T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SPEKTRAL PROBLEMİN ÖZDEĞERLERİNİN SAYISAL ANALİZİ

Şeyma TÜLÜCE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA,2010

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR SPEKTRAL PROBLEMİN ÖZDEĞERLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Şeyma TÜLÜCE

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse

2010, 35 Sayfa

Jüri : Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse

Doç Dr. Galip Oturanç

Doç. Dr. Coşkun Kuş

Bu çalışmada ısı iletim ve titreşim problemleri gibi literatürün önemli problemlerine hazırlık teşkil etmesi bakımından regüler Sturm-Liouville sistemleri incelenmiştir.

$a \leq x \leq b$ için, $P(x) > 0$ ve $s(x) > 0$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\, s(x)]y = 0$$

şeklinde tanımlanan regüler Sturm-Liouville sisteminin sınır şartları, özdeğer ve özvektör gibi temel kavramları verilmiştir.

Birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımının bulunduğunda oluşan spektral problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiş ve sıcaklık dağılımı için formül yazılmıştır. Bazı özel haller için açık formüller elde edilmiş ve genel haller için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Sistemi, Spektral analiz, Özdeğer, Özvektör, Sıcaklık Dağılımı.

ABSTRACT

MASTER THESIS

NUMERICAL ANALYSIS OF EIGENVALUES

OF SPECTRAL PROBLEM

Şeyma TÜLÜCE

Selcuk University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Department Of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hasan Köse

2010, 35 Page

Jury : Assist. Prof. Dr. Hasan Köse

Assoc.Prof.Dr. Galip Oturanç

Assoc. Prof. Dr. Coşkun Kuş

In this study, regular Sturm-Liouville systems have been studied in order to form a preparation for the important problems of the literature such as heat conduction and vibration.

For $a \leq x \leq b$, $P(x) > 0$ and $s(x) > 0$, the equation

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\, s(x)]y = 0$$

which is defined as regular Sturm-Liouville systems the boundary conditions and its basic terms such as eigenvalues and eigenvectors were given.

The eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem arising in finding of the heat distibution in a composite medium consisting of two layers in contact are investigated and formula for the heat distribution is written. In some private conditions, the clear formulas were obtained and in some general conditions, asymptotic formulas were obtained.

Key Words: Sturm-Liouville System, Spectral Analysis, Eigenvalue, Eigenvector, Heat Distribution.

ÖNSÖZ

Mühendislik ve matematiğin arakesiti olan uygulamalı matematik, fizik ve mühendisliğin birçok probleminin modellemesi ve çözümünün bulunabildiği, matematiğin bir dalıdır.

Bu tez çalışmasında [Oturanç,G. 1995]'de incelenen birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımı problemine sayısal değerler verilerek özdeğerlerin sayısal davranışı incelenmiştir.

Yüksek Lisans Tez konumun seçimi ve yürütülmesi konusundaki büyük ilgi ve yardımları için Sayın danışmanım Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse'ye ve Sayın Doç. Dr. Galip Oturanç'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Şeyma TÜLÜCE

KONYA,2010

SEMBOLLER

a : Yüzeyler için temas noktası

b : Cismin bittiği nokta

C : Katsayı

c : Birim hacim için ısı kapasitesi

h : Yüzey ısı transfer katsayısı

K : Termal difüzivite

R(x,t) : x noktası ve t zamanındaki ısı üretim miktarı

t : Zaman

U(x,t) : x noktası ve t zamanındaki sıcaklık fonksiyonu

U_0 : Çevre sıcaklığı

U_t : U(x,t) fonksiyonunun t'ye göre kısmi türevi

U_x : U(x,t) fonksiyonunun x'e göre kısmi türevi

y(x) : Özfonksiyon(Eigenfunction)

λ : Özdeğer(Eigenvalue)

α_1 : Malzemenin gözeneklik katsayısı

β_1 : Malzemenin termal iletim katsayısı

ρ : sabit

İÇİNDEKİLER

ÖZET……i
ABSTRACT……ii
ÖNSÖZ……...iii
SEMBOLLER……iv
İÇİNDEKİLER…….……v
1.GİRİŞ……...…….……1
2. STURM -LİOUVİLLE PROBLEMLERİ……...……2
2.1. Regüler Sturm-Liouville Problemleri…….……..2
2.2. Sturm-Liouville Sisteminin Özdeğerleri…….……..3
3. BİRLEŞİK ELEMANLARDA SICAKLIK DAĞILIMININ İNCELENMESİ……...12
3.1. Birleşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımı……..12
3.2. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi Yardımcı Spektral Problem…….…..13
3.3. Spektral Problemin İncelenmesi……....15
3.4. Sıcaklık Dağılımı İçin Formül…….……...29
3.5. Bileşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımındaki Özdeğerlerin Maple Programı İle Çözümü……..29
4. SONUÇ……...……..……..…34
5. KAYNAKLAR……..……...…35

1. GİRİŞ

Bir diferansiyel denklemin bazen bilinmeyen katsayılar içeren genel çözümünü bulmakla yetiniriz. Bazı durumlarda ise, diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan çözümlerinin bulunması gerekir. Bu şartlar, genellikle problemin yapısında vardır veya doğrudan denklemle birlikte verilir. Adı geçen şartlar yalnız bir noktaya ait özel şartlar ise **başlangıç şartları**, eğer iki veya daha fazla noktayı kapsayan şartlar ise o zaman **sınır şartları** adını alır.

Örnek olarak,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - g = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = V_0 \tag{1.1}$$

denklemini ve başlangıç şartlarını göz önüne alalım. Bu denklem, g sabit ivmesi ile doğrusal hareket yapan bir hareketlinin denklemidir. Başlangıç şartlarından anlaşıldığına göre, $t = 0$ anında hareketli cismin başlangıç noktasından y_0 uzaklığında bulunmakta olup aynı anda hızı V_0 'dır. (1.1) denkleminin bu şartlara uyan genel çözümü,

$$y = y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.2}$$

olur. [Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç, G. 2001.]

Bu çalışmada, bazı diferansiyel denklemlerin integrasyon sabitlerinin belirlenmesinde, $a \leq x \leq b$ aralığının iki ucunda, başka bir deyişle iki noktada verilen ve "sınır şartları" olarak adlandırılan şartları göz önüne alıp, Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin yapısı incelenmiş, birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımında spektral problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları üzerinde durulmuştur. Birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımında spektral problemin özdeğerleri nümerik olarak hesaplanmıştır.

2. STURM -LIOUVILLE PROBLEMLERİ

2.1. Regüler Sturm-Liouville Problemleri

Sınır-değer problemleri arasında Sturm-Liouville probleminin önemli bir yeri vardır. Genel olarak sınır-değer problemi denildiği zaman ilk akla gelen, Sturm-Liouville problemidir.

Sturm-Liouville problemi ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında **C. Sturm ve J. Liouville** tarafından incelenmiştir. Asıl adı Jacques Charles Francois olan Sturm, 1903-1955 yılları arasında yaşamış, Fransız asıllı İsviçreli matematikçidir. Analiz ve fiziksel matematik üzerinde çalışmıştır. Asıl adı Joseph olan Liouville ise 1809-1882 yılları arasında yaşamıştır. Fransız analizcisi ve geometricisidir.

Daha sonra 20. yüzyılın başlarında **D. Birkhoff** (1909) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda regüler sınır şartları, özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sistemi verilmiştir.

Sturm-Liouville problemlerinin yaklaşık özdeğerlerini hesaplamak için bir çok nümerik metod mevcuttur. Nümerik örnekler ile özdeğer problemleri çift tamlık aritmetiği kullanılarak Matlab da EIG(A, B, 'chol') fonksiyonu ile de çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada ise, Maple programını kullanarak birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımında özdeğer çözümü hesaplanmıştır.

İlk olarak Sturm-Liouville sistemlerini inceleyelim.

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\, s(x)]y = 0 \qquad (2.1)$$

diferansiyel denklemine **Sturm-Liouville Denklemi** denir. Burada λ bir parametre olmak üzere, P(x), q(x) ve s(x) fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığındaki bütün x değerleri için reel fonksiyonlardır. Çözümlerin varlığını garanti edebilmek için bu aralıkta q(x) ve s(x) sürekli, P(x) ise türevlenebilir fonksiyonlardır.

Eğer P(x) ve s(x) fonksiyonları [a,b] aralığında pozitif yani $P(x) > 0$ ve $s(x) > 0$ ise (2.1) denklemi ile verilen Sturm-Liouville denklemlerine [a,b] aralığında **regüler(düzgün)**'dir denir.

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)$$

operatörünü kullanırsak (2.1) diferansiyel denklemi,

$$L[y] + \lambda\, s(x)y = 0 \qquad (2.2)$$

şeklini alır.

$a \leq x \leq b$ aralığında her λ değeri için regüler Sturm-Liouville denkleminin C^2 sınıfında iki lineer bağımsız çözümü vardır.

Bir Sturm-Liouville denklemi,

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \qquad (2.3)$$

olarak verilen sınır koşulları ile birlikte Sturm-Liouville sistemi olarak tanımlanır. Burada a_1, a_2, b_1, b_2'ler reel sabitler olup,

$a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$'dır.

2.2. Sturm-Liouville Sisteminin Özdeğerleri

Bir Sturm-Liouville sistemi için aşikar olmayan (sıfıra özdeş olmayan) çözümler varsa λ değerlerine **"özdeğer"** ve karşılık gelen çözümlere de **"özfonksiyon"** denir.

Örnek 2.2.1.

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0$$

sınır-değer problemi aşağıdaki gibi çözülebilir.

Bu problem özel bir Sturm-Liouville probleminden başka bir şey değildir. (2.1) denkleminde P(x) = 1, q(x) = 0 ve s(x) = 1 alınırsa $y'' + \lambda y = 0$ denklemi elde edilir.

Bu problemin sıfır çözümünden başka bir çözümünü bulmak için λ ' nın 3 ayrı halini ($\lambda = 0,\ \lambda < 0,\ \lambda > 0$) ayrı ayrı göz önüne almak gerekmektedir.

i) $\lambda < 0$ için $\lambda = -\mu^2$ alındığında,

$y'' + \lambda y = 0$

$m^2 - \mu^2 = 0$

$m = \pm\mu$

$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$ (2.4)

olur.

Sınır şartları aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$y(0) = 0$

$y(0) = Ae^0 + Be^0 = 0$

$A + B = 0$

$A = -B$

$y'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x}$

$y'(\pi) = A\mu e^{\mu\pi} - B\mu e^{-\mu\pi} = 0$

$= \mu(Ae^{\mu\pi} - Be^{-\mu\pi}) = 0$

$\mu \neq 0$ olduğu için $e^{\mu\pi} \neq 0$ ve $e^{-\mu\pi} \neq 0$ yazılabilir. O halde $A = B = 0$ olmalıdır. O zaman denklem $y(x) = 0$ aşikar çözümüdür.

ii) $\lambda = 0$ için $y'' = 0$ elde edilir.

$y'' = 0$

$y' = A$

$y = A\,x + B$ (2.5)

olur. Sınır şartları uygulandığında

$y(0) = 0$ sınır şartı için,

$y(0) = A\,0 + B = 0$ olduğundan, $B = 0$ elde edilir.

$y'(\pi) = 0$ sınır şartı için,

$y'(x) = A$ olduğundan, $y'(\pi) = A = 0$ elde edilir.

O halde $\lambda = 0$ için de aşikar çözüm elde edilir.

iii) $\lambda > 0$ için durum daha farklıdır.

$m^2 + \lambda = 0$

$m^2 = -\lambda$

$m^2 = i^2 \lambda$

$m = \pm i\sqrt{\lambda}$

olur.

Denklem ise,

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\, x}$$

$$= c_1[\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + i \sin(\sqrt{\lambda}\, x)] + c_2\, [\cos(\sqrt{\lambda}\, x) - i \sin(\sqrt{\lambda}\, x)]$$

$$= \cos(\sqrt{\lambda}\, x)(c_1 + c_2) + \sin(\sqrt{\lambda}\, x)\ i\,(c_1 - c_2)$$

Burada $c_1 + c_2 = A$ ve $i\,(c_1 - c_2) = B$ koyulursa,

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B \sin(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad (2.6)$$

olur.

Sınır şartları uygulanırsa,

$y(0) = A\cos(0) + B\sin(0)$

$y(0) = A$

$y(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ bulunur.

$y'(x) = -\sqrt{\lambda}\, A \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \sqrt{\lambda}\, B \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$

$y'(\pi) = -\sqrt{\lambda}\, A \sin(\sqrt{\lambda}\, \pi) + \sqrt{\lambda}\, B \cos(\sqrt{\lambda}\ \pi)$

$y'(\pi) = 0 + \sqrt{\lambda}\, B \cos(\sqrt{\lambda}\ \pi)$

$y'(\pi) = \sqrt{\lambda}\, B \cos(\sqrt{\lambda}\ \pi)$

$y'(\pi) = 0$ olduğundan $\sqrt{\lambda}\, B \cos(\sqrt{\lambda}\ \pi) = 0$ olmalıdır.

$B = 0$ ve $\lambda \neq 0$ seçimi aşikar çözümü vereceğinden $B \neq 0$ ve $\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$ almalıyız.

$$\cos(\sqrt{\lambda}\ \pi) = 0$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}\ \pi) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \quad , \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2}$$

olup özdeğerler,

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$$

şeklindedir. Karşılık gelen özfonksiyonlar , $B = c_n$ olduğunda

$$\theta_n(x) = c_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) x \quad , \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklindedir. [Korum, D. 2002.]

Örnek 2.2.2.

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0$$

sınır-değer problemi aşağıdaki gibi çözülebilir.

Bu problem özel bir Sturm-Liouville problemidir.

i) $\lambda = 0$ ise bu durumda denklemin genel çözümü,

$$y = A\,x + B \qquad (2.7)$$

olur. Sınır şartları genel çözüme ayrı ayrı uygulanırsa, açıkça görülür ki, $A = B = 0$ elde edilir. $\lambda = 0$ için verilen sınır-değer probleminin tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

ii) $\lambda < 0$ ise bu durumda denklemin kökleri $\pm\sqrt{-\lambda}$ 'dır. Burada $\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ile gösterilirse adı geçen kökler $+\alpha$ ve $-\alpha$ gibi birbirinden farklı iki reel sayıdır. O halde genel çözüm,

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \qquad (2.8)$$

olur. Sınır şartları yukarıdaki denkleme uygulanırsa,

$$A + B = 0$$

$$Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} = 0$$

elde edilir. Burada katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi} & e^{-\alpha\pi} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, $\lambda < 0$ olması halinde de problemin tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

iii) $\lambda > 0$ ise bu durumda denklemin kökleri $\pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ şeklinde iki eşlenik kompleks sayıdır. Denklemin genel çözümü,

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad (2.9)$$

olur. Sıra ile sınır şartlarını denkleme uygulayalım.

$$y(0) = A\cos(0) + B\sin(0)$$

$$y(0) = A + 0 = 0$$

olur. Buradan $A = 0$ bulunur. İkinci sınır şartını uygulayalım.

$$y(\pi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)$$

$$y(\pi) = 0 + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)$$

$$y(\pi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)$$

olur. Buradan,

$$B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$$

elde edilir. $B \neq 0$ ve $\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$ olması halinde aşikar olmayan çözümler elde edilir.

$$\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = \sin(n\pi)$$

$$\sqrt{\lambda} = n$$

$$\lambda_n = n^2, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

değerleri denklemi sağlar. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon, $B = c_n$ olduğunda

$$\theta_n(x) = c_n \sin(nx) \ , \qquad (n = (1, 2, \dots)$$

şeklindedir. [Korum, D. 2002.]

Örnek 2.2.3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0 \ , \quad y(L) = 0$$

problemi aşağıdaki gibi çözülebilir.

i) $\lambda = 0$ için tek çözüm "sıfır" çözümüdür.

ii) $\lambda < 0$ için,

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \qquad (2.10)$$

$$y = c_1 + c_2 = 0$$

$$y(L) = c_1 e^{\alpha L} + c_2 e^{-\alpha L} = 0$$

katsayılar determinantı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha L} & e^{-\alpha L} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, $\lambda < 0$ için sistemin tek çözümü "sıfır" çözümüdür.

iii) $\lambda > 0$ için,

$$y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad (2.11)$$

$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$y(L) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, L) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, L)$$

$$= c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$$

$$c_1 \neq 0 \quad \text{için} \quad \sin(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}\, L) = \sin(n\pi)$$

$$\sqrt{\lambda}\,L = n\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

olur. O halde karakteristik kökler,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

şeklindedir.

Bu karakteristik köklere karşılık gelen karakteristik fonksiyonlar ise,

$$\theta_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$$

şeklindedir. [Korum, D. 2002.]

Örnek 2.2.4.

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\frac{y}{x} = 0$$

$$y'(1) = 0\,,\; y'(e^{2\pi}) = 0$$

Sturm-Liouville probleminin karakteristik değerlerini ve karakteristik fonksiyonlarını bulunuz.

i) $\lambda = 0$ ise bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

olur. Bu denklemin genel çözümü,

$$x\frac{dy}{dx} = c_0$$

$$y = c_0 \ln x + c \qquad (2.12)$$

elde edilir.

Sınır şartlarını uygulamadan önce y'nin birinci türevi,

$$y' = c_0\frac{1}{x}$$

bulunur.

Sınır şartları uygulanırsa,

$$y'(1) = c_0 \frac{1}{1} = 0$$

ve

$$y'(e^{2\pi}) = c_0 \frac{1}{e^{2\pi}} = 0$$

olur. Görülüyor ki $c_0 = 0$ 'dır. Bu değer denklemde yerine koyulursa,

$$y = c_n \quad , \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

elde edilir. Burada c_n sıfırdan farklı herhangi bir keyfi sabit sayıdır. $\lambda = 0$ için karşılık gelen sıfır çözümünden farklı olan özfonksiyon, $y = c_n$'dir.

ii) $\lambda > 0$ ise bu durumda $x = e^t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

ve genel çözüm olarak,

$$y = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$$

veya

$$y = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) \qquad (2.13)$$

elde edilir. Denklemin birinci türevi alınırsa,

$$y' = c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

bulunur. Burada sınır şartları uygulanırsa,

$$y' = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(0) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(0) = 0$$

ve buradan $c_1 \sqrt{\lambda} = 0$ veya $c_1 = 0$ elde edilir.

İkinci sınır şartının uygulanmasından,

$$y'(e^{2\pi}) = c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{2\pi}} \cos(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{2\pi}} \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln e^{2\pi}\right) = 0$$

veya

$$c_2 \sqrt{\lambda} e^{-2\pi} \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

bulunur.

Sıfır çözümünden farklı bir çözümün gerçekleşebilmesi için,

$$\sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

veya

$$2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

olmalıdır. Buradan,

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4} \ , \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ve buna bağlı olarak karakteristik fonksiyonlar,

$$\theta_n(x) = \ c_n \cos\left(\frac{n}{2}\ln x\right)$$

elde edilir. [Korum, D. 2002.]

3. BİRLEŞİK ELEMANLARDA SICAKLIK DAĞILIMININ İNCELENMESİ

Birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımı ve ısı geçişi birçok endüstri problemlerinde karşılaşılan bir konudur. [Özışık, N. 1980] monografisinin 8. bölümünde birbiri ile temasta bulunan birkaç tane farklı paralel levhalardan oluşan birleşik cisimde sıcaklık dağılımı için, yardımcı spektral problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları cinsinden formül yazılmıştır. Bu yüzden ilgili spektral problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunması gerekmektedir. Burada yardımcı spektral problemin sonsuz sayıda özdeğerlerinin varlığı matematiksel olarak ispatlanmış, bazı özel hallerde özdeğerlerinin açık şekli bulunmuş, genel halde ise özdeğerler için asimptotik formül elde edilmiştir. [Oturanç, G. 1995]

3.1. Birleşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımı

Birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımının hesaplanmasında kullanılan sınır koşullarını vermeden önce kurulacak probleme ilişkin bir boyutlu ısı geçişi denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.1.1.

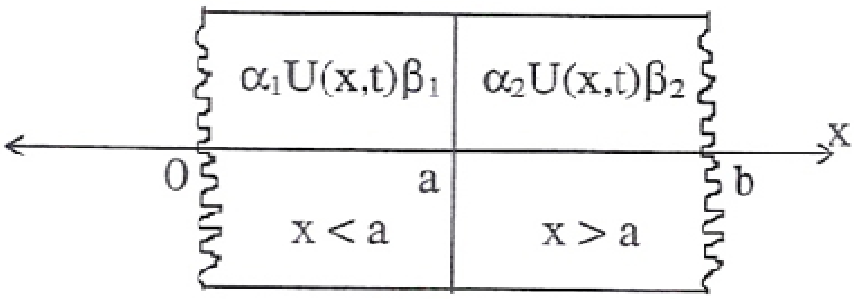
t zamanı göstermek üzere, $t > 0$, x yolu boyunca U(x,t) iki değişkenli fonksiyonu birimsizleştirilmiş (boyutsuzlaştırılmış) sıcaklık dağılımını göstersin. Genel olarak

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = K\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + (1/c)R(x,t) - h[U(x,t) - U_0] \qquad (3.1)$$

ifadesine zamana bağlı bir boyutlu sıcaklık dağılımı denklemi denir. [Churchill, R. V. 1972.]

Eşitlik (3.1)'de c, birim hacim başına ısı kapasitesi R(x,t), t zamanında x yolu boyunca "üretilen ısı" , "K" "termal difuzivite", h, pozitif değerli "yüzey ısı transfer katsayısı" ve U_0 ise "çevre sıcaklığıdır".

Eşitlik (3.1)'de U(x,t) ve R(x,t) fonksiyonları dışında kalan büyüklükler genellikle uygulamada sabit olarak kabul edilirler. Isı iletim katsayıları β_1, β_2 olan iki malzemenin "a" sınırında temas ettiklerini varsayılsın, (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. İki levha arasında ısı geçişi

x=a noktasında genel ısı üretimi ve ısı soğurması olabilir. Bu durumda

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a-0) \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a+0)$$

$$x < a \qquad\qquad x > a$$

gösterimleri kullanılmak üzere;

$$\alpha_1 U(a-0,t) = \alpha_2 U(a+0,t) \qquad (t > 0)$$

$$\beta_1 U_x(a-0,t) = \beta_2 U_x(a+0,t) \qquad (t < 0) \qquad (3.2)$$

eşitlikleri yazılabilir. [Churchill, R. V. 1972.], burada α_1 , α_2 ve β_1 , β_2 pozitif sabitlerdir. α_1, α_2 değerleri gözeneklik katsayıları, β_1, β_2 değerleri ise, ısı iletim katsayılarıdır. [Özışık, N. 1980.]

3.2. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi Yardımcı Spektral Problem

Değişkenlerine ayırma yöntemi (Fourier yöntemi) kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin çözümünde oldukça kullanışlı bir yöntem olup, literatürde de oldukça yoğun bir şekilde yer almaktadır. Değişkenlere ayırma yöntemi ile çözüm bulmada özdeğer ve özvektörlerin (özfonksiyonların) teorik olarak incelenmesi spektral teori bilimi çerçevesi içinde araştırılmaktadır. Eşitlik (3.1)'de $R(x,t) \equiv 0$ ve $h = 0$ olması durumunda, x = a noktasındaki iki farklı cismin teması aşağıdaki koşullar altında verilsin.

$$\left.\begin{aligned} U_t &= K_1 U_{xx}\,(\,0 < x < a,\ t > 0) \\ U_t &= K_2 U_{xx}\,(\,a < x < b,\ t > 0) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$U(0, t) = 0$, $U(b, t) = 0$ (dış sınır koşulları) (3.4)

$$\left.\begin{aligned} U(a-0,t) &= \alpha U(a+0,t) \\ U_x(a-0,t) &= \beta U_x(a+0,t) \end{aligned}\right\} \text{ (iç temas koşulları)} \tag{3.5}$$

$U(x, 0) = f(x)$, $0 < x < b$ (başlangıç koşulu) (3.6)

Burada K_1, K_2 ve α, β pozitif sabitlerdir.

(3.6) başlangıç koşulunu dikkate almaksızın (3.3) denkleminin (3.4) ve (3.5) koşullarını sağlayan çözümünü

$$U(x, t) = e^{-\lambda t} y(x), \quad 0 < x < b \tag{3.7}$$

şeklinde arayalım, burada λ kompleks değerler alabilir parametredir, $y(x)$ fonksiyonu ise, t'ye bağlı olmayıp λ'ya bağlı olabilir.

(3.7) ifadesi (3.3), (3.4) ve (3.5) denklemlerinde yerine konulduğunda ,

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda \rho_1^2 y(x) \ ; \ 0 < x < a \\ -y''(x) &= \lambda \rho_2^2 y(x) \ ; \ a < x < b \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$y(0) = y(b) = 0$ (3.9)

$$\left.\begin{aligned} y(a-0) &= \alpha\, y(a+0) \\ y'(a-0) &= \beta\, y'(a+0) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada $\rho_1 = 1/\sqrt{K_1}$, $\rho_2 = 1/\sqrt{K_2}$ olarak alınmıştır.

$U(x, t) = e^{-\lambda t} y(x)$ ise,

$$U_x(x,t) = e^{-\lambda t} y'(x)$$

$$U_{xx}(x,t) = e^{-\lambda t} y''(x)$$

$$y''(x) = \frac{U_{xx}(x,t)}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\frac{1}{K_1}U_t}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{1}{K_1}U_t e^{\lambda t}$$

$$= \frac{1}{K_1}.-\lambda e^{-\lambda t}y(x)e^{\lambda t}$$

$$= \frac{1}{K_1}.-\lambda y(x)$$

$y''(x) = \frac{1}{K_1}.-\lambda y(x)$ olur. O halde

$$-y''(x) = \frac{1}{K_1}.\lambda y(x)$$

elde edilir. Burada $\rho_1^2 = \frac{1}{K_1}$ koyulursa istenilen elde edilir. $\rho_1 = 1/\sqrt{K_1}$ olur. Aynı şekilde (3.6) denkleminin x'e göre birinci ve ikinci türevleri alınıp

$$U_t = K_2 U_{xx}(\, a < x < b,\ t > 0)$$

denkleminden U_{xx} çekilip yerine yazılarak $\rho_2 = 1/\sqrt{K_2}$ olduğu da ispatlanabilir. [Oturanç, G. 1995.]

3.3. Spektral Problemin İncelenmesi

Tanım 3.3.1.

Eğer bir kompleks λ değerinde (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeş olarak sıfır olmayan bir y(x) çözümü varsa, bu λ değerine (3.8), (3.9), (3.10) probleminin **özdeğeri** ve y(x) çözümüne de λ özdeğerine karşılık gelen **özfonksiyonu** denir. [Oturanç, G. 1995.]

Böylece (3.3), (3.4), (3.5) probleminin (3.7) şeklinde çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul λ'nın (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeğeri ve y(x)'in de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olmasıdır.

(3.8), (3.9), (3.10) probleminin bütün özdeğerlerinden oluşan kümeye bu problemin **spektr**‘i denir. Özdeğerlerin incelenmesi problemine de **spektral problem** denir.

Önerme 3.3.1. (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeğerleri reeldir. [Oturanç, G. 1995.]

İspat : λ kompleks değerli (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeğeri ve y(x) de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Eşitlik (3.8) ile verilen denklemler $\bar{y}$ ile çarpılıp tanımlı oldukları aralıklarda integre edilirse;

$$-\int_0^a y''(x)\overline{y(x)}\,dx = \lambda\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2\,dx$$

ve

$$-\int_a^b y''(x)\overline{y(x)}\,dx = \lambda\rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2\,dx$$

elde edilir. Kısmi integrasyondan,

$u = \overline{y(x)}$ ve $dv = y''(x)\,dx$ alınırsa,

$$-\int y''(x)\overline{y(x)}\,dx = -y'(x)\overline{y(x)} + \int y'(x)\,\overline{y'(x)}\,dx$$

yazılabilir. Bu denklem tanımlı aralıklarda yazılıp bu iki eşitlikte yerine koyulursa sırasıyla,

$$-y'(a-0)\overline{y(a-0)} + \int_0^a y'(x)\overline{y'(x)}\,dx = \lambda\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2\,dx$$

$$-y'(a+0)\overline{y(a+0)} + \int_a^b y'(x)\overline{y'(x)}\,dx = \lambda\rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2\,dx$$

elde edilir. Eşitlik (3.10)’dan,

$$-\alpha\beta\, y'(a+0)\overline{y(a+0)} + \int_0^a |y'(x)|^2\,dx = \lambda\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2\,dx \qquad (3.11)$$

$$-y'(a+0)\overline{y(a+0)} + \int_a^b |y'(x)|^2\,dx = \lambda\rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2\,dx \qquad (3.12)$$

elde edilir. Eşitlik (3.12)’in her iki tarafını $\alpha\beta$ ile çarpılıp eşitlik (3.11) ile taraf tarafa toplanırsa,

$$\int_0^a |y'(x)|^2\,dx - \alpha\beta \int_a^b |y'(x)|^2\,dx = \lambda\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2\,dx - \alpha\beta\,\lambda\rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2\,dx \qquad (3.13)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerden;

$$\lambda = \frac{\int_0^a |y'(x)|^2\,dx - \alpha\beta \int_a^b |y'(x)|^2\,dx}{\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2\,dx - \alpha\beta\,\rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2\,dx}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikten görüleceği üzere λ reeldir.

Önerme 3.3.2.

(3.8), (3.9), (3.10) probleminin birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki "ortogonallik" bağıntısını sağlar.

$< y_1, y_2 > = 0$ olmak üzere,

$$\rho_1^2 \int_0^a y_1(x)\overline{y_2(x)}\,dx + \alpha\beta\,\rho_2^2 \int_a^b y_1(x)\overline{y_2(x)}\,dx \qquad (3.14)$$

yazılır. [Oturanç, G. 1995.]

İspat : Önce $0 < x < a$ aralığını inceleyelim.

$$-y_1''(x) = \lambda_1\,\rho_1^2 y_1(x) \qquad (3.15)$$

$$-y_2''(x) = \lambda_2\,\rho_1^2 y_2(x) \qquad (3.16)$$

Eşitlik (3.15)'in her iki tarafını $\overline{y_2(x)}$ ile eşitlik (3.16)'nın eşleğini alıp her iki tarafını $y_1(x)$ ile çarpalım.

$$-y_1''(x)\overline{y_2(x)} = \lambda_1\,\rho_1^2 y_1(x)\overline{y_2(x)}$$

$$-y_1(x)\overline{y_2''(x)} = \lambda_2\,\rho_1^2\,y_1(x)\overline{y_2(x)}$$

Bu iki denklemi birbirinden çıkarıp $0 < x < a$ aralığında integralleyelim.

$$\int_0^a [-y_1''(x)\overline{y_2(x)} + y_1(x)\overline{y_2''(x)}]\,dx = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho_1^2 \int_0^a y_1(x)\overline{y_2(x)}\,dx$$

kısmi integrasyon ile çözülüp sınırlar için eşitlik (3.9) ve (3.10) yazılıp, kısmi integrasyondan,

$u = \overline{y_2(x)}$ ve $dv = y_1''(x)dx$ alınırsa,

$$\int_0^a -y_1''(x)\overline{y_2(x)}\ dx = -y_1'(x)\overline{y_2(x)} + \int_0^a y_1'(x)\overline{y_2'(x)}\ dx$$

$u = y_1(x)$ ve $dv = \overline{y_2''(x)}\,dx$ alınırsa,

$$\int_0^a y_1(x)\overline{y_2''(x)}\ dx = y_1(x)\,\overline{y_2'(x)} - \int_0^a \overline{y_2'(x)}\,y_1'(x)dx$$

elde edilir. Bu ifadeler yerine yazılırsa,

$$-y_1'(x)\overline{y_2(x)} + \int_0^a y_1'(x)\overline{y_2'(x)}\ dx + y_1(x)\overline{y_2'(x)} - \int_0^a \overline{y_2'(x)}\,y_1'(x)dx = -y_1'(x)\overline{y_2(x)} + y_1(x)\overline{y_2'(x)}$$

$$\left[-y_1'(x)\overline{y_2(x)} + y_1(x)\overline{y_2'(x)}\right]_0^a = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho_1^2 \int_0^a y_1(x)\overline{y_2(x)}\ dx$$

$$-y_1'(a-0)\overline{y_2(a-0)} + y_1(a-0)\overline{y_2'(a-0)} = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho_1^2 \int_0^a y_1(x)\overline{y_2(x)}\ dx \qquad (3.17)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.15) ve (3.16) için aynı işlemler $a < x < b$ aralığı için yapılırsa,

$$-y_1''(x) = \lambda_1 \rho_2^2 y_1(x)$$

$$-y_2''(x) = \lambda_2 \rho_2^2 y_2(x)$$

alındığında,

$$-y_1''(x)\overline{y_2(x)} = \lambda_1 \rho_2^2 y_1(x)\overline{y_2(x)}$$

$$-y_1(x)\overline{y_2''(x)} = \lambda_2 \rho_2^2\, y_1(x)\overline{y_2(x)}$$

yazılabilir. Bu iki denklem birbirinden çıkarılıp $a < x < b$ aralığında integrallenirse, eşitlik (3.9) ve (3.10) yardımı ile

$$-y_1'(a+0)\overline{y_2(a+0)} + y_1(a+0)\overline{y_2'(a+0)} = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho_2^2 \int_a^b y_1(x)\overline{y_2(x)}\ dx \qquad (3.18)$$

elde edilir. Eşitlik (3.10), (3.17) ve (3.18) yardımı ile $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için,

$$\rho_1^2 \int_0^a y_1(x)\overline{y_2(x)}\,dx + \alpha\beta\,\rho_2^2 \int_a^b y_1(x)\overline{y_2(x)}\,dx = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.3.3. (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeğerleri bir katlıdır. Yani her özdeğere sadece bir tane lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir. [Oturanç, G. 1995.]

İspat : Bir λ özdeğerine iki tane lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonlarının karşılık geldiğini varsayalım. O halde (0, a) ve (a, b) aralıklarından en az birisi üzerinde $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları birbirleri ile lineer bağımsız olmalıdır.

Aksini kabul edelim;

$$y_2(x) = C_1 y_1(x) \quad (0 < x < a)$$

$$y_2(x) = C_2 y_1(x) \quad (a < x < b)$$

olacak şekilde C_1 ve C_2 sabitleri vardır. Bu ifadeler eşitlik (3.5)'de yerine yazılırsa sırasıyla,

$$y_1(a-0) = \alpha y_1(a+0)$$

$$y_2(a-0) = \alpha y_2(a+0)$$

ve

$$y_1'(a-0) = \beta y_1'(a+0)$$

$$y_2'(a-0) = \beta y_2'(a+0)$$

$$C_1 y_1(a-0) = \alpha C_2 y_1(a+0)$$

$$C_1 y_1'(a-0) = \beta C_2 y_1'(a+0)$$

Buradan, $C_1 = C_2$ olduğu görülür. Çünkü $y(x) \neq 0$ dır. O halde her özdeğere sadece bir tane lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.

Özdeğerleri incelemek için onların sağladığı denklemi (karakteristik denklemi) bulalım. Bu amaçla $\varphi(x,\lambda)$ $(0 < x < a)$ ile

$$-y''(x) = \lambda\rho_1^2 y(x) \qquad 0 < x < a \tag{3.19}$$

$$\varphi(0,\lambda) = 0\ ,\ \varphi'(0,\lambda) = 1 \tag{3.20}$$

ve

$\Psi(x,\lambda)$ $(a < x < b)$ ile de,

$$-y''(x) = \lambda\rho_2^2 y(x) \qquad a < x < b \tag{3.21}$$

denkleminin

$$\Psi(b,\lambda) = 0\ ,\ \Psi'(b,\lambda) = 1 \tag{3.22}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü gösterilsin.

Önerme 3.3.4. (3.8), (3.9), (3.10) probleminin λ özdeğerleri

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi(a-0,\lambda) & \alpha\Psi(a+0,\lambda) \\ \varphi'(a-0,\lambda) & \beta\Psi'(a+0,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \beta\,\varphi(a-0,\lambda)\Psi'(a+0,\lambda) - \alpha\,\varphi'(a-0,\lambda)\Psi(a+0,\lambda)$$

fonksiyonunun kökleri ile çakışır. [Oturanç, G. 1995.]

İspat : Eşitlik (3.19)' un y(0) = 0 şartını sağlayan çözümü

$y(x) = C_1\varphi(x,\lambda)$ $(0 < x < a)$

şeklinde, Eşitlik (3.21)' in y(b) = 0 şartını sağlayan çözümü de

$y(x) = C_2\Psi(x,\lambda)$ $(a < x < b)$

şeklindedir. O halde y(x) çözümünün eşitlik (3.10) şartını sağlaması için

$$C_1\varphi(a-0,\lambda) = \alpha\, C_2\Psi(a+0,\lambda)$$

$$C_1\varphi'(a-0,\lambda) = \beta\, C_2\Psi'(a+0,\lambda)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. y(x)' in aşikar olmaması için C_1 ve C_2 ' nin en az biri sıfırdan farklı olmalıdır. Buradan,

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi(a-0,\lambda) & \alpha\Psi(a+0,\lambda) \\ \varphi'(a-0,\lambda) & \beta\Psi'(a+0,\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

Eşitlik (3.8), (3.9), (3.10) probleminin özdeğerlerinin varlığını incelemek için bu özdeğerlerin sağladığı denklem (karakteristik denklem) elde edilmelidir. Bu amaçla eşitlik (3.8)'de $\lambda = s^2$ yazılırsa,

$$-y''(x) = s^2 \rho_1^2 y(x) \quad ; \quad (0 < x < a)$$

$$-y''(x) = s^2 \rho_2^2 y(x) \quad ; \quad (a < x < b)$$

elde edilir. Eşitlik (3.8)' in, Eşitlik (3.9) koşullarını sağlayan genel çözümü

$$y(x) = C_1 \frac{\sin(s\rho_1 x)}{s} \qquad , \ 0 < x < a$$

$$y(x) = C_2 \frac{\sin[s\rho_2 (b-x)]}{s} \qquad , \ a < x < b \tag{3.23}$$

şeklinde olur. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

$$C_1 \frac{\sin[s\rho_1 a]}{s} = \alpha C_2 \frac{\sin[s\rho_2 (b-a)]}{s}$$

$$\rho_1 C_1 \cos(s\rho_1 a) = -\beta\rho_2 C_2 \cos[s\rho_2 (b-a)]$$

elde edilir. Buradan

$$C_1 \frac{\sin[s\rho_1 a]}{s} - \alpha C_2 \frac{\sin[s\rho_2 (b-a)]}{s} = 0$$

ve

$$C_1\rho_1 \cos(s\rho_1 a) + C_2\beta\rho_2 \cos s\,[\rho_2 (b-a)] = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu son iki denklemde katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \frac{\sin(s\,\rho_1 a)}{s} & -\alpha\,\frac{\sin[s\,\rho_2(b-a)]}{s} \\ \rho_1\cos(s\,\rho_1 a) & \beta\rho_2\cos[s\ \rho_2(b-a)] \end{vmatrix} = 0$$

olarak yazılır. Bu determinant açılırsa,

$$\Delta(s) = \beta\rho_2\,\frac{(\sin s\,\rho_1 a)}{s}\cos[s\ \rho_2(b-a)] + \alpha\rho_1\cos(s\,\rho_1 a)\ \frac{\sin[s\,\rho_2(b-a)]}{s}$$

$$= \beta\frac{\rho_2}{2s}\{\sin(s\,[\rho_1 a + \rho_2(b-a)]) + \sin(s\ [\rho_1 a - \rho_2(b-a)])\} +$$

$$+\alpha\frac{\rho_1}{2s}\{\sin(s\,[\rho_1 a + \rho_2(b-a)]) - \sin(s\ [\rho_1 a - \rho_2(b-a)])\}$$

$$= 0$$

$$\frac{1}{2s}(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)\sin s[\rho_1 a + \rho_2(b-a)] - \frac{1}{2s}(\alpha\rho_1 - \beta\rho_2)\sin[\rho_1 a - \rho_2(b-a)] = 0$$

bulunur.

$$A = \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 \quad , \quad B = \alpha\rho_1 - \beta\rho_2$$

$$\delta = \rho_1 a + \rho_2(b-a)\ ,\ \gamma = \rho_1 a - \rho_2(b-a) \tag{3.24}$$

olmak üzere

$$\Delta(s) = \frac{1}{2s}\,[A\sin(s\delta) + B\sin(s\gamma)] = 0 \tag{3.25}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\Delta(s) = 0 \tag{3.26}$$

elde edilir.

Burada $A > 0$, $-\infty < B < \infty$ ve $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere,

$$\left|\frac{B}{A}\right| = \left|\frac{\alpha\rho_1 - \beta\rho_2}{\alpha\rho_1 + \beta\rho_2}\right| < 1 \tag{3.27}$$

$\delta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$ olmak üzere,

$$\left|\frac{\gamma}{\delta}\right| = \left|\frac{\rho_1 a - \rho_2(b-a)}{\rho_1 a + \rho_2(b-a)}\right| < 1 \qquad (3.28)$$

elde edilir.

$\Delta(0) \neq 0$ olduğu gösterilebilir. Doğrudan da,

Eğer $\gamma = 0$ ise Eşitlik (3.25)' den

$$\Delta(0) = \frac{1}{2} A\,\delta \neq 0$$

Eğer $\gamma \neq 0$ ise yine Eşitlik (3.25)' den

$$\Delta(0) = \frac{1}{2}(A\,\delta + B\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)[\rho_1 a + \rho_2(b-a)] + (\alpha\rho_1 - \beta\rho_2)[\rho_1 a - \rho_2(b-a)]$$

$$= \frac{1}{2}\{\alpha a\,\rho_1^2 + \alpha(b-a)\rho_1\rho_2 + \beta a\rho_1\rho_2 + \beta(b-a)\rho_2^2 +$$

$$\alpha a\rho_1^2 - \alpha(b-a)\rho_1\rho_2 - \beta a\rho_1\rho_2 + \beta(b-a)\rho_2^2\}$$

$$= \alpha a\,\rho_1^2 + \beta(b-a)\rho_2^2 \neq 0$$

bulunur.

Bu sonuçtan sonra aşağıdaki özel durumlar incelenebilir.

i) B = 0 olsun. $[\leftrightarrow \rho_1 a = \rho_2(b-a)] \rightarrow \Delta(s) = \frac{A}{2}\frac{\sin s\delta}{s}$

$S_0 = 0$ değeri (3.8), (3.9) problemi için özdeğer vermiyor. Çünkü bu değer için (3.8), (3.9) probleminin yalnızca sıfır çözümü vardır. Ayrıca $\Delta(0) \neq 0$ olduğunu da biliyoruz.

$$\Delta(s) \neq 0 \rightarrow s\delta = n\pi\,, (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \rightarrow S_n = {}^{n\pi}/_{\delta}\,, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\lambda_n = S_n^2 = ({}^{n\pi}/_{\delta})^2 = [(\pi/\rho_1 a + \rho_2(b-a)).n]^2 \;,\; n = 1, 2, 3, \dots$$

Eşitlik (3.23)'de $C_1 = 1$ kabul edilerek,

$$C_2 = \frac{\sin(s_n\,\rho_1 a)}{\alpha \sin[s_n\,\rho_2(b-a)]}$$

elde edilir. O halde öz fonksiyonlar

$$y_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_n}\sin(s_n\rho_1 x) \quad , & 0 < x < a \\ \frac{\sin(s_n\rho_1 a)}{\alpha\, s_n \sin[s_n\rho_2(b-a)]}\sin[s_n\rho_2(b-x)] \quad , & a < x < b \end{cases} \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir.

ii) $\gamma = 0$ olsun. $[\leftrightarrow \rho_1 a = \rho_2(b-a)]$

yukarıdaki durum ile aynı olan sonuç elde edilir

iii) $\gamma = \frac{\delta}{2}$ olsun.

$$\rho_1 a - \rho_2(b-a) = \frac{\rho_1 a + \rho_2(b-a)}{2}$$

$$2\rho_1 a - 2\rho_2(b-a) = \rho_1 a + \rho_2(b-a)$$

$$\rho_1 a = 3\rho_2(b-a)$$

$$\rho_2 = \frac{a}{3(b-a)}\rho_1 \quad \text{veya} \quad a = \frac{3\rho_2}{\rho_1 + 3\rho_2}\, b$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{3\rho_2}{\rho_1+3\rho_2} < 1$ yazılabilir ve bundan dolayı $a < b$ koşulu sağlanır.

$$\Delta(s) = 0$$

$$\frac{1}{2s}\left[A\sin(s\delta) + B\sin\left(\frac{s\delta}{2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{2s}\left[2A\,\sin\left(\frac{s\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{s\delta}{2}\right) + B\sin\left(\frac{s\delta}{2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{2s}\sin\left(\frac{s\delta}{2}\right)\left[2A\cos\left(\frac{s\delta}{2}\right) + B\right] = 0$$

1) $\frac{1}{2s}\sin\left(\frac{s\delta}{2}\right) = 0$ ise,

$$\frac{s\delta}{2} = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$s_n = \frac{2n\pi}{\delta} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

2) $\left[2A\cos\left(\frac{s\delta}{2}\right) + B = 0\right]$ ise,

$$\cos\left(\frac{s\delta}{2}\right) = -\frac{B}{2A}$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{B}{2A}\right) = d$$

$$\left|\frac{B}{A}\right| < 1 \leftrightarrow -1 < \frac{B}{A} < 1$$

$$\frac{-1}{2} < -\frac{B}{2A} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} < d < \frac{2\pi}{3}$$

olsun.

$$\frac{s\delta}{2} = \pm d + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$s_n^- = \frac{4n\pi - 2d}{\delta} \quad , \quad s_n^+ = \frac{4n\pi + 2d}{\delta}$$

elde edilir.

Hiçbir ön şart vermeden

$$\Delta(s) = \frac{1}{2s}\left[A\sin(s\delta) + B\sin(s\gamma)\right] = 0$$

denkleminin s köklerinin varlığı ve bu köklerin sayısının incelenmesi problemi (Özışık, 1980) spektral teori çalışmaları için önemlidir.

Köklerin varlığı ve bu köklerin sonsuz sayıda olması kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden bilinen Rouche teoreminden yaralanılarak incelenebilir.

Teorem 3.3.1.(Rouche Teoremi)

f(z) ve g(z) fonksiyonları basit ve kapalı Γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik (holomorf) olsunlar. Eğer Γ hiçbir sıfır yerinden geçmiyorsa ve Γ üzerinde $|f(z)| > |g(z)|$ ise, o halde $f(z) + g(z)$ ve f(z) fonksiyonlarının Γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı aynıdır.

Teorem 3.3.2. $\Delta(s) = 0$ denkleminin sonsuz sayıda kökü vardır.

S_n $(n = 1, 2, \dots)$ kökleri,

$$s_n = \frac{n\pi - r_n}{\delta} \quad , \; -\frac{\pi}{2} < r_n < \frac{\pi}{2} \quad , \; n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. [Oturanç, G. 1995.]

İspat : $\lambda = s^2$ olmak üzere,

$$s\delta = \pi z\,,\ s = \frac{\pi}{\delta}\ z \ \rightarrow\ \lambda = s^2 = (\frac{\pi}{\delta})^2 z^2 \qquad (3.30)$$

$$\Phi(\lambda) = \Phi\left(\frac{\pi^2}{\delta^2}\ z^2\right) = \Phi_1(z) \qquad (3.31)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{\delta}{2\pi z}\ [A\sin(\pi z) + B\sin(\frac{\gamma}{\delta}\ \pi z)] \qquad (3.32)$$

Γ_n ile $\left\{z: |\mathrm{Re}\ z| = n + \frac{1}{2}\ ,\ |\mathrm{Im}\ z| = n + \frac{1}{2}\right\}$

karesinin çevresi gösterilsin.

$$\Gamma = \Gamma_n\ ,\ f(z) = \frac{\delta A}{2\pi z}\sin(\pi z)\,,\quad g(z) = \frac{\delta B}{2\pi z}\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)$$

kabul edilsin. O halde $\Phi_1(z) = f(z) + g(z)$ Rouche teoreminin ifadesine göre,

$$|f(z)| > |g(z)|$$

$$|A\sin(\pi z)| > |B|\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)$$

$$\left|\frac{B}{A}\right| \cdot \left|\frac{\sin(\frac{\gamma}{\delta}\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| < 1$$

$\left|\frac{B}{A}\right| < 1$ olduğu kolayca görülebilir.

Dolayısıyla,

$$\left|\frac{\sin(\frac{\gamma}{\delta}\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| \leq 1 \quad (z \in \Gamma_n \ \text{ ve } n \text{ yeterince büyük})$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$z = \sigma + i\tau$ olmak üzere, Γ_n'nin dik kenarları üzerinde

$$\sigma = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0 \quad ,\quad |\tau| \rightarrow \infty \quad \text{çünkü} \quad \left|\frac{\gamma}{\delta}\right| < 1$$

$$\sin\pi z = \sin\pi\left(\pm\left(n + \frac{1}{2}\right) + i\tau\right)$$

$$= \sin\left(\pm\pi n \pm \frac{\pi}{2} + \pi i\tau\right)$$

$$= \pm\cos[\pm\pi n + i\pi\tau]$$

$$= \pm\cos(\pi n)\cos(i\pi\tau)$$

$$= \pm(-1)^n\cos(h\,\pi\tau)$$

Burada $\cos(i\pi\tau) = \cos(h\,\pi\tau)$ 'dır. Çünkü,

$$\cos(z) = \cos(x + iy)$$

$$= \cos(x).\cos(hy) - i\sin(x).\sin(hy)$$

denkleminde $x = 0$ dersek, $\cos(iy) = \cos(hy)$ elde edilir. $y = \pi\tau$ alındığında da $\cos(i\pi\tau) = \cos(h\,\pi\tau)$ istenileni elde edilmiş olur.

$$\left|\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)\right| = \left|\frac{e^{i\pi cz} - e^{-i\pi cz}}{2i}\right| \quad , \quad \frac{\gamma}{\delta} = c$$

$$= \frac{1}{2i}\left|e^{i\pi c\left[\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\tau\right]} - e^{-i\pi c\left[\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\tau\right]}\right|$$

$$= \frac{1}{2i}\left|e^{i\pi c(i\tau)} - e^{-i\pi c(i\tau)}\right|$$

$$= \frac{1}{2i}\left|e^{-\pi c\tau} - e^{\pi c\tau}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(e^{-\pi c\tau} + e^{\pi c\tau}\right)$$

$$\left|\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(e^{-\pi c\tau} + e^{\pi c\tau}\right)$$

$$|\sin(\pi z)| = |\pm(-1)^n \cos(h\,\pi\tau)|$$

$$= \cos(h\,\pi\tau)$$

$$= \frac{e^{\pi\tau} + e^{-\pi\tau}}{2}$$

O halde,

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)}{\sin(\pi z)}\right| \leq \frac{e^{-\pi c\tau} + e^{\pi c\tau}}{e^{-\pi\tau} + e^{\pi\tau}} = \frac{e^{\pi|c||\tau|} + e^{-\pi|c||\tau|}}{e^{\pi|\tau|} + e^{-\pi|\tau|}}$$

$$\Phi(\varepsilon) = e^{\pi\varepsilon|\tau|} + e^{-\pi\varepsilon|\tau|} \quad , \; 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\Phi'(\varepsilon) = \pi|\tau|\left(e^{\pi\varepsilon|\tau|} - e^{-\pi\varepsilon|\tau|}\right) \geq 0$$

$$\Phi(\varepsilon) \leq \Phi(1) \quad , \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

yazılabilir. Yani

$$e^{\pi\varepsilon|\tau|} + e^{-\pi\varepsilon|\tau|} \leq e^{\pi|\tau|} + e^{-\pi|\tau|} \quad , \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

elde edilir. O halde $|c| < 1$ olduğundan,

$$e^{\pi|c||\tau|} + e^{-\pi|c||\tau|} \leq e^{\pi|\tau|} + e^{-\pi|\tau|}$$

yazabiliriz. Böylece $\forall n$ için,

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)}{\sin(\pi z)}\right| \leq 1 \quad , \quad \sigma = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

$z = \sigma + i\tau$ olmak üzere, Γ_n'nin yatay kenarları üzerinde

$$\tau = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{\delta}\pi z\right)}{\sin(\pi z)}\right| \leq \frac{2\,e^{\pi\left|\frac{\gamma}{\delta}\right||\tau|}}{ce^{\pi|\tau|}} = \frac{2}{c}e^{-\pi\left(1-\frac{\gamma}{\delta}\right)|\tau|} \;\rightarrow\; 0$$

Çünkü $\left|\frac{\gamma}{\delta}\right| < 1$ ve $|\tau| \to \infty$ ‘dir.

Burada bellidir ki, $z \in \Gamma_n$ ve $\forall n$ için, $|\sin \pi z| \geq ce^{\pi|\tau|}$ kalır. Ayrıca

$$\left|\sin(\frac{\gamma}{\delta}\pi z)\right| \leq (e^{-\pi c\tau} + e^{\pi c\tau}) \leq |e^{-\pi c\tau}| + |e^{\pi c\tau}| \leq 2\, e^{\pi\left|\frac{\gamma}{\delta}\right||\tau|}$$

yazılabilir.

O halde yeterince büyük n’ler için,

$$\left|\frac{\sin(\frac{\gamma}{\delta}\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| \leq 1 \quad , \quad \tau = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

O halde Rouche teoreminin ifadesine göre, yeterince büyük n’ler için $\Phi(z)$ fonksiyonunun Γ_n içindeki sıfır yerlerinin sayısı $(1/z)\sin \pi z$ fonksiyonunun Γ_n içindeki sıfır yerlerinin sayısı kadardır. $(1/z)\sin \pi z$ ‘nin Γ_n içindeki sıfırları,

$$\pi m \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$$

dir ve bunların sayısı 2n ‘dir. Böylece $\Phi_1(z)$’ nin Γ_n içinde 2n tane sıfır yeri vardır.

$$\Phi(\lambda) = \Phi\left(\frac{\pi^2}{\delta^2} z^2\right) = \Phi_1(z) \qquad (3.31)$$

eşitliğinden görüleceği üzere, $\Phi_1(z)$ çift fonksiyondur. O halde $\Phi_1(z)$ ’nin Γ_n içindeki kökleri,

$$-z_n, -z_{n-1}, \dots, z_{n-1}, z_n$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (Rouche teoreminin yardımıyla) kolayca görülebilir ki, z_n kökü

$$\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$$

aralığında bulunur.

$$n - \frac{1}{2} < z_n < n + \frac{1}{2} \qquad (3.33)$$

Eşitlik (3.31)’den, $s_n = \frac{\pi}{\delta} z_n$, $z_n = \frac{\delta}{\pi} s_n$

yazılır. Eşitlik (3.33)’den,

$$n - \frac{1}{2} < \frac{\delta}{\pi} s_n < n + \frac{1}{2}$$

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \delta s_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \delta s_n - n\pi < \frac{\pi}{2}$$

$\delta s_n - n\pi = \Gamma_n$ olmak üzere,

$$s_n = \frac{n\pi + \Gamma_n}{\delta} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \Gamma_n < \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

(3.8), (3.9), (3.10) probleminin $\lambda_n = s_n^2$ özdeğerine karşılık gelen $y_n(x)$ özfonksiyonu

$$y_n(x) = \frac{1}{s_n}\sin(s_n\,\rho_1 x) \quad , \qquad 0 < x < a$$

$$y_n(x) = \frac{\sin(s_n\rho_1 a)}{\alpha\, s_n\, \sin[s_n\rho_2(b-a)]}\sin[s_n\rho_2(b-x)] \quad , \; a < x < b$$

şeklinde bulunur. [Oturanç, G. 1995.]

3.4. Sıcaklık Dağılımı İçin Formül

(3.3), (3.4), (3.5), (3.6) probleminin U(x, t) çözümü,

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} y_n(x)$

serisi şeklinde bulunur. Burada C_n sayıları Eşitlik (3.6) başlangıç koşulundaki f(x) için yazılan

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, y_n(x)$

ayrılış formülünden

$$C_n = \frac{<f, y_n>}{<y_n \cdot y_n>} = \frac{\rho_1^2 \int_0^a f(x)\, y_n(x)dx + \alpha\beta\, \rho_2^2 \int_a^b f(x) y_n(x)dx}{\rho_1^2 \int_0^a y_n^2(x)dx + \alpha\beta\, \rho_2^2 \int_a^b y_n^2(x)dx}$$

$n = 1, 2,$ ... olarak elde edilir. [Oturanç, G. 1995.]

3.5. Birleşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımındaki Özdeğerlerin

Maple Programı İle Çözümü

$$\left.\begin{aligned} U_t &= K_1 U_{xx} \; (\, 0 < x < a, \;\; t > 0) \\ U_t &= K_2 U_{xx} \; (\, a < x < b, \;\; t > 0) \end{aligned}\right\}$$

$U(0, t) = 0$, $U(b, t) = 0$ (dış sınır koşulları)

$$\left.\begin{aligned} U(a-0,t) &= \alpha U(a+0,t) \\ U_x(a-0,t) &= \beta U_x(a+0,t) \end{aligned}\right\}$$ (iç temas koşulları)

$U(x, 0) = f(x)$, $0 < x < b$ (başlangıç koşulu)

şartlarını sağlayan denklemlerin çözümü

$U(x, t) = e^{-\lambda t} y(x), \quad 0 < x < b$

şeklindedir.

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda\rho_1^2 y(x) \quad ; \quad 0 < x < a \\ -y''(x) &= \lambda\rho_2^2 y(x) \quad ; \quad a < x < b \end{aligned}\right\}$$

$$y(0) = y(b) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y(a-0) &= \alpha\, y(a+0) \\ y'(a-0) &= \beta\, y'(a+0) \end{aligned}\right\}$$

şartlarını sağlayan denklemlerin özdeğerleri ise,

$$A = \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 \quad , \quad B = \alpha\rho_1 - \beta\rho_2$$

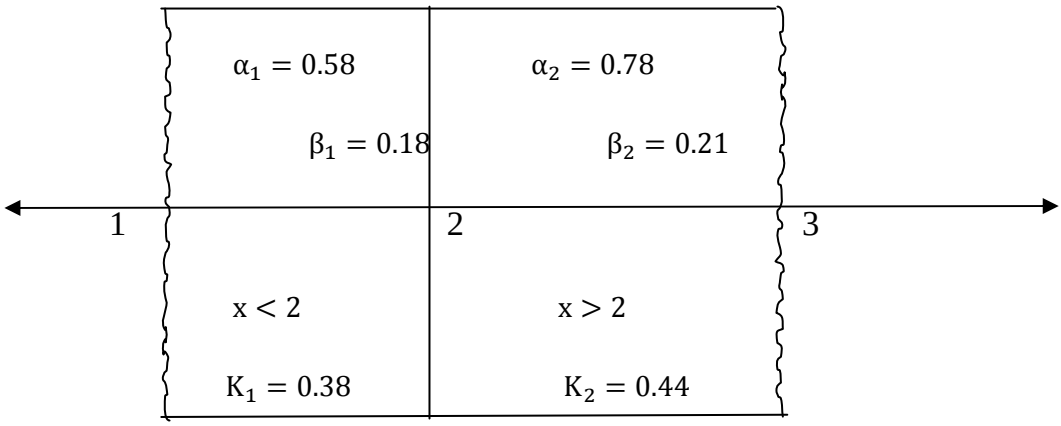
$$\delta = \rho_1 a + \rho_2(b-a) \ , \ \gamma = \rho_1 a - \rho_2(b-a)$$

olmak üzere

$$\Delta(s) = \frac{1}{2s}\left[A\sin(s\delta) + B\sin(s\gamma)\right] = 0$$

ifadesiyle bulunur.

Örnek 3.5.1.



Şekil 3.2. İki levha arasında ısı geçişi

Gözeneklik katsayıları $\alpha_1 = 0.58$, $\alpha_2 = 0.78$, ısı iletim katsayıları $\beta_1 = 0.18$, $\beta_2 = 0.21$ ve termal difüziviteleri $K_1 = 0.38$, $K_2 = 0.44$ olan

$u(x,0) = f(x) = 1$ fonksiyonu için, eşitlik (3.3)'den,

$u_t = 0.38\, u_{xx}$, $(1 < x < 2\,,\ t > 0)$

$u_t = 0.44\, u_{xx}$, $(2 < x < 3\,,\ t > 0)$

olduğuna göre, bu denklemin özdeğerlerini bulunuz.

$u(x,0) = f(x) = 1$ yazılır. Eşitlik (3.6)'dan,

$u(x,t) = e^{-\lambda t} y(x)$, $1 < x < 3$ ve (3.7), (3.23), (3.24) denklemlerinden,

$$-y''(x) = \lambda \frac{1}{0.38}\, y(x) \quad ; \quad 1 < x < 2$$
$$-y''(x) = \lambda \frac{1}{0.44}\, y(x) \quad ; \quad 2 < x < 3$$

$$A = 0.58 * \frac{1}{\sqrt{0.38}} + 0.18 * \frac{1}{\sqrt{0.44}} = 1.212270421$$

$$B = 0.78 * \frac{1}{\sqrt{0.38}} - 0.21 * \frac{1}{\sqrt{0.44}} = 0.948802$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{0.38}}\, 2 + \frac{1}{\sqrt{0.44}}\, (3-2) = 4.7522$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0.38}}\, 2 - \frac{1}{\sqrt{0.44}}\, (3-2) = 1.737033$$

$$\Delta = \frac{1}{2s}(1.212270421 * \sin(s * 4.7522) + 0.948802 * \sin(s * 1.737033)\,) = 0 \qquad (3.34)$$

yazılabilir. (3.34) denkleminin çözülmesi ile özdeğerler elde edilmiş olur. Bu çözümü maple programı yardımıyla bulalım.

> **y[0]:=0:**
for k from 0 to 100 do
y[k+1]:=NextZero((s->(1.212270421*sin(4.7522*s)+.948802*sin(1.737033*s))/(2*s)),y[k]):
print(y[k+1]);
od:
>

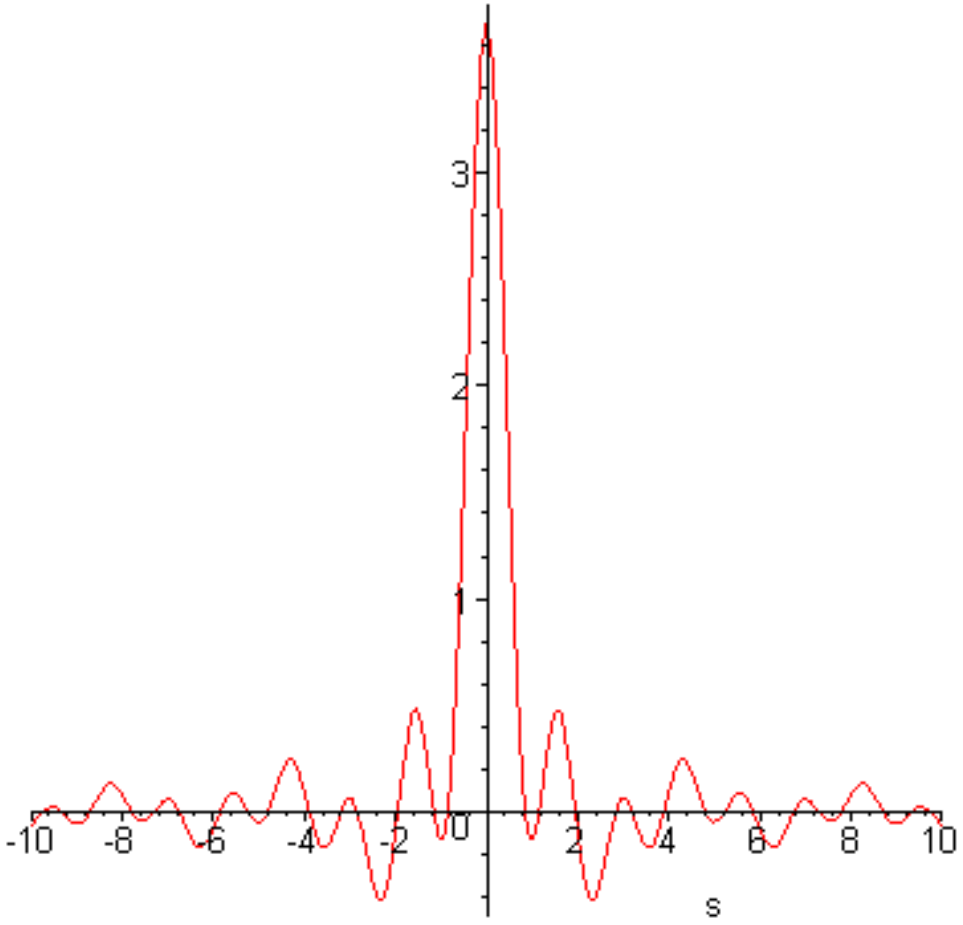
Çizelge 3.1.

İ(indis)	**λ_i (özdeğer)**
0	.8490298847
1	.156381358
1	.944505924
2	.828273684
3	.187512045
3	.889714609
4	.790393216
5	.234262902
5	.836564523
6	.743460167
7	.286919299
7	.78666246
8	.691880084
9	.338031684
9	.742844349
10	.63788214
11	.37943978
11	.71110711
12	.58269403
13	.40044481
13	.70078151
14	.52711865
15	.39386970
15	.71809829
16	.47183282
17	.36453009
17	.75731750
18	.41760700
19	.32201057
19	.80761330
20	.36558348
21	.27270497
21	.86048275
22	.31779675
23	.21989013
23	.908558065
24	.27874620
25	.16526420
25	.94259959
26	.25446168
27	.10982400

Bu durumda bu denklemin sonsuz sayıda çözümü vardır. Şimdi de bu özdeğerlerin grafiğini çizelim.

> **plot((1.212270421*sin(4.7522*s)+.948802*sin(1.737033*s))/(2*s), s = -10 .. 10);**

>



Şekil 3.3. Özdeğer çözüm grafiği

Şekil 3.3'den de görüleceği üzere bu özdeğerler asimptotik olup sonsuz köke sahiptir.

4. SONUÇ

(3.8), (3.9), (3.10) olarak verilen birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımı probleminin literatürde farklı yöntemlerle çözüldüğünü görmek mümkündür.

Bu çalışmada, değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülen bir birleşik eleman ısı transferi probleminin çözümüne temel teşkil eden ve daha önce spektr özellikleri verilen özdeğerler sayısal olarak incelenmiştir. Teoride köklerin reelliği, ortogonalliği gibi özellikler sayısal olarak da görülebilmiştir.

Bu çalışmayı birleşik eleman sayısının arttığı durumlarda da teorik ve sayısal olarak incelemek mümkündür.

Teoride köklerin asimptotik olduğu verilmekte fakat ispatı görülmemektedir. Bu durum yeni bir araştırma problemi olarak ele alınabilir.

5. KAYNAKLAR

Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç, G. 2001. "Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları" E.Ü. Müh. Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No:14, 5. Baskı, İzmir.

Atkinson, F.V. 1964."Discrete and Continous Baundary Problems", Academic Press.

Bellman, R. 1953. "Stability Theory of Differantial Equations", Mc Graw Hill Book Company, INC.

Birkhoff, C. and Rota, G.C. 1962. "Ordinary Differantial Equations", Ginn and Company.

Churchill, R.V. 1972. "Operational Mathematics", McGraw-Hill Book Company, New York.

Dwyer, H.I. and. Zettl, A. 1994. "Computing Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems" , Electronic Journal of Differantial Equations.

Korum, D. 2002. "Düzgün Sturm-Liouville Sistemleri" Seminer Çalışması.

Oturanç, G. and Şahin, Z.A 2001. "Eigenvalue Analysis of Temperature Distribution in Composite Walls", INT.J. Energy Res. 25:1189-1196.

Oturanç, G. 1995. "Diferansiyel Operatörlerin Spektral Teorisi ile Birleşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımının İncelenmesi Üzerine" Türk Matematik Derneği VIII. Ulusal Matematik Sempozyumu.

Özışık, N. 1980. Heat Conduction, John Willey & Sons, 2^{nd}.