İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WINKLER ZEMİNİNE OTURAN VİSKOELASTİK TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA KUAZİ-STATİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Efgan CEBECİGİL

Anabilim Dalı: İnşaat Mühendisliği

Programı: Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN

MAYIS 2005

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WINKLER ZEMİNİNE OTURAN VİSKOELASTİK TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA KUAZİ-STATİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Efgan CEBECİGİL
(501021057)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : Prof.Dr. M Ertaç ERGÜVEN (İ.T.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

Yard.Doç.Dr. Abdullah GEDİKLİ (İ.T.Ü.)

OCAK 1997

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında desteğini ve tecrubesini her zaman yanımda hissettiğim değerli hocam Sayın Prof. Dr. M. Ertaç Ergüven'e saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bilgisayar programlaması ve teori oluşturmada yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah Gedikli'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu tezi hazırlama süresinde her zaman desteğini gördüğüm Araş. Gör. Çağrı Mollamahmutoğlu'na da teşekkür ederim. Son olarak hayatım boyunca maddi ve manevi olarak yanımda olan aileme katkılarından dolayı müteşekkirim.

Mayıs 2005 Efgan CEBECİGİL

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ..... **v**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vı**
SEMBOL LİSTESİ ..... **vıı**
ÖZET ..... **ıx**
SUMMARY ..... **xı**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı 1
1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar 2
1.3. Çalışmanın Kapsamı 6

2. VİSKOELASTİSİTE **7**
2.1.Viskoelastisiteye Giriş 7
2.1.1. Sünme ve Gevşeme 9
2.2. Temel Elemanlar 10
2.3. Viskoelastik Modeller 10
2.3.1. Maxwell Cismi 10
2.3.2. Kelvin Cismi 11
2.3.3. Üç Parametreli (Standart Katı)Cisim 12
2.4. Diferansiyel Form 12
2.5. İntegral Form 13

3. TEMEL DENKLEMLER **16**
3.1.Çubuk Geometrisi 16
3.2. Kirişler 17
3.2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi 18
3.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisi 18
3.3. Viskoelastik Timoshenko Kirişi 20

4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU **22**
4.1. Sonlu Eleman Formülasyonuna Giriş 22
4.2. Sonlu Eleman Formülasyonunda Yaklaşım 23
4.2.1. Çözümün Yakınsanması 23
4.3. Zayıf Formun Oluşturulması 26
4.4. Elemanların Birleştirilmesi 28
4.5. Karışık Sonlu Elemanlar ve Timoshenko Kirişi 29

5. KİRİŞİN KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU **31**
5.1. Birinci Denge Denkleminden Zayıf Form Elde Etme 31
5.2. İkinci Denge Denkleminden Zayıf Form Elde Etme 32

5.3. Zayıf Form Kullanılarak Fonksiyonelin Elde Edilmesi 35
5.4. Yaklaşım Fonksiyonları ve Enterpolasyon Fonksiyonları Kullanılarak Sistem Matrisi Elde Etme..... 37
5.5. Sistemin Çözümü..... 38

6. SAYISAL UYGULAMALAR 40
6.1.Sayısal Uygulamalar..... 42
6.2. Sayısal Uygulamaların Çözümlerine İlişkin Grafikler..... 47
6.2.1. Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 47
6.2.2. Örnek 2'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 50
6.2.3. Örnek 3'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 50
6.2.4. Örnek 4'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 51
6.2.5. Örnek 5'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 53
6.2.6. Örnek 6'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 54
6.2.7. Örnek 7'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 55
6.2.8. Örnek 8'in Çözümüne İlişkin Grafikler..... 57

7. SONUÇLAR 58

KAYNAKLAR 60

ÖZGEÇMİŞ 62

KISALTMALAR

SEM : Sonlu Eleman Modeli
KM : Kelvin Modeli
TPM : Üç Parametreli Model
EM : Elastik Model
EM2 : Elastik Model 2
MM : Maxwell Modeli
GÇ : Gerçek Çözüm
BÇ : Bu Çalışma
ES : Eleman Sayısı
L : Çubuk Boyu
TK : Timoshenko Kirişi
KK : Klasik Kiriş

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Elastik Davranışın σ–ε diyagramı..... 7
Şekil 2.2 : Plastik Davranışın σ–ε diyagramı..... 8
Şekil 2.3 : Viskoelastik Davranışın ε–τ diyagramı..... 8
Şekil 2.4 : Sünme..... 9
Şekil 2.5 : Gevşeme..... 9
Şekil 2.6 : Maxwell Cismi..... 11
Şekil 2.7 : Kelvin Cismi..... 11
Şekil 2.8 : Üç Parametreli (Standart katı) cisim..... 12
Şekil 2.9 : σ–τ diyagramı..... 13
Şekil 3.1 : Timoshenko Kirişinde Dönme..... 19
Şekil 4.1 : Enterpolasyon Fonksiyonları..... 26
Şekil 4.2 : Gerçek ve Önerilen Fonksiyon..... 28
Şekil 5.1 : Winkler Zeminine Oturan Kiriş..... 31
Şekil 6.1 : Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş..... 42
Şekil 6.2 : Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş..... 43
Şekil 6.3 : Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş..... 43
Şekil 6.4 : Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş..... 44
Şekil 6.5 : Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş..... 44
Şekil 6.6 : Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş..... 45
Şekil 6.7 : Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş..... 45
Şekil 6.8 : Winkler Zeminine Oturan İki Açıklıklı Basit Mesnetli Kiriş..... 46
Şekil 6.9 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği L=1 m..... 47
Şekil 6.10 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği L=1 m..... 47
Şekil 6.11 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği L=4..... 48
Şekil 6.12 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği L=4 m..... 48
Şekil 6.13 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği L=10..... 49
Şekil 6.14 : Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği L=10 m..... 49
Şekil 6.15 : Örnek 2'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği k_1,k_2,k_3.... 50
Şekil 6.16 : Örnek 3'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği k_1,k_2,k_3.... 50
Şekil 6.17 : Örnek 4'ün Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği, Model.... 51
Şekil 6.18 : Chen 1995 Yerdeğiştirme-Zaman TPM, MM 51
Şekil 6.19 : Örnek 4'ün çözümüne İlişkin Elastik Eğri..... 52
Şekil 6.20 : Chen 1995 Elastik Eğri..... 52
Şekil 6.21 : Örnek 5'in Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği h_1, h_2, h_3.... 53
Şekil 6.22 : Aköz, Kadıoğlu 1999 Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği h_1, h_2, h_3..... 53
Şekil 6.23 : Örnek 6'nın Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği, ES_1,ES_2. 54
Şekil 6.24 : Örnek 6'nın Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği, ES_1,ES_2..... 54
Şekil 6.25 : Örnek 7'nin Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği, L=1m.... 55
Şekil 6.26 : Örnek 7'nin Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği, L=1 m..... 55
Şekil 6.27 : Örnek 7'nin Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği, L=4 m... 56
Şekil 6.28 : Örnek 7'nin Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği, L=4 m..... 56

Şekil 6.29 **:** Örnek 8nin Çözümüne İlişkin Moment-Zaman Grafiği..... 57
Şekil 6.30 **:** Örnek 8'nin Çözümüne İlişkin Yerdeğiştirme-Zaman Grafiği..... 57
Şekil 6.31 **:** Örnek 8'nin Çözümüne İlişkin Elastik Eğri..... 57

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{r}(x)$	: Çubuk Ekseni
$\vec{t}$	: Teğet Birim Vektör
$\vec{n}$	: Asal Normal Birim Vektör
$\vec{b}$	: Binormal Vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma Eğriliği
k	: Zemin yatak katsayısı
q	: Yayılı dış yük
V,T	: Kesme Kuvveti
M	: Eğilme Momenti
θ	: Moment Dönmesi
γ	: Kayma Dönmesi
x	: x koordinatı
$M_{,x}$	: Toplam Dönme
I	: Atalet momenti
p	: Tekil yük
E	:Young Modülü
G	: Kayma Modülü
A	: Kesit Alanı
k_s	: Kayma Faktörü Düzeltme Katsayısı
ν	: Poisson Oranı
σ	: Gerilme Tansörü
η	: Zemin yatak katsayısı
ε	: Birim Şekil değişitrme Tansörü
J, J_1	: Normal ve Kayma Gerilmeleri İçin Sünme Fonksiyonları
Y, Y_1	: Normal ve Kayma Gerilmeleri İçin Gevşeme Fonksiyonları
s	: Laplace Dönüşüm Parametresi
u, v	: Ağırlık Fonksiyonları
P, Q	: Operatör
EI	: Eğilme Rijitliği
$[]'$	: x'e göre türev
$\dot{[]}$	: t'ye göre türev
$\bar{[]}$	: Laplace Dönüşmüşü
$[K_e]$	: Eleman Matrisi
$[K_s]$	: Eleman Matrisi
$\{w\}$	: Çökme Vektörü
$\{q_e\}$	: Yük Vektörü
L, L^{-1}	: Laplace ve Ters Laplace Operatörü

Winkler Zeminine Oturan Viskoelastik Timoshenko Kirişlerinin Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Kuazi-Statik Analizi

ÖZET

Bu çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişlerini çözmek için bir karışık sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir. Problemin viskoelastik olması Elastisite modulünün veya onun etkilediği sünme ve gevşeme fonksiyonlarının zamana bağlı olması olarak anlatılabilir. Bu durum elastik halden farklılıklar doğurmakla birlikte, çözümü için çeşitli yöntemlere başvurulabilir. Bu tezde, Laplace dönüşüm Fonksiyonları yardımıyla, Laplace uzayına taşınan problem, bu uzayda çözüldükten sonra Ters Laplace dönüşüm fonksiyonlarıyla tekrardan zaman uzayına aktarılmış ve problem sona erdirilmiştir. Bu şekilde elastik modelde zamana göre sabit olan terimlerin zaman içerisinde nasıl değiştiği gözlenmiş ve sonuçlar gerçek sonuçlara daha yakın bir şekilde hesaplanabilinmiştir.

Timoshenko kirişi ise kayma etkilerinin ihmal edilmeyerek hesaba katılması olarak kısaca açıklanabilir. Her bölümde kısaca ne yapıldığına bakılmak istenirse;

Birinci bölümde, çalışmanın amacı ve niteliğine kısaca değinildikten sonra, viskoelastisite ve Timoshenko kirişi ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalardan söz edilmiştir.

İkinci bölümde, elastik, plastik ve viskoelastik davranış ile ilgili kısa bilgiler verildikten sonra, viskoelastisitede kullanılan denklemlere değinilmiş ve viskoelastik modeller üzerinde durulmuştur. Tezdeki problemlerin çözümünde kullanılan Maxwell, Kelvin ve Üç paramereli modele değinildikten sonra viskoelastik yaklaşımda ifadelerin Bellekli (hereditary) formda nasıl yazılabileceği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, temel elemanları hesap yöntemlerine göre sınıfladıktan sonra, kirişlere, oradan da Euler-Bernoulli kirişi ve Timoshenko kirişine geçilmiştir. Lisans eğitiminde de görülen Euler-Bernoulli kirişi teorisinin denge denklemleri ve bu ifadelerin birbiri içerisinde yazılmasıyla bünye denklemi gösterilmiştir. Timoshenko kirişi teorisinde önce toplam dönme kavramı üzerinde durulmuş, daha sonra denge denklemleri ve bunlardan da bünye denklemi elde edilmiştir. Bu bölümün sonun da da viskoelastisite ile Timoshenko kirişi arasında bağlantı kurulup moment denklemi viskoelastik yaklaşımla ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu eleman formülasyonu üzerinde durulmuştur. Öncelikle sonlu elamanın kısa bir tarifi ve sonlu elaman yaklaşımının basamakları kısaca özetlenmiştir. Sonlu elemanlarda w ağırlık fonksiyonu, çözüm kabulünün problemin diferansiyel denklemine konulmasıyla elde edilen R artan fonksiyon ve bunların bir integral içerisinde yazılmasıyla elde edilen ağırlıklı integral ifadesine değinilmiştir.

$\int wRdx = 0 \Rightarrow$ Ağırlıklı İntegral

Daha sonra yaklaşım fonksiyonlarının taşıması gereken özellikler ve enterpolasyon fonksiyonlarının elde edilmesine değinilmiştir. Zayıf formun oluşturulması ve zayıf formdan yararlanarak fonksiyonelin elde edilmesi anlatılmış ve eleman matrisinin elde edilmesine geçilmiştir. Daha sonra eleman matrislerinin problemin özelliklerine göre toplanarak sistem matrisinin oluşturulması anlatılmıştır. Son olarak, karışık sonlu eleman mantığının anlatılarak, Timoshenko kirişi üzerinde uygulanması gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, Winkler zeminine oturan viskoelastik Timoshenko kirişlerine karışık sonlu elemanlar yönteminin uygulanması anlatılmıştır. Öncelikle Timoshenko kirişine ait denklemlerden ilki olan, kuvvet dengesinden yazılan bünye denklemine Laplace dönüşümü uygulanmış,daha sonra karışık sonlu elaman yöntemiyle birinci fonksiyonel elde edilmiştir. İkinci olarak moment dengesinden elde edilen bünye denklemi çeşitli bellekli integral ifadelerinin yardımıyla yazıldıktan sonra Laplace dönüşümü uygulanarak, karışık sonlu elaman yöntemine geçilmiştir. Buradan, ikinci fonksiyonel elde edilmiş ve fonksiyoneller toplanarak tek bir denklem altında birleştirilmiştir. Fonksiyonel elde edildikten sonra yaklaşım fonksiyonları kübik olacak şekilde seçilmiş ve Mathematica programı kullanılarak eleman matrisi elde edilmiştir. Bu aşamadan sonraki işlemler Mathematica programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu program yardımıyla, farklı problemler için sistem matrisinin elde edilmesi ve sınır koşullarının uygulanmasıyla problemin çözümü mümkün hale gelmiştir.

Altıncı bölümde, hazırlanan bilgisayar programı yardımıyla çeşitli problemlerin çözümü yapılmıştır. Örneklerde basit kiriş, Winkler zeminine oturan basit kiriş ve Winkler zeminine serbest oturan kiriş kullanılmıştır. Yüklemeler zamana bağlı olabildiği gibi zamandan bağımsız da olabilmektedir. Farklı zemin parametreleri, sonlu eleaman yönteminde alınacak eleman sayısının farklılığı, viskoelastik yaklaşımda seçilecek model çeşidi ve kiriş boylarının farklı alınması problem çeşitliliğini arttırmakta rol oynamıştır.

Quasi-Static Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams Resting On Winkler Foundation Via Mixed Finite Element Method

SUMMARY

In this study, a mixed finite element method has been developed for solving viscoelastic Timoshenko beams. The reason why the problem is viscoelastic can be explained by the elasticity module or creeping and relaxation functions, affected by it, depend on time. Various solutions can be adopted for its solution besides that this situation creates differences from the elastic state. In this thesis, the problem has been transported to Laplace space and after solving it, re-transported to time space via Inverse Laplace transformation functions. By this way, terms that are constant by means of time in the elastic model have been observed how they change in time and results have been able to be evaluated closer to the real results.

Timoshenko beam can shortly be explained as calculating without neglecting shear effects. To mention what has been accomplished at every section;

In the first section, after mentioning the aim and characteristics of the study, previous studies performed about viscoelasticity and Timoshenko beam has been explained.

In the second section, after giving short explanations about elastic, plastic and viscoelastic behavior, equations used in viscoelasticity and viscoelastic models have been introduced. After mentioning Maxwell, Kelvin and the Three Parameter models used in solving the problems in the thesis, it is shown how these expressions are written in hereditary form with viscoelastic approach.

In the third section after categorizing the fundamental elements according to calculation methods, beams, then Euler-Bernoulli beam and finally Timoshenko beam has been mentioned. As it was seen at the graduate education, Euler-Bernoulli beam theory balance equations and by writing each of these expressions into themselves constitutive equation has been shown. In the Timoshenko beam theory, firstly rotation concept was underlined; afterwards balance equations and from these, constitutive equation has been determined. At the end of this section, relation between viscoelasticity and Timoshenko beam has been established and moment equation has been expressed by viscoelastic approach.

In the fourth section, finite element formulation has been underlined. First of all, an explanation and processing steps of the finite element method has been summarized. In finite element method, *w weight function*, *R increasing function* which is determined by replacing the assumed solution into the differential equation and the *weighted integral* form obtained by writing the expressions above into one integral is explained.

$\int wRdx = 0 \Rightarrow$ Weighted Integral

Characteristics that the approaching functions should carry and determining the interpolation functions has been mentioned afterwards. Acquiring the weak form and by the help of the weak form, obtaining the functional has been explained and then determining the element matrix is mentioned. Later, determining the system matrix by combining the element matrixes according to the characteristics of the problem is explained. Finally, by expressing the logic of the mixed finite element method, application on Timoshenko beam is shown.

In the fifth section, application of the mixed finite element method on viscoelastic Timoshenko beams resting on Winkler foundation is explained. Firstly, Laplace transformation has been applied to the constitutive equation written from the force balance which is the first of the equations belonging to Timoshenko beam, then the first functional has been obtained via mixed finite element method. Secondly, after writing the constitutive equation obtained from the moment balance by the help of various hereditary integral expressions, it has been passed to the mixed finite element method by application of Laplace transformation. From this point, the second functional has been determined and combined under one equation by collection of all functionals. After obtaining the functional, approaching functions have been selected cubic and via Mathematica program, the element matrix has been determined. Processes after this step have been performed by Mathematica program. By the help of this program, obtaining system matrixes for different problems and applying boundary conditions has been made available.

In the sixth section, various problem solutions have been performed via the prepared computer program. Simply supported beam, Simply supported beam resting on Winkler foundation and beam resting unrestricted on Winkler foundation has been used in examples. Loadings can be made both time dependent and independent from time. Different foundation parameters, difference of element number in finite element method, selected model type in viscoelastic approach and adopting different beam lengths have been effective in increasing the variety of the problem.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

"Winkler Zeminine Oturan Viskoelastik Timoshenko Kirişlerinin Karışık Sonlu Elemanlarla Çözümü" adlı yüksek lisans tezinde viskoelastik özelliğe sahip kirişler, Timoshenko yaklaşımıyla Karışık Sonlu Eleman formülasyonu kullanılarak çözülmeye çalışıldı. Bu çalışmada maddenin viskoelastik özelliğinin dikkate alınmasının sebebi, doğadaki hemen bütün maddelerin viskoelastik özellik göstermesidir.

Bilindiği gibi yapılar, kolaylık olması bakımından bazı kabuller yapılarak projelendirilirler. Homogen cisim kabulü, izotrop cisim kabulü ve lineer-elastik kabul yapıda projelendirilirken işleri kolaylaştıran ve yaklaşık sonuç veren kabullerdir. Bugüne kadar hesap kolaylığı bakımından maddenin viskoelastik özelliği ihmal edilmesine rağmen, günümüzde bazı nedenlerden dolayı hassas hesap yapma gerekliliği doğmuştur. Geniş açıklıklı özel yapılar, nükleer santraller, uzay araçları, hastaneler, barajlar vb. önem arz eden yapılar projelendirilirken viskoelastik malzeme davranışının göz önüne alınması zorunlu bir hal almıştır.

Yapılarda viskoelastik davranış yıllar içerisinde ortaya çıkabilir. Projelendirilirken bu özellik dikkate alınarak hesap yapılır. Bu durumda, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemlerinde zamanın da değişken olması sağlanarak hesaplar hassaslaştırılabilir. Ancak bu görüldüğü kadar kolay olmayabilir. Zamana bağlı viskoelastik problemlerin çözümünde farklı çözümler uygulanabilir:

- Problemin elastik kabulle bulunan sonuçları karşıtlık prensibi kullanılarak bulunur.
- Zaman uzayında, çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak çözüme gidilir
- Dönüşüm yöntemleri kullanılarak zaman uzayındaki problem dönüşüm uzayına aktarılır. Problem burada çözüldükten sonra Ters Dönüşüm yöntemleri kullanılarak problem tekrardan zaman uzayına aktarılır.

"Winkler Zeminine Oturan Viskoelastik Timoshenko Kirişlerinin Karışık Sonlu Elemanlarla Çözümü" adlı yüksek lisans tezinde, dönüşüm yöntemi olarak Laplace dönüşüm tekniklerini kullanılarak, zaman uzayından kurtarılan Timoshenko Kirişi, Laplace-Carson uzayında çeşitli yükler ve sınır koşulları altında inceledikten sonra, Ters Laplace Dönüşüm teknikleriyle tekrardan zaman uzayına aktarılarak çalışma tamamlanmıştır. Kirişin Timoshenko kirişi olması sebebiyle kaymanın elastik eğriye yaptığı katkı ihmal edilmeyerek hesaba katılmıştır. Yine Euler-Bernoulli kirişinden farklı olarak şekil değişiminden sonra düzlem kesitlerin düzlem kaldığı kabul edilirken belirli bir açı ile eğildiği, dolayısıyla elastik eğriye dik kalmadığı düşünülmüştür.

1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar

1948'de Alfrey, elastik-viskoelastik karşılaştırmasıyla lineer viskoelastic problemlerin çözümüne gitmiştir. Bu konunun bir benzeri ile 1955'de Lee, Laplace dönüşüm yaklaşımını ortaya atmıştır. Bu iki çözümde de elastik çözümün kapalı formunun var olması halindeki viskoelastik problemler çözülmüştür.

1963'de Flaherty, Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak, uzamaya ve yukarıdaki çalışmalara ek olarak kaymaya karşı da viskoelastik kabul edilen Timoshenko kirişinin titreşim problemini ele almış, çalışmasında; uzamadaki viskoelastik operatörün kaymadaki ile orantılı olduğunu düşünmüştür.

1966'da Pan, eksenel viskoelastik bünye bağıntısı kabulü yanı sıra kayma içinde viskoelastik kabul yapmıştır. Ancak, malzemenin sıkışmazlık kabulü özel bünye yapısına dönüşmüştür. Değişkenler, elastik çözüme ait özfonksiyonlar kullanılarak seriye açılmış ve zaman uzayında çözümlere ulaşılmıştır.

1968'de Halpin ve Pagano, anizotrop katılarda Prony serisi ile gösterilebilen viskoelastik malzemenin gevşeme fonksiyonuna simetrik matrislerle ulaşılabilindiğini ispatlamıştır. Aynı yıl, Zienkiewicz ve arkadaşları küçük zaman adımları ile, bu zaman aralığında gerilmelerin sabit olduğu kabulü ile şekil değiştirme uygunluk koşulunu kullanarak adım adım çözüme ulaşmıştır. Ayrıca Berger tarafından kısmi diferansiyel denklem takımına integral dönüşüm teknikleri uygulanarak çözümlere ulaşılmıştır.

1970'de Taylor ve arkadaşları, sıcaklık ve mekanik yükler altında lineer viskoelastik kuazi-statik problemlerin çözümü için ayrı bir hesap algoritması geliştirmişlerdir. Bu algoritmada, stasyoner problem için bölge ayrıklaştırılarak, integral denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

1971'de Huang ve Huang tarafından yapılan Laplace dönüşümü ile karşıtlık prensibi kullanılarak viskoelastik Timoshenko kirişinin serbest titreşimi incelenmiştir. Rizzo ve Shippy tarafından yapılan başka bir çalışmada da yine karşıtlık prensibi kullanılarak lineer viskoelastik malzemeden yapılmış düzlem sınır değer problemleri için Laplace dönüşüm uzayında sayısal çözümlere ulaşılmıştır.

1972'de Aboudi, küresel boşluğa sahip, yüzeyden ani yüklenen viskoelastik problem için Fourier dönüşüm tekniği uygulayarak yaklaşık ters döşümle çözüme ulaşmıştır. Aynı yıl Carpenter tarafından Kelvin malzemesi serisi ile gösterilebilen ve Poisson oranı sabit kabul edilebilen özel bir viskoelastik malzeme için t zaman parametresi göz önüne alınarak Runga-Kutta ve sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır.

1973'de Adey ve Brebbia tarafından Laplace dönüşümü ile zaman parametresi yok edilerek statik yükler için, problemine karşı gelen elastik yapı sonlu elemanla çözüme ulaştırılmıştır. Viskoelastik yapı için kabul edilen özel bir gevşeme fonksiyonu için, ters dönüşümler mümkün olmakta ve çözümlere ulaşılmaktadır.

1974'de Warzee tarafından termoviskoelastik problemler ele alınarak gerçek uzayda sonlu elemanlar ve sonlu farklarla çözülmüştür. Ayrıca dönüşüm tekniği ile zaman parametresi yok edilmiştir. Dönüşüm uzayında ulaşılan sonuçlardan ters dönüşümle çözüme ulaşılmıştır. Aynı yıl Yamada ve arkadaşları, Maxwell ve Kelvin gibi özel malzeme ve harmonik gerilme kabulü ile rijitlik matrisi elde edilerek, serbest titreşim frekanslarına ulaşmışlardır. Yapılan başka bir çalışmada Holzlöhner tarafından zamana bağlı sonlu eleman problemlerine Laplace dönüşüm teknikleri uygulanmıştır.

1976'da Kıral ve arkadaşları tarafından genel geometriye sahip viskoelastik çubuklara ait integro-diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Denklemleri dinamik yükler altında çözmek için Laplace dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem taşıma matris yöntemi ile Laplace uzayında çözülmüş ve ters dönüşümlerle sonuca ulaşılmıştır. Aynı yıl Piessens ve Dang tarafından yapılan çalışma ise, sayısal ters Laplace dönüşümü ve uygulamaları için

1934 ile 1976 yılları arasında yapılan 3000'den fazla referanslar gösterilerek derlenmiştir.

1977'de Huang elastik zemine oturan liner viskoelastik Timoshenko kirişinin sabit hızla hareket eden hareketli yükler altındaki davranışını incelemiştir. Aynı yıl Yagawa ve arkadaşları tarafından virtüel iş denklemlerine, yer değiştirme koşullarını katabilmek için Lagrange çarpanı kavramı kullanılmıştır. Böylece süperpozisyon yöntemi genelleştirilmiş düzlem elastisite denklemleri kullanılarak zamana bağlı kiriş eğilme problemlerine çözüm aranmıştır. Başka bir çalışma Aral ve Gülçat tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında zamana bağlı sınır şartları ile dalga denklemlerinin çözümü Laplace uzayında sonlu eleman yöntemi ile elde edilmiş ve ters dönüşüm yöntemi ile sonuçlara ulaşılmıştır.

1979'da Krings ve Waller, taşıma matrisi yöntemini Laplace dönüşümü ile birleştirerek basit kirişin titreşim problemi hakkında çalışmışlardır.

1981'de Manolis ve Beskos, çalışmalarında delik içeren keyfi şekilli bir viskoelastik ortamda düzlem, harmonik veya değişken dalga nedeniyle gerilme yığılmalarını sınır integral yöntemiyle bulmuştur.

1982'de Narayanan ve Beskos, kompleks zamana bağlı diğer problemleri sayısal olarak çözmek için Laplace dönüşüm yöntemlerinin kullanılmasında genel ve sistematik bir tartışma sunmuştur. Zaman bölgesindeki çözümü, sayısal ters Laplace alarak elde edilen çözümle kontrol etmiştir. Ayrıca literatürde varolan sekiz adet sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemini kullanımlarına göre incelemişlerdir.

1986'da Podhorecki, çubuğun boyuna titreşimini incelemek için gerçek uzayda sonlu eleman kullanmıştır. Aynı yıl White tarafından Hereditary İntegral tipindeki bünye bağıntıları sonlu farklar ile ayrıklaştırılmış düzlem şekil değiştirme problemine, sonlu eleman yöntemidu ile gerçek zaman uzayından statik yükler için çözüm bulunmuştur.

1987'de Chen ve arkadaşları tarafından bir boyutlu ısı problemlerini Laplace dönüşümü kullanarak sonlu eleman yöntemi ile incelemişlerdir. Çalışmada Honig ve Hirdes ters dönüşüm yöntemleri kullanılmıştır.

1988'de Sim ve Kwak tarafından izotropik lineer viskoelastik problemler sınır eleman yöntemi ile zaman bölgesinde formüle edilmiştir. Viskoelastik temel çözümler gevşeme fonksiyonlarının sabit katsayıları cinsinden temsil edilmiştir.

1990'da Rencis ve arkadaşları Euler-Bernoulli viskoelastik kirişinin davranışını zaman basamaklı Newman yöntemine dayalı işlem ve sonlu eleman yöntemini kullanmışlardır.

1992'de Lubliner ve Panoskaltsis tarafından viskoelastik malzemeleri tanımlamak için Kuhn modelleri genelleştirmiştir. Sünme fonksiyonları kullanılarak Laplace dönüşümleri yöntemi ile gevşeme fonksiyonları bulunmuştur.

1995'de Lee zaman bölgesinde sınır eleman yöntemiyle viskoelastik cisimlerin gerilme analizini incelemiştir. Temel çözümleri ve gerilme çekirdeğini elastik-viskoelastik karşıtlık prensibi kullanarak elde etmiştir. Aynı yıl Chen tarafından bir çalışma yapılmıştır. Çalışmasında, viskoelastik Timoshenko kirişinin Kuazi-statik ve dinamik analizi için Laplace dönüşümü yardımıyla sonlu elaman yöntemini kullanmıştır. Problemlerinde basitleştirme yapılmış ve sünme fonksiyonu kolayca Ters Laplace Dönüşümü alınabilen Prony serisine açılmıştır. Ayrıca kaymaya karşı olan sünme fonksiyonu da uzamadaki sünme fonksiyonu ile aynı alınmıştır. Bunun anlamı Poisson oranı sabit alınmıştır.

1997'de Johnson ve arkadaşları da, Maxwell katısını Prony serisi ile temsil etmişlerdir. Viskoelastik ince kirişlerin Dinamiği için Hareketin elastodinamik denklemlerini virtüel iş prensibinden türeterek sonlu eleman yöntemi ile gerçek uzayda çözmüşlerdir. Elastik değerlere viskoelastik değerler süperpoze edilmiştir. Aynı yıl başka bir çalışma da Wang ve arkadaşları tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında kuazi-statik yüklemeler altında lineer viskoelastik Euler-Bernoulli ve lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin eğilme çözümleri arasında kesin ilişkileri sunmaktadır. Bu ilişkiler bilinen Euler-Bernoulli sonuçlarının, Timoshenko sonuçlarına doğrudan geçişini sağlamaktadır.

1999'da Aköz ve Kadıoğlu tarafından yapılan çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişinin Kuazi-statik ve dinamik yükler altında davranışı Laplace–Carson uzayında karışık sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir. Çalışmada dönme ve kayma etkileri de dikkate alınmıştır. Ayrıca uzama ve kaymaya karşı her ikisi de farklı viskoelastik özellik gösteren malzeme alınabilmektedir.

1.3. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, viskoelastik Timoshenko Kirişlerini çözmek için bir karışık sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir. Problemin, Timoshenko kirişi olması, kaymayla meydana gelecek etkiyi elastik eğriye aktarılacağı ve kesit düzleminin de belirli bir açıyla döndüğünü kabul edeceği için gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilmiştir. Seçilen malzemenin viskoelastik olması ise çözümün gerçeğe uygunluğu bakımından önemlidir. Zaman uzayından Laplace Dönüşüm yöntemleriyle kurtarılan problem, bulunduğu Laplace-Carson uzayında çözüldükten sonra Ters Laplace Dönüşüm fonksiyonuyla zaman uzayına döndürülmüş ve problem ortadan kaldırılmıştır. Bu şekilde özel yapılar pratiğe daha yakın projelendirilebilecektir.

2. VİSKOELASTİSİTE

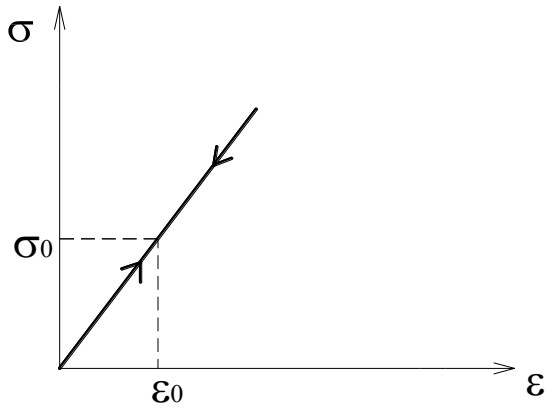
2.1.Viskoelastisiteye Giriş

Viskoelastik hesap geliştirilmeden önce malzemelerin davranışında zaman faktörü dikkate alınmıyordu. Ancak, gelişen teknoloji sonucu birtakım zaruri ihtiyaçları da beraberinde getirdi. Yüksek önem taşıyan elemanlar projelendirilirken, viskoelastik yaklaşım, taşıyıcı elemanların gerçekteki davranışlarını daha iyi ifade ettiği için tercih edildi. Yani bu yaklaşımda yer değiştirme gibi zaman da bir değişken olarak denklemlerin içine girdi ve hesaba katıldı.

Zamanın malzemenin mekanik davranışına etkisini incelemek için t=0 anında malzemeye σ_0 sabit gerilmesi t_1 süresince uygulanır. t_1 süresi sonunda gerilme boşaltıldıktan sonra malzemedeki şekil değiştirme-zaman eğrisi malzemenin davranışı hakkında bize bilgi verir. Bu yükleme yapıldıktan sonra malzeme 3 şekilde davranış gösterir. [Kadıoğlu (1999)]

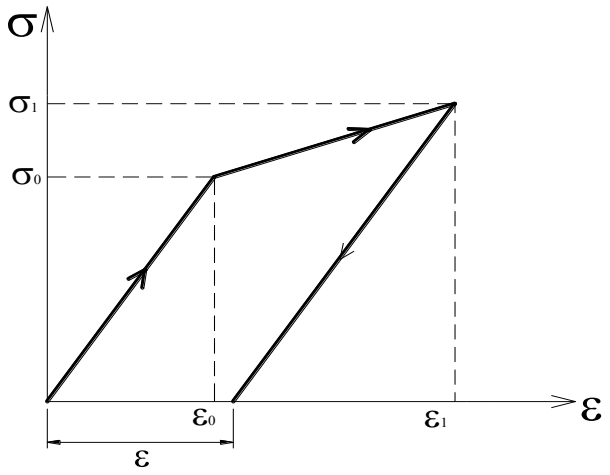
1. Elastik davranış
2. Plastik davranış
3. Viskoelastik davranış

Elastik davranışta, malzemeye yükleme yapıldıktan sonra, şekil değiştirme gerilme ile aynı anda oluşur ve herhangi birinde değişme olmadan diğerinde değişme olmaz. Kuvvet kaldırıldığında yer değiştirme ve gerilme sıfır olur.



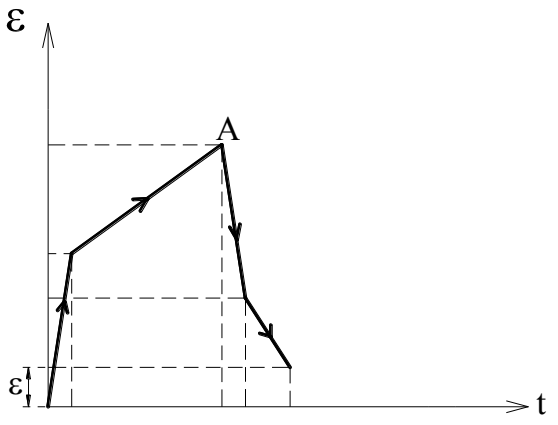
Şekil 2.1 Elastik Davranışın $\sigma-\varepsilon$ diyagramı

Plastik davranışta, akma sınırının üzerine çıkan bir gerilme uygulanınca ani şekil değiştirme ve onu izleyen plastik şekil değiştirme olur ve zamanla değişmez. Plastik şekil değiştirme zamandan bağımsızdır. Yük kaldırılınca şekil değiştirme geri dönmez.



Şekil 2.2 Plastik Davranışın σ–ε diyagramı

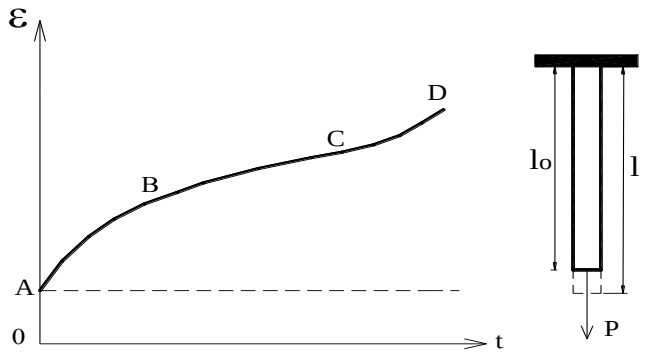
Viskoelastik davranışta ise, malzemeye sabit gerilme uygulandığında ani elastik uzama ve hemen ardından sürekli artan uzama oluşur. Yük kaldırıldığında ise ani bir geri dönüş yaşandıktan sonra zamanla azalan bir yer değiştirme gözlenir. Dikkat edilmesi gereken nokta viskoelastik davranışta herhangi bir andaki şekil değiştirme gerilmenin aldığı bütün değerlere bağlıdır. Yani zamana bağlılık söz konusudur. Ayrıca, yükleme hızının ve süresinin de yüklemenin kendisi kadar önemli olduğu ihmal edilmemelidir. Elastik ve plastik şekil değiştirmede ise bunlar bir önem teşkil etmezler. Şekil 2.3'de t =0 da uygulanan yük A noktasında kaldırılmıştır.



Şekil 2.3 Viskoelastik Davranışın ε–t diyagramı

2.1.1.Sünme ve Gevşeme

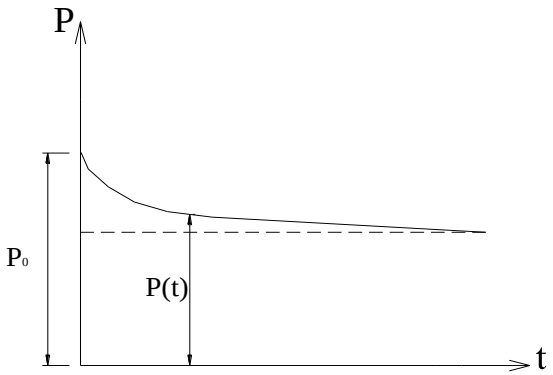
Malzemenin yük altındaki davranışlarına etkiyen, bu tezde de üzerinde çalışılan değişken zamandır. Yükleme altındaki cisimlerin zaman değişkenine bağlı davranışları sünme ve gevşeme olarak tanımlanabilir. *Sünme*, sabit gerilme altındaki cisimlerde zamanla sürekli oluşan şekil değişikliğidir. Şekil 4'de bir çubuğun sabit yük altında uzamasını incelersek, sabit yükleme altında uzamada artış olduğunu görürüz. Yükün uygulanmasından hemen sonra ani bir ε_0 uzaması olduktan sonra, zaman ilerledikçe uzama miktarında artış gözlenmektedir. Sünme bazı hallerde yüksek sıcaklıkta görüldüğü gibi bazı hallerde oda sıcaklığında görülebilir.



Şekil 2.4 Sünme

Cisimlerin viskoelastik davranışlarını yukarıdaki gibi sabit yük altında incelemek mümkün olduğu gibi, uzamayı sabit tutarak yükü değiştirerek de incelemek mümkündür. Şekil 5'te deney çubuğunun yük altında uzunluğunun sabittir.

Bunun için, başlangıçtaki uzamayı gerçekleştiren P_0 kuvveti zamanla azalarak, cismin viskoelastik özelliği dolayısıyla artacak uzamayı önlemektedir. Malzemede gerilmedeki bu azalışa *gevşeme (relaxation)* denir. [İnan (2001)]



Şekil 2.5 Gevşeme

2.2.Temel Elemanlar

Viskoelastik davranışta iki temel eleman vardır. Bunlar yay ve yağ kutusu (amortisman) diye isimlendirilirler. Yay şeklindeki modelle temsil edilen cisimlerin bünye denklemi

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{2.1}$$

şeklindedir ve gerilme şekil değiştirme orantılıdır. Bu modele uyan cisimlere *Hooke cismi* adı verilir. Dashpot olarak isimlendirilen yağlı amortisörlerle mekanik modellendirilmiş cisimlerin bünye denklemi ise

$$\sigma = \eta\,\dot{\varepsilon} \tag{2.2}$$

kabul edilir. Buradaki η viskosite katsayısıdır. Burada gerilme şekil değiştirme hızıyla doğru orantılıdır. ε'nin üzerindeki (.) işareti yer değiştirmenin zaman göre türevini ifade etmektedir ki bu da bize hızı vermektedir. Bu özelliğe sahip cisme *Kelvin cismi* denir.

2.3. Viskoelastik Modeller

Cisimlerin mekanik özellikleri birbirinden çok farklıdır. Herhangi bir mühendislik probleminde bunların göz önüne alınmasına imkan yoktur. Bu sebeple problemde en önemli yer teşkil eden cismin özellikleri dikkate alınarak diğerlerininki ihmal edilebilir. Projelendirme esnasında cisimler, kendisini en iyi temsil edecek *ideal cisimlerle* ifade edilir. Bu cisimler yukarıda *Hooke ve Kelvin cismi* olarak görülmüştü. Bu şekilde elde *edilen ideal* cisimler karışık olarak birleştirilerek yeni modeller oluşturulur. Bu modellere göre de cisimlerin davranışları incelenir.

Viskoelastik malzemeleri 3 model ile incelemek mümkündür. Bu modeller, mekanik davranışlarına ait bünye denklemleri ile incelenir. [Kadıoğlu (1999)]

2.3.1. Maxwell Cismi

Bu model Şekil 2.5'teki gibi Bir Hooke ve bir Newton Cisminin seri bağlanmasıyla oluşturulmaktadır. σ gerilmeleri aynı kabul edilen bu modelde ε toplam yer değiştirmesi ε_1 ve ε_2'nin toplamına eşittir.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{2.3}$$

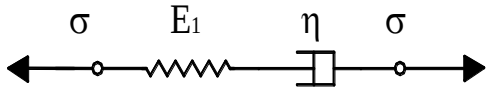
ε toplam uzamanın zamana göre türevi aşağıdaki gibi bulunur ve değerleri yerine yazılırsa ve (2.1), (2.2) ifadesinden değerleri yerine yazılırsa;

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \tag{2.4}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{2.5}$$

Maxwell cisminin diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu ifadeyi düzenlersek bünye denklemiaşağıdaki şekle dönüşür;

$$E_1 \sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1 \eta \dot{\varepsilon} \tag{2.6}$$



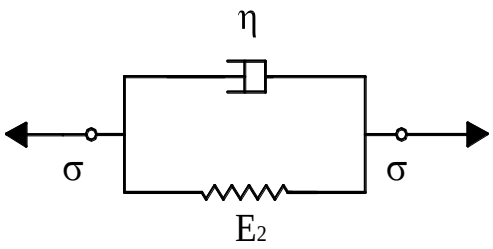
Şekil 2.6 Maxwell Cismi

2.3.2. Kelvin Cismi

Bu modelde bir yay ve bir amortisör paralel bağlanarak oluşturulmuştur. Her iki cismin de uzaması ε'dur ve modellerde meydana gelen gerilmeler σ_1 ve σ_2 olmak üzere Kelvin cismine gelen toplam kuvvet bu iki gerilmenin toplamına eşittir.

(2.1) ve (2.2)'nin birleştirilmesiyle Maxwell cisminin diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu ifadeyi düzenlersek bünye denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\sigma = E_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \tag{2.7}$$



Şekil 2.7 Kelvin Cismi

2.3.3. Üç Parametreli (Standart Katı) Cisim

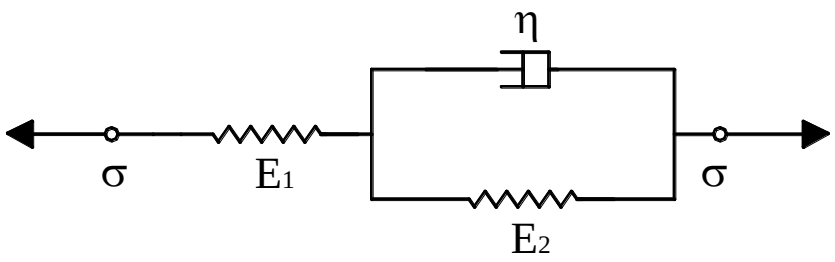
Bu model temel elemanlardan iki yay ve bir amortisörün birleşmesiyle ortaya çıkar. Şekil 2.8'de gösterildiği gibi Hooke Cisminin bir Kelvin cismine monte edilmesiyle oluşur.

Standart katı cisme uygulanan σ gerilmesi, yaydaki σ gerilmesi ile Kelvin cismine gelen σ gerilmesine eşittir.

Uzamalar ise; standart katı cisim ε uzaması, yaydaki ε_1 uzaması ile Kelvin cisminin ε_2 uzamasının toplamıdır. (2.1) ve (2.2)'nin birleştirilmesiyle Maxwell cisminin diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu ifadeyi düzenlersek bünye denklemi;

$$(E_1 + E_2)\,\sigma + \eta\,\dot{\sigma} = E_1 E_2\,\varepsilon + E_1\,\eta\,\dot{\varepsilon} \qquad (2.8)$$

şeklinde oluşur.



Şekil 2.8 Üç Parametreli (Standart katı) cisim

2.4. Diferansiyel Form

Daha önce (2.6), (2.7) ve (2.8)'de açıklanan bünye denklemleri

$$p_0\sigma + p_1\,\dot{\sigma} = q_0\,\varepsilon + q_1\,\dot{\varepsilon} \qquad (2.9)$$

oluşturulmuştu. Bu ifade genişletilirse, viskoelastik malzemelerin bünye denklemleri en genel formda

$$p_0\sigma + p_1\,\dot{\sigma} + p_2\,\ddot{\sigma} + p_3\,\dddot{\sigma} + \ldots = q_0\varepsilon + q_1\,\dot{\varepsilon} + q_2\,\ddot{\varepsilon} + q_3\,\dddot{\varepsilon} + \ldots \qquad (2.10)$$

yazılabilir. O zaman viskoelastik malzemelerin tek eksenli gerilme için gerilme-şekil değiştirme ilişkileri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\tilde{P}\,\sigma = \tilde{Q}\;\varepsilon \qquad (2.11)$$

P ve Q operatörlerdir. Bunların;

$$P = \sum_{r=0}^{m} pr \frac{\partial^r}{\partial t^r} \qquad Q = \sum_{r=0}^{n} qr \frac{\partial^r}{\partial t^r} \qquad (2.12)$$

şeklinde yaklaşım fonksiyonları seçilebilirler. Burada p_r ve q_r, malzemenin viskoelastisite katsayıları η ve elastisite modülleri E kullanılarak meydana gelmiş katsayılarıdır. Bu katsayılar modeldeki elemanların sıralanmasıyla değiştikleri gibi, özellikle serinin belirli sayıda terimi seçildiğinde, lineer viskoelastik malzemenin özel bir tipinin mekanik davranışına ait bünye denklemini karakterize eder.

2.5. İntegral Form

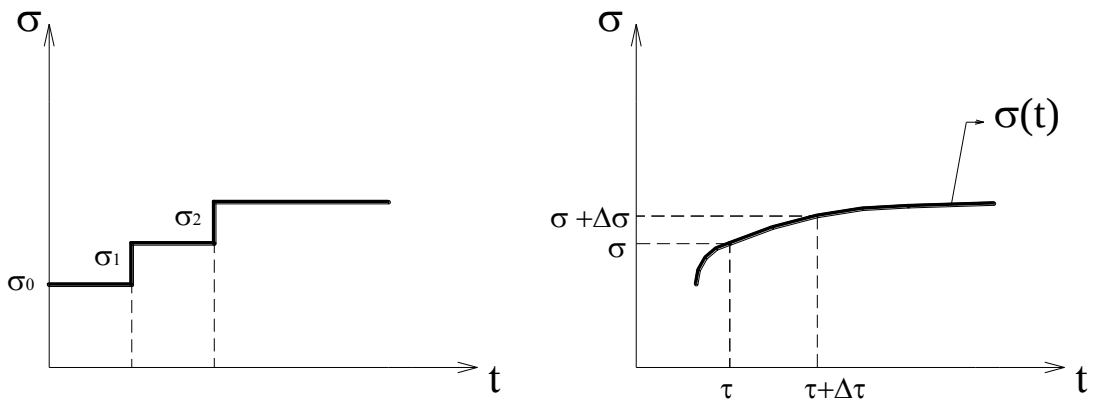
Lineer viskoelastisite de süperpozisyon kanunu geçerlidir. *Süperpozisyonun* geçerliliği kısaca; bir sistemin farklı yükler altındaki yer değiştirmelerin toplamının, her yükün toplanarak meydana getirdiği yer değiştirmeye eşit olması durumunda ortaya çıkar.

Buna göre;

Herhangi bir malzemeye Şekil 2.8'deki gibi basamak şeklinde bir gerilme uygulanırsa, yüklemeye yanıt olarak sünme de;

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\; J(t) + \sigma_1 J(t-t_1) + \sigma_2 J(t-t_2) + \sigma_3 J(t-t_3) + \ldots \qquad (2.13)$$

biçiminde olacaktır. J(t) sünme fonksiyonudur.



Şekil 2.9 σ–t diyagramı, [Kadıoğlu (1999)]

Bu nedenle Şekil 2.7.b'deki gibi herhangi σ = σ(t) gerilme etkisi altındaki malzeme, her biri sonsuz küçük dσ büyüklüğünde sonsuz küçük gerilmeler halinde incelenebilir. Sünme davranışı da aşağıdaki şekilde incelenebilir;

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)d\sigma$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \qquad (2.14)$$

Şekil (2.14)'deki integrallere Bellekli (Hereditary) İntegraller denir. Bu durumda herhangi bir zamandaki yer değiştirmenin, gerilmenin aldığı bütün değerlere bağlı olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu duruma viskoelastik davranış konusunda değinilmişti.

İntegral ifadede başlangıç olarak sıfır alınması uygun olacaktır. Çünkü, başlangıçta gerilmeler ve buna bağlı yer değiştirmeler sıfırdır ve zamanın da negatif olması söz konusu olamaz. O zaman (2.14) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon(t)=\int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \qquad (2.15)$$

t=0 anında ani bir gerilme oluştuğu varsayılarak

$$\varepsilon(t)=\sigma(0)J(t)+\int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \qquad (2.16)$$

olarak yazılır.

Bu mantık kullanılarak Y(t) gevşeme fonksiyonu olacak şekilde

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t} Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.17)$$

Yine burada da integral ifadede başlangıç olarak sıfır alınması uygun olacaktır. Çünkü, başlangıçta gerilmeler ve buna bağlı yer değiştirmeler sıfırdır ve zamanın da negatif olması söz konusu olamaz. O zaman (2.17) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma(t)=\int_0^t Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.18)$$

ve yine (2.16)'ya bakılarak

$$\sigma(t)=\varepsilon(0)Y(t)+\int_0^t Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.19)$$

yazılabilir. [Kadıoğlu (1999)]

3. TEMEL DENKLEMLER

3.1.Çubuk Geometrisi

Yapı elemanlarının mukavemet hesabından önce, bu elemanları hesap yöntemlerine göre sınıflandırmak yerinde olacaktır. Sınıflandırma yaparken de dikkat edilecek husus elemanların boyutları arasındaki farklardır. Buna göre taşıyıcı elemanlar üç sınıfa ayrılabilir:

1. Çubuklar
2. Levha, plak ve kabuklar
3. Diğer cisimler

Bu tezin konusu viskoelastik Timoshenko kirişleri olduğundan çubuklar üzerinde durulacaktır.

Çubuk, bir boyutu diğer iki boyutuna kıyasla çok büyük taşıtıcı elemanlara denir. Bir çubuk esas itibarıyla iki temel elemanıyla belli olur:

1. Eksen
2. Dik kesit

Çubuk ekseni, genel olarak üç boyutlu uzayda tanımlanan bir eğri olup ardışık dik kesitlerin ağırlık merkezinin geometrik yeridir.

Dik kesit ise, kapalı bir eğri ile çevrelenmiş düzlem parçasıdır. Çubuk, dik kesitin kendi ağırlık merkezinde çubuk ekseni olan bir uzay eğrisine her zaman dik kalacak şekilde hareketinden oluşur.

Çubuk ekseni;

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{3.1}$$

gibi bir vektörle tarif edilebilir. Burada, s eğri üzerinde herhangi bir noktanın başlangıç noktası ile arasındaki yay boyunu, r ise ele alınan noktanın yer vektörünü gösterir.

$\vec{t}, \vec{n}$ ve $\vec{b}$ olarak isimlendirilen üç birim vektörün çubuk hesaplarında önemi büyüktür. Burada $\vec{t}$ teğet birim vektör olarak adlandırılır,

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{3.2}$$

Bu birim vektör artan s yönünde ve eksen eğrisine teğettir.

$\vec{n}$ asal normal birim vektördür. Bu birim vektör eğrilik merkezine yönelmiş ve teğet vektörüne diktir.

$\vec{b}$ ise binormal vektör olup

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \tag{3.3}$$

şeklinde iki vektörün vektörel çarpılmasıyla elde edilir.

Bu üç birim vektör aşağıdaki gibi formülüze edilebilir.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \tag{3.4}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

Burada κ eğriliği, τ ise burulma eğriliğini gösterir. [Kadıoğlu (1999)]

3.2.Kirişler

Yapı tasarımında genellikle iki çeşit kiriş teorisi kullanılmaktadır. Bunlar;

1. Euler-Bernoulli kiriş teorisi
2. Timoshenko kiriş teorisi

Bunlardan Euler-Bernoulli kiriş teorisi, Timoshenko kiriş teorisinin özel hali olup günümüzde kullanım kolaylığı bakımından daha sık kullanılmasına karşın, daha keskin hesaplar yapılması gerektiğinde Timoshenko kiriş teorisine başvurulur. Aşağıda bunlardan kısaca bahsedilecektir.

3.2.1.Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Yapı projelendirilmesinde en çok karşılaşılan ve üniversitelerin lisans eğitiminde de eğitimi verilen kirişlerin mekaniğini inceler. Klasik kiriş olarak da isimlendirilir. Bu hipotezde, kesitler eğilmeden sonra düzlem ve elastik eğriye dik kalırlar. Kesme kuvvetlerinin de elastik eğri oluşumundaki katkıları ihmal edilir. Bu, denklemlerde kayma modülünün bulunmamasıyla da açıklanabilir. Özel yapılar haricinde büyük geçerliliğe sahip olan bu hipotezde, denge denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$q(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} \tag{3.5}$$

$$M(x) = -EI\ \frac{d^2w}{dx^2}$$

Burada w çökmeyi (kirişin yük doğrultusunda hareketini), M momenti, V kesme kuvvetini, q ise yayılı yükü ifade etmektedir.

Sonuç olarak, tüm bu ifadeler birbiri içerisinde yazılırsa ;

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2w}{dx^2} \right] = q(x) \tag{3.6}$$

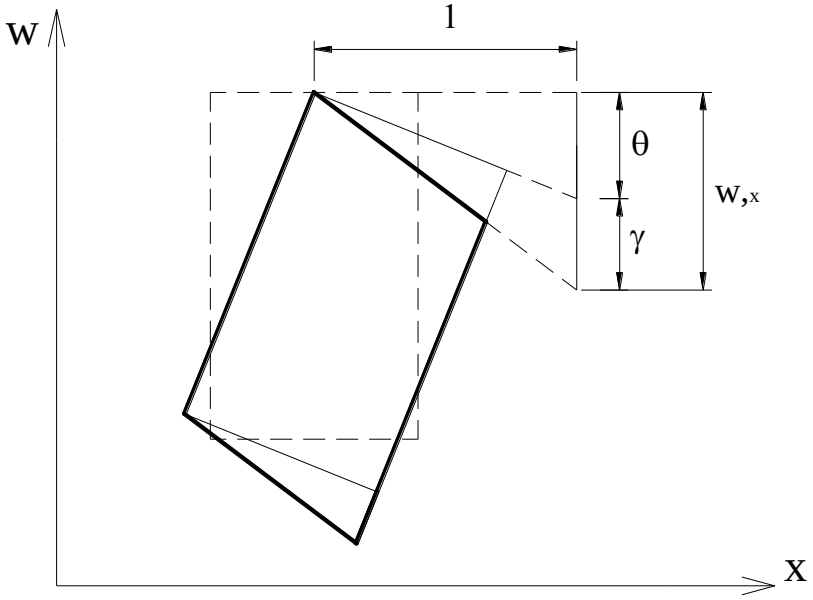
bünye denklemi ortaya çıkar. Bu tezde klasik kiriş olarak da isimlendirilmiştir.

3.2.2.Timoshenko Kiriş Teorisi

Bu teoride kaymanın elastik eğriye yaptığı katkı ihmal edilmez ve hesaba katılır. Bu teorinin ilk teoriden farkı, şekil değişitirmeden sonra kesitlerin yine düzlem kaldığı ancak belirli bir açıyla eğildikleri kabul edilir. O zaman kesitin toplam dönmesi, momentten gelen kısım ile kesme kuvvetinden gelen kısmın toplamına eşit olur. Matematiksel olarak ifade edilirse;

$$w_{,x} = \theta + \gamma \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki şekil incelenebilir.



Şekil 3.1 Timoshenko Kirişinde Dönme

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi kiriş en kesitinin deformasyonsuz, moment deformasyonlu ve moment ve kesme deformasyonlu halleri görülmektedir. Denge denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$q(x) = -\frac{dT}{dx}$$

$$T(x) = \frac{dM}{dx} \tag{3.8}$$

$$M(x) = -EI\ \frac{d^2w}{dx^2}$$

Burada w çökmeyi (kirişin yük doğrultusunda hareketini), M momenti, $T = GAk_s\gamma$ kuvvet yer değiştirme, q ise yayılı yükü ifade etmektedir. G kayma modülü ve ν Poisson oranı olup aralarında;

$$G = \frac{E}{(2+2\nu)} \tag{3.9}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Burada, k_s verilen kesitte kayma gerilmelerinin dağılışını düzgün hale getiren kayma faktörü olarak anılır. Bu katsayı kesitin geometrisine bağlı olup dikdörtgen için 12/10 gibi bir değerdir.

Sonuç olarak, (3.8)'deki tüm bu ifadeler birbiri içerisinde yazılırsa ;

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q(x) = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{M}{\mathrm{EI}} - \frac{M,_{xx}}{GAk_s} = 0 \tag{3.11}$$

elde edilir.

3.3.Viskoelastik Timoshenko Kirişi

Timoshenko kirişlerinde, Euler kirişlerinden farklı olarak kayma gerilmelerinin ihmal edilmediği söylenmişti. Bu fark denklemelere (3.11) ifadesi ile taşınmaktadır. Aşağıda gösterilen bu terim, kayma ifadelerini içererek kaymanın hesaptaki etkisinin ihmal edilmemesini sağlamaktadır.

$$\frac{M,_{xx}}{GAk_s} \tag{3.12}$$

Ancak, tıpkı Timoshenko kirişinin Euler–Bernoulli kirişinden (3.11)'de gösterildiği şekilde farklılaştığı gibi, zaman boyutu işin içerisine girdikten sonra bir takım farklılıklar da Timoshenko kiriş hesabında oluşmaktadır.

(3.8)'de gösterilen gösterilen moment denklemi $\mathrm{M(x)} = -\mathrm{EI}\ \frac{d^2w}{dx^2} = -\mathrm{EI}\ w''$

şeklindedir. Yani kısaca moment değeri bir sabit ile yer değiştirmenin x'e göre ikinci türevi ile çarpımına eşittir. Ancak problem viskoelastik bir problem ise, bu gösterim bu kadar kolay yapılmaz. Viskoelastik problemlerde elastisite modülü zamanın bir fonksiyonu olduğundan yani zamanla değiştiğinden, elastisite modülüne bağlı olarak, yer değiştirme, moment, reaksiyon kuvvetleri de değişecektir. O zaman (3.8)'de gösterilen moment değeri, zamana bağlı iki fonksiyonun çarpımı şeklinde

düşünülebilir. Zamana bağlı iki ifadenin Laplace operatöründen geçirilmesi aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebilir.

M(x) = - EI $\frac{d^2w}{dx^2}$ = -EI w'' ile ifade edilen moment değeri,

(2.19)'daki viskoelastik yaklaşımla $\Rightarrow$ $\sigma(t)=\varepsilon(0)Y(0)+\int_0^t Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau$

aşağıdaki hali alacaktır.

$$M(t)= D(0)\frac{dw^2}{dx^2} + \int_0^t \frac{dD(t-\tau)}{d\tau}\frac{d^2w}{dx^2}d\tau \qquad (3.13)$$

Burada D ile gösterilen fonksiyon EI'ya eşittir. Görüldüğü üzere buradaki moment değeri zamana bağlı olup değişmektedir. Problem çözülürken, zaman uzayından Laplace-Carson uzayına geçilerek zaman parametresinden kurtulunup, burada çözüm yapıldıktan sonra sonuçların tekrardan zaman uzayına taşınması ve problemin çözülmesi planlanmaktadır.

4.SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

4.1.Sonlu Eleman Formülasyonuna Giriş

Günümüzde, gelişen teknolojiyle beraber ortaya çıkan karmaşık işlemleri çözmek, klasik ve kesin sonuç veren yöntemlerle mümkün olmakla beraber çok zor ve zaman alıcıdır. Bu yüzden alternatif çözüm yöntemleri geliştirilmiş ve uygulamaya başlanmıştır. Bu yöntemlerin bilgisayar programlarına uygulanabilirliği ve hata paylarındaki düşüklüğü de, bu tip yöntemlerin çekiciliğini arttırmış ve kullanılmasını zorunlu hale getirmiştir. Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method) de son yıllarda hesaplamalarda sık başvurulan, hızı, hata payının düşüklüğü ve çeşitli fizik problemlerinin çözümlerine uygulanabilirliği ile önde gelen hesap yöntemlerindendir.

Burada temel yaklaşım sistemi kendi içinde küçük parçalara ayırmak ve çeşitli yaklaşım fonksiyonlarıyla bir benzer modelini oluşturabilmektir. Problemin kesinliği de seçilen yaklaşım fonksiyonlarının gerçeğe ne kadar yakın olduklarıyla alakalıdır.

Sonlu eleman yaklaşımının basamakları 3 başlık altında kısaca özetlenebilir:

1. Sistemi küçük parçalara ayırmak: Bu şekilde zor geometrili sistemler, daha basit ve hesaplanabilir alt sistemlere indirgenir. Yani zor geometrili sistem, parçalanan küçük geometrili parçaların bir toplamı niteliğindedir.
2. Yakınsama Fonksiyonlarının her eleman üzerinde seçilmesi: Bu fonksiyonlar, her elemen üzerinde ayrı ayrı oluşturulacak ve problemin çözümünün keskinliğini değiştirecek cebirsel polinomlardır.
3. Elemanların toplanması: Bu basamakta, parçalanan elemanlar, süreklilik göz önünde bulundurularak birleştirilirler ve problemin bir benzer modeli böylelikle oluşturulmuş olur. [Reddy (1993)]

4.2.Sonlu Eleman Formülasyonunda Yaklaşım:

Daha önce de belirtildiği gibi sonlu elemanlarda yaklaşık çözüm, oluşturulan model üzerinde aranır. Zaten bu yüzden çözümler yaklaşıklık esasına göre incelenir. Bir diferansiyel denklemin çözümü problemin sınır şartlarını sağlayan, N adet ψ fonksiyonun u_i katsayılarıyla çarpımının lineer toplamı biçiminde oluşmaktadır. Burada u_i katsayıları problemin bilinmeyenleri olup hesaplanarak sonuca gidilmek istenecektir. Yani aşağıdaki şekilde formülüze edilirse;

$$u \approx U_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \psi_i \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Matris formda ifade edilirse;

$$u = [N]\{u\} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. (4.1)'de yaklaşık eşittir işaretinin manası, çözüm önerisinin yaklaşık olduğunu göstermektedir. Kısaca, u gerçek çözümün bağımlı değişkeni ve U_N ise önerilen yaklaşık çözümün bağımlı değişkenidir. ψ_i fonksiyonları ile bu fonksiyonlara çözüm olacak u aynı boyutta olduğu için, u'nun sağlaması gereken sınır koşulları ψ_i fonksiyonlarını da sağlamalıdır.

Katsayıları belirlerken aşağıdaki ifade kullanılabilir.[Reddy (1993)]

$$\int wRdx = 0 \tag{4.3}$$

Bu ifadeye ağırlıklı integral denir. Burada, w ağırlık fonksiyonu, R ise yapılan çözüm kabulünün diferansiyel denkleme yerleştirilmesiyle elde edilen artan fonksiyondur. Çözümün yakınsanması için ağırlık fonksiyonu R'ye uygun seçilmelidir.

4.2.1.Çözümün Yakınsaması:

Sonlu elemanlar yönteminde, seçilen fonksiyonun gerçek çözüme yakın sonuçlar vermesi istenir. Bu olay yaklaşım fonksiyonları yardımıyla yapılır. Bu yaklaşım fonksiyonları sınırlarda, yani nodlarda, gerçek fonksiyonun değerlerini sağlamalıdır. Yani yaklaşım fonksiyonları, x'in nodlardaki değerlerinde gerçek değerleri

verecektir. Bu fonksiyonlar genelde cebirsel polinomlardan seçilirler. Bunun iki nedeni vardır:

- Sistematik olarak sayısal analizin enterpolasyon teorisini kullanma imkanı doğar.
- Sayısal integrasyon polinomlar için uygun ve kolaydır.

Seçilen yaklaşım fonksiyonun Sonlu Eleman Formülasyonunda kullanılabilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bunlar :

1. Seçilen fonksiyon eleman üzerinde sürekli olmalı, ve zayıf formun gerektirdiği kadar türevlenebilmelidir.
2. Fonksiyon tam bir polinom olmalıdır. Yani içinde bağımsız değişkenin en küçük derecelisinden, en büyük derecelisine kadar bütün derecelerini bulundurmalıdır.
3. Nodlardaki birincil değişkenin değerleri gerçek değerlerle aynı olmalı yani interpolant olmalıdır.

Yukarıda sayılan özelliklerden ilki, denklemin sıfır olmamasını garanti ederken, ikincisi çözüme ilişkin bütün formları yakalamayı sağlar. [Reddy (1993)]

Yukarıda açıklananlar yardımıyla, seçilecek en küçük dereceli polinomun

$$u^e = a+bx \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabileceği söylenebilir.

$$u^e(x_A) = u_1$$

$$u^e(x_B) = u_2 \tag{4.5}$$

şeklinde yazılırsa ve

$$u_{1=}\ a+bx_A \tag{4.6}$$

$$u_{2=}\ a+bx_B \tag{4.7}$$

denklemleriyle birlikte çözülürse;

$$a = \frac{1}{(x_A - x_B)(u_1 x_B - u_2 x_A)}$$

$$b = \frac{1}{(x_B - x_A)(u_2 - u_1)} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Eleman boyu x_A-x_B = l_e şeklinde ifade edilirse (4.8) denklemi

$$a = u_1 \frac{\bar{x}}{l_e}$$

$$b = \frac{(u_2 - u_1)}{l_e} \tag{4.9}$$

şekline dönüşür. Bu bulunanlar polinomlarda yerine koyulursa

sırasıyla u_1 ve u_2'in katsayısı için:

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{l_e}\right)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{\bar{x}}{l_e}\right) \tag{4.10}$$

bulunur. Böylece genel enterpolasyon

$$u \approx U^e(\bar{x}) = \phi_1(\bar{x})u_1 + \phi_2(\bar{x})u_2 = \sum_{i=1}^{N} \phi_i u_i \tag{4.11}$$

ifadesi yukarıdaki gibi elde edilebilir. [Reddy (1993)]

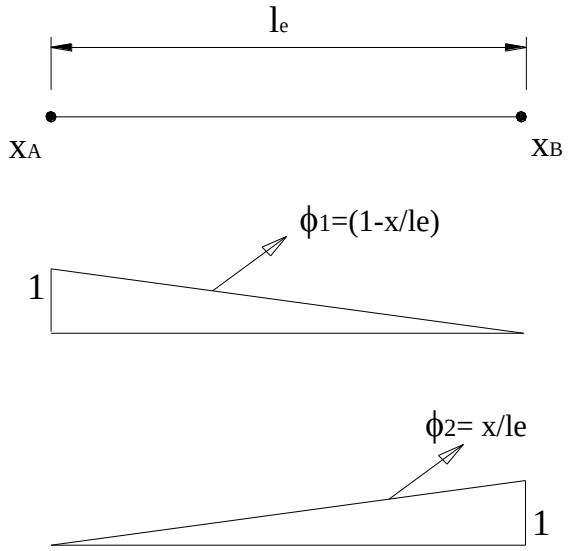
Yaklaşım fonksiyonları çarpanı olduğu noktada 1, olmadığı noktalarda ise sıfır değerini almaktadır. Yine eleman boyunca, u_s= u_1=u_2 olmak üzere herhangi bir x noktasında u(x)=u_s olduğundan yaklaşım fonksiyonlarının eleman boyunca toplamları 1 olacaktır. Matematiksel yolla ifade edilirse;

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i = 1 \tag{4.12}$$

şeklinde yazılır. Buradan yine matematiksel olarak türevlerinin toplamının da sıfır edeceği anlaşılmaktadır:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\phi_i}{d\bar{x}} = 0 \tag{4.13}$$

Yukarıda anlatılanlar aşağıdaki şekil üzerinde incelenirse daha iyi anlaşılmış olacaktır.



Şekil 4.1 Enterpolasyon Fonksiyonları. [Reddy (1993)]

Yaklaşım fonksiyonlarının derecesinin belirlenmesinde şunlar göz önüne alınmalıdır:

Bir elemanın üzerinde oluşturulmak istenen, yaklaşım fonksiyonun derecesi n ise n+1 adet bilinmeyen olacağından, eleman üzerinde n+1 adet nokta alınmalıdır. Örneğin 2. mertebe bir kuadratik fonksiyon için $u(x)=a+bx+cx^2$ formunda olacağı için eleman üzerinde en az 3 nokta almak gerekir.

4.3.Zayıf Formun Oluşturulması:

Bir problemin matematiksel modelini oluşturan diferansiyel denkleme, yapılan çözüm kabulünün ve ağırlık fonksiyonun uygulanmasıyla elde edilen ağırlıklı integralde, R artan fonksiyonun türev mertebesinin, ağırlık fonksiyonunun üzerine dağıtılmasıyla elde edilen yeni ifade zayıf formu verir.

Bu işlemi basamaklarıyla anlatmak daha anlaşılır olacağından;

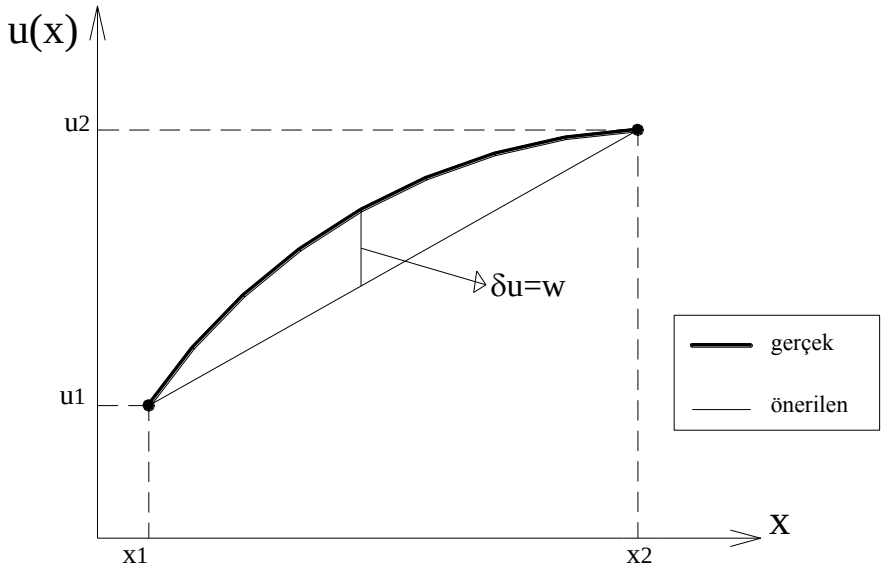
1. Problemin diferansiyel denkleminde yaklaşık çözüm gerçek çözümün yerine yazılıp w ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak tanım kümesi üzerinde integre edilir. Burada, yaklaşık çözüm kullanıldığı için integral ifade sıfıra eşit olmayacaktır. Bundan sonra, N adet bağımsız w için yaklaşık çözümlerdeki bilinmeyenler tespit edilerek problemin bilinmeyenleri bulunacaktır. Genel olarak, w fonksiyonu u'dan daha düşük seviyede süreklilik gerektirir.

2. Ağırlıklı integral ifadesinde, değişik w değerleri için çözüm mümkün olmakla birlikte, bu zor bir işlem olarak görülebilir. Mesela integral ifadenin içerisinde dördüncü mertebeden bir türev varsa, ψ fonksiyonunun gerekli sürekliliği göstermesi seçilen yaklaşım fonksiyonunun büyük dereceli bir polinom olmasına bağlıdır. Bu durumda, yüksek mertebeli türevler, ağırlık fonksiyonunun üzerine kısmi integrasyon kullanarak dağıtılır. Türev mertebelerinin azaltılıp, ağırlık fonksiyonunun türev mertebesiyle eşitlenerek oluşturulan ifadeye *zayıf form* denir. Ancak, dağıtılma sırasında türev mertebesinin çift mertebede olması şarttır. Bu durum iki önemli avantajı da beraberinde getirir:

   - Bu şekilde azaltılan türev mertebeleri sayesinde, bağımlı değişkenin daha az süreklilik koşulu içermesi problem çözümünü kolaylaştırır. Ayrıca çözümüde matrislerin simetrik çıkması sağlanarak, çözüm kolaylaşacaktır.

   - Doğal sınır koşullarını problemin içerisine dahil ederek, U_N kabulünün sadece esas sınır koşullarını sağlamasının yeterli oluşu.

3. Zayıf forma sokulmuş denkleme, probleme ait sınır koşulları uygulanarak devam edilir. Dikkat edilmesi gereken nokta esas sınır koşullarının uygulandığı nodlarda, w ağırlık fonksiyonunun kaybolmasıdır. Bunun sebebi ağırlık fonksiyonunun birincil değişkenin varyasyonu olmasıdır. Yani sınır koşullarının sabit bir değeri aldığı noktada, sınır koşullarının varyasyonu olan ağırlık fonksiyonu w de sıfıra eşit olacaktır. Seçilen fonksiyonun sınırlarda, gerçek değeri vermesi, ağırlık fonksiyonunun yani seçilen fonksiyonla gerçek fonksiyon arasındaki değişmenin sıfır olacağını gösterecektir. Bu aşağıdaki şekilde daha iyi analiz edilebilir.



Şekil 4.2 Gerçek ve Önerilen Fonksiyon

Görüldüğü gibi ağırlık fonksiyonu w, gerçek fonksiyon ile önerilen çözüm arasındaki değişimi göstermektedir. Yani kısaca, ağırlık fonksiyonu gerçek fonksiyonun varyasyonudur denebilir.

4.4.Elemanların Birleştirilmesi

Buraya kadar problem sonlu elemanlara ayrılarak, bilinen yaklaşım fonksiyonlarıyla ifade etmeye çalışıldı. Bundan sonra ise, oluşturulan sonlu elemanlar belirli süreklilik şartları da göz önüne alınarak, üst üste bindirilip global sistem oluşturulacaktır.

Örneğin bir nokta, iki eleman tarafından paylaşılıyorsa, o noktadaki eleman değişkenlerini toplamak veya eşitlemek suretiyle sonlu eleman ağı oluşturulacaktır. Mesela, birinci elemanın ikinci noktasıyla, ikinci elemanın birinci noktası çakışıyorsa, buradaki birincil değişken u_2 diyerek isimlendirilir. İkincil değişkenler için ise, bu noktaya herhangi bir dış kuvvet etkimiyorsa, iki elemandan gelen uç kuvvetlerin toplamının sıfıra eşit olması sağlanır. Bunun sebebi bir noktada her zaman dengenin olmasıdır. Eğer, tekil kuvvet yada tekil moment uygulaması varsa uç kuvvetlerin toplamının uygulanan kuvvete veya momente eşit olması beklenir. Birleştirme olayından sonra, problemin karakterinin belli olacağı sınır şartlarının uygulanmasına sıra gelir. Sınır şartları uygulanırken, probleme de son hali verilmiş olur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, sınır şartlarının en son devreye

girmesidir. Sistem matrisini ve yük matrisini elde ederken, sınır koşulları devreye sokulmadı.

4.5.Karışık Sonlu Elemanlar ve Timoshenko Kirişi:

Karışık sonlu elemanlarda, iki adet yönetici denklem kullanılır. Bu yüzden her denklem için farklı iki ağırlık fonksiyonu işleme sokulur. Bu işlem ileriki bölümde daha ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir.

Örneğin Timoshenko Kirişi ele alınırsa:

$$\frac{dM^2}{dx^2} + q(x) = 0$$

$$\frac{dw^2}{dx^2} + \frac{M}{\mathrm{EI}} - \frac{M,_{xx}}{GAk_s} = 0 \qquad (4.14)$$

bu iki denklemin farklı iki ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak entegre edilmesiyle zayıf forma ulaşılmaya çalışılır. Ağırlık fonksiyonları aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$u = \delta w$

$v = \delta M \qquad (4.15)$

Zayıf forma ulaşıldıktan sonra sınır terimlerine dikkat edilirse, bunların fiziksel anlamlarının enerji olması gerektiği anlaşılır. Dolayısıyla seçilen ağırlık fonksiyonlarından, u'nun katsayısının kesme kuvveti, v'nin katsayısının da dönme olacağı anlaşılır. O zaman, u'nun çökme, v'nin ise moment değerinde seçilmesi, enerjiyi vereceğinden, $u = \delta w$ ve $v = \delta M$ seçimini yapmak zorunluluğu ortaya çıkar. İşlemlerin varyasyonel olarak yürütülebilmesi için δ yani değişim işareti konur. Bu şekilde, toplam potansiyel enerjinin minimum olması koşulu sağlanabilir.

Bu şekilde, zayıf form oluşturulmuş olur. Karışık sonlu elemanların, normalden bir farkı da yukarıda da bir şekilde bahsedildiği gibi birincil ve ikincil değişkenlerdir. Karışık sonlu elamanlarda *esas sınır koşulları*

w ve M (birincil değişkenler)

doğal sınır koşulları

$\frac{dw}{dx}$ *ve* $\frac{dM}{dx}$ (ikincil değişkenler) (4.16)

olarak adlandırılırlar. Bu şekilde, farklı türden değişkenlerin bir arada bulunduğu formülasyonlara *Karışık Sonlu Elemanlar* denir. Karışık sonlu eleman yönteminin en büyük avantajı kayma deformasyonu yapan kirişlerde *kayma kilitlenmesi* olayının ortadan kalkıyor olmasıdır. Kayma kilitlenmesi, birincil değişkenlerin deplasman boyutunda olduğu formülasyonlarda, eğilme enerjisinin sıfır çıkarak anlamsız bulunması olarak açıklanabilir.

Birincil ve ikincil değişkenlerin kullanılarak oluşturulan yaklaşım fonksiyonları

$$w = \sum_{i=1}^{N} w_i \psi_i \qquad\qquad M = \sum_{i=1}^{N} M_i \phi_i \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilebilir. Matris formunda yazılırsa;

$$w = [N]\{w\} \qquad\qquad M = [N]\{M\} \tag{4.18}$$

şeklinde belirlenir. Burada kolaylık olması bakımından ,

$\phi_i = \psi_i$ ve N=2 seçilebilir. Bunlar yardımıyla,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

yukarıdaki ifadede bilinmeyenler hesaplanarak problem çözüme kavuşturulur.

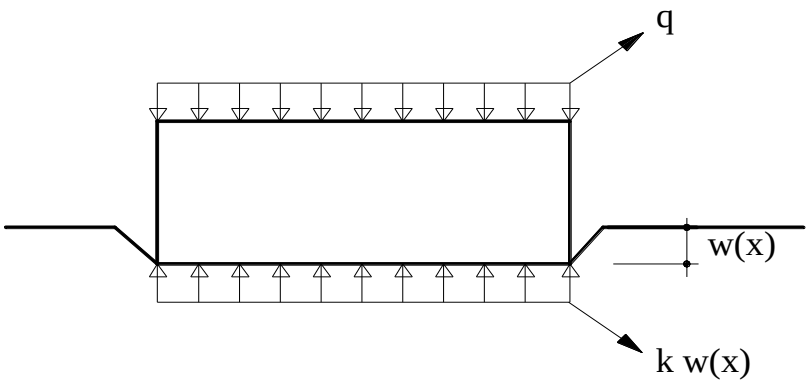
5. KİRİŞİN KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

5.1. Birinci Denge Denkleminden Zayıf Form Elde Etme

Kuvvet dengesinden yazılan bünye denklemi (3.14)'de

$\frac{dM^2}{dx^2} + q(x) = 0$ şeklinde bulunmuştu.

Kiriş Winkler zeminine oturduğu için dış yük kabulünü q(x) = q(x)- kw(x) şeklinde yapılabilir. Bunun için Şekil 5.1 incelenebilir. (şekilde *k* Winkler zemin katsayısıdır)



Şekil 5.1 Winkler Zeminine Oturan Kiriş

Böyle olunca, denklem:

$$M_{,xx} + q(x) - kw(x) = 0 \qquad (5.1)$$

şekline dönüşür.

Şimdi (3.30) denkleminin Laplace dönüşümü alınıp, ağırlık fonksiyonunun Laplace dönüşmüşü ile çarparak sıfırdan L 'ye integre edilirse zayıf forma ulaşılır. Önce (3.30)'a Laplace operatörü uygulanırsa:

$$L\,[M_{,xx} + q - kw] = 0 \qquad (5.2)$$

$$\int_0^L \bar{u}\, L\, [M,_{xx} + q - kw]dx = 0 \tag{5.3}$$

$$\int_0^L \bar{u}(\bar{M},_{xx} + \bar{q} - k\bar{w})dx = 0 \tag{5.4}$$

Burada, zamana bağlı iki fonksiyonun çarpımına Laplace operatörü uygulanması gibi bir durum olmayacağı için viskoelastik olmayan kirişle farklılık doğmayacaktır. Laplace operatörü uygulandıktan sonra sıra şimdi türev mertebelerini eşitlemeye gelmiştir.

$$-\int_0^L \bar{u},_x \bar{M},_x dx + \int_0^L \bar{u}\bar{q}dx - \int_0^L k\bar{u}\bar{w}dx + \bar{u}\bar{M},_x \Big|_0^L \tag{5.5}$$

Yukarıdaki denklemde, sınır terimleri incelenirse, $\bar{M},_x$ teriminin daha önce de belirlendiği gibi problemin kesme terimini yani $\bar{T}$'yi ifade edeceği için aşağıdaki değişikleri yapmak uygun olacaktır.

$$-\int_0^L \bar{u},_x \bar{M},_x dx + \int_0^L \bar{u}\bar{q}dx - \int_0^L k\bar{u}\bar{w}dx + \bar{u}\bar{T} \Big|_0^L \tag{5.6}$$

Böylece birinci denklemin zayıf formu oluşturulmuş oldu.

5.2.İkinci Denge Denkleminden Zayıf Form Elde Etme

Moment dengesinden yazılan (3.10) bünye denkleminde, EI parametresi D ile gösterilirse bünye denklemi aşağıdaki hali alır.

$$w,_{xx} + \frac{M}{D} - \frac{M,_{xx}}{GAk_s} = 0 \tag{5.7}$$

Burada, $w,_x$ elemanın aşağıdaki ifadeye eşit olduğu görülmüştü:

$$w,_x = \theta + \gamma \tag{5.8}$$

Yukarıdaki denklemin x'e göre türevi alındığında;

$$w,_{xx} = \theta,_x + \gamma,_x \tag{5.9}$$

denklemine ulaşılır. γ ve θ terimleri için aşağıdaki denklemler kullanılmalıdır. [Flügge (1975)]

$$\gamma(t) = \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)T(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} T(\tau) d\tau \right\} \tag{5.10}$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dx} = \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)\frac{d^2M(t)}{dx^2} + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \frac{d^2M(t)}{dx^2} d\tau \right\} \tag{5.11}$$

Bernoulli-Navier hipotezine göre düzlem kesitlerin düzlem kalması kuralına bakılarak,

$$\varepsilon=\theta(t)y \tag{5.12}$$

denklemi yazılırsa ve bu denklem y ile çarpılıp alan üzerinde entegre edilirse ve (2.16)'daki denklem buraya uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\theta(t)\int_A y^2 dA = J(0)\int_A \sigma(t) y dA + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \int_A \sigma(t) y dA \tag{5.13}$$

$$\theta(t)I = J(0)M(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M(\tau) d\tau \tag{5.14}$$

(5.11) ve (5.14), (5.9) denkleminin içerisine katılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$w_{,xx} = -\frac{1}{I}\left\{ J(0)M_{,x}(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M(\tau) d\tau \right\} + \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)M_{,xx}(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} M_{,xx}(\tau) d\tau \right\} \tag{5.15}$$

$$\overline{w}_{,xx} + \frac{s}{I}\{\bar{J}\,\overline{M}\} - \frac{s}{k_s A}\{\bar{J}_1 \overline{M}_{,xx}\} = 0 \tag{5.16}$$

burada JM fonksiyonun yanına gelen s parametresinin türemesi aşağıda ayrıntılı şekilde anlatılmıştır;

$$JM = J(0)M(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M(\tau) d\tau \tag{5.17}$$

Birinci ifade;

$$\Lambda(\, J(0)M(t)\,) = J(0)\overline{M}(s) \tag{5.18}$$

⇑İkinci ifade Konvolusyon teoremi yardımıyla ;

$$\Lambda\left(\int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M(\tau)d\tau\right) = \Lambda\left(\frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)}\right)\Lambda(\, M(\tau)\,)$$

$$= s\,\bar{J}(s) - J(0) \tag{5.19}$$

olarak bulunur. İfadeler birleştirilirse;

$$\Lambda(\, JM\,) = s\,\bar{J}\,\overline{M} \tag{5.20}$$

ortaya çıkmış olur.

Artık elde edilen (5.10) denklemine sonlu eleman formülasyonu uygulanabilir. Bunun için (5.10) denklemi ağırlık fonksiyonunun dönüşmüşü ile çarpılarak, sınır üzerinde entegre edilirse

$$\int_0^L \bar{v}\left(w,_{xx} + \frac{s}{I}\{\bar{J}\,\overline{M}\} - \frac{s}{k_s A}\{\bar{J}_1\overline{M},_{xx}\}\right)dx \;\; = 0 \tag{5.21}$$

Türev mertebelerini eşitlemek için kısmi entegrasyona tabi tutulursa;

$$\int_0^L \left(\bar{v}w,_{xx} + \frac{\bar{v}}{I}\{s\bar{J}\,\overline{M}\} - \frac{\bar{v}}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_{xx}\}\right)dx \;\; = 0 \tag{5.22}$$

$$-\int_0^L \bar{v},_x\, \overline{w},_x\, dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v},_x\, \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \bar{v}\overline{w},_x\Big|_0^L - \frac{\bar{v}}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}\Big|_0^L = 0 \tag{5.23}$$

$$-\int_0^L \bar{v},_x\, \overline{w},_x\, dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\,\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v},_x\, \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \bar{v}\left(\overline{w},_x\Big|_0^L - \frac{1}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}\Big|_0^L\right) = 0 \tag{5.24}$$

Yukarıdaki denklemde, sınır terimleri ağırlık fonksiyonu parantezine alınırsa, parantez içindeki kısmın dönmeyi vereceği açıktır.

$$\overline{w}_{,x}\Big|_0^L - \frac{1}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M}_{,x}\}\Big|_0^L = \theta\Big|_0^L \qquad \text{şeklinde gösterilebilir.} \tag{5.25}$$

$$-\int_0^L \bar{v}_{,x}\,\overline{w}_{,x}\,dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\,\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v}_{,x}\{s\bar{J}_1\overline{M}_{,x}\}dx + \bar{v}\bar{\theta}\Big|_0^L = 0 \tag{5.26}$$

Bu şekilde ikinci denklemin de zayıf formu oluşturulmuş oldu.

5.3. Zayıf Formlar Kullanılarak Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Şimdi (5.6) ve (5.26) denkleminde ağırlık fonksiyonu olarak kullanılan terimlerin yerlerine aşağıdaki karşılıkları yazılarak zayıf formlarda yerlerine yazılırsa aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$\bar{u} = \delta\bar{w}$$

$$\bar{v} = \delta\overline{M}$$

$$\bar{u}_{,x} = \delta\overline{w}_{,x}$$

$$\bar{v}_{,x} = \delta\overline{M}_{,x} \tag{5.27}$$

$$\delta\bar{I}_1 = -\int_0^L \delta\overline{M}_{,x}\,\overline{w}_{,x}\,dx + \frac{1}{I}\int_0^L \delta\overline{M}\{s\bar{J}\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \delta\overline{M}_{,x}\{s\bar{J}_1\overline{M}_{,x}\}dx + \delta\overline{M}\,\bar{\theta}\Big|_0^L = 0$$

$$\delta\bar{I}_2 = -\int_0^L \delta\overline{w}_{,x}\,\overline{M}_{,x}\,dx + \int_0^L \delta\overline{w}\,\bar{q}\,dx - \int_0^L k\delta\overline{w}\,\overline{w}\,dx + \delta\overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L = 0 \tag{5.28}$$

Bu iki denklem için integral ifadenin içerisindeki bütün terimler aşağıdaki gibi varyasyonun içerisine sokularak aşağıdaki hal elde edilir.

$$-\int_0^L \delta\overline{M}_{,x}\,\overline{w}_{,x}\,dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\delta\overline{M}^2\bar{J}dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\delta\overline{M}^2{}_{,x}\,\bar{J}_1 dx + \delta\overline{M}\,\bar{\theta}\Big|_0^L = 0$$

$$-\int_0^L \delta\overline{w}_{,x}\,\overline{M}_{,x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L k\delta\overline{w}^2 dx + \int_0^L \delta\overline{w}\,\bar{q}\,dx - \delta\overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L = 0 \tag{5.29}$$

Birinci ve ikinci denklemler için sembolik olarak aşağıdaki gösterimleri yapmak uygun olacaktır.

$$\delta\overline{M} * \overline{w} = \frac{1}{2}\delta\left(\overline{M}, \overline{w}\right)$$

$$\delta\overline{w} * \overline{w} = \frac{1}{2}\delta\left(\overline{w}, \overline{w}\right)$$

$$\delta\overline{M} * \overline{M} = \frac{1}{2}\delta\left(\overline{M}, \overline{M}\right) \tag{5.30}$$

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{2}\int_0^L \overline{M}_{,x}\,\overline{w}_{,x}\,dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\overline{M}^2\bar{J}dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\overline{M}^2{}_{,x}\,\bar{J}_1 dx + \overline{M}\,\overline{\theta}\Big|_0^L$$

$$\bar{I}_2 = -\frac{1}{2}\int_0^L \overline{w}_{,x}\,\overline{M}_{,x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L k\overline{w}^2 dx + \int_0^L \overline{w}\,\overline{q}dx - \overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L \tag{5.31}$$

Bu iki denklem

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \tag{5.32}$$

şekilde birleştirilirse aşağıdaki fonksiyonel elde edilir.

$$\bar{I} = -\int_0^L \overline{M}_{,x}\,\overline{w}_{,x}\,dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\overline{M}^2\bar{J}dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\overline{M}^2{}_{,x}\,\bar{J}_1 dx + \overline{M}\,\overline{\theta}\Big|_0^L -$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L k\overline{w}^2 dx + \int_0^L \overline{w}\,\overline{q}dx - \overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L \tag{5.33}$$

$\bar{I}(x,s)$ terimine fonksiyonel denir. Fonksiyonel toplam potansiyel enerjiyi ifade etmektedir. Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yaptığı iş ile dış kuvvetlerin yaptığı işin toplamıdır. $\delta I = 0$ olması enerjinin minimum yada maksimum değer aldığını ifade eder. Bundan bölüm 4'de söz edilmişti.

5.4. Yaklaşım fonksiyonları ve Enterpolasyon Fonksiyonları Kullanılarak Sistem Matrisini Elde Etme

Sonlu Eleman Formülasyonunda enterpolasyon fonksiyonlarını oluşturacak Yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\phi_1 = (1 - \frac{x}{L})$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L}$$

$$\psi_1 = \frac{(2L - x)(L - x)x}{6EI} \tag{5.34}$$

$$\psi_2 = \frac{(L + x)(L - x)x}{6EI}$$

Bu yaklaşım fonksiyonlarıyla, enterpolasyon fonksiyonları kübik olacak şekilde aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\overline{w} = \phi_1 \overline{w}_1 + \phi_2 \overline{w}_2 + \frac{s\bar{J}}{I}(\psi_1 \overline{M}_1 + \psi_2 \overline{M}_2)$$

$$\overline{M} = \phi_1 \overline{M}_1 + \phi_2 \overline{M}_2 \tag{5.35}$$

Oluşturulan enterpolasyon fonksiyonları fonksiyonelde yerine yazılırsa eleman bazında $\left[\overline{K}_e\right]$ matrisi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} -\frac{kL}{3} & -\frac{kL}{6} & -\frac{1}{L}-\frac{\bar{J}kL^3s}{45I} & -\frac{1}{L}-\frac{7\bar{J}kL^3s}{360I} \\ -\frac{kL}{6} & -\frac{kL}{3} & -\frac{1}{L}-\frac{7\bar{J}kL^3s}{360I} & -\frac{1}{L}-\frac{\bar{J}kL^3s}{45I} \\ -\frac{1}{L}-\frac{\bar{J}kL^3s}{45I} & -\frac{1}{L}-\frac{7\bar{J}kL^3s}{360I} & \frac{\bar{J}Ls}{3I}-\frac{2\bar{J}^2KL^5s^2}{945I^2} & -\frac{\bar{J}Ls}{6I}-\frac{31\bar{J}^2KL^5s^2}{15120I^2} \\ -\frac{1}{L}-\frac{7\bar{J}kL^3s}{360I} & -\frac{1}{L}-\frac{\bar{J}kL^3s}{45I} & -\frac{\bar{J}Ls}{6I}-\frac{31\bar{J}^2KL^5s^2}{15120I^2} & \frac{\bar{J}Ls}{3I}-\frac{2\bar{J}^2KL^5s^2}{945I^2} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{J}_1 s}{Ak_S L} & -\frac{\bar{J}_1 s}{Ak_S L} \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{J}_1 s}{Ak_S L} & \frac{\bar{J}_1 s}{Ak_S L} \end{bmatrix} = \left[\bar{K}_e\right] \tag{5.36}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \\ \frac{\bar{J}L^3 s}{24I} \\ \frac{\bar{J}L^3 s}{24I} \end{Bmatrix} = \{\bar{q}_e\} \tag{5.37}$$

5.5. Sistemin Çözümü

Sistem matrisinin elde edilmesinden sonra çözüm için ilk sorulacak soru, sistemin kaç eş veya benzer parçaya ayrılarak çözüleceği sorusudur. Buna karar verildikten sonra elde edilen eleman rijitlik matrisleri ve yük matrisleri karışık sonlu elemanlar mantığıyla toplanır. Bu aşamada denklem takımımız aşağıdaki hali alır.

$$\left[\bar{K}_s\right]\begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

Burada, $[\overline{K}_s]$ global matristir. Yukarıdaki hale gelen problemde $\begin{Bmatrix}\overline{w}\\ \overline{M}\end{Bmatrix}$ vektörünün çözümü, eşitliğin her iki tarafını sembolik olarak elde edilen $[\overline{K}_s{}^{-1}]$ ile çarpılmakla mümkün olabilir ve aşağıdaki şekilde sonuçlar elde edilir.

$$\begin{Bmatrix}\overline{w}\\ \overline{M}\end{Bmatrix} = [\overline{K}_s{}^{-1}]\begin{Bmatrix}\overline{T}\\ \overline{Q}\end{Bmatrix} + [\overline{K}_s{}^{-1}]\begin{Bmatrix}\overline{q}_1\\ \overline{q}_2\end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

Daha sonra elde edilen fonksiyonların s değişkeninin t değişkenine döndürülmesi yani zaman uzayına aktarılması için Ters Laplace dönüşümü gerçekleştirilir. Zaman uzayına döndürülen sonuçlarda farklı zaman değerleri için farklı değerler elde etmek artık olanaklıdır.

6. SAYISAL UYGULAMALAR

Buraya kadar teorisi oluşturulan viskoelastik problemin farklı sınır koşulları için farklı sayısal uygulamaları aşağıda incelenmiştir. Aksi belirtilmediği takdirde aşağıda belirtilen özellikler farklı örnekler için geçerlidir. Bazı örneklerde değişen değerler örnek verilerinde gösterilmişir. Kirişin genelleştirilmiş özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$E_o = 98x\ 10^6\ N/m$

$E_1 = 98x\ 10^6\ N/m$

$E_2 = 24.5x\ 10^6\ N/m$

$G=E/(2(1+\nu))$

$\nu=0.3$

$\eta=274400000\ Ns/m^2$

$b=2\ m$

$h=0.5\ m$

$I=1/48\ m^4$

$A=1\ m^2$

$k_s=10(1+\nu)/(12+11\nu)\}$

Problemlerdeki zemin katsayısı değerleri, kiriş genişliği olan 2 m ile çarpılmıştır. Dolayısıyla zemin katsayılarında alışılagelmiş birim değeri kN/m^3 yerine kN/m^2 kullanılmıştır.

Bu değerler dikkate alınarak aşağıdaki problemlerin çözümü yapılmış ve değişik grafiklerle ifade edilmiştir. Örneklerde Basit Kiriş, Winkler Zeminine oturan Basit Kiriş ve Winkler Zeminine Serbest oturan kiriş kullanılmıştır.

Aşağıda Maxwell Model, Kelvin Model ve Üç Parametreli Model için sünme fonksiyonları belirtilmiştir.[Aköz, Kadıoğlu (1999)]:

1. Maxwell Model:

$$J(t) = \frac{1}{E} - \frac{t}{\eta}$$

2. Kelvin Model:

$$J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{Et}{\eta}})$$

3. Üç Parametreli Model:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta}})$$

Bu fonksiyonların sıfır ve sonsuzda aldığı değerlere bakılarak bu zaman değerlerinde çökmelerin ve dönmelerin ne oldukları ve nereye yakınsayacakları öngörülebilir. Problemlerde aksi belirtilmedikçe Üç parametreli model kullanılmıştır.

6.1. Sayısal Uygulamalar

Örnek 1:

Winkler Zeminine Serbest Oturan Kirişin özellikleri bölümün başında verildiği gibidir. TPM'den yararlanılarak farklı uzunluklar için ortadan tekil yüklenen kirişin çökme ve moment grafikleri zamana bağlı çizilmiştir. Kiriş uzunlukları, kirişin kısa, orta ve uzun kiriş olmasına dikkat edilerek belirlenmiştir. Bu hesapta aşağıdaki değerler kullanılmıştır. [Bowles (1996)]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{4EI}} \tag{6.1}$$

olmak üzere, eğer;

$\lambda L < \pi/4$ ise kısa kiriş

$\pi/4 < \lambda L < \pi$ ise orta kiriş (6.2)

$\lambda L > \pi/4$ ise uzun kiriş

olarak belirlenmiştir. Serbest oturan kiriş olması dolayısıyla uç noktalarda momentlerin sıfır olması beklenen sınır koşuludur. Problemin çözümleri Şekil 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14'de gösterilmiştir. Problemin diğer verileri aşağıda belirtilmiştir:

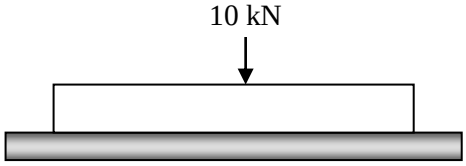
L_1= 1 m

L_2= 4 m

L_3= 10m

k=1000 kN/m^2

P=10 kN



Şekil6.1.Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş

Örnek 2:

Bu problemde birbirinden farklı üç zemine oturan basit kirişin çözümü yapılmıştır. Bölümün başında verilen problem verileri bu problemde geçerlidir. Problemin çözümleri Şekil 6.15'de gösterilmiştir.Bu probleme özgü veriler aşağıdaki gibidir:

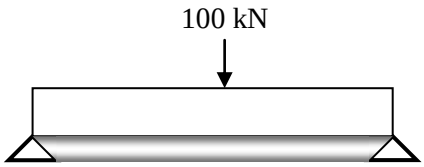
k_1= 1000 kN/m^2

k_2= 10000kN/m^2

k_3= 100000kN/m^2

L= 4 m

P= 100 kN



Şekil6.2.Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş

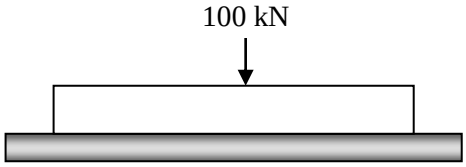
Örnek 3:

Bu problemde birbirinden farklı üç zemine serbest oturan kirişin çözümü yapılmıştır. Bölümün başında verilen problem verileri bu problemde de geçerlidir. Serbest oturan kiriş olması dolayısıyla uç noktalarda momentlerin sıfır olması beklenen sınır koşuludur. Problemin çözümleri Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Bu probleme özgü veriler aşağıdaki gibidir:

Winkler zemini katsayıları bir önceki problemle aynıdır.

L= 4 m

P = 100 kN



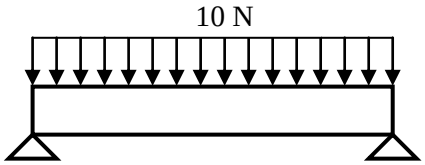
Şekil6.3.Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş

Örnek 4:

Bu problemde bir basit kirişin çözümü EM, KM, TPM, MM ve EM2 kullanılarak yapılmıştır. EM2, Üç Parametreli Modelin(TPM) sünme fonksiyonunun sonsuzda aldığı değerinden yola çıkılarak bulunan Elastisite modülünün, Elastik Modelde kullanılmasıyla elde edilen bir modeldir.. Kiriş herhangi bir zemine oturmamaktadır. Bölümün başında verilen problem verileri bu problemde de geçerlidir. Problemin çözümleri Şekil 6.17, 6.18, 6.19 ve 6.20'de gösterilmiştir.Bu probleme özgü veriler aşağıdaki gibidir.

L= 10 m

q = 10 N/m



Şekil6.4.Basit Mesnetli Kiriş

Örnek 5:

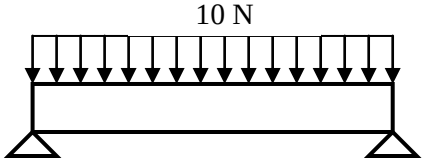
Bu problemde farklı yükseklikte iki basit kirişin çözümü yapılmıştır. Kirişler herhangi bir zemine oturmamaktadır. Kiriş yükseklikleri hariç bölümün başında verilen problem verileri bu problemde de geçerlidir. Problemin çözümleri Şekil 6.21 ve 6.22'de gösterilmiştir. Bu probleme özgü veriler aşağıdaki gibidir:

h_1= 0,2 m

h_2= 0,25 m

L= 10 m

q = 10 N/m



h_1= 0,2 m

h_2= 0,25

Şekil6.5.Basit Mesnetli Kiriş

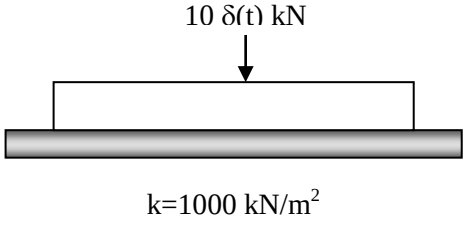
Örnek 6:

Winkler Zeminine Serbest Oturan Kirişin özellikleri bölümün başında verildiği gibidir. Ortadan tekil yüklenen kirişin çökme ve moment grafikleri TPM'den yararlanılarak SEM'de farklı eleman sayıları için çizilmiştir. Serbest oturan kiriş olması dolayısıyla uç noktalarda momentlerin sıfır olması beklenen sınır koşuludur. Problemin çözümleri Şekil 6.23, 6.24'de gösterilmiştir. Problemin diğer verileri aşağıda belirtilmiştir: δ(t)=Dirak delta

L_1= 10 m

k=1000 kN/m^2

P=10 δ(t) kN



Şekil6.6.Winkler Zeminine Serbest Oturan Kiriş

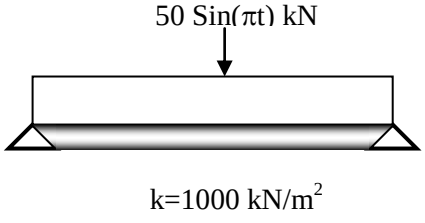
Örnek 7:

Winkler Zeminine Oturan Basit Kirişin özellikleri bölümün başında verildiği gibidir. TPM'den yararlanılarak farklı uzunluklar için ortadan tekil yüklenen kirişin çökme ve moment grafikleri zamana bağlı çizilmiştir. Kiriş uzunlukları, kirişin kısa, orta ve uzun kiriş olmasına dikkat edilerek belirlenmiştir. Serbest oturan kiriş olması dolayısıyla uç noktalarda momentlerin ve çökmelerin sıfır olması beklenen sınır koşuludur. Problemin çözümleri Şekil 6.25, 6.26, 6.27 ve 6.28'de gösterilmiştir. Problemin diğer verileri aşağıda belirtilmiştir:

L_1= 1 m, L_2= 4 m, L_3= 10m

k=1000 kN/m^2

P=50 Sin(πt) kN



Şekil6.7.Winkler Zeminine Oturan Basit Mesnetli Kiriş

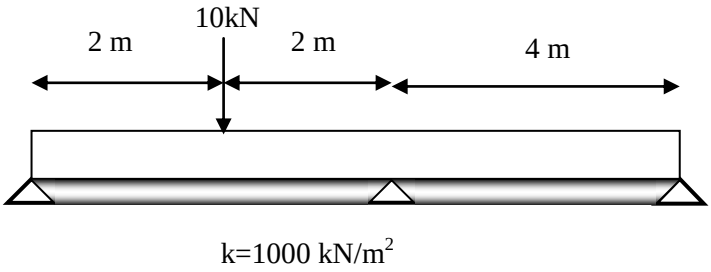
Örnek 8:

Winkler Zeminine Oturan Basit Kirişin sistemi aşağıda verildiği gibidir. TPM'den yararlanılarak ilk açıklığının ortasından tekil yüklenen kirişin çökme, moment grafikleri ve elastik eğrisi çizilmiştir. Bütün mesnetlerde çökmeler sıfır ve uç mesnetlerde momentin sıfır olması beklenen sınır koşuludur. Problemin çözümleri Şekil 6.29, 6.30 ve 6.31'de gösterilmiştir. Problemin diğer verileri aşağıda belirtilmiştir:

L= 8 m

k=1000 kN/m^2

P=10kN

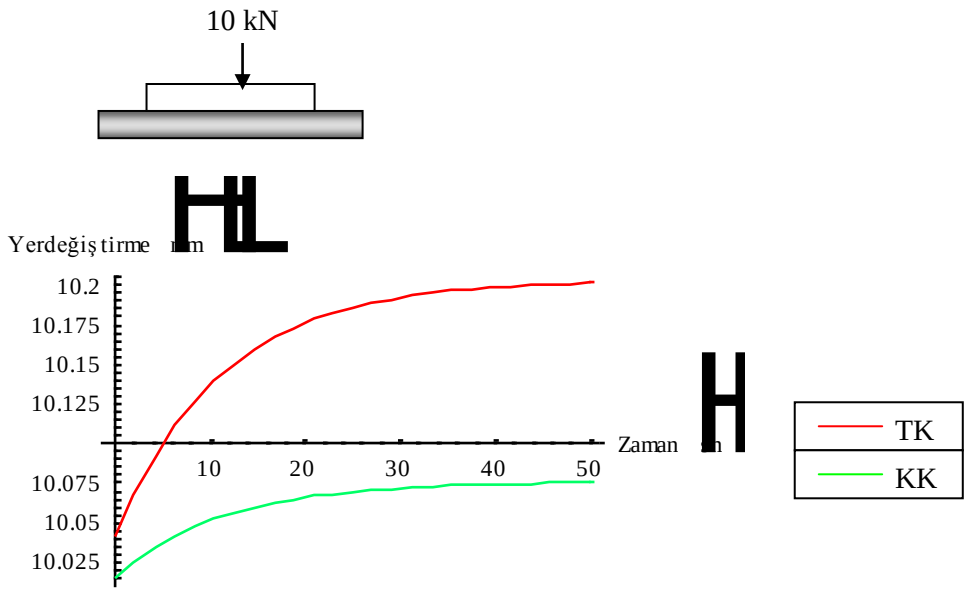


Şekil6.8.Winkler Zeminine Oturan İki Açıklıklı Basit Mesnetli Kiriş

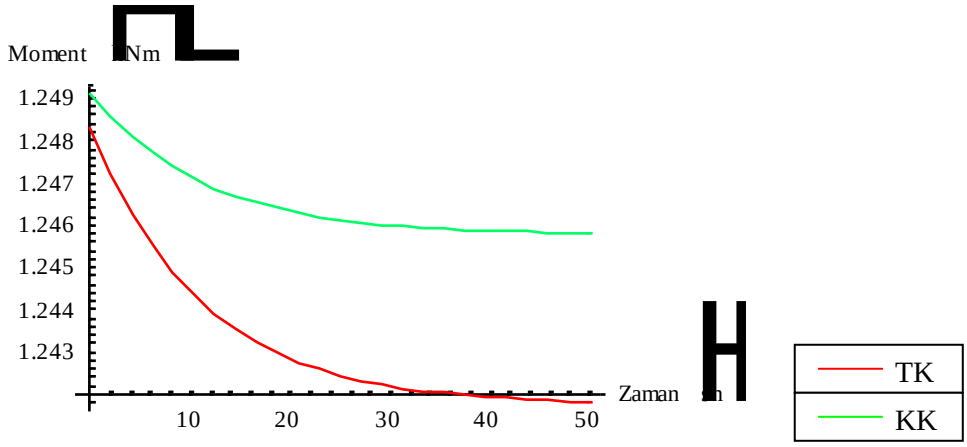
6.2. Sayısal Uygulamaların Çözümlerine İlişkin Grafikler

6.2.1. Örnek 1'in Çözümüne İlişkin Grafikler

$\lambda L_1 = 0{,}35 < \pi/4 \Rightarrow$ Kısa Kiriş

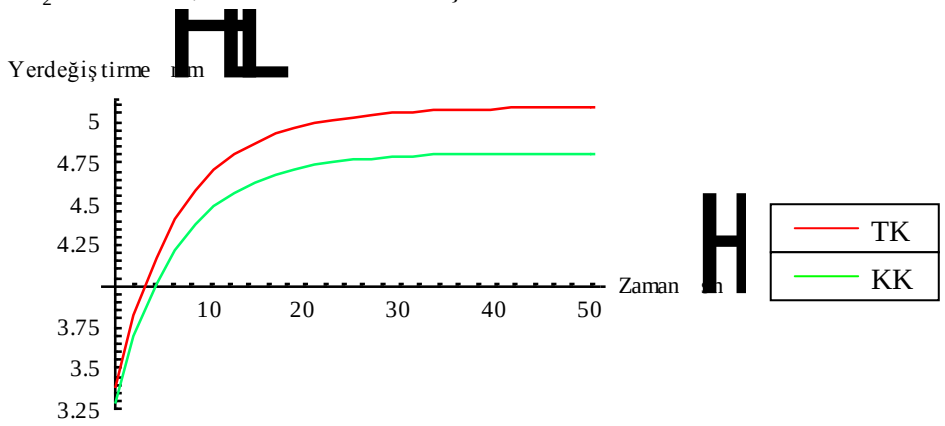


Şekil 6.9. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=1 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi

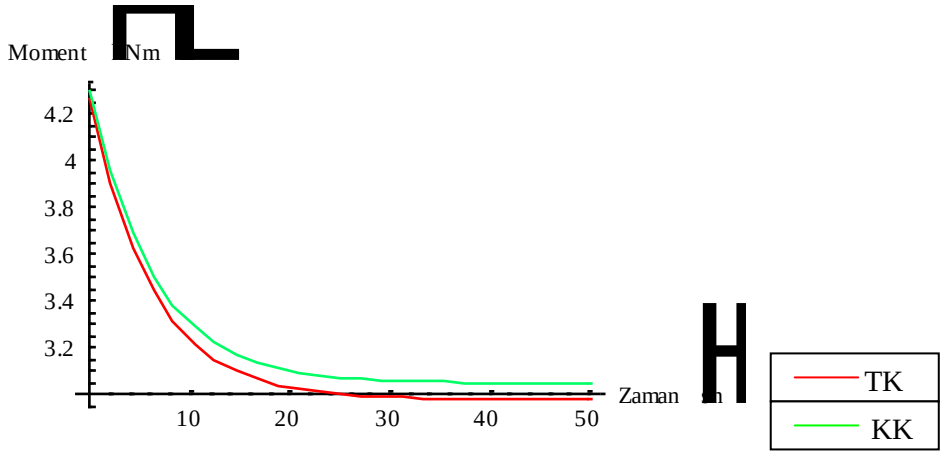


Şekil 6.10. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=1 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının moment değerinin zamanla değişimi

$\lambda L_2 = \pi/4 < 1{,}4 < \pi \Rightarrow$ Orta Kiriş

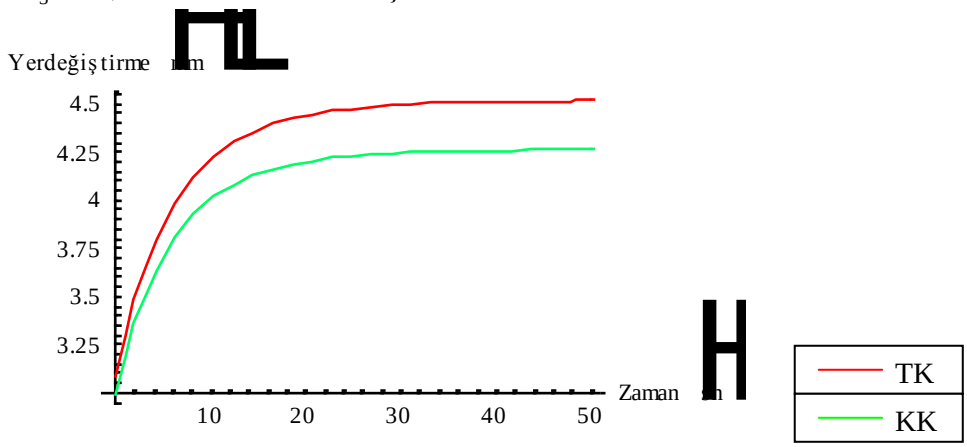


Şekil 6.11. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=4 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi

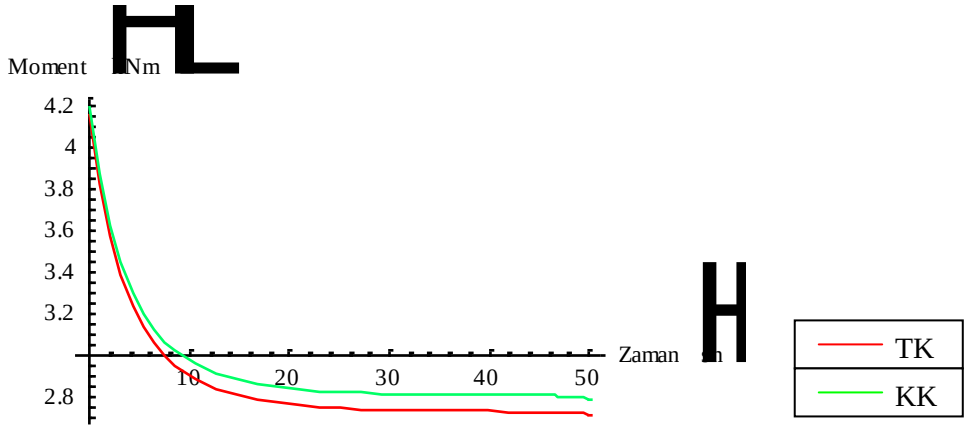


Şekil 6.12. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=4 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının moment değerinin zamanla değişimi

$\lambda L_3 = 3{,}5 > \pi \Rightarrow$ Uzun Kiriş

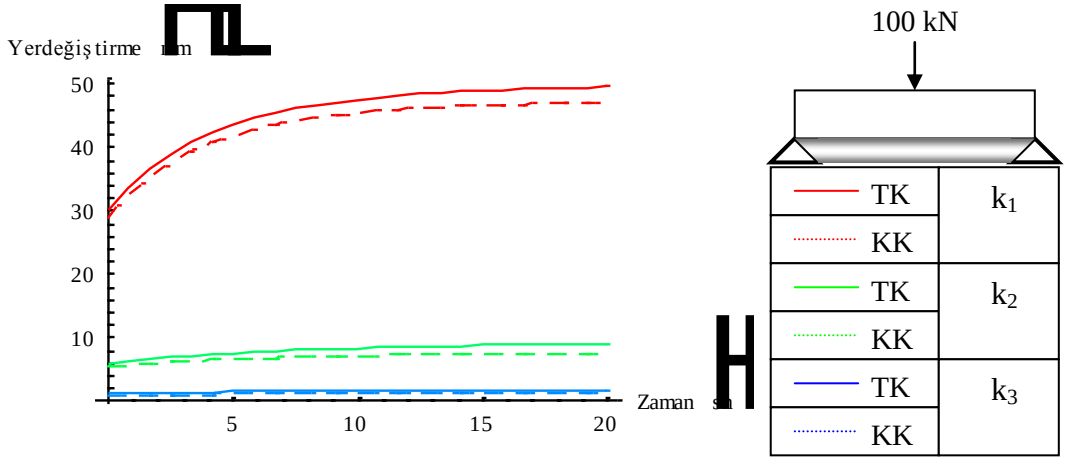


Şekil 6.13. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=10 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi



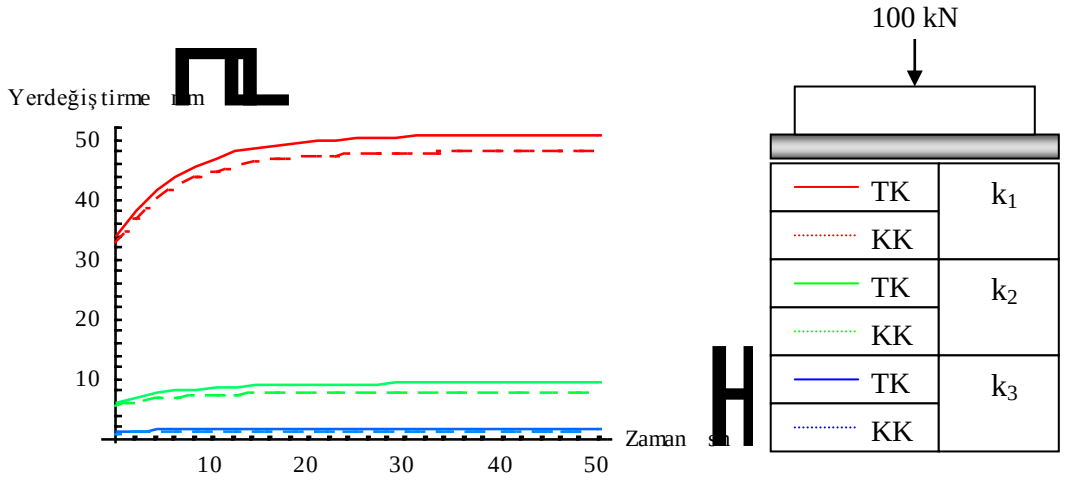
Şekil 6.14. Ortasından P=10 kN yük ile yüklenmiş, L=10m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının moment değerinin zamanla değişimi

6.2.2.Örnek 2'nin Çözümüne İlişkin Grafikler



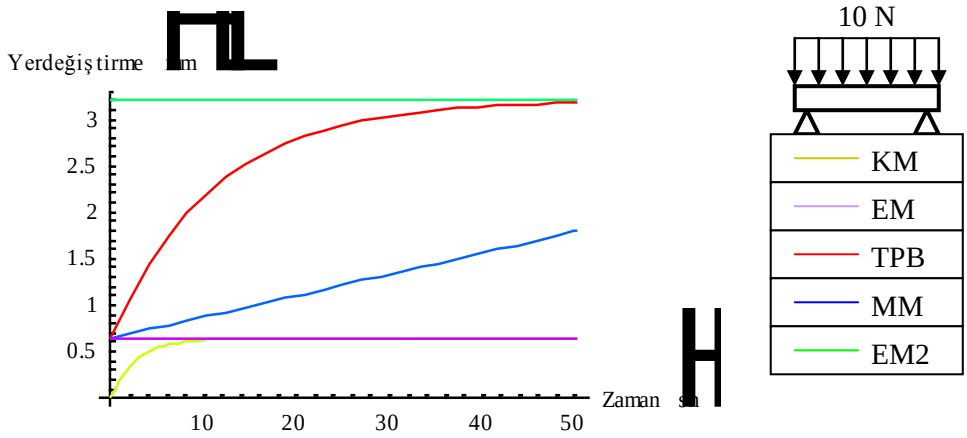
Şekil 6.15. Üzerine ortasından tekil P=100 kN yük yüklenmiş, L=4 m boyunda, k1=1000 kN/m^2, k2=10000 kN/m^2, k3=100000 kN/m^2 katsayılı zeminlere oturan basit kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi

6.2.3. Örnek 3'ün Çözümüne İlişkin Grafikler

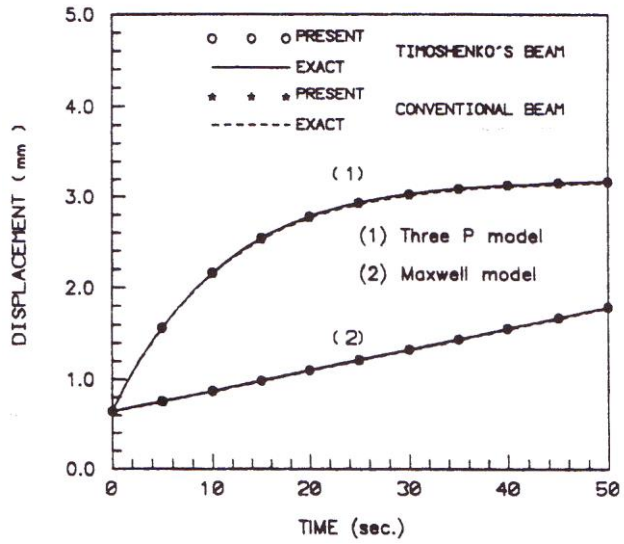


Şekil 6.16. Üzerine ortasından tekil P=100 kN yük yüklenmiş, L=4 m boyunda, k1=1000 kN/m^2, k2=10000 kN/m^2, k3=100000 kN/m^2 katsayılı zeminlere serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi

6.2.4. Örnek 4'ün Çözümüne İlişkin Grafikler:

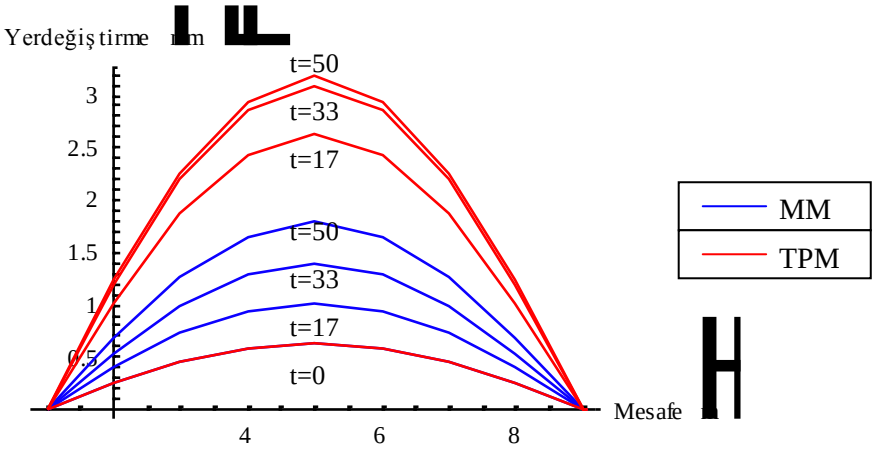


Şekil 6.17. Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, bir zemine oturmayan basit kirişin MM, EM, EM2 , KM, TPM kullanılarak hesaplanan orta noktasının çökme değerlerinin zamanla değişimleri.

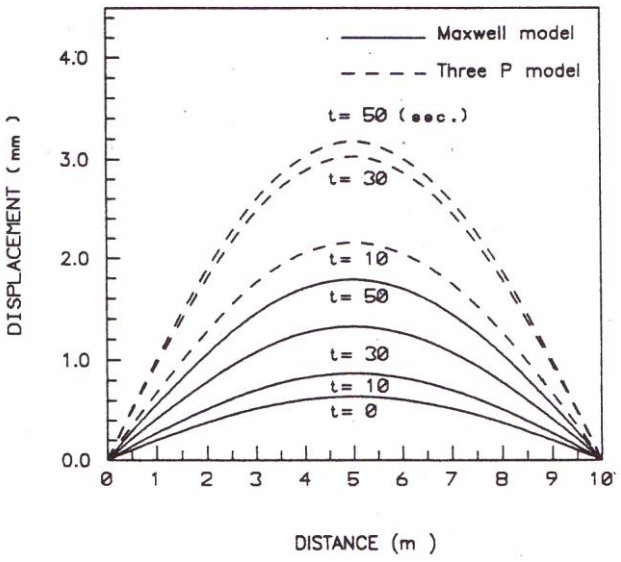


Şekil 6.18**. Chen 1995** -Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, bir zemine oturmayan basit kirişte orta noktadaki çökme değerlerinin zamanla değişimleri

Yukarıda **Chen 1995'**de yapılan aynı örneğin çeşitli değerleri görülmektedir. Bu çalışmada, **Chen'**in uyguladığı modeller dışında, Kelvin Modeli(KM), Elastik Model(EM) grafiklerinin yanında, Üç Parametreli Modelin(TPM) sünme fonksiyonunun sonsuzda aldığı değerinden yola çıkılarak bulunan Elastisite modülünün, Elastik Modelde kullanılmasıyla elde edilen bir fonksiyonun grafiği de çizilmiştir. (EM2).



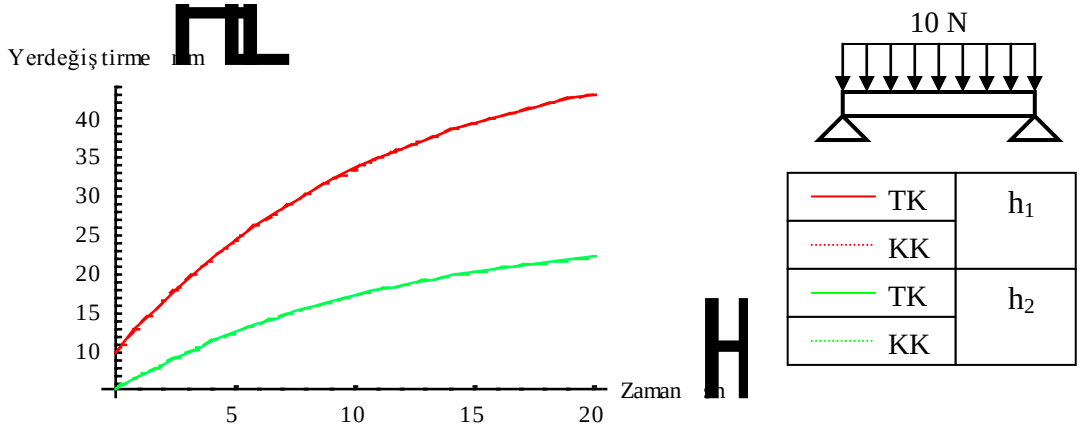
Şekil 6.19. Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, bir zemine oturmayan basit kirişin 50. saniyeye kadar üç eş zaman aralığında aldığı formlar gösterilmişir.



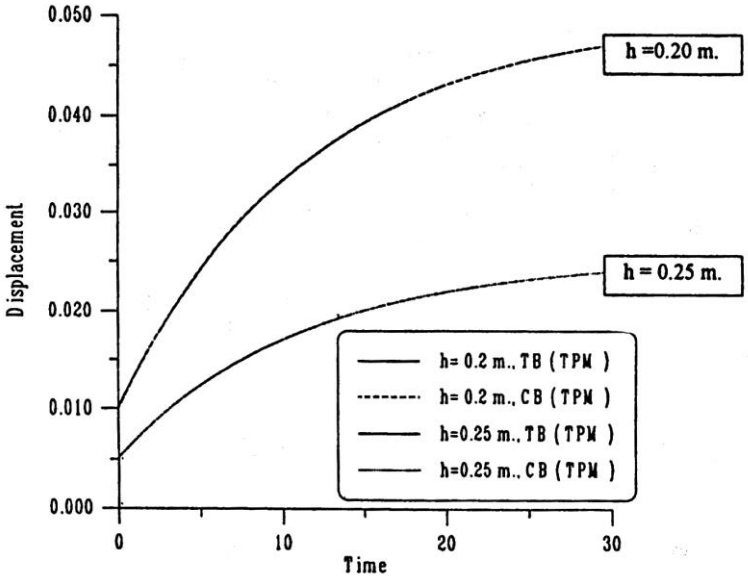
Şekil 6.20 **Chen 1995** - Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, bir zemine oturmayan basit kirişin 50. saniyeye kadar üç zaman aralığında aldığı formlar

Şekil 6.19.'da Örnek 4'deki kirişin MM ve TPM ile hesaplanan elastik eğrisinin 0.,17., 34. ve 50. saniyelerde aldığı formlar gösterilmiştir. Şekil 6.19'da ise **Chen 1995'**da hesaplanan 0.,10., 30. ve 50. saniyelerde alınan elastik eğri formları gösterilmiştir. İki grafik arasında 0. ve 50. saniyelerdeki elastik eğriler aynı olmakla birlikte diğer eğrilerin fikir yürütülebilir seviyede yakın olduğu gözlenmektedir.

6.2.5. Örnek 5'in Çözümüne İlişkin Grafikler:



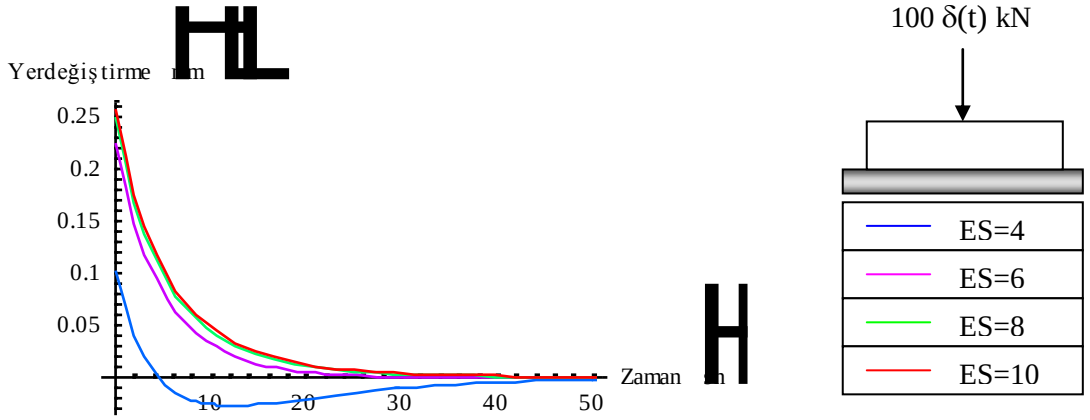
Şekil 6.21. Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, h_1=0,2m h_2= 0,25m yüksekliğinde bir zemine oturmayan iki basit kirişin orta noktasının çökme değerlerinin zamanla değişimleri



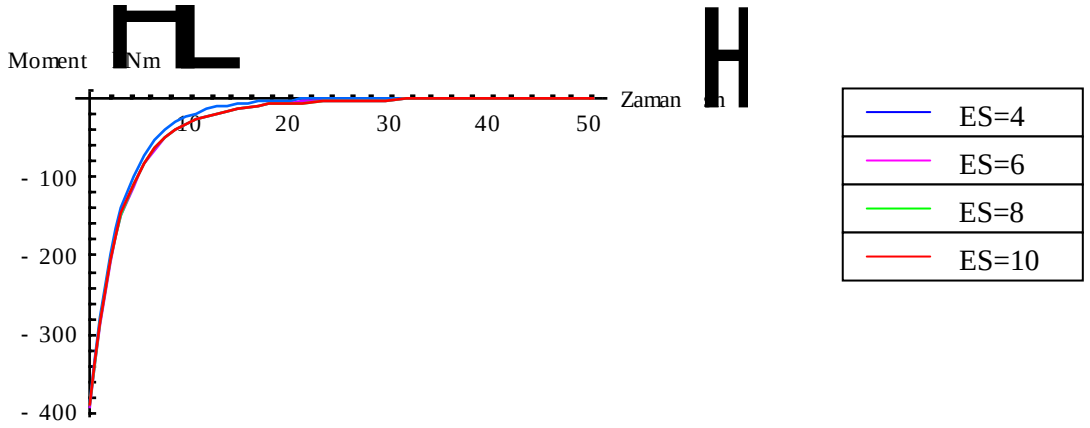
Şekil 6.22. **Aköz ve Kadıoğlu 1999**-Üzerine yayılı q=10 N yük yüklenmiş, L=10 m boyunda, h_1=0,2m h_2= 0,25m yüksekliğinde bir zemine oturmayan iki basit kirişin orta noktasının çökme değerlerinin zamanla değişimleri

Görüldüğü gibi Şekil 6.21'de Atalet Kuvvetleri oranı yaklaşık 0,5 olan iki farklı kirişin deplasmanlarının da ters orantılı olarak çıkacağı açıktır. Konvansiyonel kiriş ile Timoshenko kirişinin eğrilerinin çakışması kiriş boyunun uzun olması nedeniyle kayma etkilerinin azalması ile açıklanabilir. Bulunan değerler, Şekil 6.22.'deki Aköz ve Kadıoğlu 1999'un grafik değerleriyle benzeşmektedir.

6.2.6.Örnek 6'nın Çözümüne İlişkin Grafikler



Şekil 6.23. Ortasından P=10 δ(t) kN yük ile yüklenmiş, L=10 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının verilen eleman sayılarıyla bulunan çökme değerinin zamanla değişimi
*ES=Eleman Sayısı

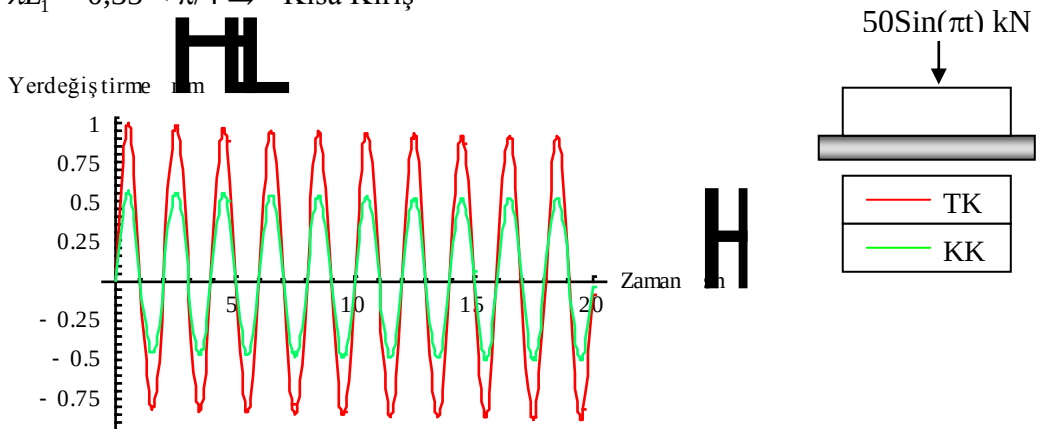


Şekil 6.24. Ortasından P=10 δ(t) kN yük ile yüklenmiş, L=10 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının verilen eleman sayılarıyla bulunan moment değerinin zamanla değişimi

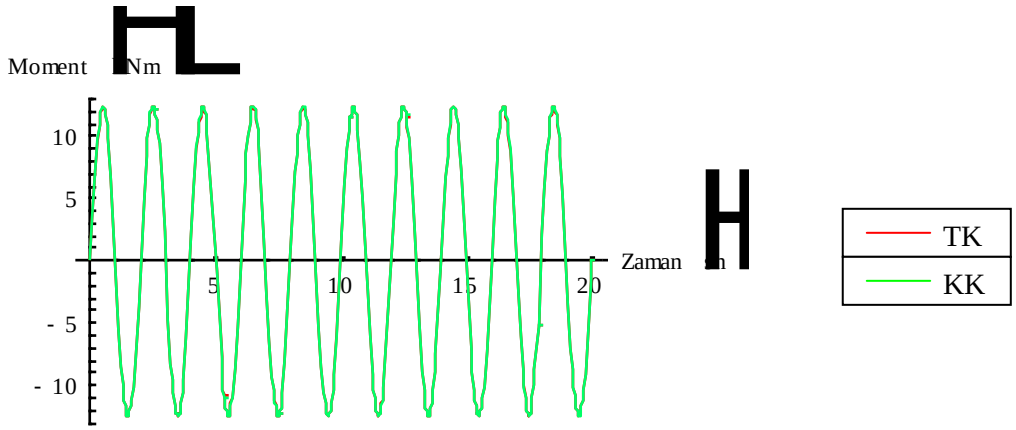
Yukarıda impulsif yükleme altında bir kirişin moment ve çökme diyagramları belirtilmiştir. Yüklemenin impulsif olması yani t=0 anında ani bir yükleme meydana gelip daha sonra kalkması nedeniyle zaman arttıkça sönümlenen grafikler elde edileceği tahmin edilebilir. Ayrıca SEM'de eleman sayısı arttıkça gerçek sonuca yaklaşılacağı grafiklere bakılarak öngörülebilir.

6.2.7. Örnek 7'nin Çözümüne İlişkin Grafikler

$\lambda L_1 = 0{,}35 < \pi/4 \Rightarrow$ Kısa Kiriş



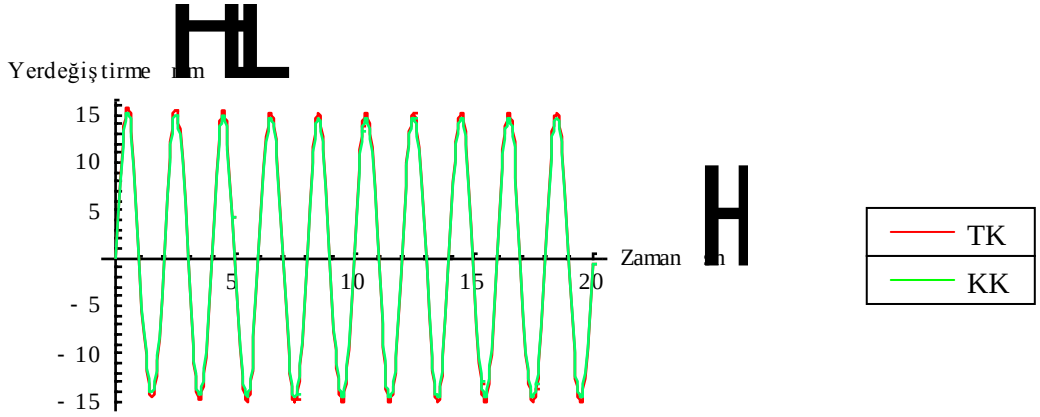
Şekil 6.25. Ortasından P=50Sin(πt) kN yük ile yüklenmiş, L=1 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi



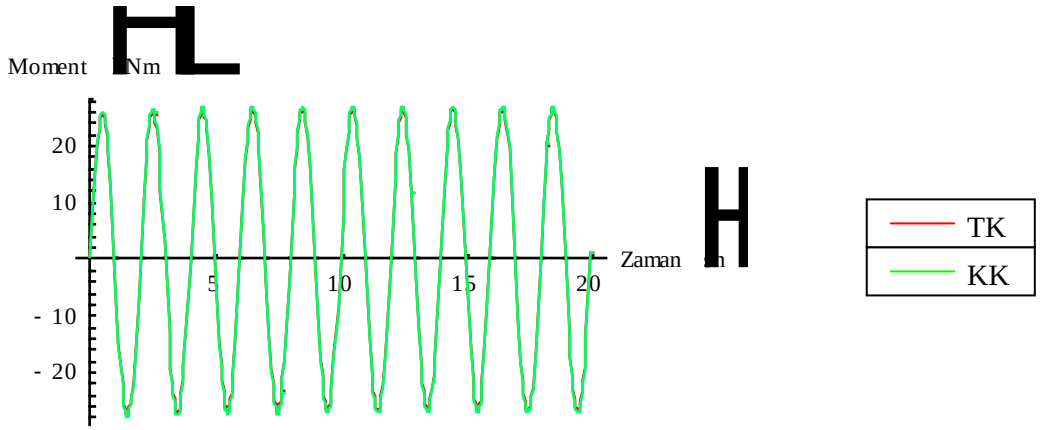
Şekil 6.26. Ortasından P=50Sin(πt) kN yük ile yüklenmiş, L=1 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının moment değerinin zamanla değişimi

Yukarıda L=1 m boyundaki kirişte yerdeğiştirme ve moment grafikleri çizilmiştir. Çökme eğrisinin zamanla değişiminde, Timoshenko kirişi ile Konvansiyonel kirişin genlikleri arasında fark olduğu göze çarpmaktadır. Kiriş üzerindeki kayma etkilerinin bu farkı ortaya çıkarttığı söylenebilir.

$\lambda L_2 = \pi/4 < 1{,}4 < \pi \Rightarrow$ Orta Kiriş

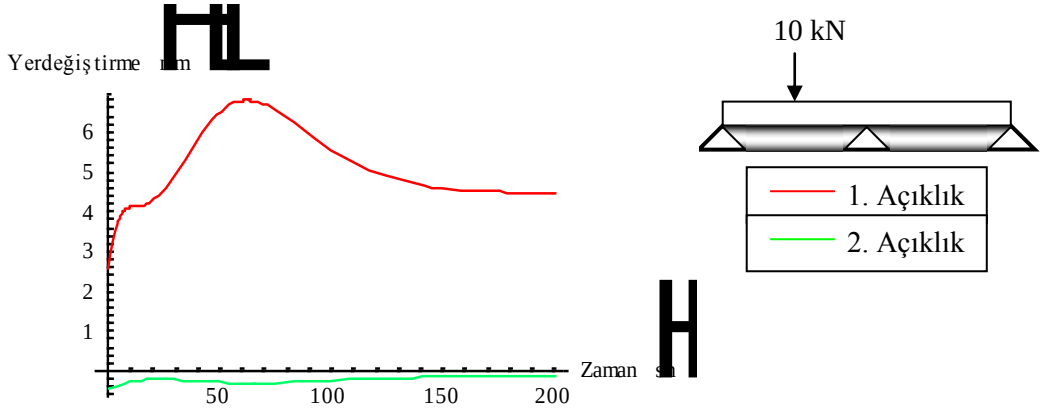


Şekil 6.27. Ortasından P=50Sin(πt) kN yük ile yüklenmiş, L=4 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının çökme değerinin zamanla değişimi

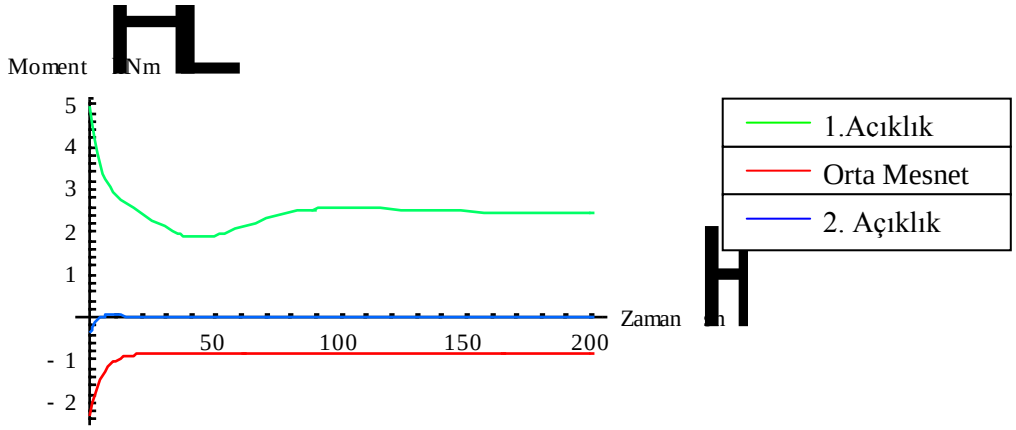


Şekil 6.28. Ortasından P=50Sin(πt) kN yük ile yüklenmiş, L=4 m boyunda, k=1000kN/m^2 katsayılı zemine serbest oturan kirişin orta noktasının moment değerinin zamanla değişimi

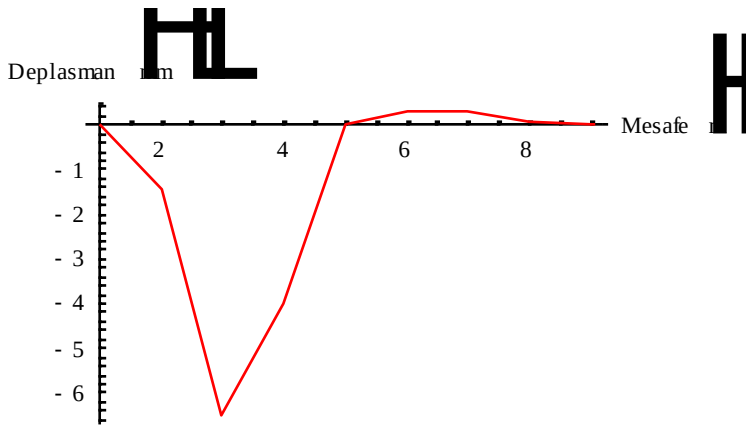
6.2.8. Örnek 8'in Çözümüne İlişkin Grafikler



Şekil 6.29. P=10 kN ile yüklü iki açıklıklı L=8 m boyunda basit Timoshenko Kirişinin TPM ile bulunmuş iki açıklığındaki çökme değerlerinin zamanla değişimi



Şekil 6.30. P=10 kN ile yüklü iki açıklıklı L=8 m boyunda basit Timoshenko Kirişinmin TPM ile bulunmuş açıklık ve orta mesnetteki moment değerlerinin zamanla değişimi



Şekil 6.31. P=10 kN ile yüklü iki açıklıklı L=8 m boyunda basit Timoshenko Kirişinmin TPM ile bulunmuş elastik eğrisi, t=75. sn

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişlerini çözmek için bir program geliştirilmiştir. Geliştirilen program yardımıyla farklı boyut ve yüklemedeki kiriş problemleri zamana bağlı çözülebilmektedir. Kirişlerin kütle etkisi ihmal edilerek kuazi-statik ortamda çalışılmıştır.

Sayısal uygulamalar kısmında, çeşitli örnekler, geliştirilen bilgisayar programı yoluyla çözülmüş ve çeşitli sonuçlara varılmıştır. Farklı kiriş boyları için yani kirişin kısa, orta ve uzun kiriş olması durumunda çözülen örneklerde, kiriş boyu arttıkça Timoshenko kirişi ile klasik kiriş birbirine yakın sonuçlar vermektedirler. Bu durum kayma etkilerinin azalmasıyla açıklanabilir. Bu durum, Timoshenko kirişi ile klasik kiriş arasındaki yerdeğiştirme farkının, toplam yerdeğiştirmelere oranlanmasıyla, yorumlanabilir.

Birbirinden farklı zeminlere oturan bir kirişin incelenmesi sırasında beklenildiği gibi zemin katsayısı en yüksek zemine oturan kirişte şekil değiştirmenin en az olduğu görülmüştür. Bu durumun tersi de geçerlidir.

Chen 1995'de farklı Viskoelastik modellerle çözülen problem aynı verilerle gelişitirilen bilgisayar programı ile çözülmüş aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Burada önemli olan nokta farklı malzemeler için farklı modellerin seçilmesi gerekliliğidir. Yani bir malzeme için Maxwell Modeli ile sonuca gidilirken, bir diğer maddede Maxwell Modeli doğru sonuçlar vermeyebilir. Bu seçimin deneysel yollarla bulunan modellerle yapılacağı söylenebilir. Bu çalışmada farklı malzemeler için deneysel olarak model geliştirilmemiştir. Var olan modellerin verdiği sonuçlar teorik olarak ele alınmıştır.

Aköz, Kadıoğlu 1999'da iki farklı kesit yüksekliği için çözülen problem, aynı verilerle, bu tezde gelişitirilen bilgisayar programı ile çözülmüş, aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Bu problemde, yerdeğiştirmelerde, kesit yüksekliğinin artması sonucu, değişen atalet kuvvetlerinin ve kesit alanlarının artışı oranında bir azalış olacağı tahmin edilebilir. Bu yorum için (5.16)'ya bakılabilir.

Impulsif yükleme altındaki bir kiriş, farklı sayıda sonlu eleman alınarak çözüldüğünde, sonuçlar eleman sayısının artışı ile doğru orantılı şekilde yakınsamaktadır. Ayrıca bu örnekte, yapılan yükleme çeşidi nedeniyle yerdeğiştirme ve moment grafikleri sıfıra doğru gitmektedir.

Sinüsoidal yükleme yapılan kirişte yerdeğiştirme-zaman eğrilerinde, Timoshenko ve klasik kirişte dalga boyarı değişmemekle beraber, genliklerde Timoshenko kirişinde daha yüksek sonuçlar çıkmaktadır. Ayrıca kiriş boyunun artması kayma etkilerinin azalmasına sebep olmaktadır.

KAYNAKLAR

AKÖZ, Y. ve KADIOĞLU, F., 1999. The Mixed Finite Element Method For The Quasi-Static and Dynamic Analysis Of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.,* **44**, 1909-1932.

BOWLES, J.E., 1996.Foundation Analysis and Desingn. New York: Mc Graw-Hill

BROWN, P.T. and BOOKER, J.R., 1979. Numerical Analysis Of Rafts On Viscoelastic Media Using Eigenvector Expansions, *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomechanics,* **3**, 363-78.

CELEP, Z. ve KUMBASAR, N., 2001. Yapı Dinamiği, Rehber Matbaacılık, İstanbul.

CHEN, T.M., 1995. The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied To The Quasi-Static And Dynamic Analysis Of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.,* **38**, 509-522.

COWPER, G.R., 1966. The Shear Coefficient In Timoshenko's Beam Theory, *J. Appl. Mech.,* **33**, 335-340.

ERGÜVEN, M.E. and GEDİKLİ, A., 2003. A Mixed Finite Element Formulation For Timoshenko Beam On Winkler Foundation, *Computational Mechanics,* **31**, 229-237.

FLÜGGE, W., 1975. Viscoelasticity, 2nd Ed., Springer, Berlin.

İLYASOV, M.H. and AKÖZ, A.Y., 2000. The Vibration And Dynamic Stability Of Viscoelastic Plates, *Int. J. Engng. Science,* **38**, 695-714.

İNAN, M., 2001. Cisimlerin Mukavemeti, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul.

KADIOĞLU, F., 1999. Viskoelastik Çubukların Kuazi-Statik ve Dinamik Analizi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

KAYAN, İ., 1992. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

KREYSZIG, E., 1999. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons Inc., New York.

REDDY, J.N., 1993. An Introduction To The Finite Element Method, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.

SCHANZ, M. and ANTES, H., 2001. A Boundary Integral Formulation for the Dynamic Behaviour of a Timoshenko Beam, *Advances in Boundary Element Tecniques II*, 475-482.

WANG, C.M., YANG, T.Q. and LAM, K.Y., 1997. Viscoelastic Timoshenko Beam Solutions From Euler-Bernoulli Solutions, *J. Engng. Mech*., **123**, 746-748

ÖZGEÇMİŞ

Efgan Cebecigil 25.10.1980 tarihinde Karabük'te doğdu. İlk orta ve Lise eğitimini Karabükte tamamladıktan sonra 1998 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazandı. 2002 tarihinde buradan mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Programı Yapı Mekaniği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans çalışmalarına başlamıştır.