

Scientia Et Technica
ISSN: 0122-1701
scientia@utp.edu.co
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia

Ancizar Castañeda Cárdenas, José; Nieto Arias, Manuel Antonio; Ortiz Bravo, Víctor Alfonso
ANÁLISIS Y APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A UNA SEÑAL CON RUIDO ALEATORIO
Scientia Et Technica, vol. 18, núm. 1, abril, 2013, pp. 267-274
Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84927487039

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

ANÁLISIS Y APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A UNA SEÑAL CON RUIDO ALEATORIO

Analysis and application of the Kalman filter to a signal with random noise

José Ancizar Castañeda Cárdenas, Manuel Antonio Nieto Arias, Víctor Alfonso Ortiz Bravo
Ingenoeria electrónica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombias
ccjose@utp.edu.co
manieto@utp.edu.co
vialortiz@utp.edu.co

***Resumen*— Este artículo contiene una revisión acerca del algoritmo desarrollado por Rodolf Kalman. Primero se darán unos conocimientos básicos y necesarios para la compresión del filtro de Kalman, posteriormente se realizará el respectivo análisis matemático para obtener las ecuaciones que serán implementadas para el desarrollo del algoritmo y finalmente se simulará el algoritmo de Kalman sobre una planta de segundo orden por medio del software Matlab y en base a esto se obtendrán las conclusiones pertinentes.**

***Palabras clave*— Filtro de Kalman, análisis estadístico, algoritmo, estimación de parámetros, ruido.**

***Abstract*— This article contains a review on the algorithm developed by Rudolf Kalman, first give basic knowledge and understanding necessary for the Kalman filter, subsequently perform the corresponding mathematical analysis to obtain the equations to be implemented for the development of the algorithm and finally simulates the Kalman algorithm on a second order plant using Matlab software and based on this relevant conclusions will be drawn.**

***Key Word* — Kalman filter, statistical analysis, algorithm, parameter estimation, noise.**

I. INTRODUCCIÓN

El filtro de Kalman es un algoritmo que se basa en el modelo de espacio de estados de un sistema para estimar el estado futuro y la salida futura realizando un filtrado optimo a la señal de salida, y dependiendo del retraso de las muestras que se le ingresan puede cumplir la función de estimador de parámetros o únicamente de filtro. Pero en ambos casos elimina ruido, estas ecuaciones son ampliamente utilizadas ya que incluyen probabilidades estadísticas puesto que toma en cuenta la aleatoriedad tanto de la señal como del ruido. A diferencia de otros tipos de filtros este no requiere de una frecuencia de corte específica debido a que se basa en la característica del ruido permitiendo de esta manera filtrar en todo el espectro de frecuencias. Además sus ecuaciones solo dependen de una muestra anterior y la muestra presente lo que permite un ahorro considerable de memoria a la hora de ser implementado en un sistema digital y su fácil programación lo hacen muy atractivo ya que se basa en un método recursivo [1][2].

Entre varias de sus aplicaciones se encuentran la estimación demográfica, procesamiento de señales biológicas, sistemas de navegación, predecir el comportamiento de variables económicas, procesamiento de imágenes, entre otras. Debido a su gran campo de acción se hace muy importante conocer su funcionamiento para así tener las herramientas básicas que permitan la solución de diversos problemas prácticos de forma sencilla y óptima [3][4][5][6].

II. ESTIMACIONES ESTOCÁSTICAS

Mientras hay muchas aplicaciones específicas para computar (aproximar o estimar) un estado desconocido desde una serie de mediciones del proceso, muchos de estos métodos no toman en consideración la naturaleza típica del ruido de las medidas. Por ejemplo, considerando un trabajo en rastreo para gráficos computacionales interactivos. Mientras los requerimientos para la información de rastreo cambian con la aplicación, la fuente fundamental de información es la misma: la estimación de la posición se deriva de señales eléctricas ruidosas, de sensores mecánicos inerciales, ópticos, acústicos o magnéticos. Este ruido es típicamente estadístico por naturaleza (o puede ser modelado efectivamente como uno) lo que lleva a métodos estocásticos para la resolución de problemas.

Fecha de Recepción: 17 de Enero de 2013
Fecha de Aceptación: 21 de Abril de 2013

A. Modelos de espacio de estado

Los modelos de espacio de estados son esencialmente una noción conveniente para estimación y control, desarrollados para hacer trazable lo que sería de otra manera un análisis intrazable. Considérese un proceso dinámico descrito por una ecuación de la forma [7]:

$$y_{i*1} = a_{0,i}y_i + \cdots + a_{n-1,i}y_{i-n+1} + \mu_i, \;\; i \geq 0 \qquad (1)$$

Donde μ_i es un ruido blanco (espectralmente) aleatorio de media cero (estadísticamente) con correlación:

$$E(\mu_i, \omega_j) = R_\mu = Q_i\delta_{ij} \qquad (2)$$

Con valores iniciales $y_0, y_{-1}, \ldots, y_{-n+1}$ son variables aleatorias con media cero con una matriz de covarianza conocida de dimensiones $n * n$.

$$P_0 = E(y_{-j}, y_{-k}), \qquad j, k \in 0, n-1 \qquad (3)$$

También se asume que:

$$E(\mu_i, y_i) = 0 \;\; para \; -n+1 \leq j \leq 0 \;\; y \;\; i \geq 0 \qquad (4)$$

Lo que asegura que:

$$E(\mu_i, y_i) = 0 \;\; i \geq j \geq 0 \qquad (5)$$

En otras palabras, el ruido es estadísticamente independiente del proceso que se va a estimar.

Bajo otras condiciones básicas esta ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$\hat{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_{i-n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mu_i \qquad (6)$$

Que conlleva al modelo de espacio de estados:

$$\hat{x}_{i+1} = A\hat{x}_i + G\mu_i \qquad (7)$$

$$\hat{y}_i = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]\hat{x}_i \qquad (8)$$

O de forma más general:

$$\hat{x}_{i+1} = A\hat{x}_i + G\mu_i \qquad (9)$$

$$\hat{y}_i = H\hat{x}_i \qquad (10)$$

La ecuación representa la forma que un nuevo estado $\hat{x}_{i+1}$ es modelado como una combinación lineal de ambos estados, el previo y algún ruido del proceso μ_i. La segunda ecuación describe como las medidas del sistema o observaciones son derivadas del estado interno. Estas dos ecuaciones son comúnmente referenciadas como el modelo del proceso y el modelo de medición, y sirven como base para virtualmente todos los métodos de estimación lineales, tal como el filtro de Kalman descrito más adelante [7][8].

B. El problema de diseño del observador

El problema básico es determinar (estimar) los estados internos de un sistema lineal, teniendo acceso a solo las salidas del sistema. (Se asume que se tiene acceso a las entradas de control) [7][8][9].

Las muchas aproximaciones a este problema básico están típicamente basados en modelos del espacio de estados. Existe un modelo del proceso que describe la transformación del estado, que puede ser representada por ecuaciones en diferencia:

$$x_k = Ax_{k-1} + B\mu_k + W_{k-1} \qquad (11)$$

Además hay un modelo de medición que describe la relación entre el proceso o los estados y las medidas. Se representa como:

$$Z_k = Hx_k + V_k \qquad (12)$$

Los términos W_k y V_k son variables aleatorias representando el ruido del proceso y de la medición respectivamente. Las mediciones son específicamente elementos de un estado, pero pueden ser una combinación lineal de cualquiera de los elementos del estado [10].

1. Ruido del proceso y la medición

Se considera el caso común de medidas ruidosas de un sensor. Existen muchas fuentes de ruido en las mediciones. Por ejemplo cada tipo de sensor tiene sus limitaciones fundamentales relacionadas con el medio físico asociado, por esta razón las señales se ven degradadas. Además alguna cantidad de ruido eléctrico aleatorio es sumado a la señal a través del sensor y los circuitos eléctricos. La continua variación de la relación de la señal pura con relación al ruido afecta continuamente la cantidad y la calidad de la información. El resultado es que la información obtenida desde cualquier sensor debe ser calificada como parte de una secuencia de estimantes, y medidas analíticas modeladas que comúnmente involucran medidas de ruido y de incertidumbre [11].

Existe el problema adicional de que el modelo de transformación de estados real sea completamente desconocido. Mientras se puedan hacer predicciones sobre intervalos relativamente cortos, usando modelos basados en transformadas de estados recientes, que no es siempre el caso [2], el resultado es que igual que la información del sensor, las estimaciones del estado deben ser calificadas como mediciones para combinación con otras medidas en una secuencia global de estimación. Además, los modelos del proceso típicamente incorporan algunas nociones de movimiento aleatorio o incertidumbre [10].

III. El FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman es esencialmente una serie de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador tipo predictor – corrector que es óptimo en el sentido que minimiza el error estimado de la covarianza, cuando algunas condiciones son dadas. Desde el momento de su introducción, el filtro de Kalman ha sido sujeto de investigación autónoma o asistida. Esto es debido a que en gran parte de los avances en la computación digital se ha trabajado se ha trabajo para hacer el filtro práctico, pero relativamente simple y robusto. Aunque no siempre se presentan todas las condiciones óptimas para el funcionamiento del filtro, éste se desempeña bien en la mayoría de situaciones [10][12][13][14][18][22].

A. El filtro de Kalman Discreto

En esta sección se describe el filtro en su formulación original (Kalman 1960) donde las mediciones ocurren y el estado es estimado en puntos discretos en el tiempo [17][19].

1. El proceso a ser estimado

El filtro de Kalman apunta al problema general de tratar de estimar el estado $x \epsilon \mathbb{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto que es gobernado por una ecuación en diferencias lineal estocástica.

$$x_k = Ax_{k-1} + B\mu_k + W_{k-1} \quad (13)$$

Con una medición $z \epsilon \mathbb{R}^m$ que es:

$$z_k = Hx_k + V_k \quad (14)$$

Las variables aleatorias W_k y V_k representan respectivamente el ruido del proceso y de la medición. Se asumen que son independientes una de la otra, blancas y con distribución normal de probabilidad.

$$p(W) \sim N(0, Q) \quad (15)$$

$$p(V) \sim N(0, R) \quad (16)$$

En la práctica la covarianza del ruido del proceso Q y la covarianza del ruido de la medición R son matrices que pueden cambiar con cada paso en el tiempo o medición, sin embargo se asumen que son constantes.

La matriz *A* de *nxn* en la ecuación en diferentes relaciona el estado en el paso anterior k-1 con el estado actual, en ausencia de función de conducción o ruido del proceso. Nótese que en la práctica *A* puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante. La matriz *B* de *nx1* se relaciona con la entrada opcional de control $\mu \epsilon \mathbb{R}^n$ al estado *x*. La matriz H de *mxm* en la ecuación en diferencia de la medición, relaciona el estado con la medición. En la práctica la matriz H puede cambiar con cada paso del tiempo, pero aquí se asume constante.

2. Los orígenes computacionales del filtro

Se define $\hat{x}_k^- \epsilon \mathbb{R}^n$ como el estado estimado a priori en el paso k dado el conocimiento del paso previo del proceso, y $\hat{x}_k \epsilon \mathbb{R}^n$ va a ser el estado estimado a posteriori dada la medición z_k. Se puede definir los errores de estimación a priori y a posteriori como:

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k \quad (17)$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k \quad (18)$$

La covarianza del error a priori es entonces

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (19)$$

Y la covarianza del error a posteriori

$$P_k = E[e_k e_k^t] \quad (20)$$

En las posteriores ecuaciones de Kalman, se inicia con el objetivo de encontrar una ecuación que computa una estimación de estado a posteriori $\hat{x}_k$ como una combinación lineal de un estimado a priori $\hat{x}_k^-$ y una diferencia ponderada entre una medida real z_k y una predicción de esta medida $H\hat{x}_k^-$ como se muestra en la siguiente ecuación [8][10][12].

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (21)$$

La diferencia $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ en la ecuación anterior es llamada la innovación de la medida o el residuo. El residuo refleja la discrepancia entre la medida predicha $H\hat{x}_k^-$ y la medida real z_k. Un residuo de cero significa que ambos están en completa concordancia.

La matriz k de *nxm* en la ecuación es elegida para ser la ganancia o factor que minimiza la covarianza del error a posteriori. Esta minimización puede ser lograda sustituyendo una ecuación en la otra y despejando, tomando la derivada de la expresión con respecto a k y posteriormente igualando a 0 [8][10][12].

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (22)$$

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R} \quad (23)$$

Mirando la ecuación anterior se observa que mientras la covarianza del error de medición *R* se aproxima a cero, la ganancia *K* agrega peso al residuo más pronunciadamente, específicamente se observa[7][8][10]:

$$\lim_{R_k \to 0} K_k = H^{-1} \quad (24)$$

B. Los orígenes probabilísticos del filtro

La justificación del filtro está arraigada en la probabilidad del estimado a priori $\hat{x}_k^-$ condicionado en todas las mediciones anteriores z_k (regla de Baye). Por ahora el tópico más importante es que el filtro de Kalman mantiene los dos momentos de distribución de estados.

$$E[x_k] = \hat{x}_k \quad (25)$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] = P_k \quad (26)$$

El estado estimado a posteriori refleja la media (primer momento) de la distribución de estado, siempre y cuando se cumpla

$$p(W) \sim N(0, Q) \quad (27)$$

$$p(V) \sim N(0, R) \quad (28)$$

La covarianza del error de estimación a posteriori refleja la varianza de la distribución de estado [5].

$$p(x_k|z_k) \sim N(E[x_k], E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]) \quad (29)$$

C. Algoritmo del filtro de Kalman discreto

El filtro de Kalman estima un proceso usando una forma de realimentación y control: el filtro estima el estado del proceso en un tiempo y después obtiene la realimentación en forma de mediciones (ruidosas). Las ecuaciones del filtro de Kalman caen en dos grupos: ecuaciones de actualización de tiempo y ecuaciones de actualización de mediciones. Las ecuaciones de medición el tiempo son responsables de proyectar hacia adelante (en el tiempo) el estado actual y estimaciones de error y covarianza para obtener los estimados a priori del siguiente paso en el tiempo. Las ecuaciones de actualización de medida pueden ser vistas como ecuaciones correctoras. De hecho el algoritmo final de estimación reúne los algoritmos de predicción-corrección para la resolución de problemas numéricos (figura 1) [15] [21].



Figura 1. Funcionamiento del filtro de Kalman.

Las ecuaciones específicas para actualización de tiempo y medida son presentadas en las tablas 1 y 2.

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + B\mu_k$$
$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Tabla 1. Ecuaciones de actualización de tiempo del filtro de Kalman discreto.

De nuevo nótese como la actualización de tiempo en la tabla 1 proyecta el estado y la covarianza estimados adelante en el tiempo del paso *k-1* al paso *k*. *A* y *B* son matrices del modelo de estados mientras que Q es la varianza del ruido del proceso [8][9][13].

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$
$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Tabla 2. Ecuaciones de actualización de mediciones del filtro de Kalman discreto.

Y por último para la siguiente iteración debemos hacer una reasignación de las variables, como se muestra en la tabla 3.

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_k$$
$$P_k^- = P_k$$

Tabla 3. Ecuaciones de reasignación de variables.

La primera tarea durante la actualización de medidas es el cálculo de la ganancia de Kalman, K_k. El siguiente paso es medir el proceso para obtener z_k, y después generar un estimado del estado a posteriori incorporado a la medición. El paso final es la obtención de una covarianza de error estimada a posteriori.

Después de cada par de actualizaciones de tiempo y mediciones, el proceso es repetido con el estimado previo a posteriori usado para proyectar o predecir el nuevo estimado a priori. Esta naturaleza recursiva es una de las buenas cualidades del filtro de Kalman, lo que hace prácticas muchas implementaciones. El filtro de Kalman a pesar de sus condiciones recursivas basa su estimado actual en todas las mediciones pasadas. La figura 2 ofrece un esquema completo de la operación del filtro [13][14][24]

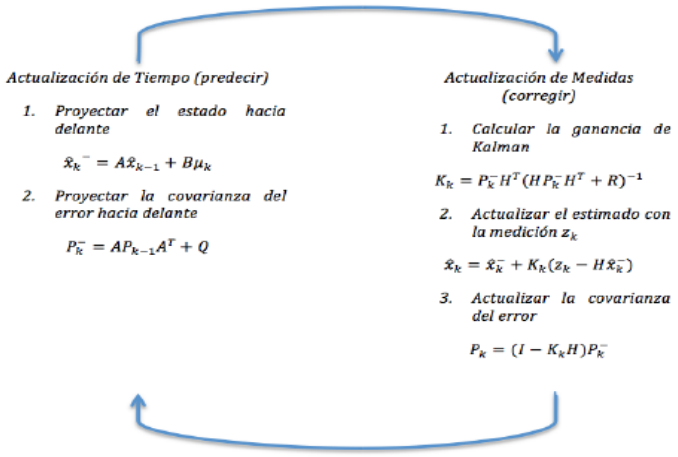


Figura 2. Esquema completo de la operación del

Filtro de Kalman.

Siendo $P_{\bar{k}}$ el estimado de la covarianza del error a priori y R_k la covarianza del error medio.

D. Simulación

En esta sección se presentan simulaciones del filtro de Kalman, utilizado como estimador sobre un sistema hipotético de segundo orden, este sistema es definido mediante el modelo de espacio de estados, además se inserta ruido aleatorio a la señal de entrada del estimador, utilizándolo también como filtro. Se observan los resultados en las figuras 4 y 5 y se muestra el código a continuación, desarrollado en el software de simulación MatLab © [24].

```
%%Estimación utilizando el Filtro de Kalman

close all
clear all
clc
%Definición de parámetros del sistema
wn=10;
Hs=tf([1 2],[1 2 wn^2])
h=0.1/sqrt(wn);
Hz=c2d(Hs,h)
[A,B,C,D]=tf2ss(Hz.num{1},Hz.den{1})
%% Ecuaciones del filtro
uk=1; % Función de escalón
Xem1=[0;0];
Pkm1=1e6;
Q=0.5;
R=0.5;
Y=step(Hs,10)
Yest=zeros(1,200)
for k=1:200
    Ys(k)=Y(k)+0.1*(0.2-rand);
% Actualización de tiempo
    Xem=A*Xem1+B*uk;
    Pkm=A*Pkm1*A'+Q;
% Actualización de mediciones
    Kk=(Pkm*C')/(C*Pkm*C'+R);
    Xe=Xem+Kk*(Ys(k)-C*Xem);
    Pk=(eye(2)-Kk*C)*Pkm;
% Generación de valores iniciales para... el siguiente paso
    Xem1=Xem;
    Pkm1=Pk;
    Yest(k)=C*Xe;
end
figure(1)
hold on
plot(Y)
plot(Ys,'g')
plot(Yest,'r')
```

Figura 3. Código del algoritmo de Kalman en Matlab

En la figura 3, la señal azul corresponde a la señal de salida real, la verde es la señal con ruido aleatorio y la roja es la señal de salida estimada y filtrada, en la cual se puede observar la actuación del filtro pues se nota claramente como el algoritmo es capaz de recuperar la señal a pesar de la fuerte perturbación existente además en la figura 4 en la cual se superponen las 3 señales se puede notar el desfase entre la señal real y la señal filtrada, debido a que el algoritmo necesita de una muestra para poder ser ejecutado.

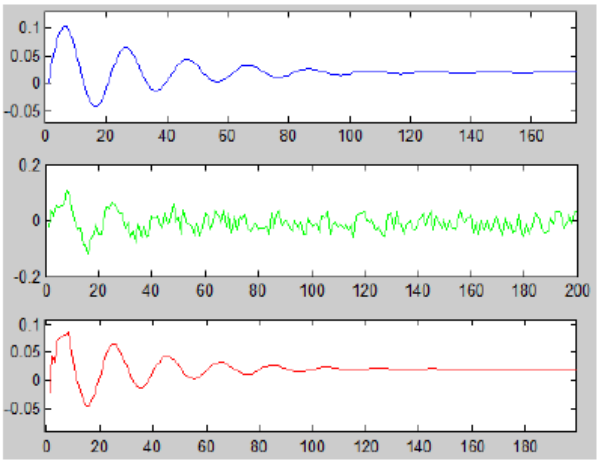


Figura 4: Señal de salida, señal con ruido y señal estimada de forma individual.

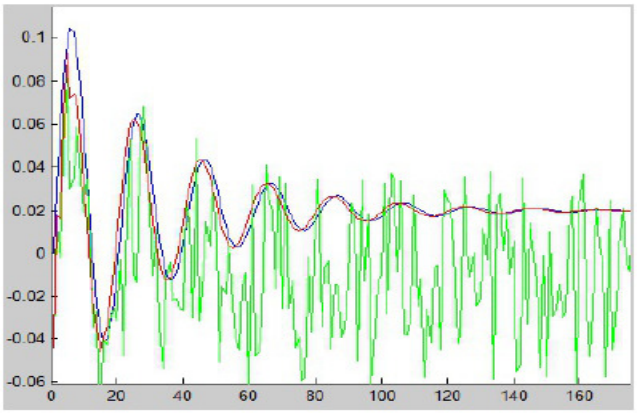


Figura 5. Señal de salida, señal con ruido y señal estimada en el mismo gráfico.

IV. CONCLUSIONES

- El filtro de Kalman es una aplicación óptima para la eliminación del ruido ya que elimina selectivamente las señales indeseadas y permite acceder directamente a la información que se encuentra en la señal. Esto lo logra basándose en descripciones probabilísticas y utilizando los modelos de espacio de estados, llegando así a la eliminación de perturbaciones que superen inclusive la magnitud de la señal de interés.

- Con el filtro de Kalman se puede conocer los estimados con la actualización de cada muestra a través del tiempo, lo que permite saber el comportamiento especifico del sistema en cada muestra, es decir, notando cambios

muestra tras muestra, y no como un promedio de estas como sucede con otra clase de métodos.

- El algoritmo de Kalman es una excelente herramienta matemática ya que consta de una etapa de predicción seguida de una etapa de corrección aplicada al proceso, lo que permite no solo estimar sino filtrar de manera óptima la señal.

- Como se puede observar en la figura 5 se presenta un desfase de una muestra entre la señal real y la señal estimada y filtrada, esto es debido básicamente a que la computación de los datos requiere un tiempo de muestreo para arrojar los resultados.

REFERENCIAS

[1] J. G. Díaz, A. M. Mejía y F. Arteaga, *Aplicación de los filtro de Kalman a sistemas de Control*, 2001.

[2] Haykin S, *Cognition is the Key to the Next Generation of Radar Systems,* 2009

[3] Qi-tu Zhang, Haykin S, *Tracking characteristics of the Kalman filter in a nonstationary environment for adaptive filter applications,* 1983.

[4] D. J. Jwo and S. C. Chang, *Application of Optimization Technique for GPS Navigation Kalman Filter Adaptation*, 2004.

[5] P. Meller and R. Laban, *Aplicación del filtro de Kalman a la estimación de elasticidades variables en el mercado del trabajo chileno*, 1974-1985, 1987.

[6] L.D. Avendaño, L.E. Avendaño, J.M Ferrero, G. Castellanos, *Improvement of an extended Kalman filter power line interference suppressor for ECG signal*, 2007.

[7] P. M. Van Dooren, *Numerical Linear Algebra for Signals Systems and Control*, 2003.

[8] S. Haykin, *Kalman Filtering and Neural Networks*, 2001.

[9] P. S. Maybeck, *Stochastic models, estimation, and control*, 1979.

[10] G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, SIGGRAPH, 2001.

[11] K. Yuen, K. I. Hoy and K. M. Mok, *Selection of noise parameters for Kalman filter, 2007.*

[12] R. J. Meinhold, N. D. Singpurwalla, *Understanding the Kalman Filter,* 1983.

[13] A. C. Harvey, *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, 1989.

[14] G. Evenses, *Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation,* 2003.

[15] Lee E.K.B, Haykin S, *Parallel implementation of the tracking Kalman filter,* 1988.

[16] B. P. Lahti, *Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación*, Limusa.

[17] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T.R, *Cubature Kalman Filtering for Continuous-Discrete Systems: Theory and Simulations,* 2010.

[18] Chan Y.T., Hu A.G.C., Plant J.B., *A Kalman Filter Based Tracking Scheme with Input Estimation*, 1979.

[19] J. J. Medel, P. G. López, A. Rueda, *Caracterización de Filtros Digitales en Tiempo Real para Computadoras Digitales, 2004*

[20] A. Papoulis, *Probability and Statistics*, Prentice Hall, 1989.

[21] T. K. Moon, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, 2000.

[22] A. S. Ramírez, *El Filtro De Kalman*, 2003.

[23] L. D. Avendaño, L. E. Avendaño, J. M. Ferrero, G. Castellanos, *Reducción de interferencia de línea de potencia en señales electrocardiográficas mediante el filtro dual de Kalman, 2007*.

[24] M. S. Grewal, A. P. Andrew, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab.*2001

[25]

[26] J. C. Lima, Haykin S, *Unscented Kalman filter-trained recurrent neural equalizer for time-varying channel,* 2005.

[27] Li L, Haykin S, *Modified Kalman filtering with an optimal target function,* 1992.

[28] Haykin S, Sayed A.H, Zeidler J.R, Yee P, Wei P.C, *Adaptive tracking of linear time-variant systems by extended RLS algorithms,* 1997.

[29] Haykin S, Sayed A.H, Zeidler J, Yee P, Wei P, *Tracking of linear time-variant systems*, 1995.

[30] Haykin S, Li L, *Modified Kalman filtering*, 1994.

[31] T. Feng, Haykin S, *Novel procedure for reliable signal detection in an unknown wireless environment*, 2006.

[32] Haykin S, Yee P, Derbez E, *Optimum nonlinear filtering,* 1997.

[33] Kesler J, Haykin S, *An adaptive interference canceller using Kalman filtering,* 1981.

[34] Haykin S, Huber K, Zhe Chen, *Bayesian sequential state estimation for MIMO wireless communications,* 2004.

[35] Lee E.K.B, Haykin S, *Parallel implementation of the extended square-root covariance filter for tracking applications*, 1993.

[36] Pasika H, Haykin S, Clothiaux E, Stewart R, *Neural networks for sensor fusion in remote sensing*, 1999.

[37] Metford P.A.S, Haykin S, *Experimental analysis of an innovations-based detection algorithm for surveillance radar,* 1985.

[38] Adali T, Haykin S, *Nonlinear Sequential State Estimation for Solving Pattern Classification Problems*, 2010.

[39] Haykin S, Kosko B, *A Signal Processing Framework Based on Dynamic Neural Networks with Application to Problems in Adaptation, Filtering and Classification*, 2001

[40] C. H. Bishop, B. J. Etherton, and S. J. Majumdar, *Adaptive Sampling with the Ensemble Transform Kalman Filter. Theoretical Aspects*, 2000.

[41] T. M. Hamill and C. Snyder, *A Hybrid Ensemble Kalman Filter–3D Variational Analysis Scheme*, 2000.
[42] T. M. Hamill and J. S. Whitaker, *Distance-Dependent Filtering of Background Error Covariance Estimates in an Ensemble Kalman Filter,* 2001.

[43] Arasaratnam I, Haykin S, *Cubature Kalman Filter,* 2009.
[44] D. Willner, C. B. Chang, K. P. Dunn, *Kalman filter algorithms for a multi-sensor system,* 1976.
[45] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R.J, *Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms Using Gauss–Hermite Quadrature,* 2007.