KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN ÖRNEK EKSTREMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MOMENTLERİ

Ayşe TURAN BUĞATEKİN

Doktora Tezi
İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Haziran- 2011

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN ÖRNEK EKSTREMLERİNİN MOMENTLERİ

DOKTORA TEZİ

Ayşe TURAN BUĞATEKİN

(Enstitü No: 091133201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30 Mayıs 2011
Tezin Savunulduğu Tarih: 16 Haziran 2011

Tez Danışmanı: **Yrd. Doç. Sinan ÇALIK (F.Ü)**
Diğer Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)**
Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Cemil ÇOLAK (İ.Ü)

HAZİRAN- 2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIMDAKİ SIRA İSTATİSTİKLERİN ÖRNEK EKSTREMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MOMENTLERİ

DOKTORA TEZİ

Ayşe TURAN BUĞATEKİN

Enstitü No: 091133201

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: İstatistiksel Bilgi Sistemleri

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30 Mayıs 2011

2011

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen kıymetli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren, cesaretlendiren ve hep yanımda olan sevgili eşim ve değerli aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ayşe TURAN BUĞATEKİN

ELAZIĞ- 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ…… **II**

İÇİNDEKİLER…….. **III**

ÖZET…….. **IV**

SUMMARY…… **V**

TABLOLAR LİSTESİ…….. **VI**

SEMBOLLER LİSTESİ…… **VII**

EKLER LİSTESİ…….. **VIII**

1. GİRİŞ……. **1**

2. MATERYAL ve METOT……. **4**

2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları…… **6**

2.2. $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ Sıra İstatistiklerin Ortak Dağılımı……. **7**

2.3. Kesikli Dağılımlar için Yaklaşımlar…….. **8**

2.4. Momentler ve Çarpım Momentleri…… **9**

2.5. Kesikli Anakütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım……. **12**

2.6. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri…….... **14**

3. BULGULAR…… **15**

3.1. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Momentleri…… **15**

4. SONUÇ ve TARTIŞMA…… **30**

KAYNAKLAR…….. **31**

EKLER…….. **33**

ÖZGEÇMİŞ…….. **35**

ÖZET

Sürekli tesadüfi değişkenlerdeki sıra istatistiklerinin momentleri kolaylıkla bulunabilir. Ancak kesikli durumda sıra istatistiklerin dağılımları daha karmaşık olduğundan, momentlerini bulmak kolay değildir. Bu momentlerin hesaplanabilmesi için belirli yaklaşımlar ortaya konmuştur. Bu yaklaşımlar kullanılarak bazı kesikli dağılımların sıra istatistiklerinin momentleri hesaplanabilir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, sıra istatistiklerin tarihçesinden ve günümüze kadar yapılan gelişmelerden bahsedilmiştir. İkinci bölümünde, bazı kavramlar, özellikler ve yaklaşımlar verilmiştir. Verilen yaklaşımlardan beta integral formu kullanılarak kesikli düzgün dağılımdaki maksimum ve minimum sıra istatistiklerin momentleri genelleştirilmiştir. Ayrıca kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları sayısal olarak hesaplanıp, bu değerler bir tablo halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sıra İstatistikleri, Dağılım Fonksiyonu, Kesikli Düzgün Dağılım, Moment, Ekstremler.

SUMMARY

Generalized Moments of Sample Extremes of Order Statistics from Discrete Uniform Distribution

Moments of order statistics in continuous random variables can be found easily. In contrast, since distributions of order statistics are more complex in discrete case, it is not easy to find their moments. Some specific approaches have been put forward for calculating these moments. Moments of order statistics of some discrete distributions can be calculated by using these approaches.

In the first chapter of this study, the histories of order statistics and developments in this field up to now have been related. In the second chapter, some concepts, features and approaches are given. With the help of the given approaches, moments of maximum and minimum order statistics in discrete uniform distributions are generalized by using beta integral form. Additionally, expected values and variances of the sample extremes of order statistics in discrete uniform distributions are calculated numerically and they are given in a table.

Keywords: Order Statistics, Distribution Function, Discrete Uniform Distribution, Moment, Extremes.

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değer ve varyansı……..….22

Tablo 3.2. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değer ve varyansı……..….26

SEMBOLLER LİSTESİ

$f(x)$: X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu

$F(x)$: X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu

$f_{r:n}(x)$: r inci sıra istatistiğinin olasılık fonksiyonu

$F_{r:n}(x)$: r inci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu

μ_r : Orijine göre r inci moment

$\mu_{r:n}^{(m)}$: r inci sıra istatistiğinin orijine göre m inci momenti

$M_X(t)$: X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$M_{X_{r:n}}(t)$: r inci sıra istatistiğinin moment çıkaran fonksiyonu

$I_{F(x)}$: Incompleta beta fonksiyon

EKLERİN LİSTESİ

Sayfa No

EK 1. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değeri için Matlab programı…….……...33

EK 2. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun varyansı için Matlab programı…….……...33

EK 3. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değeri için Matlab programı……...….33

EK 4. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun varyansı için Matlab programı……...….34

1. GİRİŞ

20. yy başlarından itibaren sıra istatistikleri ve özellikleri üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Sıra istatistikleri terimi ilk olarak Wilks (1942) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak Wilks tarafından ortaya atılan, bir örnekteki sıralı değişkenler için tanımlanan sıra istatistikleri konusu çok daha eskidir.

Sıra istatistiklerin ortalama, varyans ve kovaryanslarının ilk sistematik tablosu Hasting et al. (1947) tarafından verilmiştir. Sıra istatistikleri teorisini tanımlayan ilk temel kitap David (1981) tarafından yazılmıştır. Arnold vd. (1992), David ve Nagaraja (2003) bağımsız ve aynı dağılımlı (*iid*) tesadüfi değişkenlerin sıra istatistikleri için yeni gelişmeler sunmuşlardır.

Sıra istatistiklerin dağılım teorisi 1900' lerin başlarından beri önemli ölçüde ilgi görmüştür. Sürekli dağılımların yanı sıra kesikli dağılımlar içinde sıra istatistiklerin genel özellikleri ile ilgili çeşitli makaleler ortaya çıkarılmıştır. Khatri (1962), kesikli durum için sıra istatistikleri teorisinin birkaç sistematik hesaplamasını vermiştir. Buna karşılık Kabe (1969), Khatri' nin (1962) karmaşık olarak verdiği i inci sıra istatistiğinin olasılık fonksiyonu ve i inci ve j inci sıra istatistiğinin ortak olasılık fonksiyonunu daha basit ifadelerle tanımlamıştır. Balakrishnan (1986), keyfi sürekli dağılımlardaki n boyutlu bir örnekteki sıra istatistiklerinin tekli ve çarpım momentleri için mevcut olan indirgeme ilişki ve eşitsizliği kesikli durumlar için elde edilmiştir. Nagaraja (1992), kesikli sıra istatistiklerin dağılım teorisini ve özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Arnold vd. (1992), Khatri' nin elde ettiği ilk iki momenti farklı bir yolla ispatlamışlardır. Çalık ve Güngör (2004), bir uygulama olarak kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değerini, $n=15$ örnek boyutuna kadar cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Çalık vd. (2010), kesikli dağılımdaki sıra istatistiklerin m inci momentini ispat etmişlerdir.

Her bir tesadüfi değişken, dağılım fonksiyonu ile karakterize edilir. Fakat pratikte çoğu zaman dağılım fonksiyonu belli olmaz. Matematiksel istatistiğin temel problemlerinden birisi tesadüfi değişkenin deneysel değerlerini kullanarak onun dağılım fonksiyonunu tahmin

etmektir. Bazı dağılım fonksiyonlarının analitik ifadesi belli olsa da birkaç bilinmeyen parametre (parametreler) içerir. Bu parametreler moment denilen sayısal değerler ile ifade edilirler. Dağılım fonksiyonunun bu bilinmeyen parametresi (parametreleri) belirli koşullar altında momentler yardımıyla belirlenebilir. Ayrıca, olasılık ve stokastik süreçler için önem taşıyan bazı eşitsizlikler momentler yardımıyla ifade edilmektedir.

Sıra istatistiklerinin momentleri de çoğu istatistiksel problem için büyük bir öneme sahiptir. Sıra istatistiklerinin momentleri, özellikle ortalama, varyans ve kovaryansları hakkında edinilen bilgiler, sıra istatistiklerin lineer fonksiyonlarının beklenen değer ve varyanslarının değerlendirilmesini sağlar. Böylece bu lineer fonksiyonların tahminlerinin ve bu tahminlerin etkinliğinin bulunmasına yardımcı olur.

Çoğu yazarlar birincil amaç olarak bu momentlerin doğrudan hesaplanmasını sağlayan indirgeme formüllerini araştırmış ve sıra istatistiklerin bu momentleri sayesinde birkaç indirgeme ilişki ve eşitsizliği ortaya koymuşlardır. Bu konu ile ilgili araştırmalar Joshi (1973), David (1981), Joshi ve Balakrishnan (1982), Balakrishnan ve Malik (1985), Malik, Balakrishnan ve Ahmed (1988), Arnold ve Balakrishnan (1989), Joshi ve Shubha (1991), Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja (1992) kaynaklarından elde edilebilir. Bu indirgeme ilişkileri keyfi anakütledeki sıra istatistiklerin hesaplanan tekli ve çarpım momentleri, varyans ve kovaryanslarının doğruluğunu kontrol etmek için kullanılır.

Sıra istatistiklerin sık karşılaşılan uygulamalarından biri özel dağılımların parametre tahminleridir. Sıra istatistikleri aynı zamanda regresyon katsayılarının tahmini içinde kullanılır. En küçük kareler metoduna alternatiflerin çoğu sıra istatistiklerine dayanmaktadır. Sıra istatistikleri sadece nokta tahminleri için değil aynı zamanda güven aralıkları, tolerans aralıkları ve tahmin aralıkları için de faydalıdır.

Sıra istatistiklerin bir başka uygulama alanı da güvenirlik teorisidir. Aynı zamanda teste tabi tutulan *n* tane ürünün yaşam zamanlarını gösterdiği için sıra istatistikleri yaşam analizinde de önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle sıra istatistiklerine dayalı birçok istatistik dağılımdan bağımsız özelliğinden dolayı parametrik olmayan yöntemlerde geniş şekilde kullanılmaktadır (Shahbazov, 2005).

Sulama planı, sel koruma sistemleri, barajlar gibi dere, nehir veya göldeki su seviyeleri çoğu mühendislik çalışmalarının planlanmasıyla yakından ilgili değişkenlerdir. $X_i, i = 1,2,...,n$

tesadüfi değişkenleri su seviyelerinin bir örneğini göstersin. İlk k tane sıra istatistiği $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{k:n}$ en küçük gözlemlerdir ve kuraklık esnasında sistem davranışını belirlerler. Aksine son k tane sıra istatistiği $X_{n-k+1:n}, ..., X_{n:n}$ en büyük değerlerdir ve sel veya fırtına esnasındaki sistem davranışını gösterirler (Salvadori et al., 2007).

Sıra istatistiklerin diğer uygulamaları; istatistiksel kalite kontrol, çoklu karşılaştırma testleri, hidroloji, meteoroloji, sismoloji, ekonometri alanlarındadır.

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistikleri ise; sağlık bilimleri, kodlanmış örnekleme seçimi, jeoloji, biyolojide; "Doğal Seleksiyon ve Gerçek Algılama" [Mark vd., 2010] gibi çeşitli uygulama alanlarına sahiptir.

Bu çalışmada, kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimum ve minimumunun m inci momentleri ve moment çıkaran fonksiyonları elde edilmiştir. Bu moment çıkaran fonksiyonlar yardımıyla, örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları için, Matlab programı kullanılarak, sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca çalışmada aksi belirtilmedikçe tesadüfi değişkenin kesikli olma durumu için inceleme yapılmıştır.

2. MATERYAL ve METOT

X tesadüfi değişkeninin μ_r ile gösterilen sıfır noktası dolayındaki r inci momenti, X^r nin beklenen değeridir. Simgesel olarak $r = 0,1,2,...$ için,

$$\mu_r = E(X^r) = \sum_x x^r f(x) \tag{2.1}$$

dir [Freund, 2002].

Moment çıkaran fonksiyon yöntemi ise tesadüfi değişkenlerin sahip oldukları dağılımların momentlerinin hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem tesadüfi değişkenlerin olasılık fonksiyonundan yararlanarak bir fonksiyon belirler ve bu fonksiyondan yararlanılarak momentler daha kolay bir şekilde hesaplanır.

X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} P(x) \tag{2.2}$$

şeklindedir [Freund, 2002].

Tanım 2.1. X kesikli bir rassal değişkense, X' in aralığı içindeki her bir x için $f(x) = P(X = x)$ ile verilen fonksiyona X' in olasılık fonksiyonu denir [Freund, 2002].

Tanım 2.2. X kesikli bir rassal değişkense,

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t), \quad -\infty < x < \infty$$

fonksiyonuna X' in dağılım fonksiyonu ya da birikimli dağılım denir. Burada $f(t)$, X olasılık dağılımının t' deki değeridir [Freund, 2002].

Teorem 2.1.

X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$, sıfırı kapsayan bazı açık aralıklar üzerinde sınırlı olsun. Buna göre $M_X(t)$ açık aralıklar üzerinde diferensiyellenebilirdir ve $k \geq 1$ olmak üzere,

$$E(X^k) = M_x^{(k)}(0) \tag{2.3}$$

yazılabilir [Dasgupta, 2010].

Teorem 2.2.

Bir tesadüfi değişken olan X ' in aralığı $x_1 < x_2 < ... < x_n$ değerlerinden oluşuyorsa $f(x_1) = F(x_1)$ ve $i = 2,3,...,n$ için $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ olur [Freund and Walpole, 1962].

Teorem 2.3. (*Olasılık- İntegral Dönüşümü*)

X tesadüfi değişkeni $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip olsun. $F(x)$ sürekli ise Y tesadüfi değişkeni $(0,1)$ aralığı üzerindeki düzgün olasılık dağılımına sahip $Y = F(x)$ dönüşümü ile üretilir [Gibbons, 1971].

Teorem 2.4.

$X_1, X_2, ..., X_n$ sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip bir örneklem ve $X_{1:n} < X_{2:n} < ... < X_{n:n}$ bu örneklemin sıra istatistiklerini göstersin.

$U_{1:n} = F(X_{1:n}),\ U_{2:n} = F(X_{2:n}),\ ..., U_{n:n} = F(X_{n:n})$

olmak üzere $U_{1:n}, U_{2:n}, ..., U_{n:n}$; (0,1) aralığındaki düzgün dağılımdan alınmış örneklemin sıra istatistikleridir [David, 1981].

2.1. Sıra İstatistikleri ve Dağılımları

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi artan sırada $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ biçiminde sıralansın. Bu sıralanmış $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ tesadüfi değişkenlerine sıra istatistikleri denir. Burada $X_{r:n}$ *n*-boyutlu örneklemin *r* inci sıra istatistiği olarak adlandırılır. *1* inci sıra istatistiği,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$$

ve *n* inci sıra istatistiği,

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$$

şeklindedir. $X_{r:n}$' nin birikimli dağılım fonksiyonu (*cdf)*,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \Pr(X_{r:n} \le x) \\ &= \Pr(X_1, X_2, ..., X_n \text{' lerin en az } r \text{ tanesi} \le x) \\ &= \sum_{i=r}^{n} \Pr(X_1, X_2, ..., X_n \text{' lerin tam } i \text{ tanesi} \le x) \\ &= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i}, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde bulunabilir.

Buna göre $X_{r:n}$' nin birikimli dağılım fonksiyonu *n* deneme sayısı ve $F(x)$ başarı olasılığı olmak üzere bir binom dağılımının kuyruk olasılığıdır. Ayrıca

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^i [1-p]^{n-i} = \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt, \quad 0 < p < 1 \tag{2.5}$$

eşitliği mevcut olduğundan $X_{r:n}$' nin *cdf*' si,

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= I_{F(x)}(r, n-r+1), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{2.6}$$

olarak da yazılabilir. Burada $I_{F(x)}$,

$$I_{F(x)}(\alpha, \beta) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

şeklinde tanımlanan incompleta beta fonksiyonudur. (2.6)' da tanımlanan $F_{r:n}(x)$ ifadesi kesikli veya sürekli herhangi bir anakütle için sağlanır [David, 1981].

2.2. $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ Sıra İstatistiklerin Ortak Dağılımı

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ $(1 \le r \le s \le n)$ sıra istatistiklerin ortak birikimli dağılım fonksiyonu,

$F_{r,s:n}(x,y) = F_{s:n}(y), \quad x \ge y$ için

$$F_{r,s:n}(x,y) = P(X_{r:n} \le x, X_{s.n} \le y)$$

$= P(X_1, X_2, \ldots, X_n$ 'lerin en az r tanesi x' e eşit veya ondan küçük

ve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 'lerin en az s tanesi y' ye eşit veya ondan küçüktür)

$$= \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{j} P(X_1, X_2, \ldots, X_n$$ 'lerin tam r tanesi x' e eşit veya ondan küçük

ve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 'lerin tam s tanesi y' ye eşit veya ondan küçüktür)

$$= \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{j} \frac{n!}{i!((j-i)!(n-j)!} [F(x)]^r [F(y) - F(x)]^{s-r} [1 - F(y)]^{n-s}, \quad x < y \qquad (2.7)$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifade ister kesikli ister sürekli herhangi bir anakütle için sağlanır.

Kesikli anakütleler için $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'lerin ortak olasılık kütle fonksiyonu (*pmf)* ' si,

$$f_{r,s:n}(x,y) = \Pr(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y)$$

$$= F_{r,s:n}(x,y) - F_{r,s:n}(x-,y) - F_{r,s:n}(x,y-) + F_{r,s:n}(x-,y-) \qquad (2.8)$$

olarak elde edilebilir [Arnold et al., 1992].

$F_{1,2,\ldots,n:n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_{1:n} \le x_1, X_{2:n} \le x_2, \ldots, X_{n:n} \le x_n\}$ ortak olasılık fonksiyonunu göstersin. $-\infty \le y_1 < x_1 \le y_2 < x_2 \le \ldots \le y_n < x_n \le +\infty$ şeklindeki her bir değer için,

$$P(y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, y_n, x_n) = P\{y_1 < X_{1:n} \le x_1, y_2 < X_{2:n} \le x_2, \ldots, y_n < X_{n:n} \le x_n\} \qquad (2.9)$$

düşünülebilir. Buna göre

$$A = \{y_1 < X_{1:n} \le x_1, y_2 < X_{2:n} \le x_2, \ldots, y_n < X_{n:n} \le x_n\}$$

olayını göz önüne alalım.

$$A(\alpha(1),\alpha(2),...,\alpha(n)) = \{y_1 < X_{\alpha(1)} \le x_1, y_2 < X_{\alpha(2)} \le x_2,..., y_n < X_{\alpha(n)} \le x_n\} \quad (2.10)$$

durumunda *n!* tane ayrık olay mevcuttur. Burada $(\alpha(1),\alpha(2),...,\alpha(n))$ vektörü $(1,2,...,n)$ nin bütün permütasyonları üzerinden yürütülür. Simetri özelliğinden bütün $A(\alpha(1),\alpha(2),...,\alpha(n))$ olayları aynı olasılığa sahiptir. Bu olasılıklar

$$\prod_{k=1}^{n} F(x_k) - F(y_k) \quad (2.11)$$

ifadesine eşittir. Sonuç olarak,

$$P\{y_1 < X_{1:n} \le x_1, y_2 < X_{2:n} \le x_2,..., y_n < X_{n:n} \le x_n\} = n!\prod_{k=1}^{n} F(x_k) - F(y_k) \quad (2.12)$$

yazılır. Anakütle dağılımı bir yoğunluk fonksiyonuna sahip ise $F'(x) = f(x)$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafı diferensiyellenirse

$$f_{1,2,...,n:n}(x_1, x_2,...x_n) = n!\prod_{k=1}^{n} f(x_k), \quad -\infty < x_1 < x_2 < ... < x_n < \infty \quad (2.13)$$

ortak olasılık fonksiyonu elde edilmiş olur [Ahsanullah and Nevzorov 2005].

2.3. Kesikli Dağılımlar için Yaklaşımlar

Kesikli dağılımlarda $X_{r:n}$' nin olasılık kütle fonksiyonu (*pmf*) için üç yaklaşım mevcuttur.

Yaklaşım- 1 (Binom Toplamı): Teorem 2.2 gereğince $F_{r:n}(x)$ ifadesini sağlayan denklem kesikli durumda $X_{r:n}$' nin her bir mümkün *x* değeri için,

$$f_{r:n}(x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-) \quad (2.14)$$

dir. Bu nedenle

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} \{[F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i [1-F(x-)]^{n-i}\} \quad (2.15)$$

yazılabilir. Benzer olarak $F_{r:n}(x)$ için negatif binom toplam formu kullanılabilir.

Yaklaşım- 2 (Beta İntegral Formu): (2.6) ve (2.15) denklemlerinde verilen $F_{r:n}(x)$' in formu kullanılırsa,

$$f_{r:n}(x) = C(r;n) \int_{F(x-)}^{F(x)} u^{r-1}(1-u)^{n-r}\, du \tag{2.16}$$

olur. Burada,

$$C(r;n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Yaklaşım- 3 (*Çoklu Argument*) :

Bir X gözlem değeri için $\{X < x\}, \{X = x\}, \{X > x\}$ şeklindeki üç farklı olayı göz önüne alalım. Bu olayların olasılıkları sırasıyla $F(x-), f(x)$ ve $1 - F(x)$' dir. $\{X_{r:n} = x\}$ olayı $r(n-r+1)$ farklı şekilde meydana gelebilir. $i = 0,1,...,r-1$ ve $s = 0,1,...,n-r$ olmak üzere $(r-1-i)$ tane gözlem değeri x' den küçük, $(n-r-s)$ tanesi x' den büyük ve kalanlar ise x değerine eşittir. O halde,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{n![F(x-)]^{r-1-i}[1-F(x)]^{n-r-s}[f(x)]^{s+i+1}}{(r-1-i)!(n-r-s)!(s+i+1)!} \tag{2.18}$$

yazılabilir. Burada $x = 0$ ise $F(x-) = 0$' dır [Arnold et al., 1992 ;Khatri, 1962].

2.4. Momentler ve Çarpım Momentleri

$\mu_{r:n}^{(k)}$ $(1 \le r \le n)$ ile sıra istatistiklerinin tekli momentleri tanımlansın. Bu momentler sürekli durumda,

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{r:n}(x) dx$$

$$= C(r;n)\int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x)dx \tag{2.19}$$

ifadesi ile ve kesikli durumda,

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \sum_x x^k f_{r:n}(x), \quad 1 \le r \le n \tag{2.20}$$

ifadesi ile hesaplanabilir.

Standart düzgün dağılıma ait sıra istatistikleri kullanılarak (2.19) formülü daha sade bir biçimde yazılabilir. Bunun için önce sıra istatistiklerin önemli bir özelliği ifade edilecektir.

$U_{1:n}, U_{2:n}, ..., U_{n:n}$ sürekli standart düzgün dağılımdan tesadüfi seçilmiş bir örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. $F(x)$ sürekli ise $U = F(X)$ dönüşümü ile X tesadüfi değişkeni U standart düzgün tesadüfi değişkenine dönüşür. Bu durumda $F(X_{r:n})$ ile $U_{r:n}$ tesadüfi değişkenlerinin dağılımı birbirine eşittir. Bu kısaca,

$$F(X_{r:n}) \overset{d}{=} U_{r:n}, \quad r = 1,2,...,n \tag{2.21}$$

şeklinde gösterilecektir.

F dağılım fonksiyonunun ters fonksiyonu,

$$F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \le y\} \tag{2.22}$$

olmak üzere herhangi bir F dağılım fonksiyonu için

$$F^{-1}(U_r) \overset{d}{=} X_r, \quad r = 1,2,...,n \tag{2.23}$$

yazılabilir. F^{-1} sıralamayı koruyan bir fonksiyon olduğundan,

$$F^{-1}(U_{r:n}) \overset{d}{=} X_{r:n}, \quad r = 1,2,...,n \tag{2.24}$$

şeklinde olacaktır. O halde (2.24) kullanılarak,

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C(r;n)\int_0^1 [F^{-1}(u)]^k u^{r-1}(1-u)^{n-r} du, \quad 1 \le r \le k, \quad k = 1,2,... \tag{2.25}$$

yazılabilir. Bu ifadede beta fonksiyonu bulunduğu göz önüne alınırsa $g_{r:n}(u)$, $Beta\,(r, n+1-r)$ yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k g_{r:n}(u)du, \quad 1 \le r \le k, \quad k \ge 1 \tag{2.26}$$

yazılabilir.

Benzer olarak $\mu_{r,s:n}^{(k,l)} \quad (1 \le r < s \le n)$ ile sıra istatistiklerin çarpım momentleri tanımlansın. Bu momentlerin,

$$\mu_{r,s:n}^{(k,l)} = \sum\sum_{x \le y} x^k y^l f_{r,s:n}(x,y), \quad 1 \le r \le s \le n \tag{2.27}$$

ifadesi ile hesaplanabildiği açıktır.

Sıra istatistiklerin varyansı $Var(X_{r:n}), \sigma_{r,r:n}$ $(1 \le r \le n)$ ile tanımlanır ve

$$\sigma_{r:n}^2 = Var(X_{r:n}) = \mu_{r.n}^{(2)} - \mu_{r:n}^2, \quad (1 \le r \le n) \tag{2.28}$$

olarak hesaplanır.

Benzer olarak sıra istatistiklerin kovaryansı, $\sigma_{r,s:n}$ $(1 \le r \le s \le n)$ ile tanımlanır ve

$$\sigma_{r,s:n} = Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \mu_{r,s:n} - \mu_{r:n}\mu_{s:n}, \quad (1 \le r \le s \le n) \tag{2.29}$$

olarak hesaplanır. Burada $\mu_{r,s:n} = E(X_{r:n}, X_{s:n})$' dir.

$X_{r:n}$' nin momentini elde etmek için Teorem 2.4' deki $X_{r:n} \overset{d}{=} F^{-1}(U_{r:n})$ dönüşümü kullanılabilir. Yani, $X_{r:n}$' nin ortalaması

$$\mu_{r:n} = C(r;n)\int_0^1 F^{-1}(u)u^{r-1}(1-u)^{n-r}du \tag{2.30}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $C(r;n)$, (2.17)' de verilmiştir. Fakat $F^{-1}(u)$ kesikli dağılımların hemen hemen hepsi için iyi bir formda yazılamadığından bu yaklaşım pratik değildir [David, 1981].

S, negatif olmayan tamsayıların bir alt kümesi olduğunda, kesikli dağılımlar için aşağıda ifade edilen teoremden, $X_{r:n}$' nin momentlerini elde etmek için $F_{r:n}(x)$ kullanılabilir.

Teorem 2.5.

S destek kümesi, dağılıma ait negatif olmayan tam sayıların bir alt kümesi olsun. O zaman sağ taraftaki momentler her zaman mevcut olmak üzere

$$\mu_{r:n}^{(m)} = \sum_{x=0}^{\infty}[(x+1)^m - x^m](1 - F_{r:n}(x))$$

eşitliği geçerlidir [Çalık vd., 2010].

Özel olarak $m = 1$ ve $m = 2$ için

$$\mu_{r:n} = \sum_{x=0}^{\infty}[1 - F_{r:n}(x)]$$

ve

$$\mu_{r:n}^{(2)} = 2\sum_{x=0}^{\infty} x[1 - F_{r:n}(x)] + \mu_{r:n}$$

elde edilir [Arnold et al., 1992; Khatri, 1962].

Teorem 2.5. tüm kesikli dağılımlar için sağlanır. Genelde bu momentleri analitik olarak hesaplamak kolay değildir. Bazen, örnek ekstremlerinin momentleri elde edilebilmektedir.

2.5. Kesikli Anakütlelerin Sıra İstatistiklerine Alternatif Yaklaşım

X, $f(x)$ olasılık kütle fonksiyonlu ve $F(x)$ birikimli olasılık kütle fonksiyonlu 0,1,2,... değerlerini alan bir kesikli tesadüfi değişken olsun. Kabul edelim ki; $X_1, X_2, ..., X_n$ aynı *pmf* ' li *n* tane bağımsız ve aynı dağılmış tesadüfi değişken olsun. $X_1 \le X_2 \le ... \le X_n$ uygun sıralı istatistikler olmak üzere $f_{r:n}(x)$ Yaklaşım 1' den ,

$$f_{r:n}(x) = P(X_{r:n} = x) = F_{r:n}(x) - F_{r:n}(x-)$$

$$= \sum_{i=r}^{n} C(i;n)\{[F(x)]^i[1-F(x)]^{n-i} - [F(x-)]^i[1-F(x-)]^{n-i}\} \qquad (2.31)$$

olarak yazılabilir. Yaklaşım 2' den,

$$\sum_{i=r}^{n} C(i;n)\,[F(x)]^i[1-F(x)]^{n-i} = \int_0^{F(x)} rC(r;n)u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,du, \quad 0 < u < 1$$

ve

$$f_{r:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} rC(r;n)u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,du \tag{2.32}$$

yazılabilir.

Özel olarak $r=1$ için $X_{1:n}$' nin *pmf*' si,

$$f_{1:n}(x) = n\int_{F(x-)}^{F(x)} (1-u)^{n-1}\,du = [\bar{F}(x-)]^n - [\bar{F}(x)]^n, \quad \bar{F}(x) = 1-F(x) \tag{2.33}$$

ve $r=n$ için $X_{n:n}$' nin *pmf*' si,

$$f_{n:n}(x) = n\int_{F(x-)}^{F(x)} u^{n-1}du = [F(x)]^n - [F(x-)]^n \tag{2.34}$$

olarak elde edilebilir.

$1 \le r \le s \le n$ olmak üzere $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$' nin ortak *pmf*' si,

$$f_{r,s:n}(x,y) = P(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{n-s}\sum_{u,w=0}^{u+w\le s-r-1} C(r-i-1, r+w, s-1-u, s+j:n)\{[F(x-)]^{r-1-i}[F(x)]^{w+1+i}\}$$

$$.\{[F(y-)-F(y)]^{s-u-r-w-1}\}\{[F(y)]^{u+1+j}\}\{[1-F(y)]^{n-s-j}\}$$

olarak elde edilir. Verilen ifadeden,

$$f_{r,s:n}(x,y) = P(X_{r:n} = x, X_{s:n} = y)$$

$$= r(s-r)C(r,s;n)\int_{F(x-)}^{F(x)}\int_{F(y-)}^{F(y)} u^{r-1}(v-u)^{s-r-1}(1-v)^{n-s}\,dudv \tag{2.35}$$

elde edilir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, ..., X_{r_k:n}$' nin ortak *pmf*' si,

$$f_{r_1,r_2,...,r_k:n}(x_1,x_2,...,x_k) = C(r_1,r_2,...,r_k:n)\int_D \prod_{i=1}^{k}(r_i-r_{i-1})(u_i-u_{i-1})^{r_i-r_{i-1}}(1-u_k)^{n-r_k}\,du_1du_2..du_k \tag{2.36}$$

ve burada

$r_0 = 0, u_0 = 0$ ve $\int_D = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)}\int_{F(x_2-)}^{F(x_2)}...\int_{F(x_k-)}^{F(x_k)}$

dır.

2.6. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistikleri

X, destek kümesi $S = \{1,2,...,k\}$ olan kesikli düzgün anakütledeki tesadüfi değişken olmak üzere *X*, $[1,k]$ kesikli düzgündür. X' in $x \in S$ için *pmf* ' si $f(x) = 1/k$ ve *cdf* ' si $F(x) = x/k$ ile verilmiştir. Bu nedenle *r*. inci sıra istatistiğin *cdf*' si,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x}{k}\right)^{i} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{n-i}, \quad x \in S \tag{2.37}$$

ile verilir. Doğrudan *x* ve *k* seçimiyle binomial dağılımın *cdf* ' si için tablolarda kullanılabilir. Örneğin $k = 10, x = 10p, p = 0{,}1(0{,}1)1{,}0$ olarak alınırsa $x \in S$ için

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i} \tag{2.38}$$

ifadesi binomial tablodan okunabilir ve $f_{r:n}(x)$ ' de (2.14) kullanılarak elde edilebilir [David, 1981].

3. BULGULAR

3.1. Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Momentleri

$X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık kütle fonksiyonu $f(x) = 1/k$ ve *cdf* 'si $F(x) = x/k \quad x = 1,2,..., k$ olan *n* tane bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli anakütledeki düzgün tesadüfi değişkenler olsun. O zaman $X_{r:n}$ 'nin *pmf* 'sini (2.16) daki denklemden

$$f_{r:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$= \int_{(x-1)/k}^{x/k} C(r:n) u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \qquad (2.39)$$

şeklinde yazabiliriz. Özel olarak $r = 1$ ve $r = n$ alınırsa, sırasıyla,

$$f_{1:n}(x) = \left(\frac{k+1-x}{k}\right)^n - \left(\frac{k-x}{k}\right)^n, \quad x = 1,2,..., k. \qquad (2.40)$$

$$f_{n:n}(x) = \left(\frac{x}{k}\right)^n - \left(\frac{x-1}{k}\right)^n, \quad x = 1,2,..., k. \qquad (2.41)$$

ifadeleri bulunur [Ahsanullah ve Nevzorov, 2001].

Teorem 2.6.

$X_1, X_2, ..., X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip tesadüfi değişkenler ve $X_{1:n}$ bu tesadüfi değişkenlere karşılık gelen *1* inci sıra istatistiği olsun. Buna göre, sağ taraftaki momentler her zaman mevcut olmak üzere, $X_{1:n}$ 'nin *m* inci momenti

$$\mu_{1:n}^{(m)} = E(X_{1:n}^m) = \sum_{i=1}^{k} [i^m - (i-1)^m] \left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

dir.

İspat.

$X_{1:n}$' nin *m* inci momenti için, moment tanımında, $f_{1:n}(x)$' in (2.40)' daki ifadesi yazılırsa,

$$\mu_{1:n}^{(m)} = E(X_{1:n}^{m}) = \sum_{x=1}^{k} x^{m} \left[\left(\frac{k+1-x}{k} \right)^{n} - \left(\frac{k-x}{k} \right)^{n} \right]$$

olur. Sağ taraftaki toplam açılır ve sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{1:n}^{(m)} = E(X_{1:n}^{m}) &= 1^{m} \left[\left(\frac{k}{k} \right)^{n} - \left(\frac{k-1}{k} \right)^{n} \right] + 2^{m} \left[\left(\frac{k-1}{k} \right)^{n} - \left(\frac{k-2}{k} \right)^{n} \right] + \ldots + k^{m} \left[\left(\frac{1}{k} \right)^{n} \right] \\ &= 1^{m} \left(\frac{k}{k} \right)^{n} + \left[2^{m} - 1^{m} \right] \left(\frac{k-1}{k} \right)^{n} + \ldots + \left[k^{m} - (k-1)^{m} \right] \left(\frac{1}{k} \right)^{n} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left[i^{m} - (i-1)^{m} \right] \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Özel olarak $m = 1$ ve $m = 2$ alınırsa, sırasıyla,

$$\mu_{1:n} = E(X_{1:n}) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^{n} \tag{2.42}$$

$$\mu_{1:n}^{(2)} = E(X_{1:n}^{2}) = \sum_{i=1}^{k} (2i-1) \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^{n} \tag{2.43}$$

elde edilir [Ahsanullah ve Nevzorov, 2001 ; Turan, 2008].

Teorem 2.7.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip tesadüfi değişkenler ve $X_{n:n}$ bu tesadüfi değişkenlere karşılık gelen *n* inci sıra istatistiği olsun. Buna göre, sağ taraftaki momentler her zaman mevcut olmak üzere, $X_{n:n}$' nin *m* inci momenti

$$\mu_{n:n}^{(m)} = E(X_{n:n}^{m}) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[i^{m} - (i+1)^{m} \right] \left(\frac{i}{k} \right)^{n} + k^{m}$$

dir.

İspat.

$X_{n:n}$' nin *m* inci momenti için, moment tanımında, $f_{n:n}(x)$' in (41)' deki ifadesi yazılırsa,

$$\mu_{n:n}^{(m)} = E(X_{n:n}^{m}) = \sum_{x=1}^{k} x^m \left[\left(\frac{x}{k} \right)^n - \left(\frac{x-1}{k} \right)^n \right]$$

olur. Sağ taraftaki toplam açılır ve sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{n:n}^{(m)} = E(X_{n:n}^{m}) &= 1^m \left[\left(\frac{1}{k} \right)^n \right] + 2^m \left[\left(\frac{2}{k} \right)^n - \left(\frac{1}{k} \right)^n \right] + \ldots + k^m \left[\left(\frac{k}{k} \right)^n - \left(\frac{k-1}{k} \right)^n \right] \\ &= \left[1^m - 2^m \right] \left(\frac{1}{k} \right)^n + \left[2^m - 3^m \right] \left(\frac{2}{k} \right)^n + \ldots + \left[(k-1)^m - k^m \right] \left(\frac{k-1}{k} \right)^n + k^m \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[i^m - (i+1)^m \right] \left(\frac{i}{k} \right)^n + k^m \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Özel olarak $m = 1$ ve $m = 2$ alınırsa, sırasıyla,

$$\mu_{n:n} = E(X_{n:n}) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1) \left(\frac{i}{k} \right)^n + k \tag{2.44}$$

$$\mu_{n:n}^{(2)} = E(X_{n:n}^{2}) = \sum_{i=1}^{k-1} (-2i-1) \left(\frac{i}{k} \right)^n + k^2 \tag{2.45}$$

elde edilir [Turan, 2008].

Teorem 2.8.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip tesadüfi değişkenler ve $X_{1:n}$ bu tesadüfi değişkenlere karşılık gelen *n* inci sıra istatistiği olsun. $X_{1:n}$' nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_{X_{1:n}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \left[e^{it} - e^{(i-1)t} \right] \left(\frac{k+1-i}{k} \right)^n \tag{2.46}$$

dir.

İspat.

Moment çıkaran fonksiyonun tanımında $f_{1:n}(x)$' in (2.40)' daki ifadesi yazılırsa,

$$M_{X_{1:n}}(t) = \sum_{x=1}^{k} e^{tx}\left[\left(\frac{k+1-x}{k}\right)^n - \left(\frac{k-x}{k}\right)^n\right]$$

$$= e^t\left[\left(\frac{k}{k}\right)^n - \left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right] + e^{2t}\left[\left(\frac{k-1}{k}\right)^n - \left(\frac{k-2}{k}\right)^n\right] + \ldots + e^{kt}\left[\left(\frac{1}{k}\right)^n\right]$$

$$= e^t\left[\left(\frac{k}{k}\right)^n\right] + \left[e^{2t} - e^t\right]\left(\frac{k-1}{k}\right)^n + \ldots + \left[e^{kt} - e^{(k-1)t}\right]\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[e^{it} - e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.9.

$M_{1:n}^{(s)}(t)$, kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin minimumunun moment çıkaran fonksiyonunun *s* inci türevini göstermek üzere,

$$M_{1:n}^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{tx}\left[i^s e^{it} - (i-1)^s e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n \qquad (2.47)$$

dir.

İspat.

Teorem 2.8' de $M_{1:n}(t)$' nin ardışık türevleri alınırsa,

$$M_{X_{1:n}}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{k}\left[ie^{it} - (i-1)e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

$$M_{X_{1:n}}^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{k}\left[i^2e^{it} - (i-1)^2e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

$$M_{X_{1:n}}^{(3)}(t) = \sum_{i=1}^{k}\left[i^3e^{it} - (i-1)^3e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

.

.

.

$$M_{1:n}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{k}e^{tx}\left[i^{s}e^{it}-(i-1)^{s}e^{(i-1)t}\right]\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^{n}$$

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.10.

$X_1, X_2, ..., X_n$ kesikli düzgün dağılıma sahip tesadüfi değişkenler ve $X_{n:n}$ bu tesadüfi değişkenlere karşılık gelen *n* inci sıra istatistiği olsun. $X_{n:n}$' nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_{X_{n:n}}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[e^{it}-e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^{n}+e^{kt} \tag{2.48}$$

dir.

İspat.

Moment çıkaran fonksiyonun tanımında $f_{n:n}(x)$' in (2.41)' deki ifadesi yazılırsa,

$$M_{X_{n:n}}(t)=\sum_{x=1}^{k}e^{tx}\left[\left(\frac{x}{k}\right)^{n}-\left(\frac{x-1}{k}\right)^{n}\right]$$

$$=e^{t}\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{n}\right]+e^{2t}\left[\left(\frac{2}{k}\right)^{n}-\left(\frac{1}{k}\right)^{n}\right]+...+e^{kt}\left[\left(\frac{k}{k}\right)^{n}-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\right]$$

$$=\left[e^{t}-e^{2t}\right]\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{n}\right]+\left[e^{2t}-e^{3t}\right]\left(\frac{2}{k}\right)^{n}+...+\left[e^{(k-1)t}-e^{kt}\right]\left(\frac{1}{k}\right)^{n}+e^{kt}$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}[e^{it}-e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^{n}+e^{kt}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.11.

$M_{n:n}^{(s)}(t)$ kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin maksimumunun moment çıkaran fonksiyonunun *s* inci türevini göstermek üzere,

$$M_{n:n}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[i^s e^{it}-(i+1)^s e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^n+k^s e^{kt} \tag{2.49}$$

dir.

İspat.

Teorem 2.10' da $M_{n:n}(t)$ ' nin ardışık türevleri alınırsa,

$$M_{X_{n:n}}^{(1)}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[ie^{it}-(i+1)e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^n+ke^{kt}$$

$$M_{X_{n:n}}^{(2)}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[i^2e^{it}-(i+1)^2e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^n+k^2e^{kt}$$

$$M_{X_{n:n}}^{(3)}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[i^3e^{it}-(i+1)^3e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^n+k^3e^{kt}$$

.

.

.

$$M_{n:n}^{(s)}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}[i^s e^{it}-(i+1)^s e^{(i+1)t}]\left(\frac{i}{k}\right)^n+k^s e^{kt}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyanslarının cebirsel olarak hesaplanabilmesi için

$$s_n(k)=1^n+2^n+...+k^n=\sum_{i=1}^{k}i^n \tag{2.50}$$

ifadesi kullanılabilir. Bu toplamın $n=10$' a kadar cebirsel ifadelerini Zwillinger, 1996' da bir tablo halinde vermiştir.

(2.50) toplamı kullanılarak, $n=10$ örnek boyutuna kadar, kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları cebirsel olarak elde edilmiştir [Turan, 2008]. Ayrıca $k=20(20)80(120)200$ ve $n=1(1)k$ için kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları Tablo 3.1 ve Tablo 3.2' de verilmiştir.

Tablo 3.1. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek minimumunun beklenen değer ve varyansı

k	n	$\mu_{1:n}$	$\sigma^2_{1:n}$	k	n	$\mu_{1:n}$	$\sigma^2_{1:n}$
20	1	10.5000	33.2500	200	1	100.5000	3.3333
	2	7.1750	22.1944		2	67.1675	2.2222
	3	5.5125	14.9583		3	50.5012	1.5000
	4	4.5167	10.6167		4	40.5017	1.0666
	5	3.8542	7.8810		5	33.8354	0.7936
	6	3.3821	6.0630		6	29.0739	0.6122
	7	3.0291	4.7988		7	25.5029	0.4860
	8	2.7555	3.8861		8	22.7256	0.3950
	9	2.5374	3.2065		9	20.5037	0.3272
	10	2.3597	2.6872		10	18.6860	0.2754
	11	2.2123	2.2817		11	17.1712	0.2350
	12	2.0882	1.9592		12	15.8896	0.2028
	13	1.9824	1.6984		13	14.7911	0.1768
	14	1.8913	1.4847		14	13.8392	0.1555
	15	1.8120	1.3074		15	13.0062	0.1378
	16	1.7426	1.1587		16	12.2714	0.1230
	17	1.6812	1.0327		17	11.6182	0.1104
	18	1.6268	0.9252		18	11.0338	0.0996
	19	1.5782	0.8326		19	10.5079	0.0904
	20	1.5345	0.7523		20	10.0321	0.0824
40	1	20.5000	133.2500		21	9.5997	0.0754
	2	13.8375	88.8611		22	9.2048	0.0692
	3	10.5063	59.9583		23	8.8429	0.0638
	4	8.5083	42.6167		24	8.5100	0.0590
	5	7.1771	31.6905		25	8.2027	0.0547
	6	6.2268	24.4303		26	7.9182	0.0509
	7	5.5146	19.3820		27	7.6541	0.0474
	8	4.9611	15.7377		28	7.4082	0.0443
	9	4.5187	13.0244		29	7.1787	0.0415
	10	4.1572	10.9513		30	6.9641	0.0389
	11	3.8562	9.3325		31	6.7629	0.0366
	12	3.6019	8.0447		32	6.5739	0.0345
	13	3.3842	7.0037		33	6.3961	0.0325
	14	3.1958	6.1503		34	6.2284	0.0308
	15	3.0312	5.4422		35	6.0701	0.0291
	16	2.8862	4.8481		36	5.9204	0.0276
	17	2.7576	4.3449		37	5.7786	0.0262
	18	2.6427	3.9150		38	5.6440	0.0249
	19	2.5395	3.5448		39	5.5162	0.0237
	20	2.4463	3.2237		40	5.3947	0.0226
	21	2.3618	2.9435		41	5.2790	0.0215
	22	2.2848	2.6974		42	5.1687	0.0206
	23	2.2144	2.4803		43	5.0634	0.0197
	24	2.1497	2.2876		44	4.9628	0.0188
	25	2.0902	2.1159		45	4.8666	0.0180
	26	2.0353	1.9623		46	4.7745	0.0173
	27	1.9844	1.8242		47	4.6862	0.0166
	28	1.9372	1.6998		48	4.6016	0.0159

	29	1.8933	1.5871	49	4.5204	0.0153
	30	1.8523	1.4849	50	4.4424	0.0147
	31	1.8140	1.3918	51	4.3674	0.0142
	32	1.7781	1.3068	52	4.2952	0.0136
	33	1.7445	1.2290	53	4.2258	0.0131
	34	1.7129	1.1575	54	4.1588	0.0127
	35	1.6832	1.0918	55	4.0943	0.0122
	36	1.6552	1.0313	56	4.0321	0.0118
	37	1.6287	0.9753	57	3.9720	0.0114
	38	1.6037	0.9235	58	3.9140	0.0110
	39	1.5801	0.8754	59	3.8579	0.0107
	40	1.5577	0.8308	60	3.8037	0.0103
60	1	30.5000	299.9167	61	3.7512	0.0100
	2	20.5028	199.9722	62	3.7004	0.0097
	3	15.5042	134.9583	63	3.6512	0.0094
	4	12.5056	95.9500	64	3.6035	0.0091
	5	10.5069	71.3730	65	3.5573	0.0088
	6	9.0798	55.0425	66	3.5125	0.0086
	7	8.0097	43.6875	67	3.4690	0.0083
	8	7.1778	35.4908	68	3.4268	0.0081
	9	6.5125	29.3879	69	3.3858	0.0079
	10	5.9684	24.7253	70	3.3460	0.0076
	11	5.5153	21.0845	71	3.3073	0.0074
	12	5.1320	18.1883	72	3.2697	0.0072
	13	4.8038	15.8471	73	3.2331	0.0070
	14	4.5194	13.9279	74	3.1974	0.0068
	15	4.2708	12.3354	75	3.1628	0.0067
	16	4.0516	10.9993	76	3.1290	0.0065
	17	3.8569	9.8677	77	3.0961	0.0063
	18	3.6829	8.9008	78	3.0641	0.0062
	19	3.5264	8.0682	79	3.0328	0.0060
	20	3.3849	7.3461	80	3.0024	0.0059
	21	3.2564	6.7159	81	2.9727	0.0057
	22	3.1392	6.1625	82	2.9437	0.0056
	23	3.0319	5.6741	83	2.9154	0.0055
	24	2.9333	5.2408	84	2.8878	0.0053
	25	2.8423	4.8546	85	2.8609	0.0052
	26	2.7582	4.5090	86	2.8346	0.0051
	27	2.6802	4.1985	87	2.8089	0.0050
	28	2.6077	3.9184	88	2.7837	0.0049
	29	2.5401	3.6650	89	2.7592	0.0047
	30	2.4770	3.4349	90	2.7352	0.0046
	31	2.4179	3.2254	91	2.7117	0.0045
	32	2.3624	3.0341	92	2.6887	0.0044
	33	2.3103	2.8589	93	2.6663	0.0044
	34	2.2613	2.6981	94	2.6443	0.0043
	35	2.2150	2.5501	95	2.6228	0.0042
	36	2.1713	2.4137	96	2.6017	0.0041
	37	2.1300	2.2877	97	2.5811	0.0040
	38	2.0909	2.1709	98	2.5609	0.0039
	39	2.0538	2.0626	99	2.5411	0.0038
	40	2.0186	1.9620	100	2.5217	0.0038

	41	1.9851	1.8682	101	2.5027	0.0037
	42	1.9532	1.7808	102	2.4841	0.0036
	43	1.9229	1.6992	103	2.4658	0.0035
	44	1.8939	1.6228	104	2.4479	0.0035
	45	1.8663	1.5513	105	2.4303	0.0034
	46	1.8399	1.4842	106	2.4131	0.0033
	47	1.8147	1.4211	107	2.3962	0.0033
	48	1.7905	1.3618	108	2.3797	0.0032
	49	1.7674	1.3060	109	2.3634	0.0032
	50	1.7452	1.2534	110	2.3474	0.0031
	51	1.7239	1.2037	111	2.3317	0.0031
	52	1.7035	1.1567	112	2.3163	0.0030
	53	1.6838	1.1123	113	2.3012	0.0029
	54	1.6650	1.0703	114	2.2864	0.0029
	55	1.6468	1.0304	115	2.2718	0.0028
	56	1.6294	0.9927	116	2.2575	0.0028
	57	1.6125	0.9568	117	2.2434	0.0027
	58	1.5963	0.9227	118	2.2296	0.0027
	59	1.5807	0.8903	119	2.2160	0.0027
	60	1.5656	0.8594	120	2.2026	0.0026
80	1	40.5000	533.2500	121	2.1895	0.0026
	2	27.1687	355.5278	122	2.1765	0.0025
	3	20.5031	239.9583	123	2.1638	0.0025
	4	16.5042	170.6167	124	2.1513	0.0024
	5	13.8385	126.9286	125	2.1391	0.0024
	6	11.9348	97.8997	126	2.1270	0.0024
	7	10.5073	77.7153	127	2.1151	0.0023
	8	9.3972	63.1451	128	2.1034	0.0023
	9	8.5094	52.2970	129	2.0919	0.0023
	10	7.7831	44.0090	130	2.0805	0.0022
	11	7.1781	37.5374	131	2.0694	0.0022
	12	6.6663	32.3894	132	2.0584	0.0021
	13	6.2278	28.2280	133	2.0476	0.0021
	14	5.8479	24.8168	134	2.0369	0.0021
	15	5.5156	21.9860	135	2.0264	0.0021
	16	5.2225	19.6113	136	2.0161	0.0020
	17	4.9621	17.5999	137	2.0059	0.0020
	18	4.7293	15.8813	138	1.9959	0.0020
	19	4.5198	14.4014	139	1.9860	0.0019
	20	4.3303	13.1180	140	1.9763	0.0019
	21	4.1582	11.9978	141	1.9667	0.0019
	22	4.0012	11.0143	142	1.9573	0.0018
	23	3.8573	10.1461	143	1.9480	0.0018
	24	3.7250	9.3759	144	1.9388	0.0018
	25	3.6029	8.6896	145	1.9298	0.0018
	26	3.4900	8.0753	146	1.9209	0.0017
	27	3.3852	7.5233	147	1.9121	0.0017
	28	3.2877	7.0255	148	1.9034	0.0017
	29	3.1968	6.5750	149	1.8949	0.0017
	30	3.1118	6.1660	150	1.8864	0.0017
	31	3.0322	5.7936	151	1.8781	0.0016
	32	2.9575	5.4535	152	1.8699	0.0016

33	2.8872	5.1421	153	1.8618	0.0016
34	2.8210	4.8563	154	1.8539	0.0016
35	2.7586	4.5933	155	1.8460	0.0015
36	2.6995	4.3508	156	1.8382	0.0015
37	2.6437	4.1267	157	1.8306	0.0015
38	2.5907	3.9191	158	1.8230	0.0015
39	2.5405	3.7266	159	1.8156	0.0015
40	2.4927	3.5476	160	1.8082	0.0014
41	2.4473	3.3810	161	1.8010	0.0014
42	2.4040	3.2256	162	1.7938	0.0014
43	2.3628	3.0804	163	1.7867	0.0014
44	2.3234	2.9446	164	1.7797	0.0014
45	2.2858	2.8173	165	1.7728	0.0014
46	2.2498	2.6980	166	1.7660	0.0013
47	2.2154	2.5858	167	1.7593	0.0013
48	2.1824	2.4803	168	1.7526	0.0013
49	2.1507	2.3810	169	1.7461	0.0013
50	2.1204	2.2873	170	1.7396	0.0013
51	2.0913	2.1989	171	1.7332	0.0013
52	2.0632	2.1154	172	1.7269	0.0012
53	2.0363	2.0364	173	1.7206	0.0012
54	2.0104	1.9615	174	1.7145	0.0012
55	1.9854	1.8906	175	1.7084	0.0012
56	1.9614	1.8233	176	1.7024	0.0012
57	1.9382	1.7595	177	1.6964	0.0012
58	1.9159	1.6987	178	1.6905	0.0012
59	1.8943	1.6410	179	1.6847	0.0011
60	1.8734	1.5860	180	1.6790	0.0011
61	1.8533	1.5336	181	1.6733	0.0011
62	1.8338	1.4837	182	1.6677	0.0011
63	1.8150	1.4360	183	1.6622	0.0011
64	1.7968	1.3905	184	1.6567	0.0011
65	1.7791	1.3471	185	1.6513	0.0011
66	1.7620	1.3055	186	1.6459	0.0011
67	1.7455	1.2657	187	1.6407	0.0010
68	1.7295	1.2277	188	1.6354	0.0010
69	1.7139	1.1912	189	1.6303	0.0010
70	1.6988	1.1562	190	1.6251	0.0010
71	1.6842	1.1227	191	1.6201	0.0010
72	1.6699	1.0905	192	1.6151	0.0010
73	1.6561	1.0596	193	1.6101	0.0010
74	1.6427	1.0300	194	1.6053	0.0010
75	1.6297	1.0014	195	1.6004	0.0010
76	1.6170	0.9740	196	1.5956	0.0009
77	1.6047	0.9476	197	1.5909	0.0009
78	1.5927	0.9222	198	1.5862	0.0009
79	1.5810	0.8978	199	1.5816	0.0009
80	1.5697	0.8742	200	1.5770	0.0009

Tablo 3.2. Kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerin örnek maksimumunun beklenen değer ve varyansı

k	n	$\mu_{n:n}$	$\sigma^2_{n:n}$	k	n	$\mu_{n:n}$	$\sigma^2_{n:n}$
20	1	10.5000	33.2500	200	1	100.5000	3.3333
	2	13.8250	22.1944		2	133.8325	2.2222
	3	15.4875	14.9583		3	150.4988	1.5000
	4	16.4833	10.6167		4	160.4983	1.0666
	5	17.1458	7.8810		5	167.1646	0.7936
	6	17.6179	6.0630		6	171.9261	0.6122
	7	17.9709	4.7988		7	175.4971	0.4860
	8	18.2445	3.8861		8	178.2744	0.3950
	9	18.4626	3.2065		9	180.4963	0.3272
	10	18.6403	2.6872		10	182.3140	0.2754
	11	18.7877	2.2817		11	183.8288	0.2350
	12	18.9118	1.9592		12	185.1104	0.2028
	13	19.0176	1.6984		13	186.2089	0.1768
	14	19.1087	1.4847		14	187.1608	0.1555
	15	19.1880	1.3074		15	187.9938	0.1378
	16	19.2574	1.1587		16	188.7286	0.1230
	17	19.3188	1.0327		17	189.3818	0.1104
	18	19.3732	0.9252		18	189.9662	0.0996
	19	19.4218	0.8326		19	190.4921	0.0904
	20	19.4655	0.7523		20	190.9679	0.0824
40	1	20.5000	133.2500		21	191.4003	0.0754
	2	27.1625	88.8611		22	191.7952	0.0692
	3	30.4937	59.9583		23	192.1571	0.0638
	4	32.4917	42.6167		24	192.4900	0.0590
	5	33.8229	31.6905		25	192.7973	0.0547
	6	34.7732	24.4303		26	193.0818	0.0509
	7	35.4854	19.3820		27	193.3459	0.0474
	8	36.0389	15.7377		28	193.5918	0.0443
	9	36.4813	13.0244		29	193.8213	0.0415
	10	36.8428	10.9513		30	194.0359	0.0389
	11	37.1438	9.3325		31	194.2371	0.0366
	12	37.3981	8.0447		32	194.4261	0.0345
	13	37.6158	7.0037		33	194.6039	0.0325
	14	37.8042	6.1503		34	194.7716	0.0308
	15	37.9688	5.4422		35	194.9299	0.0291
	16	38.1138	4.8481		36	195.0796	0.0276
	17	38.2424	4.3449		37	195.2214	0.0262
	18	38.3573	3.9150		38	195.3560	0.0249
	19	38.4605	3.5448		39	195.4838	0.0237
	20	38.5537	3.2237		40	195.6053	0.0226
	21	38.6382	2.9435		41	195.7210	0.0215
	22	38.7152	2.6974		42	195.8313	0.0206
	23	38.7856	2.4803		43	195.9366	0.0197
	24	38.8503	2.2876		44	196.0372	0.0188
	25	38.9098	2.1159		45	196.1334	0.0180
	26	38.9647	1.9623		46	196.2255	0.0173
	27	39.0156	1.8242		47	196.3138	0.0166
	28	39.0628	1.6998		48	196.3984	0.0159

	29	39.1067	1.5871	49	196.4796	0.0153
	30	39.1477	1.4849	50	196.5576	0.0147
	31	39.1860	1.3918	51	196.6326	0.0142
	32	39.2219	1.3068	52	196.7048	0.0136
	33	39.2555	1.2290	53	196.7742	0.0131
	34	39.2871	1.1575	54	196.8412	0.0127
	35	39.3168	1.0918	55	196.9057	0.0122
	36	39.3448	1.0313	56	196.9679	0.0118
	37	39.3713	0.9753	57	197.0280	0.0114
	38	39.3963	0.9235	58	197.0860	0.0110
	39	39.4199	0.8754	59	197.1421	0.0107
	40	39.4423	0.8308	60	197.1963	0.0103
60	1	30.5000	299.9167	61	197.2488	0.0100
	2	40.4972	199.9722	62	197.2996	0.0097
	3	45.4958	134.9583	63	197.3488	0.0094
	4	48.4944	95.9500	64	197.3965	0.0091
	5	50.4931	71.3730	65	197.4427	0.0088
	6	51.9202	55.0425	66	197.4875	0.0086
	7	52.9903	43.6875	67	197.5310	0.0083
	8	53.8222	35.4908	68	197.5732	0.0081
	9	54.4875	29.3879	69	197.6142	0.0079
	10	55.0316	24.7253	70	197.6540	0.0076
	11	55.4847	21.0845	71	197.6927	0.0074
	12	55.8680	18.1883	72	197.7303	0.0072
	13	56.1962	15.8471	73	197.7669	0.0070
	14	56.4806	13.9279	74	197.8026	0.0068
	15	56.7292	12.3354	75	197.8372	0.0067
	16	56.9484	10.9993	76	197.8710	0.0065
	17	57.1431	9.8677	77	197.9039	0.0063
	18	57.3171	8.9008	78	197.9359	0.0062
	19	57.4736	8.0682	79	197.9672	0.0060
	20	57.6151	7.3461	80	197.9976	0.0059
	21	57.7436	6.7159	81	198.0273	0.0057
	22	57.8608	6.1625	82	198.0563	0.0056
	23	57.9681	5.6741	83	198.0846	0.0055
	24	58.0667	5.2408	84	198.1122	0.0053
	25	58.1577	4.8546	85	198.1391	0.0052
	26	58.2418	4.5090	86	198.1654	0.0051
	27	58.3198	4.1985	87	198.1911	0.0050
	28	58.3923	3.9184	88	198.2163	0.0049
	29	58.4599	3.6650	89	198.2408	0.0047
	30	58.5230	3.4349	90	198.2648	0.0046
	31	58.5821	3.2254	91	198.2883	0.0045
	32	58.6376	3.0341	92	198.3113	0.0044
	33	58.6897	2.8589	93	198.3337	0.0044
	34	58.7387	2.6981	94	198.3557	0.0043
	35	58.7850	2.5501	95	198.3772	0.0042
	36	58.8287	2.4137	96	198.3983	0.0041
	37	58.8700	2.2877	97	198.4189	0.0040
	38	58.9091	2.1709	98	198.4391	0.0039
	39	58.9462	2.0626	99	198.4589	0.0038
	40	58.9814	1.9620	100	198.4783	0.0038

	41	59.0149	1.8682	101	198.4973	0.0037
	42	59.0468	1.7808	102	198.5159	0.0036
	43	59.0771	1.6992	103	198.5342	0.0035
	44	59.1061	1.6228	104	198.5521	0.0035
	45	59.1337	1.5513	105	198.5697	0.0034
	46	59.1601	1.4842	106	198.5869	0.0033
	47	59.1853	1.4211	107	198.6038	0.0033
	48	59.2095	1.3618	108	198.6203	0.0032
	49	59.2326	1.3060	109	198.6366	0.0032
	50	59.2548	1.2534	110	198.6526	0.0031
	51	59.2761	1.2037	111	198.6683	0.0031
	52	59.2965	1.1567	112	198.6837	0.0030
	53	59.3162	1.1123	113	198.6988	0.0029
	54	59.3350	1.0703	114	198.7136	0.0029
	55	59.3532	1.0304	115	198.7282	0.0028
	56	59.3706	0.9927	116	198.7425	0.0028
	57	59.3875	0.9568	117	198.7566	0.0027
	58	59.4037	0.9227	118	198.7704	0.0027
	59	59.4193	0.8903	119	198.7840	0.0027
	60	59.4344	0.8594	120	198.7974	0.0026
80	1	40.5000	533.2500	121	198.8105	0.0026
	2	53.8312	355.5278	122	198.8235	0.0025
	3	60.4969	239.9583	123	198.8362	0.0025
	4	64.4958	170.6167	124	198.8487	0.0024
	5	67.1615	126.9286	125	198.8609	0.0024
	6	69.0652	97.8997	126	198.8730	0.0024
	7	70.4927	77.7153	127	198.8849	0.0023
	8	71.6028	63.1451	128	198.8966	0.0023
	9	72.4906	52.2970	129	198.9081	0.0023
	10	73.2169	44.0090	130	198.9195	0.0022
	11	73.8219	37.5374	131	198.9306	0.0022
	12	74.3337	32.3894	132	198.9416	0.0021
	13	74.7722	28.2280	133	198.9524	0.0021
	14	75.1521	24.8168	134	198.9631	0.0021
	15	75.4844	21.9860	135	198.9736	0.0021
	16	75.7775	19.6113	136	198.9839	0.0020
	17	76.0379	17.5999	137	198.9941	0.0020
	18	76.2707	15.8813	138	199.0041	0.0020
	19	76.4802	14.4014	139	199.0140	0.0019
	20	76.6697	13.1180	140	199.0237	0.0019
	21	76.8418	11.9978	141	199.0333	0.0019
	22	76.9988	11.0143	142	199.0427	0.0018
	23	77.1427	10.1461	143	199.0520	0.0018
	24	77.2750	9.3759	144	199.0612	0.0018
	25	77.3971	8.6896	145	199.0702	0.0018
	26	77.5100	8.0753	146	199.0791	0.0017
	27	77.6148	7.5233	147	199.0879	0.0017
	28	77.7123	7.0255	148	199.0966	0.0017
	29	77.8032	6.5750	149	199.1051	0.0017
	30	77.8882	6.1660	150	199.1136	0.0017
	31	77.9678	5.7936	151	199.1219	0.0016
	32	78.0425	5.4535	152	199.1301	0.0016

33	78.1128	5.1421	153	199.1382	0.0016
34	78.1790	4.8563	154	199.1461	0.0016
35	78.2414	4.5933	155	199.1540	0.0015
36	78.3005	4.3508	156	199.1618	0.0015
37	78.3563	4.1267	157	199.1694	0.0015
38	78.4093	3.9191	158	199.1770	0.0015
39	78.4595	3.7266	159	199.1844	0.0015
40	78.5073	3.5476	160	199.1918	0.0014
41	78.5527	3.3810	161	199.1990	0.0014
42	78.5960	3.2256	162	199.2062	0.0014
43	78.6372	3.0804	163	199.2133	0.0014
44	78.6766	2.9446	164	199.2203	0.0014
45	78.7142	2.8173	165	199.2272	0.0014
46	78.7502	2.6980	166	199.2340	0.0013
47	78.7846	2.5858	167	199.2407	0.0013
48	78.8176	2.4803	168	199.2474	0.0013
49	78.8493	2.3810	169	199.2539	0.0013
50	78.8796	2.2873	170	199.2604	0.0013
51	78.9087	2.1989	171	199.2668	0.0013
52	78.9368	2.1154	172	199.2731	0.0012
53	78.9637	2.0364	173	199.2794	0.0012
54	78.9896	1.9615	174	199.2855	0.0012
55	79.0146	1.8906	175	199.2916	0.0012
56	79.0386	1.8233	176	199.2976	0.0012
57	79.0618	1.7595	177	199.3036	0.0012
58	79.0841	1.6987	178	199.3095	0.0012
59	79.1057	1.6410	179	199.3153	0.0011
60	79.1266	1.5860	180	199.3210	0.0011
61	79.1467	1.5336	181	199.3267	0.0011
62	79.1662	1.4837	182	199.3323	0.0011
63	79.1850	1.4360	183	199.3378	0.0011
64	79.2032	1.3905	184	199.3433	0.0011
65	79.2209	1.3471	185	199.3487	0.0011
66	79.2380	1.3055	186	199.3541	0.0011
67	79.2545	1.2657	187	199.3593	0.0010
68	79.2705	1.2277	188	199.3646	0.0010
69	79.2861	1.1912	189	199.3697	0.0010
70	79.3012	1.1562	190	199.3749	0.0010
71	79.3158	1.1227	191	199.3799	0.0010
72	79.3301	1.0905	192	199.3849	0.0010
73	79.3439	1.0596	193	199.3899	0.0010
74	79.3573	1.0300	194	199.3947	0.0010
75	79.3703	1.0014	195	199.3996	0.0010
76	79.3830	0.9740	196	199.4044	0.0009
77	79.3953	0.9476	197	199.4091	0.0009
78	79.4073	0.9222	198	199.4138	0.0009
79	79.4190	0.8978	199	199.4184	0.0009
80	79.4303	0.8742	200	199.4230	0.0009

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Teorem 2.5' de tüm kesikli dağılımların *r* inci sıra istatistiğinin *m* inci momentinde $m=1$ ve $m=2$, $r=1$ ve $r=n$ alınarak ayrıca kesikli düzgün dağılımın (2.37)' deki ifadesi yazılarak, kesikli düzgün dağılımın örnek ekstremlerinin ilk iki momentini kullanarak $n=10$ örnek hacminin beklenen değer ve varyansının cebirsel ve sayısal sonuçlarını Turan (2008) elde etmiştir.

Teorem 2.5' i kullanarak kesikli düzgün dağılımın örnek ekstremlerinin *m* inci momentlerini elde etmek kolay değildir. Kesikli düzgün dağılımın örnek ekstremlerinin *m* inci momentlerini elde etmek için (2.39)' da ifade edilen $f_{r:n}(x)$' de $r=1$ ve $r=2$ alınarak Teorem 2.6 ve Teorem 2.7 ispat edilmiştir. Teorem 2.6 ve Teorem 2.7' de ifade edilen momentleri elde etmek için Teorem 2.8 ve Teorem 2.10' da ifade edilen moment çıkaran fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca bu moment çıkaran fonksiyonların *s* inci türevlerini ifade eden Teorem 2.9 ve Teorem 2.11 ispat edilmiştir. Teorem 2.9' da kesikli düzgün dağılımda örnek minimumunun momentleri $s=1,2,...,m$ ve $t=0$ alınarak, Teorem 2.11' de örnek minimumunun momentleri $s=1,2,...,m$ ve $t=0$ alınarak elde edilebilir. Dolayısıyla momentler arası ilişkiden varyansları da elde edilebilir. Bununla birlikte momentler arası ilişki kullanılarak çarpıklık katsayıları da hesaplanabilir.

Bu çalışmada, kesikli düzgün dağılımın momentleri için kolay ve pratik bir yaklaşım sunulmuştur. Ayrıca gösterilmiştir ki Matlab programları kullanılarak da $k=20(20)80(120)200$ ve $n=1(1)k$ örnek boyutuna göre kesikli düzgün dağılımdaki sıra istatistiklerinin örnek ekstremlerinin beklenen değer ve varyansları için sayısal sonuçlar Tablo 3.1 ve Tablo 3.2' de ifade edilmiştir.

Gelecekteki çalışmalarda amaç, kesikli düzgün dağılımdaki *r* inci sıra istatistiklerin olasılık kütle fonksiyonunu (*pmf*) ve dolayısıyla momentleri elde edebilmektir.

KAYNAKLAR

[1] Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B., 2001. Ordered Random Variables, *Nova Science Publishers, Inc.,* New York.

[2] Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B., 2005. *Order Statistics: Examples and Exercises*. Nova Science Publishers, Inc., New York.

[3] Arnold, B. C. and Balakrishnan, N., 1989. *Relations, Bounds and Approximations for Order Statistics*. Lecture Notes in Statistics. 53, Springer- Verlag.

[4] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N., 1992. *A First Course in Order Statistics*, John Wiley and Sons, New York.

[5] Balakrishnan, N. and Malik, H. J., 1985. Some General Identities Involving Order Statistics. *Commun. Statist. - Theory Meth.,* **14(2),** 333- 339.

[6] Balakrishnan, N., 1986. Order Statistics from Discrete Distributions. *Commun. Statist. - Theory Meth.,* **15(3),** 657- 675.

[7] Çalik, S. and Güngör, M., 2004. On the Excepted Values of the Sample Maximum of Order Statistics from a Discrete Uuniform Distribution. *Appl. Math. Computation*, **157**, 695-700.

[8] Çalik, S., Güngör, M. and Colak, C., 2010. On the Moments of Order Statistics From Discrete Distribution . *Pak. J. Statist.,* **26(2),** 417-426.

[9] Freund, J. E. and Walpole, R. E., 1962. *Mathematical Statistics*. Prentice- Hall International, Inc., London.

[10] Dasgupta, A., 2010. *Fundamentals of Probability: A First Course*, Springer.

[11] David, H.A., 1981. *Order Statistics*, John Wiley and Sons, Newyork.

[12] David, H. A. and Nagaraja, H. N., 2003. *Order Statistics*. John Wiley and Sons, New York.

[13] Gibbons, J. D., 1971. *Nonparametric Statistical Inference*. Tosho Printing Co., Tokyo.

[14] Hasting, C., Jr., Mosteller, P., Tukey, J. W. And Winsor, C. P., 1947. Low Moments for Small Samples: A Comparative Study of Order Statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, **18**, 413- 426.

[15] Joshi, P. C., 1973. Two Identities Involving Order Statistics. *Biometrica*, **60,** 428- 429.

[16] Joshi, P. C. and Balakrishnan, N., 1982. Recurrence Relations and Identities for the Product Moments of Order Statistics. *Sankhya B*, **44,** 39- 49.

[17] Joshi, P. C. and Shubha, 1991. Some Identities Among Moments of Order Statistics, *Commun. Statist. - Theory Meth.,* **20(9),** 2837- 2843.

[18] Kabe, D. G., 1969. Some Distribution Problems of Order Statistics from Discrete Populations. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21(1),** 551- 556.

[19] Khatri, C. G., 1962. Distribution of Order Statistics for Discrete Case, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **14**, 167-171.

[20] Malik, H. J., Balakrishnan, N. and Ahmed, S. E., 1988. Recurrence Relations and Identities for Moments of Order Statistics, I: Arbitrary Continuous Distribution, *Commun. Statist. - Theory Meth.,* **17(8),** 2623- 2655.

[21] Mark, J. T., Marion, B. B., and Hoffman, D. D., 2010. Natural Selection and Veridical Perceptions. *Journal of Theoretical Biology*, **266**, 504- 515.

[22] Nagaraja, H. N., 1992. Order Statistics from Discrete Distribution (with discussion). *Statistics,* **23,** 189-216.

[23] Salvadori, G., Michele, C., Kottegoda, N. T. and Rosso, R., 2007. *Extremes in Nature: An Approach Using Copulas*. Water Science and Technology, Springer.

[24] Shahbazov, A., 2005. *Olasılık Teorisine Giriş*. Birsen Yayınevi.

[25] Turan, A., 2008. *Kesikli Düzgün Dağılımdaki Sıra İstatistiklerin Örnek Ekstremlerinin Momenti*. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi)

[26] Wilks, S. S., 1942. Statistical Prediction with Special Reference to the Problem of Tolerance Limits. *Annals of Mathematical Statistics,* **13,** 400- 409.

[27] Zwillinger, D., 1996. *Standard Mathematical Tables and Formulae.* Chapman and Hall/CRC Press., Florida.

EKLER

EK 1. Tablo 3.2' deki beklenen değer için Matlab yazılımı

```
top=0;
for n=1:10
for i=1:k
top=top+((k+1-i)/k)^n;
end
a(n)=top;
top=0;
end
disp(a)
```

EK 2. Tablo 3.3 ' deki varyans için Matlab yazılımı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
top2=0;
for n=1:10
for i=1:k
top=top+(2*i-1)*(((k+1-i)/k)^n);
top2=top2+(((k+1-i)/k)^n);
end
top2=(top2)^2;
b(n)=top-top2;
top=0;
top2=0;
end
disp(b)
```

EK 3. Tablo 3.4' deki beklenen değer için Matlab yazılımı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
for n=1:10
for i=1:(k-1)
top=top+((-1)*((i/k)^n));
end
a(n)=k+top;
top=0;
end
disp(a)
```

EK 4. Tablo 3.5' deki varyans için Matlab programı

```
k=input('k yı gir');
top=0;
top2=0;
for n=1:10
for i=1:k-1
top=top+(-2*i-1)*(i/k)^n;
top2=top2+((-1)*((i/k)^n));
end
top=top+k^2;
top2=top2+k;
b(n)=top-top2^2;
top=0;
top2=0;
end
disp(b)
```

ÖZGEÇMİŞ

1983, Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ' da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü' nden mezun olup, 2008 yılında yine aynı üniversitenin İstatistik Bölümü' nde yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nün açmış olduğu doktora programına devam ediyorum. 2007 Aralık döneminde Fırat Üniversitesi, İstatistik Bölümü' nde başlamış olduğum Araştırma Görevliliğini hala sürdürmekteyim.