KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ*FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEZON PARAMETRELERİNİN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizikçi Arzu TÜRKAN

Anabilim Dalı: FİZİK

Danışman: Prof. Dr. Elşen VELİ

KOCAELİ, 2010

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEZON PARAMETRELERİNİN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu TÜRKAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 01 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 17 Haziran 2010

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Elşen VELİ

(.....)

Üye

Yrd. Doç. Dr. Kazem AZİZİ

(.....)

Üye

Yrd. Doç. Dr. Hayriye SUNDU PAMUK

(.....)

KOCAELİ, 2010

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, vektör parçacık olan ρ-mezonun kütlesi ve leptonik bozunum sabitinin sıcaklığa bağlılığı pertürbatif olmayan yöntemlerle incelenmiştir. Yapılan hesaplamalar sonucunda ρ-mezon için Termal KRD Toplam kuralları elde edilmiş ve nümerik incelenmiştir.

Çalışmamda beni sabırla yönlendiren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Elşen VELİ'ye (KOÜ F.E.F.), bu tezin hazırlanmasında desteğini ve tavsiyelerini benden esirgemeyen arkadaşım Arş. Gör. Gülşah KAYA'ya (KOÜ F.E.F), maddi manevi her türlü desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen anneme ve babama, ayrıca varlığıyla daima bana destek olan değerli eşim Hasan TÜRKAN'a sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
SEMBOLLER iv
ÖZET ii
İNGİLİZCE ÖZET iii
1. GİRİŞ 1
2. TERMAL ALAN TEORİLRİNİN TEMEL İLKELERİ 11
2.1. Sonlu Sıcaklıkta ($T > 0$) Skaler Alan Propagatörü 11
2.2. Skaler Alanlar için İmajiner Zaman Formülasyonu 15
2.3. Skaler Alanlar için Reel Zaman Formülasyonu 21
3. KUANTUM RENK DİNAMİĞİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ 29
3.1. Kuantum Renk Dinamiği ve Ayar Dönüşümleri 29
3.2. Kuantize Edilmiş KRD 31
3.3. Kayan Etkileşim Sabiti 35
3.4. Asimtotik Özgürlük ve Hapsolma 37
4. TERMAL KRD TOPLAM KURALLARI YÖNTEMİ İLE ρ - MEZONUN İNCELENMESİ 39
4.1. Termal KRD Toplam Kuralları 39
4.2. Termal Dispersiyon Bağıntısı 43
4.3. Operatör Çarpım Açılımı 45
4.4. Korelasyon Fonksiyonunun Hadronik Parametreler Cinsinden Hesaplanması 48
4.5. Termal Toplam Kurallarının Nümerik İncelenmesi 53
SONUÇLAR ve ÖNERİLER 60
KAYNAKLAR 62
ÖZGEÇMİŞ 65

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1: Çekirdek çarpışmalarında oluşan fazların zamanla değişimi..……....7
Şekil 1.2: Kuark-kuark saçılması için Feynman diyagramı…….....9
Şekil 2.1: Kompleks düzlemde Green fonksiyonları için kontür seçimi…..……...16
Şekil 2.2: Kompleks düzlemde Green fonksiyonları için kontür seçimi…..……...16
Şekil 2.3: ϕ^4 -teorisinde tek ilmekli diyagram…..……...18
Şekil 2.4: ϕ^4 -teorisinde iki ilmekli diyagram…….……...20
Şekil 2.5: ϕ^4 -teorisinde iki ilmekli diyagram…..……...……...23
Şekil 2.6: Reel zaman formülasyonunda tek ilmekli diyagram...……...24
Şekil 2.7: Reel zaman formülasyonunda tek ilmekli diyagram ...……..25
Şekil 2.8: Reel zaman formülasyonunda kompleks düzlemde Green fonksiyonlarının kutupları……..27
Şekil 4.1: Borel parametresinin $M^2 = 1 GeV^2, 1.3 GeV^2, 1.6 GeV^2$ değerlerinde kütledeki kaymanın sıcaklığa bağlılığı……...58
Şekil 4.2: Borel parametresinin $M^2 = 1 GeV^2, 1.3 GeV^2, 1.6 GeV^2$ değerlerinde leptonik bozunum sabitindeki kaymanın sıcaklığa bağlılığı……...58

SEMBOLLER

$a(\mathbf{k})$	: Yok etme operatörü
$a^{\dagger}(\mathbf{k})$	: Oluşturma operatörü
a, b, c	: Renk indisleri
A, B	: Bozonik veya fermiyonik operatörler
A_{μ}^{a}	: Gluon alanları (Yang Mills Alanları)
$c^{a}, \overline{c}^{a}$	: Ghost alanları
$C_{n}\left(q^{2}\right)$	: Wilson katsayısı
d	: Operatör boyutu
D_{μ}	: Kovaryant türev
f^{abc}	: Antisimetrik yapı sabiti
$F_{\mu\nu}^{a}$, $G_{\mu\nu}^{a}$	: Gluon Alan şiddet tensörü
g, α_{s}	: Güçlü etkileşme sabiti
$G(A)$	: Ayar sabitleme fonksiyonu
$G(x-y)$	: Green fonksiyonu
$\left\langle G_{\mu\nu}^{a} G^{a\mu\nu} \right\rangle$	: Gluon kondensatı
H	: Hamiltonyen
$J(x)$,	: Parçacıklara karşılık gelen akım
$J_{\mu}^{a}, \overline{\eta}^{a}, \eta^{a}$	: Dış kaynak
k	: Boltzman sabiti
k_{0}	: Matsubara frekansı
K, k, p, q	: Dört boyutlu momentum
L_{KRD}	: Kuantum Renk Dinamiği Lagrangianı
m	: Kütle
M	: Borel parametresi
$n_{B}(\omega_{k})$	: Bose-Einstein dağılımı
$n_{F}(\omega_{k})$	: Fermi-Dirac dağılımı
n_{f}	: Kuark çeşni sayısı
N_{c}	: Kuark renk sayısı
$\sqrt{s}$	: Kütle merkezi enerjisi
t, T	: Sıcaklık
T^{a} , t^{a}, t^{b}	: $SU(3)$ grubu üreticileri
T	: Zaman sıralı çarpım
u_{μ}	: Dört boyutlu hız vektörü

$V_\mu^a(x)$: Vektör akımı
Z : Bölüşüm fonksiyonu
$q, \overline{q}$: Kuark, antikuark alanları

γ^μ : Dirac Matrisi
δ : Dirac-Delta fonksiyonu
Δ_F : Feynman propagatörü
$\Delta_{FP}[A]$:Fadeev-Popov determinantı
ε_{ijk} : Tam antisimetrik tensör
ξ : Ayar parametresi
$\theta(x)$: Basamak fonksiyonu
$\theta^a(x)$: x 'e bağlı ayar parametreleri
$\Theta_{\mu\nu}$: Enerji-momentum tensörü
λ^a : 3×3 Gell-Mann matrisleri
Λ_{KRD} : KRD parametresi
μ : Kimyasal potansiyel
μ, ν : Lorentz indisleri
Π : Öz Enerji
ρ : Yoğunluk operatörü
τ : İmajiner zaman
τ^a : Pauli matrisleri
$\phi(x)$: Skaler alan
$\langle \overline{\psi}\psi \rangle$: Kuark kondensatı
$\psi, \overline{\psi}$: Fermiyon alanları
$\hbar$: Planck sabiti

Kısaltmalar

CERN : Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi
CERES : Clouds and Earth's Radiant Energy System
İZF : İmajiner Zaman Formülasyonu
KED : Kuantum Elektrodinamiği
KGP : Kuark-Gluon Plazma
KMS : Kubo-Martin-Schwinger
KRD : Kuantum Renk Dinamiği
OPE : Operatör Çarpım Açılımı
RZF : Reel Zaman Formülasyonu
SVZ : Shifman, Vainstein ve Zakharov
TAT : Termal Alan Teorisi

MEZON PARAMETRELERİNİN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE HESAPLANMASI

Arzu TÜRKAN

Anahtar Kelimeler: Hafif mezonlar, Operatör Çarpım Açılımı, Termal KRD Toplam Kuralları, Leptonik bozunum sabiti.

Özet: Son yıllarda yapılan ağır iyon çarpışma deneylerinin anlaşılması mezon ve baryon parametrelerinin sıcaklığa ve yoğunluğa bağlı olarak değişiminin incelenmesini gerektirir. Özellikle deneysel olarak incelenmesi bakımından hafif vektör mezonlar büyük öneme sahiptir.

Kısa mesafelerde (veya büyük momentumlarda) asimtotik özgürlük özelliğinden dolayı etkileşme sabiti α çok küçük olduğundan pertürbatif açılım yapmak mümkündür. Böylece bu bölgede pertürbasyon teorisi güvenilir bir şekilde uygulanabilir. Ancak büyük mesafelerde (veya küçük momentumlarda) kuark-gluon etkileşmeleri kuvvetli olduğundan ($\alpha \sim 1$) pertürbatif olmayan etkiler baskındır. Bu nedenle sonlu sıcaklıklarda kritik sıcaklığa yakın bölgelerde pertürbatif olmayan yöntemlerin kullanılması gerekir.

Bu tez çalışmasında ρ- mezon parametrelerinin sıcaklığa bağlılığı hadron fiziğinde pertürbatif olmayan katkıları hesaplamada oldukça başarılı bir yöntem olan Termal KRD Toplam Kuralları yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken sonlu sıcaklıklarda ortaya çıkan yeni operatörler de hesaba katılmış ve ρ-mezon için Termal KRD Toplam kuralları elde edilmiştir. Nümerik incelemeler sonucunda ρ- mezonun kütlesinin ve leptonik bozunum sabitinin $160\,MeV$ sıcaklığa kadar bağlılığı elde edilmiştir.

CALCULATION OF MESON PARAMETRES WITH NON-PERTURBATIF METHODS

Arzu TÜRKAN

Keywords: Light Mesons, Operator Product Expansion, Thermal QCD Sum Rules, Leptonic Decay Constant.

Abstract: Understanding of the results of the heavy ion collision experiments which have done recent years is required to investigation of meson and baryon parameters modification depending on temperature and density. Particularly experimental investigation of light vector mesons have a great importance.

The coupling constant α is very small due to properties of asymptotic freedom in the short distances (or large momentum). So that to make perturbative expansion is possible and perturbation theory can be applied reliably in this region. However non-perturbative effects are dominant because of quark-gluon interaction which is strong ($\alpha \sim 1$) at large distances (or small momentum). Therefore non-perturbative methods must be used in close regions to the critical temperature at finite temperature.

In this thesis, the temperature dependence of ρ- meson parameters are calculated using Thermal QCD sum rules that prove remarkably successful in addressing the nonperturbative problems of hadron phenomenology. These calculations are done taking into account the emergence of new operators at finite temperature and thermal KRD sum rules for ρ- meson are obtained. In the result of the numerical investigations the temperatures dependences of the mass and leptonic decay constant of ρ- meson of up to $160\,MeV$ are obtained.

1. GİRİŞ

İnsanoğlu maddenin yapısını yüzyıllardır merak etmiş ve maddeyi oluşturan en küçük parçacığın ne olduğunu belirlemeye çalışmıştır. Bu soru günümüz fiziğinin de en temel problemlerinden birini oluşturmaktadır. 19. yüzyılda atom, maddenin bölünemez en küçük yapıtaşı olarak kabul ediliyordu. Ancak 1897' de J. J. Thomson tarafından elektronun keşfi ile fizikçiler atomun maddenin en küçük yapıtaşı olmadığını, daha küçük alt parçacıklardan oluştuğunu düşünmeye başladılar ve yapılan araştırmalar sonucunda atomun çekirdek ve onun etrafında dönen elektronlardan oluştuğu anlaşıldı. 1932'de Chadwick tarafından nötronun bulunmasıyla atomun elektron, proton ve nötrondan oluştuğu keşfedildi. 1964 yılında ise Murray Gell-Mann ve George Zweig birbirinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarla çekirdeği oluşturan proton ve nötronların da kuark denilen daha küçük alt parçacıklardan oluştuğunu öngördüler [1]. Bugün bilinen 400'ün üzerinde parçacık çeşidi vardır ve bu parçacıklar birkaç temel parçacığın değişik kombinasyonları şeklindedir.

Günümüzde temel parçacıklar kuarklar ve leptonlar olmak üzere iki gruba ayrılır. Yukarı (u), aşağı (d), acayip (s), tılsımlı (c), alt (b), üst (t) olmak üzere altı çeşit kuark vardır ve anti kuarkları ile birlikte üç aileye ayrılmaktadır. Birinci ailedeki (yukarı ve aşağı) kuarklar doğada yaygın olarak bulunurlar. Daha ağır olan kuarklar sadece yüksek enerjili çarpışmalarda (kozmik ışınları içerenler gibi) oluşurlar ve hemen ardından çabucak bozunurlar. Kuarklar elektrik yükü, renk yükü, spin ve kütle gibi çeşitli özelliklere sahiptir. Kuarkların çeşnilerine bağlı olarak yükleri protonun yükünün $-1/3$ veya $+2/3$ katıdır. Kuarklar parçacıkları oluşturmak için daima toplam elektrik yükleri tamsayı olacak şekilde bir araya gelirler. Bu nedenle kuarkların her türlü kombinasyonu mümkün değildir. Kuarklar mavi, yeşil ve kırmızı olmak üzere üç tür renk yükünden birine sahiptir. Her kuark bir renk yükü taşırken her antikuark da bir anti-renk yükü taşır. Renk hapsi nedeniyle kuarklar doğada asla serbest halde bulunmazlar, sadece hadronların içinde serbest halde bulunabilirler. Hadronların en kararlı olanları atom çekirdeğinin bileşenleri olan proton ve

nötrondur. Bu sebeple kuarklar hakkında bilinenlerin çoğu hadronların gözlenmesi sonucunda elde edilmiştir.

Kuarklar bir araya gelerek hadronlar olarak bilinen kompozit tanecikleri oluştururlar. Buna göre hadronlar; mezonlar ve baryonlar olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Mezonlar: spini tamsayı olan ($s = 0, \hbar, 2\hbar, ...$) ve bir kuark ile bir anti-kuarktan oluşan parçacıklardır. Mezonların varlığı 1935'te Japon bilim adamı Hideki Yukawa tarafından teorik olarak öngörülmüştür ve Yukawa tarafından öngörülen (mezonların en hafifi olan) π-mezonu ya da pion adı verilen bu mezon 1947'de Bristol Üniversitesi'nde Cecil Powell, César Lattes ve Giuseppe Occhialini'nin işbirliği ile bulunmuştur. O tarihten bu yana K-mezon, η-mezon, Ω-mezon, vb. başka mezonlar da bulunmuş, öngörülmeleri ve bulunmaları kuark kuramının geliştirilmesini sağlamıştır. Aynı zamanda mezonlar Bose-Einstein istatistiğine uyduğundan bozonlardır. Baryonlar ise spini tek yarım sayı ($s = \hbar/2,\ 3\hbar/2,\ 5\hbar/2,\ ...$) olan üç kuark veya üç anti-kuarktan oluşan hadronlardır ve Fermi-Dirac istatistiğine uyduğundan fermiyonlardır. Örneğin proton 2 yukarı 1 aşağı (uud), nötron 1 yukarı 2 aşağı (udd) kuarktan oluşur.

Kuarklar gibi leptonlar da elektron (e), elektron nötrino (ν_e), müon (μ), müon nötrino (ν_μ), tau (τ), tau nötrino (ν_τ) olmak üzere altı çeşittir ve anti-leptonları ile birlikte üç ailede toplanırlar. Leptonlar kuarklardan farklı olarak tek başlarına bulunabilirler. Bu altı leptondan sadece elektron normal madde yapısında yer alır. Çünkü elektron elektrik yüküne sahip en küçük kütleli parçacıktır. Bozunarak dönüşebileceği daha hafif bir parçacık olmadığından kararlıdır.

Bilindiği gibi doğada kütle çekim kuvveti, elektromanyetik kuvvet, zayıf kuvvet ve güçlü kuvvet olmak üzere dört temel kuvvet vardır ve bu kuvvetlerin iletilmesini sağlayan taşıyıcı parçacıklara aralık bozonları denir. Gezegenler, yıldızlar ve galaksiler gibi büyük gökcisimleri kütle çekim kuvvetini baskın olarak hissederler. Kütle çekim kuvvetinin erimi sonsuzdur ve taşıyıcı parçacığı henüz gözlenememiş olan graviton'dur. Elektromanyetik kuvvet elektrik yüklü parçacıklar arasında oluşan kuvvettir. Erimi sonsuzdur ve taşıyıcı parçacığı fotondur. Zayıf kuvvet beta ışıması, bir kuark çeşnisinin başka bir kuark çeşnisine dönüşmesi vb. gibi olaylardan

sorumludur. Zayıf kuvvetin erimi $10^{-18}\ m$'dir ve taşıyıcı parçacıkları $W^{\pm}$ ve Z^{0}'dır. Üçüncü ailede yer alan parçacıklar (τ ,ν_{τ}) genellikle daha büyük kütleye ve daha az kararlılığa sahiptirler. Bu da onların zayıf etkileşimler vasıtasıyla bozunarak daha küçük nesilli parçacıklara (alt gruptaki ailede bulunan parçacıklara) dönüşmesine sebep olur. Güçlü etkileşim ise gluon adı verilen kuvvet taşıyıcı parçacıklar aracılığıyla gerçekleşir. Kuarkların sahip olduğu renk yükü ve elektrik yükü nedeniyle güçlü ve elektromanyetik etkileşime girerler.

Hadronik etkileşimler güçlü etkileşimin teorisi olan Kuantum Renk Dinamiği (KRD) ile açıklanır. KRD, kuark-gluon etkileşim sabitinin birden çok küçük olduğu büyük momentum transferi bölgesinde çok başarılıdır ve pertürbatif metot güvenilir bir şekilde uygulanabilir. Ancak hadron skalasında kuark-gluon etkileşim sabiti $\alpha \approx 1$ olduğundan pertürbasyon teorisi burada başarısızdır. Bu bölgede pertürbatif olmayan metotların kullanılması gerekir. KRD Toplam Kuralları, Örgü KRD Teorisi, Torba Modeli, Efektif Lagrange Yöntemi, Potansiyel Model, Fenomenolojik Kuark Modeli, Ağır Kuark Efektif Teorisi, Sonlu Sıcaklıklarda Kiral Pertürbasyon Teorisi (ChPT) bu yöntemlerden bazılarıdır. Pertürbatif olmayan yöntemler arasında KRD Toplam Kuralları metodu hadron parametreleri hakkında niteliksel ve niceliksel olarak bilgi veren en güçlü yöntemlerden birisidir. KRD Toplam Kuralları Yöntemi ilk kez Shifman, Vainstein ve Zakharov (SVZ) tarafından öne sürülmüştür [2]. KRD Toplam Kuralları yöntemi fenomenolojik bir yöntemdir. KRD Toplam Kurallarının ana fikri KRD parametreleri ile hadronik serbestlik dereceleri arasında ilişki kurmaktır. Bu çerçevede ilk olarak hadronların kuantum sayısına uygun olarak seçilen akımlarla oluşturulan korelasyon fonksiyonu yazılır ve bu korelasyon fonksiyonu Operatör Çarpım Açılımı (OPE) kullanılarak hesaplanır. OPE yöntemi ilk olarak Wilson [3] tarafından ortaya atılmıştır. Bu yöntemde yerel olmayan korelasyon fonksiyonu yerel operatörler cinsinden seriye açılır. Bu seriye açılımın katsayıları Wilson katsayıları olarak tanımlanır ve bu katsayılar pertürbatif yöntemle hesaplanır. Serideki yüksek boyutlu operatörler pertürbatif olmayan katkıları ifade eder. Diğer taraftan korelasyon fonksiyonu dispersiyon bağıntısı kullanılarak hadronik durumlar üzerinden bir toplamla ifade edilebilir. Toplam Kuralları yeteri kadar büyük momentumlarda, vakum matris elemanının dispersiyon bağıntısı ve buna karşılık gelen Wilson operatör çarpımının seriye açılımı birbirlerine eşitlenerek elde edilir.

Bu eşitlikten hadronların etkileşme sabitleri, manyetik momentleri, leptonik bozunum sabitleri ve kütleleri gibi bazı parametreler elde edilebilir.

KRD Toplam Kuralları 1986 yılında Bochkarev ve Shaposhnikov tarafından sonlu sıcaklık ve yoğunluklar durumuna genelleştirilmiştir [4]. Sonlu sıcaklıkta Toplam Kuralları bazı yeni özelliklere sahiptir. Bu yeni özelliklerden biri ortamda parçacıkların akımlar ile etkileşmesi olup, hadron spektral fonksiyonunun modifiye edilmesini gerektirir. Diğer yeni özellik ise sonlu sıcaklıkta maddenin durgun halde olduğu referans sisteminin seçimi sebebiyle Wilson açılımında Lorentz invaryant olmayan ilave operatörlerin ortaya çıkmasıdır [5-7]. Bu yeni operatörlerin termal ortalamalarının davranışı, $T=0$ durumunda mevcut olan Lorentz invaryant operatörlerin davranışından çok farklıdır. $T=0$ durumundaki operatörler sıfır sıcaklıkta sıfır olmayan değerlerle başlar ve sıcaklık arttıkça büyüklüğü azalır, $T\neq 0$ durumundaki yeni operatörler ise sıfır sıcaklıkta sıfır değerini alıp sıcaklık arttıkça hızlı bir şekilde artar. Termal KRD Toplam Kurallarında bu yeni operatörlerin katkısının önemi açıkça görülmektedir. Diğer bir deyimle sıcaklığın artmasıyla bu yeni operatörlerin katkısı $T=0$ durumundaki operatörlerin katkısından daha baskın olacaktır [8]. Bu yeni operatörler göz önüne alınarak hafif skaler ve vektör mezonların kütle ve leptonik bozunum sabitleri sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda incelenmiştir [9-13]. Ayrıca ağır-hafif ve ağır mezonlar için de kütle, leptonik bozunum sabitleri ve genişlikleri sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda incelenmesi literatürde geniş şekilde yer almaktadır [14-18].

Sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda literatürde çok sayıda çalışma olmasına rağmen özellikle hadronların genişlikleri, etkileşme sabitleri, bozunma sabitleri, dallanma oranları, form faktörleri gibi çok sayıda parametrenin sıcaklığa ve yoğunluğa bağlı olarak nasıl değiştiği hala tam olarak bilinmemektedir. Diğer pertürbatif olmayan yöntemlerle yapılan incelemelerde sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda vektör mezonların spektral fonksiyonunun ortam etkileri ile değiştiği görülmüş [19], ortamda ρ-mezonun nükleonlarla etkileşmesi sonucunda ρ-mezonun kütlesinin pionun kütlesine kadar azaldığı elde edilmiştir. CERN-CERES kolabrasyonunda ultrarölativistik çekirdek-çekirdek çarpışmalarında vektör mezonlara ortam etkileri incelenmiş ve teorik çalışmalarla uyumlu olduğu görülmüştür [20]. Japonya'daki

KEK labaratuarında ρ, ω ve Φ mezonlar $12 GeV$'lik proton-çekirdek reaksiyonlarında incelenmiştir.

Çok parçacıklı rölativistik sistemlerin termodinamiği Termal Alan Teorileri (TAT) ile incelenir [21,22]. TAT, termodinamik dengede bulunan bir sistemin sahip olduğu kanoniksel ya da büyük kanoniksel grupların ele alınmasına dayanır. TAT yaklaşımı, kinetik teori veya çok cisim teorisi olarak bilinen diğer teorilerden farklıdır. TAT abelyen olmayan ayar etkileşmelerine KRD gibi bakar, Lorentz kovaryanttır ve yollar üzerinden integral yaklaşımını kullanılır [23].

TAT'de genel olarak iki tip formülasyon kullanılmaktadır. Birincisi, kompleks zaman kontürüne, ikincisi ise C^* cebrine dayanır [22]. TAT'nin temel fikri; bilinen vakum alan teorisinin yol integrali yaklaşımını kullanmak ve $t - i\beta = -i/T$ kompleks zaman değişkenli zaman gelişim operatörünü kullanarak $e^{-\beta H}$ Boltzman faktöründeki sıcaklığı tanımlamaktır ($\hbar = c = k = 1$ olan doğal birim sistemi kullanılmıştır). Tarihsel olarak Matsubara'nın, gelişim operatörüne tamamen imajiner olan zaman değişkenini katmasıyla termal alan teorilerinin temeli atılmış oldu [24]. İmajiner Zaman Formülasyonunda (İZF) toplamları içeren frekanslar Matsubara frekansları olarak adlandırılır. Daha sonraları kompleks düzlemde kontürün seçilmesine dayanan bir formülasyon, Schwinger [25] ve Mills [26] tarafından geliştirilmiş ve buna da "Reel Zaman Formülasyonu (RZF)" adı verilmiştir. Ayrıca literatürde yukarıdaki formülasyonlarla aynı sonuçları veren, C^* cebrine dayanan termal alan dinamiği denilen farklı bir yaklaşım da kullanılmaktadır.

TAT'nin kozmoloji, astrofizik ve ağır iyon çarpışmaları üzerine önemli uygulamaları vardır. Ağır iyon çarpışma deneylerinin en temel amaçlarından biri laboratuar ortamında maddenin yeni hali olarak adlandırılan kuark-gluon plazma (KGP) oluşturmaktır. Termal KRD'ye göre belirli bir kritik sıcaklık ve kritik yoğunluğun üstünde kuarklar ve gluonlar serbest hale geçerek KGP'yi oluşturur [27].

Kuarklar arasındaki güçlü etkileşim KRD ile tanımlanır. KRD'ye göre kuarklar arasındaki etkileşme gluon alışverişiyle gerçekleşir. Kuantum Elektrodinamiğinden (KED) farklı olarak güçlü etkileşimde bulunan kuarklar aynı zamanda renk yükü

olarak adlandırılan 3 yüke sahiptirler (ve anti-yüklere). KRD, $SU(3)_C$ grubunu temel alan abelyan olmayan ayar teorisidir. $SU(3)_C$ grubu, doğrudan birbiriyle etkileşebilen 8 tane ayar bozonunun varlığını öngörmektedir [28]. KRD'ye göre güçlü etkileşim asimtotik özgürlük özelliğine sahiptir. Kuarkların ve gluonların küçük mesafelerde veya büyük momentum transferlerinde zayıf olarak etkileşmeleri, KRD'de asimtotik özgürlük kavramıyla tanımlanır. Büyük mesafelerde doğada serbest kuark ve gluonların bulunmaması, yani kuarkların hapsolması onlar arasındaki potansiyelin lineer olarak arttığını göstermektedir. Bu çerçevede nükleonlar ve diğer hadronlar, valans kuarkların yanı sıra aynı zamanda hadronların içinde kalmaya zorlanan sanal kuarklar (kuark denizi) ve gluonlar içeren sistem olarak tanımlanabilirler.

Çekirdek kuarklarla dolu torbalardan oluşmuş bir sistem gibi düşünülebilir. Çekirdeği sıkıştırarak, sisteme başka bir hadron ekleyerek veya baryon yoğunluğunu arttırarak bu torbalar üst üste bindirilebilirler.

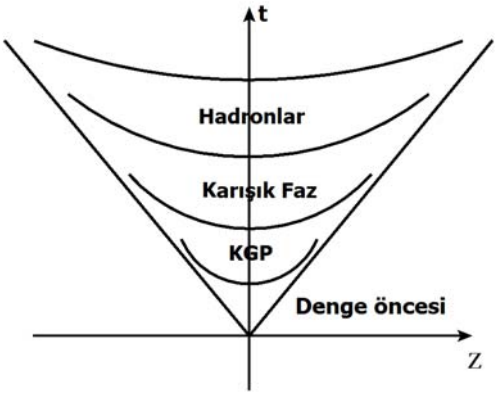
Sıcaklık ve baryon yoğunluğunun daha da artması ile (belirli bir kritik sıcaklık ve yoğunluğun üzerine çıkması ile) sistem KGP fazına geçer [27, 29]. Kuarklar ve gluonlar tüm KGP'nin tüm hacminde serbest olarak hareket etme olanağına sahip olurlar. Bu deconfinement geçişin, nükleer yoğunluğun (ρ_0) on katından fazla olan kritik bir baryon yoğunluğunda meydana gelmesi beklenir [30]. Burada $\rho_0 = 0.125\ MeV/fm^3 = 2.2\times10^{17}\ kg/m^3$ 'dür. Örgü teorisi ile hesaplanan kritik sıcaklığın $T_C = 150-200\ MeV = (1.8-2.4)\times10^{12}\ K$ aralığında olduğu tahmin edilmektedir. Doğal deconfinement faz geçişleri, evrenin genişlemeye başladığı sürede neredeyse kuark ve anti-kuark sayılarının eşit olduğu sıfır baryon yoğunluğunda Büyük Patlamadan yaklaşık birkaç mikrosaniye sonra meydana gelmiştir. Aynı zamanda nötron yıldızlarının çekirdeğinde de baryon yoğunluğunun yüksek olduğu ve KGP'nin oluştuğu düşünülmektedir. Labaratuarda ağır iyon çarpışmalarında oluşturulan ateş topunun kısa bir zaman için KGP fazında olduğu düşünülmektedir [31]. KGP fazında kuark ve gluonların davranışı ile ilgili aşağıdaki özellikler söylenebilir:

1) KGP rölativistik bir plazmadır. Örneğin yukarı-aşağı kuarkların ve gluonların kütleleri plazma sıcaklığından çok daha küçük olduğu için bu parçacıkların termal hızları rölativistik'dir.

2) Asimtotik özgürlük özelliğinden dolayı parton etkileşimi zayıf olduğundan, KGP'nin davranışı büyük yoğunluk ve yüksek sıcaklıklarda bir ideal gaz limitine yaklaşır.

Ağır iyon çarpışmalarında bir KGP ateş topu üretmek için mümkün iki senaryo vardır. Küçük kütle merkezi enerjilerinde ($\sqrt{s} << 100\ \ A.GeV$) Lorentz büzülmüş çekirdeğinin çarpışması sonucunda çekirdeklerin birbirini durdurması beklenir ve yüksek bir baryon veya kuark yoğunluğuna ulaşıldığında sıkıştırılmış ateş topu ortaya çıkar. Ancak $\sqrt{s} \geq 100\ \ A.GeV$ gibi daha yüksek enerjilerde çekirdekleri durdurmak için yeterli zaman yoktur ve çekirdek açık şekilde birbiri içine nüfuz eder. Bu durum çarpışma sonrası çok miktarda kuark anti-kuark çiftlerinin ve gluonların üretimine yol açar. Bundan dolayı sıfır baryon yoğunluğunda (sıfır kimyasal potansiyelde) sıcak bir parton gazının oluşması beklenir.

Ultrarölativistik durumda ($\sqrt{s} \geq 100\ \ A.GeV$) ateş topunun uzay-zaman evrimi Şekil 1.1'de gösterildiği gibidir. x-ekseni ışın yönünü ve t-ekseni zamanı gösterir. $t = 0$'da çekirdeklerin maksimum üst üste binmesi vardır. Bu diyagramda nedensellikten dolayı üretilen parçacıklar yalnızca ışık konisinin içinde bulunurlar. Başlangıçta parton gazı dengede değildir. Ancak partonlar arasındaki ikinci çarpışmada denge durumuna geçerler. Kritik sıcaklığa ulaşıncaya kadar ateş topunun sıcaklığı genleşmeden dolayı azalır. Daha sonra sistem hadronize olur ve karışık bir faz durumu ortaya çıkar. Karışık fazın genleşmesi ve hadronlaşma sürecinin bitiminden sonra sistem seyrek hadron gazına dönüşmüş olur ve artık hadronlar arasındaki etkileşmeler sona erer.



Şekil 1.1: Çekirdek çarpışmalarında oluşan fazların zamanla değişimi

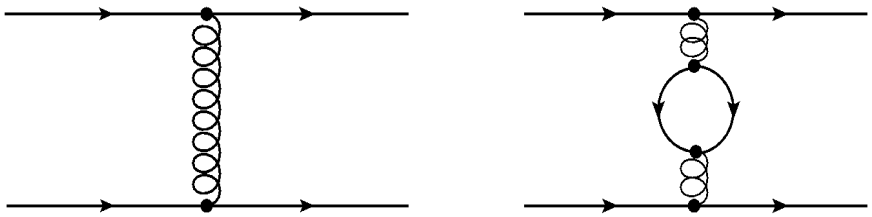
Termal bir sistem olarak KGP den konuşmak için geniş bir hacme ($\approx$ 3000 fm^3), yeterli sayıda parçacığa (parton sayısı ≈ 10000), denge öncesi yeterli süreye (denge öncesi periyot $\approx 1\ fm/c = 3\times10^{-24}\ s$) ve dengelenmiş sistemin yeterli yarı ömrüne ihtiyaç vardır (KGP'nin ömrü 5-10 fm/c) [29].

KGP'nin özelliklerini anlamak ve KGP oluşumu için sinyaller hakkında önceden tahminde bulunmak için KGP'nin tam olarak tanımlanmasına ihtiyaç vardır. Bu amaçla sonlu sıcaklıklarda ve kimyasal potansiyellerde KRD kullanmak gerekir. Bunun için iki farklı yaklaşım vardır:

1) Örgü KRD: 4-boyutlu uzay-zaman örgüsünde KRD eşitliklerini nümerik olarak çözmek için kullanılan pertürbatif olmayan bir metoddur ve bu metot faz geçişinin altındaki ve üstündeki tüm sıcaklık bölgelerine uygulanabilir. Bu yöntemle KGP'nin durum denklemleri, kritik sıcaklık gibi statik nicelikler veya faz geçişleri başarılı bir şekilde incelenir. Ancak dengede olmayan durumlar, sonlu kimyasal potansiyel ve KGP oluşumu için sinyallerin elde edilmesi gibi birçok dinamik özelliğin tanımlanması bu yöntemle mümkün değildir.

2) Termal pertürbatif KRD: $T = 250\,MeV$ gibi tipik bir sıcaklıkta kayan etkileşme sabitinin $\alpha_s = 0.3 - 0.5$ aralığında olması beklenir ($T \to \infty$ 'da $\alpha_s(T) = g^2/4\pi \to 0$ yaklaşır). Bu pertürbasyon teorisinin en azından niteliksel olarak uygulanması için yeterlidir. Diğer deyimle bu durumda α_s'e göre seriye açılım yapılabilir. α_s'in seriye açılmasını temel alan bu yöntem Termal pertürbatif KRD yöntemidir.

Şekil 1.2 kuark-kuark elastik saçılmasına uygun Feynman diyagramının seriye açılımını ifade etmektedir. Bu yolla saçılmaların tesir kesiti, parçacıkların ortalama ömrü, üretim ve bozunum oranları hesaplanabilir. Pertürbatif hesaplamaların avantajlarından biri T > 0 ve $\mu > 0$'da dinamik ve statik niteliklerin hesaplanabilmesi, diğeri ise dengede olmayan durumların hesaplanmasının mümkün olmasıdır. Pertürbatif hesaplamaların yalnız yüksek sıcaklıklarda ($T >> T_C$) güvenilir olması ve kızıl ötesi ıraksaklıklarla karşı karşıya kalınması gibi dezavantajları da vardır.



Şekil 1.2: Kuark-kuark saçılması için Feynman diyagramı

TAT ağır iyon çarpışmalarında ortaya çıkan KGP'nin anlaşılmasının yanında Süpernova plazmasında nötrinoların ve diğer parçacıkların etkileşimlerinin, nötron yıldızlarının çekirdeğindeki kuark maddesinin ve evrenin başlangıcındaki baryon asimetrisinin özelliklerinin anlaşılması bakımından büyük önem taşır.

Son yıllarda yapılan ağır iyon çarpışma deneylerinin anlaşılması bakımından mezon ve baryon parametrelerinin sıcaklığa ve yoğunluğa bağlı değişiminin incelenmesi literatürde geniş şekilde yer almaktadır [10-13]. Özellikle deneysel olarak incelenmesi bakımından hafif vektör mezonlar büyük avantaja sahiptir. Bu tez çalışmasında sonlu sıcaklıklarda ortaya çıkan yeni operatörler de göz önüne alınarak ρ-mezon için Termal KRD Toplam Kuralları yazılarak ρ-mezonun özellikleri incelenecektir. Sonlu sıcaklıkta kısa mesafelerde ortaya çıkan bu yeni operatörlerin Wilson katsayıları OPE kullanılarak hesaplanmıştır. Burada tüm dört boyutlu operatörlerin katkıları göz önüne alınmış ve dispersiyon bağıntısı kullanılarak Termal KRD Toplam Kuralları elde edilmiştir.

Burada ρ-mezon kanalında iki vektör akımın zaman sıralı çarpımının korelasyon fonksiyonu incelenmiştir. Sonlu sıcaklıklarda T çarpımın kullanılması spektral gösterimi biraz zorlaştırmasına rağmen pertürbatif hesaplamalarda avantaj sağlamaktadır. Kovaryant ayarlarda formüle edilen TAT'de hem fiziksel alanları hem de fiziksel alanlara eşlik eden ghost alanlarını göz önüne almamız gerekir. Ancak bu tezde pertürbasyon açılımındaki düşük mertebeli diyagramları incelediğimizden ghost alanları burada göz önüne alınmayacaktır.

Sonlu sıcaklıktaki toplam kurallarından vakum katkıları çıkarılarak elde edilen ifadeler nümerik olarak incelenmiştir. Toplam kurallarının hadronik kısmı yazılırken ρ-mezon kutbu ve $\pi\pi$-sürekliliğinden gelen katkıların yeterli olacağı düşünülmektedir [10]. Farklı operatörlerin termal ortalamaları kuark ve gluon yoğunlaşmaları, kuarkların ve gluonların enerji yoğunlukları cinsinden ifade edilir. Kuark ve gluon yoğunlaşmalarının sıcaklığa bağlılığı için literatürde mevcut olan Kiral pertürbasyon teori ve KRD Örgü teorileri sonuçları kullanılmıştır [32-35].

ρ-mezonun kütlesinin ve leptonik bozunum sabitinin sıcaklığa bağlılığını ifade eden Termal KRD Toplam Kuralları elde edilmiş, nümerik incelemeler sonucunda $160\,MeV$ sıcaklığa kadar parametrelerinin sıcaklığa bağlılığı elde edilmiştir.

2. TERMAL ALAN TEORİLRİNİN TEMEL İLKELERİ

2.1. Sonlu Sıcaklıkta ($T > 0$) Skaler Alan Propagatörü

Bu bölümün amacı rölativistik ortamda dengede olan parçacıkların tesir kesiti, yarı ömrü gibi niceliklerin pertürbatif olarak hesaplanmasını sağlayan TAT'nin temel ilkelerini ele almaktır. TAT; kuantum mekaniği, rölativite teorisi ve istatistiksel fizik olmak üzere üç temel alanın birleşmesiyle oluşmuştur. Bu nedenle TAT aynı zamanda rölativistik kuantum istatistiği olarak da adlandırılır.

Amacımız sonlu sıcaklıklarda $(\mu \neq 0)$ Feynman diyagramlarını ve kurallarını elde etmektir. Pertürbatif teorilerde en önemli nicelik 2-nokta Green fonksiyonu veya propagatördür. Bu nedenle ilk önce sonlu sıcaklıklarda ($T > 0$) propagatörlerin nasıl değiştiğinin incelenmesi gerekmektedir. Önce sıfır ve sonlu sıcaklıkta skaler alan teorisini ele alalım.

Kuantum Alan Teorisinde $\phi(x)$ skaler alanı için Feynman propogatörü

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(y)\} | 0 \rangle \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Fourier dönüşümü kullanılarak skaler alan

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left[a(\boldsymbol{k}) e^{-iK\cdot x} + a^{\dagger}(\boldsymbol{k}) e^{iK\cdot x} \right]\Big|_{k_0=\omega_k} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x \equiv (x_0, \mathbf{x})$; $x_0 = t$ ve $\hbar = c = k_B = 1$ şeklindedir ve Minkowski gmetriği kullanılmıştır ($x^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$). Dört boyutlu momentum $K \equiv (k_0, \boldsymbol{k})$, $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ ile gösterilir ve alanın enerjisi $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ 'dir. İki alanın zaman sıralı çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & x_0 > y_0 \\ \phi(x)\phi(y) & x_0 < y_0 \end{cases}.$$

(2.2) eşitliğindeki $a^{\dagger}(\mathbf{k})$ ve $a(\mathbf{k})$ ile verilen Fourier katsayıları, sırasıyla $\mathbf{k}$ momentumuna sahip bir bozonun yaratılması veya yok edilmesini gösteren operatörlerdir. Özellikle vakum durumunda tüm $\mathbf{k}$'lar için $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ olarak tanımlanır.

(2.1) ve (2.2) ifadeleri kullanılarak Feynman propagatörü aşağıdaki gibi yazılabilir [29]:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iK\cdot(x-y)}}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad . \tag{2.3}$$

Bu eşitlikten momentum uzayındaki propagatör ifadesi elde edilebilir. Δ_F ; $x_0 > y_0$ için y'den x'e (y de yaratılan ve x de yok olan) ve $x_0 < y_0$ için x'den y'ye serbest skaler bir parçacık için propagatör olarak tanımlanır ($x_0 > y_0$ durumunda). Kompleks k_0- düzleminde k_0 üzerinden integral alırsak

$$\Delta_F(x-y) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-iK\cdot(x-y)} \Big|_{k_0=\omega_k} \tag{2.4}$$

ifadesini buluruz.

$T > 0$ durumunda vakum beklenen değeri kuantum istatistiksel beklenen değeri ile yer değiştirir:

$$\langle A \rangle \equiv Tr(\rho A) \quad . \tag{2.5}$$

Burada A keyfi kuantum operatörü, ρ yoğunluk operatörü veya yoğunluk matrisi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} . \tag{2.6}$$

(2.6) eşitliğinde $\beta \equiv 1/T$, H ise sistemin hamiltonyenidir ($\mu \neq 0$ durumunda H yerine $H - \mu N$ yazılmaktadır). Z Bölüşüm fonksiyonu olup $Z = Tr\left(e^{-\beta H}\right)$ şeklindedir. Hamiltonyenin $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ şeklinde tanımlanan E_n özdeğer ve $|n\rangle$ öz durumlarını kullanarak termal beklenen değer

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z} Tr\left(A\exp\left(-\beta H\right)\right) = \frac{1}{Z}\sum_n \langle n \mid A \mid n\rangle \exp\left(-\beta E_n\right) \tag{2.7}$$

ile verilir. (2.7) ifadesinde tüm uyarılmış durumlar üzerinden toplam yapılmaktadır. u_μ dört boyutlu hız vektörü olmak üzere Boltzman faktörünü Lorentz invaryant şekilde yazmamız mümkündür: $\exp\left(-\beta E_n\right) = \exp\left(-\beta u_\mu P^\mu\right)$, burada $p_0 = E$, $u_\mu = \left(1,0,0,0\right)$.

(2.7) ifadesine göre skaler propagatör

$$i\Delta_F^{T>0}\left(x-y\right) = \frac{1}{Z}\sum_n \langle n \mid T\{\phi(x)\phi(y)\} \mid n\rangle \exp\left(-\beta E_n\right) \tag{2.8}$$

şeklinde yazılır ve buradan $x_0 > y_0$ için (2.2) ve (2.8) ifadeleri kullanılarak

$$i\Delta_F^{T>0}\left(x-y\right) = \frac{1}{Z}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \frac{1}{(2\omega_k')^{1/2}} \sum_n \exp\left(-\beta E_n\right)$$

$$\times \langle n \mid \left[a(\boldsymbol{k})e^{-iK\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{iK\cdot x}\right]\left[a(\boldsymbol{k}')e^{-iK'\cdot y} + a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{iK'\cdot y}\right] \mid n\rangle \tag{2.9}$$

elde edilir.

Birden fazla bozon içeren durumlar yaratma operatörleriyle vakum durumuna etki ederek elde edilirler

$$\left|n\right\rangle = \left|n_1(k_1),\ n_2(k_2).....\right\rangle = \prod_i \frac{\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\right]^{n_i(k_i)}}{\sqrt{n_i(k_i)!}}\left|0\right\rangle. \tag{2.10}$$

Burada $\left|n\right\rangle$ durumları ortanormalizasyon koşulunu sağlamaktadır.

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n\right\rangle = \sqrt{n(\boldsymbol{k}_i)+1}\ \ \left|n_1(\boldsymbol{k}_1).n_2(\boldsymbol{k}_2),.....,n_i(\boldsymbol{k}_i)+1,...\right\rangle$$

$$a(\boldsymbol{k}_i)\left|n\right\rangle = \sqrt{n(\boldsymbol{k}_i)}\ \ \left|n_1(\boldsymbol{k}_1).n_2(\boldsymbol{k}_2),....., n_i(\boldsymbol{k}_i)-1....\right\rangle \tag{2.11}$$

olduğu göz önüne alındığında skaler propagatör

$$i\Delta_F^{T>0}(x-y)=\frac{1}{Z}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}}\frac{1}{(2\omega_k')^{1/2}}\sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$\left\{\left[n(\boldsymbol{k})+1\right]\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')e^{-iK\cdot x+iK'\cdot y}+n(\boldsymbol{k})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')e^{iK\cdot x-iK'\cdot y}\right\}$$

$$=\frac{1}{Z}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\sum_n e^{-\beta E_n}\left\{\left[n(\boldsymbol{k})+1\right]e^{-iK\cdot(x-y)}+n(\boldsymbol{k})e^{iK\cdot(x-y)}\right\}\Big|_{k_0=\omega_k}. \tag{2.12}$$

olur. $E_n=\sum_k \omega_k n(\mathbf{k})$ olmak üzere

$$\frac{1}{Z}\sum_n n(\mathbf{k})e^{-\beta E_n}=\frac{1}{\exp(\beta\omega_k)-1}\equiv n_B(\omega_k) \tag{2.13}$$

Bose-Einstein dağılımını ifade etmektedir. Pauli dışarlama ilkesine göre fermiyon $n(\mathbf{k})\in\{0,1\}$ durumundadır ve Fermi-Dirac dağılımı $n_F(\omega_k)=1/\left[\exp(\beta(\omega_k-\mu))+1\right]$ olarak verilir. Yük ya da baryon sayısının korunması gibi parçacık sayısının da korunması gerekir. Buna göre ortalama parçacık sayısı kimyasal potansiyel μ dikkate alınarak sabitlenir. (2.12) ve (2.13) formülleri kullanılarak

$$i\Delta_F^{T>0}(x-y)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\omega_k)}\left\{\left[1+n_B(\omega_k)\right]e^{-iK(x-y)}+n_B(\omega_k)e^{iK(x-y)}\right\} \tag{2.14}$$

elde edilir. (2.14) ifadesinde $T=0$ için $n_B=0$ olması durumunda yine (2.4) ifadesi elde edilmiş olur.

Bu ifade sıfır sıcaklıkta olduğu gibi sonlu sıcaklık propagatörün de $x_0>y_0$ olmak üzere skaler parçacığın y'den x'e yayılmasını ifade eder. Ancak ısı banyosunda termal parçacıkların varlığından dolayı y noktasında kendiliğinden yaratmanın yanı sıra aynı zamanda x noktasında da yaratma ($\sim n_B$) ve soğurma ($\sim n_B$) meydana gelir.

2.2. Skaler Alanlar için İmajiner Zaman Formülasyonu

Sonlu sıcaklıklarda $0 \le \tau \equiv it < \beta$ aralığında imajiner zaman tanımlarsak Matsubara frekansları $k_0 = 2\pi inT$ şeklinde kesikli değerler alır ve Kuantum Alan Teorilerindeki momentum uzayında k_0 üzerinden integral yerine

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} , \tag{2.15}$$

şekline toplam ifadeleri ortaya çıkar [23]. Buna göre (2.14) eşitliğindeki propagatör

$$i\Delta_F^{T>0}(x) = iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{K^2 - m^2} e^{-iK\cdot x} \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Aynı zamanda bu eşitlik

$$i\Delta_F^{T>0}(x) = -T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2} e^{-k_0\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot x} \tag{2.17}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$f(k_0)$'ın imajiner eksen üzerinde hiçbir kutba sahip olmadığı durumda geçerli olan

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = 2\pi inT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2} \left[f(k_0) + f(-k_0) \right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk_0 \left[f(k_0) + f(-k_0) \right] n_B(k_0) \tag{2.18}$$

formülünü kullanırız. Burada $f(k_0)$

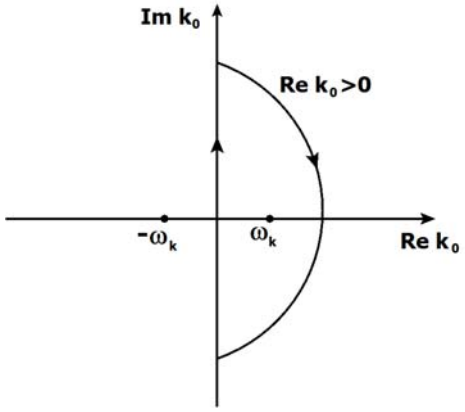
$$f(k_0) = \frac{-1}{k_0^2 - \omega_k^2} e^{-k_0\tau} \tag{2.19}$$

şeklinde seçilirse

$$-T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2} e^{-k_0\tau} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 , \tag{2.20}$$

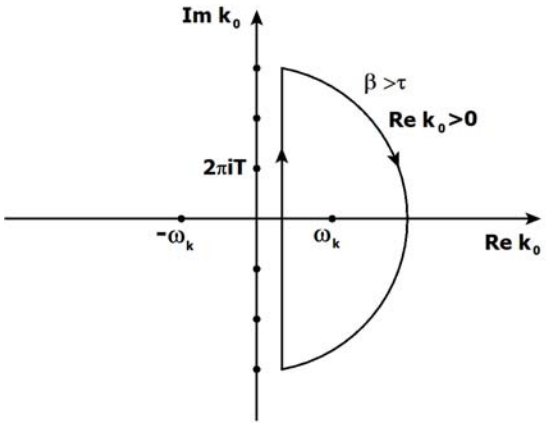
ifadesini elde ederiz. Yukarıdaki ifadede I_1 aşağıdaki gibidir:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{e^{-k_0\tau}}{{k_0}^2 - {\omega_k}^2} = \frac{1}{2}\frac{e^{-\omega_k\tau}}{2\omega_k} \quad . \tag{2.21}$$



Şekil 2.1: Kompleks düzlemde Green fonksiyonları için kontür seçimi

I_1 ifadesini hesaplamak için Şekil 2.1'de görüldüğü gibi $\mathrm{Re}\,k_0 > 0$ yarı düzleminde kapalı eğri seçilmiştir. Benzer şekilde I_2 ifadesini hesaplamak için $\mathrm{Re}\,k_0 < 0$ yarı düzleminde kapalı eğri seçilirse $I_2 = I_1$ elde ederiz.



Şekil 2.2: Kompleks düzlemde Green fonksiyonları için kontür seçimi

Ayrıca Şekil 2.2'da gösterilen eğriden yararlanarak I_3 ve I_4 ($\beta > \tau$ olduğundan) ifadeleri

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk_0 \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2}\frac{e^{-k_0\tau}}{e^{\beta k_0} - 1} = n_B(\omega_k)\frac{e^{-\omega_k\tau}}{2\omega_k} \tag{2.22}$$

$$I_4 = n_B(\omega_k)\frac{e^{+\omega_k\tau}}{2\omega_k} \tag{2.23}$$

olur. Bulduğumuz I_1, I_2, I_3 ve I_4 ifadeleri (2.17) ile verilen propagatörde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} i\Delta_F^{T>0}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}.x}\left[\frac{e^{-\omega_k\tau}}{2\omega_k} + \frac{n_B(\omega_k)}{2\omega_k}(e^{-\omega_k\tau} + e^{\omega_k\tau})\right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left\{[1+n_B(\omega_k)]e^{-i\omega_k t}e^{i\mathbf{k}.x} + n_B(\omega_k)e^{i\omega_k t}e^{i\mathbf{k}.x}\right\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

ifadesi elde edilir. (2.24) eşitliğinde $\mathbf{k}$ yerine $-\mathbf{k}$ yazılırsa tekrar (2.14) ifadesine ulaşılır.

İZF $\exp(-\beta H)$ ile verilen Boltzman faktöründe $\beta \to \tau = it$ olarak tanımlarsak $\exp(-iHt)$ zaman gelişim operatörü formu ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak termal propagatörler (daha genel olarak tüm Green fonksiyonları için) periyodik olur [22]:

$$\begin{aligned} \Delta_F^{T>0}(x-y) &= \Delta_F^{T>0}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau,0) = \frac{1}{Z}Tr\left[e^{-\beta H}T\{\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},0)\}\right] \\ &= \frac{1}{Z}Tr\left[e^{-\beta H}e^{\beta H}\phi(\mathbf{y},0)e^{-\beta H}\phi(\mathbf{x},\tau)\right] = \frac{1}{Z}Tr\left[e^{-\beta H}T\{\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},\beta)\}\right] \\ &= \Delta_F^{T>0}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau,\beta). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Burada $\tau_x = \tau, \tau_y = 0$ ve $\beta > \tau > 0$ olduğu göz önüne alınmıştır. Genel olarak n tamsayı olmak üzere

$$\Delta_F^{T>0}(\tau) = \Delta_F^{T>0}(\tau + n\beta) \tag{2.26}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada τ ile gösterilen zamanın $[0,\beta]$ aralığında sınırlandırılması Kubo-Martin-Schwinger-koşulu (KMS) olarak bilinir. Ayrıca görüldüğü gibi $T = 0$'da k_0 üzerinden alınan Fourier integrali yerine sonlu sıcaklıkta $k_0 = 2\pi inT$ Matsubara frekansları üzerinden hesaplanan Fourier serisi ortaya çıkar.

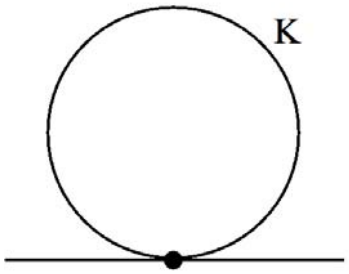
Yukarıdaki sonuçları kullanarak ϕ^4-teorisi için İZF'da Feynman kurallarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz [29]:

1) $k_0 = 2\pi inT$ olmak üzere propagatör $i\Delta_F^{T>0}(K) = i/(K^2 - m^2)$ ile verilir.

2) İlmek integrallerinde $\int d^4K/(2\pi)^4 \to iT\sum_{k_0}\int d^3k/(2\pi)^3$ değişimini yapmak gerekir.

3) Köşe fonksiyonu vakum durumunda olduğu gibi $-4!ig^2$ olur.

4) Simetri faktörleri vakum durumu ile aynıdır. Örneğin aşağıda gösterilen Şekil-2.3. için simetri faktörü $1/2$ dir.



Şekil 2.3: ϕ^4-teorisinde tek ilmekli diyagram

ϕ^4-teorisinde bir ilmekli diyagramlara en basit örnek olarak Şekil 2.3'de gösterilen diyagramı ele alabiliriz. Yukarıdaki Feynman kurallarına göre öz enerji

$$\Pi = \frac{i}{2}(-i4!g^2)iT\sum_{k_0}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}i\frac{1}{K^2-m^2}$$

$$= 12g^2T\frac{1}{(2\pi T)^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\Omega^2} \tag{2.27}$$

olarak yazılır. Burada $\Omega \equiv \omega_k/(2\pi T)$ şeklindedir. (2.27) formülünde

$$\coth(\pi\Omega) = \frac{1}{\pi\Omega} + \frac{2\Omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\Omega^2} \tag{2.28}$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\Omega^2}=\frac{2\pi^2 T}{\omega_k}\left[1+2n_B(\omega_k)\right] \tag{2.29}$$

ifadesi elde edilir. Bu sonuç (2.27) de yerine yazıldığında bir ilmekli yaklaşımda öz enerji

$$\Pi = 6g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_k}\left[1+2n_B(\omega_k)\right] \tag{2.30}$$

şekline dönüşür. Büyük momentumlar için dağılım fonksiyonları eksponansiyel olarak azaldığından yalnız vakum kısmı morötesi ıraksaklıkların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Diğer deyimle $T=0$ ile aynı renormalizasyonu kullanmamız yeterlidir. $T=0$ 'da boyutsal regülarizasyon kullanıldığında da Şekil 2.3'in katkısı sıfır olur ve

$$\Pi = 12g^2\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}dk\frac{k^2}{\omega_k}n_B(\omega_k) \tag{2.31}$$

ifadesi elde edilir. Bu integral için analitik ifade yalnızca $m=0$ durumunda mümkündür ve bu durumda

$$\Pi = \frac{6}{\pi^2}g^2T^2\int_0^{\infty}dx\frac{x}{e^x-1} \tag{2.32}$$

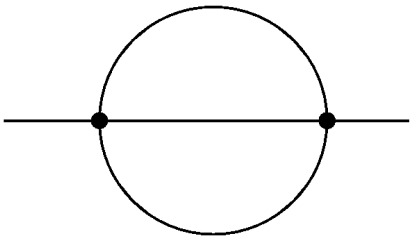
şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi

$$\int_0^{\infty}dx\frac{x^{n-1}}{e^x-1}=(n-1)!\zeta(n) \quad , \quad \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6} \tag{2.33}$$

şeklindedir. Burada $\zeta(x)$ Riemann fonksiyonudur. (2.33) ifadesi kullanılarak

$$\Pi = g^2T^2 \tag{2.34}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 2.4: ϕ^4 -teorisinde iki ilmekli diyagram

Şekil 2.4'deki gibi üç propagatör içeren diyagramların hesaplanmasında k_0 üzerinden toplam alınırken birtakım zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu hesaplamanın pratik çözümü yalnızca zamana göre Fourier dönüşümünü uygulayan Saclay metodudur. Zamana göre Fourier dönüşümü yaparsak

$$\Delta(\tau,\omega_k) = -T\sum_{k_0} e^{-k_0\tau}\Delta(K) \tag{2.35}$$

elde edilir. Burada $\Delta \equiv \Delta_F^{T>0}$ olmak üzere Fourier katsayısı

$$\Delta(K) = -\int_0^\beta d\tau\, e^{k_0\tau}\Delta(\tau,\omega_k) \tag{2.36}$$

olarak verilir.

(2.17) ifadesinden yola çıkarak (2.36) eşitliği

$$\Delta(\tau,\omega_k) = \frac{1}{2\omega_k}\left\{\left[1+n_B(\omega_k)\right]e^{-\omega_k\tau}\right\} + n_B(\omega_k)e^{\omega_k\tau} \tag{2.37}$$

şeklinde yazılabilir.

Üzerinden toplam alınan k_0 Matsubara frekansı (2.36) ifadesindeki propagatörde yalnızca eksponansiyelde bulunur. Standart şekilde toplam alındıktan sonra Şekil 2.3 ile ifade edilen Feynman diyagramının sonucu

$$\Pi = 12g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_0^\beta d\tau\,\Delta(\tau,\omega_k)T\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{k_0\tau} \tag{2.38}$$

olarak yazılabilir. Burada k_0 üzerinden toplam $\delta-$ fonksiyonuna dönüşür:

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{k_0(\tau-\tau')} = T\sum_{n} e^{2\pi i n T(\tau-\tau')} = \delta(\tau-\tau'). \tag{2.39}$$

Görüldüğü gibi iki veya daha fazla propagatörün olduğu durumda Saclay metodu çok kullanışlı olup hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır. Bu metodu Şekil 2.3'deki diyagrama uygularsak önceden bulduğumuz (2.30) ifadesi ile özdeş bir sonuç elde edilir:

$$\Pi = 12g^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Delta(0,\omega_k) = 6g^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_k}\left[1+2n_B(\omega_k)\right]. \tag{2.40}$$

2.3. Skaler Alanlar için Reel Zaman Formülasyonu

Önceki bölümlerde statik sistemler için uygulanan İZF ele alınmıştır. Bu formülasyon denge durumundaki sistemler için çok kullanışlı olup statik parametrelerin hesaplamalarında büyük avantaj sağlamaktadır. Ancak dengede olmayan bir sistem İZF ile ifade edilemez. Örneğin evrenin gelişimi, KRD de kiral simetrinin bozulması ve bir ayar teorisindeki Ward özdeşliği gibi dinamik özelliklerin incelenmesinde sorunlar ortaya çıkar. Bu özelliklerin ele alınmasında zaman değişkeni önemli rol oynadığı için bu tür problemler RZF ile ele alınır. Doğal olarak RZF dinamik soruları cevapladığı için İZF'den çok daha karmaşıktır. Fakat RZF daha çok sayıda fiziksel özelliğin incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Bir önceki bölümde tanımlanan (2.14) ifadesine benzer şekilde propagatör

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left\{\left[1+n_B(\omega_k)\right]e^{-iK(x-y)} + n_B(\omega_k)e^{iK(x-y)}\right\}\Big|_{k_0=\omega_k} \tag{2.41}$$

ile verilir. Burada Matsubara frekansını tanımlamak yerine alternatif bir ifade olarak 4-boyutlu integral yazılır:

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{K^2-m^2+i\varepsilon} + 2\pi\, n_B(|k_0|)\delta(K^2-m^2)\right]e^{-iK(x-y)}. \tag{2.42}$$

İlk terimdeki kompleks k_0 üzerinden integral $T=0$ 'daki (2.4) ifadesini verir, diğer deyimle $n_B=0$ olduğu durumda (2.4) ifadesi elde edilir. Ayrıca ikinci terime dikkatle bakıldığında aşağıdaki ifade (2.42) ve (2.14) eşitliklerine karşılık gelir:

$$\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} 2\pi\, n_B(|k_0|)\delta(K^2-m^2)e^{-iK(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dk_0 n_B(|k_0|) \frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k)\right]e^{-ik_0(x_0-y_0)}e^{ik\cdot(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_B(\omega_k)}{2\omega_k}\left[e^{-i\omega_k(x_0-y_0)}+e^{i\omega_k(x_0-y_0)}\right]e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \tag{2.43}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}\left[n_B(\omega_k)e^{-iK(x-y)}+n_B(\omega_k)e^{iK(x-y)}\right]\Big|_{k_0=\omega_k} .$$

Bu gösterim aşağıda verilen avantajlara sahiptir [22]:

1) Matsubara toplamı yoktur, fakat $T=0$ 'daki gibi k_0 üzerinden bir integral vardır.

2) Sonlu sıcaklıkla sınırlandırılmış olan, dengede olmayan durumlara genelleştirilemeyen bir imajiner zamana ihtiyacımız yoktur ve RZF dengede olmayan alan teorisi için bir başlangıç noktası olarak kullanılabilir.

3) Dağılım fonksiyonları başlangıçta görünür. Böylece $T=0$ ve $T>0$ katkıları kolaylıkla ayırt edilebilir.

RZF'de skaler propagatörün momentum uzayındaki ifadesi

$$\frac{i}{K^2-m^2+i\varepsilon}+2\pi\, n_B(|k_0|)\delta(K^2-m^2) \tag{2.44}$$

olur. $T=0$ 'daki diğer kurallar ise aynen geçerli kalmaktadır. Benzer şekilde RZF'de Fermiyon propagatörü

$$S(P)=(\not{P}+M)\left[\frac{i}{P^2-M^2+i\varepsilon}-2\pi\, n_F(|p_0|)\delta(P^2-M^2)\right]. \tag{2.45}$$

şeklinde verilir. Örnek olarak yine ϕ^4-teorisinde Şekil 2.3 ile ifade edilen Feynman diyagramını ele alalım. RZF'de bir ilmekli yaklaşımda skaler alan öz enerjisi [36]

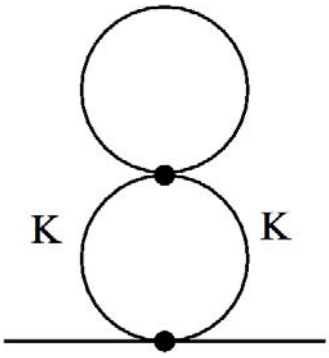
$$\Pi = \frac{i}{2}\left(-i4!g^2\right)\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} i\Delta(K)$$

$$= 12g^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{K^2 - m^2 + i\varepsilon} + 2\pi\, n_B\left(|k_0|\right)\delta\left(K^2 - m^2\right)\right] \tag{2.46}$$

$$= 12g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dk_0 n_B\left(|k_0|\right)\frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)\right]$$

$$= 12g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n_B(\omega_k)}{\omega_k}$$

olarak verilir. Burada renormalizasyon ile ortadan kaldırılan vakum katkısı yazılmamıştır. Bu sonuç İZF kullanılarak bulunan (2.30) ifadesi ile çakışmaktadır. Fakat yukarıda ifade edilen RZF Şekil 2.5'deki gibi iki veya daha fazla propagatör içeren diyagramlarda $\delta -$ fonksiyonundan gelen ıraksamalardan dolayı ciddi sorunlar içermektedir.



Şekil 2.5: ϕ^4-teorisinde iki ilmekli diyagram

Bu diyagramda alttaki ilmek $\int d^4K\Delta^2(K) \sim \int d^4K\left[\delta\left(K^2 - m^2\right)\right]^2 \sim \delta(0) = \infty$ ile orantılı olup ıraksaklıkların ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Bu problemin "serbestlik derecelerini ikiye katlama" olarak adlandırılan bir çözümü vardır. KMS koşuluna göre alan fonksiyonlarındaki zaman $t = 0$ ile $t = -i\beta$ aralığında değer alır. Bu kontur aşağıdaki şekilde deforme edilebilir: önce reel eksen

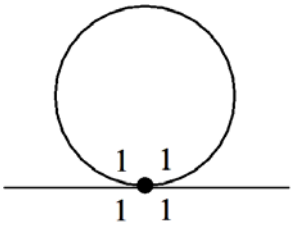
üzerinde $t=0$ 'dan $t=\infty$ 'a gidilir ve daha sonra reel eksen altında $t=-i\beta$ ya geri dönülür. Bu deformasyon biri reel eksenin altında, diğeri ise reel eksenin üzerinde olan iki çeşit alana karşılık gelir. İki alanı içeren propagatör 2×2 şeklinde matris ile verilir [29]:

$$\Delta(K)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{K^2-m^2-i\varepsilon} \end{pmatrix}-2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} n_B(k_0) & \theta(-k_0)+n_B(k_0) \\ \theta(k_0)+n_B(k_0) & n_B(k_0) \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Burada $n_B(k_0)\equiv n_B(|k_0|)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Bu durumda Feynman propagatörü $i\Delta_{ij}(K)$ ile ($i,j\in\{1,2\}$ olmak üzere), köşe ise $i(-1)^j g^2 4!$ ile ifade edilir.



Şekil 2.6: Reel zaman formülasyonunda tek ilmekli diyagram

Skaler alanların öz enerjisini bir ilmekli yaklaşımda ifade eden Şekil 2.6'daki diyagram matrislerle verilir ve Π_{11} bileşeni

$$\Pi_{11}=\frac{i}{2}i(-1)g^2 4!\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}2\pi\, n_B(k_0)\delta\left(K^2-m^2\right) \tag{2.48}$$

olur. Köşelerin tüm bacakları aynı indekse sahip olmak zorunda olduğu için Π_{12}, Π_{21} bileşenleri sıfırdır: $\Pi_{12}=\Pi_{21}=0$. İkinci tür alan içeren köşelere bir eksi işareti geldiği için $\Pi_{22}=-\Pi_{11}$ olmaktadır.

Propagatörün bileşenleri birbirinden bağımsız değildir:

$$\Delta_{11}-\Delta_{12}-\Delta_{21}+\Delta_{22}$$

$$=\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon}+2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)n_B(k_0)+2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)\left[\theta(-k_0)+n_B(k_0)\right]$$

$$+2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)\left[\theta(k_0)+n_B(k_0)\right]-\frac{1}{K^2-m^2-i\varepsilon}-2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)n_B(k_0) \qquad (2.49)$$

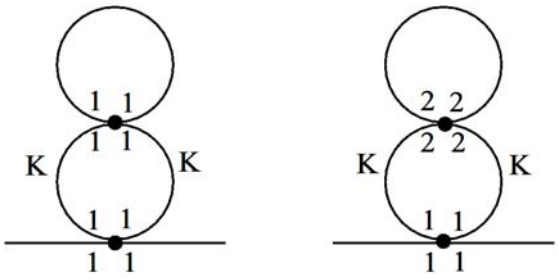
$$=2i\,\mathrm{Im}\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon}+2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)=0\,.$$

Burada

$$\delta\left(K^2-m^2\right)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon} \qquad (2.50)$$

bağıntısı göz önüne alınmıştır.

İZF'den farklı olarak $i\varepsilon$ faktörü RTF'de önemlidir.



Şekil 2.7: Reel zaman formülasyonunda iki ilmekli diyagram

Şekil 2.7'den görüldüğü gibi Π_{11}'e iki katkı geldiği için 2-ilmekli diyagramların incelenmesi daha zordur. Alttaki ilmek için integral $\Delta_{11}(K)\Delta_{11}(K)-\Delta_{12}(K)\Delta_{21}(K)$ ile ifade edilir ve bu ifadenin açık şekli aşağıda verilmiştir:

$$\left[\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon}-2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)n_B(k_0)\right]^2-(-2\pi i)\delta\left(K^2-m^2\right)\left[\theta(-k_0)+n_B(k_0)\right]$$

$$\times(-2\pi i)\delta\left(K^2-m^2\right)\left[\theta(k_0)+n_B(k_0)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon}\right)^2-\left(\frac{1}{K^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{1}{K^2-m^2-i\varepsilon}\right)2\pi i\delta\left(K^2-m^2\right)n_B(k_0) \qquad (2.51)$$

$$= \Delta_0^2(K) + n_B(k_0)\left[\Delta_0^2(K) - \Delta_0^{*2}(K)\right].$$

Burada $\Delta_0 = 1/\left(K^2 - m^2 + i\varepsilon\right)$ şeklindedir. Ayrıca δ – fonksiyonlarının çarpımından dolayı ıraksaklıklar oluşmakta, fakat Şekil 2.7'deki farklı diyagramlardan gelen ıraksaklıklar birbirini ortadan kaldırmaktadır. Benzer durumlar daha yüksek mertebeli diyagramlar için de vardır.

RZF'nin kullanışlı gösterimlerinden biri Keldysh formülasyonudur. Bu formülasyonda propagatörün yeni bileşenleri RZF'deki Green fonksiyonlarının bileşenlerinin lineer konbinasyonu olup aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

Retarded (gecikmeli) propagatör : $\Delta_R \equiv \Delta_{11} - \Delta_{12}$,

Advanced (ilerlemiş) propagatör : $\Delta_A \equiv \Delta_{11} - \Delta_{21}$, (2.52)

Simetrik propagatör : $\Delta_S \equiv \Delta_{11} + \Delta_{22}$.

(2.49) ifadesinden propagatörün 3 farklı elemanı olduğu görülmektedir.

Propagatörün bu yeni elemanlarından yararlanarak

$$\Delta_{11} = \frac{1}{2}\left(\Delta_S + \Delta_A + \Delta_R\right)$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{2}\left(\Delta_S + \Delta_A - \Delta_R\right)$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{2}\left(\Delta_S - \Delta_A + \Delta_R\right) \qquad (2.53)$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{2}\left(\Delta_S - \Delta_A - \Delta_R\right)$$

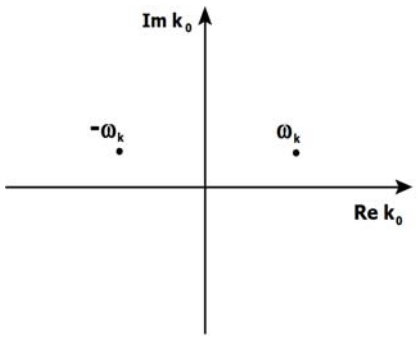
bağıntıları yazılabilir. Yukarıdakiler göz önüne alınarak Δ_R, Δ_A ve Δ_S propagatörlerinin açık ifadeleri

$$\Delta_R = \frac{1}{K^2 - m^2 + i\,\mathrm{sgn}(k_0)\varepsilon} \qquad (2.54)$$

$$\Delta_A = \frac{1}{K^2 - m^2 - i\,\mathrm{sgn}(k_0)\varepsilon} \tag{2.55}$$

$$\Delta_S = -2\pi i\,\delta\left(K^2 - m^2\right)\left[1 + 2n_B(k_0)\right] \quad . \tag{2.56}$$

ile verilir. Şekil 2.8'da gösterildiği gibi retarded propagatörünün reel eksen üzerinde iki kutbu vardır. Benzer şekilde Δ_A propagatörü de iki kutba sahiptir. Simetrik propagatörün bir dağılım fonksiyonu içerdiği görülmektedir. Bu da diyagramların termal katkılarının daha kolay hesaplanmasını sağlar.



Şekil 2.8: Reel zaman formülasyonunda kompleks düzlemde Green fonksiyonlarının kutupları

Öz enerjiler $\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{21} + \Pi_{22} = 0$ ile verilen racılığıyla yalın ve tam (Δ, Δ^*) ilişkili olmaktadır $(\Pi = \Delta^{-1} - \Delta^{*-1})$.

Dyson-Schwinger denklemini kullanarak propagatörlere benzer şekilde gecikmeli, ilerlemeli, simetrik öz enerjiler

$$\Pi_R = \Pi_{11} + \Pi_{12}$$

$$\Pi_A = \Pi_{11} + \Pi_{21} \tag{2.57}$$

$$\Pi_S = \Pi_{11} + \Pi_{22}$$

olarak tanımlanırlar. Burada $\Pi_{R,A}$ daki farklı işaretler $\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{21} + \Pi_{22} = 0$ eşitliğinin bir sonucudur. Sonuç olarak bulunan propagatör ifadeleri yerine yazıldığında Keldysh gösteriminde

$$\Pi_R = \Pi_{11} = \frac{1}{2} g^2 4! \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} i\Delta_{11}(K)$$

$$= 12\, i\, g^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left(\Delta_S + \Delta_A + \Delta_R \right) \tag{2.58}$$

$$= 12 g^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} 2\pi n_B(k_0) \delta\left(K^2 - m^2\right)$$

olarak elde edilir. $T = 0$ 'daki ıraksaklıklar renormalizasyon ile ortadan kalkar ve (2.58) ifadesi görüldüğü gibi diğer formülasyonlardan elde elden sonuçlarla çakışmaktadır.

3. KUANTUM RENK DİNAMİĞİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Kuantum Renk Dinamiği ve Ayar Dönüşümleri

Güçlü etkileşmenin teorisi olan KRD, hadron içinde bağlı bulunan kuarkların vektör ayar alanları (gluonlar) ile etkileşmesini açıklayan bir kuantum alan teorisidir. KRD, ilk olarak Yang ve Mills tarafından ileri sürülen abelyan olmayan ayar grubunu temel alır ve burada temel düşünce yerel ayar invaryantlığı ilkesidir. Kuarkların ve gluonların renk yüküne sahip olmasından dolayı KRD'nin simetri grubu $SU(3)_C$'dir. Hadronlar kuarkların, anti-kuarkların ve gluonların kombinasyonları olup, fakat renk yüküne sahip değildirler.

KRD'nin Lagrangian yoğunluğu, kuark ve gluon alanlarını temel serbestlik derecesi olarak baz almaktadır. KRD Lagrangian yoğunluğu [27]

$$L_{KRD} = \bar{q}^{\alpha}\left(i\not{D}_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta}\right)q^{\beta} - \frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F_{a}^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

ile ifade edilir. Burada m kuark kütlesi, q^{β}, $\bar{q}^{\alpha}$ sırasıyla kuark ve anti-kuark alanlarını göstermektedir ve $\alpha,\beta = \overline{1,3}$, $a = \overline{1,8}$ değerlerini alan renk indisleridir. Ayrıca γ^{μ}'ler 4×4 şeklinde Dirac matrisleri olmak üzere $\not{D} \equiv \gamma^{\mu}D_{\mu}$ şeklinde tanımlanır ve kovaryant türev D_{μ},

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + igt^{a}A^{a}_{\mu} \tag{3.2}$$

ile verilir. Burada A^{a}_{μ} gluon alanını, g ise KRD'de boyutsuz etkileşim sabitini göstermektedir. t^{a}'lar 3×3 şeklinde izi sıfır olan hermitsel matrisler olup Lie cebrinde $SU(3)_C$'nin temel temsilini belirtmektedir ve f^{abc} yapı sabitleri olmak üzere aşağıdaki bağıntıları sağlamaktadır.

$$\left[t^{a},t^{b}\right] = if_{abc}t^{c} \quad , \quad tr\left(t^{a}t^{b}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{3.3}$$

Kovaryant türev aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igT^a A_\mu^a . \tag{3.4}$$

T^a, $SU(3)_C$ Lie cebrinin birleşik temsili olmak üzere $\left(T^a\right)_{bc} = -if_{abc}$ ile verilen 8×8 hermitsel, izi olmayan matrislerdir.

Gluonun alan şiddet tensörü $F_{\mu\nu}^a$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{3.5}$$

ile ifade edilir. $A_\mu \equiv t^a A_\mu^a$ ve $F_{\mu\nu} \equiv t^a F_{\mu\nu}^a$ olarak tanımlanırsa $F_{\mu\nu}^a$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig\left[A_\mu, A_\nu\right] = -\frac{i}{g}\left[D_\mu, D_\nu\right] \tag{3.6}$$

şeklinde de yazılabilir.

Renk elektrik ve manyetik alanlar, elektromanyetik alan teorisinde olduğu gibi $F_{\mu\nu}$ gluon alanı şiddet tensörü cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E_i = F^{i0} \quad ; \quad B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F^{jk} . \tag{3.7}$$

Burada ε_{ijk} antisimetrik birim tensördür ve $\varepsilon_{123} = 1$ şeklinde tanımlanır. KRD Lagrangian yoğunluğu kullanılarak kuark alanları için hareket denklemi

$$\left(i\not{D} - m\right)q = 0 \tag{3.8}$$

$$\left[D_\nu, F^{\nu\mu}\right] = gJ^\mu \quad \text{veya} \quad D_\nu^{ab} F_b^{\nu\mu} = gJ_a^\mu \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Burada $J^\mu = t^a J_a^\mu$ ve $J_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu t^a q$ şeklindedir. Bunlar sırasıyla kuarklar ve gluonlar için Dirac ve Yang-Mills denklemleridir.

Görüldüğü gibi (3.1) Lagrangian yoğunluğu

$$q(x) \to V(x)q(x) \quad , \quad gA_\mu(x) \to V(x)\left(gA_\mu(x) - i\partial_\mu\right)V^\dagger(x) \tag{3.10}$$

ile verilen $SU(3)_C$ ayar dönüşümleri altında invaryanttır. Burada $V(x) \equiv \exp\left(-i\theta^a(x)t^a\right)$'dır. Gösterilebilir ki $F_{\mu\nu}$ ve D_μ ayar dönüşümleri altında

$$F_{\mu\nu}(x) \to V(x)F_{\mu\nu}(x)V^\dagger(x) \quad , \quad D_\mu(x) \to V(x)D_\mu(x)V^\dagger(x) \tag{3.11}$$

şeklinde değişmektedirler. Sonsuz küçük ayar dönüşümleri altında

$$\delta q(x) = -i\theta(x)q(x) \quad ; \quad \delta\left(gA_\mu(x)\right) = \left[D_\mu, \theta(x)\right] \tag{3.12}$$

olur. Burada $\theta(x) = t^a\theta^a(x)$ şeklindedir. Benzer şekilde $\delta\left(gA_\mu^a(x)\right) = D_\mu^{ab}\theta^b(x)$ olarak yazılabilir.

KRD Lagrangian yoğunluğu $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_a^{\mu\nu}F_a^{\lambda\rho} \propto E_i^a B_i^a$ gibi ayar invaryant bir terim içerebilir. Bu terim zaman tersinirliği invayantlığını veya CP (yük eşleniği ve parite) invaryantlığını bozar.

$A_\mu^a A_a^\mu$ gibi terimler ayar invaryantlığını bozduğundan dolayı Lagrangian yoğunluğunda yazılamaz. Ayrıca bu terimler gluonların kütleye sahip olduğunu ifade etmektedir. Fakat yapılan teorik ve deneyel incelemeler gluonların kütlesiz parçacıklar olduğunu göstermektedir. Lagrangian yoğunluğunda $\overline{q}^\alpha q^\beta$ gibi terimler ayar invaryantlığını bozmadığı için yazılabilir ve bu kuarkların kütleli parçacıklar olduğunu gösterir ve farklı çeşnideki kuarklar (u, d, s, c, b, t) farklı kütlelere sahiptirler.

3.2. Kuantize Edilmiş KRD

(3.1) eşitliği ile verilen Lagrangian yoğunluğu düşük enerjilerde KRD'nin davranışı hakkında çok fazla bilgi vermez. KRD'nin bu özelliği günlük yaşantımızda geniş uygulamaları olan Maxwell denklemlerini veren KED'in özelliklerine terstir. KRD ve KED arasındaki temel farklılık, KRD'de düşük enerjilerde önemli olan kuantum etkilerinin KED'de daha az öneme sahip olmasıdır. Bu farkı açıkça görebilmek için KRD'nin kuantize olmasını ve vakum polarizasyonlarını anlamak gerekir.

Ayar teorilerini kuantize etmek için pek çok yöntem kullanılmaktadır ve en kullanışlı yöntemlerden biri Feynman'ın fonksiyonel integralini temel alan kuantumlanma

yöntemidir. Diğer önemli kuantumlanma metodu ise kovaryant kanonik operatör formülasyonuna dayanmaktadır.

Fonksiyonel integral metodunda bir dış kaynak altında bölüşüm fonksiyonu [37]

$$Z[J] = \langle 0+|0-\rangle_J = \int [dA\, d\bar{q}\, dq] \exp\left(i \int d^4x \, (L_{cl} + J\phi)\right) \tag{3.13}$$

ile verilir. $Z[J]$, $t \to -\infty$ vakum durumundan $t \to \infty$'a geçiş genliğini ifade eder. Fonksiyonel integral $A_\mu^a(x)$ ayar alanları $q^\alpha(x)$ ve $\bar{q}^\alpha(x)$ Grasmann alanları üzerinden alınır. Dış kaynak $J\phi = \bar{\eta} q + \bar{q}\,\eta + j_a^\mu A_\mu^a$ olarak tanımlanır. Burada η ve $\bar{\eta}$ iki bağımsız Grasmann dış alanlarıdır ve j_a^μ ise gluon alanları için dış alandır.

Hem $[dA\, d\bar{q}\, dq]$ ifadesi hem de eylem $S = \int d^4x L_{KRD}$ ayar invaryant olduğu için $Z[0]$'ın da ayar invaryant olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca birbirinden ayar dönüşümleri ile elde edilen alan fonksiyonlarının varlığı açıkça görülmektedir. Aynı zamanda tüm bu alan fonksiyonlarının üzerinden integralin hesaplanması $Z[0]$'da ıraksaklığa neden olur. Sonsuz sayıdaki bu fonksiyonlardan yalnız birinin (3.13)'de göz önüne alınması gerekir ve bu nedenle ayarı sabitlememiz gerekmektedir. Ayar sabitlemesini yapabilmek için

$$1 = \int [dV] \Delta_{FP}[A] \delta\left(G\left(A^V\right)\right) \tag{3.14}$$

eşitliği kullanılır. Burada $A^V = VAV^\dagger$, $d(VV') = d(V'V) = dV$ şeklindedir ve $G(A)$ ayar sabitleme fonksiyonunu, $\Delta_{FP}[A]$ Faddeev-Popov (FP) Jacobianını göstermektedir.

(3.14) ifadesi (3.13) de yerine yazılır ve ters bir ayar dönüşümü yapılırsa

$$Z[0] = \left(\int [dV]\right) \times \int [dA\, d\bar{q}\, dq] \Delta_{FP}[A] \delta(G(A)) \exp\left(i \int d^4x L_{cl}\right) \tag{3.15}$$

elde edilir. Bu ifadede verilen $\Delta_{FP}[A]$

$$\Delta_{FP}[A] = \det \frac{\delta G\left(A^V\right)}{\delta V} \Big|_{V=1} \tag{3.16}$$

şeklindedir. Burada determinant hem renk hem de uzay-zaman indisleri üzerinden alınmaktadır.

(3.15) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk faktör ayar ve uzay-zaman hacminin çarpımıdır. $Z[J]$ de katsayı şeklinde ortaya çıkan bu faktör alan çarpımlarının vakum beklenen değerinin hesaplanmasında sadeleşmektedir.

Genel olarak axial ayar ($G = n^\mu A_\mu ; n^2 < 0$), ışık koni ayarı ($G = n^\mu A_\mu$, $n^2 = 0$), Fock-Schwinger ayarı ($G = x^\mu A_\mu$), Coulomb ayarı ($G = \partial_i A_i$), temporal ayar ($G = A_0$) ve $f(x)$ uzay-zamanın keyfi bir fonksiyonu olmak üzere

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu - f(x) \tag{3.17}$$

kovaryant ayar kullanılmaktadır. (3.17) kovaryant ayarı kullanıldığında $f(x)$'i ortadan kaldırmak için $Z[0]$ bölüşüm fonksiyonu $\int [df] \exp(-if^2 / 2\xi) = 1$ özdeşliği ile çarpılır. Burada ξ ayar parametresi olarak adlandırılır. $c^a(x)$ ve $\bar{c}^a(x)$ sırasıyla ghost ve anti-ghost olarak adlandırılan iki bağımsız Grassmann alanı olmak üzere FP determinantı üstel hale gelir. Bu durumda $Z[J]$ ve Lagrangian

$$Z[J] = \exp(iW[J]) = \int [dA\, d\bar{q}\, dq][d\bar{c}\, dc] \exp\left(i \int d^4x (L + J\phi)\right) \tag{3.18}$$

$$L = \bar{q}^\alpha \left(i\not{D}_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta}\right) q^\beta - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a - \bar{c}_a \partial^\mu D^{ab}_\mu c_b - \frac{1}{2\xi} \left(\partial^\mu A^a_\mu\right)^2 \tag{3.19}$$

olarak elde edilir.

Kuantize edilmiş Lagrangian yoğunluğu ayar dönüşümleri altında invaryant olmamasına rağmen Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST), δ_{BRST}, dönüşümü altında invaryant kalmaktadır. Bu dönüşümler:

$$\delta_{BRST} q = -ig\lambda c q \qquad \delta_{BRST} A_\mu = \lambda [D_\mu, c] \tag{3.20}$$

$$\delta_{BRST} \bar{c} = -\lambda\, \xi\, \partial^\mu A_\mu \qquad \delta_{BRST} c = -\frac{i}{2} g\lambda [c, c] \tag{3.21}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $c = c^a t^a$ ve λ uzay-zamandan bağımsız Grassmann sayısıdır. (3.12) eşitliğinde θ'nın yerine $g\lambda c$ yazılarak (3.20) ile ifade edilen dönüşümler elde edilir. BRST dönüşümü $\delta^2_{BRST} = 0$ özelliğine sahiptir. BRST simetrisi göz önüne alınarak KRD'nin kanonik kuantalanması yapılabilir.

$Z[J]$ ve $W[J]$'nin seriye açılımı ile elde edilen standart pertürbasyon teorisi (3.19) eşitliğinde Lagrangian yoğunluğunu

$$L = L_0 + L_{etk} \tag{3.22}$$

şeklinde serbest ve etkileşme kısımlarının toplamı şeklinde yazarak geliştirilebilir. Burada L_0, Lagrangianda $g = 0$ alınarak elde edilmiştir ve serbest alanları ifade etmektedir.

Pertürbasyon teorisinde hesaplanan kuantum düzeltmeleri (ilmekli diyagramlar), alan teorilerinde yüksek momentumlu durumlardan kaynaklanan morötesi ıraksaklıklar içerir. KRD gibi renormalize edilebilir alan teorilerinde, bu ıraksamalar Lagrangianın yalın parametreleri ile birleştirilebilir ve KRD parametrelerinin yeniden tanımlanmasıyla ortadan kalkar.

Iraksamaların renormalize edildiği enerji değerleri renormalizasyon noktası olarak adlandırılır ve bu değerler keyfi bir parametre olan κ ile gösterilir. Renormalize edilen g etkileşme sabiti, m kuark kütlesi, ξ ayar parametresi κ'ya bağlı olduğu halde protonun kütlesi, pionun bozunum sabiti gibi gözlenebilir nicelikler κ'ya bağlı değildir.

Sonuç olarak KRD'de renormalizasyon, parametrelerin yeniden tanımlanması ile (3.18) bölüşüm fonksiyonunun sonlu hale getirilmesi, yani bölüşüm fonksiyonunun

$$Z[J_B; g_B, m_B, \xi_B] = Z[J(\kappa); g(\kappa), m(\kappa), \xi(\kappa); \kappa] \tag{3.23}$$

şeklinde yazılması ile özetlenebilir [37].

Burada B indisi yalın parametreleri, yani renormalizasyon yapılmadan önceki parametreleri gösterir. Aynı zamanda J_B dış alanı da bir yalın parametredir. (3.23) eşitliğinin sol tarafı κ'dan bağımsız olduğundan Z için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} Z = 0 . \tag{3.24}$$

Bu eşitlikten J'ye göre türev alınarak Green fonksiyonları için renormalizasyon grup denklemleri kolayca elde edilebilir.

3.3. Kayan Etkileşim Sabiti

Kayan etkileşme sabiti g'nin κ'ya bağlılığı

$$\kappa \frac{\partial g}{\partial \kappa} = \beta \tag{3.27}$$

eşitliği ile verilir. Eşitliğin sağ tarafı β fonksiyonu olarak adlandırılır ve g'nin yeteri kadar küçük olduğu durumda pertürbasyon teorisi ile hesaplanabilir. Boyutsal regülarizasyona sahip minimum çıkarma yönteminde ($\overline{MS}$) β fonksiyonu yalnızca g'ye bağlıdır ve aşağıda verilen seri açılımına sahiptir:

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + ... \tag{3.28}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \; ; \; \beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4}\left(102 - \frac{38}{3}N_f\right). \tag{3.29}$$

Burada β_0 ve β_1 katsayıları çıkarma yönteminden bağımsızdır ve $N_f \leq 8$ durumunda her ikisi de pozitif değerler alır. (3.27) eşitliğinde β'nın negatif değerler alması, κ'nın artması durumunda $g(\kappa)$'nın azaldığını gösterir. Bu durum morötesi asimtotik özgürlük olarak adlandırılır. KED'de β-fonksiyonu $\beta(e) = e^3/(12\pi^2) + e^5/(64\pi^4) + ...$ ile verilir ve burada κ arttıkça $e(\kappa)$'nın da arttığı görülmektedir. 4-boyutlu uzay-zamanda renormalize edilebilen Kuantum Alan Teorileri arasında yalnızca abelyan olmayan ayar teorileri asimtotik özgürlük özelliğine sahiptir.

β_0 ve β_1 katsayılarının (3.29) ifadelerini kullanılarak

$$\alpha_s(\kappa)=\frac{1}{4\pi\beta_0\ln\left(\kappa^2/\Lambda_{KRD}^2\right)}\left[1-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\ln\left(\ln\left(\kappa^2/\Lambda_{KRD}^2\right)\right)}{\ln\left(\kappa^2/\Lambda_{KRD}^2\right)}\right] \tag{3.30}$$

şeklinde elde edilir. Burada Λ_{KRD} deneylerden ölçülebilen KRD skala parametresidir. Λ_{KRD} parametresi (3.27) diferansiyel denkleminin integral sabiti ile ilişkili olduğundan κ'dan bağımsızdır.

(3.30) eşitliği κ arttıkça kayan etkileşme sabitinin logaritmik olarak azaldığını gösterir. Bu nedenle pertürbasyon teorisi κ'nın yeterince büyük olduğu durumlar için kullanılır. Etkileşme sabiti α_s'in κ'ya bağlı değerleri deneysel verilerden elde edilmektedir ve bazıları aşağıda verildiği gibidir:

$$\alpha_s(100GeV)=0.1156\pm0.0020\,,\quad \alpha_s(10GeV)=0.1762\pm0.0048$$

$$\alpha_s(2\,GeV)=0.300\pm0.015\,,\qquad \alpha_s(1GeV)=0.50\pm0.06\quad . \tag{3.31}$$

m kuark kütlesi de etkileşme sabiti g'ye benzer bir parametredir ve

$$\kappa\frac{d\,m}{d\kappa}=-\gamma_m(g)m \tag{3.32}$$

diferansiyel denklemini sağlamaktadır. Burada $\gamma_m(g)=\gamma_{m0}g^2+\gamma_{m1}g^4+\ldots$ şeklindedir ve $\gamma_{m0}=\frac{8}{(4\pi)^2}$ değerine sahiptir. (3.32) denkleminin çözümü aşağıda verildiği gibidir:

$$m(\kappa)=\frac{\overline{m}}{\left(\frac{1}{2}\ln\left(\kappa^2/\Lambda_{KRD}^2\right)\right)^{\gamma_{m0}/2\beta_0}}\ . \tag{3.33}$$

Burada $\overline{m}$ (3.32) denkleminin integral sabitidir ve κ'dan bağımsızdır. $\gamma_{m0}/2\beta_0=12/(33-2N_f)$ olduğundan kayan kütle $m(\kappa)$, $\beta<0$ olduğu durumda κ'nın artmasıyla logaritmik olarak azalır. Bu nedenle $m(\kappa)$ açıkça KRD'nin bir parametresidir ve propagatörün kutup noktasına karşılık gelmez. Kuarklar

hapsolduğundan pertürbatif olmayan propagatör kutba sahip değildir. Fakat buna rağmen pertürbasyon teorisinde kutup kütlesi tanımlanabilir. Bu kütle ağır kuarkların fenomonolojisinde kullanışlıdır ve m_{kutup} ile gösterilen kutup kütlesi, $m(\kappa)$ kayan kütlesi ile

$$m_{kutup} = m(\kappa = m)(1 + (4/3)(\alpha_s(\kappa = m)/\pi) + ...) \tag{3.34}$$

şeklinde ifade edilir.

3.4. Asimtotik Özgürlük ve Hapsolma

KRD, renormalize edilebilen abelyen olmayan bir Kuantum Alan Teorisidir. Abelyen olmayan ayar teorisi, kısa mesafelerde zayıf etkileşen buna karşılık uzun mesafelerde şiddetli etkileşen bir sistemi tanımlar.

Kuarklar ve gluonlar arasındaki etkileşme şiddeti etkileşme koşullarına bağlıdır. KRD için α etkileşme sabiti q momentumuna bağlı olarak

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \frac{(33 - 2N_f)}{12\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)} \tag{3.35}$$

ile ifade edilir [38,39]. Burada α_0, μ momentum transferi için etkileşme sabiti ve N_f ise çeşnilerin sayısıdır. Buna göre etkileşme mesafesi küçük olduğunda etkileşme sabiti de küçük olacaktır. Buna "asimtotik özgürlük" denir. Diğer bir deyişle asimtotik özgürlük, çok küçük mesafelerde kuarkların serbest parçacıklar gibi davrandığını söyler. Etkileşme sabiti küçük olduğunda pertürbatif teori güvenilir bir şekilde kullanılabilir. Kuarklar arasındaki mesafe büyük olduğunda etkileşme şiddeti de büyük olacaktır. Pertürbasyon teorisi, etkileşme sabitine göre seriye açılıma dayandığından büyük mesafelerde uygulanamaz. Bu durumda pertürbatif olmayan bir yöntem kullanmak gerekir.

Kuvvetli etkileşmelerin asimtotik özgürlük özelliğinin nedeni, gluonların renk yükü taşımasıdır. Renk yükleri sayesinde gluonlar diğer bir gluonu yayıp soğurabilir. Kuarklar arası etkileşme ise yalnız kuarkların renk yüküne bağlı değil ayrıca bu

kuarkları çevreleyen gluon bulutunun renk yüküne de bağlıdır. Kuarklar arasındaki mesafe büyüdükçe gluon bulutlarının katkısından dolayı etkileşme kuvveti büyür. Sonuçta kuarkların etkin renk yükleri (kuarkla çevresindeki gluon ve kuark- anti kuark bulutlarının toplamını ifade eden renk yükü), kuarklar arası mesafenin artmasıyla büyür. Bu durum, kuark ve gluonların hapsine neden olur. KRD'ye göre, yalnız renksiz parçacıklar gözlenebilir. Renksiz bir hadronu bileşenlerine ayırmaya çalışırsak, hadronu oluşturan kuarklar arası etkileşme alanındaki enerji bir kuark-anti kuark çifti oluşturmak için yeterli olduğunda, bu enerji yeni kuark- anti kuark çiftinin oluşumuna neden olur. Ortaya çıkan kuark ve anti kuarklar, hadronlardaki kuark ve anti kuarklarla birleşerek yeni parçacıklar oluşturur. Sonuç olarak, hadronları bileşenlerine ayırmak için verdiğimiz enerji, kuark ve anti kuarkların ayrılmalarına değil, yeni oluşumlara neden olur. Bu nedenle kuarkları serbest halde gözlememiz olası değildir.

4. TERMAL KRD TOPLAM KURALLARI YÖNTEMİ İLE ρ- MEZONUN İNCELENMESİ

Bu bölümde Termal KRD Toplam Kuralları yöntemini kullanarak vektör parçacık olan ρ-mezonun kütlesinin ve leptonik bozunum sabitinin sıcaklığa bağlılığı incelenecektir.

4.1. Termal KRD Toplam Kuralları

Kısa mesafelerde (veya büyük momentumlarda) asimtotik özgürlük özelliğinden dolayı etkileşme sabiti α çok küçük olduğundan pertürbatif açılım yapmak mümkündür ve bu bölgede pertürbasyon teorisi güvenilir bir şekilde uygulanabilir. Ancak büyük mesafelerde (veya küçük momentumlarda) kuark-gluon etkileşmeleri kuvvetli olduğundan ($\alpha \approx 1$) pertürbatif olmayan etkiler baskındır. Bu nedenle sonlu sıcaklıklarda kritik sıcaklığa yakın bölgelerde pertürbatif olmayan yöntemlerin kullanılması gerekir. Son birkaç yıldır KRD'nin pertürbatif olmayan bölgesinde güvenilir hesap yapmak için pek çok yöntem geliştirilmiştir.

Bu yöntemlerden biri olan KRD Toplam Kuralları yöntemi yaklaşık 30 yıl önce Shifmann, Vainshtain ve Zakharov tarafından mezonlar için geliştirilmiştir [2]. KRD Toplam Kuralları yöntemi KRD parametreleri ile hadronik parametreleri ilişkilendiren, KRD Lagrange fonksiyonunu temel alan, kendiliğinden simetri kırılması, kuark-hadron ikilemi ve asimtotik özgürlük ilkeleri üzerine oturtularak, uzun mesafe (küçük momentum) olaylarını açıklayan bir yöntemdir ve daha sonra Ioffe tarafından baryonlara genelleştirilmiştir [40]. Bu metot geniş ölçüde bozunum form faktörü, rezonans özellikleri ve daha birçok hadron parametresini hesaplamak için etkili bir araç olarak kullanılır. Bu yöntemde KRD de akımların çarpımı ele alınır ve hadronların kuantum sayısına uygun olarak seçilen akımlarla oluşturulan aşağıdaki korelasyon fonksiyonu yazılır [41]:

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q) = i\int d^4x e^{iq\cdot x}\left\langle T\left(V_\mu^a(x)V_\nu^b(0)\right)\right\rangle \ . \tag{4.1}$$

Burada $V_\mu^a(x)$ KRD teorisinde (ρ -mezon kanalında) vektör akımıdır ve

$$V_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu(\tau^a/2)q(x) \tag{4.2}$$

ile verilir. Burada $q(x)$; u ve d kuark çiftinin alanları ve τ^a Pauli matrisleridir. $\langle O \rangle$ şeklinde gösterilen bir O operatörünün termal ortalaması:

$$\langle O \rangle = Tre^{-\beta H} O / Tre^{-\beta H} \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada H KRD Hamiltonyeni, $\beta = 1/T$ ve iz tüm tam durumlar üzerinden alınır. (4.1) eşitliğinde T sağdan sola doğru zamana ait argümanlar artacak şekilde çarpanların düzenlendiği zaman sıralı çarpımını, q kuarkların toplam momentumunu gösterir.

Mezonlar için akım ifadesi

$$J(x) = \bar{q}_i(x)\,\Gamma\, q_j(x) \ , \tag{4.4}$$

şeklinde verilir. Burada i, j kuark çeşnilerini ve $\Gamma = 1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$ olmak üzere akımın tensör yapısını belirtmektedir.

$q^2 > 0$ için $T(q)$'nin kutupları j kuantum sayılı hadronik uyarılmalar ile ilgilidir. Korelasyon fonksiyonu hem kuarklar cinsinden hem de hadronlar cinsinden yazılarak uzun ve kısa-mesafeli nicelikler arasında bağlantı kurulabilir. Bir tarafına, hadronların kuark yapısına girmeden, $J(x)$ akımının spinörler ile tanımlandığı, fermiyon propagatörlerine benzer terimler ve yüksek enerji uyarılmalarından gelen katkıların oluşturduğu dispersiyon bağıntısı ile verilen hadronik kısım yazılır. Diğer tarafına ise hadronun kuark yapısı göz önüne alınarak zaman sıralı çarpım için KRD parametrelerini içeren OPE yazılır. Sonuçta, çok farklı bölgelerde olmalarına rağmen, Borel dönüşümü uygulanarak korelasyon fonksiyonu için elde edilen bu iki ifade birbirine eşitlenir.

Korelasyon fonksiyonunu yüksek enerjilerde yorumlayabilmek için OPE uygulanır. Bu yöntem ilk olarak Wilson tarafından ileri sürülmüştür [3]. Bu yöntemde yerel olmayan korelasyon fonksiyonu yerel operatörler cinsinden seriye açılır. Bu seriye

açılımın katsayıları, Wilson katsayıları olarak tanımlanır ve bu katsayılar pertürbatif yöntemle hesaplanır. Serideki yüksek boyutlu operatörler pertürbatif olmayan katkıları ifade eder. Diğer taraftan Korelasyon fonksiyonu dispersiyon bağıntısı kullanılarak hadronik durumlar üzerinden bir toplamla ifade edilir. Toplam Kuralları; vakum matris elemanının dispersiyon bağıntısını yeteri kadar büyük momentumlarda buna karşılık gelen Wilson operatör çarpımının seriye açılımına eşitlenmesiyle elde edilir ve bunun sonucunda hadronların etkileşme sabiti, manyetik momentleri ve kütleleri gibi parametreler hesaplanabilir.

Wilson açılımı farklı noktalarda operatörlerin çarpımının momentuma bağlı yerel operatörlerin toplamı olarak yazılabileceği varsayımına dayanır ve OPE'nin genel yapısı

$$T(q) = C_0 I + \sum_n C_n(q^2)\langle O_n \rangle . \tag{4.5}$$

şeklindedir. Burada $C_n(q^2)$'ler Wilson katsayılarını, O_n'ler tam sistem oluşturan operatörler kümesini temsil eder. OPE'de, operatörler d ile gösterilen operatör boyutlarına göre sıralanır. En düşük boyutlu operatör $d = 0$'dır ve pertürbatif katkıları ifade eder. Bundan sonraki en düşük boyutlu operatör $d = 3$ boyutludur ve $\langle \overline{\psi}\psi \rangle$ kuark kondensatlarına, $d = 4$ boyutlu operatör ise $\langle G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} \rangle$ gluon kondensatlarına karşılık gelir. $d \le 6$ boyuttaki operatörler [41]

$$\begin{aligned}
&I \text{ (birim operatör)} && d = 0 \\
&O_3 = \overline{\psi}\psi && d = 3 \\
&O_4 = G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} && d = 4 \\
&O_5 = \overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2} G^{a\mu\nu}\psi && d = 5 \\
&O_6 = (\overline{\psi}\,\Gamma_r \psi)(\overline{\psi}\,\Gamma_s \psi) && d = 6 \\
&O_6 = f_{abc} G^a_{\mu\nu} G^{b\nu}_{\sigma} G^{c\sigma\mu} && d = 6
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklindedir. Burada m kuark kütlesi, λ^a Gell-Mann matrisleri, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]$ ve $G^a_{\mu\nu}$ gluon alan tensörüdür.

KRD Toplam Kuralları Bochkarev ve Shaposnikov tarafından sonlu sıcaklık durumuna genelleştirilmiştir [4]. Termal KRD Toplam Kuralları yönteminde SVZ toplam kuralları metodundaki vakum matris elemanları termal ortalama ile değiştirilir. Bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışma olmasına rağmen, OPE'nın sonlu sıcaklık ve yoğunluklara uygulanmasında birtakım zorluklarla karşılaşılmaktadır. Bu zorluklardan ilki ortamdaki parçacıkların akımlarla etkileşmesidir. İkinci zorluk ise sonlu sıcaklıklarda maddenin durgun halde olduğu referans sisteminin seçimi sebebiyle Lorentz invaryantlığının bozulması ve bunun sonucu olarak Wilson açılımında $T = 0$ durumunda mevcut Lorentz invaryant operatöre ilaveten yeni Lorentz invaryant olmayan operatörlerin ortaya çıkmasıdır. Bochkarev ve Shaposnikov mezon parametrelerine ortamın etkilerini açıklamak için spektral fonksiyonda sürekli durumları (düşük enerji) dikkate almışlardır. Bu Toplam Kuralının temelinde rezonans parametrelerinin sıcaklığa bağlılığı ve faz geçişleri vardır. Her iki özellik dikkate alınarak vektör mezonların sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda parametrelerinin modifikasyonu literatürde geniş şekilde yer almaktadır [9-13].

$T \neq 0$ durumunda OPE hesaplanırken serbest kuark propagatörü olarak aşağıdaki ifade kullanılır [22]:

$$S(q) = \left(\gamma^\mu q_\mu + m\right)\left(\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} + 2\pi i\, n(\omega_q)\,\delta\left(q^2 - m^2\right)\right). \tag{4.7}$$

Burada $n(\omega_q)$ Fermi dağılım fonksiyonu olmak üzere $n(\omega_q) = \left[\exp(\beta\omega_q) + 1\right]^{-1}$ ile verilir ve $\omega_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ şeklindedir.

TAT'da Lorentz invaryantlığı yeniden sağlamak için ortamın u^μ ile verilen dört boyutlu hız vektörünün tanımlanması gerekir ($u^\mu = (1, 0, 0, 0)$). Dört boyutlu hız vektörü ve kuark-gluon alanları kullanılarak, $d = 4$ boyuta sahip $\left\langle u\Theta^f u\right\rangle$ ve $\left\langle u\Theta^g u\right\rangle$

yeni dört boyutlu operatörler oluşur. Burada $\Theta^{f}_{\mu\nu}$ ve $\Theta^{g}_{\mu\nu}$ sırasıyla $\Theta_{\mu\nu}$ ile gösterilen enerji-momentum tensörünün fermiyonik ve gluonik kısımlarıdır. Böylece termal korelasyon fonksiyonunda kısa mesafe açılımında sıcaklığa bağlı yeni terimler ortaya çıkmaktadır. Bunlar $\langle\overline{\psi}\psi\rangle$ kuark kondensatı, $\left\langle G^{a}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\right\rangle$ gluon kondensatı, $\langle u\Theta^{f}u\rangle$ kuark enerji yoğunluğu ve $\langle u\Theta^{g}u\rangle$ gluon enerji yoğunluğudur. Sonuç olarak OPE sonlu sıcaklıklarda $T=0$ durumundan faklı olur. Örneğin termal korelasyon fonksiyonu dört boyutlu operatörler de dahil olmak üzere [8,12]

$$T(q)=C_1 I+C_2\langle\overline{\psi}\psi\rangle+C_3\left\langle G^{a}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\right\rangle+C_4\langle u\Theta^{f}u\rangle+C_5\langle u\Theta^{g}u\rangle \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir.

Kuark ve gluon kondensatlarının sıcaklığa bağlılığı kiral pertürbasyon teorisi ve örgü teorisi ile hesaplanmış olup literatürde mevcuttur [32-35].

Korelasyon fonksiyonunun hadron dilinde ifade edilmesi için dispersiyon bağıntısı kullanılır. Sonlu sıcaklık ve yoğunluklarda spektral gösterim $T=0$ durumundan farklıdır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$T\left(q_0^2,|\vec{q}|\right)=\int_0^\infty dq_0'^2\,\frac{N(q_0',|\vec{q}|)}{q_0'^2+Q_0^2}+\text{çıkarma terimleri.} \tag{4.9}$$

Burada $N(q_0,|\vec{q}|)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}T(q_0,|\vec{q}|)\tanh\left(\beta q_0/2\right)$ ve $Q_0^2=-q_0^2$ dır [10].

Borel dönüşümleri de yapıldıktan sonra KRD Toplam Kuralları elde edilir. Bu Toplam Kuralları nümerik olarak incelenerek hadron parametrelerinin sıcaklığa ve yoğunluğa bağlılığı hesaplanır.

4.2. Termal Dispersiyon Bağıntısı

TAT'da sıcaklığın tanımlandığı referans sisteminin seçimi ile Lorentz invaryantlık bozulur. Fakat maddenin u_μ dört boyutlu hızı vektörünü tanımlayarak Lorentz invaryantlığı restore etmek mümkündür (maddenin durgun olduğu referans sisteminde $u_\mu=(1,0,0,0)$ şeklindedir). Bu nedenle u_μ ve q_μ vektörlerini kullanarak

$\omega = u \cdot q$ ve $\bar{q} = \sqrt{\omega^2 - q^2}$ şeklinde Lorentz skaler nicelikleri ele alalım. Nümerik hesaplamalarımızı yaparken madenin durgun olduğu referans sistemine dönüş yapmamız gerekir.

Vektör parçacıkları incelerken Lorentz invaryant ve korunan iki tane bağımsız kinematik nicelik vardır ve bu nicelikler aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$P_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - \frac{q^2}{\bar{q}^2}\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu \quad , \quad Q_{\mu\nu} = \frac{q^4}{\bar{q}^2}\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu . \tag{4.10}$$

Burada $\tilde{u}_\mu = u_\mu - \omega q_\mu / q^2$ şeklindedir ve $T^{ab}_{\mu\nu}$ invaryant olarak aşağıdaki terimlere ayrıştırılabilir:

$$T^{ab}_{\mu\nu}(q) = \delta^{ab}\left(Q_{\mu\nu}T_l + P_{\mu\nu}T_t\right) . \tag{4.11}$$

Burada $T_{l,t}$; q^2 ve ω nin fonksiyonu olan invaryant niceliklerdir. Ayrıca $P_{\mu\nu}$ ve $Q_{\mu\nu}$ tensörleri $q^2 = 0$ ve $\bar{q}^2 = 0$ 'da ıraksaklıklar içermemektedir.

Şimdi $|\vec{q}|$'nun sabit bir değerinde q_0'a göre korelasyon fonksiyonu için spektral gösterimi elde etmeye çalışalım. Sonlu sıcaklıkta T çarpımı için Landau gösterimi

$$T^{ab}_{\mu\nu}(q_0, |\vec{q}|) = i\,\mathrm{Im}\,T^{ab}_{\mu\nu}(q_0, |\vec{q}|) + P\int_{-\infty}^{+\infty} dq_0' \,\frac{N_{\mu\nu}(q_0', |\vec{q}|)}{q_0' - q_0} \tag{4.12}$$

ile verilir. Burada $N^{ab}_{\mu\nu}(q)$

$$N^{ab}_{\mu\nu}(q) \equiv \delta^{ab}N_{\mu\nu}(q) = \pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,T^{ab}_{\mu\nu}(q)\tanh(\beta q_0/2) \tag{4.13}$$

olmaktadır [10]. $q'_\mu = q_\mu + (q_0' - q_0)u_\mu$ şeklinde tanımlanarak $T_{l,t}$ invaryant genliği tekrar yazılabilir. Ayrıca $\mathrm{Im}\,T_{l,t}(-q_\mu) = \mathrm{Im}\,T_{l,t}(q_\mu)$ simetri özelliği kullanılarak ve q_0 $\left(q_0^2 = -Q_0^2\,,\ Q_0^2 > 0\right)$ ın imajiner değerleri üzerinden gidilerek $T_{l,t}$

$$T_{l,t}(q_0^2, |\vec{q}|) = \int_0^\infty dq_0'^2 \,\frac{N_{l,t}(q_0', |\vec{q}|)}{q_0'^2 + Q_0^2} \tag{4.14}$$

şeklinde bulunur.

4.3. Operatör Çarpım Açılımı

ρ-mezon için Termal KRD kurallarını elde etmek için ilk önce iki kuark operatörünün zaman sıralı çarpımını ele alalım ve korelasyon akımını

$$J_\mu(x) =: \bar{q}(x)\gamma_\mu q(x): \tag{4.15}$$

şeklinde seçelim. Burada γ_μ'ler Dirac matrisleridir. (4.15) ifadesi üç terimin toplamı şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$TJ_\mu(x)J_\nu(0) = t_{\mu\nu}^{(G)} + t_{\mu\nu}^{(q)} + t_{\mu\nu}^{(reg)}. \tag{4.16}$$

$t_{\mu\nu}^{(G)}$, $t_{\mu\nu}^{(q)}$ ve $t_{\mu\nu}^{(reg)}$ ifadelerinin açık şekli aşağıda verildiği gibidir [8]:

$$t_{\mu\nu}^{(G)} = tr\,\gamma_\mu S(x,0)\gamma_\nu S(0,x) \tag{4.17}$$

$$t_{\mu\nu}^{(q)} = -i\left(\gamma_\nu S_m(0,x)\gamma_\mu\right)_{ab} : \bar{q}_a(0)q_b(x): -i\left(\gamma_\mu S_m(x,0)\gamma_\nu\right)_{ab} : \bar{q}_a(x)q_b(0): \tag{4.18}$$

$$t_{\mu\nu}^{(reg)} =: \bar{q}(x)\gamma_\mu q(x)\bar{q}(0)\gamma_\nu q(0): \ . \tag{4.19}$$

Burada iz hem Dirac hem de renk matrisleri üzerinden alınır. (4.18) eşitliğinde kuark kütlesi ile lineer olan terim göz önüne alınmış ve bu durumda kuark propagatörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_m(x,0) = S(x,0) - \frac{im}{4\pi^2 x^2}. \tag{4.20}$$

(4.17) ifadesi gluon kondensatının katsayısını verir. İkinci terim de $q(x)$

$$q(x) = q(0) + x^\mu D_\mu q(0) + \ldots \ . \tag{4.21}$$

şeklinde seriye açıldıktan sonra tüm kuark operatörlerinin katsayılarını verir:

$$t_{\mu\nu}^{(q)} = -\frac{1}{2\pi^2(x^2)^2}\left[\left\{i\left(\gamma_\nu \not{x}\gamma_\mu - \gamma_\mu \not{x}\gamma_\nu\right)_{ab} + mx^2\left(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\right)_{ab}/2\right\}: \bar{q}_a q_b : \right. \tag{4.22}$$

$$\left. + \left(\gamma_\nu \not{x}\gamma_\mu + \gamma_\mu \not{x}\gamma_\nu\right)_{ab} x^\mu : \bar{q}_a\, i D_\mu q_b :\right]$$

Böylece $t_{\mu\nu}^{(G)}$ ve $t_{\mu\nu}^{(q)}$ farklı tensör ve spinör yapılarına sahip dört boyuta kadar tüm kuark ve gluon operatörlerini içeren en genel OPE'yi verir. Termal KRD Toplam Kurallarını elde etmek için bu operatörlerin vakum beklenen değerlerini değil termal ortalamalarını almamız gerekir. Termal beklenen değerde ise durum farklıdır. Herhangi bir O operatörünün termal beklenen değeri (4.3) denklemi ile hesaplanır. Burada sıcaklığın tanımlandığı termal çerçevede Lorentz invaryantlık bozulur, ancak u^{μ} dört boyutlu hız vektörü tanımlanarak Lorentz invaryantlık restore edilebilir. Burada ilk olarak $t_{\mu\nu}^{(G)}$ ifadesini ele alalım. Genel muhakemelerden

$$\left\langle tr^{c} G_{\alpha\beta} G_{\lambda\sigma} \right\rangle = \left(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\lambda} \right) A$$

$$- \left(u_{\alpha} u_{\lambda} g_{\beta\sigma} - u_{\alpha} u_{\sigma} g_{\beta\lambda} - u_{\beta} u_{\lambda} g_{\alpha\sigma} + u_{\beta} u_{\sigma} g_{\alpha\lambda} \right) B \tag{4.23}$$

yazılabilir. (4.23) eşitliğinde bulunan A ve B çarpanları

$$A = \frac{1}{24} \left\langle G_{\alpha\beta}^{a} G^{a\alpha\beta} \right\rangle + \frac{1}{6} \left\langle u^{\alpha} \Theta_{\alpha\beta}^{g} u^{\beta} \right\rangle \tag{4.24}$$

$$B = \frac{1}{3} \left\langle u^{\alpha} \Theta_{\alpha\beta}^{g} u^{\beta} \right\rangle \tag{4.25}$$

şeklindedir. Burada $\Theta_{\alpha\beta}^{g}$ KRD'de izi sıfır olacak şekilde tanımlanmış enerji momentum tensörünün gluonik kısmı olup

$$\Theta_{\alpha\beta}^{g} = -G_{\alpha\lambda}^{a} G_{\beta}^{\lambda a} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\lambda\sigma}^{a} G^{\lambda\sigma a} \tag{4.26}$$

ile ifade edilir.

Yalnızca dört boyutlu operatörlerin katsayısıyla ilgilendiğimizden $S(z,0)$ için aşağıdaki propagatör ifadesini kullanabiliriz:

$$S(x,0) = \frac{1}{4\pi^{2}} \left(\partial \left(\frac{1}{x^{2}} \right) - \frac{i}{4x^{2}} \gamma^{\mu} x \gamma^{\nu} G_{\mu\nu} + \frac{B}{48} \left(a x + b u \right) \right) \tag{4.27}$$

Burada $a = 1 - \frac{4}{x^{2}} (u \cdot x)^{2} - 2 \ln(4 x^{2} \mu^{2})$ ve $b = 8 u \cdot x \ln(4 x^{2} \mu^{2})$ 'dir.

Paritenin korunduğu göz önüne alınarak sonlu sıcaklıklarda iki kuark operatörü çarpımının termal ortalaması spinör uzayında en genel şekilde

$$\left\langle \bar{q}_a q_b \right\rangle = \frac{\delta_{ab}}{4}\left\langle \bar{q}q \right\rangle + \frac{(\not{u})_{ba}}{4}\left\langle \bar{q}\not{u}q \right\rangle \tag{4.28}$$

$$\left\langle \bar{q}_a i D_\mu q_b \right\rangle = (\gamma_\mu)_{ba} U + u_\mu (\not{u})_{ba} V + u_\mu \delta_{ba} Y + (\not{u}\gamma_\mu)_{ba} Z \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada

$$U = \frac{m}{16}\left\langle \bar{q}q \right\rangle - \frac{1}{12}\left\langle u^\mu \Theta^f_{\mu\nu} u^\nu \right\rangle \ , \ \ V = \frac{1}{3}\left\langle u^\mu \Theta^f_{\mu\nu} u^\nu \right\rangle \tag{4.30}$$

$$Y = \frac{1}{6}\left\langle \bar{q} i\, u\cdot D q \right\rangle + \frac{m}{12}\left\langle \bar{q}\not{u}q \right\rangle , \quad Z = \frac{1}{12}\left\langle \bar{q} i\, u\cdot D q \right\rangle - \frac{m}{12}\left\langle \bar{q}\not{u}q \right\rangle \tag{4.31}$$

ve $\Theta^f_{\mu\nu}$ enerji momentum tensörünün izi sıfır olan fermiyonik kısmıdır:

$$\Theta^f_{\mu\nu} = \bar{q}\gamma_\mu i D_\nu q - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} m\bar{q}q \ . \tag{4.32}$$

Tüm bu verilerden yararlanılarak T_l için

$$T_l = -\frac{1}{8\pi^2}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{Q^4}\left(\hat{m}\left\langle \bar{u}u \right\rangle + \frac{\left\langle G^2 \right\rangle}{24} \right.$$

$$\left. + \frac{4}{16+3n_f}\left\{ \left\langle \Theta \right\rangle + a\left(Q^2\right)\left\langle 16\Theta^f/3 - \Theta^g \right\rangle \right\} \right) \tag{4.33}$$

olduğu bulunur. Büyük Q_0^2 değerlerinde T_l ve T_t genlikleri için operatör çarpım açılımının sonucunu ve spektral gösterimi birbirine eşitlememiz gerekir. Borel dönüşümü alınarak Termal KRD Toplam Kuralları elde edilir. OPE sonucunu (4.8)'de göz önüne alarak Borel dönüşümlerinden sonra

$$\frac{1}{M^2}\int_0^\infty dq_0^2 e^{-q_0^2/M^2} N_l\left(q_0, |\vec{q}|\right) = e^{-|\vec{q}|^2/M^2}\left(\frac{1}{8\pi^2} + \frac{\left\langle O \right\rangle}{M^4} \right) \tag{4.34}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\langle O \rangle$ daha yüksek boyuttaki operatörlerin pertürbatif olmayan katkısı olmak üzere

$$\langle O \rangle = m\langle \bar{u}u \rangle + \frac{\langle G^2 \rangle}{24} + \frac{4}{16+3n_f}\left\{\langle \Theta \rangle + a\left(M^2\right)\left\langle 16\Theta^f/3 - \Theta^g \right\rangle\right\} \tag{4.35}$$

yazılır ve T_t için de OPE kullanılarak benzer ifade elde edilebilir. Termal olarak incelenen sistemlerde yeni operatörlerin termal ortalaması sıcaklıkla hızlı bir şekilde artan enerji yoğunluklarıdır.

4.4. Korelasyon Fonksiyonunun Hadronik Parametreler Cinsinden Hesaplanması

ρ-mezon için F_ρ leptonik bozunum sabiti

$$\left\langle 0\left|V_\mu^a\right|\rho^b\right\rangle = \delta^{ab}F_\rho m_\rho \varepsilon_\mu \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ε_μ, m_ρ kütleli ρ-mezonun polarizasyon vektörüdür. F_ρ'nun değeri ρ_0'ın bozunumundan deneysel olarak elde edilmiştir ve $F_\rho = 153.5\,MeV$ dir [42].

İlk önce korelasyon fonksiyonunun hadronik kısmına ρ-mezonun kutbundan gelen katkıyı hesaplayalım. (4.36)'ye dayanarak $V_\mu^a(x)$ vektör akımını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$V_\mu^a(x) = m_\rho F_\rho \rho_\mu^a(x). \tag{4.37}$$

(4.13) ifadesini korelasyon fonksiyonunda yerine yazarsak

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q) = im_\rho^2 F_\rho^2 \int d^4x e^{iqx}\left\langle \rho_\mu^a(x)\rho_\nu^b(0)\right\rangle$$

$$= i\delta^{ab}m_\rho^2 F_\rho^2\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_\rho^2}\right)\Delta_{11}^\rho(q). \tag{4.38}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi ρ-mezon katkısı aslında ρ-mezonun termal propagatörü ile ifade edilir. Burada $\Delta_{11}^{\rho}(q)$; m_{ρ} kütleli skaler alan propagatörünün 11-bileşenidir ve

$$\Delta_{11}^{\rho}(q)=\frac{i}{q^2-m_{\rho}^2+i\varepsilon}+2\pi\, n(\omega_q)\delta(q^2-m_{\rho}^2) \tag{4.39}$$

şeklindedir. $\omega_q=\sqrt{\vec{q}^{\,2}+m_{\rho}^2}$ olmak üzere $n(\omega_q)=\left(e^{\beta\omega_q}-1\right)^{-1}$ ile tanımlanan Bose dağılım fonksiyonudur. (4.38) ve (4.39)'i (4.13) eşitliğinde yerine yazıp belirli dönüşümlerden sonra ρ-mezon kutbunun spektral yoğunluğa katkısı

$$N_t(q)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}^{ab}(q)\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)=m_{\rho}^2F_{\rho}^2\delta(q^2-m_{\rho}^2)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde N_l de hesaplandıktan sonra

$$\begin{pmatrix}N_l\\N_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m_{\rho}^2\end{pmatrix}F_{\rho}^2\delta\left\{q_0^2-\left(|\vec{q}|^2+m_{\rho}^2\right)\right\} \tag{4.40}$$

buluruz.

Ortamda çoğunlukla pionlar bulunduğundan, korelasyon fonksiyonuna ρ-mezon kutbundan sonra ikinci büyük katkı $\pi\pi$-katkısıdır. Korelasyon fonksiyonuna pionların katkısı [10]

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q)=i\delta^{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_{\mu}(2k-q)_{\nu}\Delta_{11}^{\pi}(k)\Delta_{11}^{\pi}(k-q) \tag{4.41}$$

şeklindedir. Burada Δ_{11}^{π}, m_{π} kütleli skaler alan propagatörünün 11-bileşenidir.

(4.39) propagatörü (4.41) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q)=i\delta^{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_{\mu}(2k-q)_{\nu}\left(\frac{i}{k^2-m_{\pi}^2+i\varepsilon}+2\pi\, n(\omega_k)\delta(k^2-m_{\pi}^2)\right)$$

$$\times\left(\frac{i}{(k-q)^2-m_{\pi}^2+i\varepsilon}+2\pi\, n_2\delta((k-q)^2-m_{\pi}^2)\right) \tag{4.42}$$

$$= i\,\delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\left(\frac{i}{k_0^2-\omega_1^2+i\varepsilon}+2\pi\, n_1\delta\left(k_0^2-\omega_1^2\right)\right)$$

$$\times\left(\frac{i}{(k_0-q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon}+2\pi\, n_2\delta\left((k_0-q_0)^2-\omega_2^2\right)\right)$$

olarak bulunur. Burada $n_1 \equiv n(\omega_1)$, $n_2 \equiv n(\omega_2)$ ve $\omega_1 = \sqrt{\vec{k}^2+m_\pi^2}$, $\omega_2 = \sqrt{\left(\vec{k}-\vec{q}\right)^2+m_\pi^2}$ şeklindedir. (4.42) eşitliğinde birtakım cebirsel dönüşümlerden sonra $T_{\mu\nu}^{ab}(q)$ ifadesi

$$T_{\mu\nu 1} = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\left(\frac{-1}{\left(k_0^2-\omega_1^2+i\varepsilon\right)\left((k_0-q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon\right)}\right)$$

$$= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\frac{1}{4\omega_1\omega_2}\left(\frac{1}{k_0-\omega_1+i\delta_1}-\frac{1}{k_0+\omega_1-i\delta_1}\right) \qquad (4.43)$$

$$\times\left(\frac{1}{k_0-q_0-\omega_2+i\delta_2}-\frac{1}{k_0-q_0+\omega_2-i\delta_2}\right)$$

$$T_{\mu\nu 2} = T_{\mu\nu 3} = 2\pi i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\, n_1\delta\left(k_0^2-\omega_1^2\right)\frac{i}{(k_0-q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon}$$

$$= -(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, n_1\,\frac{1}{\omega_1}$$

$$\times\left[\frac{1}{(\omega_1-q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon}+\frac{1}{(\omega_1+q_0)^2-\omega_2^2+i\varepsilon}\right] \qquad (4.44)$$

$$T_{\mu\nu 4} = 2\pi\, i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu n_1 n_2\,\frac{1}{4\omega_1\omega_2}\left(\delta(k_0-\omega_1)+\delta(k_0+\omega_1)\right)$$

$$\times\left(\delta(k_0-q_0-\omega_2)+\delta(k_0-q_0+\omega_2)\right) \qquad (4.45)$$

olmak üzere $T_{\mu\nu}(q)=T_{\mu\nu1}+T_{\mu\nu2}+T_{\mu\nu3}+T_{\mu\nu4}$ şeklinde dört terimin toplamı şeklinde yazılabilir. Her bir terimde k_0 üzerinden integral alınıp, $T_{\mu\nu1}$, $T_{\mu\nu2}$, $T_{\mu\nu3}$ ve $T_{\mu\nu4}$ terimlerinin imajiner kısımlarını hesaplarsak

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu1}=\pi(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)+\delta(q_0+\omega_1+\omega_2)\right] \tag{4.46}$$

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu2}=\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu3}=\pi(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n_1}{2\omega_1}\left[\delta\left((\omega_1-q_0)^2-\omega_2^2\right)+\delta(\omega_1+q_0)^2-\omega_2^2\right]$$

$$=\pi(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n_1}{2\omega_1 2\omega_2}\left[\delta(q_0+\omega_2-\omega_1)+\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)\right.$$

$$\left.+\delta(q_0+\omega_1-\omega_2)+\delta(q_0+\omega_1+\omega_2)\right] \tag{4.47}$$

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu4}=2\pi(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n_1n_2}{4\omega_1\omega_2}\left[\delta(q_0+\omega_2-\omega_1)+\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)\right.$$

$$\left.+\delta(q_0+\omega_1+\omega_2)+\delta(q_0+\omega_1-\omega_2)\right] \tag{4.48}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $T_{\mu\nu}^{ab}(q)$ ifadesinin imajiner kısmı

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}^{ab}(q)=\delta^{ab}\left\{L_{\mu\nu}(q)+L_{\mu\nu}(-q)\right\} \tag{4.49}$$

şeklinde de yazılabilir. $L_{\mu\nu}(q)$ ifadesinin açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$L_{\mu\nu}(q)=\pi\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu}{4\omega_1\omega_2}\left[\left\{(1+n_1)(1+n_2)+n_1n_2\right\}\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)\right.$$

$$\left.+\left\{(1+n_1)n_2+(1+n_2)n_1\right\}\delta(q_0-\omega_1+\omega_2)\right]\ . \tag{4.50}$$

(3.9) ifadesinde k_μ vektörünün zaman bileşeni $k_0=\omega_1$'dir.

olur. Şimdi $q_0=\omega_1+\omega_2$ için $(1+n_1)(1+n_2)+n_1n_2$ ifadesini inceleyelim:

$$n_1=\frac{1}{e^{\beta\omega_1}-1}\ \text{ise}\ e^{\beta\omega_1}=\frac{n_1+1}{n_1}\quad,\quad e^{\beta\omega_2}=\frac{1+n_2}{n_2} \tag{4.51}$$

elde edilir. Buna göre

$$\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)=\frac{n_1+n_2+1}{2n_1n_2+n_1+n_2+1} \tag{4.52}$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeler yerine yazılırsa $q_0=\omega_1+\omega_2$ için

$$\left[(1+n_1)(1+n_2)+n_1n_2\right]\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)=(n_1+n_2+1) \tag{4.53}$$

bulunur. Benzer şekilde $\left[(1+n_1)n_2+(1+n_2)n_1\right]\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)$ ifadesini $q_0=\omega_1-\omega_2$ için ele alalım:

$$\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)=\frac{(n_1+1)n_2-n_1(n_2+1)}{(n_1+1)n_2+n_1(n_2+1)} \tag{4.54}$$

$$\left[(1+n_1)n_2+(1+n_2)n_1\right]\tanh\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)=(n_2-n_1) \tag{4.55}$$

olur. Sonuç olarak δ-fonksiyonunun özellikleri yardımıyla $q_0>0$ için tanımlı $N_{\mu\nu}$ ifadesini (4.50) eşitliğinden yararlanarak yeniden aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$N_{\mu\nu}(q)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu}{4\omega_1\omega_2}\left[(1+n_1+n_2)\delta(q_0-\omega_1-\omega_2)\right.$$

$$\left.+(n_2-n_1)\delta(q_0-\omega_1+\omega_2)\right]. \tag{4.56}$$

(4.56) eşitliğindeki birinci ve ikinci terimdeki δ-fonksiyonları sırasıyla $q^2\geq 4m_\pi^2$ ve $q^2<0$ bölgelerinde katkı sağlar ve

$$N_{\mu\nu}(q)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_1}(2k-q)_\mu(2k-q)_\nu\left[(1+n_1+n_2)\theta\left(q^2-4m_\pi^2\right)\right.$$

$$\left.+(n_2-n_1)\theta\left(-q^2\right)\right]\delta\left((q_0-\omega_1)^2-\omega_2^2\right) \tag{4.57}$$

olarak yazılır. $\theta\left[-q^2(\omega_1-\omega_+)(\omega_1-\omega_-)\right]$ şeklinde verilen θ-fonksiyonu $\left|\cos\theta_{\vec{q},\vec{k}}\right|\leq 1$ koşulu göz önüne alınarak ve δ-fonksiyonunun özellikleri kullanılarak θ ve ϕ

açıları üzerinden integral elde edilir. Buradan $\omega_{\pm}=\frac{1}{2}\left(q_0 \pm |\vec{q}|\upsilon\right)$ ve $\upsilon\left(q^2\right)=\sqrt{1-4m_\pi^2/q^2}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} N_l^+ \\ N_t^+ \end{pmatrix} = \frac{\upsilon^3}{48\pi^2}\begin{pmatrix} 1 \\ q^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{N}_l^+ \\ \overline{N}_t^+ \end{pmatrix} \qquad ;\ q^2 > 4m_\pi^2 \text{ için} \tag{4.58}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{N}_l^+ \\ \overline{N}_t^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{32\pi^2}\int_{-\upsilon}^{\upsilon} dx \begin{pmatrix} 2x^2 \\ q^2\left(\upsilon^2 - x^2\right) \end{pmatrix} n\left(\left(|\vec{q}|x + q_0\right)/2\right) \tag{4.59}$$

ve

$$\begin{pmatrix} N_l^- \\ N_t^- \end{pmatrix} = \frac{1}{64\pi^2}\int_{\upsilon}^{\infty} dx \begin{pmatrix} 2x^2 \\ q^2\left(\upsilon^2 - x^2\right) \end{pmatrix} \left\{ n\left(\left(|\vec{q}|x - q_0\right)/2\right) \right.$$

$$\left. - n\left(\left(|\vec{q}|x + q_0\right)/2\right) \right) \qquad ;q^2 \le 0 \text{ için} \tag{4.60}$$

elde edilir [10].

4.5. Termal Toplam Kurallarının Nümerik İncelenmesi

Şimdi T_l için (4.34)'deki toplam kurallarını açıkça yazalım:

$$F_\rho^2(T) e^{-m_\rho^2(T)/M^2} + \frac{1}{48\pi^2}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dq_0^2 e^{-q_0^2/M^2}\upsilon^3\left(q_0^2 + |\vec{q}|^2\right)$$

$$+ e^{|\vec{q}|^2/M^2}\left(\int_{4m_\pi^2+|\vec{q}|^2}^{\infty} dq_0^2 e^{-q_0^2/M^2}\overline{N}_l^+\left(q_0, |\vec{q}|\right) + \int_0^{|\vec{q}|^2} dq_0^2 e^{-q_0^2/M^2} N_l^-\left(q_0, |\vec{q}|\right) \right) \tag{4.61}$$

$$= \frac{M^2}{8\pi^2} + \frac{\langle O \rangle}{M^2} \quad .$$

Sıcaklık sıfıra giderken parantez içindeki iki terim sıfıra gider ve sağ taraftaki operatörlerin termal ortalaması vakum beklenen değeri ile değiştirilirse vakum toplam kurallarını elde etmiş oluruz.

(4.61) ifadsini nümerik incelemek için parçacığa bağlı referans sistemine geçelim, yani $|\vec{q}| \to 0$ limit durumunu ele alalım. Bu yaklaşımda (4.61) deki toplam kuralları oldukça sadeleşir. Buradan T_l ve T_t için toplam kuralları;

$$F_\rho^2(T)e^{-m_\rho^2(T)/M^2} + I_0(M^2) + I_T(M^2) = \frac{M^2}{8\pi^2} + \frac{\langle O \rangle}{M^2} \tag{4.62}$$

ve

$$m_\rho^2(T)F_\rho^2(T)e^{-m_\rho^2(T)/M^2} + J_0(M^2) + J_T(M^2) = \frac{M^4}{8\pi^2} - \langle O \rangle \tag{4.63}$$

şeklinde olur. Görüldüğü gibi (4.63) ifadesi (4.62) ifadesinin $1/M^2$'ye göre türevidir. Burada

$$I_0(M^2) = \frac{1}{48\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds e^{-s/M^2} \upsilon^3$$

$$J_0(M^2) = \frac{1}{48\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds s e^{-s/M^2} \upsilon^3$$

$$I_T(M^2) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \left\{ e^{-s/M^2} \upsilon^3 + \upsilon\left(3 - \upsilon^2\right)/2 \right\} n\left(\sqrt{s}/2\right)$$

$$J_T(M^2) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds s e^{-s/M^2} \upsilon^3 n\left(\sqrt{s}/2\right) \tag{4.64}$$

şeklindedir. Ayrıca $\upsilon \equiv \upsilon(s) = \sqrt{1 - 4m_\pi^2/s}$ ve $n\left(\sqrt{s}/2\right) = \dfrac{1}{\exp\left(\sqrt{s}/2T\right) - 1}$ ile verilir.

$T \to 0$ limitinde (4.62) ve (4.63) formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_\rho^2(0)e^{-m_\rho^2(0)/M^2} + I_0(M^2) = \frac{M^2}{8\pi^2} + \frac{\langle O \rangle_0}{M^2} \tag{4.65}$$

ve

$$m_\rho^2(0)F_\rho^2(0)e^{-m_\rho^2(0)/M^2}+J_0(M^2)=\frac{M^4}{8\pi^2}-\langle O\rangle_0 . \tag{4.66}$$

(4.62) ifadesi ile (4.65) ifadesinin, (4.63) ifadesi ile de (4.66) ifadesinin farklarını alırsak

$$F_\rho^2(T)e^{-m_\rho^2(T)/M^2}-F_\rho^2(0)e^{-m_\rho^2(0)/M^2}+I_T(M^2)=\frac{\overline{\langle O\rangle}}{M^2} \tag{4.67}$$

ve

$$m_\rho^2(T)F_\rho^2(T)e^{-m_\rho^2(T)/M^2}-m_\rho^2(0)F_\rho^2(0)e^{-m_\rho^2(0)/M^2}+J_T(M^2)=-\overline{\langle O\rangle} \tag{4.68}$$

ifadelerini elde ederiz. Buradan (4.67) ifadesi (4.68)ifadesinde yerine yazılırsa

$$m_\rho^2(T)\left[F_\rho^2(0)\exp\left(-m_\rho^2(0)/M^2\right)-I_T(M^2)+\frac{\overline{\langle O\rangle}}{M^2}\right]$$

$$-m_\rho^2(0)F_\rho^2(0)\exp\left(-m_\rho^2(0)/M^2\right)+J_T(M^2)=-\overline{\langle O\rangle} \tag{4.69}$$

buluruz. Böylece sıcaklığa bağlı olarak kütledeki kayma aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\Delta m_\rho(T)=m_\rho(T)-m_\rho(0)$$

$$=\frac{m_\rho\exp\left(m_\rho^2/M^2\right)}{2F_\rho^2(0)}\left\{I_T-\frac{J_T}{m_\rho^2}-\left(\frac{1}{m_\rho^2}+\frac{1}{M^2}\right)\overline{\langle O\rangle}\right\} \quad . \tag{4.70}$$

Benzer şekilde (4.67) ifadesini $\exp\left(m_\rho^0(0)/M^2\right)$ile çarparsak

$$F_\rho^2(T)\exp\left(-\frac{m_\rho^2(T)-m_\rho^2(0)}{M^2}\right)-F_\rho^2(0)=\exp\left(m_\rho^2(0)/M^2\right)\left(-I_T+\frac{\overline{\langle O\rangle}}{M^2}\right)$$

$$F_\rho^2(T)-F_\rho^2(0)=\frac{F_\rho^2(T)}{M^2}\left(m_\rho^2(T)-m_\rho^2(0)\right)$$

$$+\exp\left(m_\rho^2(0)/M^2\right)\left(-I_T+\frac{\overline{\langle O\rangle}}{M^2}\right) \tag{4.71}$$

$$F_\rho^2(T)-F_\rho^2(0)\approx \exp\left(m_\rho^2(0)/M^2\right)\left[\frac{m_\rho^2(0)}{M^2}I_T\left(M^2\right)-\frac{J_T}{M^2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{M^2}+\frac{m_\rho^2(T)}{M^4}\right)\overline{\langle O\rangle}-I_T+\frac{\overline{\langle O\rangle}}{M^2}\right]$$

olur ve buradan sıcaklığa bağlı olarak leptonik bozunum sabitindeki kaymayı aşağıdaki gibi buluruz:

$$\Delta F_\rho(T)\equiv F_\rho(T)-F_\rho$$

$$=-\frac{\exp\left(m_\rho^2/M^2\right)}{2F_\rho}\left\{\frac{J_T}{M^2}+\left(1-\frac{m_\rho^2}{M^2}I_T+\frac{m_\rho^2}{M^4}\overline{\langle O\rangle}\right)\right\}\quad . \tag{4.72}$$

Burada $\overline{\langle O\rangle}$

$$\overline{\langle O\rangle}=\hat{m}\langle\bar{u}u\rangle+\frac{\overline{\langle G^2\rangle}}{24}+\frac{4}{16+3n_f}\left\{\langle\Theta\rangle+a\left(M^2\right)\left\langle 16\Theta^f/3-\Theta^g\right\rangle\right\} \tag{4.73}$$

şeklindedir. Operatörler üzerindeki çizgi işaretleri termal beklenen değer ile vakum beklenen değerler arasındaki farkı gösterir. Nümerik incelemelerde m_ρ ve F_ρ için $T=0$ sıcaklığındaki deneysel veriler kullanılmıştır [42]. Ayrıca $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ kuark kondensatının vakum beklenen değeri

$$2m\langle 0|\bar{u}u|0\rangle=-F_\pi^2m_\pi^2 \tag{4.74}$$

ile verilir. Burada $m=\frac{1}{2}\left(m_u+m_d\right)$ şeklinde olup F_π

$$\left\langle 0\left|A_\mu^a\right|\pi^b(q)\right\rangle=iq_\mu\delta^{ab}F_\pi \tag{4.75}$$

olarak tanımlanır ve değeri $F_\pi=93.3\,MeV$'dir. KRD Toplam Kurallarından hesaplanan gluon kondensatının vakum beklenen değeri $\langle 0|G^2|0\rangle=(330\,MeV)^4$'dir.

Kuark kondensatının sıcaklığa bağlılığı kiral pertürbasyon teorisinden elde edilir [32,33] ve

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle 0|\bar{u}u|0\rangle \left[1 - \frac{n_f^2 - 1}{n_f} \frac{T^2}{12F^2} + O\left(T^4\right) \right] \tag{4.76}$$

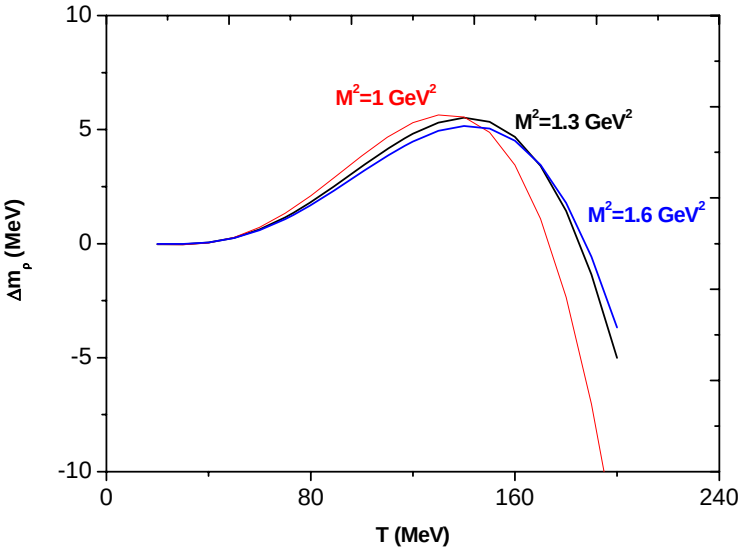
şeklindedir. Burada n_f kuark çeşni sayısı ve $F = 0.088\,GeV$'dir. $m = 7\,MeV$ alındığında $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = -(225\,MeV)^3$ elde edilir. G^2 operatörünün sonlu sıcaklıktaki ifadesi $\Theta_{\mu\nu}$ enerji momentum tensörünün izi ile ilişkilidir. Gluon kondensatının sonlu sıcaklıktaki değeri ile vakum beklenen değerinin farkı

$$\overline{\langle G^2 \rangle} \equiv \langle G^2 \rangle - \langle 0|G^2|0\rangle$$

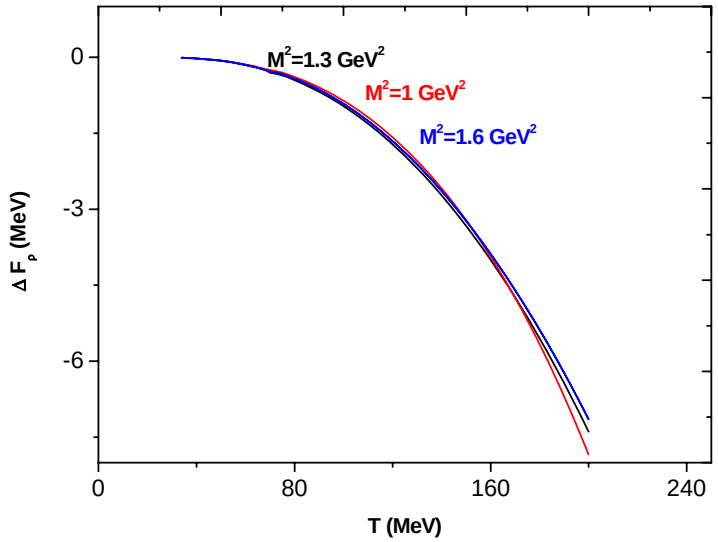
$$= -\frac{8}{9}\left(\langle \Theta_\mu^\mu \rangle - \sum_q m_q \overline{\langle \bar{u}u \rangle} \right) \tag{4.77}$$

şeklinde yazılabilir. Sonlu sıcaklıkta iz $\langle \Theta_\mu^\mu \rangle = \langle \Theta \rangle - 3P$ olarak verilir ve burada $\langle \Theta \rangle$ enerji yoğunluğu, P ise basınçtır. Hem $\langle \bar{u}u \rangle$ hemde $\langle \Theta \rangle$'nın sıcaklığa bağlılığı kiral pertürbasyon teorisi ile hesaplanır.

$\langle \Theta \rangle$ toplam enerji yoğunluğunun yanı sıra aynı zamanda $\langle 16\Theta^f/3 - \Theta^g \rangle$ termal ortalaması vardır. Tüm yukarıdaki veriler kullanılarak ρ-mezon için toplam kuralları incelendiğinde aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



Şekil 4.1: Borel parametresinin $M^2 = 1 GeV^2$, $1.3 GeV^2$, $1.6 GeV^2$ değerlerinde kütledeki kaymanın sıcaklığa bağlılığı



Şekil 4.2: Borel parametresinin $M^2 = 1 GeV^2$, $1.3 GeV^2$, $1.6 GeV^2$ değerlerinde leptonik bozunum sabitindeki kaymanın sıcaklığa bağlılığı

Şekil 4.1 ve 4.2'de Borel parametresinin $M^2 = 1 GeV^2$, $1.3 GeV^2$, $1.6 GeV^2$ değerleri için sıcaklığa bağlı kütle ve leptonik bozunum sabitindeki kayma

gösterilmiştir. Grafiklerden de görüldüğü gibi Şekil 4.1'deki Δm_ρ kütle kayması sıcaklığa bağlı olarak önce $5\,MeV$'e kadar artmış daha sonra ise azalmıştır. $120-160\,MeV$ sıcaklıkları arasında kütlenin sıcaklığa bağlı olduğu ancak çok değişmediği görülmüştür. Şekil 4.2'den görüldüğü gibi leptonik bozunum sabiti sıcaklığa bağlı olarak azalmıştır ve grafiğe bakıldığında farklı Borel parametresi değerleri için sonuçların hemen hemen aynı olduğu gözlenmiştir.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Termal KRD'ye göre enerji yoğunluğu belirli bir kritik değeri aştığında hadronik madde durumundan KGP durumuna faz geçişi olur. Bu faz geçişinin yaklaşık $T_c = 150 - 200 MeV$ sıcaklığında olduğu tahmin edilmektedir. KGP fazında hadronlar bileşenlerine ayrılırlar ve kuarklar tüm KGP hacmi boyunca hareket etme olanağına sahip olurlar. Son yıllarda yapılan ağır iyon çarpışma deneylerinde KGP ortamı oluşturulmakta ve incelenmektedir. Bu deneylerin anlaşılması için mezon ve baryon parametrelerinin sıcaklığa ve yoğunluğa bağlılığının incelenmesini gerekmektedir.

Bu tez çalışmasında deneysel olarak da incelenmesi bakımından bir çok avantaja sahip olan ρ-mezon parametrelerinin sıcaklığa bağlılığı incelenmiştir. Dört boyuta kadar tüm operatörlerden gelen katkı göz önüne alınarak ρ-mezon kanalındaki vektör akımların iki noktalı korelasyon fonksiyonu için Termal KRD toplam kuralları yazılmıştır. Sonlu sıcaklıkta Lorentz invaryantlığı sağlanmadığı için Wilson açılımında vakum toplam kurallarında mevcut olan iki eski Lorentz invaryant operatöre ilaveten iki yeni Lorentz invaryant olmayan operatör ortaya çıkmıştır. Böylece vakum toplam kurallarındaki $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ ve $\langle 0|G^2|0\rangle$ terimlerine ek olarak termal toplam kurallarında artık sıcaklığa bağlı $\langle \bar{q}q \rangle$, $\langle G^2 \rangle$, $\langle \Theta \rangle$ ve $\langle 16\Theta^f/3 - \Theta^g \rangle$ gibi dört terim elde edilmiştir. Hesaplamalardan da görüldüğü gibi yüksek boyutlu operatörlerin göz önüne alınması toplam kurallarının hesabını zorlaştırır. Bunun nedeni termal ortalamaların sıcaklığa bağlılığının hesabının kolay olmamasıdır. Hesaplamalarımız sonucunda ρ-mezonun kütlesinin ve leptonik bozunum sabitinin farklı M^2 değerleri için $160\,MeV$'e kadar sıcaklığa bağlılığı elde edilmiştir.

Bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) ρ-mezon kanalında vektör akımların zaman sıralı çarpımı şeklinde ifade edilen korelasyon fonksiyonunun Operatör Çarpım Açılımı elde edilmiştir.

2) Termal korelasyon fonksiyonunun hadronik kısmına ρ-mezon kutbundan ve $\pi\pi$-sürekliğinden gelen katkılar hesaplanmıştır.

3) ρ-mezon için Termal KRD Toplam Kuralları elde edilmiştir.

4) Elde edilen bu toplam kurallarının nümerik analizi yapılmış, ρ-mezonun kütlesinin ve leptonik bozunum sabitinin $160\,MeV$ sıcaklığa kadar değişimi incelenmiştir. Ancak kütle ve leptonik bozunum sabitinin sıcaklıkla değişiminin çok da büyük olmadığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Gell-Mann M., "A Schematic Model of Baryons and Mesons", ***Phys. Lett. 8, 3***, 214-215, (1964).

[2] Shifman M.A., Vainstein A.I. and Zakharov V.I., "QCD and resonance physics theoretical foundations", ***Nucl. Phys. B 147***, 385 (1979); Shifman M.A., Vainstein A.I. and Zakharov V.I., "QCD and resonance physics. Applications", ***Nucl. Phys. B 147***, 448, (1979).

[3] Wilson, K. G., "Non-Lagrangian Models of Current Algebra", ***Phys. Rev. D, 179***, 1499-1512, (1969).

[4] Bochkarev A. I. and Shaposhnikov M. E., "The spectrum of hot hadronic matter and finite-temperature QCD sum rules", ***Nucl. Phys. B 268***, 220, (1986).

[5] Hatsuda T., Koike Y., Lee S. H., "Finite-temperature QCD sum rules reexamined: ρ , ω and A_1 mesons", ***Nucl. Phys. B 394***, 221-264, (1993).

[6] Shuryak E. V. , "Correlation functions in the QCD vacuum", ***Rev. Mod. Phys. 65***, 1-46, (1993).

[7] Hatsuda T., Koike Y., Lee S. H., "Pattern of chiral restoration at low temperature from QCD sum rules", ***Phys. Rev. D 47***, 1225-1230, (1993).

[8] Malik S., "Operator product expansion at finite temperature", ***Phys. Lett. B 416***, 373-378, (1998).

[9] Eletsky V. L. and Ioffe B. L., "Meson Masses in Nuclear Matter", ***Phys. Rev. Lett. 78***, 1010-1013, (1997).

[10] Mallik S. and Mukherjee K., "QCD sum rules at finite temperature", ***Phys. Rev. D58***, 096011 (8 sayfa), (1998).

[11] Mallik S. and Nyffeler A., "QCD sum rules for ρ mesons in nuclear matter", ***Phys. Rev. C 63***, 065204 (9 sayfa), (2001).

[12] Veliev E.V., "Operator product expansion for the thermal correlator of scalar currents", ***J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 35*** , 035004 (6 sayfa), (2008).

[13] Veliev E. V., Aliev T. M., "Thermal QCD sum rules for σ(600) meson", ***J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 35***, 125002 (9 sayfa), (2008).

[14] Dominguez C. A., Loewe M., Rojas J.C., "Heavy-light quark pseudoscalar and vector mesons at finite temperature", ***JHEP 0708***, ***040***,(12 sayfa), (2007).

[15] Veliev E. V., Kaya G., "Leptonic Decay Constants of Ds and Bs Mesons at Finite Temperature", ***Euro. Jour. Phys. C, 63***, 87-91, (2009).

[16] Dominguez C. A., Loewe M., . Rojas J.C, Zhang Y., "Charmonium in the vector channel at finite temperature from QCD sum rules", ***Phys. Rev.D81,*** 014007, (7 sayfa), (2010).

[17] Morita K. , Lee S. H. , "Mass Shift and Width Broadening of J/psi in hot gluonic plasma from QCD Sum Rules", ***Phys.Rev.Lett.100,*** 022301, (4 sayfa), (2008).

[18] Veliev E., Kaya G., "The Mass and Leptonic decay Constant of $D_{s0}(2317)$ Meson in framework of thermal QCD sum rules", arXiv:1001.3979, (11 sayfa), (2010).

[19] Renk T. et al., "Phases of QCD, thermal quasiparticles, and dilepton radiation from a fireball", ***Phys. Rev. C 66***, 014902 (19 sayfa), (2002).

[20] Metag V., "Medium modifications of hadrons—recent experimental results", ***Progr. in Particle and Nuclear Physics 55***, 35–45, (2005).

[21] Fradkin E. S., "Quantum Field Theory and Hydrodynamics", ***Proceedings of the P. N. Lebedev Physics Institute, Vol. 29***, Nauka, Moscow, 1-126 (1965).

[22] Das A., "Finite Temperature Field Theory", ***Cambridge University Press, Cambridge, England***,World Scientific, 1-61 (1999).

[23] Bellac M., "Thermal Field Theory", ***Cambridge University Press, Cambridge, England***, World Scientific, 1-60, (1996).

[24] Matsubara I., "A New Approach to Quantum Statsitical Mechanics", ***Progr. Theor. Phys. 14, 4***, 351-378, (1955).

[25] Schwinger J., "Brownian Motion of a Quantum Oscillator", ***J. Math. Phys. 2***, 407, (1961).

[26] Mills R., "Propagators for Many-Particle Systems", ***Gordon and Breach***, New York, (1969).

[27] Kalashnikov O.K., "QCD at Finite Temperature", ***Fortsch.Phys.***, ***32, 10***, 525-583, (1984).

[28] Huang K., "Quarks, Leptons & Gauge Fields", ***World Scientific***, Massachusetts, U.S.A., 19-22 (1992).

[29] Thoma M. H., "New Developments and Applications of Thermal Field Theory", arXiv:hep-ph/0010164v1, (46 ayfa), (2000).

[30] Cabo A., Kalashnikov O.K., Veliev E. Kh., "Bootstrap Calculation of the dynamical quark mass in QCD_4 at finite temperature", ***Nucl. Phys. B 299***, 367-378, (1988).

[31] Veliev E.V., Yılmazkaya J., "Quark-Gluon Plasma Signals", ***Euro. Jour. Phys. vol.24***, 341July, (2003).

[32] Gasser J. and Leutwyler H., "Light quarks at low temperatures", ***Phys. Lett. B 184***, 83-88 (1987).

[33] Gerber P. and Leutwyler H., "Hadrons below the chiral phase transition", ***Nucl. Phys. B 231***, 387-429, (1989).

[34] Miller D. E., "Gluon Condensates At Finite Temperature", ***Acta Phys. Pol. B 28***, 2937 (1997).

[35] Miller D. E., "Lattice QCD Calculation for the Physical Equation of State", ***Phys. Rept. 443***, 55-96, (2007).

[36] Landsman N.P. and Weert Ch. G., "Real and imaginary-time field theory at finite temperature and density", ***Phys. Rep. 145, 141***, 1987.

[37] Yagi K., Hatsuda T., Miake Y., "Quark-Gluon Plasma", ***Cambridge University Press,*** 17-40, (2005).

[38] Gross D. J. and Wilczek F., "Ultraviolet Behaviour of Non-Abelian Gauge Theories", ***Phys. Rev. Lett. 30, 26***, 1343-1346, (1973).

[39] Politzer H.D., "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions", ***Phys. Rev. Lett. 30, 26***, 1346-1349, (1973).

[40] Ioffe B. L., "Calculation of Baryon Masses in Quantum Chromodynamics", Nucl. Phys. B, 188, 317-341, (1981).

[41] Colangelo P., Khodjamirian A., "In:At the Frontier of Particle Physics", vol.3, ed. Shifman M., ***World Scientific***, Singapore, 1495 (2001).

[42] Particle Data Group, "The Review of Particle Physics", ***Phys. Lett. B 667***, 1 (2008).

ÖZGEÇMİŞ

Arzu Türkan, 1984 yılında Yozgat Akdağmadeni'nde doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra 2001 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nde başladığı yüksek öğrenimini 2005 yılında tamamladı. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Fizik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans Programı'nda başladığı lisansüstü öğrenimini 2007 yılında tamamladı. Akabinde Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen İzmit'de ikamet etmektedir.