



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TUZAKLANMIŞ SOĞUK ATOMLARIN FİZİĞİ

Elife Öznur KARABULUT

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Aralık-2010
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Elife Öznur KARABULUT

23/11/2010

ÖZET

DOKTORA TEZİ

TUZAKLANMIŞ SOĞUK ATOMLARIN FİZİĞİ

Elife Öznur KARABULUT

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa KOYUNCU

2010, 79 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Mustafa KOYUNCU
Prof. Dr. Mehmet TOMAK
Prof. Dr. Ayhan ÖZMEN
Prof. Dr. Rıza OĞUL
Prof. Dr. Ülfet ATAV

Bu tez çalışması anharmonik tuzaklardaki ultra soğuk ve seyreltik gazların Bose-Einstein yoğuşması üzerinedir. Bu amaçla, harmonik artı kuartik ve kuartik potansiyel tuzaklar göz önüne alınmıştır. Bu tuzaklardaki yoğuşumlar etkileşen ve etkileşmeyen sistemler şeklinde iki ana başlık altında incelenmiştir. Geleneksel yöntemlerden farklı olarak sayısal hesaplamaya dayalı kuantum mekaniksel bir yaklaşım ile D-boyutlu kuartik bir tuzaktaki etkileşmeyen Bose gazı için kapsamlı bir termodinamik analiz gerçekleştirilmiştir. Parçacıklar arası etkileşimlerin yoğuşumun temel özellikleri üzerindeki rolünü belirlemek için Gross-Pitaevskii denklemi ve iki akışkan modelinden yararlanılmıştır. Yoğuşumun $T = 0\,\mathrm{K}$ deki özellikleri, Gross-Pitaevskii denkleminin sayısal çözümüne dayalı olarak atomlar arası itici ve çekici etkileşimler, taban ve radyal olarak uyarılmış durumlar, iki ve üç parçacık etkileşimleri gibi açılardan ele alınarak incelenmiştir. Ayrıca tuzaklama potansiyeli geometrisinin ilgili sonuçlar üzerindeki etkileri de dikkate alınmıştır. Son olarak sonlu sıcaklıklardaki etkileşen bir Bose gazının termodinamik özellikleri iki akışkan modeli kullanılarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bose-Einstein yoğuşması, ultra soğuk gazlar, anharmonik tuzaklar, ortalama alan teorisi, Gross-Pitaevskii denklemi, iki akışkan modeli.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

THE PHYSICS OF COLD TRAPPED ATOMS

Elife Öznur KARABULUT

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN PHYSICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa KOYUNCU

2010, 79 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Mustafa KOYUNCU
Prof. Dr. Mehmet TOMAK
Prof. Dr. Ayhan ÖZMEN
Prof. Dr. Rıza OĞUL
Prof. Dr. Ülfet ATAV

This thesis is on the phenomenon of Bose-Einstein condensation of ultra cold and dilute gases in anharmonic traps. To that end, harmonic plus quartic and quartic potential traps have been considered. The condensates in these traps have been studied under two main topics as interacting and non-interacting systems. A comprehensive thermodynamic analysis has been carried out for the non-interacting Bose gas in a D-dimensional quartic trap by a quantum mechanical treatment based on numerical calculation which is different from the conventional methods. In order to determine the role of interparticle interactions on the main features of the condensate, the Gross-Pitaevskii equation and the two-fluid model have been utilized. Based on the numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation, the properties of the condensate at $T = 0\,\mathrm{K}$ have been investigated by discussing such aspects as repulsive and attractive interatomic interactions, ground and radially excited states, two- and three-body interactions. Furthermore, the effects of the geometry of the trapping potential on the corresponding results have also been taken into account. Finally, the thermodynamic properties of an interacting Bose gas at finite temperatures have been calculated by using the two-fluid model.

Keywords: Bose-Einstein condensation, ultra cold gases, anharmonic traps, mean-field theory, Gross-Pitaevskii equation, two-fluid model.

ÖNSÖZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada, anharmonik tuzaklardaki ultra soğuk ve seyreltik gazların Bose-Einstein yoğuşması incelenmiştir. Bose-Einstein yoğuşmasının deneysel olarak elde edilmesinden bu yana harmonik tuzaklardaki yoğuşumların statik, dinamik ve termodinamik özellikleri hemen hemen tüm açılardan ele alınarak kapsamlı bir şekilde çalışılmış ve sonuçta iyi bilinen ve zengin bir teorik alt yapı ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte ultra soğuk atomların tuzaklanmasında henüz yeni olarak nitelendirebileceğimiz anharmonik tuzakların yoğuşum üzerindeki etkileri son birkaç yıldır yoğun bir şekilde çalışılan ve harmonik tuzaklara göre oldukça farklı bir fiziğe sahip yeni bir çalışma alanıdır. Anharmonik tuzaklardaki yoğuşumların özellikleri ile ilgili bu tez çalışmasının ileride bu alanda yapılacak çalışmalar için yararlı bir kaynak niteliğinde olduğu düşünülmektedir.

Tez çalışması süresince bilgi ve tecrübeleri ile bana her konuda yardımcı olan değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mustafa KOYUNCU' ya çok teşekkür ederim. Ayrıca derin bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, desteğini ve inancını benden esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mehmet TOMAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Fikir, bilgi ve tecrübeleri ile daima bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ayhan ÖZMEN' e teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında karşılaştığım problemleri çözmede bilgisi, tecrübesi, sonsuz sabrı ve anlayışı ile daima yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Ülfet ATAV' a yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım. Yine tez çalışmam süresince, destek ve teşviklerini esirgemeyen Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik bölümü elemanlarına çok teşekkür ederim.

Son olarak çalışmalarım sırasında sevgisi, inancı, sabrı ve bilgisi ile bana her noktada destek veren sevgili eşim İbrahim' e ve sonsuz sevgi, destek ve şefkatlerini daima üzerimde hissettiğim ve güç aldığım canım anne ve babama en içten sevgi ve şükranlarımı sunarım. Bu tez çalışmasını onlara ithaf ediyorum.

Elife Öznur KARABULUT
KONYA-2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. BE Yoğuşumlarına Genel Bir Bakış 1
1.2. BE Yoğuşumları ve Anharmonik Tuzaklar 3
1.3. Tezin Amacı ve Planı 4

2. ETKİLEŞMEYEN BOSE GAZI **6**

2.1. Geçmişten Günümüze Etkileşmeyen Bose Gazları 6
2.2. *D*-Boyutlu Kuartik Tuzaktaki İdeal Bose Gazının Termodinamik Özellikleri 8
2.3. Sonuçlar ve Tartışma 12

3. MUTLAK SIFIRDA ETKİLEŞEN BOSE GAZI **20**

3.1. Ortalama Alan Teorisi ve GPD 20
3.2. Harmonik artı Kuartik Tuzaktaki Yoğuşumun Taban Durum Özellikleri 24
3.2.1. Dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı 27
3.3. Sonuçlar ve Tartışma 29

4. TUZAKLANMIŞ BOZONLARDA ÜÇ PARÇACIK ETKİLEŞİMLERİ **39**

4.1. Çekici İki Parçacık ve İtici Üç Parçacık Etkileşimleri 39
4.2. Harmonik artı Kuartik Tuzaktaki Yoğuşumun Kararlılık Problemi 40
4.3. Sonuçlar ve Tartışma 44

5. SONLU SICAKLIKTA ETKİLEŞEN BOSE GAZI **51**

5.1. Yarı Klasik İki Akışkan Modeli 52
5.2. İki Boyutlu Kuartik Tuzakta Etkileşen Bose Gazının Termodinamiği 54
5.3. Sonuçlar ve Tartışma 57

6. YORUM VE ÖNERİLER **65**

KAYNAKLAR **69**

ÖZGEÇMİŞ **77**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

k_B : Boltzmann sabiti (J/K)
$\hbar$, h : Planck sabiti $h = 2\pi\hbar$ (J.s)
Γ : gama fonksiyonu
ζ : Riemann zeta fonksiyonu
m : atomik kütle (kg)
T : sıcaklık (K)
T_C : kritik sıcaklık (K)
T_0 : yoğuşma sıcaklığı (K)
N : toplam parçacık sayısı
N_0 : taban durumdaki ortalama parçacık sayısı
N_0/N : yoğuşum kesri
$V_{dış}$: dış tuzaklama potansiyeli (J)
E_D : D-boyuttaki enerji özdeğerleri (J)
E_ν : belirli bir tuzaklama potansiyeli için tek bir etkileşmeyen parçacığın enerji seviyeleri (J)
μ : kimyasal potansiyel (J)
C_N : sistemdeki belirli sayıda parçacık için ısı kapasitesi (J/K)
C_V : öz ısı (J/K)
S : entropi (J/K)
ρ_C : yoğuşum merkez yoğunluğu
$\langle r^2 \rangle$: ortalama kare yarıçap (m^2)
a : s-dalga saçılma uzunluğu (m)
l : harmonik salınıcı uzunluğu (m)
λ_{dB} : termal de Broglie dalgaboyu (m)
λ : kuartik salınıcı şiddeti ($kg/m^2.s^2$)
λ_3 : üç parçacık etkileşim şiddeti
$n(E_\nu)$: ν tek parçacık durumunun ortalama doluluk sayısı
n_α : α tek parçacık durumunda bulunan atomların sayısı
Ψ_α : tek parçacık dalga fonksiyonu
Φ , ϕ : yoğuşum dalga fonksiyonu
$\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^\dagger$: bozon alan operatörleri
a_α : bozon yok etme operatörü
$a_\alpha^\dagger$: bozon yaratma operatörü
$\hat{\Psi}'$: yoğuşumdaki azalmayı ifade eden operatör

Kısaltmalar

BE	: Bose-Einstein
BEY	: Bose-Einstein yoğuşması
GPD	: Gross-Pitaevskii denklemi
MYY	: modifiye yarı klasik yaklaşım
HF	: Hartree-Fock

1. GİRİŞ

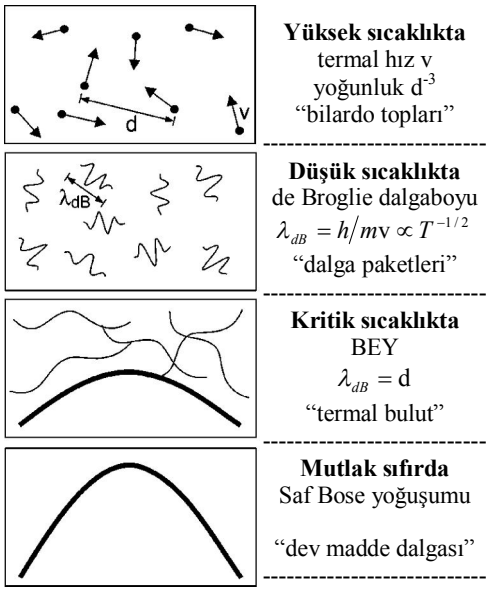
Alkali atomların ultra soğuk buharları için Bose-Einstein (BE) yoğuşmasının deneysel olarak elde edilmesi, manyetik tuzaklar ile optik örgüler içerisinde yoğuşmuş halde olan seyreltik atomik gazlara duyulan ilgiyi arttırmıştır. BE yoğuşumları, yüksek saflıkta olmaları ve kolay optik erişim imkanı sağlamaları nedeniyle etkileşen kuantum sistemlerindeki temel konular üzerine araştırma yapmak için oldukça uygun sistemlerdir.

Bu bölümde, BE yoğuşması (BEY) genel hatları ile tanımlandıktan sonra anharmonik tuzaklar ile BE yoğuşumları arasındaki ilişkiye değinilecektir.

1.1. BE Yoğuşumlarına Genel Bir Bakış

BEY ilk olarak 1925 yılında, Satyendra Nath Bose' un (1924) siyah cisim spektrumunu elde etmek için önerdiği bir yöntemin Albert Einstein (1924, 1925) tarafından kullanılması sonucunda ortaya atılmıştır. Bir bozon gazı belirli bir T_C kritik sıcaklığının altına kadar soğutulduğunda sistemdeki atomların büyük bir kısmı en düşük kuantum durumuna yoğuşurlar. T sıcaklığındaki m kütleli atomlar, uzaysal boyutları termal de Broglie dalgaboyu $\lambda_{dB} = \left(2\pi\hbar^2 / mk_B T\right)^{1/2}$ mertebesinde olan kuantum mekaniksel dalga paketleri olarak düşünülebilirler. λ_{dB}' nin değeri, termal momentum dağılımı ile ilişkili olarak, konumdaki belirsizliğe karşılık gelir ve azalan sıcaklık ile birlikte artar. Atomlar, de Broglie dalgaboyu atomlar arası ortalama uzaklık ile karşılaştırılabilir hale gelinceye kadar soğutulduğunda atom dalga paketleri üst üste biner ve özdeş parçacıklar arasında bir kuantum girişimi meydana gelir. Böylelikle atomlar kuantum mekaniksel bir faz geçişine uğrar ve sonuçta bir BE yoğuşumu oluştururlar. Aynı kuantum mekaniksel durumu (taban durum) işgal eden makroskopik sayıda atomdan oluşan eş fazlı atom bulutu bir çeşit "dev madde dalgası" durumundadır (Şekil 1.1).

Bu durumda prensip olarak bir BE yoğuşumunun oluşturulması oldukça basittir. Bir gazı, atom dalga paketleri üst üste binmeye başlayana kadar soğutmak yeterli gözükmektedir. Fakat birçok durumda sistem sıvı ya da katı faza geçerek bu kuantum dejenerasyonunun önüne geçilmiş olunur. Bu iyi bilinen sıvı ya da katıya yoğuşma durumu ancak sistem son derece düşük yoğunluklarda (örneğin, havanın yoğunluğunun



Şekil 1.1. BEY kriterinin şematik gösterimi. (Şekil Ketterle (2002) çalışmasından alınmıştır.)

yaklaşık milyonda biri kadar) olursa önlenebilir. Bu koşul altında, üç parçacık çarpışmalarından dolayı molekül ya da atom grupları oluşma süresi birkaç saniyeye ya da dakikaya kadar uzamış olur. Bu süre, BEY' in gerçekleşebilmesi için yeterince uzundur.

Sistemdeki üç parçacık çarpışmalarının oranı yoğunluğun karesi ile orantılı olarak azalırken ikili esnek çarpışmaların oranı yoğunluk ile orantılı olarak azalır. Bunun sonucunda düşük yoğunluklarda atomlar arasındaki ikili çarpışmalar üçlü çarpışmalara göre daha sık görülürler. Bu nedenle sistem kimyasal dengeye ulaşmadan yarı kararlı bir gaz fazında kuantum dejenerasyonu oluşması mümkündür. Fakat gazın yoğunluğunun bu kadar düşük olması, kuantum dejenerasyonu için gerekli olan sıcaklığın da mikro ya da nano Kelvin mertebesinde olmasını gerektirir.

Bu koşulların sağlanması ile 1995 yılında Rubidyum (Anderson ve ark., 1995), Sodyum (Davis ve ark., 1995) ve Lityum (Bradley ve ark., 1995; Bradley ve ark., 1997) için BEY ilk defa deneysel olarak gözlenmiştir. Deneylerde atomları soğutmak ve tuzaklamak için lazer soğutma ve manyeto-optik tuzaklama gibi lazere dayalı teknikler kullanılmıştır. Alkali atomlar üzerinde bu tekniklerin kullanılması son derece başarılı olmuştur çünkü mevcut lazerler ile bu atomların optik geçişleri rahatlıkla uyarılabilmektedir. Ayrıca, enerji seviyesi yapıları da çok düşük sıcaklıklara kadar soğutulmaları için oldukça uygundur.

Lazer soğutma tekniğinin temeli Doppler kaymasına dayanır (Hansch ve Schawlow, 1975). Atomlar tarafından saçılan fotonlar gelen lazer ışınına göre maviye

kaymış durumdadırlar. Bunun sonucunda, saçılan foton atomun soğurduğu enerjiden daha fazlasını alıp götürür. Bu da atom için net bir soğuma ile sonuçlanır.

Atomlar soğutulduktan sonra manyetik bir tuzak ile sınırlandırılırlar. Bu şekilde duvarsız bir sınırlama yapmak oldukça önemlidir; aksi takdirde atomlar içerisine konuldukları kabın yüzeylerine tutunurlar. Atomları manyetik olarak tuzakladıktan sonra ikinci bir soğutma yöntemi kullanılarak sistemin sıcaklığını daha da düşürmek mümkündür. Buharlaştırarak soğutma (Masuhara ve ark., 1988; Ketterle ve van Druten, 1996a) adı verilen bu yöntemde tuzak derinliği, en enerjik atomların tuzaktan kaçmalarına izin verecek şekilde azaltılır. Böylece geriye kalan atomların sıcaklıkları da azalmış olur.

Birçok BEY deneyinde kuantum dejenerasyonu, sıcaklığın 500 nK ile 2 μK yoğunluğun ise 10^{14} ile 10^{15} cm^{-3} arasında olduğu değerler için elde edilir. Yoğuşumdaki atom sayısı ise genellikle 10^3 ile 10^6 değerleri arasında olmaktadır (Ketterle, 2002).

1.2. BE Yoğuşumları ve Anharmonik Tuzaklar

Tuzaklanmış Bose gazları dış tuzaklama potansiyelinden ötürü homojen olmayan sistemlerdir. Gazın fiziksel özellikleri tuzağın geometrisine bağlı olarak önemli oranda değişebilir (Minguzzi ve ark., 2004). Manyetik tuzaklardaki BEY üzerine yapılan teorik çalışmaların çoğunda harmonik tuzaklama potansiyelleri kullanılmıştır. Fakat deneylerde kullanılan manyetik tuzakları harmonik bir potansiyel ile modellemek her durumda uygun olmayabilir. Bu manyetik tuzakların anharmonik potansiyeller ile daha iyi modellenebileceğinin ileri sürüldüğü çalışmalar bulunmaktadır (Li ve ark., 2008; Yong ve ark., 2009; Li ve ark., 2010).

Son yıllarda, harmonik bir potansiyele dördüncü dereceden (kuartik) bir terimin eklenmesi ile elde edilen ve "harmonik artı kuartik" olarak adlandırılan anharmonik potansiyeller hem deneysel hem de teorik olarak yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu çalışmalar, harmonik bir potansiyelden daha sınırlayıcı potansiyeller ile tuzaklanmış ultra soğuk gazların harmonik tuzaklardaki Bose gazlarına göre yeni ve daha farklı fiziksel özelliklere sahip olduklarını ortaya koyar. Örneğin dönen yoğuşumlar ile ilgili deneylerde, harmonik bir tuzaktaki yoğuşumun dönme frekans değeri tuzak frekans değerine yaklaştığında yoğuşumun kaybolduğu gözlenmiştir (Rosenbusch ve ark., 2002). 2004 yılında deneysel olarak elde edilen harmonik artı kuartik tuzak potansiyeli

ile yoğuşum için söz konusu olan bu problem ortadan kalkmıştır (Bretin ve ark., 2004; Stock ve ark., 2004). Bu deneyin sonucuna göre potansiyelde anharmonik bir terimin bulunması ile 1) yoğuşum dönme frekansı, artık tuzak frekansı ile sınırlı değildir, 2) sistem birden çok kuantumlu girdap durumu sergiler.

Bir BE yoğuşumunun kararlılığı da tuzak geometrisi ile ilişkilidir (Chakrabarti ve ark., 2009). Tuzaklama potansiyelindeki küçük bir kuartik terim bile yüksek mertebeli doğrusal olmayan kiplerin kararlılık özelliklerini önemli ölçüde değiştirir. Bu durum, böyle bir anharmonik potansiyelin eşit aralıklı bir spektruma sahip olmamasından kaynaklanır. Sonuçta, anharmonik bir tuzaktaki doğrusal olmayan durumların harmonik tuzaktakilere göre daha kararlı oldukları bulunur (Zezyulin ve ark., 2008). Ayrıca, harmonik tuzak durumu ile karşılaştırıldığında potansiyeldeki küçük bir anharmonik katkının bile uyarılma kiplerinde belirgin frekans kaymalarına neden olduğu deneysel olarak gözlenmiştir (Ott ve ark., 2003).

Anharmonik potansiyellerin limit durumu olan kuartik potansiyeller için yoğuşumun kararlılık-kararsızlık tablosu, harmonik artı kuartik potansiyeldeki durum ile benzerlik gösterir (Zezyulin ve ark., 2008). Bununla birlikte, Gygi ve ark.' nın (2006) belirttikleri gibi, optik örgülerdeki bozonların kuantum faz geçişlerinin deneysel olarak gözlenmesinde kuartik tuzaklar ile çalışmak daha avantajlıdır. Literatürde, bu tuzak geometrisi kullanılarak gerçekleştirilen etkileşmeyen bozon sistemleri ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır (Gautam ve Angom, 2008; Ramakumar ve Das, 2008). Bu tür bir sistemin *D*-boyutlu kuartik bir tuzaktaki termodinamik özelliklerinin incelendiği çalışmada (Karabulut ve ark., 2010a), kuartik tuzaktaki sistemler için elde edilen yoğuşma sıcaklıklarının harmonik tuzaktakilere göre daha büyük olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca, kuartik tuzaklardaki etkileşen Bose sistemleri sıfır ve sonlu sıcaklıklarda incelenmiştir. İki boyutlu kuartik tuzaktaki zayıf etkileşen Bose gazının sonlu sıcaklıklardaki özelliklerinin harmonik tuzaktaki gazın özelliklerinden oldukça farklı olduğu bulunmuştur (Karabulut ve ark., 2010b). Benzer şekilde, yoğuşumun sıfır sıcaklıktaki statik ve dinamik özelliklerinin de harmonik tuzaktaki yoğuşumun özelliklerinden farklı olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Chaudhary ve ark., 2009).

1.3. Tezin Amacı ve Planı

Bir önceki kesimde bahsedildiği gibi, BEY ile ilgili deneysel çalışmalarda anharmonik tuzakların kullanılması ile bu tuzaklarda elde edilen yoğuşumların fiziği de

ilgi görmeye başlamıştır. Bu ilgi doğrultusunda, tez çalışmasında harmonik artı kuartik ve kuartik tuzaklardaki Bose gazlarının özellikleri parçacıklar arası etkileşimler, uzaysal boyut, sıfır ve sonlu sıcaklıklar, yoğuşumun kararlılığı gibi açılardan ele alınarak incelenmiştir.

İlk olarak, Bölüm 2' de *D*-boyutlu kuartik bir tuzak ile sınırlandırılmış etkileşmeyen bozonlardan oluşan bir sistemde BEY olayı incelenmiştir. Etkileşmeyen bir sistem göz önüne alınarak, harmonik ve kuartik tuzaktaki yoğuşumlar arasındaki fark en temel haliyle termodinamik açıdan ele alınmıştır. Ayrıca, sistemin sonlu büyüklükte olması, sonlu sıcaklık etkileri ve uzaysal boyutun rolü üzerinde de durulmuştur.

Bölüm 3' de atomlar arası etkileşimlerin varlığında Gross-Pitaevskii denklemi (GPD) temel alınarak ortalama alan teorisinin ayrıntılarına yer verilmiştir. Burada göz önüne alınan anharmonik tuzak, harmonik artı kuartik tipte olup yoğuşumun taban durumu, atomlar arası iki parçacık etkileşimlerinin çekici ya da itici olmasına göre ayrı ayrı incelenmiştir. Ayrıca, sistemin taban durum özelliklerinin potansiyeldeki anharmonik katkının büyüklüğü ile olan değişimi ele alınmıştır. Sistemin taban durum çözümü ile birlikte radyal olarak uyarılmış durumlarına ait çözümler de elde edilmiştir. Son olarak, yoğuşumun kararlılığı atomlar arasındaki etkileşimlerin çekici ve itici olması açısından değerlendirilmiştir.

Bölüm 4' de yoğuşumdaki atomlar arasındaki üç parçacık etkileşimleri ortalama alan yaklaşımı çerçevesinde ele alınmıştır. Buna göre, çekici iki parçacık etkileşimleri ile itici üç parçacık etkileşimleri arasındaki rekabetin sistemin kararlılığı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. İlgili sonuçlar, üç parçacık etkileşim şiddetinin ve tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğü de göz önüne alınarak değerlendirilmiştir.

Bölüm 5' de iki boyutlu kuartik bir tuzaktaki etkileşen Bose gazı sonlu sıcaklıklarda ele alınarak incelenmiştir. Bunun için bir ortalama alan yaklaşımı olan iki akışkan modeli kullanılarak, atomlar arasındaki iki parçacık etkileşimlerinin farklı şiddetleri için, sistemin termodinamik özellikleri hesaplanmıştır.

Son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar üzerine genel bir tartışma yapılmıştır.

2. ETKİLEŞMEYEN BOSE GAZI

BEY' in keşfi ideal gazlar için yapılmış olsa da yoğuşma parçacıklar arası etkileşimlerden ileri gelen bir durumdur (Nozieres, 1995). Fakat tuzaklanmış ideal gazlar, pedagojik ihtiyacın ötesinde ele alınması gereken önemli bir çalışma alanıdır. Çünkü deneysel olarak elde edilen yoğuşumlar sonlu ve homojen olmayan sistemlerdir. İdeal gaz, bu etkilerin kolaylıkla göz önüne alınabildiği ve sonuçta etkileşen sistemlerin çoğu özelliği ile ilgili nitel bilgiler edinmeyi sağlayan oldukça iyi bir modeldir. Bu bölümde, kuartik tuzaklardaki Bose gazlarının sonlu sıcaklıktaki özellikleri ideal gaz modeli çerçevesinde ele alınarak incelenecektir.

2.1. Geçmişten Günümüze Etkileşmeyen Bose Gazları

Deneysel olarak elde edilen BE yoğuşumları sonlu sayıda atoma sahip, oldukça seyreltik ve zayıf etkileşen sistemlerdir. Bu nedenle ideal gaz modeli, bu sistemlerin davranışlarını açıklamak için genellikle iyi bir yaklaşım olarak kabul edilir (Pitaevskii ve Stringari, 2003).

İdeal Bose gazları ile ilgili yapılan çalışmalar kronolojik bir sırada incelendiğinde başlangıçtan bu zamana kadar büyük bir ilerleme kaydedildiği görülür. Örneğin 1960' larda, bir ve iki boyutlu homojen sistemlerde BEY gözlenemeyeceği ile ilgili teoremler (Hohenberg, 1967; Chester ve ark., 1969) sebebi ile o dönemlerde düşük boyutlu sistemlere gösterilen ilgi oldukça azdı. Fakat uzaysal olarak homojen olmayan dış potansiyeller ile sınırlandırılmış düşük boyutlu sistemlerde BEY' in gözlenebileceğinin anlaşılması (Widom, 1968) ile bu sistemlere olan ilgi de artmıştır. Bu dönemin başlarında yapılan çalışmalarda, etkileşmeyen parçacıkların BE yoğuşum teorisi ya termodinamik limit (Widom, 1968; Rehr ve Mermin, 1970; Masut ve Mullin, 1979) ya da yarı klasik yaklaşım (Bagnato ve Kleppner, 1991) kullanılarak inceleniyordu. O dönemdeki genel kanı, tuzaklama potansiyelinin yeterince sınırlandırıcı olması durumunda ancak bir ve iki boyutlu sistemlerde BEY oluşabileceği yönünde idi. 1995 yılında BEY' in deneysel olarak elde edilmesi (Anderson ve ark., 1995; Bradley ve ark., 1995; Davis ve ark., 1995) ile termodinamik limit ve yarı klasik yaklaşımların tuzaklanmış ideal Bose gazlarını tanımlamakta yetersiz oldukları anlaşıldı. Çünkü deneysel olarak elde edilen yoğuşumlar sonlu atom sayısına sahip sonlu sistemlerdir ve termodinamik limit içerisinde ele alınmaları doğru olmaz. Ayrıca,

yarı klasik yaklaşımda kullanılan sürekli spektrum varsayımı da sıcaklığın düşmesi ile birlikte giderek daha az geçerli hale gelir (Pathria, 1998).

Bu sonlu sistemler BEY' i tanımlamakta kullanılan iki anahtar kelime "faz geçişi" ve "kritik sıcaklık" kavramlarının da yeniden yorumlanmasına yol açmıştır (Ketterle ve van Druten, 1996b; Mullin, 1997; Pathria, 1998). Faz geçişlerinin sadece termodinamik limitte meydana gelmesi, parçacık sayısının sonlu olduğu sistemler için BE yoğuşum kriterini "sistemin termodinamik fonksiyonları kritik sıcaklıkta süreksizlik gösterir" şartından "yoğuşma sıcaklığının altında taban durumun makroskopik olarak işgal edilmesi" yeterliliğine dönüştürmüştür (Ketterle ve van Druten, 1996b).

Uzun bir süre boyunca bu kriterin, düşük boyutlu tuzaklanmış gazlarda (özellikle de bir boyutlu olanlarda) BEY göstergesi olmasının tek başına yeterli olup olmadığı tartışılmıştır (Ingold ve Lambrecht, 1998). Çünkü BEY' in gözlendiği üç boyutlu sistemlerde, taban durumun işgal edilme sayısındaki ani artışa gazın ısı kapasitesinde görülen dikkat çekici bir pik eşlik eder (Kirsten ve Toms, 1996; Napolitano ve ark., 1997; Capuzzi ve Hernandez, 1999; Hu ve ark., 2003). Sonlu sistemler için karakteristik bir özellik olarak kabul edilen bu davranışın bir boyutlu sistemlerde gözlenmeyişi bahsedilen tartışmalara neden olmuştur.

BE faz geçişi ile ilgili bu çelişkiler bir ve iki boyutlu sistemlerde BEY' in deneysel olarak gözlenmesi (Görlitz ve ark., 2001; Schreck ve ark., 2001; Burger ve ark., 2002) ile sona ermiştir. Ardından Yukalov' un (2005) bir kuvvet yasası potansiyelinin tüm kuvvetleri için bir boyutlu tuzaklarda sonlu yoğuşma sıcaklıklarının var olduğunu analitik olarak gösterdiği çalışması ile deney ve teori arasındaki uyumsuzluk da giderilmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların tümünde sınırlayıcı potansiyel olarak deneysel koşulları iyi bir şekilde modellemesi ve analitik çözüm imkanı vermesi açısından harmonik salınıcı (Ketterle ve van Druten, 1996b; Haugset ve ark., 1997; Mullin, 1997; Ingold ve Lambrecht, 1998; Pathria, 1998) ya da kuvvet yasası tipinde (Bagnato ve Kleppner, 1991) tuzaklar ele alınmıştır. Fakat Kesim 1.2' de de belirtildiği gibi, son zamanlardaki çalışmalarda harmonik artı kuartik ve kuartik potansiyel tuzakların önem kazandığı ve bu potansiyeller ile sınırlandırılmış sistemlerin fiziğinin ilginç hale gelmeye başladığı görülmektedir. Bu ilgi doğrultusunda tez çalışmasının bu bölümünde, *D*-boyutlu kuartik bir tuzakta birbirleriyle etkileşmeyen sonlu sayıda bozondan oluşan sistemlerde BEY olayı incelenecektir (Karabulut ve ark., 2010a). Bu amaçla geleneksel yöntemlerden farklı ve sayısal hesaplamaya dayalı bir yöntem kullanılacaktır.

Hesaplamalarda sonlu parçacık sayıları ve kesikli enerji seviyeleri göz önüne alındığından termodinamik limitten ya da sürekli spektrum yaklaşımındaki ıraksak integrallerden kaynaklanan sorunlar ile karşılaşılmaz. Bir sonraki kesimde göz önüne alınan kuartik tuzaklardaki ideal bozonların termodinamik özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

2.2. *D*-Boyutlu Kuartik Tuzaktaki İdeal Bose Gazının Termodinamik Özellikleri

Bir kuartik salınıcı potansiyel ile sınırlandırılmış N sayıda etkileşmeyen bozona sahip bir sistem göz önüne alalım. Potansiyelin genel ifadesi aşağıda verildiği gibidir (Mathews ve ark., 1982):

$$\lambda(\vec{r}\cdot\vec{r})^2 . \tag{2.1}$$

Burada λ, lazer ışını özellikleri ile ilgili deneysel bir parametredir. Bu tür bir kuartik katkıya sahip harmonik artı kuartik tuzak, üç boyutta harmonik sınırlama sağlayan manyetik bir tuzak ile kuartik katkıyı oluşturmak için z doğrultusunda uygulanan bir lazer ışınının birlikte kullanılması sonucunda deneysel olarak elde edilebilir (Bretin ve ark., 2004). Bu anharmonik potansiyeli oluşturan lazer ışını parametrelerini ayarlamak yoluyla sadece kuartik terime bağlı Denk. (2.1)' deki gibi bir potansiyel elde etmek mümkündür (Gautam ve Angom, 2008). Sadelik açısından Denk. (2.1)' in kartezyen koordinatlardaki açılımından ileri gelen xy benzeri çapraz terimlerin ihmal edilmesi sonucunda bir, iki ve üç boyutta göz önüne alınan tuzaklama potansiyelleri sırasıyla aşağıda verildiği gibi olur:

$$V_1 = \lambda x^4 , \tag{2.2}$$

$$V_2 = \lambda(x^4 + y^4) , \tag{2.3}$$

$$V_3 = \lambda(x^4 + y^4 + z^4) . \tag{2.4}$$

Bir boyutlu kuartik salınıcının enerji özdeğerleri, seçilen uygun bir frekans değerinde harmonik salınıcı temel seviyeleri kullanılarak ilgili Hamiltoniyenin beklenen değerinin minimize edilmesi ile bulunur (Mathews ve ark., 1982):

$$E_1 = (n_1 + \frac{1}{2})^{4/3} \hbar\omega . \tag{2.5}$$

Burada $n_1 = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ değerlerini alır. Denklemdeki ω, kuartik salınıcı şiddetine bağlı bir parametre olup $\hbar\omega = 1.389(\lambda\hbar^4/m^2)^{1/3}$ ile tanımlıdır (Gautam ve Angom, 2008). Denk. (2.5) ile verilen enerji bağıntısı yaklaşık bir ifade olup sadece birinci mertebeden terimleri içermektedir. Orijinal denklemdeki (Mathews ve ark., 1982) ikinci mertebeden terimler elde edilen sonuçları önemli ölçüde etkilemediğinden dikkate alınmamıştır.

D-boyuttaki enerji özdeğerinin genel ifadesi,

$$E_D = \sum_{i=1}^{D} (n_i + \frac{1}{2})^{4/3} \hbar\omega \tag{2.6}$$

şeklindedir. Burada $D = 1,\ 2,\ 3$ değerlerini alır.

Tuzaklanmış ideal Bose gazları genellikle büyük kanonik topluluk içerisinde ele alınırlar (Ketterle ve van Druten, 1996b; Mullin, 1997; Napolitano ve ark., 1997; Capuzzi ve Hernandez, 1999; Liu ve ark., 2009). Buna göre, bir ν tek parçacık durumunun ortalama doluluk sayısı BE dağılım fonksiyonu ile verilir:

$$n(E_\nu) = \frac{1}{\exp[\beta(E_\nu - \mu)] - 1} . \tag{2.7}$$

Burada E_ν, belirli bir tuzaklama potansiyeli için tek bir etkileşmeyen parçacığın enerji seviyelerini göstermekte olup kuartik potansiyel için Denk. (2.6)' da verilen enerji spektrumuna karşılık gelir. Termodinamik notasyonda β, T sıcaklığına $\beta = 1/k_B T$ ifadesi ile bağlıdır. Burada k_B, Boltzmann sabitidir.

Kimyasal potansiyel μ, sistemdeki toplam parçacık sayısı N' in sabit olması koşulu altında aşağıdaki ifadeden belirlenir:

$$N = \sum_{\nu=0}^{\infty} n(E_\nu)\,. \tag{2.8}$$

Bunun için öncelikle M sayıda enerji seviyesi göz önüne alınarak aşağıda verilen nicelik hesaplanır:

$$F(\mu,T) \equiv \sum_{\nu=0}^{M} n(E_\nu) - N\,. \tag{2.9}$$

Sabit sıcaklıkta F sadece μ' ye bağlı bir fonksiyon olduğundan $F[\mu(T),T]=0$ denkleminin kökü, o sıcaklıktaki kimyasal potansiyel $\mu(T)$ değerini verir. Daha sonra M değeri artırılıp aynı işlemler tekrarlandığında elde edilen yeni $\mu(T)$ değeri ile önceki değer arasındaki fark belirli bir hata değerinden küçük ise bu durumda M inci seviyeden daha yukarıdaki seviyelerin katkısının, bu seviyelerde bulunan parçacık sayılarının az olması sebebi ile ihmal edilebileceği sonucuna varılır. Bu şekilde, $\mu(T)$ değeri için yakınsama sağlanmış olunur (Napolitano ve ark., 1997).

Çalışmada, iki ve üç boyutlu durumlarda ortaya çıkan dejenere seviyeler tek tek hesaplanarak dejenerasyon katsayısına olan ihtiyacı da ortadan kaldırmış oluruz. Sonuç olarak, sabit sıcaklıkta ve parçacık sayısının (N) belirli bir değeri için sayısal yöntemlerle elde edilen kimyasal potansiyel değerleri kullanılarak tüm termodinamik nicelikleri hesaplamak mümkündür.

Termodinamik limitteki ideal Bose sistemlerinde meydana gelen gerçek bir faz geçişinde termodinamik fonksiyonlar, T_C kritik sıcaklığında analitik olmayan davranışlar sergilerler. Böyle bir durum için kritik sıcaklık, kimyasal potansiyel ve taban durumdaki ortalama parçacık sayısının (N_0) sıfıra eşitlenmesi ($\mu = 0$ ve $N_0 = 0$) yoluyla tanımlanır. Fakat sonlu parçacık sayısına sahip gerçek sistemlerde kimyasal potansiyel asla sıfıra ulaşmadığından bu şekilde bir kritik sıcaklık tanımlamak doğru olmaz. Bu nedenle, böyle sistemler için genellikle kimyasal potansiyeli taban durum enerjisine eşit alarak ($\mu = E_0$) bir T_0 yoğuşma sıcaklığı tanımlanır:

$$N = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\exp[\beta_0(E_\nu - E_0)]-1}\,. \tag{2.10}$$

Burada, $\beta_0 = 1/k_B T_0$ ifadesi ile tanımlanır.

Parçacık sayısının sonlu olduğu tuzaklanmış Bose gazlarında taban durumun makroskopik olarak işgal edilmesi, BEY faz geçişinin tanımlayıcı bir özelliği olarak kabul edildiğinden, N_0/N ifadesi ile belirlenen yoğuşum kesrinin sıcaklıkla değişiminin bilinmesi oldukça önemlidir. Buna göre taban durumdaki ortalama parçacık sayısı N_0,

$$N_0 = \frac{1}{\exp[\beta(E_0 - \mu)] - 1} \tag{2.11}$$

ifadesinden hesaplanarak belirli bir N değeri için yoğuşum kesirlerini elde etmek mümkündür.

Denk. (2.8) ile verilen parçacık sayısı korunumuna benzer şekilde toplam enerji de korunumlu olup aşağıdaki koşulu sağlar:

$$E(N,T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} n(E_\nu) E_\nu \, . \tag{2.12}$$

Sistemdeki belirli sayıda parçacık için ısı kapasitesi, Denk. (2.12)' de verilen enerji ifadesinin sıcaklığa göre türevi alınarak bulunabilir:

$$C_N(T) = \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} [n(E_\nu)]^2 E_\nu \exp[\beta(E_\nu - \mu)] \left(\frac{E_\nu - \mu}{T} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \right). \tag{2.13}$$

Denklemdeki $\frac{\partial \mu}{\partial T}$ ifadesi, Denk. (2.8)' in sıcaklığa göre türevi alınarak elde edilir.

Son olarak, entropi sabit bir N değeri için ve sıcaklığın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki denklemden hesaplanabilir:

$$\frac{S}{k_B} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\beta(E_\nu - \mu)}{\exp[\beta(E_\nu - \mu)] - 1} - \ln\{1 - \exp[\beta(\mu - E_\nu)]\} \right\}. \tag{2.14}$$

Sonlu sayıda etkileşmeyen bozondan oluşan sistemlerin termodinamik özellikleri ile ilgili yukarıda verilen bağıntılar kullanılarak bir sonraki kesimde, kuartik tuzaklama potansiyeli için *D*-boyutta elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

2.3. Sonuçlar ve Tartışma

Bir, iki ve üç boyuttaki kuartik potansiyeller ile sınırlandırılmış farklı sayılardaki bozonlar için Denk. (2.10)' dan hesaplanan yoğuşma sıcaklıklarına ait sonuçlar Çizelge 2.1' de gösterilmektedir. Aynı çizelgede, bir harmonik salınıcı potansiyel ile sınırlandırılmaları durumunda bu sistemlerin sahip oldukları yoğuşma sıcaklıklarına da yer verilmiştir. Çalışmada, sıcaklığın da dahil olduğu ilgili termodinamik özellikler incelenirken karşılaştırma yapabilmek için kuartik salınıcı şiddetine bağlı ω parametresi ve harmonik salınıcı tuzaklama frekansı ω_0 birbirlerine eşit ve $\omega = \omega_0 = 138\pi$ Hz değerinde alınır. Ayrıca, iki ve üç boyutlu harmonik ve kuartik potansiyeller için $\omega = \omega_x = \omega_y = 138\pi$ Hz ($D = 2$ için) ve $\omega = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 138\pi$ Hz ($D = 3$ için) alınarak her iki potansiyelin de izotropik oldukları kabul edilir. Çizelge 2.1' de parçacık sayısının yüz ile bir milyon arasında değiştiği üç N değerinde de kuartik potansiyel için hesaplanan yoğuşma sıcaklığı değerlerinin daha yüksek oldukları görülür. Ayrıca, harmonik ve kuartik potansiyeller için elde edilen sıcaklıklar arasındaki fark da artan parçacık sayısı ile birlikte daha büyük hale gelir.

Hesaplamalarda bir boyutlu kuartik tuzak için sonlu sıcaklık değerleri elde edilmesine rağmen standart yarı klasik yaklaşım, böyle bir tuzaktaki BEY' in ancak sıfır sıcaklıkta gerçekleşebileceğini öngörmektedir (Bagnato ve Kleppner, 1991). Yarı klasik

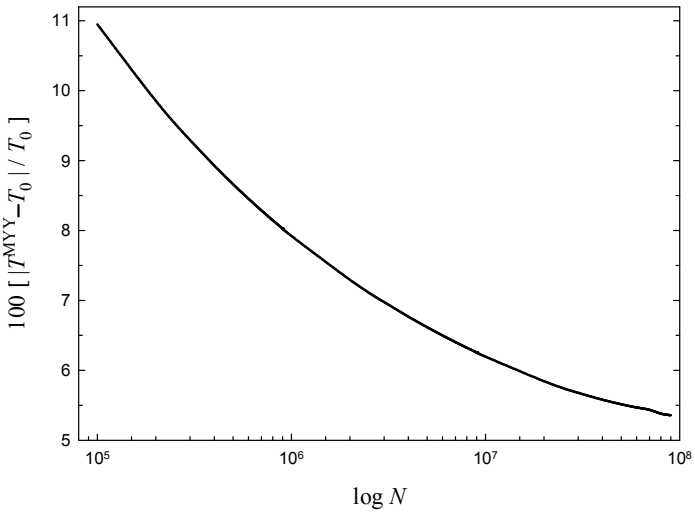
Çizelge 2.1. Bir, iki ve üç boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki farklı bozon sayıları için elde edilen yoğuşma sıcaklıkları

N	Boyut	T_0 (μK) kuartik tuzak için	T_0 (μK) harmonik tuzak için
10^2	1	0.164	0.086
	2	0.046	0.024
	3	0.022	0.012
10^4	1	11.842	4.280
	2	0.920	0.254
	3	0.184	0.065
10^6	1	1077.730	278.200
	2	19.603	2.576
	3	1.450	0.309

yaklaşımda durum yoğunluğu ifadesi kullanılarak hesaplanan termodinamik nicelikler, Bose fonksiyonları $g_s(z)$ cinsinden ifade edilirler. $z \to 1$ ve $s \le 1$ için Bose fonksiyonunun ıraksaması sebebi ile yarı klasik yaklaşım, bu koşulun sağlandığı sistemlerde (örneğin bir boyutlu harmonik ve kuartik potansiyeller) BEY olamayacağını öngörür. Fakat Yukalov (2005) bu sonucun termodinamik limit kullanımından kaynaklandığını belirtmiş ve bir modifiye yarı klasik yaklaşım (MYY) önererek sonlu sayıda atomun bulunduğu bu tür düşük boyutlu sistemlerin yoğuşma sıcaklıklarının sıfırdan farklı olduğunu göstermiştir. Buna göre, bir boyutlu kuartik tuzak için yoğuşma sıcaklığı değeri,

$$k_B T^{\mathrm{MYY}} = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} N\hbar\omega \tag{2.15}$$

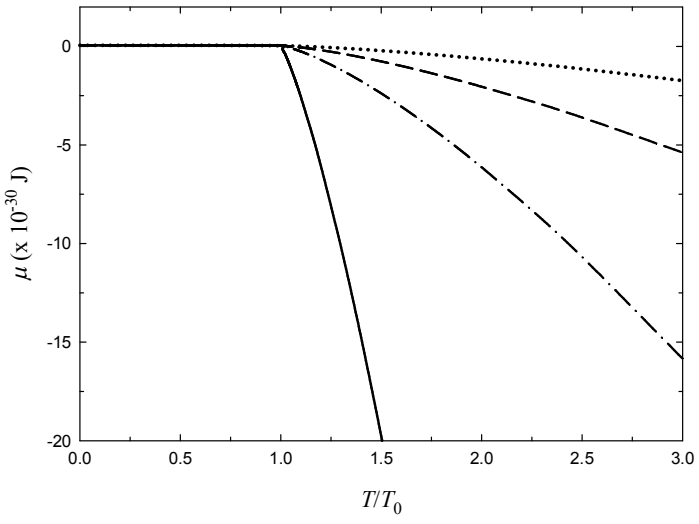
bağıntısı kullanılarak hesaplanabilir. Burada Γ, gama fonksiyonunu ifade eder. Farklı sayıda parçacıklar için Denk. (2.15)' den elde edilen sıcaklık değerleri ile bu çalışmada Denk. (2.10) kullanılarak hesaplanan yoğuşma sıcaklıkları arasındaki mutlak yüzde farkı gösteren grafik Şekil 2.1' de verilmiştir. Temelde yarı klasik yaklaşım, büyük parçacık sayılı sistemleri tanımlamakta daha başarılı bir yöntem olduğundan sıcaklıklar arasındaki farkın toplam bozon sayısı ile ters orantılı olarak değiştiği görülür.



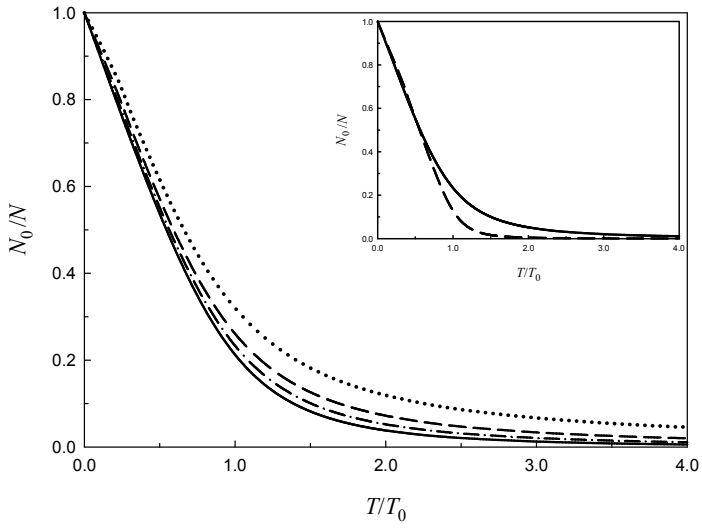
Şekil 2.1. Bir boyutlu kuartik tuzak durumunda yoğuşma sıcaklıkları için hesaplanan mutlak yüzde fark değerinin parçacık sayısının logaritması ile değişimi. T^{MYY} ve T_0 sırasıyla MYY ve bu çalışmada kullanılan yöntem ile elde edilen yoğuşma sıcaklık değerleridir.

Bir boyutlu durumun aksine iki ve üç boyutlu kuartik potansiyellerde tuzaklanmış bozonların yoğuşma sıcaklıkları için standart yarı klasik yaklaşım kullanılarak sonlu sıcaklıklar elde etmek mümkündür. Bununla ilgili bir çalışma Gautam ve Angom (2008) tarafından yayınlanmıştır.

Şekil 2.2' de üç boyutlu kuartik bir potansiyelde tuzaklanmış farklı sayıdaki bozonların kimyasal potansiyellerinin sıcaklıkla olan değişimleri görülmektedir. Sabit bir N değeri için, sıcaklık azalırken kimyasal potansiyelin arttığı ve sıcaklık yoğuşma sıcaklığının altına düştüğünde ise kimyasal potansiyelin taban durum enerjisine hemen hemen eşit olduğu ($\mu \approx E_0$) görülür. Harmonik tuzaklardaki ideal Bose sistemleri (Grether ve ark., 2003; Hu ve ark., 2003) için de gözlenen bu davranış, taban durum doluluk sayısı N_0' ın artıp N ile karşılaştırılabilir hale geldiğini göstermesi açısından oldukça önemlidir. Aynı sonuca analitik yollarla da ulaşmak mümkündür. Denk. (2.11)' in $\mu = E_0$ için ıraksaması, sistemdeki tüm parçacıkların taban durumda yoğunlaştıklarının bir göstergesidir. Şekil 2.2' de dikkati çeken bir diğer özellik ise kimyasal potansiyelin artan parçacık sayısı ile birlikte daha hızlı bir şekilde azalmasıdır. Üç boyutlu kuartik tuzak için incelenen kimyasal potansiyelin sıcaklık ve parçacık sayısı ile değişimleri, bir ve iki boyutlu durumlar için de benzer şekilde bulunmuştur. Fakat tekrardan kaçınmak için elde ettiğimiz bu sonuçlara çalışmada yer verilmemiştir.



Şekil 2.2. Üç boyutlu kuartik tuzakta bulunan farklı sayıda bozon (N) için kimyasal potansiyelin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli-noktalı, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla N' in 10^6, 10^4, 10^3 ve 10^2 değerlerine karşılık gelir.

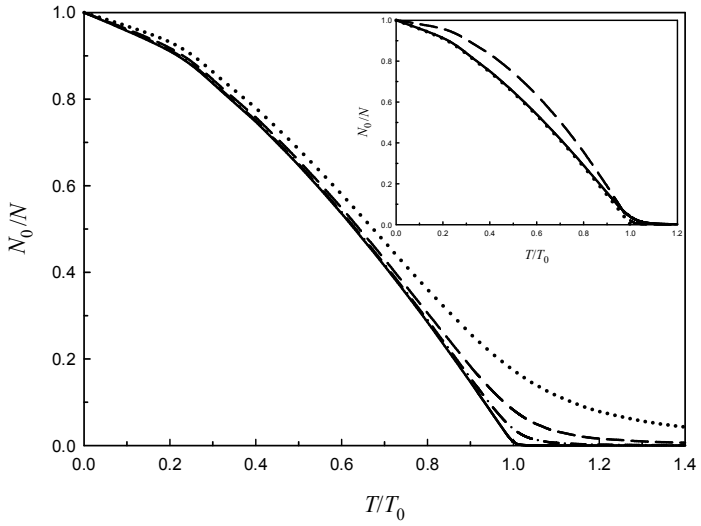


Şekil 2.3. Bir boyutlu kuartik tuzakta bulunan farklı sayıda bozon (N) için yoğuşum kesrinin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli-noktalı, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla N' in 10^6, 10^4, 10^3 ve 10^2 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, $N = 10^4$ bozon için bir boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki yoğuşum kesirlerini göstermektedir. Sürekli ve kesikli çizgiler sırasıyla kuartik ve harmonik tuzakları ifade eder.

Elde edilen kimyasal potansiyel değerlerinin Denk. (2.11)' de yerine konulması sonucunda belirli bir sıcaklıkta ve sabit bir N değeri için taban durumdaki ortalama parçacık sayısı (N_0) bulunabilir. Bu N_0 değerleri kullanılarak çizilen yoğuşum kesrinin sıcaklığa karşı grafiği, taban durumdaki parçacık sayısının sıcaklıkla olan değişimini görmek açısından önemlidir. Çünkü N' in sonlu bir değere sahip olduğu gerçek sistemlerde taban durumun makroskopik olarak işgal edilmesi koşulu, termodinamik limitte BEY göstergesi olan tekillik kriteri ve kritik davranışların yerini almıştır. Bu koşul ilk olarak Ketterle ve van Druten (1996b) tarafından bir boyutlu harmonik tuzakta BEY oluştuğunu göstermek için kullanılmıştır.

Şekil 2.3 bir boyutlu kuartik potansiyelde tuzaklanmış farklı sayıdaki bozonların yoğuşum kesirlerinin sıcaklığa karşı grafiğini göstermektedir. $T \le T_0$ için sistemdeki parçacıkların taban durumu işgal etmeye başladıkları ve $T = 0$ olduğunda da tüm parçacıkların taban durumda bulundukları görülür. Yoğuşum kesrinin sergilediği bu davranış, nitel olarak Ketterle ve van Druten' in (1996b) ele aldıkları bir boyutlu harmonik tuzaktaki yoğuşum davranışına benzer. Böylece bir boyutlu kuartik tuzak için BEY' in mümkün olduğu sonucuna varılır.

Harmonik ve kuartik tuzaklarda bulunan aynı sayıdaki bozonun ($N = 10^4$) yoğuşum kesirlerini karşılaştıran grafik Şekil 2.3' ün içerisinde verilmiştir. Sıcaklığın

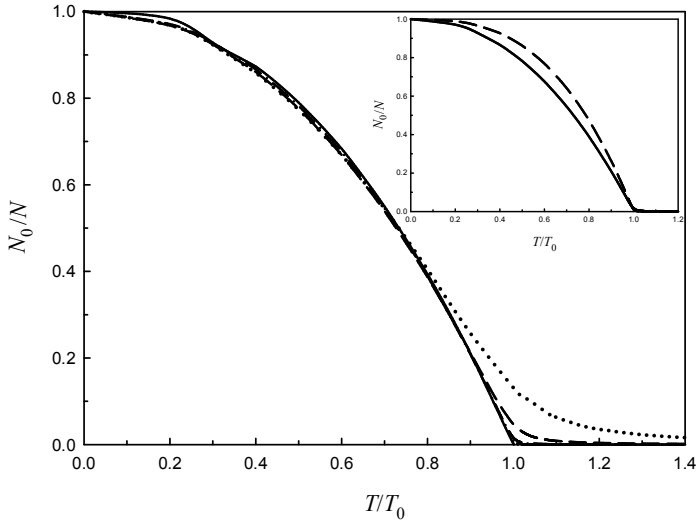


Şekil 2.4. İki boyutlu kuartik tuzakta bulunan farklı sayıda bozon (N) için yoğuşum kesrinin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli-noktalı, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla N' in 10^6, 10^4, 10^3 ve 10^2 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, $N = 10^4$ bozon için iki boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki yoğuşum kesirlerini göstermektedir. Sürekli ve kesikli çizgiler sırasıyla kuartik ve harmonik tuzakları, noktalı çizgi ise bir dış potansiyel ile sınırlandırılmamış ideal Bose gazını ifade eder.

yüksek olduğu bölgede kuartik potansiyelin daha çok sayıda atomu tuzaklaması dışında, her iki potansiyele ait yoğuşum kesri davranışlarının benzer oldukları görülür.

Tuzağın sınırlama boyutu arttıkça yoğuşum kesrinin sıcaklığa bağlılığı da önemli ölçüde değişir. Şekil 2.4 iki boyutlu durumu göstermektedir. Bir boyutlu durum ile karşılaştırıldığında aradaki fark açıkça görülür. Aynı N değeri ($N = 10^4$) için, iki boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki yoğuşum kesirlerini karşılaştıran grafik Şekil 2.4' ün içerisinde verilmiştir. Buna göre, harmonik tuzaktaki yoğuşmanın sıcaklıkla daha keskin bir artış sergilediği görülür. Burada dikkati çeken bir diğer nokta ise bir dış potansiyel ile sınırlandırılmamış ideal bir Bose gazının ve iki boyutlu kuartik tuzaktaki etkileşmeyen bozonların yoğuşum kesirlerinin sıcaklıkla değişimleri arasındaki benzerliktir. Bu durum, tuzağın merkezi referans alındığında kuartik potansiyelin harmonik potansiyele göre daha sığ bir yapıda olmasından kaynaklanır (Ramakumar ve Das, 2008).

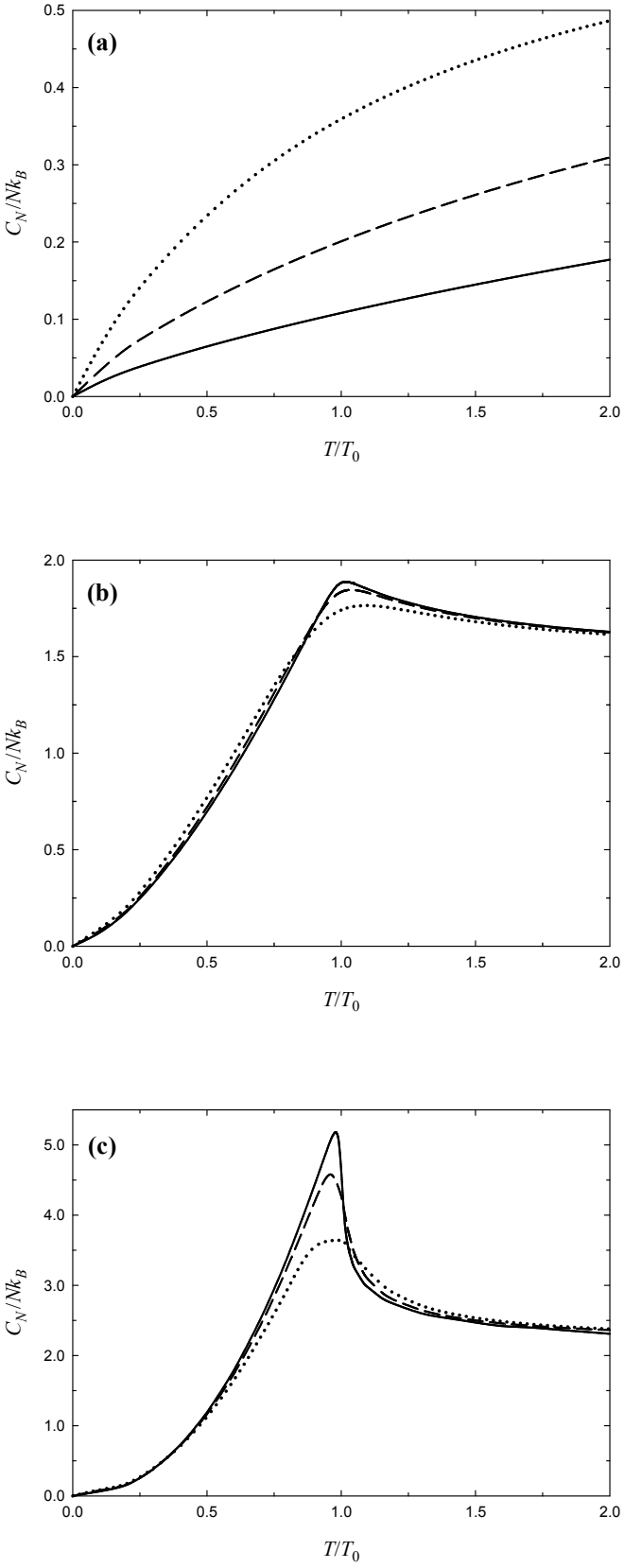
Şekil 2.5' deki üç boyutlu durum için elde edilen sonuçlara bakıldığında iki boyutlu duruma ait sonuçlar ile aralarında önemli bir fark olmadığı görülür. Boyuttaki artış sadece azalan sıcaklıkla beraber taban durumda daha fazla sayıda parçacık bulunmasına yol açmıştır. Benzer bir yorum harmonik ve kuartik potansiyellerin karşılaştırıldığı Şekil 2.5' deki küçük grafik için de yapılabilir.



Şekil 2.5. Üç boyutlu kuartik tuzakta bulunan farklı sayıda bozon (N) için yoğuşum kesrinin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli-noktalı, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla N' in 10^6, 10^4, 10^3 ve 10^2 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, N =10^4 bozon için üç boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki yoğuşum kesirlerini göstermektedir. Sürekli ve kesikli çizgiler sırasıyla kuartik ve harmonik tuzakları ifade eder.

Sistemdeki parçacık sayısının sonsuz olmasının iyi bilinen sonuçlarından birisi ısı kapasitesindeki süreksizliktir. Bununla birlikte, sonlu parçacık sayısına sahip gerçek sistemlerin termodinamik fonksiyonlarında bu tür süreksizlikler beklenmez. Şekil 2.6' da sırasıyla bir, iki ve üç boyutlu sistemlerin ısı kapasiteleri için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Grafiklerde, boyut azaldıkça ısı kapasitesinin belirgin zirve benzeri yapısının gitgide yok olduğu görülür. Isı kapasitesi davranışındaki boyuta bağlı bu değişiklik, BEY' in oluştuğu diğer sistemler için bulunan sonuçlar ile uyumludur (Haugset ve ark., 1997; Capuzzi ve Hernandez, 1999; Ramakumar ve ark., 2007; Ramakumar ve Das, 2008).

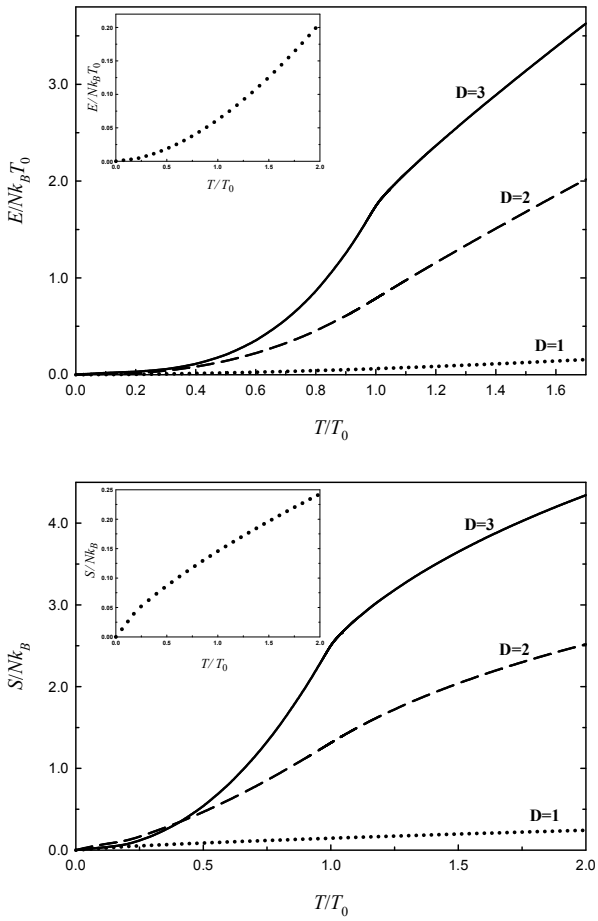
Üç boyutlu harmonik bir potansiyelde tuzaklanmış birbirleriyle etkileşmeyen bozonlardan oluşan bir sistemde azalan parçacık sayısı ile birlikte ısı kapasitesindeki piklerin de düzleştiği gözlenmiştir (Napolitano ve ark., 1997). Benzer türde bir davranış, sınırlayıcı potansiyelin kuartik tipte olması durumunda da görülür (Şekil 2.6c). Ayrıca yine üç boyutlu harmonik tuzak için elde edilen sonuçlarla uyumlu olarak (Napolitano ve ark., 1997; Hu ve ark., 2003) artan parçacık sayısı ile ısı kapasitesi eğrisinin maksimumu da T/T_0 ' ın büyük değerlerine doğru kayar.



Şekil 2.6. a) Bir boyutlu, **b)** İki boyutlu, **c)** Üç boyutlu kuartik tuzakta bulunan farklı sayıda bozon (N) için ısı kapasitesinin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla N' in 10^4, 10^3 ve 10^2 değerlerine karşılık gelir.

Şekil 2.7' de toplam parçacık sayısının $N = 10^4$ olduğu bir sistem için toplam enerji ve entropinin sıcaklıkla olan değişimleri verilmiştir. Boyutun sonuçlar üzerindeki etkilerini görebilmek için bir, iki ve üç boyutlu durumlar aynı grafik içerisinde gösterilmiştir. Üç boyutlu durumdaki enerji ve entropi eğrilerinin davranışı tuzaklanmış Bose gazlarına özgü olup harmonik tuzaklar için de benzer sonuçlar bulunmuştur (Minguzzi ve ark., 1997; Grether ve ark., 2003). Boyuttaki azalma ile beraber bu davranışın değiştiği görülür. Aynı sonuca, bir (Bayındır ve ark., 1999) ve iki (Bayındır ve Tanatar, 1998) boyutlu harmonik potansiyeller için çizilen toplam enerji grafikleriyle karşılaştırma yapıldığında da ulaşılır.

Son olarak, bir ve iki boyutlu durumlar için elde edilen entropiye ait sonuçlar oldukça makul gözükmekle beraber, bildiğimiz kadarıyla, literatürde bu sonuçları karşılaştırabileceğimiz bir çalışma bulunmamaktadır.



Şekil 2.7. Bir, iki ve üç boyutlu kuartik potansiyellerde tuzaklanmış $N = 10^4$ sayıda bozon için toplam enerjinin (üstteki grafik) ve entropinin (alttaki grafik) sıcaklık ile değişimleri. Şekiller içerisindeki küçük grafiklerde bir boyutlu durum kendi ölçeğinde çizilerek gösterilmiştir.

3. MUTLAK SIFIRDA ETKİLEŞEN BOSE GAZI

Önceki bölümde BE istatistiğinin ve kuartik tuzaklama potansiyelinin bir atom topluluğu üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bir BE yoğuşumunu daha gerçekçi bir şekilde tanımlayabilmek için hem yoğuşumu oluşturan atomlar arasındaki hem de bu atomlar ile sistemin geri kalanı arasındaki etkileşimlerin göz önüne alınması gerekir. Etkileşen bir sistem ideal bir gaza kıyasla çok daha karmaşık bir yapı olduğundan tanımlanması da farklı yaklaşımlar kullanmayı gerektirir. BEY' e uğramış etkileşen bir sistemin özelliklerini ve davranışlarını açıklamak için geliştirilen birçok yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar arasında ortalama alan teorisi, sonuçlarının doğruluğu (Bergeman ve ark., 2000; Prokof'ev ve Svistunov, 2002), güvenilirliği (Holzmann ve ark., 1999) ve deneylerle olan uyumu (Hau ve ark., 1998) gibi özelliklerinin yanı sıra nispeten daha basit bir yöntem olması ile de diğerlerinden bir adım öne çıkar. Bu nedenle literatürde BEY ile ilgili teorik çalışmaların büyük bir kısmının ortalama alan teorisine dayalı olduğu görülür (Dalfovo ve ark., 1999). Bu bölümde ele alınacak çalışma da bu geleneği devam ettirecektir.

3.1. Ortalama Alan Teorisi ve GPD

Bölüm 2' de açıklandığı üzere, belirli bir yoğuşma sıcaklığının altında bozonlar taban durumu makroskopik olarak işgal ederler. Eğer sıcaklık düşürülmeye devam edilirse yoğuşum kesri giderek artar ve $T = 0\,\mathrm{K}$' de 1' e eşit olur. Deneyler yoğuşma sıcaklığının oldukça altındaki sıcaklıklarda gerçekleştirildiğinden sistemdeki yoğuşmamış küçük kısım ihmal edilebilir. Böylece tamamen yoğuşmuş bir sistem göz önüne alınarak tüm atomları tek bir dalga fonksiyonu ile tanımlamak mümkün olur. Bu şekilde düşünmek problemi oldukça basitleştirir. Diğer taraftan yoğuşumun çok parçacıklı bir sistem olduğu ve parçacıklar arası etkileşimlerin göz önüne alınması gerektiği de unutulmamalıdır. Alkali gazların BE yoğuşumları oldukça seyreltik olup (havaya göre 10^6 kat daha ince) yoğunlukları 10^{15} cm^{-3} mertebesindedir. Yoğuşumların bu özelliği, sistemde sadece iki parçacık çarpışmalarını dikkate almanın yeterli olacağı yönünde bir başka kolaylık daha sağlar. Gerçekte de iki parçacık çarpışmaları atomların bir araya gelip molekül oluşturma olasılıklarını engelleyerek BE yoğuşumlarının oluşumunda önemli bir rol üstlenirler.

Bir dış potansiyel ($V_{dış}$) ile sınırlandırılmış N sayıda etkileşen bozondan oluşan bir sistemi tanımlayan çok parçacık Hamiltoniyeni ikinci kuantumlanma yoluyla aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{H} = \int d\vec{r}\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{dış}(\vec{r})\right]\hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\int d\vec{r}d\vec{r}'\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r})\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}')V(\vec{r}-\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}')\hat{\Psi}(\vec{r}) \ . \tag{3.1}$$

Burada $\hat{\Psi}(\vec{r})$ ve $\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r})$, bozon alan operatörleri olup bir parçacığın $\vec{r}$ konumunda sırasıyla yok edilmesi ve yaratılması ile ilgilidir. $V(\vec{r}-\vec{r}')$ ise atomlar arası ikili etkileşme potansiyelini ifade eder. Bu Hamiltoniyen ifadesi kullanılarak hem sistemin taban durumu hem de termodinamik özellikleri doğrudan hesaplanabilir (Krauth, 1996; Schneider ve Feder, 1999). Fakat N değeri arttıkça hesap yapılması giderek zor hale gelir. Ortalama alan yaklaşımı kullanılarak etkileşen bir sistemin çok parçacık Schrödinger denkleminin çözümünde karşılaşılan bu problemin üstesinden gelmek mümkündür. Bu şekilde, ağır sayısal işlem yükü altına girmeden tuzaklanmış Bose gazlarının statik, dinamik ve termodinamik özellikleri belirlenebilir.

Seyreltik Bose gazının ortalama alan tanımı ilk olarak Bogoliubov (1947) tarafından ortaya konmuştur. Bozon alan operatöründen yoğuşum katkısını ayırma bu formalizmin kilit noktasını oluşturur. Genel olarak, alan operatörü $\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\alpha}\Psi_{\alpha}(\vec{r})a_{\alpha}$ şeklinde yazılabilir. Burada, $\Psi_{\alpha}(\vec{r})$ ' ler tek parçacık dalga fonksiyonları ve a_{α} ' lar da ilgili yok etme operatörleridir. Bozon yaratma ve yok etme operatörleri olan $a_{\alpha}^{\dagger}$ ve a_{α}:

$$a_{\alpha}^{\dagger}\left|n_0, n_1, ..., n_{\alpha}, ...\right\rangle = \sqrt{n_{\alpha}+1}\left|n_0, n_1, ..., n_{\alpha}+1, ...\right\rangle, \tag{3.2}$$

$$a_{\alpha}\left|n_0, n_1, ..., n_{\alpha}, ...\right\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}\left|n_0, n_1, ..., n_{\alpha}-1, ...\right\rangle, \tag{3.3}$$

ile tanımlanırlar. Burada n_{α} ' lar, α tek parçacık durumunda bulunan atomların sayısını veren $\hat{n}_{\alpha} = a_{\alpha}^{\dagger}a_{\alpha}$ operatörünün özdeğerleridir. Bu operatörler genel komütasyon kurallarına uyarlar:

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0, \quad [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0. \tag{3.4}$$

BEY belirli bir tek parçacık durumundaki atom sayısı n_0'ın çok büyük olması ($n_0 \equiv N_0 >> 1$) ve $N \to \infty$ termodinamik limitinde, N_0/N oranının sabit kalması durumunda gerçekleşir. Bu limitte, N_0 ve $N_0 \pm 1 \cong N_0$ parçacıklı durumlar yaklaşık aynı fiziksel duruma karşılık gelirler ve bunun sonucunda a_0 ve $a_0^\dagger$ operatörleri birer sayı gibi ele alınabilirler: $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N_0}$. V hacimli homojen bir gaz için, BEY sıfır momentumlu $\Psi_0 = 1/\sqrt{V}$ tek parçacık durumunda meydana gelir ve $\hat{\Psi}(\vec{r})$ alan operatörü aşağıdaki gibi parçalara ayrılarak yazılabilir:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sqrt{N_0/V} + \hat{\Psi}'(\vec{r}). \tag{3.5}$$

Burada, $\hat{\Psi}'(\vec{r})$ yoğuşumdaki azalmayı ifade eder. Bogoliubov, $\hat{\Psi}'$ operatörünü küçük bir pertürbasyon gibi ele alıp etkileşen Bose gazlarındaki uyarılmalar için birinci mertebeden bir teori geliştirmiştir.

Bogoliubov formalizminin homojen olmayan ve zamana bağlı durumlara genellenmesi aşağıdaki gibi olur:

$$\hat{\Psi}(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) + \hat{\Psi}'(\vec{r},t). \tag{3.6}$$

Bu ifadede, $\Phi(\vec{r},t)$ alan operatörünün beklenen değeri $\Phi(\vec{r},t) \equiv \left\langle \hat{\Psi}(\vec{r},t) \right\rangle$ olarak tanımlanan kompleks bir fonksiyondur ve yoğuşum dalga fonksiyonu olarak adlandırılır. Yoğuşum yoğunluğu ise $\rho(\vec{r},t) = \left|\Phi(\vec{r},t)\right|^2$ ile tanımlıdır.

Eğer yoğuşumdaki azalma ($\hat{\Psi}'$) küçük ise Denk. (3.6) ile verilen ifade oldukça kullanışlı hale gelir. Bu durumda, $\Phi(\vec{r},t)$ yoğuşum dalga fonksiyonu için bir denklem elde edilebilir. Bunun için, Denk. (3.1)' de verilen çok parçacık Hamiltoniyen ifadesi ile Heisenberg denklemi kullanılarak $\hat{\Psi}(\vec{r},t)$ alan operatörünün zamanla değişimi yazılır:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\vec{r},t)=[\hat{\Psi},\hat{H}]$$
$$=\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V_{dış}(\vec{r})+\int d\vec{r}'\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}',t)\right.$$
$$\left.\times V(\vec{r}'-\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r}',t)\right]\hat{\Psi}(\vec{r},t)\,. \tag{3.7}$$

Daha sonra $\hat{\Psi}$ operatörü, Φ klasik alan ile yerdeğiştirilir. $V(\vec{r}'-\vec{r})$ atom-atom etkileşimini içeren integralde bu yerdeğiştirme işleminin yapılması, kısa $(\vec{r}'-\vec{r})$ mesafeleri için kötü bir yaklaşım olmakla birlikte seyreltik ve soğuk bir gaz için düşük enerji durumunda sadece ikili çarpışmalar kayda değerdir. Bu çarpışmalar, *s*-dalga saçılma uzunluğu adı verilen tek bir parametre ile karakterize edilir. Bu durum, Denk. (3.7)' deki $V(\vec{r}'-\vec{r})$ potansiyeli yerine aşağıdaki ifadede gösterildiği gibi etkin bir etkileşim kullanma olanağı sağlar:

$$V(\vec{r}'-\vec{r})=g\delta(\vec{r}'-\vec{r})\,. \tag{3.8}$$

Buradaki g bağlantı sabiti a saçılma uzunluğuna,

$$g=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \tag{3.9}$$

ifadesi ile bağlıdır. *s*-dalga saçılma uzunluğu pozitif ya da negatif değerli olabilir ve saçılma uzunluğunun sahip olduğu işaret, sırasıyla atomlar arası etkin bir itme ya da çekmeye karşılık gelir.

Denk. (3.8)' de verilen etkin potansiyelin Denk. (3.7)' de kullanımı $\hat{\Psi}$ ' nin Φ ile yerdeğiştirmesi ile uyumludur ve yoğuşum dalga fonksiyonu için aşağıdaki denklemi verir:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V_{dış}(\vec{r})+g\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^2\right]\Phi(\vec{r},t)\,. \tag{3.10}$$

Burada, m tek bir atomun kütlesidir. Bu doğrusal olmayan Schrödinger tipi denklem, GPD olarak bilinmektedir ve birbirlerinden bağımsız olarak Gross (1961, 1963) ve

Pitaevskii (1961) tarafından türetilmiştir. Denklemin geçerliliği, *s*-dalga saçılma uzunluğunun atomlar arası ortalama uzaklıktan çok daha küçük olması ve yoğuşumdaki atom sayısının 1' den çok daha büyük olması koşullarına dayanır.

Yoğuşum dalga fonksiyonu zamanla,

$$\Phi(\vec{r},t) = e^{-i\mu t/\hbar}\phi(\vec{r}), \tag{3.11}$$

kuralına uygun olarak değişir. Burada, $\mu = E(N) - E(N-1) \sim \partial E/\partial N$ ile tanımlı kimyasal potansiyeldir. Yoğuşum dalga fonksiyonunun zamanla değişiminin, klasik dalga fonksiyonlarında olduğu gibi enerji ile değil kimyasal potansiyel ile kontrol edildiğine dikkat edilmelidir. Denk. (3.11)' in Denk. (3.10)' da yerine konulması ile zamandan bağımsız GPD elde edilir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r}) + V_{dış}(\vec{r})\phi(\vec{r}) + g\left|\phi(\vec{r})\right|^2\phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}). \tag{3.12}$$

Kimyasal potansiyel değeri ise aşağıdaki normalizasyon koşulu ile belirlenir:

$$N = \int d\vec{r}\left|\phi(\vec{r})\right|^2. \tag{3.13}$$

$T \to 0$ limitinde N değeri, tuzakta bulunan toplam atom sayısına karşılık gelir.

3.2. Harmonik artı Kuartik Tuzaktaki Yoğuşumun Taban Durum Özellikleri

Bu bölümde anharmonik bir tuzaktaki bozonlar için zamandan bağımsız GPD' nin çözümleri incelenecektir. Bu kapsamda, $T = 0\,\mathrm{K}$' deki yoğuşum dalga fonksiyonu bozonlar arasındaki itici ve çekici etkileşim durumları için hesaplanacaktır. Burada göz önüne alınan tuzak harmonik artı kuartik tipte olup, Kesim 1.2' de de belirtildiği gibi, son zamanlarda deneysel ve teorik olarak yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Potansiyel ifadesi, anizotropi ihmal edilerek (Seetharaman ve ark., 1982; Chakrabarti ve ark., 2009)

$$V_{dış}(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\lambda r^4, \tag{3.14}$$

biçiminde alınır. Bu ifadede ω harmonik tuzak frekansıdır. Tuzağın anharmonikliği, potansiyeldeki dördüncü dereceden terimin ayarlanabilir parametresi λ ile kontrol edilir.

Denk. (3.12)' nin $\phi(\vec{r})=\phi(r)$ ile belirli küresel simetrik çözümleri için GPD, Denk. (3.14)' de verilen potansiyel göz önüne alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\lambda r^4+\frac{4\pi\hbar^2a}{m}\phi^2(r)-\mu\right]\phi(r)=0\,. \tag{3.15}$$

Bu denklemi sayısal yöntemler kullanarak çözmeden önce boyutsuz hale getirmek gerekir. Bunun için aşağıda tanımlı olan boyutsuz değişkenler kullanılır (Gammal ve ark., 1999; Chaudhary ve ark., 2009):

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}r,\\ \psi(x)&=\sqrt{8\pi a}r\phi(r),\\ \alpha&=\frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3},\\ \beta&=\mu/\hbar\omega. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Bu boyutsuz değişkenler cinsinden Denk. (3.15) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\alpha x^4+c\frac{1}{x^2}\psi^2(x)-\beta\right]\psi(x)=0\,. \tag{3.17}$$

s-dalga saçılma uzunluğunun işaretine bağlı olarak $c=\pm1$ değerlerini alır. Buna göre, $c=1$ itici etkileşime karşılık gelirken $c=-1$ çekici etkileşim durumunu ifade eder.

Denklemdeki boyutsuz α parametresine sıfır ile bir arasında değerler vermek suretiyle tuzaktaki anharmonik katkının büyüklüğünü kontrol etmek mümkündür.

Denk. (3.13)' de verilen dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulu boyutsuz değişkenler cinsinden,

$$n = \int_0^\infty dx \psi^2(x) \tag{3.18}$$

biçiminde yazılır. Burada, n indirgenmiş atom sayısı olup tuzaktaki toplam atom sayısı N ' e aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$n \equiv 2Na\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,. \tag{3.19}$$

Boyutsuzlandırma işlemi sonucunda Denk. (3.13), Denk. (3.18)' e ve Denk. (3.15)' de Denk. (3.17)' ye indirgenmiş olur.

Ortalama kare yarıçap, yoğuşum dalga fonksiyonu ile ilgili bir diğer önemli özellik olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty d\vec{r} r^2 \left|\phi(\vec{r})\right|^2\,. \tag{3.20}$$

Bu ifade boyutsuz değişkenler cinsinden,

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{n}\int_0^\infty dx x^2 \psi^2(x) \tag{3.21}$$

şeklinde yazılır.

Yoğuşum dalga fonksiyonu $\phi(r)$ orijinde sürekli olmalı ve $r \to \infty$ iken $\phi(r) \to 0$ şartını sağlamalıdır. Bu iki koşulun sayısal işlem için uygun denklemlere dönüştürülmesi, boyutsuz dalga fonksiyonu $\psi(x)$' in asimptotik davranışını belirleyerek yapılabilir. Bir sonraki kesimde dalga fonksiyonunun bu koşullar altındaki davranışları incelenecektir.

3.2.1. Dalga fonksiyonunun asimptotik davranışı

3.2.1.1. $x \to \infty$ limiti

x' in yeterince büyük bir değeri için $\psi(x)$ asimptotik olarak sıfıra yaklaşacaktır. Bunun bir sonucu olarak, Denk. (3.17)' de $\psi^3(x)$ ile orantılı doğrusal olmayan terim, diğer terimler ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir. Böylelikle denklem yaklaşık olarak

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\beta - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\alpha x^4\right)\psi(x) \approx 0\,, \tag{3.22}$$

şeklinde yazılır. $x \to \infty$ limitinde β' lı terim diğer terimlerin yanında küçük kalacağından ihmal edilebilir ve denklem,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(1 + \alpha x^2\right)\psi(x) \approx 0 \tag{3.23}$$

ifadesine indirgenir. Benzer şekilde $\alpha > 0$ için $\alpha x^2 >> 1$ olduğundan parantez içerisindeki terim $(1 + \alpha x^2) \approx \alpha x^2$ olarak alınabilir ve sonuçta büyük x değerleri için yaklaşık denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \left(\frac{1}{4}\alpha x^4\right)\psi(x) \approx 0\,. \tag{3.24}$$

Bu denklemin birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarından oluşan iki terimli bir çözümü vardır. Fakat bu terimlerden sadece birisi (ikinci tür Bessel fonksiyonu) $x \to \infty$ iken $\psi(x) \to 0$ şartını sağlar. Fiziksel olarak kabul edilebilir bu çözüm,

$$\psi_{asim}(x) = C\sqrt{x}\,BesselK\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right) \tag{3.25}$$

ifadesi ile verilir. Burada C bir sabittir. Denk. (3.25)' de verilen ifadenin sınır koşulu olarak kullanılabilmesi için bu C sabitinin belirlenmesi gerekir. Bu gerekliliği ortadan kaldırmak için Denk. (3.25)' den dalga fonksiyonunun asimptotik bölgedeki türevi $\psi'_{asim}(x)$ hesaplanır:

$$\psi'_{asim}(x) = -C\frac{\sqrt{\alpha}}{2}x^{5/2}BesselK\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right). \tag{3.26}$$

Denk. (3.26)' yı Denk. (3.25)' e bölerek elde edilen oran ile asimptotik bölge için C sabitinden bağımsız bir sınır koşulu elde edilmiş olunur:

$$\frac{\psi'_{asim}(x)}{\psi_{asim}(x)} = -\frac{\sqrt{\alpha}x^2}{2}\frac{BesselK\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right)}{BesselK\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right)}. \tag{3.27}$$

3.2.1.2. $x \to 0$ limiti

$x \to 0$ iken Denk. (3.17)' yi ele alalım. Dalga fonksiyonu $x = 0$' da sürekli olduğundan denklemdeki doğrusal olmayan $\frac{\psi^2(x)}{x^2}$' li terim bu limitte sabit bir değere yaklaşır (Edwards ve Burnett, 1995):

$$\frac{\psi(x)}{x} \approx \gamma\,. \tag{3.28}$$

Burada γ bir sabittir. Ayrıca $x = 0$' da $\psi(x)$ sıfır olur. Buna göre, $x \to 0$ limitinde Denk. (3.17) yaklaşık olarak,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\beta - c\gamma^2)\psi(x) \approx 0 \tag{3.29}$$

ile verilir. Yukarıdaki bu denklemin sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından oluşan iki terimli bir çözümü vardır. Bu terimlerden sadece biri (sinüs fonksiyonu) orijinde sıfıra

eşit olur. Fiziksel olarak kabul edilebilir olan bu çözümün x' e göre türevi alınır. Bu türevin $x = 0$' daki değeri bir sabite eşittir ve sonuçta $x \to 0$ için $\psi(x)$' in aşağıda verilen sınır koşullarını sağladığı bulunur:

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = sabit \tag{3.30}$$

$x \to \infty$ için Denk. (3.27) ve $x \to 0$ için Denk. (3.30) ile verilen sınır koşulları, sistemin taban durum çözümünü bulmak için kullanılan sayısal yöntemin temelini oluştururlar. Çalışmada kullanılan sayısal yöntem dört adımlı Runge-Kutta formülüne dayalıdır. Bu formül kullanılarak Denk. (3.17)' de verilen boyutsuz GPD' nin belirli bir β değeri için sayısal integrali alınır. Denk. (3.30) ile verilen başlangıç sınır koşulları $\psi'(0)$ için bir deneme değer atanarak kullanılır. Sayısal integralleme $H = 0.001$ olarak alınan adımlarla gerçekleştirilir ve Denk. (3.27) ile verilen asimptotik koşulun geçerli olduğu $x = x_{maks}$ değerine kadar sürdürülür. Sayısal olarak hesaplanan $\psi'_{asim}(x)/\psi_{asim}(x)$ oranı ile Denk. (3.27)' den elde edilen analitik sonuç arasındaki farkın önceden belirlenen bir değerden daha küçük olması amaçlanır. $\psi'(0)$' a atanan deneme değeri için istenen sonucun elde edilememesi durumunda $\psi'(0)$ için uygun değer Sekant yönteminden belirlenir.

3.3. Sonuçlar ve Tartışma

Bu kesimde, anharmonik katkının bir λ parametresi ile kontrol edilebildiği harmonik artı kuartik bir tuzakta bulunan bozonlar arasındaki itici ve çekici etkileşimler için GPD' nin sayısal yollarla çözümünden elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

Atomlar arası çekici ($c = -1$) ve itici ($c = 1$) etkileşimlerin her ikisi için Denk. (3.17)' den elde edilen taban durum çözümüne ek olarak dalga fonksiyonunda düğüm noktalarının olduğu radyal olarak uyarılmış durumlara ait çözümler de elde edilir. Yoğuşumdaki bu doğrusal olmayan uyarılmalar, daha önce farklı uzaysal boyutlardaki harmonik tuzaklar için de gözlenmiş (Edwards ve Burnett, 1995; Adhikari, 2000a; Hua ve ark., 2006) ve bunların soğutma işlemi sırasında sistemde ortaya çıkan yarı kararlı durumlar ile ilgili olabileceği sonucuna varılmıştır (Edwards ve Burnett, 1995).

İlk olarak, çekici ve itici etkileşim durumlarındaki farklı β değerleri için Denk. (3.17)' den elde edilen taban durum çözümleri göz önüne alınacaktır. Tuzak

potansiyelini Denk. (3.14)' de verildiği gibi harmonik artı kuartik tipte almak için Denk. (3.17)' de $\alpha = 1$ olarak alınır. Elde edilen çözümler ile ilgili parametreler (dalga fonksiyonunun türevinin orijindeki değeri $\psi'(0)$, indirgenmiş atom sayısı n ve ortalama kare yarıçap $\langle x^2 \rangle$) çekici ve itici etkileşim durumları için sırasıyla Çizelge 3.1a ve Çizelge 3.1b' de listelenmiştir. Çizelgelerden, GPD' nin taban durum çözümlerinin atomlar arası çekici etkileşim durumunda kimyasal potansiyelin $\beta < 2.8$ olduğu değerler için ve itici etkileşim durumunda da $\beta > 2.8$ olduğu değerler için elde edildiği görülür.

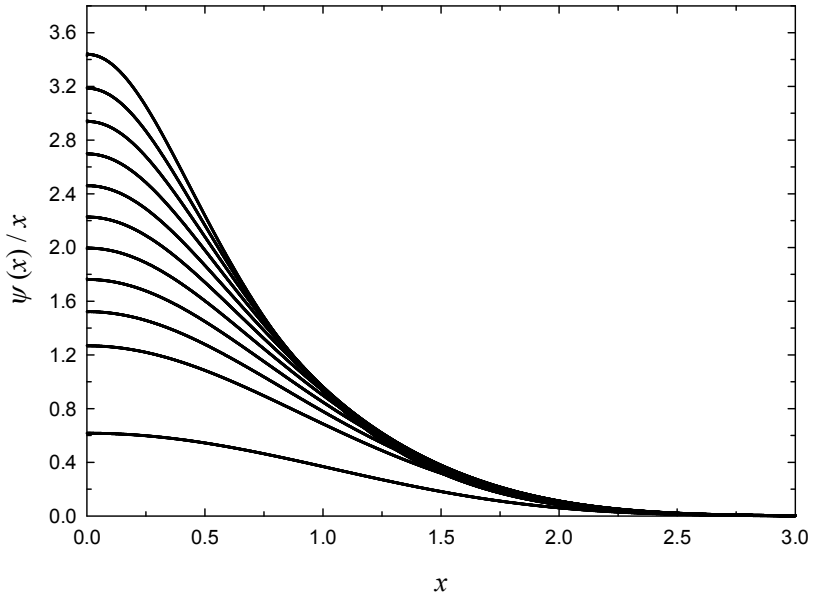
Çizelgelerde yer alan bu sonuçlara ait dalga fonksiyonları çekici ve itici etkileşimler için sırasıyla Şekil 3.1a ve Şekil 3.1b' de gösterilmektedir. Grafiklerde yatay eksen, $l = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ ile tanımlı harmonik salınıcı uzunluk birimi ile düşey eksen ise $\frac{1}{l\sqrt{8\pi a}}$ ile ölçeklidir. Böylece boyutsuz değişkenler cinsinden $\frac{\psi(x)}{x}$' in x' e karşı grafiği çizilir. Şekil 3.1a ve Şekil 3.1b' deki dalga fonksiyonları yapısının birbirlerinden oldukça farklı olduğu dikkati çekmektedir. Parçacıklar arası çekici etkileşim için dalga fonksiyonu, itici etkileşime göre $x = 0$' da daha keskin tepeli bir yapıya sahiptir. Dolayısıyla, çekici etkileşim durumunda indirgenmiş atom sayısı ve ortalama kare yarıçap değerleri de daha küçüktür. Ayrıca, Çizelge 3.1a' da görüldüğü gibi, çekici etkileşim durumunda kimyasal potansiyelin azalması ile birlikte indirgenmiş atom sayısı yavaş bir şekilde artarken $\langle x^2 \rangle$ ile verilen yarıçap değeri hızlı bir şekilde azalır. Bu noktada $\rho_C = |\phi(0)|^2$ ile tanımlı yoğuşum merkez yoğunluğunun davranışı oldukça ilginçtir. Şekil 3.2' de indirgenmiş atom sayısı n' in boyutsuz merkez yoğunluğu ρ_0' a $\left(\rho_0 = \frac{4\pi\hbar a}{m\omega}\rho_C \right)$ karşı çizilmiş grafiği görülmektedir. Bu grafikte, yoğuşumdaki atom sayısının maksimum bir değer ($n_{maks} \cong 1.2$) için doyuma ulaştığı görülür. Bu değer çekici etkileşim durumunda yoğuşumda bulunabilecek maksimum atom sayısı değerine karşılık gelir.

Çizelge 3.1a. $\alpha = 1$ için atomlar arası çekici etkileşim ($c = -1$) durumunda elde edilen taban durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

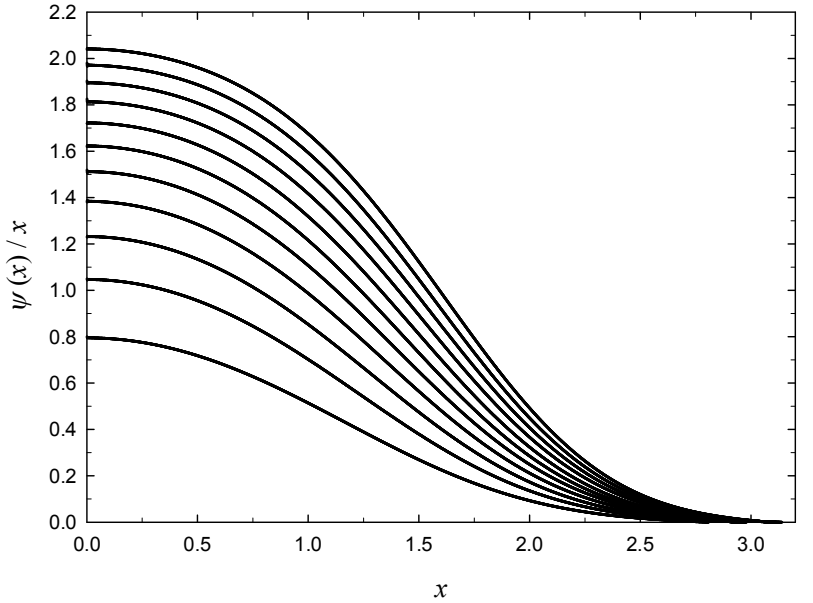
β	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
2.8	0	0	0
2.6	0.616842	0.150200	1.291448
2.2	1.267930	0.518920	1.194882
2.0	1.522488	0.671039	1.145859
1.8	1.762186	0.801815	1.096586
1.6	1.995787	0.911949	1.047088
1.4	2.227137	1.001760	0.997617
1.2	2.460578	1.073007	0.948287
1.0	2.697566	1.126462	0.899414
0.8	2.939415	1.164132	0.851115
0.6	3.186484	1.186158	0.804235
0.4	3.438926	1.196380	0.758462
0.2	3.696519	1.195222	0.714560
-0.2	4.222570	1.169450	0.632786
-0.6	4.755578	1.123449	0.560169
-1.0	5.286260	1.068483	0.496626
-1.4	5.806424	1.011845	0.442140
-2.0	6.555738	0.931286	0.375933

Çizelge 3.1b. $\alpha = 1$ için atomlar arası itici etkileşim ($c = 1$) durumunda elde edilen taban durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

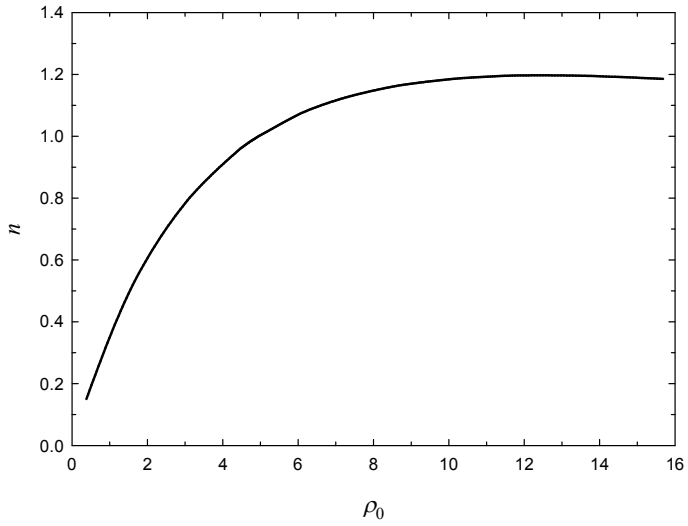
β	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
2.8	0	0	0
3.0	0.795150	0.296712	1.372709
3.2	1.046969	0.562320	1.427602
3.4	1.231994	0.842155	1.471914
3.6	1.384016	1.147961	1.520477
3.8	1.512106	1.470940	1.564114
4.0	1.622665	1.804655	1.599733
4.2	1.722123	2.165300	1.640557
4.4	1.813140	2.562322	1.690561
4.6	1.895198	2.965999	1.731233
4.8	1.970924	3.389205	1.771214
5.0	2.041365	3.831723	1.810547



Şekil 3.1a. Farklı kimyasal potansiyel (β) değerleri için $\alpha = 1$ ve atomlar arası çekici etkileşim ($c = -1$) durumunda elde edilen taban durum yoğuşum dalga fonksiyonları. Eğrilerin sıralaması Çizelge 3.1a' da verilen sıralama ile aynıdır. En üstteki eğri $\beta = 0.4$; en alttaki eğri ise $\beta = 2.6$ durumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 3.1b. Farklı kimyasal potansiyel (β) değerleri için $\alpha = 1$ ve atomlar arası itici etkileşim ($c = 1$) durumunda elde edilen taban durum yoğuşum dalga fonksiyonları. Eğrilerin sıralaması Çizelge 3.1b' de verilen sıralama ile aynıdır. En üstteki eğri $\beta = 5.0$; en alttaki eğri ise $\beta = 3.0$ durumuna karşılık gelmektedir.

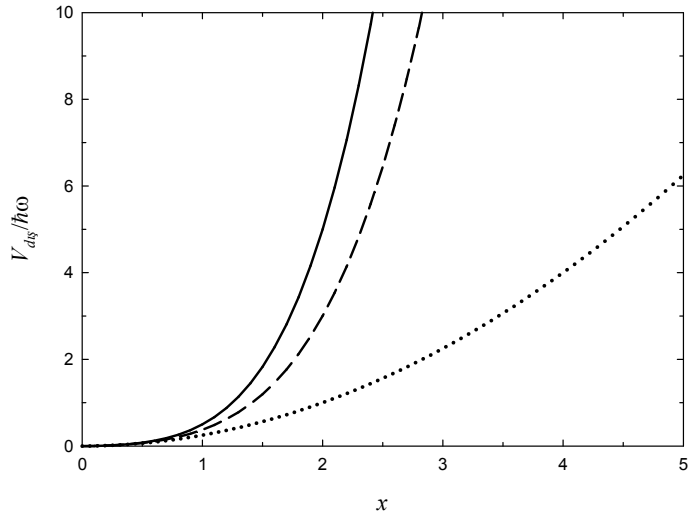


Şekil 3.2. $\alpha = 1$ ve atomlar arası çekici etkileşim ($c = -1$) durumunda indirgenmiş atom sayısı n' in boyutsuz merkez yoğunluğu ρ_0 ile değişimi.

Yoğuşum merkez yoğunluğu ise ortalama kare yarıçap değerinin azalması nedeniyle ıraksama eğilimindedir. Yoğuşum, bu kritik maksimum atom sayısı değerine ulaşana kadar kararlıdır. Atom sayısı bu kritik değerden büyük olduğu ($n > n_{maks}$) zaman yoğuşum atom yayınlayarak çökmeye başlar. Bu durumda GPD' den elde edilen çözümlerin tümü kararsızdır (Edwards ve Burnett, 1995; Ruprecht ve ark., 1995; Kagan ve ark., 1996; Weiner ve ark., 1999; Adhikari, 2000a). Çizelge 3.1a' da, göz önüne aldığımız anharmonik tuzakta $\beta < 0.4$ için yoğuşumdaki atom sayısının azaldığı ve yoğuşumun çöktüğü görülmektedir. Buna göre, $\beta < 0.4$ için elde edilen tüm bu çözümler kararsızdır.

Atomlar arası çekici etkileşim durumunda yoğuşumdaki çökme ^{7}Li' un BEY' i için deneysel olarak gözlenmiştir (Kagan ve ark., 1998; Sackett ve ark., 1998). Bu deneylerde, yoğuşumdaki atom sayısının kritik bir değere ulaşması ile birlikte yoğuşum bulutunun çökmeye başladığı görülmüştür. Yoğuşumdaki bu çökme, atom sayısı kritik değerin altına düşerek yoğuşumun kararlı hale gelmesine kadar devam etmiştir. Daha sonra sistemdeki diğer atomların yoğuşum durumuna geçmeleri ile birlikte yoğuşum tekrar büyümüş ve bir dizi çökme daha meydana gelmiştir.

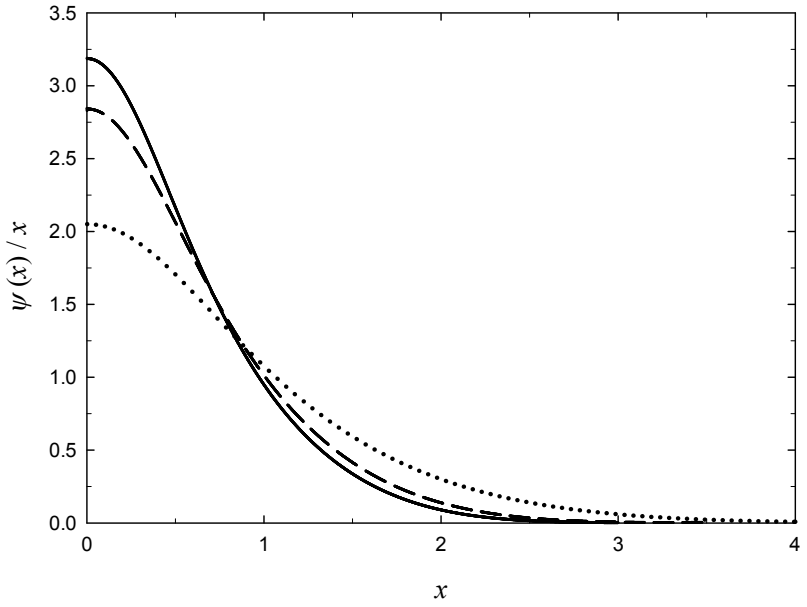
Çizelge 3.1b' deki sonuçlardan, itici etkileşim durumunda indirgenmiş atom sayısı üzerinde herhangi bir sınırlama olmadığı görülür. Kimyasal potansiyelin artması ile birlikte hem yoğuşumdaki atom sayısı hem de ortalama kare yarıçap değeri artar.



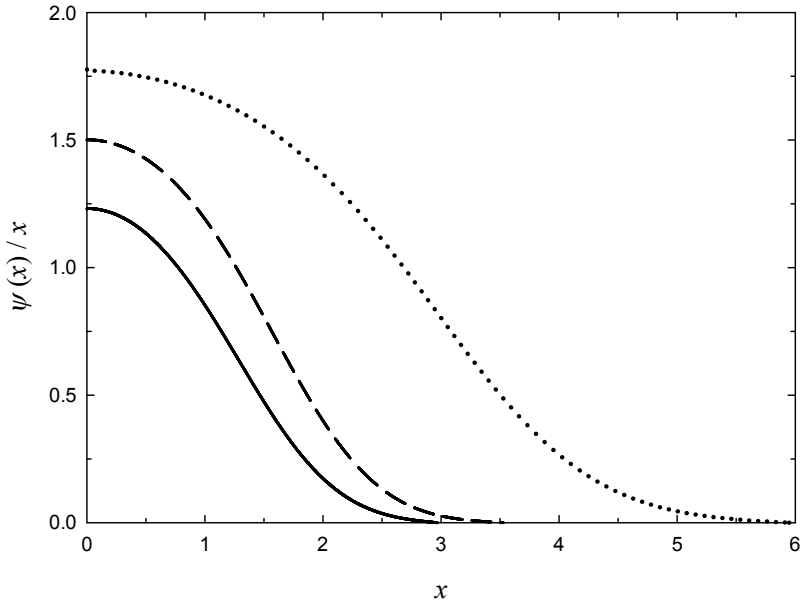
Şekil 3.3. Tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğü ile ilişkili α parametresinin üç farklı değeri için potansiyel şekilleri. Sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla α ' nın 1.0, 0.5 ve 0.0 değerlerine karşılık gelir.

Tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğünü belirleyen α parametresinin üç farklı değeri ($\alpha = 0.0; 0.5; 1.0$) için çizilen potansiyeller Şekil 3.3' de gösterilmektedir. Grafikten de görüldüğü gibi bu üç potansiyel içerisinde en fazla sınırlayıcı olan $\alpha = 1.0$ ile verilen anharmonik tuzak iken en az sınırlayıcı olan $\alpha = 0.0$ ' a karşılık gelen harmonik tuzaktır. Atomlar arası çekici ve itici etkileşim durumlarında kimyasal potansiyelin belirli bir değeri için bu üç farklı α değeri göz önüne alınarak GPD' den elde edilen sonuçlar sırasıyla Şekil 3.4a ve Şekil 3.4b' de verilmiştir. Çekici etkileşim durumunda $\beta = 0.6$ için elde edilen sonuçlara bakıldığında tuzağın sınırlayıcı özelliği ne kadar fazla ise yoğuşum dalga fonksiyonunun da o kadar çabuk sıfıra gittiği gözlenir. Bunun bir sonucu olarak, $\alpha = 1.0$ durumunda yoğuşum bulutundaki atom sayısının en az olması ve bulut yarıçapının da en küçük olması beklenir. Bu üç tuzak için Çizelge 3.2a' da verilen hesaplama sonuçları da bu durumu sayısal olarak doğrulamaktadır.

Gerek tuzağın sınırlayıcı etkisi gerekse de parçacıklar arasındaki çekici etkileşim atomların tuzağın merkezinde bulunma olasılıklarını artırır. Bu durum, artan α değeri ile birlikte artış gösteren merkez yoğunluklarından da açıkça görülmektedir. Bununla beraber, atomlar arasındaki etkileşimlerin itici olması durumunda, tuzak merkezindeki yoğunluk ile tuzağın sınırlayıcı etkisi arasındaki ilişkinin tam tersi hale geldiği gözlenir (Şekil 3.4b). Grafikte, tuzaklarda bulunan atom sayıları ve bulut yarıçaplarının α ile olan ilişkileri açık bir şekilde görülmektedir. Aynı şekilde, Çizelge 3.2b' de $c = +1$ ve



Şekil 3.4a. Atomlar arası çekici etkileşim ($c=-1$) ve $\beta=0.6$ için α parametresinin üç farklı değerine karşılık gelen taban durum yoğuşum dalga fonksiyonları. Sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla α ' nın 1.0, 0.5 ve 0.0 değerlerine karşılık gelir.



Şekil 3.4b. Atomlar arası itici etkileşim ($c=1$) ve $\beta=3.4$ için α parametresinin üç farklı değerine karşılık gelen taban durum yoğuşum dalga fonksiyonları. Sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla α ' nın 1.0, 0.5 ve 0.0 değerlerine karşılık gelir.

Çizelge 3.2a. Atomlar arası çekici etkileşim ($c=-1$) ve $\beta=0.6$ durumunda üç farklı α değeri için elde edilen taban durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

α	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
0.0	2.049574	1.598799	1.785815
0.5	2.840827	1.284772	0.982795
1.0	3.186484	1.186158	0.804235

Çizelge 3.2b. Atomlar arası itici etkileşim ($c=1$) ve $\beta=3.4$ durumunda üç farklı α değeri için elde edilen taban durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

α	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
0.0	1.772477	17.146465	5.983526
0.5	1.501563	2.073546	1.962760
1.0	1.231994	0.842155	1.471914

Çizelge 3.3a. $\alpha=1$ için atomlar arası çekici etkileşim ($c=-1$) durumunda elde edilen birinci uyarılmış durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

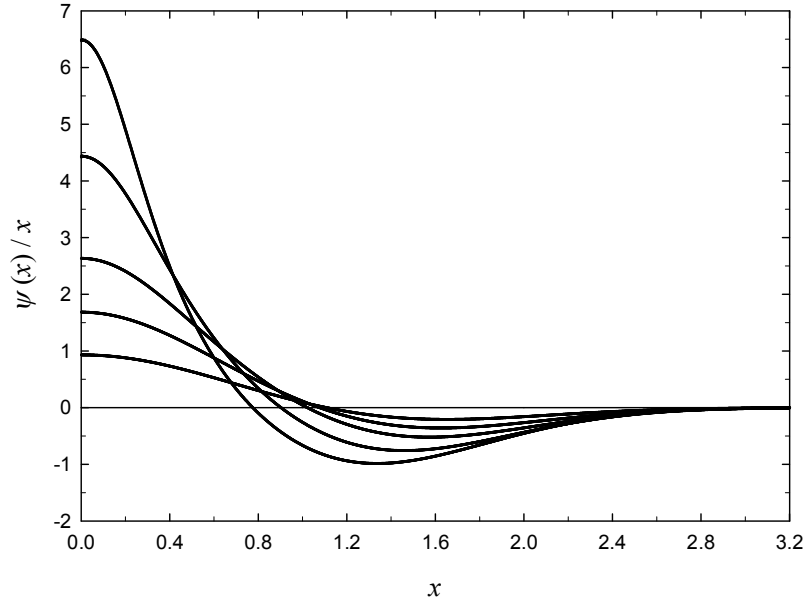
β	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
8.0	0	0	0
7.8	0.931287	0.156234	2.362939
7.5	1.684690	0.448734	2.330817
7.0	2.634054	0.874049	2.279358
6.0	4.435255	1.541159	2.183575
5.0	6.485937	2.096385	2.087282

Çizelge 3.3b. $\alpha=1$ için atomlar arası itici etkileşim ($c=1$) durumunda elde edilen birinci uyarılmış durum dalga fonksiyonu çözümü ile ilgili parametreler

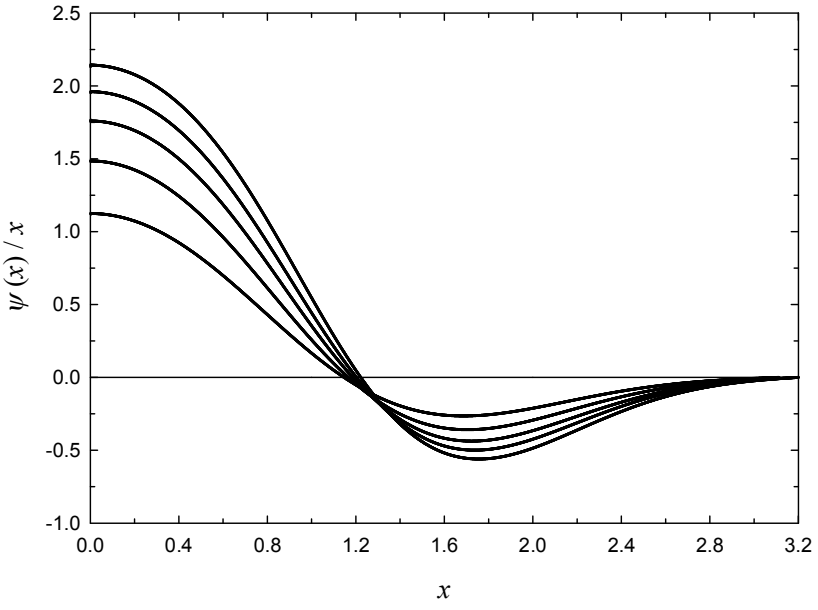
β	$\psi'(0)$	n	$\langle x^2 \rangle$
8.0	0	0	0
8.2	1.124632	0.266009	2.384351
8.4	1.485235	0.501881	2.404419
8.6	1.759375	0.765995	2.439489
8.8	1.960480	1.016195	2.445283
9.0	2.142585	1.315247	2.482868

$\beta = 3.4$ için elde edilen sonuçlara bakıldığında da, çekici etkileşim durumu ile benzer olarak, en büyük n ve $\langle x^2 \rangle$ değerlerinin harmonik tuzak için elde edildiği görülür.

Bu kesimin başında da belirtildiği gibi, kullandığımız sayısal yöntem ile yoğuşumun sadece taban durum çözümü değil radyal olarak uyarılmış tüm durumlara ait çözümleri de elde edilebilir. Bu uyarılmış durum çözümlerinden sadece tek düğüm noktalı olanlar tez çalışmasında dikkate alınacaktır. Çizelge 3.3a ve Çizelge 3.3b' de sırasıyla çekici ve itici etkileşimler için elde edilen sonuçlar ile ilgili parametreler listelenmiştir. Denk. (3.17)' den elde edilen tek düğüm noktalı çözümlerin çekici etkileşim durumunda kimyasal potansiyelin $\beta < 8.0$ olduğu değerler için ve itici etkileşim durumunda ise $\beta > 8.0$ olduğu değerler için bulunduğu görülür. Şekil 3.5a ve Şekil 3.5b' de her iki duruma ait dalga fonksiyonları verilmiştir. Taban durum için elde edilen sonuçlara benzer şekilde, atomlar arası çekici etkileşim ile ilgili dalga fonksiyonunun $x = 0$ yakınında dar tepeli bir yapıya sahip olduğu, itici etkileşim içinse daha yayvan bir yapıda olduğu görülür. Bunun sonucu olarak n ve $\langle x^2 \rangle$ değerleri, atomlar arasındaki etkileşimin itici olması durumunda daha büyüktür. Ayrıca Çizelge 3.3a' da çekici etkileşimler için kimyasal potansiyelin azalması ile birlikte indirgenmiş atom sayısının arttığı ve ortalama kare yarıçapın da azaldığı görülür. Taban durum çözümünde olduğu gibi bu durumda da n değeri için bir üst limit olması beklenir.



Şekil 3.5a. Farklı kimyasal potansiyel (β) değerleri için $\alpha = 1$ ve atomlar arası çekici etkileşim ($c = -1$) durumunda elde edilen bir düğüm noktalı yoğuşum dalga fonksiyonları. Eğrilerin sıralaması Çizelge 3.3a' da verilen sıralama ile aynıdır. En üstteki eğri $\beta = 5.0$; en alttaki eğri ise $\beta = 7.8$ durumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 3.5b. Farklı kimyasal potansiyel (β) değerleri için $\alpha = 1$ ve atomlar arası itici etkileşim ($c = 1$) durumunda elde edilen bir düğüm noktalı yoğuşum dalga fonksiyonları. Eğrilerin sıralaması Çizelge 3.3b' da verilen sıralama ile aynıdır. En üstteki eğri $\beta = 9.0$; en alttaki eğri ise $\beta = 8.2$ durumuna karşılık gelmektedir.

4. TUZAKLANMIŞ BOZONLARDA ÜÇ PARÇACIK ETKİLEŞİMLERİ

Bir önceki bölümde göz önüne aldığımız harmonik artı kuartik tuzakta atomlar arası etkileşimlerin çekici, yani *s*-dalga saçılma uzunluğunun negatif olması durumunda yoğuşumun kritik bir maksimum atom sayısı değerine kadar kararlı olduğu, atom sayısının bu kritik değerden büyük olması durumunda ise yoğuşumun kararsız hale gelerek çöktüğü sonucuna ulaşmıştık. Sistemde itici üç parçacık etkileşimlerinin göz önüne alınması bu sonucu önemli derecede değiştirir. Yoğuşumun kararlı olduğu bölgenin çok küçük şiddetteki üç parçacık kuvvetleri için bile önemli ölçüde genişlediği daha önce harmonik tuzaklar için yapılan çalışmalar ile kanıtlanmıştır (Akhmediev ve ark., 1999; Gammal ve ark., 2000a; Gammal ve ark., 2000b).

Tez çalışmasının bu bölümünde harmonik artı kuartik bir potansiyel ile sınırlandırılmış bozonlar için itici üç parçacık etkileşimi ile negatif bir *s*-dalga saçılma uzunluğundan ileri gelen çekici iki parçacık etkileşimi arasındaki rekabetin sistem üzerindeki etkileri araştırılacaktır.

4.1. Çekici İki Parçacık ve İtici Üç Parçacık Etkileşimleri

Tuzaklanmış BE yoğuşumlarında, etkin atom-atom etkileşimi doğasının yoğuşum durumunun kararlılığını belirlediği bilinmektedir (Huang, 1987). Aralarında itici iki parçacık etkileşimi olan tuzaklanmış ultra soğuk atomların kararlı bir Bose yoğuşum durumuna faz geçişi yaptıkları birçok farklı durum için deneysel olarak elde edilmiştir: ^{87}Rb (Anderson ve ark., 1995), ^{23}Na (Davis ve ark., 1995) ve ^{1}H (Fried ve ark., 1998). Bununla birlikte çekici iki parçacık etkileşimine sahip yoğuşmuş atomlardan oluşan bir sistem, atom sayısı N yeterince küçük değilse kararsız hale gelir. Teorik çalışmalar (Edwards ve Burnett, 1995; Ruprecht ve ark., 1995; Baym ve Pethick, 1996) ile öngörülen bu sonuç, ^{7}Li gazı için deneysel olarak da gözlenmiştir (Bradley ve ark., 1995; Bradley ve ark., 1997; Kagan ve ark., 1998; Sackett ve ark., 1998). *s*-dalga saçılma uzunluğu $a = (-14.5 \pm 0.4)\,\text{Å}$ olan ^{7}Li atomlarından oluşan bir sistemde yoğuşum durumundaki atomların maksimum sayısı 650 ile 1300 arasında sınırlıdır. Bu sayı ortalama alan yaklaşımından elde edilen sonuçlar ile uyumludur (Edwards ve Burnett, 1995; Ruprecht ve ark., 1995).

Sonuç olarak, atomlar arasında çekici iki parçacık etkileşimlerinin olduğu bir sistemde atom sayısı belirli bir kritik değerden (N_{maks}) büyük ise yoğuşum için kararlı çözümler bulunamaz (Edwards ve Burnett, 1995; Ruprecht ve ark., 1995; Kagan ve ark., 1996; Weiner ve ark., 1999; Adhikari, 2000a). Bununla beraber, üç parçacık etkileşimlerinden kaynaklanan itici bir potansiyel ile iki parçacık çekici etkileşimleri dengelenerek yoğuşumda bulunan atom sayısının kritik N_{maks} değerinden daha büyük olması sağlanabilir (Akhmediev ve ark., 1999; Gammal ve ark., 2000a; Gammal ve ark., 2000b). Böylece yoğuşumun kararlı olduğu bölge, çok küçük şiddetteki üç parçacık kuvvetleri için bile önemli ölçüde genişletilebilir.

Bir BE yoğuşumunun kararlılığı atom sayısı parametresinin dışında tuzak geometrisi ile de ilgilidir (Filho ve ark., 2002; Yong ve ark., 2009; Li ve ark., 2010). Manyetik tuzaklardaki yoğuşumların kararlılığı ile ilgili çalışmalar çoğunlukla harmonik potansiyeller ile sınırlı kalmıştır. Son zamanlarda BEY deneylerinde anharmonik tuzakların kullanılmaya başlanması ile bu tuzaklardaki yoğuşumların kararlılığı da araştırılması gereken bir konu haline gelmiştir. Anharmonik tuzaklara olan bu ilgi ve bir önceki bölümde aralarında çekici etkileşim olan bozonlar için yoğuşumun çökmesi ile sonuçlanan durum göz önüne alınarak tez çalışmasının bu bölümünde harmonik artı kuartik bir tuzaktaki yoğuşumun kararlılık problemi ele alınacaktır. Bu kapsamda, üç parçacık etkileşimine bağlı etkin bir potansiyelin yer aldığı GPD sayısal olarak çözülecek ve elde edilen sonuçlardan, itici karakterdeki bu etkileşimlerin şiddetinin ve tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğünün yoğuşumun kararlılığı üzerindeki etkileri incelenecektir. Bir sonraki kesimde, bu çalışmada kullanılan ortalama alan yaklaşımı ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

4.2. Harmonik artı Kuartik Tuzaktaki Yoğuşumun Kararlılık Problemi

Çekici atom-atom etkileşimi ile birlikte itici üç parçacık etkileşimlerini de içeren GPD aşağıdaki gibi verilir (Fetter ve Walecka, 1971; Akhmediev ve ark., 1999):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V_{dış}(\vec{r})-\frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^2+\lambda_3\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^4\right]\Phi(\vec{r},t)\,. \qquad (4.1)$$

Burada λ_3 üç parçacık etkileşim şiddetidir. Bu denklemin enerji fonksiyoneli,

$$\varepsilon = \int d\vec{r}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\left|\nabla\Phi(\vec{r},t)\right|^2 + V_{dış}(\vec{r})\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^2 - \frac{1}{2}\frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^4 + \frac{1}{3}\lambda_3\left|\Phi(\vec{r},t)\right|^6\right\} \qquad (4.2)$$

ifadesi ile verilir. Bu fonksiyonel, GPD' nin hareket integralidir. Zamandan bağımsız çözümler için;

$$\Phi(\vec{r},t) = e^{-i\mu t/\hbar}\phi(\vec{r}) \qquad (4.3)$$

ile verilen dalga fonksiyonu Denk. (4.1)' de yerine yazılarak

$$\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{dış}(\vec{r}) - \frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}\left|\phi(\vec{r})\right|^2 + \lambda_3\left|\phi(\vec{r})\right|^4\right]\phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \qquad (4.4)$$

ifadesi ile verilen zamandan bağımsız denklem elde edilir. Bu denklemde $\phi(\vec{r})$, $N = \int d\vec{r}\left|\phi(\vec{r})\right|^2$ bağıntısı ile sistemdeki atom sayısı N' e normalizedir. Denk. (4.1), Denk. (4.3)' de verilen bağıntı ile birlikte kanonik biçimde aşağıdaki gibi yazılır (Akhmediev ve ark., 1999):

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta\phi^*}(\varepsilon - \mu N)\,. \qquad (4.5)$$

Burada, $\frac{\delta}{\delta\phi^*}$ varyasyonel türevi ifade eder. Bu denklemde, sabit bir N değeri için elde edilen zamandan bağımsız çözümler ε' nin maksimum ve minimum değerlerine karşılık gelir. Belirli bir N değerinde ε' nin mutlak minimum değerlerine sahip çözümler küçük pertürbasyonlara karşı kararlıdırlar. Diğer taraftan verilen N değerinde ε' nin maksimum değerlerine sahip çözümler ise kararsızdırlar. Buna ek olarak, ε' nin yerel minimumlarına karşılık gelen zamandan bağımsız çözümler ise yarı kararlı olarak adlandırılırlar. Bu çalışmada göz önüne alınan sistemler için her üç çözüm türü de mevcuttur. Enerjinin yerel ya da mutlak minimum değerleri için taban durum çözümleri, aşağıda verilen kararlılık kriterini sağlarlar (Grillakis ve ark., 1987):

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} > 0 . \tag{4.6}$$

Bir başka deyişle, bu kriteri sağlayan çözümler kararlı ya da yarı kararlı çözümlerdir.

Bu çalışmada göz önüne aldığımız sınırlayıcı potansiyel, $V_{dış}(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \lambda r^4$ olup küresel simetriktir. Bu nedenle, Denk. (4.4)' ü küresel koordinat sisteminde yazmak daha uygun olacaktır. Ayrıca taban durum çözümleri ile ilgilenildiğinden ϕ sadece r' nin fonksiyonudur: $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$. Sonuçta,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \lambda r^4 - \frac{4\pi\hbar^2 |a|}{m} \phi^2(r) + \lambda_3 \phi^4(r) - \mu \right] \phi(r) = 0 \tag{4.7}$$

ile verilen denklem elde edilir. Kesim 3.2' de Denk. (3.16) ile tanımlanan boyutsuz değişkenler kullanılarak yukarıdaki denklem,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \alpha x^4 - \frac{1}{x^2} \psi^2(x) + g_3 \frac{1}{x^4} \psi^4(x) - \beta \right] \psi(x) = 0 \tag{4.8}$$

şeklinde boyutsuz olarak yazılabilir. Bu denklemdeki g_3 parametresi,

$$g_3 \equiv \lambda_3 \hbar\omega \left(\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} \right)^2 \tag{4.9}$$

ile tanımlıdır. Boyutsuz değişkenler cinsinden dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulu Denk. (3.18)' de verildiği gibi olur. Benzer şekilde, Denk. (3.20) ile tanımlı ortalama kare yarıçap boyutsuz olarak Denk. (3.21)' deki gibi yazılabilir.

Denk. (4.2)' den yararlanarak hesaplanan sistemin toplam enerjisi, ε, boyutsuz değişkenler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varepsilon = E\left(\frac{N\hbar\omega}{n} \right). \tag{4.10}$$

Burada E boyutsuz toplam enerji ifadesi olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$E = \int_0^\infty dx \left\{ \left| \frac{d\psi(x)}{dx} \right|^2 + \frac{x^2 \psi^2(x)}{4} + \frac{\alpha x^4 \psi^2(x)}{4} - \frac{\psi^4(x)}{2x^2} + \frac{g_3 \psi^6(x)}{3x^4} \right\}. \tag{4.11}$$

Çalışmada $\rho_C = |\phi(0)|^2$ ile tanımlı yoğuşum merkez yoğunlukları da hesaplanmıştır. Bunun için,

$$\rho_C = \rho_0 \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar|a|} \right) \tag{4.12}$$

ile verilen boyutsuz ifade kullanılmıştır. Burada ρ_0, boyutsuz merkez yoğunluğudur.

Denk. (4.8)' i sayısal olarak çözebilmek için öncelikle sınır koşullarının belirlenmesi gerekir. $x \to \infty$ iken $\psi(x) \to 0$ şartı sağlandığından denklemde $\psi^3(x)$ ve $\psi^5(x)$ ile orantılı doğrusal olmayan terimler ihmal edilebilir. Bu durumda yaklaşık denklem, Denk. (3.22)' de verildiği gibi olur. Kesim 3.2.1.1' deki aşamalar takip edilerek sonuçta $x \to \infty$ için,

$$\frac{\psi'_{asim}(x)}{\psi_{asim}(x)} = -\frac{\sqrt{\alpha}x^2}{2} \frac{BesselK\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right)}{BesselK\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\sqrt{\alpha}x^3\right)}. \tag{4.13}$$

ile verilen sınır koşuluna ulaşılır. Benzer şekilde, $x \to 0$ iken, Kesim 3.2.1.2' deki yaklaşımlar kullanılarak Denk. (4.8) ele alınır ve sonuçta $x \to 0$ için $\psi(x)$' in aşağıda verilen sınır koşullarını sağladığı bulunur:

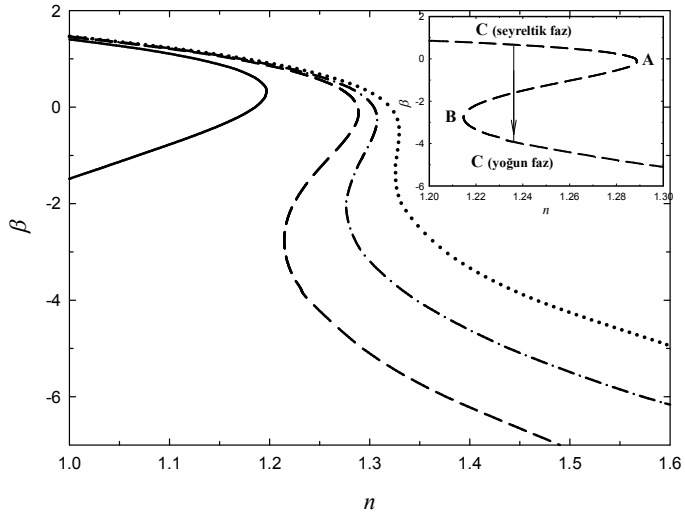
$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = sabit \tag{4.14}$$

İlgili sınır koşulları kullanılarak üç parçacık etkileşim şiddetine bağlı g_3 parametresinin farklı değerleri için Denk. (4.8) sayısal yollarla çözülür. Bu amaçla, bir önceki bölümde

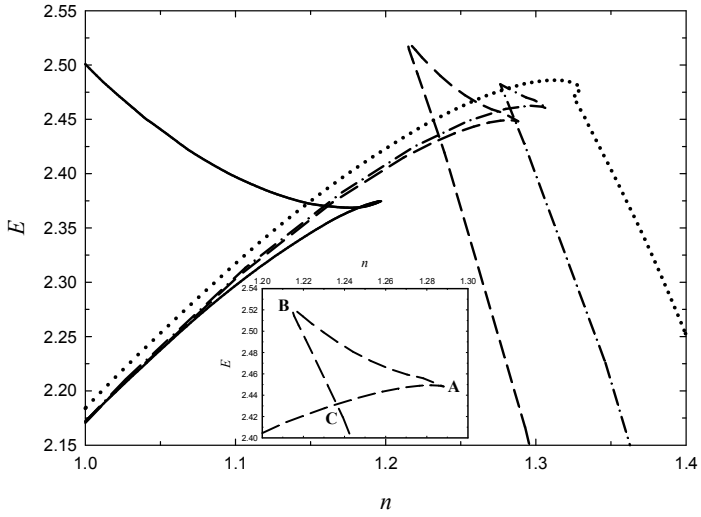
bahsedilen dört adımlı Runge-Kutta formülü ve Sekant yöntemi kullanılır. Elde edilen tüm sonuçlar ve ayrıca bu sonuçların tuzaklama potansiyelindeki α parametresine bağlı değişimleri bir sonraki kesimde ayrıntılı olarak incelenecektir.

4.3. Sonuçlar ve Tartışma

Bölüm 3' de, sistemde sadece iki parçacık etkileşimleri söz konusu iken atomlar arasında çekici etkileşim olması durumunda kimyasal potansiyeldeki azalma ile birlikte yoğuşumdaki atom sayısının maksimum bir değere kadar artış gösterdiği ve bu değerden sonra atom sayısının azalan kimyasal potansiyel ile birlikte azaldığı ve yoğuşumun çöktüğü sonucuna ulaşmıştık. Denk. (4.8)' de, $\alpha = 1$ alarak, boyutsuz kimyasal potansiyel β' yı indirgenmiş atom sayısı n' in bir fonksiyonu olarak çizdiğimiz Şekil 4.1' deki grafikte, $g_3 = 0.0$' a ait eğri bu sonucu resmetmektedir. Bu eğride iki farklı β değeri için aynı atom sayısının elde edildiği çözümler dikkati çeker. Grafikte, üst eğride yer alan ve atom sayısının maksimum olduğu kritik değere kadar elde edilen çözümlerin tümü, Denk. (4.6)' da verilen kriterden dolayı kararlıdırlar. Aynı kriter nedeniyle, alt eğriyi oluşturan sonuçların tümü de kararsız çözümlere karşılık gelir.



Şekil 4.1. Üç parçacık etkileşim şiddetinin (g_3) farklı değerleri ve $\alpha = 1$ için boyutsuz birimlerdeki kimyasal potansiyelin $(\beta = \mu/(\hbar\omega))$ indirgenmiş atom sayısı (n) ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı çizgiler sırasıyla g_3' ün 0.0, 0.007, 0.008 ve 0.009 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, $g_3 = 0.007$ değeri için faz geçişinin gerçekleştiği bölgeyi göstermektedir.



Şekil 4.2. Üç parçacık etkileşim şiddetinin (g_3) farklı değerleri ve $\alpha = 1$ için boyutsuz birimlerdeki toplam enerjinin indirgenmiş atom sayısı ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı çizgiler sırasıyla g_3' ün 0.0, 0.007, 0.008 ve 0.009 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, $g_3 = 0.007$ değeri için faz geçişinin gerçekleştiği bölgeyi göstermektedir.

Şekil 4.2' de toplam enerjinin yoğuşumdaki atom sayısı ile değişimini gösteren grafik yardımıyla da çözümlerin kararlılığı ile ilgili olarak yukarıdaki sonuçlara ulaşmak mümkündür. Buna göre $g_3 = 0.0$ için, alt eğrideki çözümler enerjinin mutlak minimumu olup kararlıdırlar. Üst eğrideki çözümler ise enerjinin yerel maksimum değerine sahip olmaları nedeni ile kararsızdırlar.

Sistemde itici karakterde üç parçacık etkileşimleri olması durumunda yoğuşumdaki bu çökmeye engel olmak mümkündür. Kısa mesafelerde itici üç parçacık potansiyeli, iki parçacık potansiyelinin çekici etkisine göre daha baskın olabilir. Çünkü Denk. (4.8)' de de görüldüğü gibi, iki parçacık potansiyeli x^{-2} ile orantılı iken üç parçacık itici etkileşimi x^{-4} ile orantılıdır. Böylelikle, kritik atom sayısı değerinde yoğuşumun çökmesine neden olan çekici etkileşim kuvveti, itici üç parçacık kuvveti tarafından dengelenir.

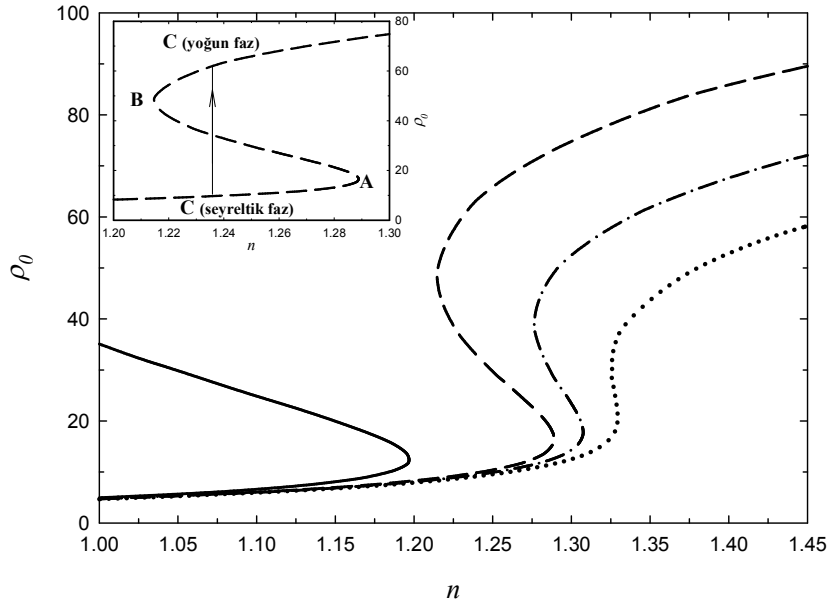
İtici üç parçacık etkileşimlerinin yoğuşum üzerindeki etkileri, Şekil 4.1 ve Şekil 4.2' de farklı g_3 değerleri için çizilen grafiklerden görülebilir. $g_3 = 0.009$ değerinde enerji, indirgenmiş atom sayısı n' in tek değerli bir fonksiyonu olduğundan yoğuşum daima kararlıdır (Şekil 4.2). Üç parçacık etkileşim şiddeti için eşik olarak kabul edilebilecek bu değerden küçük g_3' ler içinse ilginç bir yapı ile karşılaşılır. Şekil 4.1 ve

Şekil 4.2' de $g_3 = 0.007$ ve $g_3 = 0.008$ için çizilen eğrilerde üç farklı aralık dikkati çeker. $g_3 = 0.007$ için ilgili aralıklar A, B ve C şeklinde etiketlendirilmiş ve söz konusu bölgeler büyütülerek Şekil 4.1 ve Şekil 4.2' nin içerisine ayrı birer grafik olarak eklenmiştir. Bu grafiklerdeki ilk aralık, C (seyreltik faz) ile A noktaları arasında olup bu aralıktaki çözümlerin g_3' den neredeyse bağımsız oldukları görülür. Bu nedenle de Denk. (4.2)' deki $|\Phi|^6$' lı terimin önemli bir rol oynamadığı ve bu aralıkta yoğuşumun kararlılığı üzerinde dış tuzaklama potansiyelinin etkili olduğu sonucuna varılır (Dalfovo ve Stringari, 1996; Akhmediev ve ark., 1999). Yoğuşumdaki parçacık sayısı kritik değere ulaştığı zaman (grafiklerdeki A noktası) sistem, kendisini daha yoğun bir faza çökmeye sevk eden pertürbasyonlara karşı kararsız hale gelir. Kararlı haldeki daha yoğun bir fazın oluşması için gerekli en az parçacık sayısı grafiklerde B noktası ile gösterilmektedir. Bu noktada, Denk. (4.2) ile verilen fonksiyoneldeki altıncı dereceden terim, denklemdeki dördüncü dereceden terim ile yaklaşık olarak aynı değerdedir. Şekil 4.1' deki küçük grafikte seyreltik ve yoğun fazdaki eşit enerjili noktalar bir çizgi ile birleştirilmişlerdir. Dengedeki yoğuşum, bu C noktasında daha az yoğun bir fazdan daha yoğun bir faza doğru (ok yönünde) faz geçişi yapar. Bu sonuç ilk olarak harmonik tuzaklar için Akhmediev ve ark. (1999) tarafından elde edilmiştir.

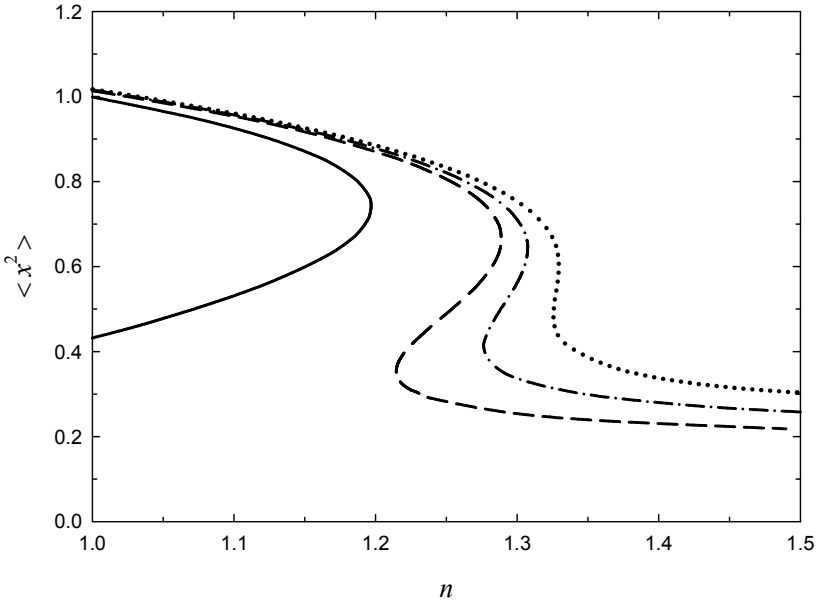
A ve B noktaları arasındaki çözümler Denk. (4.6)' da verilen kriterden dolayı kararsızdırlar. C (seyreltik faz) – A ve B – C (yoğun faz) aralıklarındaki çözümler ise aynı kriter nedeniyle kararlı gözükürler. Fakat Şekil 4.2' deki küçük grafikte, bu aralıklardaki toplam enerjinin C noktasında mutlak minimum olduğu ve C (seyreltik faz) – A ile B – C (yoğun faz) aralıkları içerisinde enerjinin yerel minimum değerini aldığı görülür. Bu nedenle bu aralıklarda yer alan çözümler yarı kararlıdırlar.

Son olarak Şekil 4.1' e ekli küçük grafik için $n = 0$' dan başlayıp C (seyreltik faz) noktasına kadar olan ve C (yoğun faz) noktasından n' in daha büyük değerlerine doğru olan aralıklardaki çözümler, Denk. (4.6)' daki kritere göre kararlıdırlar.

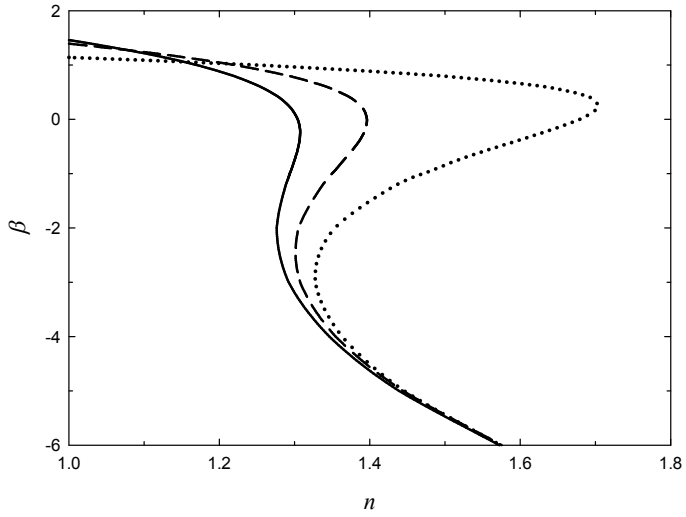
Boyutsuz birimlerdeki merkez yoğunluğu ρ_0 ve ortalama kare yarıçap $\langle x^2 \rangle$, indirgenmiş atom sayısı n' in bir fonksiyonu olarak sırasıyla Şekil 4.3 ve Şekil 4.4' de verilmiştir. Bu grafiklerde de önceki durumlara benzer şekilde $\alpha = 1$ olarak alınmış ve aynı g_3 değerleri kullanılmıştır. Kimyasal potansiyeldeki durum ile benzer olarak, yoğunluk ve yarıçap eğrilerinin de birinci mertebeden faz geçişlerine özgü bir şekilde geriye doğru büküldükleri görülür.



Şekil 4.3. Üç parçacık etkileşim şiddetinin (g_3) farklı değerleri ve $\alpha = 1$ için boyutsuz birimlerdeki merkez yoğunluğunun indirgenmiş atom sayısı ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı çizgiler sırasıyla g_3' ün 0.0, 0.007, 0.008 ve 0.009 değerlerine karşılık gelir. Şekil içerisindeki küçük grafik, $g_3 = 0.007$ değeri için faz geçişinin gerçekleştiği bölgeyi göstermektedir.



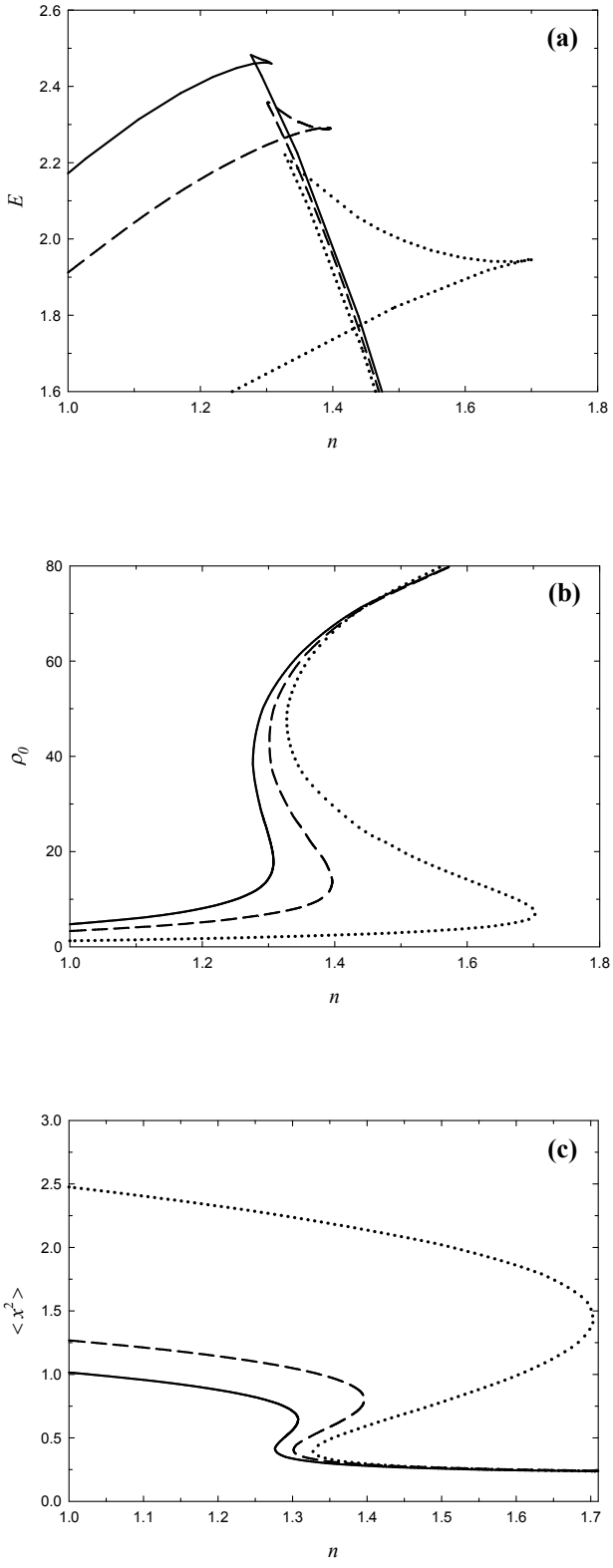
Şekil 4.4. Üç parçacık etkileşim şiddetinin (g_3) farklı değerleri ve $\alpha = 1$ için boyutsuz birimlerdeki ortalama kare yarıçapın indirgenmiş atom sayısı ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı çizgiler sırasıyla g_3' ün 0.0, 0.007, 0.008 ve 0.009 değerlerine karşılık gelir.



Şekil 4.5. α parametresinin üç farklı değeri ve $g_3 = 0.008$ için boyutsuz birimlerdeki kimyasal potansiyelin indirgenmiş atom sayısı ile değişimi. Sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla α ' nın 1.0, 0.5 ve 0.0 değerlerine karşılık gelir.

Yoğunluk için $g_3 = 0.007$ ' de gözlenen faz geçişi Şekil 4.3' deki küçük grafikte daha açık bir şekilde gösterilmektedir. Aynı enerjili noktaları birleştiren okun yönünden de anlaşıldığı gibi faz geçişinden sonra sistem çok daha yoğun hale gelmiştir. Diğerine göre daha yoğun ve yarıçap değerinin de daha küçük olması sebebi ile bu iki fazdan biri "sıvı" diğeri ise "gaz" olarak düşünülebilir. Bu nedenle literatürde bu faz geçişi "sıvı-gaz faz geçişi" olarak da bilinmektedir (Gammal ve ark., 2000a; Gammal ve ark., 2000b). Fakat, her iki durumda da sistemin gerçekte bir kuantum akışkanı olduğu belirtilmelidir.

Buraya kadar olan tartışmalarda, göz önüne aldığımız harmonik artı kuartik tuzaktaki anharmonik katkı $\alpha = 1.0$ olarak alınmıştır. Bu katkının yarıya düşmesi ($\alpha = 0.5$) ya da $\alpha = 0.0$ (harmonik tuzak) olması durumunda sonuçların nasıl değişeceğini inceleyelim. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6' da α ' nın üç farklı değeri için $g_3 = 0.008$ alınarak elde edilen kimyasal potansiyel (β), enerji (E), merkez yoğunluğu (ρ_0) ve ortalama kare yarıçap ($\langle x^2 \rangle$)' ın n ile değişimleri verilmektedir. Grafiklerde, yoğuşumdaki kritik maksimum atom sayısı değerinin α ile ters orantılı olarak değiştiği görülmektedir. Buna göre, yoğuşumun çökmesinde sınır değer olarak kabul edilen bu sayı, harmonik tuzak ($\alpha = 0.0$) durumunda en büyüktür. Bu sonuç, bir önceki bölümde iki parçacık etkileşimleri için elde edilen sonuçlar (Çizelge 3.2a ve Şekil 3.4a) ile de uyumludur. Çünkü daha öncede belirtildiği gibi, atom sayısının bir kritik değere kadar



Şekil 4.6. α parametresinin üç farklı değeri ve $g_3 = 0.008$ için boyutsuz birimlerdeki **(a)** toplam enerjinin, **(b)** merkez yoğunluğunun, **(c)** ortalama kare yarıçapın indirgenmiş atom sayısı ile değişimleri. Grafiklerde sürekli, kesikli ve noktalı çizgiler sırasıyla α' nın 1.0, 0.5 ve 0.0 değerlerine karşılık gelir.

artış gösterdiği bu aralıkta, üç parçacık etkileşimlerinden gelen katkı oldukça azdır ve çözümler üzerinde dış tuzaklama potansiyeli daha etkilidir. Yine, Bölüm 3' de elde edilen sonuçlar ile uyumlu olarak, bu aralıktaki en büyük merkez yoğunluğu sınırlama özelliği en fazla olan $\alpha = 1.0$ durumu için elde edilirken (Şekil 4.6b), en büyük yarıçap değeri de en fazla sayıda parçacığın tuzaklandığı $\alpha = 0.0$ (harmonik tuzak) durumunda bulunmuştur (Şekil 4.6c).

Potansiyeldeki anharmonik katkının artışı, sistemin toplam enerjisinin de artmasına neden olur. Bu durum, Şekil 4.6a' dan ve Denk. 4.11 ile verilen enerji ifadesinden açıkça görülür.

Son olarak, sistemlerin daha yoğun ve kararlı bir faza geçmesinin ardından, üç parçacık etkileşimlerinin baskın hale geldiği ve göz önüne alınan niceliklerin davranışları üzerinde tuzaklama potansiyelinin etkilerinin azaldığı görülmektedir.

5. SONLU SICAKLIKTA ETKİLEŞEN BOSE GAZI

BEY'in başlangıcında sistem oldukça seyreltiktir ve atomlar arası etkileşimler gazın termodinamik özelliklerinde önemli değişikliklere yol açmaz. Fakat bir yoğuşum pikinin tuzağın merkezinde oluşması ile birlikte yoğunluk artmaya başlar ve sistemdeki iki parçacık etkileşimleri önemli hale gelir. Böyle bir durumda homojen bir Bose gazı ile tuzaklanmış Bose gazının davranışları arasında önemli farklılıklar vardır. Etkileşimlerin olmadığı tuzaklanmış bir sistemde, kritik sıcaklık T_C ile tuzağın merkezindeki yoğunluk $n(0)$ arasındaki ilişki,

$$n(0)(\lambda_{dB})^3_{T_C} = \zeta(3/2) \cong 2.61 \tag{5.1}$$

ifadesi ile verilir. Burada $(\lambda_{dB})_{T_C}$ kritik sıcaklıktaki termal de Broglie dalgaboyudur. Atomlar arasında itici etkileşimler olması durumunda, atomik bulut genişler ve sonuç olarak yoğunluk azalır. Bu durumun tam tersi, sistemi sıkıştırma eğiliminde olan çekici kuvvetler için gerçekleşir. Yoğunluğun bu şekilde azalması (artması) kritik sıcaklık değerinin de azalmasına (artmasına) yol açar. Böyle bir sonuç, termodinamik limitte yoğunluğun sabit kaldığı homojen bir gaz için gözlenmez (Dalfovo ve ark., 1999). Bu yüzden, atomlar arası etkileşimler ile termodinamik özellikler arasındaki ilişkide üçüncü bir bileşen olan dış tuzaklama potansiyeli Bose gazlarının özelliklerini incelemede anahtar bir rol oynamaktadır (Gerbier ve ark., 2004).

Bose gazının termodinamik özellikleri üzerinde etkili diğer bir unsur ise sistemin boyutudur. Çünkü sistemin sahip olduğu serbestlik derecesi, faz geçişlerinin özellikleri ile kolektif uyarımların yapısını değiştirmektedir (Görlitz ve ark., 2001). Bunun iyi bilinen bir sonucu, üç boyutlu durumdan farklı olarak, termodinamik limitte homojen, iki boyutlu, ideal bir Bose gazının sonlu sıcaklıklarda BEY' e uğramamasıdır (Mermin ve Wagner, 1966; Hohenberg, 1967). Bununla birlikte sistemde bir tuzaklama potansiyelinin olması durumunda bu tuzak, yoğuşumu uzun dalgaboylu çalkantılara karşı kararlı hale getirerek belirli bir yoğuşma sıcaklığının altında BEY oluşmasına imkan verir (Bagnato ve Kleppner, 1991).

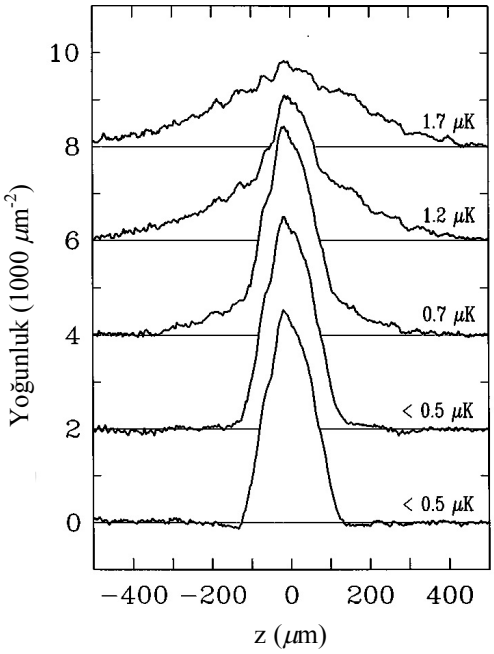
Ultra soğuk tuzaklanmış Bose gazları için dış tuzaklama potansiyelinin ve indirgenmiş boyutluluğun yukarıda belirtilen önemlerinden dolayı tez çalışmasının bu bölümünde iki boyutlu kuartik bir tuzakta etkileşen Bose gazının BEY' i sonlu

sıcaklıklar için incelenecektir (Karabulut ve ark., 2010b). Kuartik tuzaklar ile ilgili bu zamana kadar yapılan çalışmalarda çoğunlukla dönen yoğuşumlar ve örgü sistemleri incelenmiştir (Bretin ve ark., 2004; Stock ve ark., 2004; Bargi ve ark., 2006; Cozzini ve ark., 2006; Gygi ve ark., 2006; Ramakumar ve Das, 2008). Tuzaklanmış bozonlar ile ilgili olan diğer çalışmalarda ise ya etkileşmeyen (Gautam ve Angom, 2008; Karabulut ve ark., 2010a) ya da sıfır sıcaklıkta zayıf etkileşen (Chaudhary ve ark., 2009) sistemler göz önüne alınmıştır. Tüm bu çalışmalardan farklı olarak bu bölümde, iki boyutlu kuartik tuzaktaki dönmeyen yoğuşumun sonlu sıcaklıktaki özellikleri atomlar arası etkileşimlere bağlı olarak incelenecektir. Bu amaçla, Minguzzi ve ark. (1997) tarafından geliştirilen yarı klasik iki akışkan modeli kullanılacaktır. Bu model, sonlu sıcaklıklardaki bir Bose gazının termodinamik özellikleri üzerinde iki parçacık etkileşimlerinin etkilerini başarılı bir şekilde tanımlayabilmektedir. Bir sonraki kesimde model ana hatlarıyla incelenecek ve kuartik bir tuzaktaki BEY için yürütülen termodinamik analizin ayrıntılarına yer verilecektir.

5.1. Yarı Klasik İki Akışkan Modeli

BEY' in elde edildiği deneylerde, buharlaştırarak soğutma yöntemi kullanılarak tuzağın dış kenarlarında yer alan gazın yoğuşmamış, termal bileşeni kontrollü olarak seçilip sistemden uzaklaştırılabilir (Cornell, 1996). Bu şekilde sistemdeki atomların hemen hemen hepsinin yoğuşum durumunda bulunmaları sağlanır. Bu nedenle, Bölüm 3 ve 4' de ele alınan $T = 0\,\mathrm{K}$ sıcaklıktaki ortalama alan teorisi bu sistemlerde gözlenen yoğuşumların birçok özelliğini açıklamakta oldukça başarılıdır (Dalfovo ve ark., 1999). Bununla beraber, BEY' e uğramış gazların sonlu sıcaklık ($T > 0$) özelliklerinin araştırıldığı deneylerde (Ensher ve ark., 1996; Jin ve ark., 1997; Gerbier ve ark., 2004) uzaysal olarak birbirinden bağımsız iki farklı fazdan söz etmek gerekir: *yoğuşmuş* faz ve *termal* faz.

Yüksek sıcaklıklarda (kritik sıcaklıktan daha düşük fakat ona yakın sıcaklıklarda), genel olarak yoğuşumdan çok daha seyreltik bir termal bileşen daha mevcuttur (Gerbier ve ark., 2004). Hem yoğunluk hem de hız dağılımında termal bileşenin geniş dağılımı üzerinde keskin bir pik bulunmaktadır. Sıcaklık düştükçe bu yoğuşum pikinin yüksekliği artarken termal bileşenin de giderek azaldığı ve çok düşük sıcaklıklarda da tamamen ortadan kaybolduğu gözlenir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Farklı sıcaklık değerleri için faz-kontrast görüntülerinden elde edilen atomik bulut yoğunlukları. (Şekil Dalfovo ve ark.' nın (1999) çalışmasından alınmıştır.)

Her iki fazında bir arada olduğu bir Bose gazında, yoğuşmuş atomlar kendi aralarında etkileştikleri gibi termal bileşendeki yoğuşmamış atomlar ile de etkileşirler. Bu söz konusu etkileşimler ortalama alan yaklaşımı çerçevesinde ele alınabilir. Bu amaçla, Denk. (5.2) ile verilen ve atomları öz uyumlu bir ortalama alan içerisinde hareket eden etkileşmeyen bozonlar olarak kabul eden Hartree-Fock (HF) yaklaşımından yararlanılabilir (Dalfovo ve ark., 1999):

$$H_{HF} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{etkin}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{dış}(\vec{r}) + 2gn(\vec{r})\,. \tag{5.2}$$

Burada, $V_{dış}$ dış tuzaklama potansiyeli ve $2gn(\vec{r})$ terimi ise diğer atomlarla olan etkileşimlerin oluşturduğu ortalama alandır. $n(\vec{r})$ niceliği sistemin toplam yoğunluğu olup yoğuşuk, $n_0(\vec{r})$, ve termal, $n_T(\vec{r})$, bileşenlerin yoğunlukları toplamına eşittir:

$$n(\vec{r}) = n_0(\vec{r}) + n_T(\vec{r})\,. \tag{5.3}$$

Bu yaklaşım, tuzaklanmış Bose gazlarını incelemek için ilk olarak Goldman ve ark. (1981) ile Huse ve Siggia (1982) tarafından uygulanmış ve daha sonra birçok çalışmada da kullanılmıştır (Bagnato ve ark., 1987; Oliva, 1989; Chou ve ark., 1996; Giorgini ve

ark., 1996; Giorgini ve ark., 1997a; Giorgini ve ark., 1997b; Minguzzi ve ark., 1997; Shi ve Zheng, 1997; Bayındır ve Tanatar, 1998; Bayındır ve ark., 1999; Adhikari, 2000b; Adhikari ve Gammal, 2000).

Tez çalışmasında iki boyutlu kuartik bir tuzakta etkileşen bozonların BEY' ini incelemekte kullanılan iki akışkan modeli de termal bulut için yarı klasik HF yaklaşımının benimsendiği bir ortalama alan teorisidir. Modelde, yoğuşumu tanımlamakta kullanılan GPD Thomas-Fermi yaklaşımı içerisinde ele alınır. HF yaklaşımı tuzaklanmış sistemin uyarılma spektrumunun basit ve doğru bir şekilde tanımlanmasını sağlarken Thomas-Fermi yaklaşımı da yoğuşumdaki atom sayısı N_0 ' ın büyük olmasını ve bozonlar arasında itici etkileşimler bulunmasını gerektirir (Minguzzi ve ark., 2004; Thogersen ve ark., 2009).

5.2. İki Boyutlu Kuartik Tuzakta Etkileşen Bose Gazının Termodinamiği

Genel ifadesi Bölüm 2' de Denk. (2.1) ile verilen kuartik salınıcı potansiyeli ile sınırlandırılmış iki boyutlu etkileşmeyen Bose gazını göz önüne alalım. Yarı klasik durum yoğunluğu ifadesi kullanılarak sistemin yoğuşma sıcaklığı T_0 aşağıdaki gibi bulunur (Gautam ve Angom, 2008):

$$k_B T_0 = \left[\frac{N h^2 \sqrt{\lambda}}{2\pi^2 m \Gamma(3/2) \zeta(3/2)} \right]^{2/3} . \tag{5.4}$$

Burada m bozonların kütlesi, $\Gamma(x)$ ve $\zeta(x)$ ise sırasıyla gama ve Riemann zeta fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde $T < T_0$ için, bu etkileşmeyen sistemin yoğuşum kesri ve toplam enerji ifadeleri bulunabilir:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} , \tag{5.5}$$

ve

$$\frac{E}{Nk_B T_0} = \frac{3}{2}\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} . \tag{5.6}$$

Sistemde kısa menzilli etkileşimler söz konusu iken yukarıda Denk. (5.4–5.6) ile belirlenen durumun nasıl değişeceğini inceleyelim. Sonlu sıcaklıklarda yoğuşmuş ve yoğuşmamış atomlar arasındaki etkileşimleri de dikkate almamız gerektiğinden yoğuşum dalga fonksiyonu $\psi(\vec{r})$, GPD' yi bu yoğuşmamış atomların katkısı eşliğinde aşağıda verildiği gibi sağlar (Pethick ve Smith, 2002):

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{dış}(\vec{r}) + \left[n_0(\vec{r}) + 2n_T(\vec{r})\right]g\right\}\psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r}) . \tag{5.7}$$

Burada g kısa menzilli itici etkileşim şiddeti olup, Bayındır ve Tanatar' ın (1998) çalışmasında olduğu gibi, bir parametre olarak ele alınabilir. Yoğuşum yoğunluğu, $n_0(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$ ifadesi ile verilir ve denklemde bu terim için 2 katsayısının bulunmaması, aynı durumdaki iki atom için değiş-tokuş terimi olmadığını ifade eder (Pethick ve Smith, 2002).

Bu çalışmada iki boyutlu bir sistem dikkate alındığından $V_{dış}(\vec{r}) = \lambda r^4$ ve $\psi(\vec{r}) = \psi(r)$ ile belirlenen silindirik simetrik çözümler ile ilgilenilecektir. Buna göre, yoğuşmamış atomların (termal bulut) yoğunluğu,

$$n_T(r) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \frac{d^2 p}{\exp\left\{\beta\left[\frac{p^2}{2m} + V_{etkin}(r) - \mu\right]\right\} - 1} \tag{5.8}$$

ifadesi ile verilir (Bayındır ve Tanatar, 1998). Yoğuşum tuzağın merkezi etrafında bir pik oluştururken ince bir bulut görünümündeki termal bileşen de yoğuşum atomları ile olan etkileşmelerden kaynaklanan etkin bir itme ile tuzağın sınır bölgelerine doğru itilir (Minguzzi ve ark., 2004).

Kimyasal potansiyel μ, sistemdeki toplam parçacık sayısının N' e eşit olduğunu belirten normalizasyon koşulu ile belirlenir:

$$N = N_0 + \int \frac{\rho(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon-\mu)]-1}. \tag{5.9}$$

Burada, $N_0 = \int \psi^2(r)d^2r$ yoğuşmuş atom sayısıdır. Yarı klasik durum yoğunluğu ise,

$$\rho(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_{V_{etkin}(r)<\varepsilon} d^2r \tag{5.10}$$

ifadesi ile verilir (Bayındır ve Tanatar, 1998). Denklem (5.7)' de verilen GPD, kinetik enerjinin ihmal edildiği Thomas-Fermi yaklaşımı ile analitik olarak çözülebilir ve sonuçta,

$$\psi^2(r) = \frac{1}{g}\left[\mu - V_{dış}(r) - 2gn_T(r)\right]\,\theta\left[\mu - V_{dış}(r) - 2gn_T(r)\right] \tag{5.11}$$

ifadesi elde edilir (Bayındır ve Tanatar, 1998). Burada $\theta(x)$ birim basamak fonksiyonudur: $\theta(x) = 0\,(1)$, $x < 0$ için ($x > 0$ için).

Denk. (5.8–5.11)' de verilen bağıntılar, yarı klasik iki akışkan modelinin temel denklemleri olup sayısal yöntemler kullanılarak çözülebilirler (Minguzzi ve ark., 1997; Adhikari, 2000b; Adhikari ve Gammal, 2000). Ayrıca Minguzzi ve ark.' nın (1997) çalışmasında, üç boyutta etkileşimleri pertürbatif olarak ele aldıkları, daha basit ve yarı analitik bir yöntem de yer almaktadır. Bu yarı analitik, pertürbatif yaklaşım ile tamamen sayısal olan yöntem karşılaştırıldığında elde edilen sonuçların birbirleriyle oldukça uyumlu oldukları görülür. Bu yöntem daha sonra düşük boyutlu sistemlere de uygulanmış ve sonlu sıcaklıklardaki tuzaklanmış Bose gazının termodinamik özelliklerini başarılı bir şekilde açıklayabildiği görülmüştür (Bayındır ve Tanatar, 1998; Bayındır ve ark., 1999). İki boyutlu kuartik bir tuzakta etkileşen Bose gazını incelemekte kullanacağımız yarı klasik iki akışkan modeli de bu yarı analitik yaklaşım çerçevesinde ele alınacaktır.

5.3. Sonuçlar ve Tartışma

$gn_T(r)$ terimi için sıfırıncı mertebeden bir yaklaşım yapılması durumunda etkin potansiyel,

$$V_{etkin}(r)=\begin{cases} V_{dış}(r) & \text{eğer} \quad \mu < V_{dış}(r) \\ 2\mu - V_{dış}(r) & \text{eğer} \quad \mu > V_{dış}(r) \end{cases} \tag{5.12}$$

ifadesi ile verilir (Bayındır ve ark., 1999). Yoğuşmuş atom sayısı,

$$N_0 = \frac{2\pi\mu^{3/2}}{3g\lambda^{1/2}} \tag{5.13}$$

olarak bulunur. Denklem (5.10)' dan elde edilen durum yoğunluğu ifadesi,

$$\rho(\varepsilon)=\begin{cases} \dfrac{m}{2\hbar^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\lambda}} & \mu<0 \quad \text{için} \\ \dfrac{m}{2\hbar^2}\dfrac{\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{2\mu-\varepsilon}\right)}{\sqrt{\lambda}} & \mu<\varepsilon<2\mu \;\; (\mu>0) \quad \text{için} \\ \dfrac{m}{2\hbar^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\lambda}} & \varepsilon>2\mu \quad (\mu>0) \quad \text{için} \end{cases} \tag{5.14}$$

ile verilir. Yukarıdaki durum yoğunluğu ifadelerinin Denk. (5.9)' da kullanılması sonucunda $\mu>0$ için,

$$N = N_0 + \frac{m}{2\hbar^2\sqrt{\lambda}}(k_BT)^{3/2}\left[\int_0^{\infty}\frac{(\alpha+x)^{1/2}dx}{\exp(x)-1} - \int_0^{\alpha}\frac{(\alpha-x)^{1/2}dx}{\exp(x)-1}\right] \tag{5.15}$$

ve $\mu<0$ için,

$$N = \frac{m}{4\hbar^2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}(k_BT)^{3/2}\,PolyLog\left[\frac{3}{2},\exp(\alpha)\right] \tag{5.16}$$

ifadeleri elde edilir. Burada $\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$ ve *PolyLog* ise $PolyLog[n,z] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$ ile tanımlı polilogaritma fonksiyonudur. Denk. (5.15) ve Denk. (5.16)' nın sayısal olarak çözülmesi sonucunda kimyasal potansiyeli, toplam parçacık sayısı ve sıcaklığın bir fonksiyonu $\mu(N,T)$ olarak elde etmek mümkündür. Son olarak, sistemin toplam enerjisi,

$$E = \int \frac{\varepsilon \rho(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp[\beta(\varepsilon - \mu)] - 1} \tag{5.17}$$

ifadesi kullanılarak hesaplanabilir. Buna göre $T < T_0$ $(\mu > 0)$ için,

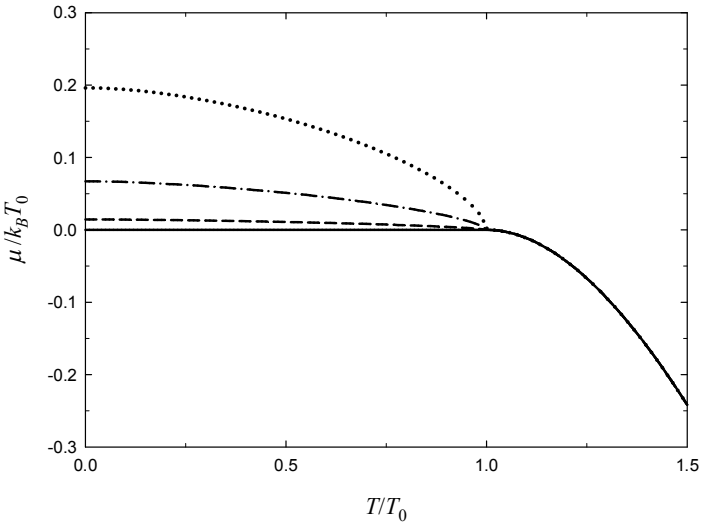
$$\frac{E}{N k_B T_0} = \frac{1}{\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \times \left[\int_0^{\alpha} \frac{(\alpha + x)[(\alpha + x)^{1/2} - (\alpha - x)^{1/2}] dx}{\exp(x) - 1} + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(\alpha + x)^{3/2} dx}{\exp(x) - 1} \right] \tag{5.18}$$

ve $T > T_0$ $(\mu < 0)$ için,

$$\frac{E}{N k_B T_0} = \frac{3}{2\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} PolyLog\left[\frac{5}{2}, \exp(\alpha) \right] \tag{5.19}$$

ifadeleri elde edilir (Karabulut ve ark., 2010b).

Genel olarak, iki boyutlu tuzaklanmış Bose gazlarında etkileşim şiddeti $\eta = \frac{mg}{\pi \hbar^2}$ ile verilen boyutsuz bir η parametresi ile tanımlanır (Bayındır ve Tanatar, 1998; Adhikari ve Gammal, 2000). Yarı klasik iki akışkan modelinin geçerlilik aralığının incelendiği Adhikari ve Gammal (2000) çalışmasında η değeri arttıkça modelin, negatif öz ısı gibi, fiziksel olmayan bir takım sonuçlara yol açtığı görülmüştür. Bu nedenle bu model çerçevesinde göz önüne alınan etkileşimler, η için bir üst limitin bulunduğu zayıf etkileşimlerdir.

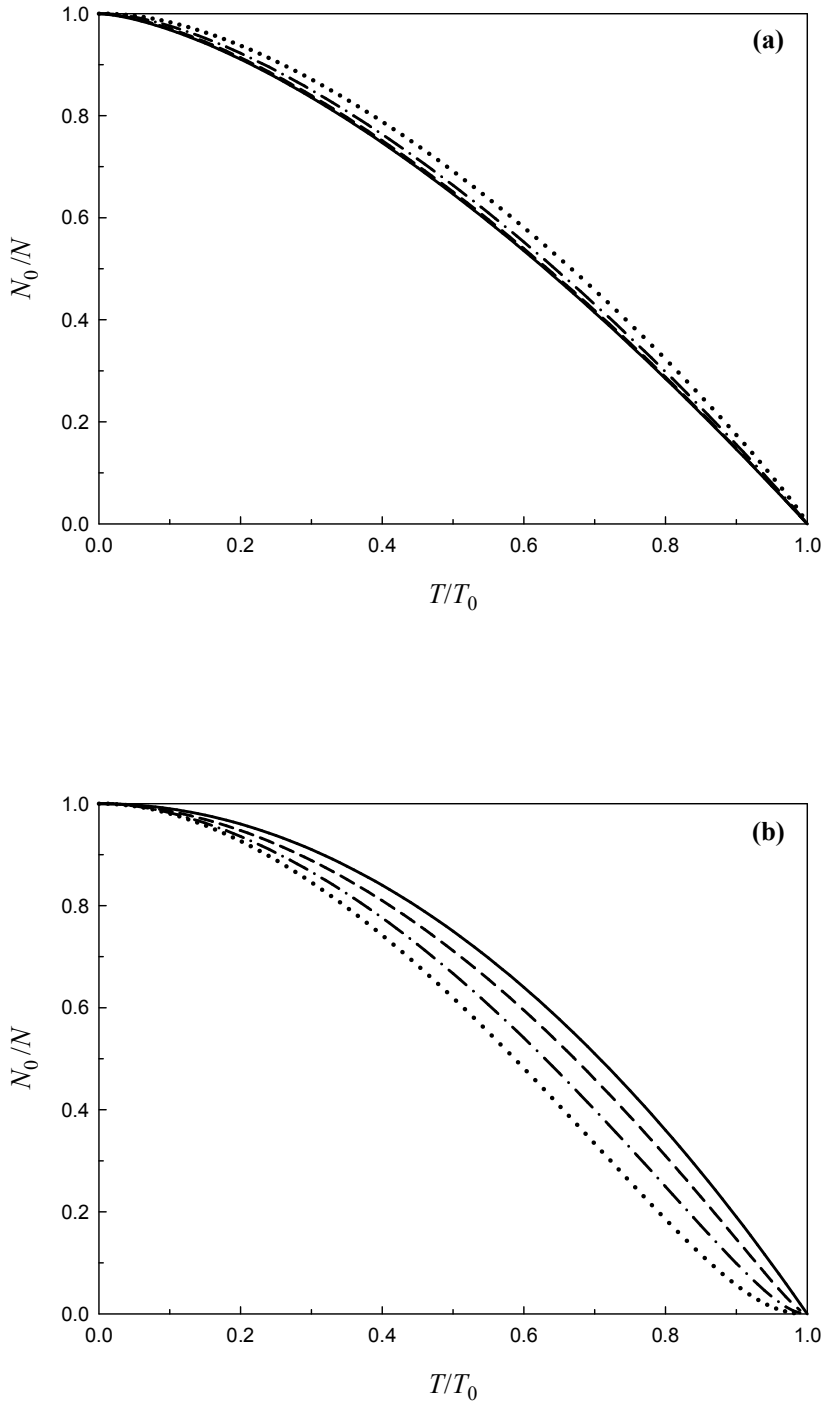


Şekil 5.2. Kimyasal potansiyelin farklı etkileşim şiddetleri için sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı eğriler sırasıyla η' nın 0, 0.001, 0.01 ve 0.05 değerlerine karşılık gelmektedir.

Burada termodinamik özelliklerini incelediğimiz iki boyutlu kuartik tuzaktaki zayıf etkileşen Bose gazı, gerçek duruma benzer şekilde, sonlu parçacık sayısına sahip bir sistemdir. Fakat bu türde bir anharmonik tuzak henüz deneysel olarak elde edilmediğinden, önceki iki boyutlu harmonik tuzak çalışmalarında olduğu gibi (Bayındır ve Tanatar, 1998; Adhikari ve Gammal, 2000), sistemdeki toplam atom sayısı $N = 10^5$ olarak alınabilir.

Etkileşim şiddeti η ' nın çeşitli değerleri için Denk. (5.15) ve Denk. (5.16)' dan hesaplanan kimyasal potansiyel değerlerinin sıcaklıkla değişimi Şekil 5.2' de gösterilmektedir. Etkileşimlerin olduğu bir sistem ile etkileşmenin olmadığı durum arasındaki farkı görebilmek için grafikte, iki boyutlu kuartik tuzaktaki ideal Bose gazı $(\eta = 0)$ için elde edilen sonuçlara da yer verilmiştir. Buna göre, sistemdeki etkileşimlerin şiddeti arttıkça, $T < T_0$ bölgesinde, kimyasal potansiyelin etkileşmeyen durumdan daha büyük sapmalar gösterdiği görülür.

Şekil 5.3a kuartik tuzak için yoğuşum kesrinin sıcaklığa bağlılığını göstermektedir. Grafikte $\eta = 0$ ile gösterilen tuzaklanmış sistemin ideal gaz davranışı Denk. (5.5) ile belirlenmiştir. Etkileşimlerin yoğuşum kesri üzerindeki etkisi, tuzaklama potansiyelinin harmonik ya da kuartik tipte olmasına göre önemli ölçüde değişmektedir. Şekil 5.3a' da, kuartik tuzakta etkileşimler zayıfladıkça belirli bir sıcaklıkta yoğuşmuş fazda bulunan atom sayısının da giderek azaldığı görülmektedir. Elde edilen bu sonuç,



Şekil 5.3. Farklı etkileşim şiddetleri için **(a)** iki boyutlu kuartik tuzaktaki, **(b)** iki boyutlu harmonik tuzaktaki yoğuşum kesirlerinin sıcaklığa bağlılıkları. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı eğriler sırasıyla η' nın 0, 0.001, 0.01 ve 0.05 değerlerine karşılık gelmektedir.

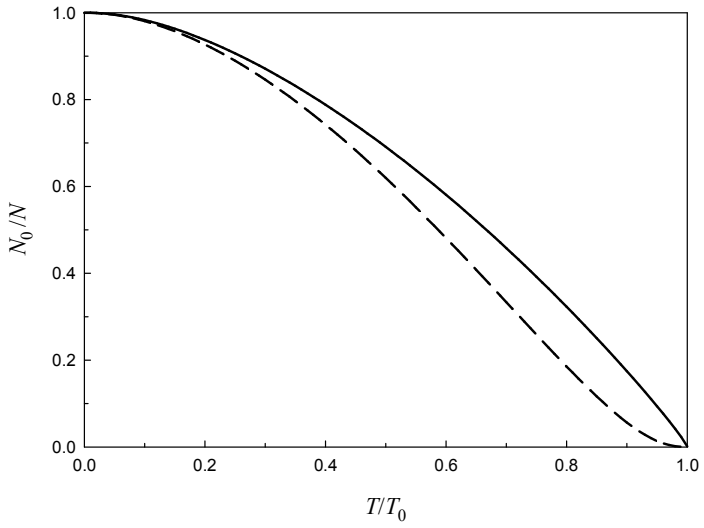
etkileşimlerin iki boyutlu kuartik bir tuzakta BEY oluşmasına katkıda bulunacağı şeklinde yorumlanabilir. Oysaki aynı itici etkileşimler, harmonik tuzakta yoğuşumun azalmasına neden olmaktadırlar (Şekil 5.3b). Harmonik ve kuartik tuzaklar için elde edilen sonuçlar arasındaki bu fark beraberinde bir takım soruları da getirir:

Kuartik tuzak için elde edilen bu farklı sonuç hesaplamalar sırasında yapılan yaklaşımlardan kaynaklanmış olabilir mi?

İki boyutlu harmonik tuzaklar ile ilgili bir çalışmada (Kim ve Lee, 1999), farklı yaklaşımlar kullanılarak elde edilen yoğuşum kesirlerinin sıcaklığa bağlı davranışları arasında önemli bir fark olmadığı bulunmuştur. Buna göre, yarı klasik HF modelinde termal bileşen ile olan etkileşimlerin göz önüne alındığı yaklaşım ile sıfırıncı mertebeden yaklaşım karşılaştırılmış ve zayıf etkileşimler için her iki yaklaşımdan elde edilen sonuçların oldukça uyumlu oldukları bulunmuştur. Diğer taraftan kuvvetli etkileşimler içinse iki yaklaşımın sonuçları arasındaki farkın T, T_0'a yaklaştıkça belirgin hale geldiği görülmüştür. Sonuç olarak, her iki yaklaşım için yoğuşum kesirlerinin etkileşim şiddetine bağlı davranışlarının aynı olduğunu söylemek mümkündür. Benzer şekilde, iki boyutlu kuartik tuzak için de yüksek mertebeden yaklaşımlar kullanılması durumunda zayıf etkileşimlere bağlı olarak yoğuşum kesri davranışında önemli bir değişiklik olmasını beklemeyiz.

Niçin harmonik ve kuartik tuzaklardaki yoğuşum kesri davranışları birbirlerinden farklıdırlar?

Atomik bulutun merkezinden uzaktaki mesafeler için kuartik terim kuadratik terime göre daha hızlı bir artış gösterdiğinden kuartik tuzak harmonik tuzağa göre daha diktir. Böylelikle harmonik tuzaklara kıyasla daha sıkı bir sınırlama sağlayan kuartik tuzaklar, atomları yoğuşumdan uzaklaştırmaya çalışan itici etkileşimlerin etkisini, bu etkileşimlerin zayıf olması durumunda engelleyebilir. Benzer bir tartışma Chakrabarti ve ark. (2009) tarafından harmonik artı kuartik tuzaklar için de yapılmıştır. İlgili çalışmada, anharmonik tuzaktaki kuartik katkının itici etkileşimlere rağmen atomların tuzakta kalmasını sağlayan kuvvetli bir bağlanmaya sebep olduğu sonucuna varılmıştır. Bunun sonucunda da anharmonik tuzaktaki yoğuşumun kararlılığının harmonik tuzaktakine göre arttığı bulunmuştur. Konu ile ilgili başka bir çalışma ise yakın bir zaman önce Li ve ark. (2010) tarafından yapılmıştır. Çalışmada yarı klasik iki akışkan modeline kıyasla daha gelişmiş bir yöntem olan Hartree-Fock-Bogoliubov teorisi Popov yaklaşımı içerisinde ele alınarak kullanılmıştır. Sonuçta itici iki parçacık etkileşimleri

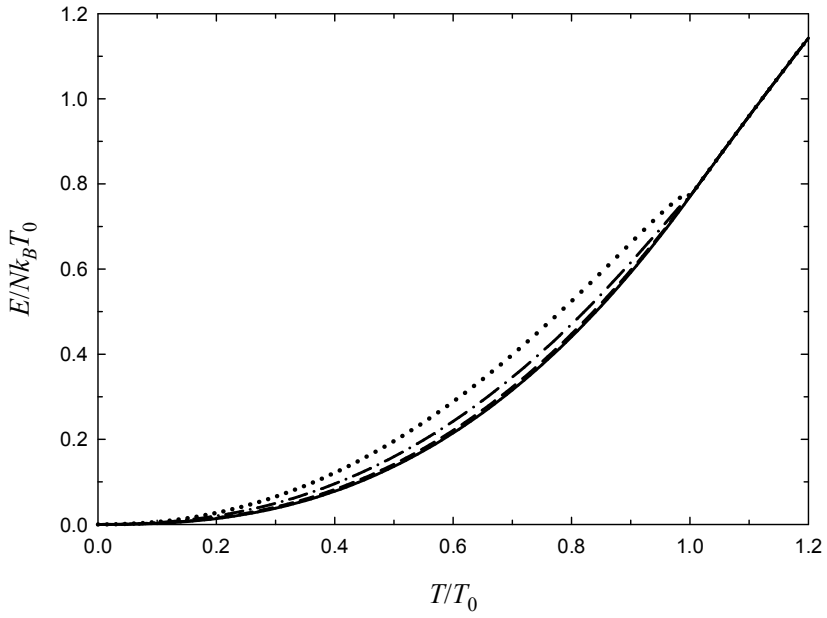


Şekil 5.4. η =0.05 için iki boyutlu harmonik ve kuartik tuzaklardaki Bose gazının yoğuşum kesirlerinin sıcaklık ile değişimleri. Grafikte, kuartik tuzak sürekli çizgi ile harmonik tuzak ise kesikli çizgi ile gösterilmektedir.

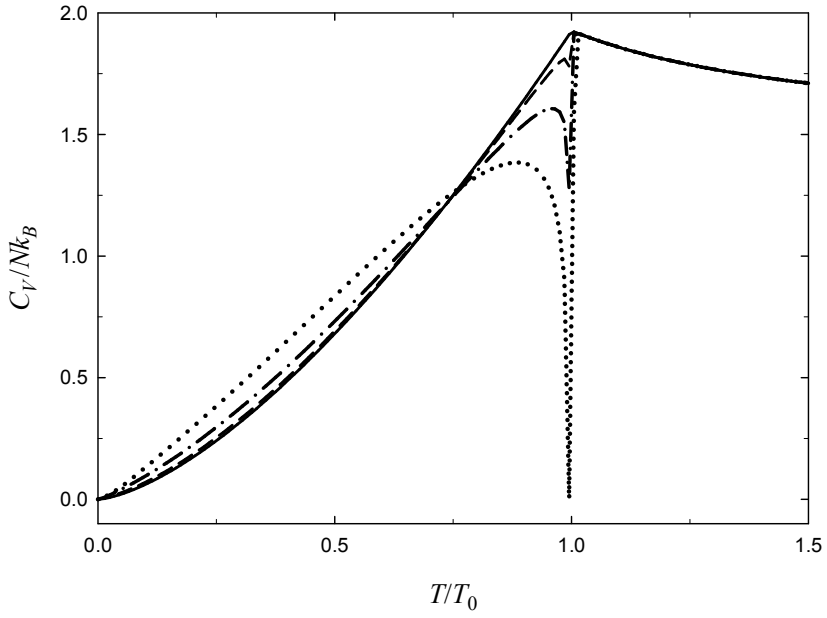
için harmonik potansiyele getirilen ek kuartik terimin yoğuşumun azalmasına engel olduğu bulunmuştur. Ayrıca bu sonuç, yoğuşmuş ve yoğuşmamış atomların yoğunluk profillerinden yararlanılarak da doğrulanmıştır. Buna göre kuartik katkının büyük olduğu durumda yoğuşum yoğunluğunun daha fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Etkileşimler her iki tuzaktaki yoğuşum kesirlerinin bağıl davranışlarını da etkilemektedir. Şekil 5.4' de görüldüğü üzere, kuartik tuzaktaki yoğuşum, harmonik tuzaktakine göre sıcaklıkla daha keskin bir artış sergilemektedir. Bu durum, Bölüm 2' de Şekil 2.4' de incelenen harmonik ve kuartik tuzaklardaki etkileşmeyen sistemlerin bağıl davranışı ile tamamen zıttır.

Etkileşim şiddetinin farklı değerleri için toplam enerjinin sıcaklığa bağlılığı Şekil 5.5' de gösterilmektedir. Etkileşmeyen sistemin enerjisi, Denk. (5.6)' dan yararlanılarak hesaplanabilir. Etkileşmenin olmadığı durum ile karşılaştırıldığında, atomlar arasındaki zayıf etkileşimlerin toplam enerjinin sıcaklıkla değişimini büyük ölçüde etkilemediği gözlenir. Bununla beraber bu etkileşimlerin, toplam enerji eğrileri kullanılarak $C_V = \frac{dE}{dT}$ ifadesine göre hesaplanan öz ısılar üzerinde oldukça etkili oldukları görülür (Şekil 5.6). Grafikte, etkileşimlerin şiddeti arttıkça öz ısının sonlu parçacık sayılı sistemlere özgü sivri tepeli yapısını (Karabulut ve ark., 2010a) giderek yitirdiği görülmektedir.



Şekil 5.5. İki boyutlu kuartik tuzaktaki Bose gazının parçacık başına düşen toplam enerjisinin sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı eğriler sırasıyla η' nın 0, 0.001, 0.01 ve 0.05 değerlerine karşılık gelmektedir.



Şekil 5.6. Öz ısının farklı etkileşim şiddetleri için sıcaklık ile değişimi. Sürekli, kesikli, kesikli-noktalı ve noktalı eğriler sırasıyla η' nın 0, 0.001, 0.01 ve 0.05 değerlerine karşılık gelmektedir.

Şekil 5.6' da $\eta = 0.05$ için T_0' a çok yakın bir sıcaklıkta öz ısının neredeyse sıfır olduğu dikkati çekmektedir. Hesaplamanın daha büyük etkileşim şiddetleri için yapılması durumunda sistemin enerjisinin T_0' dan daha düşük bir sıcaklıkta maksimum bir değere ulaştığı ve bunun sonucunda da öz ısının ilgili sıcaklık aralığında negatif olduğu bulunur. Çalışmamızda öz ısı için pozitif değerlerin elde edildiği en büyük η değeri, etkileşim şiddetinin üst sınırı olarak kabul edilmiştir. Bu değer çalışmada 0.05 olarak belirlenmiştir.

6. YORUM VE ÖNERİLER

BEY' in deneysel olarak elde edilmesinden bu yana harmonik tuzaklardaki yoğuşumların statik, dinamik ve termodinamik özellikleri hemen hemen tüm açılardan ele alınarak kapsamlı bir şekilde çalışılmış ve sonuçta iyi bilinen ve zengin bir teorik alt yapı ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte ultra soğuk atomların tuzaklanmasında henüz yeni olarak nitelendirebileceğimiz anharmonik tuzakların yoğuşum üzerindeki etkileri son birkaç yıldır yoğun bir şekilde çalışılan ve harmonik tuzaklara göre oldukça farklı bir fiziğe sahip yeni bir çalışma alanıdır. Anharmonik tuzaklardaki yoğuşumların özellikleri ile ilgili merak edilen ve araştırılması gereken birçok konu bulunmaktadır. Bu tez çalışması da bu ilgi doğrultusunda ortaya çıkmıştır.

Çalışmamızda anharmonik bir tuzak olan ve deneysel olarak da elde edilen harmonik artı kuartik potansiyel ile kuartik potansiyel tuzaklar ele alınmıştır. Bu tuzaklardaki yoğuşumlar etkileşen ve etkileşmeyen sistemler şeklinde ayrı ayrı değerlendirilerek incelenmiştir. Etkileşen sistemler için iki ve üç parçacık etkileşimleri, atomlar arası itici ve çekici kuvvetler, yoğuşumun taban ve uyarılmış durumları, sıfır ve sonlu sıcaklıklar ve yoğuşumun kararlılığı dikkate alınmıştır. Bunlar ile ilgili yapılan teorik inceleme ve elde edilen sayısal hesaplama sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Bölüm 2' de bir, iki ve üç boyutlu kuartik potansiyeller ile sınırlandırılmış sonlu sayıda etkileşmeyen bozondan oluşan sistemler göz önüne alınmıştır. Yarı klasik yaklaşım gibi geleneksel yöntemler bir boyutlu kuartik tuzak için BEY oluşamayacağını öngörürler. Bu bölümde kullanılan, sayısal hesaplamaya dayalı kuantum mekaniksel yaklaşım ile bu sonucun sonlu sayıda atomun bulunduğu gerçek sistemler için doğru olmadığını gösterdik. Elde ettiğimiz sonuçları farklı bir yaklaşım olan MYY' den elde edilen sonuçlar ile de karşılaştırarak doğruladık. Ayrıca her üç uzaysal boyuttaki sistem için kimyasal potansiyel, yoğuşum kesri, ısı kapasitesi, toplam enerji ve entropi gibi özelliklerin sıcaklığa bağlı davranışlarını inceledik. Sonlu sayıda parçacık içeren bir, iki ve üç boyutlu sistemlerde harmonik tuzak yerine kuartik bir tuzağın kullanılması sonucunda sistemlerin daha yüksek yoğuşma sıcaklıklarında BE faz geçişine uğradıkları bulunmuştur. Bu sonuç kuartik tuzakların deneysel açıdan harmonik tuzaklara göre daha avantajlı bir sınırlama sağlayacağı şeklinde yorumlanabilir. Son olarak sistemin boyutunun ve sahip olduğu parçacık sayısının ilgili termodinamik özellikler üzerindeki etkileri incelenmiş ve elde edilen sonuçların harmonik tuzak için elde edilen sonuçlar ile uyumlu oldukları görülmüştür.

Bölüm 3' de harmonik artı kuartik potansiyel ile sınırlandırılmış etkileşen bir Bose gazı $T = 0\,\mathrm{K}$' de ele alınarak incelenmiştir. Bunun için GPD sayısal yöntemler kullanılarak çözülmüş ve sonuçta bozonlar arasındaki hem çekici hem de itici etkileşimler için taban durum çözümü ile birlikte radyal olarak uyarılmış duruma ait tek düğüm noktalı çözümler de elde edilmiştir. Ayrıca indirgenmiş atom sayısı ve ortalama kare yarıçap değerleri de hesaplanmıştır.

Taban ve uyarılmış durumların her ikisi için de çekici etkileşim durumundaki dalga fonksiyonlarının orijin yakınında keskin tepeli bir yapıya sahip oldukları bulunmuştur. Atomlar arası etkileşimin itici olması durumunda ise ilgili dalga fonksiyonlarının daha yayvan bir yapıda oldukları görülmüştür.

Çekici etkileşim durumunda, yoğuşumdaki atom sayısı artarken ortalama kare yarıçap azalır. Bu durum, yoğuşumdaki atom sayısı maksimum bir değere ulaşana kadar devam eder. Bu kritik değerden daha büyük atom sayıları, yoğuşumun kararsız hale gelerek çökmesine neden olur. Göz önüne aldığımız harmonik artı kuartik tuzakta indirgenmiş atom sayısının maksimum değerinin yaklaşık olarak 1.2 olduğu bulunmuştur. Atomlar arası itici etkileşim durumunda ise yoğuşumda bulunabilecek atom sayısı üzerinde bu tür bir üst limit yoktur.

Son olarak, tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğü ile ilgili α parametresinin üç farklı değeri için taban durum dalga fonksiyonlarını elde ettik. Atomlar arası etkileşimlerin çekici ya da itici olması durumuna göre tuzak merkezindeki yoğunlukların α' ya bağlı davranışlarının da değiştiğini gözlemledik. Anharmonik tuzaklar ile kıyaslandığında harmonik bir tuzakta yoğuşumdaki atom sayısı ve ortalama kare yarıçap değerlerinin atomlar arası etkileşimin her iki türü için de daima daha büyük olduğu sonucuna ulaştık.

Bölüm 4' de harmonik artı kuartik bir potansiyel ile sınırlandırılmış bozonlar için itici üç parçacık etkileşimleri ile çekici iki parçacık etkileşimleri arasındaki rekabetin yoğuşum üzerindeki etkileri, ortalama alan seviyesinde ele alınarak incelenmiştir. Bu kapsamda, üç parçacık etkileşimine bağlı etkin bir potansiyel terimi içeren GPD sayısal yöntemler kullanılarak çözülmüştür. Bunun sonucunda kimyasal potansiyel, toplam enerji, merkez yoğunluğu ve ortalama kare yarıçapın yoğuşumdaki atom sayısı ile değişimleri üç parçacık etkileşim şiddetinin farklı değerleri için elde edilmiştir. Çekici iki parçacık etkileşimleri ile birlikte sistemde itici üç parçacık etkileşimlerinin olması durumunda;

1) yoğuşumun kararlı olduğu bölgenin çok küçük şiddetteki üç parçacık etkileşim kuvvetleri için bile önemli ölçüde genişlediği,

2) yoğuşumun seyreltik bir fazdan daha yoğun bir faza doğru faz geçişi (sıvı-gaz faz geçişi) yaptığı sonuçlarına ulaşılır.

Ayrıca üç parçacık etkileşim şiddetinin belirli bir değeri için ilgili sonuçların tuzaklama potansiyelindeki anharmonik katkının büyüklüğü ile değişimleri de incelenmiştir. Sonuçta yoğuşum seyreltik fazda iken sistemde iki parçacık etkileşimlerinin daha baskın olduğu ve α ' ya bağlı elde edilen sonuçların Bölüm 3' de elde edilen sonuçlar ile uyumlu oldukları bulunur. Yoğuşumun daha yoğun ve kararlı bir faza geçmesi sonucunda ise üç parçacık etkileşimlerinin baskın hale geldiği ve tuzaklama potansiyelinin dolayısıyla α ' nın sistem üzerindeki etkisinin azaldığı görülür.

Bölüm 5' de, iki boyutlu kuartik bir tuzakta zayıf etkileşen bozonların BEY olayı sonlu sıcaklıklar için incelenmiştir. Bu amaçla, bir ortalama alan teorisi olan yarı klasik iki akışkan modeli pertürbatif bir yaklaşım içerisinde ele alınarak kullanılmıştır. Etkileşim şiddetinin çeşitli değerleri için sistemin kimyasal potansiyel, yoğuşum kesri, toplam enerji ve öz ısı gibi termodinamik özellikleri hesaplanmıştır. Sonuç olarak, sistemdeki etkileşimler kuvvetlendikçe bu özelliklerin sıcaklığa bağlı davranışlarının etkileşmeyen durumdan saptığı gözlenir. Parçacıkları kuartik bir potansiyelde tuzaklamanın özellikle yoğuşum kesri ve öz ısı davranışları üzerinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Harmonik tuzaklarda gözlenen durumun aksine artan etkileşim şiddetinin iki boyutlu kuartik tuzakta yoğuşumun azalmasına neden olmadığı gözlenmiştir. Çalışmada göz önüne alınan etkileşimler zayıf olup boyutsuz bir η parametresi ile tanımlanır. η' nın belirli bir değerinden büyük etkileşim şiddetlerinde, zayıf etkileşim koşulu ortadan kalkar ve iki akışkan modelinin geçerlilik aralığının dışına çıkılır. Böyle bir durumda sistemin toplam enerjisi, yoğuşma sıcaklığından daha düşük bir sıcaklıkta maksimum değerine ulaşır ve sonuçta fiziksel olarak anlamlı olmayan negatif bir öz ısı ortaya çıkar. Bu çalışmada, zayıf etkileşim koşulunu sağlayan en büyük η değeri 0.05 olarak alınmıştır.

Harmonik tuzaklardan farklı olarak harmonik artı kuartik tuzaklar, BEY fazına girmiş dönen gazların yüksek açısal hızlara ulaşarak farklı girdap durumları sergilemelerine imkan verirler (Bretin ve ark., 2004; Stock ve ark., 2004). Bu nedenle

bu tuzaklardaki dönen yoğuşumların fiziği gelecek çalışmalar için ilginç bir araştırma konusu olarak görülmektedir.

Tuzaklanmış soğuk atomların fiziğinde BEY' in deneysel olarak elde edilmesinden sonraki en önemli gelişme atomların optik örgüler içerisine yerleştirilebilmesidir. Böylece BE yoğuşumları optik örgüler içerisine konularak (Orzel ve ark., 2001) bir süper akışkandan Mott yalıtkanına olan kuantum faz geçişi deneysel olarak gözlenebilmiştir (Greiner ve ark., 2002). Optik örgülerdeki bozonlar için bu tür kuantum faz geçişlerinin deneysel olarak gözlenmesinde kuartik tuzakların avantajlı bir sınırlama sağladığı bulunmuştur (Gygi ve ark., 2006). Bu kapsamda kuartik sınırlama durumunda optik örgülerdeki yoğuşumların fiziğinin teorik ve deneysel açıdan ilginç olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Adhikari, S. K., 2000a, Numerical solution of the two-dimensional Gross–Pitaevskii equation for trapped interacting atoms, *Physics Letters A*, 265, 91-96.

Adhikari, S. K., 2000b, Bose-Einstein condensation thermodynamics of a trapped gas with attractive interaction, *Physica A*, 284, 97-106.

Adhikari, S. K. and Gammal, A., 2000, Limits of validity for a semiclassical mean-field two-fluid model for Bose-Einstein condensation thermodynamics, *Physica A*, 286, 299-306.

Akhmediev, N., Das, M. P. and Vagov, A. V., 1999, Bose-Einstein condensation of atoms with attractive interaction, *International Journal of Modern Physics B*, 13, 625-631.

Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E. and Cornell, E. A., 1995, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science*, 269, 198-201.

Bagnato, V., Pritchard, D. E. and Kleppner, D., 1987, Bose-Einstein condensation in an external potential, *Physical Review A*, 35, 4354-4358.

Bagnato, V. and Kleppner, D., 1991, Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps, *Physical Review A*, 44, 7439-7441.

Bargi, S., Kavoulakis, G. M. and Reimann, S. M., 2006, Rotating Bose-Einstein condensates confined in an anharmonic potential, *Physical Review A*, 73, 033613.

Bayındır, M. and Tanatar, B., 1998, Bose-Einstein condensation in a two-dimensional trapped interacting gas, *Physical Review A*, 58, 3134-3137.

Bayındır, M., Tanatar, B. and Gedik, Z., 1999, Bose-Einstein condensation in a one-dimensional interacting system due to power-law trapping potentials, *Physical Review A*, 59, 1468-1472.

Baym, G. and Pethick, C. J., 1996, Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed Rubidium gas, *Physical Review Letters*, 76, 6-9.

Bergeman, T., Feder, D. L., Balazs, N. L. and Schneider, B. I., 2000, Bose condensates in a harmonic trap near the critical temperature, *Physical Review A*, 61, 063605.

Bogoliubov, N., 1947, On the theory of superfluidity, *Journal of Physics (Moscow)*, 11 (1), 23-32.

Bose, S. N., 1924, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, *Zeitschrift für Physik*, 26, 178-181.

Bradley, C. C., Sackett, C. A., Tollett, J. J. and Hulet, R. G., 1995, Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions, *Physical Review Letters*, 75, 1687-1690.

Bradley, C. C., Sackett, C. A. and Hulet, R. G., 1997, Bose-Einstein condensation of Lithium: Observation of limited condensate number, *Physical Review Letters*, 78, 985-989.

Bretin, V., Stock, S., Seurin, Y. and Dalibard, J., 2004, Fast Rotation of a Bose-Einstein Condensate, *Physical Review Letters*, 92, 050403.

Burger, S., Cataliotti, F. S., Fort, C., Maddaloni, P., Minardi, F. and Inguscio, M., 2002, Quasi-2D Bose-Einstein condensation in an optical lattice, *Europhysics Letters*, 57, 1-6.

Capuzzi, P. and Hernandez, E. S., 1999, Bose-Einstein condensation in harmonic double wells, *Physical Review A*, 59, 1488-1494.

Chakrabarti, B., Das, T. K. and Debnath, P. K., 2009, Stability of a Bose-Einstein condensate in an anharmonic trap, *Physical Review A*, 79, 053629.

Chaudhary, G. K., Chattopadhyay, A. K. and Ramakumar, R., 2009, Bose-Einstein condensate in a quartic potential: Static and dynamic properties, arXiv: 0812.0246v3 [cond-mat.other].

Chester, G. V., Fisher, M. E. and Mermin, N. D., 1969, Absence of anomalous averages in systems of finite nonzero thickness or cross section, *Physical Review*, 185, 760-762.

Chou, T. T., Yang, C. N. and Yu, L. H., 1996, Bose-Einstein condensation of atoms in a trap, *Physical Review A*, 53, 4257-4259.

Cornell, E., 1996, Very cold indeed: The nanokelvin physics of Bose-Einstein condensation, *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 101, 419-434.

Cozzini, M., Jackson, B. and Stringari, S., 2006, Vortex signatures in annular Bose-Einstein condensates, *Physical Review A*, 73, 013603.

Dalfovo, F. and Stringari, S., 1996, Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices, *Physical Review A*, 53, 2477-2485.

Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L. P. and Stringari, S., 1999, Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases, *Reviews of Modern Physics*, 71, 463-512.

Davis, K. B., Mewes, M. -O., Andrews, M. R., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M. and Ketterle, W., 1995, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Physical Review Letters*, 75, 3969-3973.

Edwards, M. and Burnett, K., 1995, Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms, *Physical Review A*, 51, 1382-1386.

Einstein, A., 1924, Quantentheorie des Einatomigen Idealen Gases, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, 1924, 261-267.

Einstein, A., 1925, Quantentheorie des Einatomigen Idealen Gases, Zweite Abhandlung, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, 1925 (1), 3-14.

Ensher, J. R., Jin, D. S., Matthews, M. R., Wieman, C. E. and Cornell, E. A., 1996, Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation, *Physical Review Letters*, 77, 4984-4987.

Fetter, A. L. and Walecka, J. D., 1971, Quantum Theory of Many-Particle Systems, *McGraw-Hill*, New York.

Filho, V. S., Gammal, A. and Tomio, L., 2002, Effect of anharmonicities in the critical number of trapped condensed atoms with an attractive two-body interaction, *Physical Review A*, 66, 043605.

Fried, D. G., Killian, T. C., Willmann, L., Landhuis, D., Moss, S. C., Kleppner, D. and Greytak, T. J., 1998, Bose-Einstein condensation of atomic Hydrogen, *Physical Review Letters*, 81, 3811-3814.

Gammal, A., Frederico, T. and Tomio, L., 1999, Improved numerical approach for the time-independent Gross-Pitaevskii nonlinear Schrödinger equation, *Physical Review E*, 60, 2421-2424.

Gammal, A., Frederico, T., Tomio, L. and Chomaz, Ph., 2000a, Liquid-gas phase transition in Bose-Einstein condensates with time evolution, *Physical Review A*, 61, 051602.

Gammal, A., Frederico, T., Tomio, L. and Chomaz, Ph., 2000b, Atomic Bose-Einstein condensation with three-body interactions and collective excitations, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 33, 4053-4067.

Gautam, S. and Angom, D., 2008, Critical temperature for Bose-Einstein condensation in quartic potentials, *European Physical Journal D*, 46, 151-155.

Gerbier, F., Thywissen, J. H., Richard, S., Hugbart, M., Bouyer, P. and Aspect, A., 2004, Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped Bose-Einstein condensed gas, *Physical Review A*, 70, 013607.

Giorgini, S., Pitaevskii, L. P. and Stringari, S., 1996, Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas, *Physical Review A*, 54, R4633-R4636.

Giorgini, S., Pitaevskii, L. P. and Stringari, S., 1997a, Scaling and thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas, *Physical Review Letters*, 78, 3987-3990.

Giorgini, S., Pitaevskii, L. P. and Stringari, S., 1997b, Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas, *Journal of Low Temperature Physics*, 109, 309-355.

Goldman, V. V., Silvera, I. F. and Leggett, A. J., 1981, Atomic hydrogen in an inhomogeneous magnetic field: Density profile and Bose-Einstein condensation, *Physical Review B*, 24, 2870-2873.

Görlitz, A., Vogels, J. M., Leanhardt, A. E., Raman, C., Gustavson, T. L., Abo-Shaeer, J. R., Chikkatur, A. P., Gupta, S., Inouye, S., Rosenband, T. and Ketterle, W., 2001, Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions, *Physical Review Letters*, 87, 130402.

Greiner, M., Mandel, O., Esslinger, T., Hansch, T. W. and Bloch, I., 2002, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature*, 415, 39-44.

Grether, M., Fortes, M., de Llano, M., Sevilla, F. J., Valladares, A. A., Solis, M. A. and del Rio, J. L., 2003, Harmonically trapped ideal quantum gases, *European Physical Journal D*, 23, 117-124.

Grillakis, M., Shatah, J. and Strauss, W., 1987, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, *Journal of Functional Analysis*, 74, 160-197.

Gross, E. P., 1961, Structure of a quantized vortex in boson systems, *Nuovo Cimento*, 20 (3), 454-477.

Gross, E. P., 1963, Hydrodynamics of a superfluid condensate, *Journal of Mathematical Physics*, 4, 195-207.

Gygi, O., Katzgraber, H. G., Troyer, M., Wessel, S. and Batrouni, G. G., 2006, Simulations of ultracold bosonic atoms in optical lattices with anharmonic traps, *Physical Review A*, 73, 063606.

Hansch, T. W. and Schawlow, A. L., 1975, Cooling of gases by laser radiation, *Optics Communications*, 13, 68-69.

Hau, L. V., Busch, B. D., Liu, C., Dutton, Z., Burns, M. M. and Golovchenko, J. A., 1998, Near-resonant spatial images of confined Bose-Einstein condensates in a 4-Dee magnetic bottle, *Physical Review A*, 58, R54-R57.

Haugset, T., Haugerud, H. and Andersen, J. O., 1997, Bose-Einstein condensation in anisotropic harmonic traps, *Physical Review A*, 55, 2922-2929.

Hohenberg, P. C., 1967, Existence of long-range order in one and two dimensions, *Physical Review*, 158, 383-386.

Holzmann, M., Krauth, W. and Naraschewski, M., 1999, Precision Monte Carlo test of the Hartree-Fock approximation for a trapped Bose gas, *Physical Review A*, 59, 2956-2961.

Hu, G. -X., Dai, X. -X., Dai, J. -X. and Evenson, W. E., 2003, Transition temperatures of Bose-Einstein condensation in traps, *Journal of Low Temperature Physics*, 133, 239-249.

Hua, W., Liu, X. and Ding, P., 2006, Numerical solution for the Gross–Pitaevskii equation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 40 (3), 243-255.

Huang, K., 1987, Statistical Mechanics, 2nd Edition, *Wiley*, New York.

Huse, D. A. and Siggia, E. D., 1982, The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential, *Journal of Low Temperature Physics*, 46, 137-149.

Ingold, G. -L. and Lambrecht, A., 1998, Thermodynamics of non-interacting bosons in low-dimensional potentials, *European Physical Journal D*, 1, 29-32.

Jin, D. S., Matthews, M. R., Ensher, J. R., Wieman, C. E. and Cornell, E. A., 1997, Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate, *Physical Review Letters*, 78, 764-767.

Kagan, Y., Shlyapnikov, G. V. and Walraven, J. T. M., 1996, Bose-Einstein condensation in trapped atomic gases, *Physical Review Letters*, 76, 2670-2673.

Kagan, Y., Muryshev, A. E. and Shlyapnikov, G. V., 1998, Collapse and Bose-Einstein condensation in a trapped Bose gas with negative scattering length, *Physical Review Letters*, 81, 933-937.

Karabulut, E. Ö., Koyuncu, M. and Tomak, M., 2010a, Thermodynamics of Bose-Einstein gas trapped in *D*-dimensional quartic potentials, *Physica A*, 389, 1371-1379.

Karabulut, E. Ö., Koyuncu, M., Atav, Ü. and Tomak, M., 2010b, Thermodynamics of a two-dimensional interacting Bose gas trapped in a quartic potential, *Physics Letters A*, doi: 10.1016/j.physleta.2010.11.041.

Ketterle, W. and van Druten, N. J., 1996a, Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, 37, edited by Bederson, B. and Walther, H., *Academic*, San Diego, 181-236.

Ketterle, W. and van Druten, N. J., 1996b, Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions, *Physical Review A*, 54, 656-660.

Ketterle, W., 2002, Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser, *Reviews of Modern Physics*, 74, 1131-1151.

Kim, J. G. and Lee, E. K., 1999, Thermodynamic properties of trapped, two-dimensional interacting Bose gases in Hartree-Fock approximation, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 32, 5575-5581.

Kirsten, K. and Toms, D. J., 1996, Bose-Einstein condensation of atomic gases in a general harmonic-oscillator confining potential trap, *Physical Review A*, 54, 4188-4203.

Krauth, W., 1996, Quantum Monte Carlo calculations for a large number of bosons in a harmonic trap, *Physical Review Letters*, 77, 3695-3699.

Li, G. Q., Peng, P., Liu, J. K. and Xue, J. K., 2008, Collective excitations and nonlinear dynamics of 1D BEC with two- and three-body interactions in anharmonic traps, *Communications in Theoretical Physics* , 50, 1129-1136.

Li, H. C., Chen, H. J. and Xue, J. K., 2010, Bose–Einstein condensates with two- and three-body interactions in an anharmonic trap at finite temperature, *Chinese Physics Letters*, 27, 030304.

Liu, T. G., Yu, Y., Zhao, J., Rao, J., Wang, X. and Liu, Q. H., 2009, Bose-Einstein condensation of bouncing balls, *Physica A*, 388, 2383-2388.

Masuhara, N., Doyle, J. M., Sandberg, J. C., Kleppner, D., Greytak, T. J., Hess, H. F. and Kochanski, G. P., 1988, Evaporative cooling of spin-polarized atomic Hydrogen, *Physical Review Letters*, 61, 935-938.

Masut, R. and Mullin, W. J., 1979, Spatial Bose-Einstein condensation, *American Journal of Physics*, 47 (6), 493-497.

Mathews, P. M., Seetharaman, M. and Raghavan, S., 1982, Energy eigenvalues of quartic oscillators in $d \leq 3$ dimensions, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15, 103-112.

Mermin, N. D. and Wagner, H., 1966, Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models, *Physical Review Letters*, 17, 1133-1136.

Minguzzi, A., Conti, S. and Tosi, M. P., 1997, The internal energy and condensate fraction of a trapped interacting Bose gas, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 9, L33-L38.

Minguzzi, A., Succi, S., Toschi, F., Tosi, M. P. and Vignolo, P., 2004, Numerical methods for atomic quantum gases with applications to Bose–Einstein condensates and to ultracold fermions, *Physics Reports*, 395, 223-355.

Mullin, W. J., 1997, Bose-Einstein condensation in a harmonic potential, *Journal of Low Temperature Physics*, 106, 615-641.

Napolitano, R., De Luca, J., Bagnato, V. S. and Marques, G. C., 1997, Effect of a finite number of particles in the Bose-Einstein condensation of a trapped gas, *Physical Review A*, 55, 3954-3956.

Nozieres, P., 1995, Bose-Einstein Condensation, edited by Griffin, A., Snoke, D. W. and Stringari, S., *Cambridge University Press*, New York, 15-30.

Oliva, J., 1989, Density profile of the weakly interacting Bose gas confined in a potential well: Nonzero temperature, *Physical Review B*, 39, 4197-4203.

Orzel, C., Tuchman, A. K., Fenselau, M. L., Yasuda, M. and Kasevich, M. A., 2001, Squeezed states in a Bose-Einstein condensate, *Science*, 291 (5512), 2386-2389.

Ott, H., Fortagh, J., Kraft, S., Günther, A., Komma, D. and Zimmermann, C., 2003, Nonlinear Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Waveguide, *Physical Review Letters*, 91, 040402.

Pathria, R. K., 1998, Bose-Einstein condensation of a finite number of particles confined to harmonic traps, *Physical Review A*, 58, 1490-1495.

Pethick, C. J. and Smith, H., 2002, Bose-Einstein condensation in dilute gases, *Cambridge University Press*, Cambridge.

Pitaevskii, L. P., 1961, Vortex lines in an imperfect Bose gas, *Soviet Physics JETP-USSR*, 13 (2), 451-454.

Pitaevskii, L. and Stringari, S., 2003, Bose-Einstein Condensation, *Clarendon Press*, Oxford.

Prokof'ev, N. and Svistunov, B., 2002, Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region, *Physical Review A*, 66, 043608.

Ramakumar, R., Das, A. N. and Sil, S., 2007, Studies of bosons in optical lattices in a harmonic potential, *European Physical Journal D*, 42, 309-316.

Ramakumar, R. and Das, A. N., 2008, Lattice bosons in quartic confinement, *European Physical Journal D*, 47, 203-208.

Rehr, J. J. and Mermin, N. D., 1970, Condensation of the rotating two-dimensional ideal Bose gas, *Physical Review B*, 1, 3160-3162.

Rosenbusch, P., Petrov, D. S., Sinha, S., Chevy, F., Bretin, V., Castin, Y., Shlyapnikov, G. and Dalibard, J., 2002, Critical Rotation of a Harmonically Trapped Bose Gas, *Physical Review Letters*, 88, 250403.

Ruprecht, P. A., Holland, M. J., Burnett, K. and Edwards, M., 1995, Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms, *Physical Review A*, 51, 4704-4711.

Sackett, C. A., Stoof, H. T. C. and Hulet, R. G., 1998, Growth and collapse of a Bose-Einstein condensate with attractive interactions, *Physical Review Letters*, 80, 2031-2034.

Schneider, B. I. and Feder, D. L., 1999, Numerical approach to the ground and excited states of a Bose-Einstein condensed gas confined in a completely anisotropic trap, *Physical Review A*, 59, 2232-2242.

Schreck, F., Khaykovich, L., Corwin, K. L., Ferrari, G., Bourdel, T., Cubizolles, J. and Salomon, C., 2001, Quasipure Bose-Einstein condensate immersed in a fermi sea, *Physical Review Letters*, 87, 080403.

Seetharaman, M., Raghavan, S. and Vasan, S. S., 1982, Analytic WKB energy expressions for three-dimensional anharmonic oscillators, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15, 1537-1547.

Shi, H. and Zheng, W. -M., 1997, Critical temperature of a trapped interacting Bose-Einstein gas in the local-density approximation, *Physical Review A*, 56, 1046-1049.

Stock, S., Bretin, V., Chevy, F. and Dalibard, J., 2004, Shape oscillation of a rotating Bose-Einstein condensate, *Europhysics Letters*, 65 (5), 594-600.

Thogersen, M., Zinner, N. T. and Jensen, A. S., 2009, Thomas-Fermi approximation for a condensate with higher-order interactions, *Physical Review A*, 80, 043625.

Weiner, J., Bagnato, V. S., Zilio, S. and Julienne, P. S., 1999, Experiments and theory in cold and ultracold collisions, *Reviews of Modern Physics*, 71, 1-85.

Widom, A., 1968, Superfluid phase transitions in one and two dimensions, *Physical Review*, 176, 254-257.

Yong, W. M., Wei, X. F., Zhou, X. Y. and Xue, J. K., 2009, Stability and collective excitation of two-dimensional BECs with two- and three-body interactions in an anharmonic trap, *Communications in Theoretical Physics* , 51, 433-440.

Yukalov, V. I., 2005, Modified semiclassical approximation for trapped Bose gases, *Physical Review A*, 72, 033608.

Zezyulin, D. A., Alfimov, G. L., Konotop, V. V. and Perez-Garcia, V. M., 2008, Stability of excited states of a Bose-Einstein condensate in an anharmonic trap, *Physical Review A*, 78, 013606.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Elife Öznur KARABULUT
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	İçel – 14.11.1979
Telefon	**:**	(332) 223 1835
Faks	**:**	(332) 241 2499
e-mail	**:**	eoyildirim@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	İçel Mersin Anadolu Lisesi, Mersin	1997
Üniversite	:	Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Fizik Eğitimi Bölümü, Ankara	2001
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Konya	2005
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Konya	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2001	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Ultra soğuk gazlar
Bose-Einstein yoğuşması

YABANCI DİLLER

İngilizce (ÜDS: 90)

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

Lisansüstü eğitim sırasında katılınan çalıştay ve yaz okulları:

1) "Temel Bilimlerde İstatistik Yöntemler" yaz okulu, 23-27 Ağustos 2004, İstanbul Kültür Üniversitesi, İstanbul.

2) "İleri İstatistik Mekanik ve Yoğun Madde Fiziğinde Uygulamaları" çalıştayı, 2-20 Temmuz 2007, Uluslararası İleri Fizik Araştırma Okulu, Marmaris Kuramsal ve Uygulamalı Fizik Araştırma Enstitüsü, Marmaris.

3) "Yarıiletken Fiziğinde Temel Prosesler ve Spintroniks" çalıştayı, 13-29 Ağustos 2007, Uluslararası İleri Fizik Araştırma Okulu, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

4) "Frontier Topics in Bose Einstein Condensation in Atoms & Semiconductors" programı, 11-19 Eylül 2010, Uluslararası İleri Fizik Araştırma Okulu, Marmaris Kuramsal ve Uygulamalı Fizik Araştırma Enstitüsü, Marmaris.

YAYINLAR

Uluslararası Yayınlar

1) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, Ü. Atav, M. Tomak, Thermodynamics of a two-dimensional interacting Bose gas trapped in a quartic potential, *Physics Letters A* (2010), doi:10.1016/j.physleta.2010.11.041 (**Doktora tezinden yapılmıştır**)

2) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, M. Tomak, Thermodynamics of Bose-Einstein gas trapped in *D*-dimensional quartic potentials, *Physica A* (2010) 389, 1371-1379. (**Doktora tezinden yapılmıştır**)

3) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, Neural network-based correlations for the thermal conductivity of propane, *Fluid Phase Equilibria* (2007) 257, 6-17. (**Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır**)

Uluslararası Bildiriler

1) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, M. Tomak, The occurrence of Bose-Einstein condensation in a low-dimensional confinement, *Greek-Turkish Conference on Statistical Mechanics and Dynamical Systems*, 11-14 September 2008 Rhodes, Greece and 14-17 September 2008 ITAP, Marmaris, Turkey. (**Doktora tezinden yapılmıştır**)

2) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, M. Tomak, Anharmonik bir tuzakta etkileşen bozon gazı, *26.Uluslararası Fizik Kongresi*, 24-27 Eylül 2009 Muğla, Türkiye. (**Doktora tezinden yapılmıştır**)

3) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, The thermal conductivity correlation of propane by artificial neural networks, *Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation* (2006) Volume II, 1067-1070. (**Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır**)

4) E.Ö. Yıldırım (Karabulut), M. Koyuncu, Neural network correlation for the thermal conductivity of propane, *23.Uluslararası Fizik Kongresi*, 13-16 Eylül 2005 Muğla, Türkiye. (**Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır**)

Ulusal Bildiriler

1) E.Ö. Karabulut, M. Koyuncu, M. Tomak, Bose-Einstein condensation of non-interacting bosons in lower dimensions, *12.Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, 31 Ekim-02 Kasım 2008 İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul. (**Doktora tezinden yapılmıştır**)

2) E.Ö. Yıldırım (Karabulut), M. Koyuncu, Propanın viskozitesinin yapay sinir ağı yöntemi ile belirlenmesi, *9.Ulusal Sıvıhal Fiziği Sempozyumu*, 22-25 Eylül 2005 İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul. (**Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır**)