**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİNİN PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI

**YÜKSEK LİSANS**

**Matematikçi İzzet SÖZÜÇOK**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Aylin BAYRAK**

**KOCAELİ, 2011**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİNİN PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematikçi İzzet SÖZÜÇOK**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.03.2011**

**Tezin Savunulduğu Tarih: 12.05.2011**

| Tez Danışmanı | Üye | Üye |
|---|---|---|
| Yrd.Doç.Dr.M.Aylin BAYRAK | Prof.Dr.Serdal PAMUK | Yrd.Doç.Dr.Selmahan SELİM |
| (.....) | (.....) | (.....) |

**KOCAELİ, 2011**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, reaksiyon-difüzyon ve ısı denklemlerinin çözümüne varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmıştır. Bu tip problemlerin modellenmesi çalışmalarda daha ekonomik sonuçlar vermiştir.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve destekleyen danışmanım, sayın Yrd.Doç. Dr. M.Aylin Bayrak'a (KOÜ., FEN-ED. FAK., MATEMATİK BÖLÜMÜ) ve sayın Yrd.Doç.Dr. Emine Can'a (KOÜ., FEN-ED. FAK., FİZİK BÖLÜMÜ) yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

**İÇİNDEKİLER**

ÖNSÖZ…….. ..... i
İÇİNDEKİLER..... ii
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... iii
TABLOLAR DİZİNİ..... iv
ÖZET……..... ……..v
İNGİLİZCE ÖZET……..... ……..vi
1. GİRİŞ……..... 1
2. VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ
2.1. Giriş .....7
2.2. Varyasyonel İterasyonel Yöntemin Uygulanması .....11
3. VARYASYONEL İTERASYONEL YÖNTEMİN UYGULANMASI
3.1. Problem1.....16
3.2. Problem2.....18
3.3. Problem3.....20
3.3.1. Ters katsayı problemin formülasyonu .....21
4. SAYISAL ÖRNEKLER
4.1. Örnek 1 .....24
4.2. Örnek 2 .....28
4.3. Örnek 3 .....32
4.4. Örnek 4 .....37
4.5. Örnek 5 .....39
4.6. Örnek 6 .....41
4.7. Örnek 7 .....42
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....44
KAYNAKLAR.....45
ÖZGEÇMİŞ.....49

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1: Örnek1 için mutlak hata grafiği……..27
Şekil 4.2: Örnek2 için mutlak hata grafiği……..32
Şekil 4.3: Örnek3 için mutlak hata grafiği……..37
Şekil 4.4: Örnek 4 için x=1 ve t=1 deki w(x,y,t) nin VIM ile
bulunan değer ile gerçek çözümün karşılaştırılması.....38
Şekil 4.5: Örnek 4 için
(a) t=1 de w(x,y,t) nin VIM ile bulunan sonucun grafiği……38
(b) t=1 de w(x,y,t) nin gerçek çözümün grafiği……...38
Şekil 4.6: Örnek 5 için z=1, x=0.5 ve t=0.5 deki w(x,y,t) nin
VIM ile bulunan değer ile gerçek çözümün karşılaştırılması……..40
Şekil 4.7: Örnek 5 için
(a) t=0.5 ve x=0.5 de w(x,y,t) nin VIM ile bulunan sonucun grafiği …….41
(b) ) t=0.5 ve x=0.5 de w(x,y,t) nin gerçek çözümün grafiği ……42

## TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 4.1: Örnek 1 deki problemin VIM ile bulunan yaklaşık değerlerinin gerçek çözüm ile karşılaştırılması……..23
Tablo 4.2: Örnek 3 deki problemin VIM ile bulunan yaklaşık değerlerinin gerçek çözüm ile karşılaştırılması……..27
Tablo 4.3: Örnek 3 deki problemin VIM ile bulunan yaklaşık değerlerinin gerçek çözüm ile karşılaştırılması……..31

# VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİNİN PARABOLİK DENKLEMLERE UYGULANMASI

**İzzet SÖZÜÇOK**

**Anahtar Kelimeler:** Parabolik denklemler, Reaksiyon-Difüzyon Denklemi, Isı Denklemi, Ters problemler, Varyasyonel iterasyon metodu

**Özet:** Parabolik kısmi diferansiyel denklemler, uygulamalı matematik, fizik ve çeşitli mühendislik bilimlerinde önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada , bu denklemlerin çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu method, diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için analitik bir süreçtir ve bir fonksiyoneldeki bir parametrenin optimal değerini bulmak için Lagrange çarpanlarının kullanımına dayanır. Aynı zamanda, bu yöntemde çözüm fonksiyonu bir yakınsak seri formunda elde edilir. Önerilen methodun etkinliğini göstermek için çeşitli örneklerle test edilmiştir.

**APPLICATION OF VARIATIONAL ITERATION METHOD FOR PARABOLIC EQUATIONS**

**İzzet SÖZÜÇOK**

**Keywords:** Cauchy reaction-diffusion problem; Variational Iteration Method; Parabolic Partial Differential Equations; Heat equation; Inverse problems.

**Abstract:** Parabolic partial differential equations with overspecified data play a crucial role in applied mathematics and physics, as they appear in various engineering models. In this work, the variational iteration method is used for solving the equation. It is an analytical procedure for finding solutions of differential equations, is based on the use of Lagrange multipliers for identification of an optimal value of a parameter in a functional. In this method, the solution is calculated in the form of a convergent series with an easily computable component. To show the efficiency of the present method, some interesting examples are presented.

# 1.GİRİŞ

Doğa olaylarının pek çoğu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu tip problemler hiperbolik, parabolik veya eliptik tipte denklemlerdir. Bu çalışmada kullandığımız tüm denklemler ise parabolik biçimindeki denklemlerdir.

Doğadaki bazı fiziksel parametreler (onlara $x$ diyelim) doğrudan deneysel olarak elde edilemez, yalnız onların etkisi olan $y$ fonksiyonu ölçülebilen bir değer olabilir. $x$ ve $y$ arasında fiziksel kurallara dayanan bir ilişki, genel olarak

$$Ax = y \tag{1.1}$$

denklemi ile ifade edilmektedir. Bu denklemde $A$ operatördür; $x$ verildiği zaman $y$'nin hesabı düz problem olarak, $y$ verildiği zaman $x$'in belirlenmesi ise ters problem olarak isimlendirilir.

Bu problemler deneysel olarak ölçülebilen bir niceliği varsayarak deneysel olarak ölçülemeyen ve denklemler ile ifade edilen başka bir niceliğin bulunmasını içerir.

Örneğin; bir nehir suyunun kirliliği hakkında bilgi sahibi olunmak isteniyorsa ve nehri kirleten kaç fabrika var, bunların her biri hangi atığı, ne kadar ve hangi zamanlarda boşaltıyorlar gibi bir dizi parametreyi alarak bir fonksiyon yazabilir ve sonrada bu problemin çözümünü arayabiliriz. Böyle bir problem düz problemdir. Nehirden bir bardak su alıp tahlil ettikten sonra suyu kirletenlerin neler olduğunu belirleyelim. Buna karşın atık boşaltan kaç fabrika var, bunların her biri hangi atığı, ne kadar ve hangi zamanlarda boşaltıyorlar gibi bir dizi parametreyi bilmiyorsak o zaman problemin yapısı hakkında pek bir şey söyleyemeyiz. Geriye doğru problemi kurgulamamız gerekiyor. Böyle bir problem ise ters problemdir.

Başka bir örnek vermek gerekirse, Jeofizikte deprem dalgaları ya da sırf bu amaç için üretilmiş dalgalar yer altının yapısını araştırmak için kullanılır. Bu dalgaların elastik

bileşenleri, yapısına göre yayılacak ve değişik katmanların ara yüzlerinden yansıyacakları için eğer yer altının yapısını biliyor olsaydık yansıyan dalgaların bu karmaşık yapı içerisinde ilerlerken nasıl davranacaklarını öngörebilirdik (düz problem). Oysa yer altının özelliklerini doğrudan ölçemeyeceğimiz için, tam tersini yapıyor ve yansıyan dalgalara bakıp katmanlarda nasıl yol izlediğini çıkarmaya çalışıyoruz (ters problem).

Hadamard'a göre; aşağıdaki koşulları sağlayan probleme iyi formüle edilmiş (well-posed) problem denir.

a-) Problemin çözümü vardır.
b-) Problemin yalnız bir çözümü vardır.
c-) Çözüm giriş verilerine sürekli bağlıdır; yani çözüm kararlıdır.

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmıyorsa problem iyi formüle edilmemiş (ill-posed) problemdir. Ters problem, çoğu zaman çözümün kararsızlığı ile ilişkili olarak doğru formüle edilmemiş (ill-posed) problemdir. Bu problemlerin çözümü için Tikhonov regularizasyon yöntemi, Freidman iterasyon yöntemi ve benzeri gibi özel yöntemler gerekmektedir.

En genel halde parabolik denklemler,

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, a) \tag{1.2}$$

olarak ifade edilir.

Parabolik denklemlerle ısı transferi, difüzyon olayları ve popülasyon dinamiği gibi problemler ifade edilmektedir.

(1.2) denklemindeki $a$ giriş verileri, denklemin katsayıları veya bu denklemin çözümünün var ve tek olması için verilen sınır ve başlangıç koşulları olabilir. (1.2) denkleminin düzgün formüle edilmesi için, yeterli bir teori vardır. $a$ bilinmiyorsa, bu fonksiyonu elde edilmek için ek koşula ihtiyaç vardır.
Parabolik denklemlerin uygulamalarına örnekler olarak

Isı İletimi: $u_t - \vec{\nabla}.(D\vec{\nabla}u) = f(u,v)$

Kimyasal Kinetik: $u_t - D_1 u_{xx} = f_1(u,v)$

$$v_t - D_2 v_{xx} = f_2(u,v)$$

Nüfus Dinamiği: $\frac{dP}{dt} = \alpha P$ veya $\frac{\partial P}{\partial t} - DP_{xx} = f(P)$

verilebilir.

Burada $D$ difüzyon katsayısı ve $f$ kaynak terimdir. Yukarıdaki hallerin hepsinde, standart başlangıç ve sınır koşulları verilir.

Eğer $D$ tek başına $u$' nun bir fonksiyonu ise, bazı hallerde bir tek sınır ölçmesinin yeterli olduğu gösterilebilir. Bu problemlerin her birinde kullanılan yöntemler tamamen farklıdırlar.

Eğer $D = D(t), D = D(x)$ veya $D = D(u)$ bağlılığını biliyorsak, modeli bu bağlantıya göre oluşturabiliriz.

Bir ilk yaklaşım için D' ye ait bir açılımda ilk birkaç terime karşılık gelmek üzere

$$D(x,t,u) \approx D_1(x) + D_2(u) + D_3(t) \tag{1.3}$$

düşünülebilir. Eğer terimlerden biri diğerlerinden üstün ise, bir ön bağıntı elde edebiliriz ve mümkün şekilde ana bağlılığın biçimini sabit tuttuktan sonra diğer terimleri yeniden elde edebiliriz.

Fiziksel süreci ifade eden matematiksel modeldeki değişmeyen terimler ihmal edilirler. Basitleştirilen modelin doğruluğu ancak deney yapma ile veya veriye uygun yaparak test edilebilir. Belirli parametre bölgesinde, basitleştirilen model uygun olabilir, ama geçerlilik limitleri genişletildiğinde, söz konusu sürece dönülmelidir ve model yeniden ele alınmalıdır [1-15].

Genelde, katsayılar fiziksel önemi olan ölçümlemeleri ve parametreleri (örneğin, genlikleri, frekansları) yansıtırlar. Sadece, bir (veya mümkün olabilen birkaç) parametrenin değiştiği deneylerin kurulmasına çalışılır ve tekrarlanan gözlem ile

bilinmeyen katsayıların bağlılık biçimini yeniden elde etmek gerekir. Maalesef; fiziksel kanunları ifade eden çoğu denklem gerçekte lineer olmayan denklemdir.

Örneğin; nüfus dinamiği ile ilgili klasik problemi göz önüne alalım:
$\lambda$ sabit bir çoğalma hızı ise

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \tag{1.4}$$

çoğalma kanununa götürür. Daha akla uygun bir model [17-20], kısıtlı çoğalmaya yol açan

$$\frac{du}{dt} = \lambda(u - \alpha u^2) = \lambda(1 - \alpha u)u = (\lambda - \alpha\lambda u)u$$

mantıksal denklemdir. Gerçekte, nüfus

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

formlu daha karmaşık bir çoğalma kanununa sahip olabilir.
Eğer bir $t_1 < t < t_2$ zaman aralığı üzerinde bu adi diferansiyel denklemin $u$ çözümünü kontrollü izleyebilirsek, $f$'i elde edebiliriz. Örneğin $t_1 < t < t_2$ aralığında

$u(t) = h(t)$ ise,

$$\frac{dh}{dt} = f(h(t))$$

elde ederiz ve buradan

$$f(\xi) = \frac{dh}{dt}(h^{-1}(\xi))$$

ifade edilebilir. Bu gözlem, zaman bağlılığı ek koşulunun verildiği sınır yakınında uzay bağlılığından çok üstün olduğu, yani $|u_{xx}(x_0,t)| << |u_t(x_0,t)|$ olduğu, parabolik halde yakınsama sonuçlarının çoğuna temel teşkil eder [17-20].

Noor ve Mohyud-Din $[21-24]$ beşinci ve dördüncü dereceden sınır değer problemlerinin çözümü ve dördüncü dereceden kesirli kuvvetli integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için varyasyonel tabanlı bir çözüm yöntemini çalışmışlardır. Aynı alanda yine Xu [25] lineer veya lineer olmayan dördüncü dereceden sınır değer problemleri için Varyasyonel İterasyon Metodunu çalışmıştır. Ayrıca Syam ve Siyyam [26] dördüncü dereceden Sturm-Liouville tipindeki problemlerin öz değerlerinin hesaplanmasında Varyasyonel İterasyon Metodunu kullanmıştır. Diğer taraftan Lu [27] Varyasyonel İterasyon yöntemini kullanarak iki noktalı sınır değer problemlerinin çözümüne örnekler vermiştir. Tatari and Dehghan [28] lineer olmayan diferansiyel denklemler için kullanılan Varyasyonel iterasyon Metodunun kısmi türevli denklemlerin çözümünün bulunmasına örnekler vermiştir[29,30].

Ters katsayı problemler ise 1955 yılında Lehner ve Wing, 1957 yılında Bykhovsky, 1959-1960 yıllarında Lax ve Phillips, 1961 yılında Sobolevsky, 1962 yılında B.F. Jones, Kato ve Fujita tarafından ele alınmıştır. Daha sonra J.R. Cannon ve P.C. DuChateau da dahil çok sayıda bilim adamı tarafından araştırılmış ve bu konuda yüzlerce yayınlanmış makaleler vardır [6,7].

Bu tezin amacı kısmı diferansiyel denklemlerinde klasik ve ters parabolik problemlerin çözümlerini Varyasyonel İterasyon Metodu ile analitik çözümlerini ve analitik yaklaşımlarla yaklaşık değerlerini bulmaktır.

Tezin yapısı aşağıdaki şekildedir:

2. bölümde, son zamanlarda problemlerin çözümünde sık kullanılan VIM (Varyasyonel İterasyon Yöntemi) açıklanarak; yöntem ile ilgili gerekli teorik bilgiler verilmiştir.

3. bölümde, reaksiyon-difüzyon denklemi ile ters ısı problemi tanımlanarak, problemin çözümü için uygulanan varyasyonel iterasyon yöntemi (variational

iteration method) ele alınmış bu çözüm metotlarının uygulanması hakkında gerekli açıklamalara yer verilmiştir.

4. bölümde, ele alınan problemle ilgili sayısal örnekler verilerek, çözüme ilişkin sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

5. bölümde, ele aldığımız problemin sonuçları hakkında açıklamalara yer verilmiştir.

.

# 2. VARYASYONEL İTERASYON METODU

## 2.1 Giriş

Varyasyonel iterasyon yöntemi, varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği olup, J.H.He tarafından önerilmiştir[31-34]. Bu yöntemle çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemleri çözülebilmektedir. Yöntemin çeşitli matematiksel uygulamaları [41-46] çalışmalarda yer almaktadır. Mühendislik problemleri de, çeşitli doğrusal ya da doğrusal olmayan, diferansiyel denklem veya denklem sistemleri ile ifade edilen, başlangıç-değer, sınır-değer veya öz değer problemleridir. Coşkun ve Atay varyasyonel iterasyon yöntemini doğrusal olmayan ısı transferi problemlerine uygulamışlardır[47,48]. Daha sonra Atay ve Coşkun varyasyonel iterasyon yöntemini ilk defa elastik stabilite problemlerine uygulamışlardır[35-36].

Üç değişkenli bir $f$ fonksiyonu için ve $(a, y_0)$' dan $(b, y_1)$ e giden bir $y(x)$ fonksiyonunu

$$\int_a^b f[x, y(x), y'(x)]dx \tag{2.1}$$

bir maksimum veya minimum olacak şekilde varsayalım. (2.1) ifadesini maksimum veya minimum yapan $y$ fonksiyonuna stasyoner fonksiyon bulmaya indirgeyecek bir koşul olarak

$y = u(x)$, fonksiyonunu alalım. Yani $u(x)$ fonksiyonunu,

$$\int_a^b f[x, y, y']dx$$

ifadesini maksimize veya minimize eder. $u$ fonksiyonunu bulmak için bir koşul elde etmek isteyelim, böyle bir koşulu geliştirmek için

$$y(x) = u(x) + \varepsilon\mu(x) \tag{2.2}$$

şeklindeki fonksiyonları ele alacağız. Burada $\varepsilon$ sabit ve μ(x), [a,b] aralığında sürekli olan ve

$$\mu(a) = \mu(b) = 0 \qquad \mu \in C_1[a,b] \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayan μ fonksiyonuna kabul edilebilir fonksiyondur denir. Denklem (2.2) de yer alan y(x) fonksiyonu $(a, y_0)$ ve $(b, y_1)$ noktalarından geçer.
Denklem (2.2) denklem (2.1) ifadesinde yerine koyulursa

$$\int_a^b f[x, u(x) + \varepsilon\mu(x),\ u'(x) + \varepsilon\mu'(x)]dx \tag{2.4}$$

elde edilir.
Herhangi bir kabul edilebilir fonksiyon $\mu(x)$ için, $u(x)$ problemin sabit bir çözümü olduğundan bu integral $\varepsilon$ nun bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

$$I(\varepsilon) = \int_a^b f[x, u(x) + \varepsilon\mu(x),\ u'(x) + \varepsilon\mu'(x)]dx \tag{2.5}$$

$u(x)$ problemin bir çözümü olduğundan, $\varepsilon = 0$ iken denklem (2.5), maksimum veya minimum değere sahiptir. I($\varepsilon$) tek değişken olan $\varepsilon$'nun fonksiyonu olduğundan $\varepsilon = 0$ iken $I'(\varepsilon) = 0$ olmasını bekleriz.

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2.6}$$

$\frac{dI}{d\varepsilon}$ değerini hesaplayalım ve $\varepsilon = 0$ değerini yerine koyalım.

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}]dx \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[u(x) + \varepsilon\mu(x)\ ] = \mu(x) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[u'(x) + \varepsilon\mu'(x)\ ] = \mu'(x) \tag{2.10}$$

olduğundan

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)]dx \tag{2.11}$$

$\varepsilon = 0$ yerine koyarsak

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\ \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)]dx \tag{2.12}$$

eşitliğin sağında, ikinci terimin kısmi integrali alınır.

$$\int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)]dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\mu(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y'})\ \mu(x)\ \text{dx} \tag{2.13}$$

$\mu(a) = \mu(b) = 0$ olduğundan

$$\int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)]dx = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y'})\ \mu(x)\ \text{dx} \tag{2.14}$$

denklem (2.14)'ün denklem (2.12) 'de yerine koyulmasıyla

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\ \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x) - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\mu(x)]dx \tag{2.15}$$

elde edilir.

Bu integral şu şekilde yazılabilir.

$$\int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})]\mu(x)dx = 0 \quad (2.16)$$

$\mu, [a, b]$ aralığında türevi sürekli bir fonksiyon olduğundan (2.16) da parantezin içi sıfıra eşit olmalıdır.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad (2.17)$$

Bu denkleme Euler denklemi denir ve aranılan koşul ve denklem (2.1) için stasyoner fonksiyondur.

Denklem (2.1) de görülmekte olan bağıl değişkenler (fonksiyonlar) ve türevlerine bağlı integral ifadelerine fonksiyonel denir. Bir fonksiyonel I, y vektör uzayında R reel sayı alanında bir operatördür

$$I: y \to R \quad (2.18)$$

Denklem (2.2) de görülmekte olan $\varepsilon\mu(x)$ fonksiyonu $u(x)$ konfigurasyonunda bir değişimi ifade eder ve şu şekilde gösterilebilir.

$$\delta u(x) = \varepsilon\mu(x) \quad (2.19)$$

$\delta u$ ifadesine $u(x)$ fonksiyonunun birinci değişimi denir. Bu durumda denklem (2.1) de görülmekte olan fonksiyonun değişimi denklem (2.19)'un yardımıyla şu şekilde gösterilebilir.

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{df}{dy}\partial u + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta u'\right] dx \quad (2.20)$$

Bu denklemde yer alan $\delta u$ ifadesi için

$$\delta(\frac{du}{dx}) = \frac{du}{dx}(\delta u) \quad (2.21)$$

bağıntısı kullanılabilir. Varyasyon (değişimi) gösteren $\delta$ operatörü için bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$$\delta(F_1 \mp F_2) = \delta F_1 \mp \delta F_2 \tag{2.22}$$

$$\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1 \tag{2.23}$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \tag{2.24}$$

$$\delta(F_1)^n = n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \tag{2.25}$$

Fonksiyonelin birinci değişimini gösteren (2.20) deki ifade, denklem (2.21) ve kısmi integral tekniğinden yararlanarak tekrar yazılır ve $\delta I=0$ bağıntısı uygulanırsa ve $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ sınır koşulu ile

$$\int_a^b \left[\frac{df}{dy}\delta u + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta u'\right] dx = \int_a^b \delta u \left[\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0 \tag{2.26}$$

ifadesi elde edilir ve Euler denklemi aynı şekilde buradan da elde edilebilir.

## 2.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Varyasyonel iterasyon yöntemi, J.H.He tarafından geliştirilmiş olup çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabilen ve hassas çözümlere hızlı bir şekilde yakınsayan iteratif bir yöntemdir.

1978 yılında Inokuti ve dig. [37] doğrusal olmayan problemleri çözmek için (özel olarak kuantum mekaniğindeki problemler) genel bir Langrange çarpanı yöntemi önermişlerdir.

Önerilen yöntemin ana özelliği şöyledir: Ele alınan matematik probleminin çözümü başlangıç koşulu olarak kullanılarak, belirli bir noktada daha yüksek hassasiyetle yaklaşık çözüm elde edilebilir [38].

Aşağıdaki genel doğrusal olmayan bir sistemi ele alalım.

$$Lu + Nu = g(x) \tag{2.27}$$

Burada L doğrusal ve N doğrusal olmayan operatörlerdir.
$u_0(x)$' in $Lu = 0$ sisteminin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilebilir.

$$u_{düzeltilmi\ ş}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(\ Lu + Nu - g)dx \tag{2.28}$$

Burada $\lambda$ genel langrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Denklemin sağındaki 2. terim ise düzeltme olarak adlandırılır. He, bu yöntemi aşağıdaki şekilde bir iteratif yönteme dönüştürmüştür [39].

$$u_{n+1}(x_0) = u_0(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda(\ Lu + Nu - g)dx \tag{2.29}$$

Burada $u_0\ (x)$, muhtemel değişkenlerle bir başlangıç koşulu ve $u_n$, $\delta u_n$= 0 koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir $x_0$ için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\ Lu(r) + Nu(r) - g(r))dr \tag{2.30}$$

Denklem (2.30) bir düzeltme fonksiyonelidir. Varyasyonel iterasyon yönteminin çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde nasıl etkin olarak kullanıldığı [49-53] çalışmalarda gösterilmiştir. Doğrusal problemlerde ise Lagrange çarpanı tam olarak tanımlanabildiğinden gerçek çözüm tek bir iterasyonla elde edilebilir.

$$y'' + x^2 y = f(t) \tag{2.31}$$

$$f(t) = Asinxt + Bsinxt \tag{2.32}$$

Bunun düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\ y''_n(s) + x^2 y_n(s) - f(s))ds \tag{2.33}$$

$\delta y(0) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bu düzeltme fonksiyonelini stasyoner hale getirirsek

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda( y''_n(s) + x^2 y_n(s) - f(s))ds \quad (2.34)$$

$$= \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y'_n(s)\,|_{s=t} - \lambda'(s)\delta y_n(t)\,|_{s=t} + \int_0^t (\lambda'' + x^2\lambda)\delta y_n$$

$$= 0$$

aşağıdaki stasyoner koşullar meydana gelir.

$\delta y_n : \lambda''(s) + x^2\lambda(s) = 0$

$\delta y'_n : \lambda(s)|_{s=t} = 0$

$$\delta y_n : 1 - \lambda'(s)|_{s=t} = 0 \quad (2.35)$$

Burada Langrange çarpanı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\lambda = \frac{1}{x} sinx(s-t) \quad (2.36)$$

Sonuç olarak

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \frac{1}{x}\int_0^t sinx(s-t).( y''_n(s) + x^2 y_n(s) - f(s))ds \quad (2.37)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Eğer denklem (2.31) ün homojen çözümünü başlangıç koşulu olarak kullanırsak

$$y_0 = C_1 cosxt + C_2 sinxt \quad (2.38)$$

denklem (2.37) deki iterasyon formülünden

$$y_1(t) = C_1 cosxt + C_2 sinxt - \frac{A}{2x} tcosxt + \frac{B}{x^2-1}(sint + sinxt) \quad (2.39)$$

sonucu denklem (2.31) in genel çözümüdür.

Bununla birlikte eğer düzeltme fonksiyoneline sınırlı varyasyon uygulayacak olursak tam çözüm sadece ardışık iterasyonlarla elde edilebilir. Denklem (2.31)'un homojen olduğunu varsayarak düzeltme fonksiyonelini tekrar yazalım.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\ y''_n(s)\ + x^2 y_n(s))ds \quad (2.40)$$

Burada $y_n$ sınırlı fonksiyon olarak düşünülebilir ve $\delta y_n$= 0 olacak şekilde yukarıdaki düzeltme fonksiyonelinin stasyoner koşulları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\lambda''(s)\ =\ 0 \quad (2.41)$$

$$\lambda(s)|_{s=t}\ = 0 \quad (2.42)$$

$$1 -\ \lambda'(s)|_{s=t} = 0 \quad (2.43)$$

dolayısıyla Langrange çarpanı aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda = s - t \quad (2.44)$$

Langrange çarpanının yerine konmasıyla iterasyon formülü şu formu alır.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t (s-t)(\ y''_n(s)\ + x^2 y_n(s))ds \quad (2.45)$$

Örneğin y(0)=1 ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ve $y_0 = y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile başlarsak sırasıyla aşağıdaki yaklaşık çözümleri elde ederiz.

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 t^2 \quad (2.46)$$

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2!}x^2t^2 + \frac{1}{4!}x^4t^4 \tag{2.47}$$

$$\mathrm{y_n}(t) = 1 - \frac{1}{2!}x^2t^2 + \frac{1}{4!}x^4t^4 + \cdots + (-1)^{\,n}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}t^{2n} \tag{2.48}$$

Buradan

$$lim_{n\to\infty}y_n(t) = cosxt \tag{2.49}$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm problemin gerçek çözümüdür.

Yukarıda da görüldüğü gibi yaklaşık çözümleri, Langrange çarpımını yaklaşık tanımlamasından ötürü görece olarak daha yavaş bir şekilde gerçek çözüme yakınsar. Gerçekte denklem (2.44)'ün, denklem (2.36)' nın 1. mertebeden yaklaşık çözümü olduğunu aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz.

$$\lambda = \frac{1}{x}sinx(s-t) \approx s - t - \frac{1}{3!}x^2(s-t)^3 \tag{2.50}$$

Doğrusal olmayan problemler için Langrange çarpımını basit bir şekilde elde edebilmek açısından doğrusal olmayan terimler sınırlı varyasyonlar olarak düşünülebilir[54].

## 3.VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİNİN PROBLEMLERE UYGULANMASI

### 3.1. Problem 1

Denklem olarak reaksiyon-difüzyon denklemini ele alalım. Reaksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u, \nabla u; x, t) \tag{3.1}$$

biçimindedir.

Burada, $\Delta u$ difüzyon terimi, $f(u, \nabla u; x, t)$ ise reaksiyon terimidir. Veya $f$ operatörü $Au$ daki $A$ eliptik operatörünün dejenere olmuş hali olarak alınabilir.

Bu çalışmadaki bir boyutlu reaksiyon difüzyon denklemi

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + r(x,t)u(x,t) \ \ , \ (x,t) \in \Omega \subset R^2 \tag{3.2}$$

biçimindedir.

Burada $u$ konsantrasyon, $q$ adveksiyon katsayısı, $r$ reaksiyon parametresi ve $D > 0$ ise difüzyon katsayısıdır. Başlangıç ve sınır değerleri ise $\Omega = RxR^+$ bölgesinde

$$u(x,0) = g(x), \qquad x \in R \tag{3.3}$$

$$u(0,t) = f_0(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f_1(t)\,, \quad t \in R. \tag{3.4}$$

biçimindedir. .

Reaksiyon- difüzyon denkleminin fizik, kimya, ekoloji, biyoloji ve mühendislik dallarındaki uygulamaları geniş bir şekilde verilmiştir [40,41].

(3.2)-(3.4) probleminde verilen başlangıç sınır koşulları kullanılarak bilinmeyen $u$ konsantrasyon fonksiyonu VIM ile bulunacaktır.

Örneklendirmedeki iterasyon işlemlerinin kolay olması için gerekli yerlerde $q(x,t)$ i $q(x,t) = q_1 + q_2(x,t)$ biçiminde tekrar yazılacaktır. Burada $q_1$, $q(x,t)$ nin sabit kısmı $q_2$ ise $q(x,t)$ nın kalan kısımlarıdır.

(2.28) deki denklemi tekrar yazalım:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}ds. \qquad (3.5)$$

Burada, $\lambda$ langrange çarpanın en uygun değerini varyasyonel teorisi ile bulunduğunu, n alt simgeleri yakınsamanın n inci adımını gösterdiğini ve $\tilde{u}_n$ nin ise $\delta\tilde{u}_n = 0$ olacak şekilde kısıtlanmış değişimler olduğunu, 2. Bölümde göstermiştik. Lineer problemlerde langrange çarpanının gerçek değeri bulunabildiğinden gerçek çözümler bir adımda kolayca bulunur. Lineer olmayan problemlerde ise basit bir tarzda bulmak için lineer olmayan terimler kısıtlanmış değişimler olarak alınmalıdır.

(3.2) denklemine:

(a) $t$ değişkenine bağlı ve (3.3) başlangıç değerinin alınm

(b) $x$ değişkenine bağlı ve (3.4) sınır değerlerinin alınması

işlemleri uygulansın.

(a) ve (b) durumları (3.2) denkleminde yazılırsa;

$$\mathrm{u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t)} \qquad (3.6)$$

elde edilir.

Burada $\mu_n$ sırayla

$$\mu_n(x,t) = \int_0^t \lambda(s)\left\{\frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) - \mathrm{r(x,t)}\tilde{u}_n(x,s) - \mathrm{D}\frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - \mathrm{q}(x,s)\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s)\right\}ds, \qquad (3.7)$$

$$\mu_n(x,t) = \int_0^x \lambda(r)\left\{\mathrm{D}\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) + q_1\frac{\partial u_n}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + \mathrm{r}(r,\mathrm{t})\tilde{u}_n(r,t)\right\}dr$$

(3.8)

biçimindedir.

(3.6) daki denklemi alıp doğru fonksiyonel işlemler yapılırsa $\lambda$ langrange çarpanı özelleşecektir. İterasyona bir başlangıç değeriyle başlanılırsa bir sonraki yakınsamaya başarıyla ulaşılır[55].

### 3.2. Problem 2

$$\mathrm{u_t} = \mathrm{a}\Delta\mathrm{u} + \mathrm{f(x,t;u)}, \qquad (\mathrm{x,t}) \in \Omega\mathrm{x}(0,\mathrm{T}), \tag{3.9}$$

ısı denklemini ele alalım.

Burada $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonu, $a$ difüzyon katsayısı $f$ ise fiziksel kuralları gösteren kaynak terimidir. Bu çalışmada ise

$$u_t = au_{xx} + p(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0 = R^d \times (0,T) \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in R^d \tag{3.11}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t) \qquad t \in (0,T]$$

$$u(1,t) = \mu_2(t) \qquad t \in (0,T] \tag{3.12}$$

Ek koşul:

$$u(x^*,t) = \mathrm{E(t)} \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.13}$$

ters katsayı problemini ele alalım

Bu problemde $f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$, fonksiyonları bilinmekte ve $x^*$ ise $R^d$ uzayında belirlenmiş sabit bir noktadır. Burada amaç $u(x,t)$ ve $p(t)$ yı bulmaktır.

*Varyasyonel İterasyon Yöntemine* göre bir düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(Lu_n(\xi) + N\breve{u}_n(\xi) - g(\xi))d\xi, \qquad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir

(3.10)-(3.13) probleminde iki farklı bilinmeyen olduğundan VIM uygulayarak çözüme ulaşmamız çok zordur. Bu nedenle

$$w(x,t) = u(x,t)exp\left(-\int_0^t \mathrm{p(s)ds}\right) \qquad (3.15)$$

$$r(t) = \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right) \qquad (3.16)$$

dönüşümleri uygulanırsa (3.10)-(3.13) problemi

$$w_t = w_{xx} + r(t)f(x,t), \quad x \in (0,1),\ t \in (0,T), \qquad (3.17)$$

$$w(x,0) = g(x), \qquad x \in R^d \qquad (3.18)$$

$$w(0,t) = h_1(t)r(t) \quad , \qquad t \in (0,T) \qquad (3.19)$$

$$w(1,t) = h_2(t)r(t) \quad ,\ t \in (0,T) \qquad (3.20)$$

$$r(t) = \frac{w(x^*,t)}{E(t)} \quad , \quad t \in (0,T) \qquad (3.21)$$

probleme dönüşür. Burada tek bilinmeyen $w(x,t)$ fonksiyonudur.

(3.17)-(3.21) problemini (3.14) iterasyonuna uygulanırsa

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \breve{w}_{nxx}(x,\tau) - \frac{\widetilde{w_n}(x^*,\tau)}{E(\tau)}\mathrm{f(x,\tau)})\mathrm{d\tau} \qquad (3.22)$$

elde edilir. Burada $\lambda$ langrange çarpanın istenilen değeri 2. Bölümde anlatılan varyasyonel iterasyon teoremi kullanılarak bulunur. $w_0$ en uygun başlangıç değeri olarak alınmalı ve $\breve{w}_n$ ise $\delta\breve{w}_n$=0 koşullu kısıtlı değişkendir.

$\lambda$ optimal değerini bulmak için δ ile çarpılırsa

$$\delta w_{n+1}(x,t) = \delta w_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau})\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.23)$$

bulunur. (3.23) deki denkleme kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta w_{n+1}(x,t) = \delta w_n(x,t)\big(1+\lambda(t)\big) - \int_0^t \delta w_n(x,\tau)\lambda'\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.24)$$

elde edilir. Buradan

$$1+\lambda(\mathrm{t}) = 0$$

$$\lambda'(\tau) = \ 0 \quad , \quad \forall\tau\epsilon(0,t)$$

değerleri bulunur. Bu ise

$\lambda(\tau) = -1$

sonucuna ulaştırır.

(3.22) denklemi tekrar yazılırsa

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) - \int_0^t (\frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} - \breve{w}_{nxx}(x,\tau) - \frac{\breve{w_n}(x^*,\tau)}{E(\tau)}\mathrm{f}(x,\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (3.25)$$

iterasyonu ile $w(x,t)$ bulunur. $u(x,t)\ ve\ p(t)$ çekilirse

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\mathrm{r}(\mathrm{t})},$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{t}) = -\frac{\mathrm{r}'(\mathrm{t})}{\mathrm{r}(\mathrm{t})}$$

elde edilir.

### 3.3. Problem 3

$$u_t(x,t) = a(t)\Delta u \qquad (x,t) \in \Omega \mathrm{x}(0,T), \tag{3.26}$$

$$u(x,t) = \varphi(x) \qquad x \in [0,1] \tag{3.27}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t) \qquad t \in (0,T]$$

$$u(1,t) = \mu_2(t) \qquad t \in (0,T] \tag{3.28}$$

başlangıç ve sınır koşulları ve

$$u(x^*,t) = \mathrm{E(t)} \quad , \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.29}$$

ek koşulu ile ısı denklemini ele alalım.

Burada $\Delta$ Laplace operatörü ve d=1,2,3, $x=(x_1, \ldots, x_d)$ olmak üzere $\Omega = [0,1]^d$ dir. Problemde , $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t), E(t)$ fonksiyonları bilinmekte ve $x^*$ ise (0,1) aralığında belirlenmiş sabit bir noktadır. Burada amaç bilinmeyen $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonunu ve $a(t)$ katsayısını bulmaktır. (3.26)-(3.29) problemi fiziksel problemlerde bir çok model oluşturmaktadır.

(3.29) ek koşulu olmadan (3.26)-(3.29) probleminin özel çözümünü bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla problem sonsuz çözüme sahip olur. Bununla birlikte birden fazla ek koşul verildiğinde ise hiçbir çözüm bulunamaz. Yani çözümü yoktur. Bu problemin varlığı, tekliği ve uygulamaları [6,11,12,13,17] çalışmalarında tartışılmıştır.

Bu problemde, problem 2 ‘den farklı olarak herhangi bir dönüşüm yapmadan ters katsayı problemin formülasyonu kullanılarak çözüme ulaşılacaktır.

### 3.3.1.Ters katsayı problemin formülasyonu

(3.29) ek koşulunu kullanarak (3.26) denklemine uygulanırsa

$$E'(t) = a(t)u(x^*, t) \ , \quad t \in (0, T] \tag{3.30}$$

Buradan $\Delta u(x^*, t) \neq 0$ olmak üzere

$$a(t) = \frac{E'(t)}{\Delta u(x^*, t)} \quad , \quad t \in (0, T] \tag{3.31}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.26)-(3.28) problemi

$$u_t(x, t) = \frac{E'(t)}{\Delta u(x^*, t)} \Delta u \ , \ (x, t) \in \Omega x(0, T), \tag{3.32}$$

$$u(x, t) = \varphi(x) \quad , \quad x \in [0,1] \tag{3.33}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t) \quad , \quad t \in (0, T]$$

$$u(1, t) = \mu_2(t) \quad , \quad t \in (0, T] \tag{3.34}$$

problemine dönüşür.

2.bölümde verilen Varyasyonel İterasyon Yöntemine göre bir düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(Lu_n(s) + N\check{u}_n(s) - g(s))ds, \tag{3.35}$$

şeklinde yazılabilir. (3.32) denklemi (3.35) iterasyonuna uygulanırsa

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\frac{\partial u}{\partial s}(x, s) + \frac{E'(s)}{\Delta u(x^*, s)} \Delta\check{u}_n(x, s))ds, \tag{3.36}$$

elde edilir.

$\lambda$ optimal değerini bulmak için $\delta$ ile çarpılırsa

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\tfrac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau})\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.37)$$

bulunur. (3.37) deki denkleme kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t)\big(1+\lambda(t)\big) - \int_0^t \delta u_n(x,\tau)\lambda'\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.38)$$

elde edilir. Buradan

$1+\lambda(\mathrm{t}) = 0$

$\lambda'(\tau) = \ 0 \quad , \ \forall \tau \epsilon (0,t)$

değerleri bulunur. Bu ise

$\lambda(\tau) = -1$

sonucuna ulaştırır.

(3.36) denklemi tekrar yazılırsa

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t (\frac{\partial u}{\partial s}(x,s) + \frac{E'(s)}{\Delta u(x^*,s)}\Delta \breve{u}_n(x,s))ds,$$

elde edilir. Buradan n adımda $u(x,t)$ bulunur. Dolayısıyla (3.31) den

$$a(t) = \frac{E'(t)}{\Delta u(x^*,t)} \qquad (3.39)$$

biçiminde elde edilir.

## 4.SAYISAL ÖRNEKLER

### 4.1. Örnek 1

(3.2) denkleminde $D = 1,\ q(x,t) = e^{t-x} - 1,\ r(x,t) = 0$ değerleri ve aşağıdaki

$$u(x,0) = g(x) = e^x + 1 \qquad , \quad x \in R \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = f_0(t) = e^t + 1 \qquad , \quad t \in R \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f_1(t) = 1 \qquad , \quad t \in R \tag{4.3}$$

başlangıç sınır değerlerini alalım. Problemin gerçek çözümü ise $u(x,t) = e^x + e^t$ dır.

İlk önce (3.2) denklemini (4.1) başlangıç koşulu ile ele alıp t değişkenine bağlı bu denklemi çözelim. Bu denkleme VIM i uygulamak için (3.6) ve (3.7) denklemlerine göre

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t) \tag{4.4}$$

denklemini alırsak. Burada,

$$\mu_n(x,t) = \int_0^t \lambda(s)\left\{\frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) + \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - e^{s-x}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s)\right\} ds, \tag{4.5}$$

biçiminde olur.

Doğru stasyoner fonksiyoneli bulmak ve $u_n$ bağımsız değişkenine gerekli işlemler yapmak için

$\delta u_{n+1}(x,t) = 0$

alınmalıdır. Dolayısıyla

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) + \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s) \right\} ds,$$

$$- \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - e^{s-x} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s)$$

$$= \delta u_n(x,t) + \lambda(s) \delta u_n(x,s) I_{s=t} + \delta \int_0^t \lambda'(s) u_n ds$$
$$= 0$$

denklemini elde ederiz. Buradan da

$\delta u_n : 1 + \lambda(t) = 0,$

$\delta u_n : \lambda'(s) = 0,$

stasyoner koşulları ile

$\lambda(s) = -1.$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (4.4)' deki varyasyonel iterasyon formülü bulunur. Yani burada

$$\mu_n(x,t) = - \int_0^t \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) + \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - e^{s-x} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s) \right\} ds,$$

şekline dönüşür.

$u_0(x,t) = u(x,0) = e^x + 1$ başlangıç koşulu ile başlanırsa (4.4) iterasyonu

$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t)$

iterasyonuna dönüşür. Burada $\mu_0$

$$\mu_0(x,t) = -\int_0^t \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial s}(x,s) + \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,s) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,s) - e^{s-x}\frac{\partial u_0}{\partial x}(x,s) \right\} ds,$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1$$

biçimindedir. Dolayısıyla $u_1$ ise

$$u_1(x,t) = e^x + 1 + e^t - 1 = e^x + e^t$$

biçiminde bulunur ki bu gerçek çözümdür.

Şimdi ise aynı örneği (4.2) ve (4.3) sınır değerleriyle $x$ değişkenine bağlı olarak çözelim. (3.6) ve (3.8) denklemlerini kullanarak

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t), \qquad (4.6)$$

denklemi bulunur. Burada

$$\mu_n(x,t) = \int_0^x \lambda(r)\left\{ \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial u_n}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + e^{t-r}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r}(r,t) \right\} dr, \qquad (4.7)$$

biçimindedir.

Yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki stasyoner koşulları elde edilir.

$$\delta \mathrm{u}_n \ : \ \lambda''(r) + \lambda'(r) = 0,$$

$$\delta \mathrm{u}_n \ : \ 1 - \lambda'(r) - \lambda(x) = 0,$$

$$\delta \frac{\partial u_n}{\partial x} : \ \lambda(x) \ = 0,$$

koşulları ile gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda(r) = 1 - e^{x-r}$$

sonucuna ulaşılır.

$a$ ve $b$, $x$ değişkenine bağlı sabitler olarak alınıp $u_0(x,t) = a + bx$ başlangıç değeri ile başlanılırsa (4.7) deki denklem

$$\mu_0 = \int_0^x (1 - e^{x-r}) \left\{ \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial u_n}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + e^{t-r} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r}(r,t) \right\} dr$$

olmak üzere

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t),$$

biçiminde tekrar yazılabilir. Buradan da

$$u_1(x,t) = a + b(-1 + e^x + e^t - \frac{e^{x+t} + e^{t-x}}{2})$$

değerine ulaşılır. (4.2) ve (4.3) sınır değerlerinden

$$a = e^t + 1 \ , \ b = 1.$$

elde edilir Dolayısıyla

$$u_1 = 2e^t + e^x - (e^{x+t} + e^{t-x})$$

bulunur.

$n$=1, …,5 için $u_n inci$ adımını hesaplarsak $u_5$ değeri

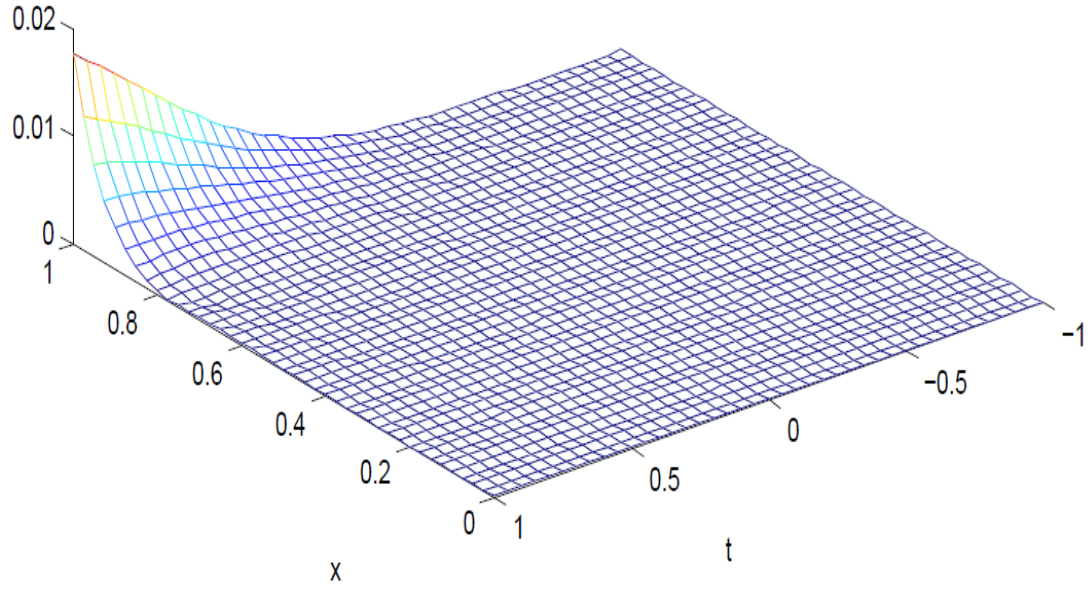
$$u_5 = \frac{2929e^{2t}}{32} + \frac{4123e^t}{648} - \frac{43e^{4t}}{1152} - \frac{31e^{5t}}{900} + 47e^t + e^x + \frac{927e^{2t}}{16} + \frac{325e^{3t}}{27}$$
$$+ \frac{61e^{4t}}{96} + x\frac{e^{5t}}{30} + 11x^2\frac{e^t}{2} + 2x^3\frac{e^t}{3} + x^4\frac{e^t}{24} - 1471\frac{e^{t+x}}{32}$$
$$+209x^2\frac{e^{2t}}{16} + 43x^2\frac{e^{3t}}{36} + 47x^3\frac{e^{2t}}{24} + x^2\frac{e^{4t}}{16} + 7x^3\frac{e^{3t}}{18} + 5x^4\frac{e^{2t}}{48}$$

$$-\frac{e^{t-x}}{32}-62293\frac{e^{2t+x}}{648}-14989\frac{e^{3t+x}}{1152}-853\frac{e^{4t+x}}{1800}-\frac{e^{5t+x}}{144}+24xe^{t}$$
$$+37\frac{e^{2t-x}}{8}-65\frac{e^{2t-2x}}{2592}-109\frac{e^{3t-x}}{16}-11\frac{e^{3t-2x}}{72}-11\frac{e^{4t-x}}{18}$$
$$-115\frac{e^{3t-3x}}{10368}-\frac{e^{4t-2x}}{9}+\frac{e^{5t-x}}{16}+\frac{e^{4t-3x}}{72}-\frac{e^{5t-2x}}{36}-77\frac{e^{4t-4x}}{28800}$$
$$+\frac{e^{5t-3x}}{144}-\frac{e^{5t-5x}}{3600}+7x\frac{e^{2t-x}}{4}+21x\frac{e^{3t-x}}{8}+x\frac{e^{3t-2x}}{12}+x\frac{e^{4t-x}}{6}$$
$$-x\frac{e^{4t-2x}}{24}-61x^{2}\frac{e^{2t+x}}{9}-9x^{2}\frac{e^{3t+x}}{16}+4x^{3}\frac{e^{2t+x}}{9}+351x\frac{e^{t+x}}{16}$$
$$+x^{2}\frac{e^{2t-x}}{4}+3x^{2}\frac{e^{3t-x}}{8}+2215x\frac{e^{2t+x}}{54}+157x\frac{e^{3t+x}}{32}+2x\frac{e^{4t+x}}{15}$$
$$-71x^{2}\frac{e^{t+x}}{16}+11x^{3}\frac{e^{t+x}}{24}-x^{4}\frac{e^{t+x}}{48}$$

biciminde elde edilir. Bu çözüm gerçek çözüme yakın bir değerdir. Tablo 1 de bu yakınsamanın nümerik sonuçları verilmiştir.$|u_5(x,t)-u(x,t)|$ fonksiyonun mutlak hata grafiği ise şekil-1 de verilmiştir. Bu sonuçlar yakınsamanın çok başarılı olduğunu gösterir.

Tablo 4.1: Örnek 1'deki VIM ile bulunan yaklaşık değerlerin gerçek çözüm ile karşılaştırılması

| (x,t) | Gerçek çözüm | VIM ile yaklaşık çözümü | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| (1,-1) | 3.0861612696304 | 3.086158874210706 | $2.395419782086350\text{x}10^{-6}$ |
| (0.75,-075) | 2.589366569353690 | 2.58936729911627 | $7.297625891355963\text{x}10^{-7}$ |
| (0.5,-0.5) | 2.255251930412761 | 2.255251988770103 | $5.835734140369198\text{x}10^{-8}$ |
| (0.25,-0.25) | 2.062826199759146 | 2.062826162978968 | $3.678017879149564\text{x}10^{-8}$ |
| (0,0) | 2 | 2.000000000000002 | $1.776356839400251\text{x}10^{-15}$ |
| (0.25,0.25) | 2.568050833375483 | 2.568050242614706 | $5.907607771860057\text{x}10^{-7}$ |
| (0.5,0.5) | 3.297442541400256 | 3.297373660876370 | $6.888052388642763\text{x}10^{-5}$ |
| (0.75,0.75) | 4.234000033225350 | 4.232486616556538 | 0.001513416668812 |
| (1,1) | 5.4365636569180910 | 5.418882492102849 | 0.017681164815242 |




Şekil 4.1: Örnek 1 için mutlak hatanın grafiği

## 4.2 Örnek 2

Bu örnekte (3.2) denklemini $D = 1$, $q(x,t) = 2t$ ve $r(x,t) = 0$ değerleri ve

$$u(x,0) = g(x) = e^{x} \quad , \quad x \in R \tag{4.8}$$

$$u(0,t) = f_0(t) = e^{t^2+t} \quad , \quad t \in R \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o,t) = f_1(t) = e^{t^2+t} \quad , \quad t \in R \tag{4.10}$$

başlangıç sınır değerleri ile ele alalım. Problemin gerçek çözümü ise $u(x,t) = e^{t^2+t+x}$ dır. Denklemi (4.8) başlangıç değerleri ile başlayıp VIM ile çözmek için (3.6) ve (3.7) deki denklemlerini

$$\mu_n(x,t) = \int_0^t \lambda(s)\left\{\frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - 2s\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s)\right\} ds, \tag{4.11}$$

olmak üzere

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t), \tag{4.12}$$

biçiminde alalım.

Önceki örnekte yapılan benzer işlemler yapılırsa yukarıdaki doğru fonksiyonelin stasyoner koşulları aşağıdaki gibi olur:

$$\delta \mathrm{u}_n : 1 + \lambda(t) = 0,$$

$$\delta \mathrm{u}_n : \lambda'(s) = 0,$$

Dolayısıyla

$\lambda(s) = -1$

bulunur.

$u_0(x,t) = u(x,0) = e^x$ başlangıç koşulunu alalım. (4.12)' deki $\{u_n\}$ dizisinin terimlerini

$$\mu_0(x,t) = \int_0^t \lambda(s) \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x^2}(x,s) - 2s \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x}(x,s) \right\} ds,$$

olmak üzere

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t),$$

biçiminde tekrar oluşturalım. Buradan

$$u_1(x,t) = e^x(t^2 + t + 1)$$

bulunur. Aynı şekilde devam edilirse

$$\mu_1(x,t) = \int_0^t \lambda(s) \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2}(x,s) - 2s \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}(x,s) \right\} ds = e^x \frac{(t^2 + t)^2}{2}$$

olmak üzere

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \mu_1(x,t)$$

bulunur. Bulunan değerler yerine yazılırsa

$$u_2(x,t) = e^x(\frac{(t^2+t)^2}{2} + t^2 + t + 1)$$

değeri elde edilir.

$u_n$ nın sonraki adımları aynı şekilde bulanabilir ve $u$ nun *n inci* adımı

$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n}(\frac{(t^2+t)^k}{\mathrm{k!}})\, e^x$$

biçiminde oluşturulabilir. Ve limiti alındığında

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{t^2+t+x}$$

değerine yakınsar ki bu gerçek çözümdür.

Şimdi ise aynı örneği (4.9) ve (4.10) sınır değerleriyle $x$ değişkenine bağlı olarak çözelim. (3.6) ve (3.8) denklemlerini kulanlar

$$\mu_n(x,t) = \int_0^x \lambda(r)\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + 2t\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r}(r,t)\right\} dr, \qquad (4.13)$$

olmak üzere

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t), \qquad (4.14)$$

denklemi bulunur. Bu durumda aşağıdaki stasyoner koşullar elde eldir.

$$\delta \mathrm{u}_n \ : \ \lambda''(r) = 0,$$

$\delta \mathrm{u}_n \ : \ 1 - \lambda'(r) = 0,$

$\delta \frac{\partial u_n}{\partial x}: \ \lambda(x) \ = 0,$

ve dolayısıyla $\lambda(r) = r - x$ bulunur.

$a$ ve $b$ bilinmeyen sabitler ( $x$ değişkenine bağlı) olmak üzere $u_0(x,t) = a + bx$ başlangıç değeri ile başlanıp (4.14) deki denkleme uygulanırsa

$$\mu_0(x,t) = \int_0^x (r-x)\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + 2t\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r}(r,t)\right\} dr,$$
$$= -btx^2$$

olmak üzere

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t)$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u_1 = -btx^2 + bx + a$$

bulunur. (4.9) ve (4.10) sınır değerlerinden

$$a = e^{t^2+t}, \qquad b = e^{t^2+t}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$u_1 = (-tx^2 + x + 1)e^{t^2+t}$$

bulunur. Devam edilirse *n=2,....,7* için $u_n$ değerleri bulunur.

$$u_7 = (1 + 0.5x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 +$$

$$\frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{11}{3628800}x^{11} - \frac{1139}{47900600}x^{12} + \frac{2011}{6227020800}x^{13} -$$

$$\frac{1}{89689600}x^{14} + x - \frac{1}{5040}t^2x^{10} + \frac{1}{5544}t^2x^{11} - \frac{1}{840}t^3x^{10} + \frac{1}{756}t^4x^9 - \frac{293}{7983360}t^2x^{12} +$$

$$\frac{59}{124740}t^3x^{11} - \frac{1}{720}t^4x^{10} + \frac{4}{945}t^5x^9 - \frac{1}{630}t^6x^8 + \frac{1367}{518918400}t^2x^{13} - \frac{767}{11975040}t^3x^{12} +$$

$$\frac{193}{498960}t^4x^{11} - \frac{83}{37800}t^5x^{10} + \frac{11}{5670}t^6x^9 - \frac{1}{315}t^7x^8 - \frac{17}{279417600}t^2x^{14} +$$

$$\frac{5}{1415232}t^3x^{13} - \frac{29}{665280}t^4x^{12} + \frac{43}{103950}t^5x^{11} - \frac{2}{2835}t^6x^{10} + \frac{2}{945}t^7x^9 +$$

$$\frac{1}{14826240}t^3x^{14} + \frac{1}{471744}t^4x^{13} - \frac{89}{2494800}t^5x^{12} + \frac{1}{8910}t^6x^{11} + \frac{1}{1890}t^7x^{10} -$$

$$+ \frac{1}{27243216}t^4x^{14} + \frac{23}{16216200}t^5x^{13} - \frac{13}{1496880}t^6x^{12} + \frac{2}{31185}t^7x^{11} -$$

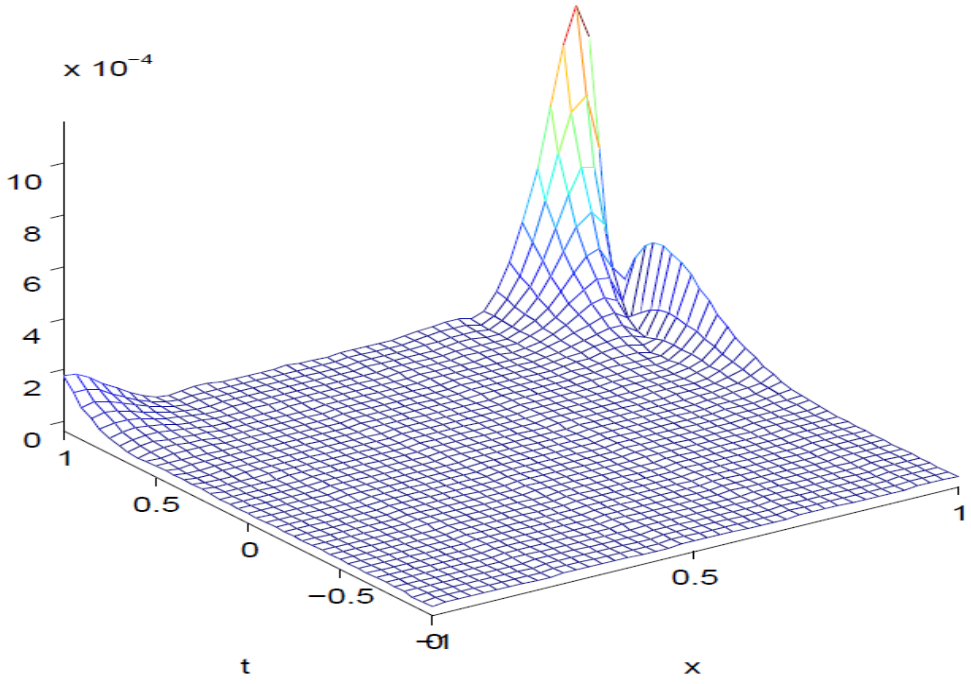
$$\frac{19}{908107200}t^5x^{14} + \frac{31}{97297200}t^6x^{13} - \frac{1}{249480}t^7x^{12} - \frac{1}{227026800}t^6x^{14} + \frac{1}{8108100}t^7x^{13} -$$

$$\frac{1}{26810804\ 00}t^7x^{14} + \frac{1}{16632}tx^{11} - \frac{71}{3991680}tx^{12} + \frac{17}{1081080}tx^{13} + \frac{1831}{43589145600}tx^{14})e^{t^2+t}$$

biciminde 7. adımın sonucu elde edilir. Bu çözüm gerçek çözüme yakın bir değerdir. Şekil 2 'de $|u_7(x,t) - u(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonun grafiğini, Tablo 2 ise bu yakınsama ile bulunan sayısal sonuçlarını gösterir.

Tablo 4.2**:** Örnek 2' deki gerçek çözüm ve VIM ile bulunan yaklaşık değerlerin karşılaştırılması

| (x,t) | Gerçek değer | VIM ile yaklaşık çözümü | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| (1,-1) | 2.718281828459046 | 2.718105731831550 | $1.760966274955145x10^{-4}$ |
| (0.75,-0.75) | 1.755054656960299 | 1.755049916682428 | $4.740277870229903x\ 10^{-6}$ |
| (0.5,-0.5) | 1.284025416687741 | 1.284025408379779 | $8.307962096054666x10^{-9}$ |
| (0.25,-0.25) | 1.064494458917860 | 1.064494458920610 | $2.750244476601438x10^{-12}$ |
| (0,0) | 1 | 1 | 0 |
| (0.25,0.25) | 1.755054656960299 | 1.75505465696103 | $7.400746682151294x10^{-13}$ |
| (0.5,0.5) | 3.490342957461841 | 3.490343033303935 | $7.584209349431603x10^{-8}$ |
| (0.75,075) | 7.865609273944892 | 7.865632258392306 | $2.298444741377637x10^{-5}$ |
| (1,1) | 20.085536923187668 | 20.086528675066070 | $9.917518784021695x10^{-4}$ |




Şekil 4.2: Örnek 2 için mutlak hatanın grafiği

### 4.3 Örnek 3

Bu örnekte (3.2) denklemini $D = 1,\ q(x,t) = e^{-x} - e^{x} - 1\ ve\ r(x,t) = 0$ değerleri ve

$$u(x,t) = e^{e^{x}} \qquad , x \in \mathrm{R} \tag{4.15}$$

$$u(x,t) = f_0(t) = e^{t+1} \qquad , \mathrm{t} \in R \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o,t) = f_1(t) = e^{t+1} \quad , \mathrm{t} \in R \tag{4.17}$$

başlangıç sınır değerleri ile alalım. Problemin gerçek çözümü ise

$$u(x,t) = e^{e^x+t}$$

dır.

Denklemi (4.8) başlangıç değerleri ile başlayıp VIM ile çözmek için (3.6) ve (3.7)'de denklemlerini

$$\mu_n(x,t) = \int_0^t \lambda(s)\left\{\frac{\partial u_n}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}(x,s) - (e^{-x} - e^x - 1)\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,s)\right\} ds, \quad (4.18)$$

olmak üzere

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t), \quad (4.19)$$

biçiminde bulunur.

Önceki örnekte yapılan benzer işlemler yapılırsa yukarıdaki doğru fonksiyonelin stasyoner koşulları aşağıdaki gibi olur:

$$\delta u_n : 1 + \lambda(t) = 0,$$

$$\delta u_n : \lambda'(s) = 0,$$

Dolayısıyla buradan

$$\lambda(s) = -1$$

Bulunur.

$u_0(x,t) = u(x,0) = e^{e^x}$ başlangıç değerini alalım. (4.19) deki $\{u_n\}$ dizisinin terimlerini

$$\mu_0(x,t) = -\int_0^t \left\{\frac{\partial u_0}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial x^2}(x,s) - (e^{-x} - e^x - 1)\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x}(x,s)\right\} ds,$$

$$= e^{e^x}.t$$

olmak üzere

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t),$$

biçiminde tekrar oluşturalım. Buradan

$$u_1(x,t) = e^{e^x}.(t+1)$$

bulunur. Aynı şekilde devam edilirse

$$\mu_1(x,t) = -\int_0^t \left\{\frac{\partial u_1}{\partial s}(x,s) - \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2}(x,s) - (e^{-x} - e^x - 1)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}(x,s)\right\} ds,$$

$$= e^{e^x}\frac{t^2}{2}$$

olmak üzere

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \mu_1(x,t)$$

bulunur. Bulunan değerler yerine yazılırsa

$$u_2(x,t) = e^{e^x}(\frac{t^2}{2} + t + 1)$$

değeri elde edilir.

$u_n$ nın sonraki adımları aynı şekilde bulanabilir ve $u$ nın *n inci* adımı

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{\mathrm{k!}} e^{e^x}$$

biçiminde oluşturulabilir. Ve limiti alındığında

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{e^x + t}$$

değerine yakınsar ki bu gerçek çözümdür.

Şimdi ise aynı örneği (4.16) ve (4.17) sınır değerleriyle $x$ değişkenine bağlı olarak çözelim. (3.6) ve (3.8) denklemlerini kullanarak

$$\mu_n(x,t) = \int_0^x \lambda(r)\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial u_n}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(r,t) + (e^{-x} - e^{x})\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r}(r,t)\right\} dr,$$

(4.20)

olmak üzere

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \mu_n(x,t), \qquad (4.21)$$

denklemi bulunur. Bu durumda aşağıdaki stasyoner koşullar elde edilir.

$$\delta u_n \ : \ \lambda''(r) + \lambda'(r) = 0,$$

$$\delta u_n \ : \ 1 - \lambda'(r) - \lambda(x) = 0,$$

$$\delta \frac{\partial u_n}{\partial x} : \ \lambda(x) \ = 0,$$

buradan

$$\lambda(r) = 1 - e^{x-r}$$

sonucuna ulaşırız.

a ve b, $x$ değişkenine bağlı sabitler olarak alınıp $u_0(x,t) = a + bx$ başlangıç değeri ile başlanılırsa (4.21) deki denklem

$$\mu_0(x,t) = \int_0^x (1 - e^{x-r})\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}(r,t) - \frac{\partial u_0}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t}(r,t) + (e^{-r} - e^{r})\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial r}(r,t)\right\} dr,$$

olmak üzere

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \mu_0(x,t),$$

biçiminde tekrar yazılabilir. Buradan da

$$u_1(x,t) = a + b - \frac{b}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + bxe^{x}$$

değerine ulaşılır.

(4.16) ve (4.17) daki sınır değerleri alınırsa

$$a = e^{t+1}, \quad b = e^{t+1}$$

biçiminde özelleşir.

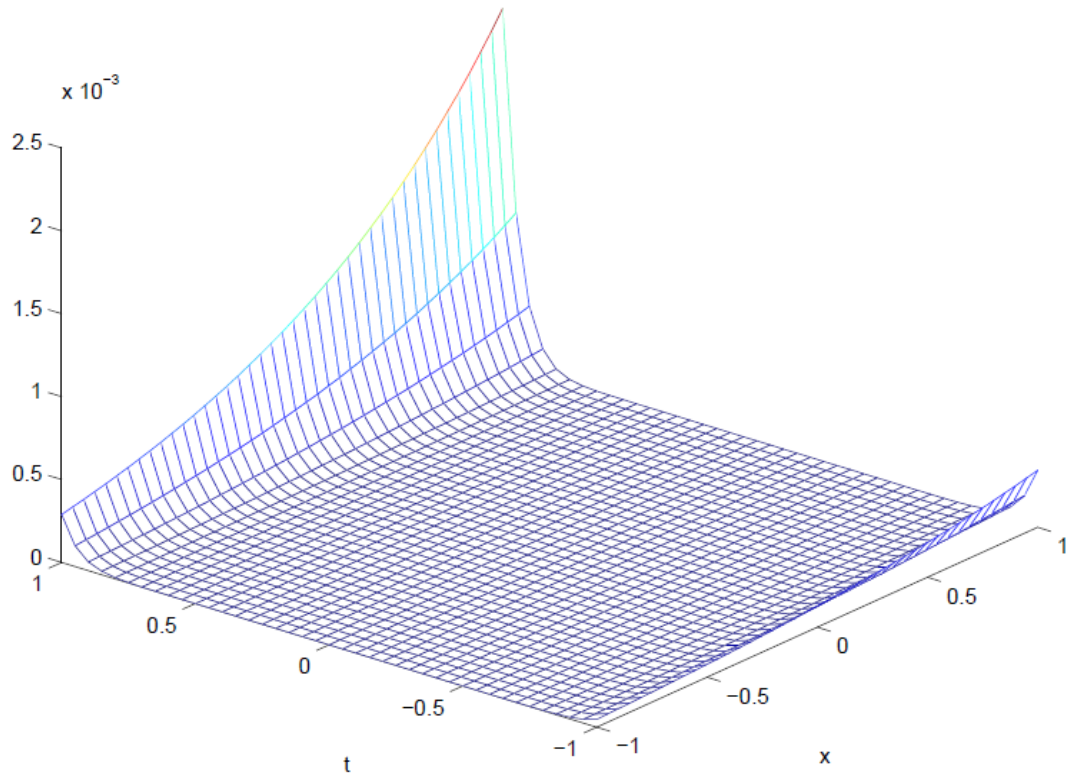
$n$=1, …,7 için $u_n inci$ adımını hesaplarsak $u_7$ değeri

$u_7(x,t) = (2270.7 + 1230.1x + 170.5069x^2 + 30.2704x^3 + 0.0793x^4 +$
$0.0840x^5 - 0.0076x^6)e^{t+1} - 2757.9e^{t+x+1} + 200.7422e^{t-x+1} +$
$6.8537e^{t-2x+1} + 320.6220e^{t+2x+1} + 0.2360e^{t-3x+1} - 28.6075e^{t+3x+1} -$
$0.0127e^{t-4x+1} + 2.1581e^{t+4x+1} - 0.0002178e^{t-5x+1} - 0.0992e^{t+5x+1} -$
$0.000028345e^{t-6x+1} + 0.0062e^{t+6x+1} + 3.543110^{-6}e^{t-7x+1} +$
$4.152510^{-4}e^{t+7x+1} + 56.5775xe^{t-x+1} - 1.7753xe^{t-2x+1}154.0731xe^{t+2x+1} +$
$0.0298xe^{t-3x+1} + 14.1629xe^{t+3x+1} - 0.0027xe^{t-4x+1} - 1.0963xe^{t+4x+1} -$
$0.00027778xe^{t-5x+1} + 0.0527xe^{t+5x+1} - 0.0029xe^{t+6x+1} +$
$0.00019841xe^{t+7x+1} - 371.1631x^2e^{t+x+1} + 50.6234x^3e^{t+x+1} -$
$0.2060x^4e^{t+x+1} + 0.3299x^5e^{t+x+1} - 0.0118x^6e^{t+x+1} +$
$0.00019841x^7e^{t+x+1} + 7.9236x^2e^{t-x+1} - 0.2025x^2e^{t-2x+1} +$
$44.1782x^2e^{t+2x+1} - 0.2569x^3e^{t-x+1} - 0.0029x^2e^{t-3x+1} -$
$3.9090x^2e^{t+3x+1} + 0.0255x^3e^{t-2x+1} - 6.1134x^3e^{t+2x+1} - 0.0104x^4e^{t-x+1} +$
$0.2772x^2e^{t+4x+1} - 0.0023x^3e^{t-3x+1} + 0.5123x^3e^{t+3x+1} + 0.5642x^4e^{t+2x+1} -$
$0.0042x^5e^{t-x+1} - 0.0124x^2e^{t+5x+1} - 0.0336x^3e^{t+4x+1} - 0.0394x^4e^{t+3x+1} -$
$0.0313x^5e^{t+2x+1} + 0.00069444x^2e^{t+6x+1} + 0.0014x^3e^{t+5x+1} +$
$0.0017x^4e^{t+4x+1}$+0.0.0014$x^5e^{t+3x+1} + 0.00069444x^6e^{t+2x+1} +$
$1239.01xe^{t+x+1}$

gerçek çözüme küçük hata payı ile yakınsar. Tablo 3'de bu yakınsamanın nümerik sonuçları verilmiştir.$|u_7(x,t) - u(x,t)|$ fonksiyonun mutlak hata grafiği ise Şekil-3'de verilmiştir. Bu sonuçlar yakınsamanın çok başarılı olduğunu gösterir.

Tablo 4.3: Örnek 3 deki problemin VIM ile bulunan yaklaşık değerlerin ile gerçek çözümün karşılaştırılması

| (x, t) | Gerçek çözüm | VIM ile yaklaşık çözüm | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| (-1,-1) | 0.531463605386616 | 0.531417102420562 | $4.650296605357429\text{x}10^{-5}$ |
| (-0.75,-0.75) | 0.757574461621786 | 0.757573451051826 | $1.010569959936092 \text{ x } 10^{-6}$ |
| (-0.5,-0.5) | 1.112412032156082 | 1.112412027602659 | $4.553423194053607 \text{ x}10^{-9}$ |
| (-0.25,-0.25) | 1.696896141380650 | 1.696896141379853 | $7.975842208907125\text{x}10^{-13}$ |
| (0,0) | 2.718281828459046 | 2.718281828458618 | $4.272138198757602\text{x}10^{-13}$ |
| (0.25,0.25) | 4.636804375024635 | 4.636804375023530 | $1.104893954106956\text{x } 10^{-12}$ |
| (0.5,0.5) | 8.573887702979121 | 8.573887672905585 | $3.007353654993494 \text{ x}10^{-8}$ |
| (0.75,075) | 17.584186724632989 | 17.584169298617780 | $1.742601520859921 \text{ x}10^{-5}$ |
| (1,1 ) | 41.193555674716137 | 41.19141968039548 | $2.135994320653\ 897\text{x}10^{-3}$ |




Şekil 4.3: Örnek 3 için mutlak hatanın grafiği

### 4.4. Örnek 4

(3.10) denklemi için iki boyutlu uzayda $T = 1$ , $(x^*, y^*) = (0,1)$ ve

$$\varphi(x,y) = \cos(x+y)\, e^{x-y^2-4} \quad , x \in R^d \tag{4.21}$$

$$f = [cos(x+y)(-4y^2 + 3t^2 - 2t + 3) + \sin(x+y)\,(-4y+2)]e^{x-y^2-4t-4}$$

$$E(t) = cos(1)\, e^{-5-4t} \tag{4.22}$$

değerleri alınsın. Problemin gerçek çözümü $w(x,y,t) = \cos(x+y)\, e^{x-y^2-4}$ biçimindedir. (3.22) denklemine uygulanırsa

$$w_{n+1}(x,y,t) = w_n(x,y,t) - \int_0^t (\frac{\partial w_n(x,y,\tau)}{\partial \tau} - \Delta \breve{w}_n(x,y,\tau) \tag{4.23}$$

$$- \frac{\breve{w_n}(x^*,y^*,\tau)}{E(\tau)} f(x,y,\tau))d\tau$$

denklemi bulunur. $\varphi(x,y) = \cos(x+y)\, e^{x-y^2-4}$ başlangıç değeri ile başlanılırsa

$$w_1(x,y,t) = \cos(x+y)\, e^{x-y^2-4} + e^{x-y^2+1}(-10^{-11} t y^2 \cos(x)\cos(y)$$

$$-10^{-11} t y \cos(x)\sin(y) + 10^{-11} t y^2 \sin(x)\sin(y)$$

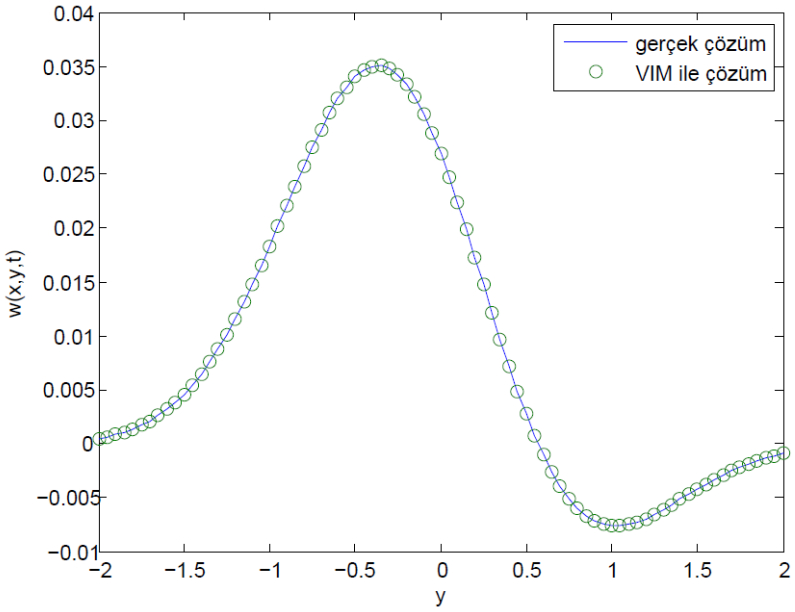
$$-10^{-11} t y^2 \sin(x)\cos(y) + 0.006738 t^3 \cos(x)\cos(y)$$

$$-0.006738 t^3 \sin(x)\sin(y) - 0.006738 t^2 \cos(x)\cos(y)$$

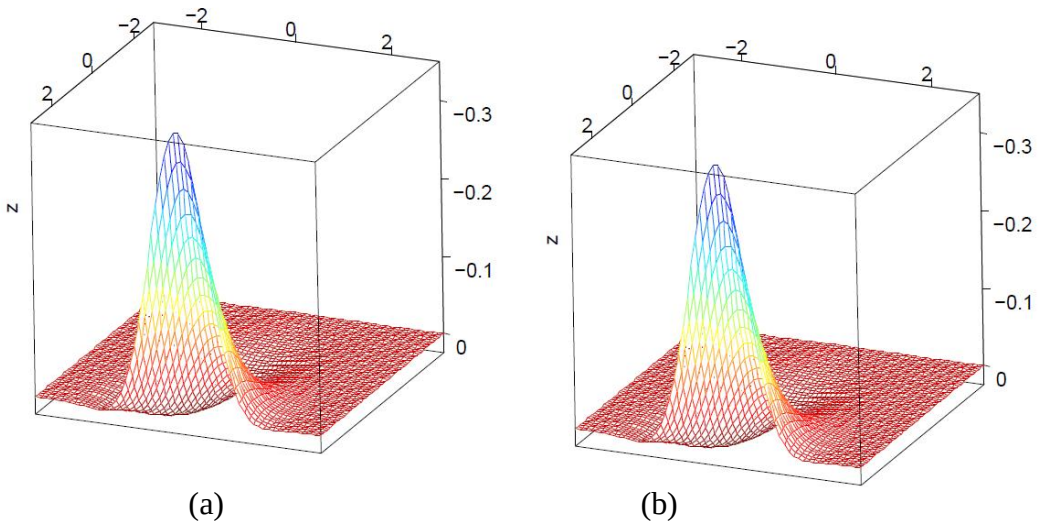
$$+0.006738 t^3 \sin(x)\sin(y)) \ .$$

değeri bulunur.

Bir adımda VIM ile bulunan değer ile gerçek çözüm şekil 4.4 ve şekil 4.5 de karşılaştırıldığında sonuçların çok iyi olduğu görülmektedir.




Şekil 4.4: Örnek 4 için x=1 ve t=1 deki w(x,y,t)'nin VIM ile bulunan değer ile gerçek çözümün karşılaştırılması




Şekil 4.5: örnek 4 için (a) t=1 de w(x,y,t) nin VIM ile bulunan sonucun grafiği (b) t=1 de w(x,y,t) nin gerçek çözümün grafiği

**4.5. Örnek 5**

(3.10) denklemi için üç boyutlu uzayda $T = 1$ , $(x^*, y^*, z^*) = (1,2,1)$ ve

$$\varphi(x, y, z) = zy^3 e^{-x^2} \quad , x \in R^3 \tag{4.24}$$

$$f(x, y, z, t) = -yz(4x^2y^2 + 5y^2t - 4y^2 - y^2\mathrm{t}^2 + 6)e^{-2t-x^2} \tag{4.25}$$

$$E(t) = 8e^{-2t-1}$$

değerleri alınsın. Problemin gerçek çözümü

$$w(x, y, z, t) = zy^3 e^{\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - x^2 + 2t}$$

biçimindedir. (3.22) denklemine uygulanırsa

$$w_{n+1}(x, y, z, t) = w_n(x, y, z, t) - \int_0^t (\frac{\partial w_n(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} - \Delta \widetilde{w}_n(x, y, z, \tau)$$

$$- \frac{\widetilde{w_n}(x^*, y^*, z^*, \tau)}{E(\tau)} \mathrm{f(x, y, z, \tau))d\tau}$$

denklemi bulunur. $\varphi(x, y, z) = zy^3 e^{-x^2}$ başlangıç değeri ile başlanılırsa ilk adım

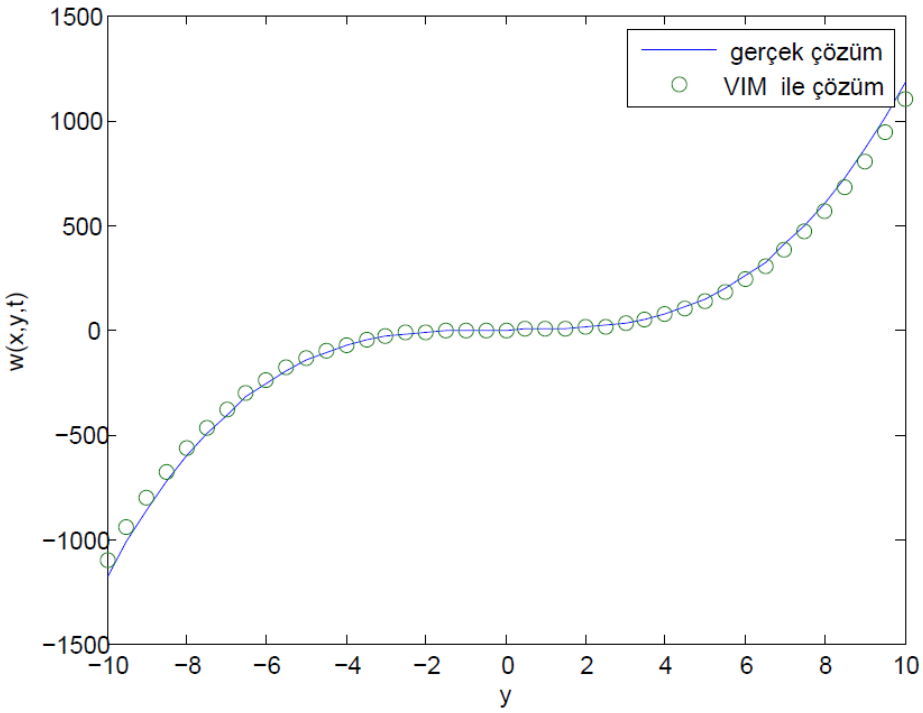
$$w_1(x, y, z, t) = \frac{1}{6} zy^3 e^{-x^2}(6 + 12t - 15t^2 + 2t^3)$$

değeri bulunur. Aynı şekil $w_2(x, y, z, t)$ ikinci adımda

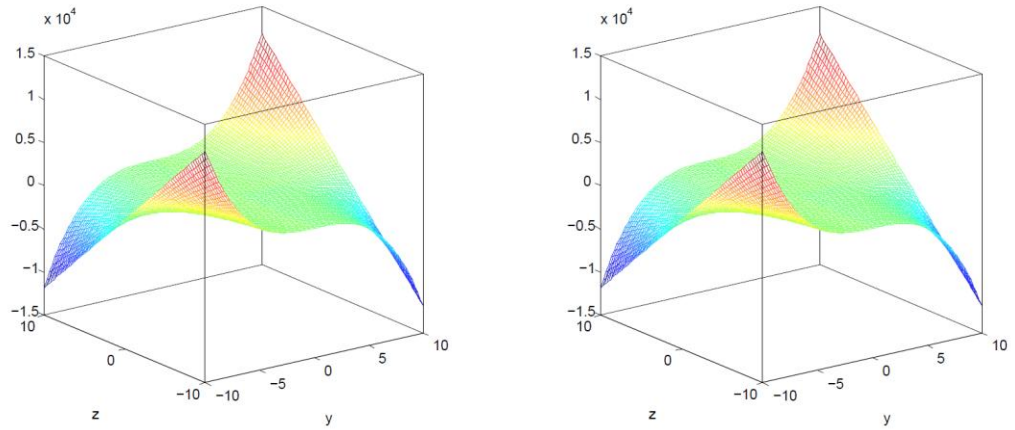
$$\begin{aligned} \mathrm{w_2(x, y, z, t)} = \frac{1}{36} \mathrm{zye^{-x^2}}(&-144y^2x^2t^2 + 240y^2x^2t^3 - 36144y^2x^2t^4 - 54 + 36t^2 \\ &+ 126t^2y^2 + 72y^2t - 468t^3y^2 + 291t^4y^2 - 216t^2 + 360t^3 \\ &- 60t^5y^2 + 4t^6y^2 \end{aligned}$$

değerine ulaşılır.

İkinci adımda VIM ile bulunan değer ile gerçek çözüm Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 de karşılaştırıldığında çok iyi bir sonuç olduğu anlaşılmaktadır.




Şekil 4.6: Örnek 5 için z=1, x=0.5 ve t=0.5 deki w(x,y,t) nin VIM ile bulunan değer ile gerçek çözümün karşılaştırılması




(a) (b)

Şekil 4.7: Örnek 5 için (a) t=0.5 ve x=0.5 de w(x,y,t) nin VIM ile bulunan sonucun grafiği (b) ) t=0.5 ve x=0.5 de w(x,y,t) nin gerçek çözümün grafiği

**4.6. Örnek 6**

(3.26)-(3.29) denkleminde bir boyutlu uzayda $\Omega = [0,1]$ ve $T = 1$

$$u(x,0) = g(x) = cos(x) \quad x \in \Omega \tag{4.26}$$

$$u(0,t) = f_0(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}, \qquad t \in (0,1] \tag{4.27}$$

$$u(1,t) = f_1(t) = \cos(1)e^{-t^2}, \qquad t \in (0,1] \tag{4.28}$$

başlangıç sınır değerleri ile

$E(t) = cos(0.25)e^{-t^2}$
ek koşulunu alalım. Burada $x^* = 0.25$' dir. Problemin gerçek çözümleri ise

$u(x,t) = cos(x)\, e^{-t^2}$ $ve$ $a(t) = 2t$ 'dır.

$u_0(x,t) = g(x) = cos(x)$ başlangıç koşulu ile başlanırsa birinci adımda

$u_1(x,t) = cos(x)\, e^{-t^2}$ biçiminde bulunur ki bu gerçek çözümdür. Buradan (3.39) denklemi ile $a(t) = 2t$ gerçek değeri bulunur.

**4.7. Örnek 7**

(3.26)-(3.29) denklemini iki boyutlu uzayda $\Omega = [0,1]^2$ ve $T = 1$ olmak üzere

$$g(x,y) = sin(x,y) \quad (x,y) \in \Omega \tag{4.29}$$

$$u(0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}^3} siny \qquad t \in (0,1] \tag{4.30}$$

$$u(1,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}^3} \sin(1+y) \qquad t \in (0,1] \tag{4.31}$$

$$u(x,0,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}^3} sinx \qquad t \in (0,1] \tag{4.32}$$

$$u(x,1,t) = e^{t^3}\sin(1+x) \qquad t \in (0,1] \tag{4.33}$$

başlangıç sınır değerleri ile

$$E(t) = e^{t^3}\sin(0.6) \tag{4.35}$$

ek koşulunu ele alalım. Burada $(x^*, y^*) = (0.4,0.2)$'dır. Problemin gerçek çözümleri

$u(x,y,t) = e^{t^3}\sin(x+y)$ ve $a(t) = -3t^2$ 'dır.

$u_0(x,y,t) = g(x,y) = \sin(x+y)$ başlangıç değeri ile başlanılırsa birinci adımda

$u_1(x,y,t) = e^{t^3}\sin(x+y)$ biçiminde bulunur ki bu gerçek çözümdür. Buradan

(3.39) denklemi ile $a(t) = -3t^2$ gerçek değeri bulunur.

## 5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Reaksiyon-difüzyon ve ısı denklemleri, fizikte, kimyada, mühendislikte, ekolojide ve daha birçok alanda birer model oluşturduğundan ayrı bir öneme sahiptir.

Bu çalışmada, reaksiyon-difüzyon ve ısı denklemlerine varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem lineer olmayan problemler için gerçek çözüme etkili, kolay ve hızlı bir şekilde yansımayı sağlar. Lineer problemler için ise gerçek çözüm, sadece bir iterasyon adımında elde edilir Yapılan çalışmada da görüldüğü gibi parabolik problemlerde langrange çarpanı $t$ değişkenine göre bulunup, iterasyon uygulandığında tek bir adımda istenilen gerçek çözüme ulaşılır. Fakat $x$ değişkenine bağlı langrange çarpanı bulunduğunda ise parabolik problemlerde Laplace operatörü bulunduğundan istenilen çözüme belli adımlarla yakınsamaktadır. Bunun bu şekilde farklı yakınsamalarının bir sebebi de langrange çarpanının tam olarak bulunamamasıdır. İterasyondaki adım sayısını artırdığımızda ise hata oranının azaldığı ve daha geniş aralıklarda yakınsamanın olduğu görülür. Problemi ele alırken uygun başlangıç ve sınır değerlerinin alınması da çok önemlidir. Reaksiyon-difüzyon denklemini Dirichlet tipi sınır değerleri ile çözmeğe çalıştığımızda elde edilen çözüm gerçek çözümden çok uzak olduğu görülür. Fakat Neumann tipi sınır değerleri alındığında ise Tablo1,2,3 de görüldüğü gibi çok iyi sonuçlar elde edilir. Isı ve reaksiyon-difüzyon gibi problemlerin çözümünde katsayılar önem taşımaktadır. Ele alınan örneklerde katsayıların farklı değişkenlere bağlı olması ve bu problemlerin çözümlerinin varyasyonel iterasyon yöntemi ile çok kolay bir şekilde bulunması yöntemin önemini artırmaktadır. Üstelik bu yöntem değişkenlerin ayrımına gerek duyulmaksızın problemleri çözer. Bu yüzden, ele alınan problemlerin üzerinde yapılan hata hesaplarından etkilenmez ve bilgisayarın geniş hafıza ve CPU zamanlarına ihtiyaç duymaz. Bu özellik, farklı örnekler üzerinde test edilmiştir

.Son zamanlarda, günlük hayatta çözümünde zorlandığımız lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin bulunması ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bundan sonraki çalışmalarımda lineer olmayan problemler üzerinde araştırma yapmayı planlıyorum.

## KAYNAKLAR


[1] Can, E., "Isı transferi ve difüzyon olaylarında ters problemler", Doktora Tezi, ***Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü***, İstanbul, 1-13, (2000).

[2] Can, E., "Numerical procedures for determining of an unknown parameter in parabolic equation", ***Applied Mathematics and Computation***, 162, 1219-1226, (2005).

[3] Cannon, J.R., "Determination of certain parameter in heat conduction problems", ***J. Math. Anal. Appl.***, 8, 188-321, (1964).

[4] Cannon, J.R., "Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data", ***SIAM J. Numer Anal., 5, 275-286***, (1968).

[5] Cannon, J.R., Ewing, R.E., "Determination of a source term in a linear parabolic partial differential equation", ***J. Appl. Math. Phys.***, 27, 393-401, (1976).

[6] Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., "Determination of an unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial boundary data", ***J. Heat Transfer***, 100, 503-507, (1978).

[7] Cannon, J.R., ve DuChateau, P.C., "An inverse problem for a nonlinear diffusion equation", ***SIAM J.Appl. Math.***, 39(2), 272-289, (1980).

[8] Cannon, J.R. ve Zachman, D., "Parameter determination in parabolic differential equations from overspecified boundary data", ***Int. J. Engng. Sci.***, 20, 779-788, (1982).

[9] Cannon, J.R., "The one-dimensional heat equation", ***Addison-Wesley***, (1984)

[10] Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of nonlinear nonclassical parabolic problems", ***J. Diff. Eqs***, 79, 266-288, (1989a).

[11] Cannon, J.R. ve Yin, H.M., "A class of multidimensional nonclassical parabolic equations", ***in Proc. Int. Conf. on Differential Equations and Applications***, Ohio University Pres, 122-127, (1989b).

[12] Cannon, J.R., ve Lin, Y., "An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation", ***J. Math. Anal. Appl.***, 145, 470-484, (1990).

[13] Cannon, J.R., Lin, Y., ve Wang, S., "Determination of source parameter in parabolic equations", ***Meccanica***, 27, 85-94, (1992).

[14] Cannon, J.R., DuChateau, P.C., ve Steube, K., "Trace type functional differential equations and the identification of hydraulic properties of porous media", ***Transport Porous Media***, 6, 745-758, (1991).

[15] Cannon, J.R., DuChateau, P.C., ve Steube, K., "Unknown Ingredient Inverse Problems and Trace-Type-Functional Differential Equation (1992).

[16] Pilant, M.S., ve Rundell, W., "Undetermined coefficient problems for nonlinear elliptic and parabolic equations", ***Inter. Ser. Num. Math***., 77, 139-154, (1986).

[17] Pilant, M.S., ve Rundell, W., " Iteration schemes for unknown coefficient problems arising in parabolic equation", ***Numer. Methods in P.D.E***., 3, 313-325, (1987a).

[18] Pilant, M.S., ve Rundell, W., "An inverse problem for a nonlinear elliptic equation", ***SIAM J.Math. Anal***., 18, 1801-1809, (1987b).

[19] Pilant, M.S., ve Rundell, W., "Fixed point methods a nonlinear parabolic inverse problem", ***Comm. In P.D.E***., 13, 469-493, (1987c).

[20] Pilant, M.S., ve Rundell, W., "A uniqueness theorem for determining conductivity from overspecified boundary data", ***Journal of Math. Anal. Appl***., 136, 20-28, (1988).

[21] Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T., "An efficient algorithm for solving fifth for order
boundary value problems", ***Math. Cmput. Model.*** 45, 954-964, 2007.

[22] Noor, M.A., Mohyud-Din, T.S., "An efficient method for fourth order boundry value problems" ***Int. J. Computer & Math. with Appl.*** 54, 1101-1111, 2007.

[23] Noor, M.A., Momani, S., "A numerical method of fourth order fractional integro-differential equations"**, *Appl. Math. Comput.*** 182,754-760, 2006.

[24] Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T., "Variaitonal iteration technique for solving higher order boundary value problems, ", ***Appl. Math. and Comput.*** 189, 1929-194, 2007.

[25] Xu, L., " The variational iteration method for fourth order boundary value problems, ",**Chaos, Solitns and Fractals**, 2007.

[26] Syam, M.I., Siyyam, H.I., "An efficiant technique for finding the eigenvalues of fourth order Sturm-Liouville problems, ", ***Chaos, Solitons and Fractals***, 2007.

[27] Lu, J., "Variaitonal iteration method for solving two-point boundary value problems", ***J. Comput. and Appl. Math***. 207, 92-95, 2007.

[28] Tatari, M., Dehghan M., "On the convergence of He's variational iteration method", ***J. Computational and Appl. Mathematics***, 39,2007

[29] Noor.M.A, Mohyud-Din, S.T., "An efficient method for fourth-order boundary value problems". ***Computer and Mathematics with*** Applications 54, 1101-1111, 2007.

[30] Xu, L., The variational iteration method for fourth order boundary value problems". ***Chaos, Solitions and Fractals*** 39, 1386-1394, 2009.

[31] He, J.H., "A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non- linear problems" ***Int. J.Nonlin. Mech***., 35, 37-43, 2000.

[32] He, J.H., "The homotopy perturbation method for non-linear oscillators with Discontinuities", ***Applied Mathematics and Computations, Appl. Math. Comput.,*** 151, 287-292, 2004.

[33] He, J.H., "Application of homotopy perturbation method to non-linear wave equation", ***Chaos Soliton. Fract.,*** 26, 695-700, 2005.

[34] He, J.H., "Asymptotology by homotopy perturbation method", ***Appl. Math.Comput***. 156, 591-596, 2004.

[35] Coskun, S.B., Atay M.T.,Analysis of convective straight and radial fins with temperature-dependent thermal conductivity using variational iteration method with comparison with respect to finite element analysis **. *Mathematical Problems in Engineering,*** 2007, Article ID: 42072, 2007.

[36] Atay M.T., Coskun, S.B. Effects of nonlinearity on the variational Iteration solutions of nonlinear two-point boundary value problems with comparison with respect to finite element analysis''.***Mathematical Problems in Engineering, 2008,41 Article*** ID: 857296, 2008.

[37] Inokuti, M.,Sekine, H., Mura, T., General use of the Lagrange multiplier in nonlinear Mathematical physics, S.Nemat-Nosser (Ed.). ***Variational Methods in the Mechanics of Solids,*** Pergamon Press, New York, , pp.156-162, 1978.

[38] Ramos J.I., On the variational iteration method and other iterative techniques for Non-linear differantial equations, ***Appl.Math.Comput*** 199, 36-39, 2008.

[39] He, J.H., A new approach to nonlinear partial differantial equations***, Common. Nonlinear Sci.Numer.Simul***.2, 230-235, 1997.

[40] N.F.Britton, Reaction-diffusion equations and Their applications to biology, ***Academic Press Inc. (Harcourt Brace Jovanovich Publishers***), New York,1998.

[41] R.S.Cantrell, C.Cosner, Spational Ecology Via Reaction-diffusion equations, ***Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, Wiley, Chichester***, 2003

[42] He, J.H., The homotopy perturbation method for solving boundary problems, **Phys. Lett.** A, 350, 87-88, 2006.

[43] He, J.H., An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nanomechanics in textile engineering, ***Int. J. Mod. Phys.*** B, 22, 3487-3578, 2008.

[44] He, J.H. Recent development of the homotopy perturbation method, Topol. Method***. Nonl. An***., 31, 205-209, 2008.

[43] Islam, S., Ali, I., Shah, A., Ran, X.j., Siddiqui, A. M.,Effect of coupled stresses on flow of third grade fluid between two parallel plates using Homotopy Perturbation Method, ***Int. J. Nonlin. Sci. Num.10***(1), 99-112, 2009.

[45] Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T., Homotopy Perturbation Method for solving nonlinear higher oder boundary value problems, ***Int. J. Nonlin. Sci. Num***., 9(4) 395-408, 2008.

[46] Mahmood, M., Hossain, M.A., Asghar, S., Hayat, T., Application of Homotopy Perturbation method to deformable channel with wall suction and injection in a porous medium, ***Int. J. Nonlin. Sci. Num.,*** 9, 195-206, 2008.

[47] Coskun, S.B., Atay M.T., Analysis of convective straight and radial fins with temperature-dependent thermal conductivity using variational iteration method with comparison with respect to finite element analysis **. *Mathematical Problems in Engineering***, 2007, Article ID: 42072, 2007.

[48] Atay M.T., Coşkun, S.B., 'Effects of nonlinearity on the variational iteration solutions of nonlinear two-point boundary value problems with comparison with respect to finite element analysis'.***Mathematical Problems in Engineering***, 2008,

[49] He, J.H., 'A new approach to nonlinear partial differantial equations, Common. Nonlinear ***Sci.Numer.Simul.***2, 230-235, 1997.

[50] He, J.H., Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples***,Int.J.Non-Linear Mech.***34, 699-708 , 1999.

[51] He, J.H., Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations,***Int.J.Modern Phys***.20, 1141-1199, 2006.

[52] He, J.H., Variational approach to the Lane-Emden equation, ***Appl.math.Comput.*** 143, 539-541, 2003.

[53] Sozucok,I., Bayrak, A.'The application of He's variational iteration method to linear Cauchy reaction- diffusion equation', **computers& mathematics with applications**. (incelemede)2011.

[54] Gok, N. 'Yüksek dereceden lineer ve lineer olmayan iki noktalı sınır değer problemlerinin çözümlerinin varyasyonel iterasyon metodu ile hesaplanması' Yüksek Lisans Tezi,**Niğde Üniversitesi Fen bilimler Enstitüsü** Niğde,8-12,2009.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Bitlis'te doğdu. İlkokulu Tatvan'da, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2004 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır. 2010 yılından beri Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.