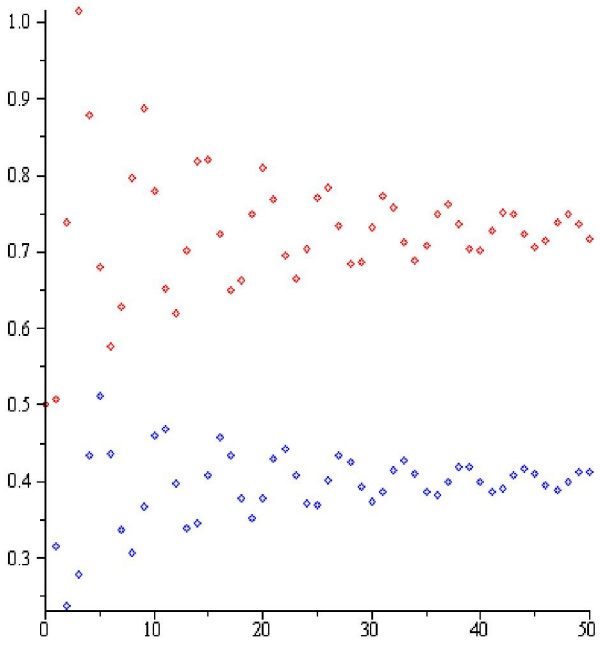
Şekil 2.1. Teorem 4.2.1. (a) şıkkı: $a = 1, r = 0.5, P_0 = 0.5, H_0 = 0.5$.



Şekil 2.2. Teorem 4.2.1. (b) şıkkı: $a = 2.14, r = 1.1, P_0 = 0.5, H_0 = 0.5.$



Şekil 2.3. Teorem 4.2.1. (c) şıkkı: $a = 2, r = 3.1, P_0 = 0.5, H_0 = 0.5.$



Şekil 2.4. Teorem 4.2.1. (d) şıkkı: $a = 0.5, r = 3.1, P_0 = 0.5, H_0 = 0.5.$

4.3. $P_{t+1} = \frac{\alpha r P_t}{1+\beta P_t} e^{-aH_t}$, $H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1} = \frac{\alpha r P_t}{1+\beta P_t} e^{-aH_t},\ H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right],\ t = 0,1,... \tag{4.3.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.3.1. (4.3.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H}) = (0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0\right)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H} = 0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P} = \frac{\alpha r \bar{P}}{1+\beta \bar{P}}$$

$$\beta \bar{P}^2 + (1-\alpha r)\bar{P} = 0$$

$$\bar{P}(\beta \bar{P} + (1-\alpha r)) = 0$$

olup, buradan $\bar{P}_1 = 0$ ve $\bar{P}_2 = \frac{\alpha r - 1}{\beta}$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H}) = (0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0\right)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.3.1. (4.3.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H}) = (0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0\right)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

$$J_F\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & (-a)\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}\right) \\ 0 & a\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}\right) \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

dir .

İspat. $F=(f,g)$, (4.3.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{\alpha rP}{1+\beta P}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{\alpha re^{-aH}}{\left(1+\beta P\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{\alpha rP}{1+\beta P}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(0,0)=\frac{\alpha re^{-a0}}{\left(1+\beta 0\right)^2}=\alpha r,\ \frac{\partial f}{\partial H}(0,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{\alpha r0}{1+\beta 0}\right)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(0,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(0,0)=ae^{-a0}0=0$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre (4.3.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix}\alpha r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)=\frac{\alpha r e^{-a0}}{\left(1+\beta\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)^2}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{\alpha r\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)}{1+\beta\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)}\right)=(-a)\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)=ae^{-a0}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.3.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{r} & (-a)\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)\\ 0 & a\left(\frac{\alpha r-1}{\beta}\right)\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.3.1. $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)$, (4.3.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $\alpha>0$ ve $r<\frac{1}{\alpha}$ için, (4.3.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(b) $\alpha>0$ ve $r>\frac{1}{\alpha}$ için, (4.3.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(c) $\alpha>0$, $\beta>0$, $r>\frac{1}{\alpha}$ ve $|a|<\frac{\beta}{\alpha r-1}$ için, (4.3.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > \frac{1}{\alpha}$ ve $|a| > \frac{\beta}{\alpha r - 1}$ için, (4.3.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0 \right)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(e) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r < \frac{1}{\alpha}$ ve $|a| > \frac{\beta}{\alpha r - 1}$ için, (4.3.1) sistemi $(\bar{P}, \bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0 \right)$ denge noktasında kararsızdır.

İspat. (a) $\alpha > 0$ ve $|r| < \frac{1}{\alpha}$ olması durumunda, (4.3.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \alpha r$ ve $\lambda_2 = 0$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.3.1) sistemi $(\bar{P}, \bar{H}) = (0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

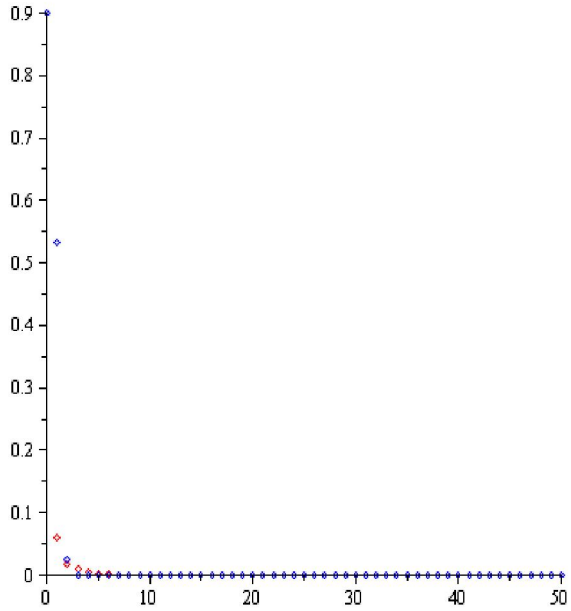
(b) $\alpha > 0$ ve $r > \frac{1}{\alpha}$ olması durumunda, (4.3.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \alpha r$ ve $\lambda_2 = 0$ olup, öz değerlerden biri 1'den küçük, diğeri 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (v)'ye göre, (4.3.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(c) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > \frac{1}{\alpha}$ ve $|a| < \frac{\beta}{\alpha r - 1}$ olması durumunda, (4.3.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = a\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta} \right)$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.3.1) sistemi $(\bar{P}, \bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0 \right)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

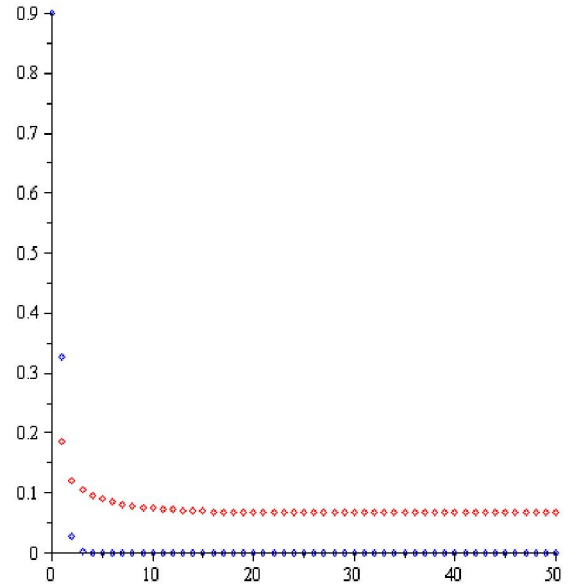
(d) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > \frac{1}{\alpha}$ ve $|a| > \frac{\beta}{\alpha r - 1}$ olması durumunda, (4.3.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = a\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta} \right)$ olup, öz değerlerden biri 1'den küçük, diğeri 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (v)'ye göre, (4.3.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = \left(\frac{\alpha r - 1}{\beta}, 0 \right)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(e) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r < \frac{1}{\alpha}$ ve $|a| < \frac{\beta}{\alpha r - 1}$ olması durumunda, (4.3.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = a\left(\frac{\alpha r - 1}{\beta} \right)$ olup, her iki öz değerde 1'den büyük olur. O

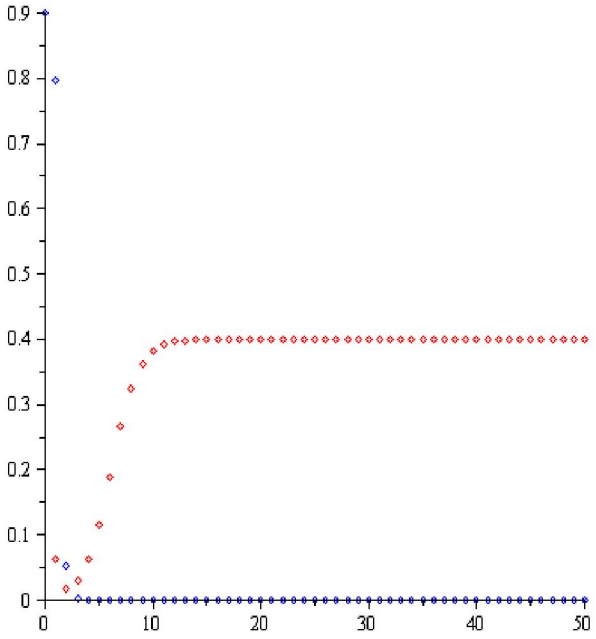
halde Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.3.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{\alpha r-1}{\beta},0\right)$ denge noktasında kararsızdır.



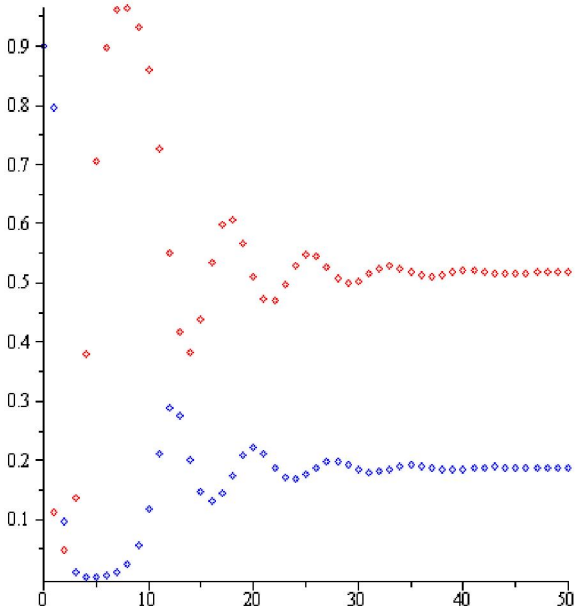
Şekil 3.1. Teorem 4.3.1. (a) şıkkı: $\alpha = 2, \beta = 3, a = 1, r = 0.3, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



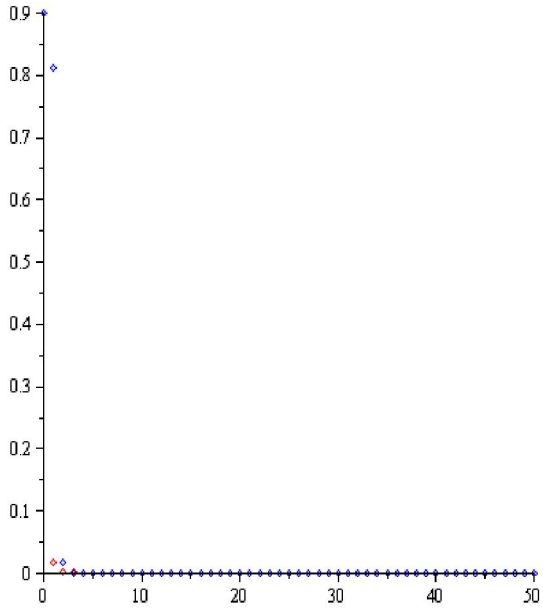
Şekil 3.2. Teorem 4.3.1. (b) şıkkı: $\alpha = 2, \beta = 3, a = 0.5, r = 0.6, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 3.3. Teorem 4.3.1. (c) şıkkı: $\alpha = 2, \beta = 3, a = 2.4, r = 1.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 3.4. Teorem 4.3.1. (d) $\alpha = 2, \beta = 3, a = 2.4, r = 2, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 3.4. Teorem 4.3.1. (e) $\alpha = 2, \beta = 3, a = 2.6, r = 0.4, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$

4.4. $P_{t+1} = \frac{r}{1+(r-1)P_t} e^{-aH_t}$, $H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1} = \frac{r}{1+(r-1)P_t} e^{-aH_t}, \; H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right], \; t = 0,1,... \tag{4.4.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.4.1. (4.4.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H} = 0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P} = \frac{r}{1+(r-1)\bar{P}}$$

$$(r-1)\bar{P}^2 + \bar{P} - r = 0$$

olup, buradan $\bar{P}_1 = 1$ ve $\bar{P}_2 = \frac{r}{1-r}$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.4.2. (4.4.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1-r}{r} & -a \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

$$J_F\left(\frac{r}{1-r},0\right) = \begin{bmatrix} \frac{r}{1-r} & -a\left(\frac{r}{1-r}\right) \\ 0 & a\left(\frac{r}{1-r}\right) \end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

dir.

İspat. $F=(f,g)$, (4.4.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{r}{1+(r-1)P}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{r(1-r)e^{-aH}}{\left(1+(r-1)P\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{r}{1+(r-1)P}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(1,0)=\frac{r(1-r)e^{-a0}}{\left(1+(r-1)\right)^2}=\frac{1-r}{r},\ \frac{\partial f}{\partial H}(1,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r}{1+(r-1)}\right)=-a$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(1,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(1,0)=ae^{-a0}=a$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.4.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F(1,0)=\begin{bmatrix}\frac{1-r}{r} & -a\\ 0 & a\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}\left(\frac{r}{1-r},0\right)=\frac{r(1-r)e^{-a0}}{\left(1+(r-1)\left(\frac{r}{1-r}\right)\right)^2}=\frac{r}{1-r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}\left(\frac{r}{1-r},0\right)=\frac{r(-a)e^{-a0}}{1+(r-1)\left(\frac{r}{1-r}\right)}=(-a)\frac{r}{1-r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}\left(\frac{r}{1-r},0\right)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}\left(\frac{r}{1-r},0\right)=ae^{-a0}\left(\frac{r}{1-r}\right)=(a)\frac{r}{1-r}$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.4.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}\left(\frac{r}{1-r},0\right)=\begin{bmatrix}\frac{r}{1-r} & (-a)\frac{r}{1-r}\\ 0 & (a)\frac{r}{1-r}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.4.1. $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$, (4.4.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $0<r<\frac{1}{2}$ ve $a<1$ durumunda, (4.4.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $r>\frac{1}{2}$ ve $a<1$ için, (4.4.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $0<r<\frac{1}{2}$ ve $|a|<\left(\frac{1-r}{r}\right)$ için, (4.4.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) $r>\frac{1}{2}$ ve $|a|<\left(\frac{1-r}{r}\right)$ durumunda, (4.4.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(e) $r>\frac{1}{2}$ ve $|a|>\left(\frac{1-r}{r}\right)$ için, (4.4.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktası kararsızdır.

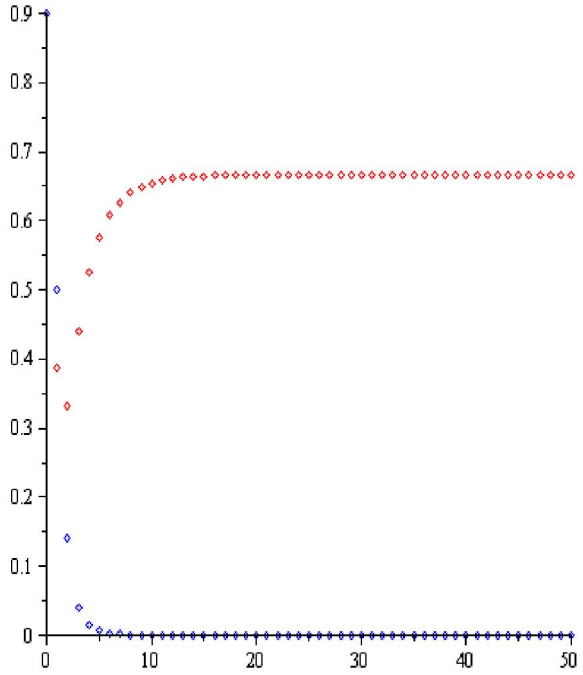
İspat. (a) $0<r<\frac{1}{2}$ ve $a<1$ olması durumunda, (4.4.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{1-r}{r}$ ve $\lambda_2=a$ olup, öz değerlerden biri 1'den küçük, diğeri ise 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (v)'ye göre, (4.4.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $r>\frac{1}{2}$ ve $a<1$ olması durumunda, (4.4.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{1-r}{r}$ ve $\lambda_2=a$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.4.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

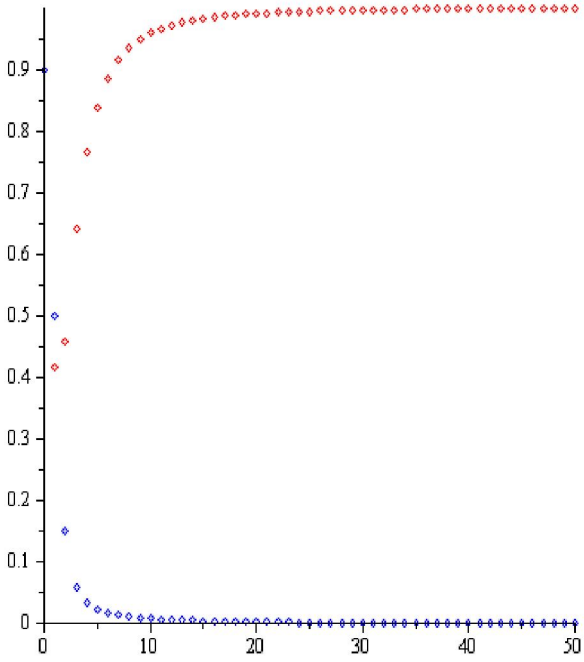
(c) $0<r<\frac{1}{2}$ ve $|a|<\left(\frac{1-r}{r}\right)$ olması durumunda, (4.4.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{r}{1-r}$ ve $\lambda_2=a\left(\frac{r}{1-r}\right)$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.4.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) $r>\frac{1}{2}$ ve $|a|<\left(\frac{1-r}{r}\right)$ olması durumunda, (4.4.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{r}{1-r}$ ve $\lambda_2=a\left(\frac{r}{1-r}\right)$ olup, öz değerlerden biri 1'den küçük, diğeri ise 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (v)'ye göre, (4.4.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktası eyer noktasıdır.

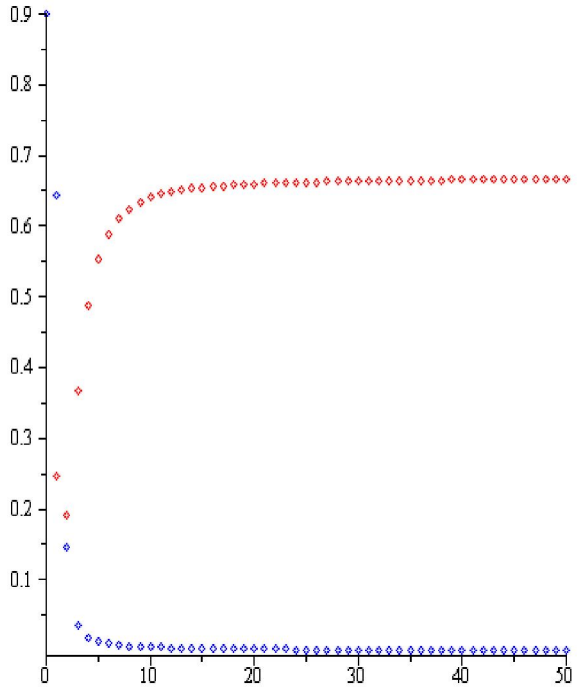
(e) $r>\frac{1}{2}$ ve $|a|>\left(\frac{1-r}{r}\right)$ olması durumunda, (4.4.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{r}{1-r}$ ve $\lambda_2=a\left(\frac{r}{1-r}\right)$ olup, öz değerlerin her ikiside 1'den büyük olacağından Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.4.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{r}{1-r},0\right)$ denge noktası kararsızdır.



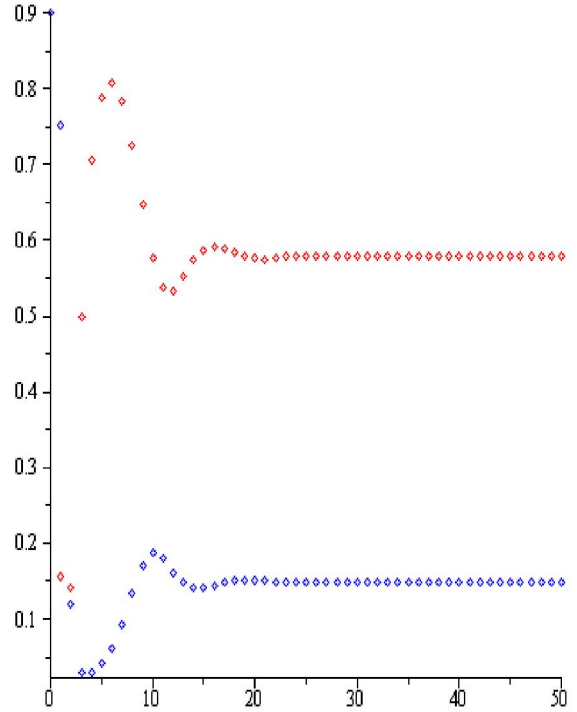
Şekil 4.1. Teorem 4.4.1 (a) şıkkı: $a = 0.9, r = 0.4, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



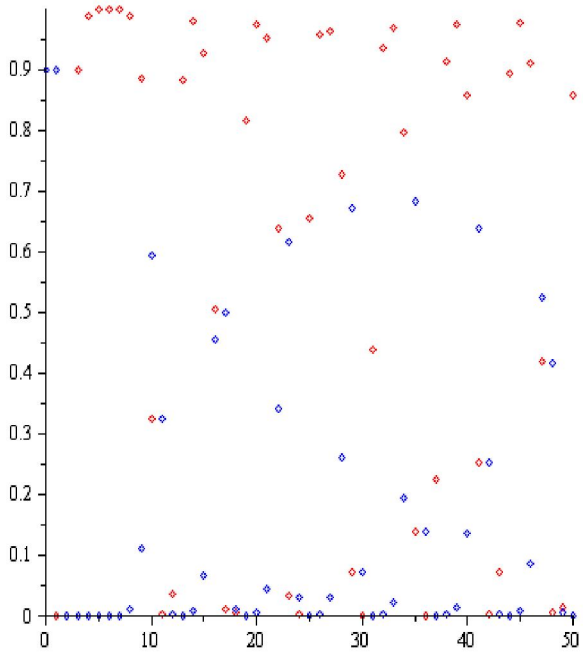
Şekil 4.2. Teorem 4.4.1 (b) şıkkı: $a = 0.9, r = 0.6, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



Şekil 4.3. Teorem 4.4.1 (c) şıkkı: $a = 1.4, r = 0.4, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 4.4. Teorem 4.4.1 (d) şıkkı: $a = 2, r = 0.6, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 4.5. Teorem 4.4.1 (e) şıkkı: $a = 10, r = 0.9, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$

4.5. $P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+(r-1)P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1}=\frac{rP_t}{1+(r-1)P_t}e^{-aH_t},\ H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t=0,1,... \tag{4.5.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.5.1. (4.5.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H}=0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P}=\frac{r\bar{P}}{1+(r-1)\bar{P}}$$

$$(r-1)\bar{P}^2+(r-1)\bar{P}=0$$

olup, buradan $\bar{P}_1=0$ ve $\bar{P}_2=1$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.5.2. (4.5.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(1,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5.2}$$

$$J_F(1,0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -a \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

dir.

İspat. $F=(f,g)$, (4.5.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{rP}{1+(r-1)P}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{re^{-aH}}{\left(1+(r-1)P\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{rP}{1+(r-1)P}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(0,0)=\frac{re^{-a0}}{\left(1+(r-1)0\right)^2}=r,\ \frac{\partial f}{\partial H}(0,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r0}{1+(r-1)0}\right)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(0,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(0,0)=ae^{-a0}0=0$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.5.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}(1,0)=\frac{re^{-a0}}{\left(1+(r-1)\right)^2}=\frac{1}{r},\ \frac{\partial f}{\partial H}(1,0)=\frac{r(-a)e^{-a0}}{1+(r-1)}=(-a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(1,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(1,0)=ae^{-a0}=a$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.5.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F(1,0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & (-a) \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.5.1. $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$, (4.5.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $r>1$ olduğu için, (4.5.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $0<r<1$ için, (4.5.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $r>1$ ve $a<1$ için (4.5.1) denklem sistemi, $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) $0<r<1$ ve $a<1$ olduğunda, (4.5.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(e) $0<r<1$ ve $a>1$ için, (4.5.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası kararsızdır.

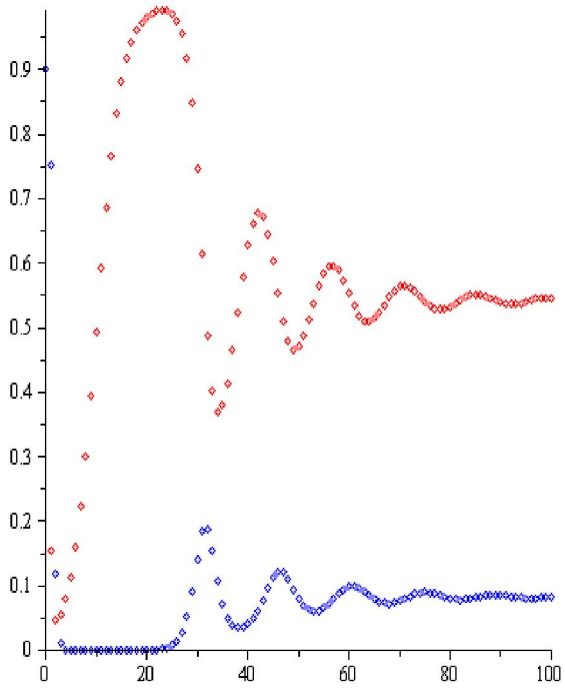
İspat. (a) (4.5.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup, ayrıca $r>1$ olduğundan, Teorem 3.2.1. (v)'e göre, öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçük olduğundan, (4.5.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $0<r<1$ olması durumunda, (4.5.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.5.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

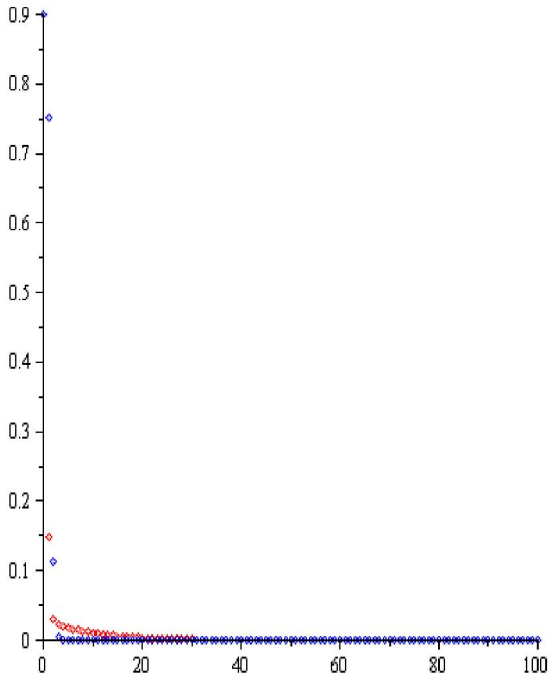
(c) $r>1$ ve $a<1$ olması durumunda, (4.5.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{1}{r}$ ve $\lambda_2=a$ olup, $r>1$ olduğu için her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.5.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) (4.5.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = a$ olup, ayrıca $0 < r < 1$ ve $a < 1$ olduğundan, Teorem 3.2.1. (v)'e göre, öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçük olmasından dolayı, (4.5.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

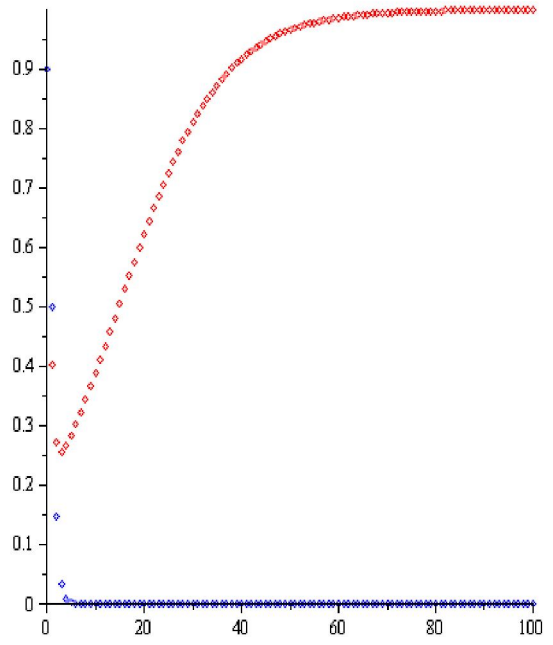
(e) $0 < r < 1$ ve $a > 1$ olması durumunda, (4.5.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = a$ olup, her iki öz değerde 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.5.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (1,0)$ denge noktası kararsızdır.



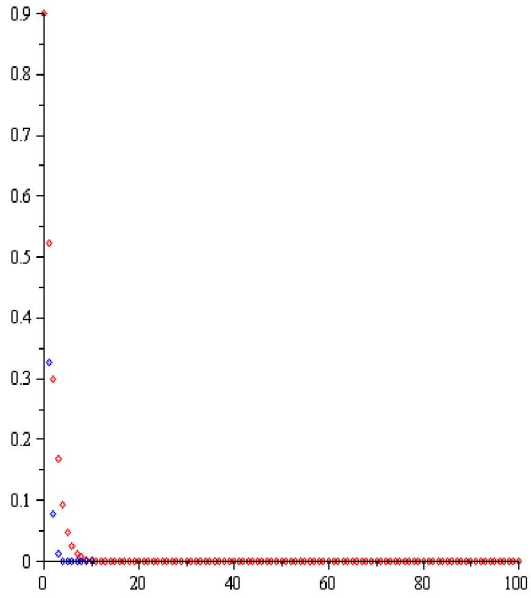
Şekil 5.1. Teorem 4.5.1. (a) şıkkı: $a = 2, r = 1.5, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



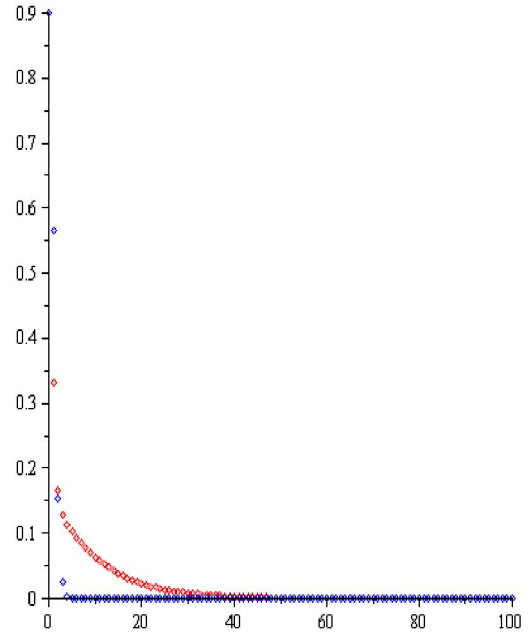
Şekil 5.2. Teorem 4.5.1. (b) şıkkı: $a = 2, r = 0.9, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 5.3. Teorem 4.5.1. (c) şıkkı: $a = 0.9, r = 1.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 5.4. Teorem 4.5.1. (d) şıkkı: $a = 0.5, r = 0.5, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 5.5. Teorem 4.5.1. (e) şıkkı: $a = 1.1, r = 0.9, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$

4.6. $P_{t+1} = \frac{rP_t^2}{1+(r-1)P_t^2} e^{-aH_t}$, $H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1} = \frac{rP_t^2}{1+(r-1)P_t^2} e^{-aH_t},\ H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right],\ t = 0,1,... \tag{4.6.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.6.1. (4.6.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H} = 0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P} = \frac{r\bar{P}^2}{1+(r-1)\bar{P}^2}$$

$$\bar{P}\left[(r-1)\bar{P}^2 - r\bar{P} + 1\right] = 0$$

olup, buradan $\bar{P}_1 = 1$ ve $\bar{P}_2 = \frac{1}{r-1}$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.6.2. (4.6.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H}) = (1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H}) = \left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_F(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{r} & -a \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{4.6.2}$$

$$J_F\left(\frac{1}{r-1},0\right) = \begin{bmatrix} \frac{2(r-1)}{r} & -a\left(\frac{1}{r-1}\right) \\ 0 & a\left(\frac{1}{r-1}\right) \end{bmatrix} \tag{4.6.3}$$

dir.

İspat. $F=(f,g)$, (4.6.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{rP^2}{1+(r-1)P^2}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{2rPe^{-aH}}{\left(1+(r-1)P^2\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{rP^2}{1+(r-1)P^2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(1,0)=\frac{2re^{-a0}}{\left(1+(r-1)\right)^2}=\frac{2}{r},\ \frac{\partial f}{\partial H}(1,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{r}{1+(r-1)}\right)=-a$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(1,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(1,0)=ae^{-a0}=a$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.6.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F(1,0)=\begin{bmatrix}\frac{2}{r} & -a\\ 0 & a\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}\left(\frac{1}{r-1},0\right)=\frac{2r\left(\frac{1}{r-1}\right)e^{-a0}}{\left(1+(r-1)\left(\frac{1}{r-1}\right)^2\right)^2}=\frac{2(r-1)}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}\left(\frac{1}{r-1},0\right)=\frac{r\left(\frac{1}{r-1}\right)^2(-a)e^{-a0}}{1+(r-1)\left(\frac{1}{r-1}\right)^2}=(-a)\left(\frac{1}{r-1}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}\left(\frac{1}{r-1},0\right)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}\left(\frac{1}{r-1},0\right)=ae^{-a0}\left(\frac{1}{r-1}\right)=a\left(\frac{1}{r-1}\right)$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.6.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{r-1},0\right)=\begin{bmatrix}\frac{2(r-1)}{r} & -a\left(\frac{1}{r-1}\right)\\ 0 & a\left(\frac{1}{r-1}\right)\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.6.1. $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{1}{r-1},0\right)$, (4.6.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $0<r<2$ ve $a<1$ için, (4.6.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $r>2$ ve $a<1$ için, (4.6.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

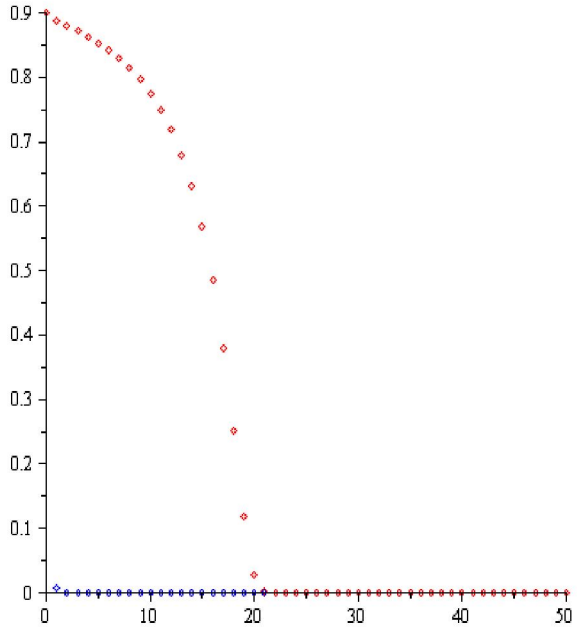
(c) $r>0$ ve $a>0$ için, (4.6.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktasında kararsızdır.

İspat. (a) $0<r<2$ ve $a<1$ için, (4.6.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{2}{r}$ ve $\lambda_2=a$ olup, öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçüktür. O halde

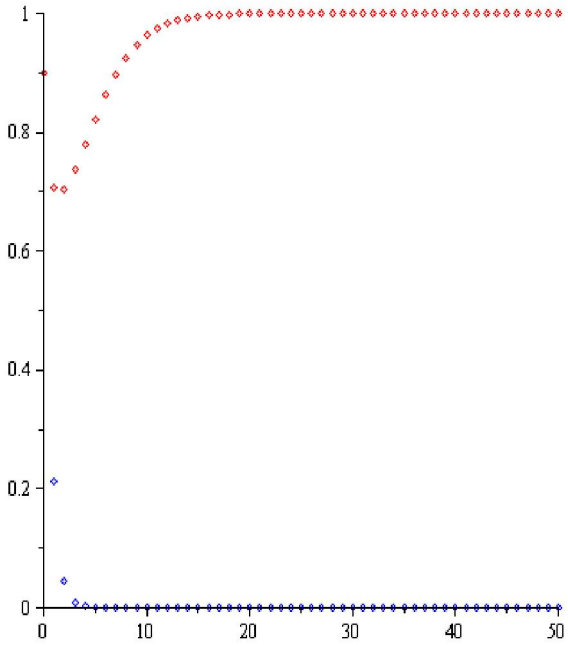
Teorem 3.2.1. (v)'e göre, (4.6.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $r>2$ ve $a<1$ olması durumunda, (4.6.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{2}{r}$ ve $\lambda_2=a$ olduğu için, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.6.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(1,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

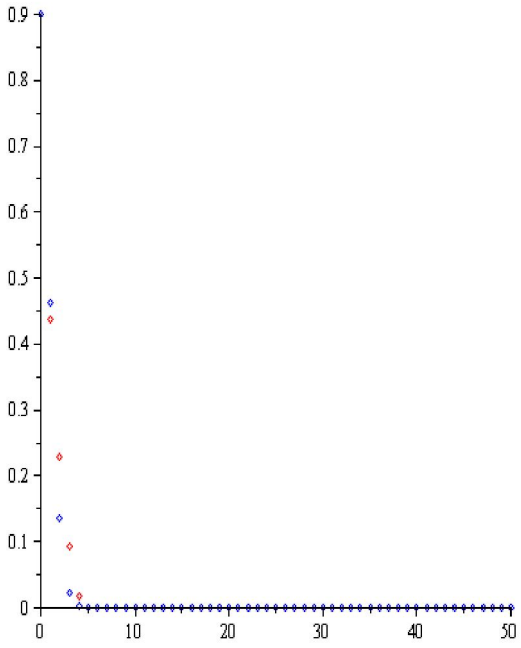
(c) $r>0$ ve $a>0$ olması durumunda, (4.6.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{2(r-1)}{r}$ ve $\lambda_2=\frac{a}{r-1}$ olup, her iki öz değerde 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.6.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=\left(\frac{1}{r-1},0\right)$ denge noktasında kararsızdır.



Şekil 6.1. Teorem 4.6.1. (a) şıkkı: $a=0.01, r=1.99, P_0=0.9, H_0=0.9.$



Şekil 6.2. Teorem 4.6.1. (b) şıkkı: $a = 0.3, r = 3, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



Şekil 6.3. Teorem 4.6.1. (c) şıkkı: $a = 0.8, r = 2.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.

4.7. $P_{t+1}=\frac{KrP_t}{K+(r-1)P_t}e^{-aH_t}$, $H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right]$ Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, $P_0, H_0 \in \mathbb{R}^+$ başlangıç koşulları için,

$$P_{t+1}=\frac{KrP_t}{K+(r-1)P_t}e^{-aH_t},\ H_{t+1}=P_t\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t=0,1,... \tag{4.7.1}$$

fark denklem sisteminin kararlığını inceleyeceğiz.

Lemma 4.7.1. (4.7.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(K,0\right)$ denge noktalarına sahiptir.

İspat. $\bar{H}=0$ olsun. Buna göre Tanım 3.2.2' den,

$$\bar{P}=\frac{Kr\bar{P}}{K+(r-1)\bar{P}}$$

$$(r-1)\bar{P}^2-K(r-1)\bar{P}=0$$

olup, buradan $\bar{P}_1=0$ ve $\bar{P}_2=K$ bulunur. Bu takdirde $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(K,0\right)$ denge noktaları elde edilir.

Lemma 4.7.2. (4.7.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=\left(K,0\right)$ denge noktalarındaki Jakobiyen matrisleri sırasıyla,

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.2}$$

$$J_{\mathrm{F}}\left(K,0\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -aK \\ 0 & aK \end{bmatrix} \tag{4.7.3}$$

dir.

İspat. $\mathrm{F}=(f,g)$, (4.7.1) sisteminin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f(P,H)=\frac{KrP}{K+(r-1)P}e^{-aH} \quad \text{ve} \quad g(P,H)=P\left[1-e^{-aH}\right]$$

fonksiyonlarının kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P,H)=\frac{K^2re^{-aH}}{\left(K+(r-1)P\right)^2},\ \frac{\partial f}{\partial H}(P,H)=(-a)e^{-aH}\left(\frac{KrP}{K+(r-1)P}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(P,H)=\left[1-e^{-aH}\right],\ \frac{\partial g}{\partial H}(P,H)=aPe^{-aH}$$

olmak üzere, $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki değerleri

$$\frac{\partial f}{\partial P}(0,0)=\frac{K^2re^{-a0}}{\left(K+(r-1)0\right)^2}=r,\ \frac{\partial f}{\partial H}(0,0)=(-a)e^{-a0}\left(\frac{Kr0}{K+(r-1)0}\right)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}(0,0)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}(0,0)=ae^{-a0}0=0$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.7.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_{\mathrm{F}}(0,0)=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $(\bar{P},\bar{H})=\left(K,0\right)$ denge noktası için ise,

$$\frac{\partial f}{\partial P}\left(K,0\right)=\frac{Kre^{-a0}}{\left(K+(r-1)\right)^2}=\frac{1}{r},\ \frac{\partial f}{\partial H}\left(K,0\right)=\frac{Kr(-a)e^{-a0}}{K+(r-1)}=\left(-a\right)K$$

$$\frac{\partial g}{\partial P}\left(K,0\right)=\left[1-e^{-a0}\right]=0,\ \frac{\partial g}{\partial H}\left(K,0\right)=aKe^{-a0}=aK$$

bulunur. Buradan Tanım 3.2.4'e göre, (4.7.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=\left(K,0\right)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_F(K,0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & (-a)K \\ 0 & aK \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.7.1. $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ ve $(\bar{P},\bar{H})=(K,0)$, (4.7.1) sisteminin denge noktaları olsun. Buna göre,

(a) $r>1$ için, (4.7.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $0<r<1$ için, (4.7.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(c) $r>1$ ve $|a|<\frac{1}{K}$ için, (4.7.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(K,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) $0<r<1$ ve $|a|<\frac{1}{K}$ olduğu durumunda, (4.7.1) denklem sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(K,0)$ sıfır denge noktası eyer noktasıdır.

(e) $0<r<1$ ve $|a|>\frac{1}{K}$ için, (4.7.1) denklem sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(K,0)$ denge noktası kararsızdır.

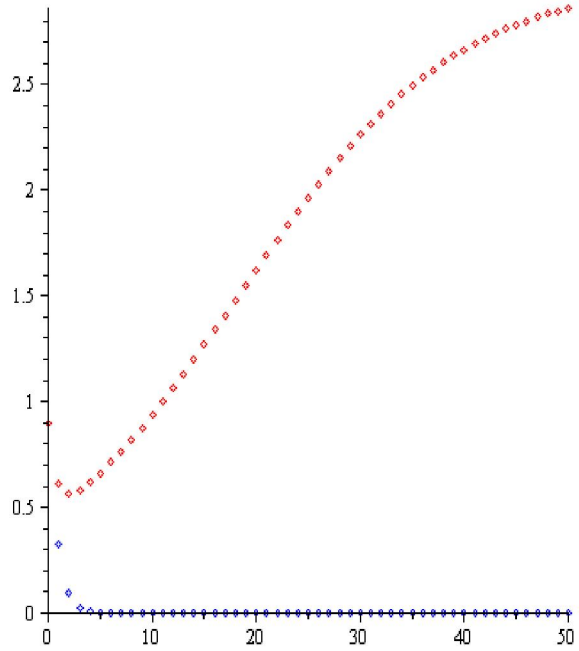
İspat. (a) (4.7.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup, ayrıca $r>1$ olduğundan, Teorem 3.2.1. (v)'e göre, öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçük olmasından dolayı, (4.7.1) sisteminin $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

(b) $0<r<1$ olması durumunda, (4.7.2) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=r$ ve $\lambda_2=0$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.7.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(0,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

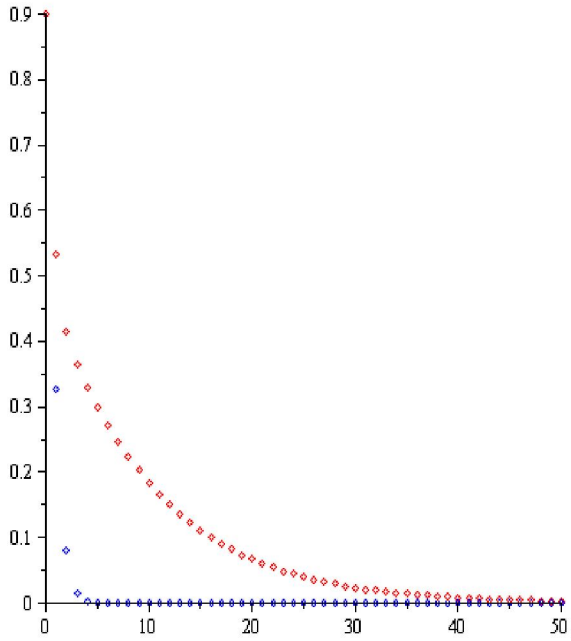
(c) $r>1$ ve $|a|<\frac{1}{K}$ olması durumunda, (4.7.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1=\frac{1}{r}$ ve $\lambda_2=aK$ olup, her iki öz değerde 1'den küçük olur. O halde Teorem 3.2.1. (i)'ye göre, (4.7.1) sistemi $(\bar{P},\bar{H})=(K,0)$ denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

(d) (4.7.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = aK$ olup, $0 < r < 1$ ve $|a| < \frac{1}{K}$ olduğundan, Teorem 3.2.1. (v)'e göre öz değerlerden birinin 1'den büyük, diğerinin 1'den küçük olmasından dolayı, (4.7.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (K, 0)$ denge noktası eyer noktasıdır.

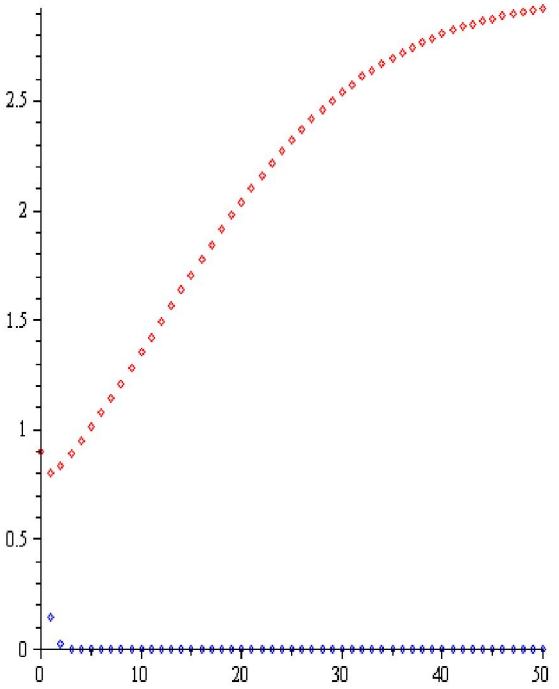
(e) $0 < r < 1$ ve $|a| > \frac{1}{K}$ olması durumunda, (4.7.3) Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \frac{1}{r}$ ve $\lambda_2 = aK$ olup, her iki öz değerde 1'den büyük olur. O halde Teorem 3.2.1. (ii)'ye göre, (4.7.1) sisteminin $(\bar{P}, \bar{H}) = (K, 0)$ denge noktası kararsızdır.



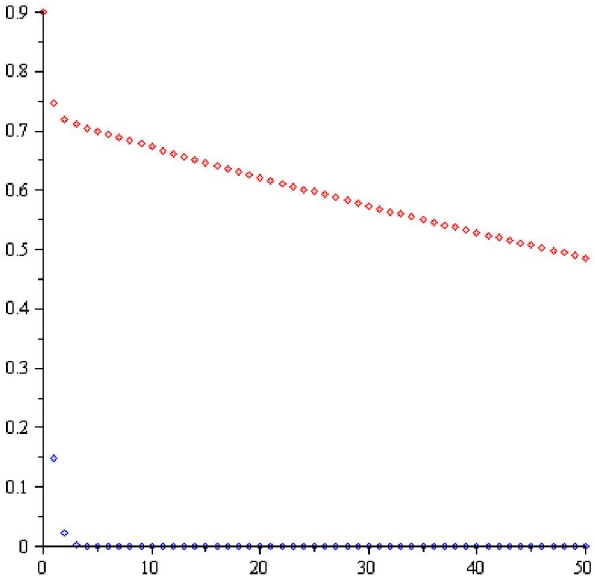
Şekil 7.1. Teorem 4.7.1. (a) şıkkı: $K = 3, a = 0.5, r = 1.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



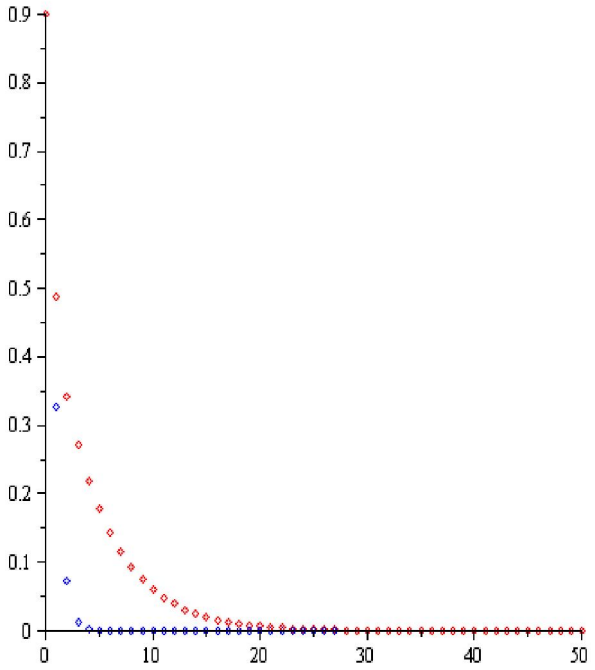
Şekil 7.2. Teorem 4.7.1. (b) şıkkı: $K = 3, a = 0.5, r = 0.9, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 7.3. Teorem 4.7.1. (c) şıkkı: $K = 3, a = 0.2, r = 1.1, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9.$



Şekil 7.4. Teorem 4.7.1. (d) şıkkı: $K = 3, a = 0.2, r = 0.99, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.



Şekil 7.5. Teorem 4.7.1. (e) şıkkı: $K = 3, a = 0.5, r = 0.8, P_0 = 0.9, H_0 = 0.9$.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, Nicholson-Bailey konak-parazit modeli göz önüne alınarak, literatürde iyi bilinen otonom olmayan Beverton-Holt fark denklemleri, Holling tipindeki fark denklemleri ve bu iki tip fark denklemlerine benzer fark denklemleri kullanılarak elde edilen model 1 veya model 2 gibi bitki-otçul fark denklem sistemlerinin dinamikleri incelenmiş ve sonuçlar grafikler üzerinde gösterilmiştir.

5.2 Öneriler

Bu çalışmada çalışılan bitki-otçul etkileşim fonksiyonlarına benzer fonksiyonlar kullanılarak model 1 ve model 2 gibi bitki-otçul sistemlerinin dinamiği incelenebilir. Örneğin,

$$P_{t+1} = \frac{rP_t}{1+(r-1)P_t^n} e^{-aH_t},\ H_{t+1} = P_t\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t = 0,1,...$$

şeklindeki bir bitki-otçul fark denklem sistemi veya

$$P_{t+1} = \frac{rP_t}{1+(r-1)P_t^n} e^{-aH_t},\ H_{t+1} = \frac{rP_t}{1+(r-1)P_t^n}\left[1-e^{-aH_t}\right],\ t = 0,1,...$$

şeklindeki bitki-otçul fark denklem sistemi de incelenebilir.

KAYNAKLAR

Beddington J.R., Free C.A., Lawton J.H., (1975), Dynamic Complexity in Predator-Prey Models Framed in Difference Equations, *Nature,*58-60.

Briggs C.J., Hoopes M.F., (1999), Stabilizing Effects in Spatial Parasitoid –Host and Predator-Prey Models: A Review, *Theoritical Population Biology*, USA, 299-315.

Buchanan R. J., (2005), Review of 'Dynamic Complexity in Predator-Prey Models Framed in Difference Equations', *Millersville university*, Pennsylvania.

Cushing J. M., Henson S. M., (2001), Global Dynamics of Some Periodically Forced, Monotone Difference Equations, *J. Difference Equations and Applications*, USA, 859-872.

Doebeli M., Jong G.D., (1999), Genetic Variability in Senensitivity to Population Density Affects the Dynamics of Simple Ecological Models, *Theoritical Population Biology*, Switzerland, 37-52.

Dehghan M., Nasri M., Douraki M.J., Study of a System of Non Linear Difference Equations Arising in a Deterministic Model For HIV İnfection, *Applied Mathematics and Computation*, Iran, 1306-1330.

Dehghan M., Nasri M., Razvan M.R., (2007), Global Stability of a Deterministic Model for HIV infection in Vivo, *Chaos, Solitons and Fractals* , Iran, 1225–1238.

Elaydi S., Sacker R.J., (2005), Global Stabiliy of Periodic Orbits of Non-Autonomous Difference Equations and Population Biology, *Journal of Differantial Equations*, USA, 258-273.

Hassel M.P., (1975), Density dependence in single-species populations, *J. Anim. Ecol.*, 283-295.

Henson S. M., Costantino R. F., Cushing J. M., Dennis B., Desharnais R. A., (1999), Multiple Attractors, Saddles and Population Dynamics in Periodic Habitats, *Bulletin of Mathematical Biology*, USA, 1121-1149.

Kang Y., Armbruster D., Kuang Y., (2008), Dynamics of Plant-Herbivore Model, *Journal of Biological Dynamics*, USA, 89-101.

Kang Y., Chesson P., Relative Nonlinearity and Permanence, (2010), *Theoritical Population Biology*, USA, 26-35.

Kang Y., Armbruster D., Noise and Seasonal Effects on the Dynamics of Plant-Herbivore models with Monotonic Plant Growth Functions, (2010), *International Journal of Biomathematics*, USA, WSPC.

Kang Y., Armbruster D., (2011), Dispersal Effects on a Discrete Two-Patch Model for Plant-Insect Interactions, *Journal of Theoritical Biology*, USA, 84-97.

Keshet L. E., (2005), Mathematical Models in Biology, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, USA.

Kulenovic M. R. S., Merino O., (2002), Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, *Chapman and Hall/CRC*, USA.

May R. M., (1975), Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos, *J. Theor. Biol.*, 511-524.

Nicholson A. J., Bailey V. A., (1935), The Balance of Animal Populations, *Part I. Proc. Zool. Soc.*, London, 551-598.

Varley G. C., Gradwell G. R., Hassel M. P., (1973), Insect Population Ecology, *Blackwell Scientific Publications,* Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Düriye KORKMAZ
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti Vatandaşı
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya, 20.04.1985
Telefon : 0 505 691 80 49
Faks :
e-mail : dryekorkmaz@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Karaman Fen Lisesi, Merkez, Karaman	2003
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011	Kafkas Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI: Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER: İngilizce

YAYINLAR