



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUANTILE REGRESYON ve BİR UYGULAMA

İlkay ALTINDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Ağustos-2010
KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

QUANTILE REGRESYON VE BİR UYGULAMA

İlkay ALTINDAĞ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN

2010, 87 Sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN
Doç. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Turan PAKSOY

Bu çalışmada, basit doğrusal ve çoklu doğrusal regresyon analizinde kullanılan en küçük kareler yöntemine bir alternatif olarak geliştirilen ve daha kapsamlı bir regresyon görüntüsü sunmak amacıyla önerilen "Quantile Regresyon" yöntemi ele alınmıştır. Koenker ve Basett (1978) tarafından önerilen Quantile Regresyon, koşullu quantile fonksiyonlarının tahmin modeli için uygun bir yöntem sağlamakta ve özellikle koşullu quantillerin değişkenlik gösterdiği durumlarda kullanışlı olmaktadır.

Çalışma, yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş ve önceki çalışmaları içeren bölümdür.

İkinci Bölüm'de, doğrusal regresyon analizi, en küçük kareler ve en çok olabilirlik parametre tahmin yöntemleri, çoklu belirleyicilik katsayısı, parametre tahminlerinin güven aralıkları ve bu parametreler için hipotez testleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü Bölüm'de, quantile kavramı, quantile fonksiyonu ve quantile regresyon kavramları hakkında genel bilgiler sunulmuştur.

Dördüncü Bölüm'de, en küçük mutlak sapma (LAD) regresyon yönteminden bahsedilip, basit ve çoklu doğrusal LAD regresyon için algoritmaları verilmiştir.

Beşinci bölüm'de, Quantile Regresyon yöntemi çözüm aşamasında yaygın olarak kullanılan R Paket programının kurulumu, komutları ve kullanım alanları hakkında bilgiler sunulmuştur.

Altıncı bölüm'de, basit ve çoklu regresyon analizi için Quantile Regresyon, LAD ve EKK yöntemlerine ilişkin uygulamalara yer verilmiştir.

Yedinci bölüm'de, tez çalışmasının sonuçları özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Regresyon, Quantile Regresyon, En Küçük Mutlak Sapma (LAD) Regresyon, En Küçük Kareler Yöntemi, R programı.

ABSTRACT

MS THESIS

QUANTILE REGRESSION AND AN APPLICATION

İlkay ALTINDAĞ

Selcuk University
The Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN

2010, 87 Pages

Jury: Assist. Prof. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN
Assoc. Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Prof. Dr. Turan PAKSOY

In this study, "Quantile Regression", which is advanced as an alternative to the least squares method used for multi linear regression analysis and which is submitted in order to present a comprehensive regression image. The Quantile Regression submitted by Koenker and Basett (1978), provides an appropriate method for the estimation model of conditional quantile functions and it is useful in such cases where especially the conditional quantiles vary.

The study consists of seven chapters. In the first chapter, an introduction to the subject is made and information about literature reviews are given.

In the second chapter, the linear regression analysis, the least squares (LS) and the maximum likelihood parameter estimation methods, the multiple coefficient of determination, the confidence intervals of the parameter estimations and the hypothesis tests for these parameters are mentioned.

In the third chapter, the quantile concept, the quantile function and the quantile regression are presented.

In the fourth chapter, the least absolute deviation (LAD) is mentioned, and algorithms for the simple and multiple linear LAD regression are given.

In the fifth chapter, the installation of the R package programme which is commonly used in the solution of the Quantile Regression model, its commands and its usage area are presented.

In the sixth chapter, applications related to Quantile Regression, LAD and LS methods for simple and multiple regression analysis, is mentioned.

In the Seventh Chapter, the results of the thesis are summarized.

Key Words: Linear Regression, Quantile Regression, Least Absolute Deviation (LAD) Regression, Least Squares Method (LS), R programme.

ÖNSÖZ

"Quantile Regresyon ve Bir Uygulama" adlı tezimin seçimi ve çalışma süresince yardımını esirgemeyen, çalışmalarımda yol gösteren ve bilgileriyle bana yardımcı olan danışman hocam Yard. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışma süresince bana verdikleri desteklerden dolayı değerli aileme teşekkür ederim.

İlkay ALTINDAĞ
KONYA-2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
ÇİZELGELER DİZİNİ vii
KISALTMALAR viii
1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI 1
1.1. Giriş 1
1.2. Kaynak Araştırması 3
2. LİNEER REGRESYON ANALİZİ 7
2.1. Parametre Tahmini 9
2.1.1. En Küçük Kareler Yöntemi 9
2.1.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi 11
2.2. Çoklu Belirleyicilik Katsayısı (R^2) 12
2.3. Bireysel Parametreler için Güven Aralıkları, Hipotez Testi ve μ_{Y/x^j} 'nin Tahmini 13
3. QUANTILE REGRESYON 15
3.1. Quantile Kavramı 15
3.2. Quantile Dağılım Fonksiyonu 18
3.3. Quantile Yoğunluk Fonksiyonu 20
3.4. Quantile Regresyon 20
3.4.1. Quantile Regresyonun Doğrusal Programlama Gösterimi 22
3.4.2. Quantile Regresyonun Uygulama Alanları 24
3.4.3. Quantile Regresyon Yönteminin Özellikleri 25
4. EN KÜÇÜK MUTLAK SAPMA YÖNTEMİ 27
4.1 Basit Doğrusal En küçük Mutlak Sapma Regresyonu 27
4.1.1 Basit En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu için Algoritma 28
4.1.2. Doğrunun İki Gözlem Noktasından Geçme Zorunluluğu 29
4.1.3 En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Tek Olmama ve Bozulma Sorunu 30
4.1.4 Eğim Parametresinin Anlamlılık Testi 30
4.1.5. τ Parametresi 31
4.2. Çoklu Doğrusal En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu 32
4.2.1. Çoklu En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Tek Olmama ve Bozulma Sorunu 36
4.2.2. Çoklu En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Katsayıların Anlamlılığının Testi 37
5. R PROGRAMI 38
5.1. R Programının İçeriği 38
5.2. R Programının Avantajları 39
5.3. R Programında Quantile Regresyon Analizi 40
6. UYGULAMA 44

6.1. Basit Regresyon Modeli için Quantile Regresyon Analizi Uygulaması.....44
6.2 Çoklu Regresyon Modeli için Quantile Regresyon Analizi Uygulaması.....53
KAYNAKLAR 73
EKLER 76

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Birinci durum için quantile değeri....16
Şekil 3.2. İkinci durum için quantile değeri 16
Şekil 3.3. Üçüncü durum için quantile değeri 17
Şekil 3.4. Dördüncü durum için quantile değeri....17
Şekil 3.5. Beşinci durum için quantile değeri....18
Şekil 3.6. Quantile Fonksiyonu....19
Şekil 3.7. Kontrol Fonksiyonu....23
Şekil 6.1. Uygulama 1 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları grafiği 49
Şekil 6.2. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği 51
Şekil 6.3. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MAD değerleri grafiği 51
Şekil 6.4. Çeşitli quantile değerleri için Quantile Regresyon yönteminden ve EKK yönteminden elde edilen regresyon doğruları....52
Şekil 6.5. Quartile değerleri için Quantile Regresyon yönteminden ve EKK yönteminden elde edilen regresyon doğruları....53
Şekil 6.6. Uygulama 2 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları 59
Şekil 6.7. Uygulama 2 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği 61
Şekil 6.8. Uygulama 2 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MAD değerleri grafiği 61
Şekil 6.9. Uygulama 2 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları grafikleri 67
Şekil 6.10. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği 69
Şekil 6.11. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği 69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 6.1. Uygulama 1 için modelin SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu 45
Çizelge 6.2. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 45
Çizelge 6.3. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.50$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 45
Çizelge 6.4. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 45
Çizelge 6.5. Uygulama 1'de R Programından elde edilen EKK Sonuçları.....46
Çizelge 6.6. Uygulama 1 için elde edilen $\hat{Y}_i$ Tahmin değerleri 47
Çizelge 6.7. Uygulama 1 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu.....48
Çizelge 6.8. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri 50
Çizelge 6.9. Uygulama 2 için modelin SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu 54
Çizelge 6.10. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 55
Çizelge 6.11. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.50$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 55
Çizelge 6.12. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 55
Çizelge 6.13. Uygulama 2'de R Programından elde edilen EKK Sonuçları.....56
Çizelge 6.14. Uygulama 2 için elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri 57
Çizelge 6.15. Uygulama 2 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu...58
Çizelge 6.16. Uygulama 2'de çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri 60
Çizelge 6.17. Uygulama 3 için SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu ..62
Çizelge 6.18. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 63
Çizelge 6.19. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.5$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 63
Çizelge 6.20. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları 63
Çizelge 6.21. Uygulama 3'te R Programından elde edilen EKK Regresyon Analizi Sonuçları 64
Çizelge 6.22. Uygulama 3 için elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri 65
Çizelge 6.23. Uygulama 3 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu...66
Çizelge 6.24. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri 68

KISALTMALAR

QR: Quantile Regresyon

EKK: En küçük kareler

MLE: En çok olabilirlik tahmin edicisi

LAD: En küçük mutlak sapma

MSE: Hata kareler ortalaması

MAD: Mutlak sapma ortalaması

LP: Doğrusal Programlama

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

1.1. Giriş

İstatistik teorisinin önemli konularından biri olan Regresyon Analizi, bağımlı değişken (Y) ile bir veya daha çok bağımsız değişken (X) arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla kullanılan bir analiz yöntemidir. Bir bağımlı değişken ve bir bağımsız değişken olduğunda oluşturulacak doğrusal regresyon modeli, "basit regresyon modeli" adını alır. Bir bağımlı değişken ve birden bağımsız değişken olduğunda ise oluşturulacak doğrusal regresyon modeli, "çoklu regresyon modeli" adını alır. Regresyon analizinin iki önemli amacı;

- Bağımsız değişkenler yardımıyla bağımlı değişkeni tahmin etmek,
- Bağımsız değişkenlerden hangisi ya da hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini bulmak ve aralarındaki karmaşık yapıyı tanımlamak,

olarak verilebilir.

Regresyon terimi 19. yüzyılda İngiliz istatistikçi Francis Galton tarafından bir biyolojik inceleme için ortaya atılmıştır. Regresyon Analizi; basit doğrusal, çoklu, çok değişkenli, çoklu ve doğrusal olmayan regresyon çözümlemesi olarak sınıflandırılabilir. Regresyon Analizi bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki fonksiyonel yapıyı oluşturmada kullanılır. Bu yapıyı oluşturmada regresyon modelindeki bilinmeyen parametrelerin tahmini oldukça önemlidir.

Çoklu doğrusal regresyon modeli;

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilsin. Matris gösterimiyle;

$$\boldsymbol{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$

biçiminde gösterilir. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata terimi, β regresyon parametresidir.

Uygulamalı istatistiğin önemli bir kısmı, lineer regresyon modeli ve bu modelin tahmininde sıklıkla kullanılan "En küçük Kareler" tahmin yönteminin detaylı bir şekilde incelenmesi olarak görülebilir (Koenker, 2005).

En küçük kareler yöntemi, regresyon modelindeki bilinmeyen parametrelerin tahmininde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin mantığı hataların karelerine ilişkin toplamın en küçük yapılması temeline dayanır. Bu amaçla hata kareler toplamı $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x\boldsymbol{b}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}i\right)^2$ 'yi en küçük yapacak değer olarak hesaplanır (Alpar, 2003).

Koenker ve Basett (1978) tarafından önerilen Quantile Regresyon, koşullu quantile fonksiyonlarının tahmin modeli için uygun bir yöntem sağlar (Koenker ve Hallock, 2001). Quantile Regresyon, özellikle koşullu quantillerin değişkenlik gösterdiği durumlarda kullanışlıdır ve bu yöntem quantillere bağlı olarak regresyon katsayılarını belirler **(**Chen, 2005). Quantile Regresyon özellikle uç noktaların önemli olduğu uygulamalarda oldukça kullanışlıdır. Quantile Regresyon aynı zamanda hem alt hem üst quantillerle ya da tüm quantillerle ilgilendiğinden $X = x$ verildiğinde Y'nin koşullu dağılımının tam bir gösterimini sağlamaktadır.

$\{y_t,\ t = 1,\ldots,T\}$ bağımlı değişken, $\{x_t, t = 1,\ldots,T\}$, $t \times k$ boyutlu tasarım matrisi, $\boldsymbol{b}$, tahmin edilecek katsayı vektörü ve $e_t = y_t - x_t\beta$ hata değeri olmak üzere, τ. regresyon quantili $\left(0 < \tau < 1\right)$;

$$\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K} \left[\sum_{t \in \{t: y_t \geq x_t \boldsymbol{b}\}} \tau \left| y_t - x_t \boldsymbol{b} \right| + \sum_{t \in \{t: y_t < x_t \boldsymbol{b}\}} (1-\tau) \left| y_t - x_t \boldsymbol{b} \right| \right] \tag{1.3}$$

eşitliğinin minimize edilmesiyle elde edilir. (Koenker ve Basett, 1978).

Bu tez çalışmasının amacı, lineer regresyonda alternatif bir yöntem olan Quantile Regresyon yöntemini ele almak ve EKK yöntemiyle arasındaki farklılıkları anlatmaktır. Bunun için, EKK, Quantile Regresyon ve Quantile Regresyon yönteminin özel bir hali olan En Küçük Mutlak Sapma (LAD) yönteminden bahsedilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde doğrusal regresyon analizine giriş yapılacak, modele ilişkin gösterimler, EKK ve En Çok Olabilirlik (MLE) parametre tahmin yöntemleri, çoklu belirleyicilik katsayısı, parametre tahminlerinin güven aralıkları ve bu parametreler için hipotez testleri verilecektir.

Üçüncü Bölüm'de, quantile kavramı, quantile dağılım fonksiyonu, quantile yoğunluk fonksiyonu, Quantile Regresyon, Quantile Regresyonun doğrusal programlama gösterimi ve Quantile Regresyonun uygulama alanları ele alınacaktır.

Dördüncü Bölüm'de, LAD Regresyon yönteminden bahsedilip, basit doğrusal regresyon ve çoklu doğrusal regresyon için birer algoritma verilecektir.

Beşinci bölüm'de, R Paket programı tanıtılacak ve R programının kurulumu avantajları ve Quantile Regresyon yönteminde kullanılan R komutları ele alınacaktır

Altıncı bölüm'de, ele alınan Quantile Regresyon yönteminde basit ve çoklu regresyon analizi için uygulamalar yapılacak ve elde edilen tahminler grafikler yardımıyla açıklanmaya çalışılacaktır.

Çalışmanın Sonuç ve Öneriler bölümü olan Yedinci Bölüm'de ise, uygulamalar yardımıyla yukarıda değinilen yöntemler kıyaslanacak, avantaj ve dezavantajları açıklanmaya çalışılacaktır.

1.2. Kaynak Araştırması

Quantile Regresyon analizi alanında ilk çalışma Koenker ve Basett (1978) tarafından yapılmıştır. Koşullu quantile fonksiyonlarının tahmin modeli için uygun bir yöntem önermişlerdir.

Koenker ve Basett (1978) çalışmalarında, örnek quantili kavramından yola çıkarak basit minimizasyon problemini, lineer modeller için genelleştirmişler ve bunu "regresyon quantili" olarak adlandırmışlardır. Quantile Regresyonda tahmin ediciler hataların mutlak toplamlarını minimize etmektedir. Bu çalışmada, ayrıca bazı eş varyans özellikleri ve regresyon quantillerinin ortak asimptotik dağılımları da oluşturulmuştur.

Lingren (1997) çalışmasında, bağımsız değişken sansürlü olduğu zaman parametrik quantile fonksiyon tahminleri için yeni bir yöntem önermiştir. Quantile fonksiyonunun tahminini, simetrik olmayan L_1 teknikleri ile birlikte sansür limitleri dağılımının ağırlıklı Kaplan-Meier tahmini olarak ele alınmıştır.

Eide ve Showalter (1998) makalelerinde, "Test skoru kazanımı" durumunun koşullu dağılımında farklı noktalardaki okul kalitesi ve performans arasındaki ilişkinin farklı olup olmadığını standartlaştırılmış testlerde Quantile Regresyon yöntemini kullanılarak tahmin etmişlerdir.

Lee ve Tanaka (1999) makalelerinde, Quantile Regresyon tekniklerini temel alarak yeni bir aralık (interval) regresyon analizi önermişlerdir. Bulanık ortamda bir olayın analizi için, iki farklı yaklaşım modeli önermişlerdir. Çalışmanın temel özelliğinin alt ve üst yaklaşım modellerinin elde edilmesi ve bulanık mantıkta verilen olayı temsil eden bulanık model için bunların birleştirilmesidir.

Yu ve ark. (2003) çalışmalarında, Quantile Regresyon yönteminin EKK yönteminden daha detaylı bir istatistiksel model sunduğunu ve geniş bir uygulama alanı olduğunu öne sürüp bu tekniği incelemişlerdir.

Kan ve Tsai (2004) çalışmalarında, obeziteye neden olan değişkenlerin etkilerini incelemişlerdir. Bu araştırmada Beden Kitle Endeksi (BMI) ölçümlerinden yararlanmışlardır. Taiwan'dan alınan anket verileri temel alınarak incelenen ilişki Quantile Regresyon Tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Sonuçlar ilişkinin var olduğunu, kadın ve erkekler arasında BMI açısından farklı ilişki olduğunu göstermiştir.

Baur ve ark. (2004) makalelerinde, Atina'da dört gözlem kulesinden 1992-1999 yılları arasında alınan verilerle, ozon konsantrasyonunun koşullu dağılımını etkileyen bağımsız değişkenlerin, farklı ozon düzeylerinde farklı derecede öneme sahip olduğunu Quantile Regresyon yöntemiyle göstermişlerdir.

Chen (2005) çalışmasında, özellikle uç noktaların önemli olduğu durumlarda Quantile Regresyon yönteminin kullanışlı olduğundan bahsetmiş ve halk sağlığı açısından çevresel çalışmalarda üst quantillerde hava kirliliğinin kritik seviyeye geldiği durumları örnek olarak göstermiştir. Quantile Regresyon'un alt ve üst quantiller birlikte veya bütün quantiller aynı anda düşünüldüğünde $X = x$ verildiğinde Y'nin koşullu dağılımı için daha tam bir bakış açısı sağladığını göstermiştir.

Koenker (2005) çalışmasında, Quantile Regresyonun özellikleri, Quantile Regresyon için çıkarım, Quantile Regresyonun asimptotik teori özellikleri, L- İstatistiği ve ağırlıklandırılmış Quantile Regresyon özellikleri, Quantile Regresyonun hesaplama yöntemleri, Parametrik Olmayan Regresyon özelliklerinden, Quantile Regresyonun belirsizlik durumundan ve Quantile Regresyona ait sonuç çıkarımından bahsetmiştir.

Saçaklı (2005) tez çalışmasında, En Küçük Kareler Regresyonu, En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu, En Küçük Medyan Kare Regresyonu, M regresyon ve Rank

Regresyonundan bahsedip bu alternatif regresyon modellerini karşılaştırmıştır. Ayrıca, Quantile Regresyon'un özellikleri vermiş ve Quantile Regresyon analizine yönelik bir uygulama yapmıştır.

Behr (2008) çalışmasında, Farell teknik etki skor tahminleri için kolay ve sağlam alternatif bir regresyon tekniği uygulamıştır. Quantile Regresyon yaklaşımı ile koşullu quantillerin en üstünde bulunan etki (benchmark) bankacılığının ürün gelişimi tahmin edilmiştir. Sonuçta etki bankacılığının üretime, koşullu ortalama fonksiyonundan ve stokastik sınır fonksiyonundan elde edilen esneklikten oldukça farklı maliyet esnekliğine sahip olduğunu göstermiştir.

Coad ve Rao (2008) makalelerinde, firma seviyesi Compustad verisi ile NBER patent verisini eşleştirerek kompleks teknoloji sektörü için yeni bir veri tabanı oluşturmuşlarıdır. Quantile Regresyon yöntemi ile yeniliklerin etkisinin borsa dağılımına etki ettiğini göstererek literatüre yeni bir boyut kazandırmışlardır.

Eide ve Showalter (2008) çalışmalarında, yüksek teknolojiye sahip olmakla yükümlü firmalar için satış büyüme yeniliklerini anlatmışlardır. Ortalama bir firma sadece deneyimlerle mütevazı bir ilerleme yapabilir ama yenilikçi hareketlerle birlikte büyümenin bir sürü nedeni olabildiğini savunmuşlardır. Burada "ortalama firmalar için ortalama etki" üzerindeki odaklanmada EKK regresyon yöntemini kullanmanın yanıltıcı olabileceğini göstermişlerdir. Quantile Regresyonu yöntemini kullanarak hızlı büyüyen firmalarda yeniliklerin kritik derecede önemli olduğunu göstermişlerdir.

Ram (2008) makalesinde, Solow tipi büyüme modellerinde Quantile Regresyon tahminlerinin alt quantillerin üst quantillere göre daha küçük β yakınsama oranının olduğu fakat bazı diğer katsayılarda oldukça büyük farklılık gösterdiği saptanmıştır. Quantile Regresyon metodunun hızlı-büyüme ve yavaş-büyüme oranına sahip ülkelerdeki parametrik farklılıkların önemli olup olmadığını anlamak için faydalı bir çalışma olduğunu göstermişlerdir.

Stifel ve Averett (2009) çalışmalarında, ABD'de aşırı kilolu (obez) çocukların yaygınlığının son yirmi yılda çarpıcı biçimde arttığı ve bunun halk sağlığı problemlerine neden olduğu, üstelik fazla kilolu olmayan çocukların da ağırlığının artması problemini ele almışlardır. Bunun için Beden Kitle Endeksi (BMI) ile ölçülen ağırlık durumu ve aşırı kilo arasındaki ilişkiyi bulmak için Quantile Regresyon yöntemini kullanmışlardır. Çalışmalarının sonuçları En Küçük Kareler yönteminin çocuk BMI'sinde ağırlık dağılımının alt ve üst kuyruklarındaki bazı önemli ilişkileri maskelediğini

göstermektedir. Sonuç olarak Quantile Regresyon yönteminin daha detaylı bilgi verdiğini göstermişlerdir.

Meligkotsidou ve ark. (2009) çalışmalarında, risk faktörlerini kullanarak yatırım fonu getirilerinin koşullu quantillerle modellenmesi fikrini tanıtmışlardır. Quantile Regresyon analizi, yatırım fonu getirisi ve risk faktörlerinin değişimi arasındaki ilişkinin koşullu getiri dağılımı boyunca nasıl değiştiğini anlamak için bir yol sunmuşlardır. En uygun risk faktörleri, farklı quantiller için tanımlanmış ve koşullu beklenen modelden elde edilenle karşılaştırılmıştır. Standart koşullu ortalama fonksiyonun yatırım fonlarının karakteristik risk getirilerini yeterli biçimde tanımlayamadığı ortamda getirilerdeki faktör etkisindeki farklılığı quantiller ile elde etmişlerdir.

Li ve ark. (2009) makalelerinde, Çin Borsasında yer alan finansal olmayan 643 şirket örneklemi kullanarak şirketlere ait performans üzerinde hükümet iştirakçilerinin etkilerini değerlendirmişlerdir. Literatürdeki tartışmalı gözlem bulguları ve En Küçük Kareler regresyonu kısıtlamaları yüzünden Quantile Regresyon metodu benimsenmiş, hükümet iştirakçileri ile şirket performansları arasında önemli bir negatif ilişki olduğunu rapor etmişlerdir. Eldeki yeni bulguların koşullu ortalama regresyondan elde edilemediğini ve Çin Hükümetinin kısmen özelleştirilmiş bu firmaların performansı üzerinde hala etki gösterdiğinden bahsetmişler ve ilişki parametresinin performans değişkenlerinin dağılımında quantiller boyunca değiştiğini ele almışlardır.

2. LİNEER REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizi, bağımlı (açıklanan) değişken Y ile bağımsız (açıklayıcı) değişken X (ya da X'ler) arasındaki ilişkiyi tanımlamak ve bu ilişkinin derecesini hesaplamak için kullanılan bir analiz yöntemidir (Tarı, 2006).

Regresyon analizini uygulayabilmek için değişkenler arasındaki ilişkinin fonksiyonel yapısının bilinmesi gerekmektedir. Fonksiyonel yapıyı öğrenmek için değişkenlere ilişkin saçılım grafiklerinden yararlanılır. Eğer ilişki doğrusal ise, bu iki değişken için doğrusal regresyon denklemi bulunabilir (Alpar, 2003). Bir bağımlı değişken ve bir bağımsız değişken olduğunda oluşturulacak doğrusal regresyon modeli, "basit regresyon modeli" adını alır.

Y ile x arasında $\mu_{Y/X=x} = \beta_0 + \beta_1 x$ gibi bir bağıntı olduğunda gözlemler,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. ε_i'lerin sıfır ortalamalı, eşit varyanslı (σ^2), bağımsız gözlenemeyen rasgele değişkenler olduğu varsayıldığında x değişkenine *bağımsız değişken*, Y değişkenine *bağımlı değişken* denir. X bağımsız değişkenin verilmiş x değeri için Y'nin koşullu dağılımının beklenen değeri $\mu_{Y/X=x}$ ile x arasındaki

$$\mu_{Y/X=x} = g(x; \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 x \tag{2.2}$$

bağıntısına "regresyon fonksiyonu" denir (Genç, 1997). Gözlemler ile ilgili yazılan

$$Y_i = g(x; \beta_0, \beta_1) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{2.3}$$

eşitliğine "basit lineer regresyon denklemi" adı verilir. ε_i'ler üzerinde yapılan varsayımlarla birlikte bu regresyon denklemine "regresyon modeli" ve β_0, β_1 parametrelerine "regresyon parametresi" denir.

Bağımlı değişkeni (Y) etkileyen birden çok bağımsız değişken $\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)$ olması durumunda oluşturulacak doğrusal regresyon modeli, "çoklu

regresyon modeli" adını alır. Elde edilecek matematiksel modelin yani regresyon denkleminin iki önemli amacı;

- Bağımsız değişkenler yardımıyla bağımlı değişkeni tahmin etmek,
- Bağımsız değişkenlerden hangisi ya da hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini bulmak ve aralarındaki karmaşık yapıyı tanımlamak,

olarak verilebilir. Regresyon analizinde, hangi değişkenin bağımlı hangi değişkenin bağımsız olduğunun belirlenmesinde dikkatli olunmalıdır. Değişkenlerin belirlenmesi kavramsal ve teorik bilgilere dayandırılmalıdır (Alpar, 2003).

Çoklu lineer regresyon modeli;

$$Y_i = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon_i, \quad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n \tag{2.4}$$

veya

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon_i, \quad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n \tag{2.5}$$

şeklinde gösterilsin. Matris gösterimiyle;

$$\boldsymbol{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6}$$

olup

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Biçiminde açık olarak yazılabilir. X tasarım matrisi

$$X = \left[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p \right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \boldsymbol{x}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^n \end{bmatrix}$$

olup $\boldsymbol{x}^i = \left(\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{ip} \right) \in \Re^p$ satır vektörünü göstermektedir (Genç, 1997).

Doğrusal Regresyon Modelinin Standart Varsayımları

(x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$ veri çiftleri olmak üzere kitle regresyon doğrusu için

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$

ile gösterilirse, *n* çift veri seti için aşağıdaki standart varsayımlar yapılır:

1. x_i değerleri ya sabittir ya da ε_i hata terimlerinden bağımsız X_i rasgele değişkenlerinin gerçekleşmiş değerleridir.

2. Hata terimleri ε_i'ler, ortalaması sıfır olan rasgele değişkenlerdir. Yani $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

3. Bütün ε_i rasgele değişkenlerinin varyansı eşttir. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, ..., n$.

4. ε_i rasgele değişkenleri birbiriyle ilişkili değildir, böylece $E(\varepsilon_i . \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$. olur (Newbold, 1995**).**

2.1. Parametre Tahmini

Regresyon analizinde en çok kullanılan tahmin yöntemleri En Küçük Kareler (MSE) ve En Çok Olabilirlik (MLE) tahmin yöntemleridir.

2.1.1. En Küçük Kareler Yöntemi

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ gibi n veri çifti olduğunda, bu noktalara en iyi uyum gösteren doğrunun bulunması, başka bir deyişle, kitle regresyon doğrusunun bilinmeyen katsayıları β_0 ile β_1'in tahminlerini elde etmek gereklidir. β_0 ile β_1'in tahmin değerleri b_0 ve b_1 olsun, böylece tahmin edilen doğru,

$y = b_0 + b_1 x$

olur. Bunun ne kadar iyi bir tahmin olduğunu anlayabilmek için, (x_i, y_i) noktalarının bu doğrudan uzaklıklarını ölçecek bir ölçüye ihtiyaç vardır. Bağımlı değişkenin gerçekte gözlenen değeri y_i'dir. Gözlenen değer ile tahmin edilen değer arasındaki fark $e_i = y_i - (b_0 + b_1 x_i) = y_i - \hat{y}_i$'dir. e_i farkı, bağımlı değişkenin önerilen doğru üzerindeki $b_0 + b_1 x_i$ değerinden sapmasını göstermektedir. (Newbold 1995).

En küçük kareler yöntemi bilinmeyen β_0 ve β_1 parametrelerinin tahmininde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem, hataların karelerine ilişkin toplamın en küçük yapılması temeline dayanır. Bu amaçla $y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_0 - b_1 x_i)$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınıp *n* gözlem için yeniden yazıldığında;

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_{i1})^2 \tag{2.7}$$

elde edilir. Eşitlik (2.7)'nin sağ tarafı sıfıra eşitlenip, b_0 ve b_1'e göre türevi alındığında, hata kareler toplamı $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ 'yi en küçük yapan b_0 ve b_1 tahmin değerleri

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \tag{2.8}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_{i1} - \bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}} = \frac{ÇT_{XY}}{KT_X} \tag{2.9}$$

olarak elde edilir.

Burada,

***KT*$_x$:** *x* bağımsız değişkenindeki her bir gözlemi dağılımın ortalamasından çıkartarak elde edilen yeni dağılımdaki değerlerin kareleri toplamıdır. ***KT*$_x$**'e, x_i 'lerin ortalamaya göre düzeltilmiş kareler toplamı denir.

***ÇT*$_{xy}$:** *x ve y* değişkenlerinin kendi ortalamalarına göre düzeltilmiş değerlerinin toplanması ile elde edilir. Düzeltilmiş çarpımlar toplamı olarak da adlandırılır.

Burada,

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n - b_1 \bar{x}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \tag{2.10}$$

dir. Buradan, örnekleme ilişkin regresyon tahmin denklemi;

$$\hat{y}_i = b_0 - b_1 \bar{x}_i \tag{2.11}$$

olarak yazılır. Bu denklemde, her bir x_i değerinin yerine koyulması ile elde edilen $\hat{y}_i$ değerleri regresyon doğrusu üzerinde olacaktır (Alpar, 2003).

En Küçük Kareler Tahmin Edicilerinin Özellikleri

1. Doğrusaldır, yani regresyon modelindeki bağımlı değişken *Y* gibi rasgele bir değişkenin doğrusal bir fonksiyondur.

2. Yansızdır, yani ortalaması ya da beklenen değeri $E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2$ 'dir.

3. Doğrusal yansız tahmin ediciler içinde en küçük varyanslı olanıdır; en küçük varyanslı yansız bir tahmin edici etkin bir tahmin edici olarak adlandırılır (Gujarati, 1999).

2.1.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi

Hataların normallik varsayımı altında regresyon modelinin matris gösterimi,

$$\boldsymbol{Y}_{n\times 1} = X_{n\times p}\boldsymbol{\beta}_{n\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

olmak üzere $\underline{\beta} \in \Re^p$ ve σ^2 parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi şu şekilde verilebilir. Olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \boldsymbol{Y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}-X\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y}-X\boldsymbol{\beta})}$$

dır. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \boldsymbol{Y}) = \ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \boldsymbol{Y}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta})$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'X'\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta}) \qquad (2.12)$$

ve

$$\frac{\ell(\boldsymbol{\beta},\sigma^2;\boldsymbol{Y})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'\boldsymbol{Y} + 2X'X\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\ell(\boldsymbol{\beta},\sigma^2;\boldsymbol{Y})}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}((\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta}))$$

eşitliklerinden $\boldsymbol{\beta} \in \Re^p$ ve σ^2 parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\boldsymbol{Y} \tag{2.13}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{2.14}$$

eşitliklerinden elde edilir (Genç 1997).

2.2. Çoklu Belirleyicilik Katsayısı (R^2)

Çoklu belirleyicilik katsayısı, noktaların regresyon doğrusuna olan yakınlık derecesini gösterir. Çoklu belirleyicilik katsayısı, R^2 ile gösterilir ve bağımlı değişken değişimlerin yüzde kaçının bağımsız değişkenler tarafından açıklanabildiğini ifade eder (Akkaya, 1990).

Çoklu belirleyicilik katsayısı

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}X'\boldsymbol{Y} - n\boldsymbol{Y}^2}{Y'Y - n\boldsymbol{Y}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} \tag{2.15}$$

eşitliğinden hesaplanmaktadır. R^2'nin iki önemli özelliği vardır. Bunlar;

- R^2 pozitif bir değerdir.
- R^2'nin değeri $0 \le R^2 \le 1$ sınırları arasında yer alır. Y'deki toplam değişimin tümü regresyon ile açıklanır ve açıklanamayan kısım sıfır olursa $R^2 = 1$ olur. Bu Y ile X

arasında tam bir bağlantı olduğunu, başka bir deyişle tüm gözlemlerin regresyon doğrusu üzerinde yer aldığını gösterir. Y ile X arasında hiç bağlantı olmazsa açıklanamayan kısmın toplam değişime oranı 1 olur dolayısıyla $R^2 = 0$ olur. R^2 değeri ne kadar büyük olur ve 1'e yaklaşırsa, Y'deki değişimler o oranda X'deki değişimlerle açıklanabiliyor demektir (Kip, 1997).

2.3. Bireysel Parametreler için Güven Aralıkları, Hipotez Testi ve μ_{Y/x^j} 'nin Tahmini

i. bireysel parametre β_i için $1-\alpha$ ' lık güven aralığı

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{1-\alpha/2} s\sqrt{c_{ii}}\,,\, \hat{\beta}_i + t_{1-\alpha/2} s\sqrt{c_{ii}}\right) \tag{2.16}$$

dır . Burada c_{ii}, $(X'X)^{-1}$ matrisinin i. köşegen elemanıdır.

Bireysel parametreler için hipotez testi için

$H_0 : \beta_i = a$

$H_1 : \beta_i \neq a$

hipotezini α anlam düzeyinde test etmek için test istatistiği;

$$t_h = \frac{\hat{\beta}_j - a}{s\sqrt{c_{ii}}} \sim t_{n-p}$$

olup t_h , $n-p$ serbestlik dereceli t dağılımına sahiptir.

$$t_T = t_{1-\alpha/2;n-p}$$

şeklinde hesaplanır. $|t_h| > t_T$ ise H_0 hipotezi reddedilir (Genç 1997).

Açıklayıcı değişkenler üzerinde j. gözlem X matrisinin j. satırı olsun. Açıklayıcı değişkenlerin aldığı bu değerler Y' nin koşullu dağılımının beklenen değeri olan μ_{Y/x^j} için bir tahmin edici

$$\mu_{Y/\boldsymbol{x}^j} = \boldsymbol{x}^j \hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.17}$$

olmak üzere

$$E(\hat{\mu}_{y/\boldsymbol{x}^j}) = \boldsymbol{x}^j \hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.18}$$

$$Var(\hat{\mu}_{y/\boldsymbol{x}^j}) = (\boldsymbol{x}^j) Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{x}^j)'$$

$$= \sigma^2 (\boldsymbol{x}^j)(X'X)^{-1}(\boldsymbol{x}^j)' \tag{2.19}$$

dir. Hipotez modellerinde

$$\hat{\mu}_{y/\boldsymbol{x}^j} \sim N\left(\boldsymbol{x}^j \boldsymbol{\beta}\ , \sigma^2 (\boldsymbol{x}^j)(X'X)^{-1}(\boldsymbol{x}^j)'\right)$$

dır (Genç 1997).

3. QUANTILE REGRESYON

Bu bölümde, quantile kavramı, quantile dağılım fonksiyonu, quantile yoğunluk fonksiyonu, Quantile Regresyon, Quantile Regresyonun doğrusal programlama gösterimi ve Quantile Regresyonun uygulama alanları ele alınacaktır.

3.1. Quantile Kavramı

Serileri iki, dört, on ve yüz eşit parçaya ayıran değerler genel olarak bölenler olarak adlandırılmaktadır. Seriyi iki eşit parçaya bölmek için hesaplanan değerlere medyan, dört eşit parçaya bölmek için hesaplanan değerlere çeyreklik (quartile), on eşit parçaya bölmek için hesaplanan değerlere ondalık (desil) ve yüz eşit parçaya bölmek için hesaplanan değerlere santil adı verilmektedir (Saçaklı, 2008).

X , F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişken ve p , (0,1) aralığında bir reel sayı olmak üzere,

$$P\left(X \le x_p\right) \ge p$$
$$P\left(X \ge x_p\right) \ge 1-p \tag{3.1}$$

eşitsizliklerini sağlayan x_p değerine X 'in (ya da dağılımın) p. quantili denir (Rousass, 1973). F dağılım fonksiyonu kullanarak p. quantile,

$$F\left(x_p^-\right) \le p \le F\left(x_p\right) \tag{3.2}$$

eşitsizliğini sağlayan değer olarak tanımlanır, burada $p = 0.5$ için $x_{0.5}$ değeri dağılımın medyanı, ve $p = 0.25$ ve $p = 0.75$ için $x_{0.25}$ ve $x_{0.75}$ değerleri sırasıyla dağılımın 1. ve 3. çeyreklikleri (quartile) olarak adlandırılır (Ghahramani, 2005).

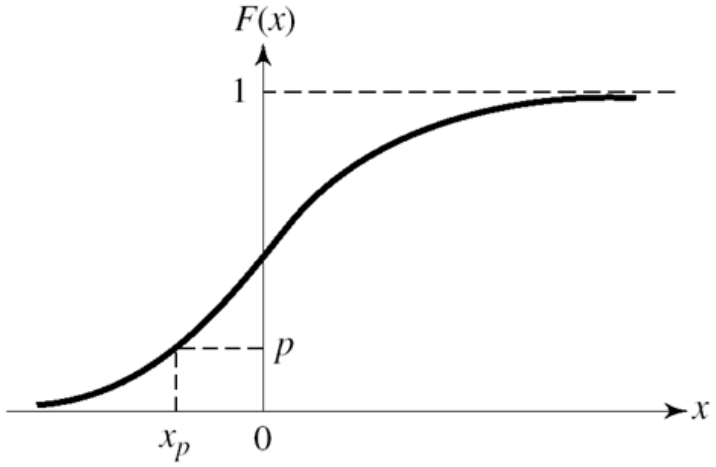
$$P\left(X \ge x_p\right) \ge 1-p \Rightarrow p \ge 1-P\left(X \ge x_p\right) \tag{3.3}$$
$$\Rightarrow p \ge 1-\left(1-P\left(X < x_p\right)\right)$$
$$\Rightarrow p \ge P\left(X < x_p\right)$$
$$\Rightarrow P\left(X < x_p\right) \le p$$
$$\Rightarrow F\left(x_p^-\right) \le p \tag{3.4}$$

Eşitsizlik (3.3) ve (3.4)'ten eşitsizliği (3.1) elde edilir. X , rasgele değişkeninin sürekli olduğu durumlarda;

$F\left(x_p^-\right)=F\left(x_p\right)$ olduğundan p. quantile $F\left(x_p\right)=p$ eşitsizliğini sağlayan x_p değeridir.

Bir dağılımın quantile değeri tek bir değere veya birden fazla değere eşit olabilir. Farklı dağılıma sahip fonksiyonlar için quantile değerleri incelenmiştir.

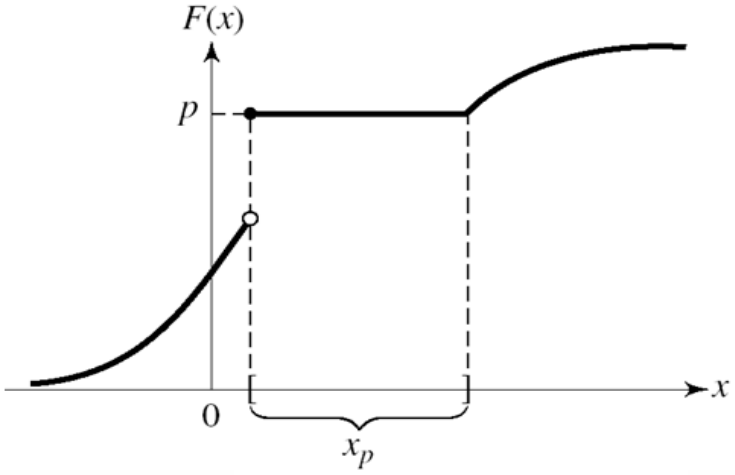
***Birinci Durum*:**



Şekil 3.1. Birinci durum için quantile değeri

Şekil 3.1'de verilen dağılım fonksiyonu sürekli bir rasgele değişkene aittir. Şekil 3.1'den görüldüğü gibi $F\left(x_p^-\right)\le p\le F\left(x_p\right)$ eşitsizliğini sağlayan p. quantile değeri tektir.

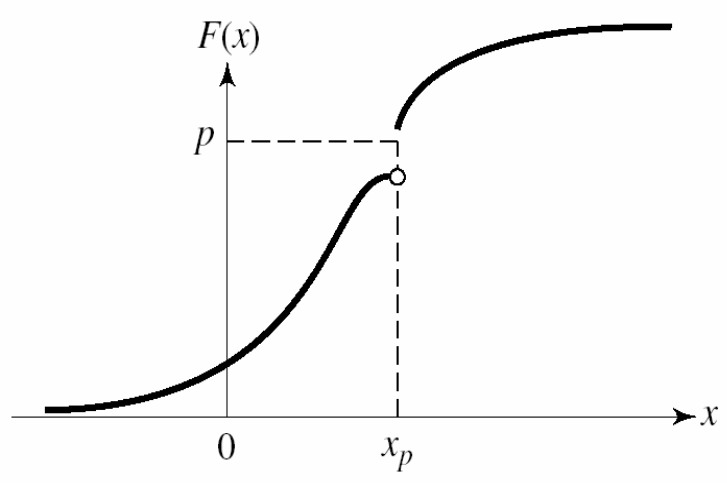
***İkinci Durum*:**



Şekil 3.2. İkinci durum için quantile değeri

Şekil 3.2'de verilen dağılım fonksiyonu kesikli bir rasgele değişkene aittir. Şekil 3.2'den görüldüğü gibi $F\left(x_p^-\right) \le p \le F\left(x_p\right)$ eşitsizliğini sağlayan p. quantile değeri tek değildir.

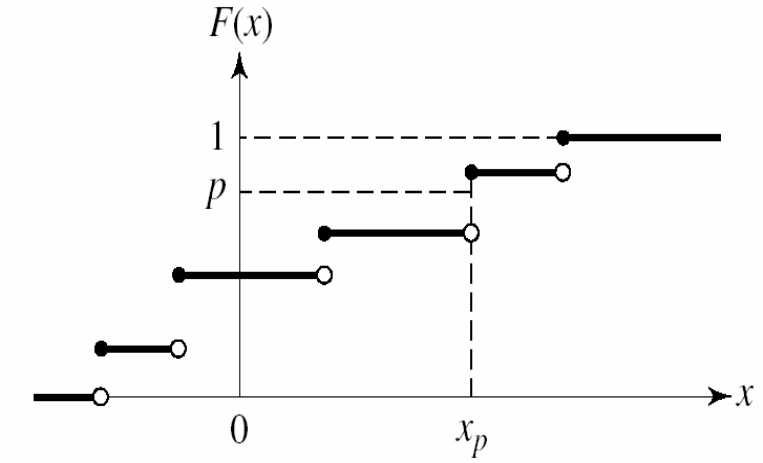
***Üçüncü Durum*:**



Şekil 3.3. Üçüncü durum için quantile değeri

Şekil 3.3'te verilen dağılım fonksiyonu kesikli bir rasgele değişkene aittir. Şekil 3.3'ten görüldüğü gibi $F\left(x_p^-\right) \le p \le F\left(x_p\right)$ eşitsizliğini sağlayan p. quantile değeri tektir.

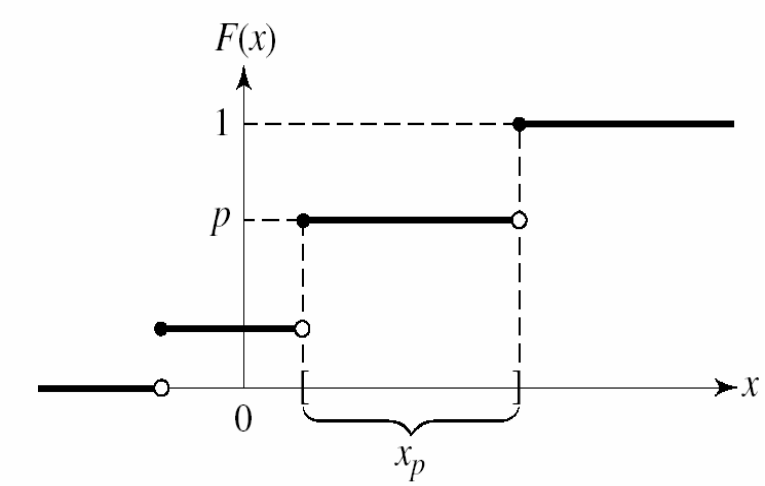
***Dördüncü Durum*:**



Şekil 3.4. Dördüncü durum için quantile değeri

Şekil 3.4'te verilen dağılım fonksiyonu kesikli bir rasgele değişkene aittir. Şekil 3.4'ten görüldüğü gibi $F\left(x_p^-\right) \le p \le F\left(x_p\right)$ eşitsizliğini sağlayan p. quantile değeri tektir.

Beşinci Durum



Şekil 3.5. Beşinci durum için quantile değeri

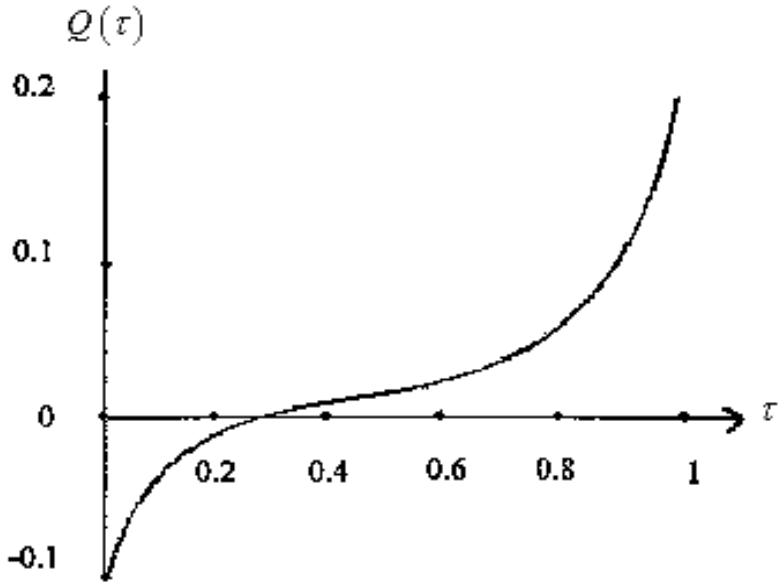
Şekil 3.5'te verilen dağılım fonksiyonu kesikli bir rasgele değişkene aittir. Şekil 3.5'ten görüldüğü gibi $F\left(x_p^-\right) \le p \le F\left(x_p\right)$ eşitsizliğini sağlayan p. quantile değeri tek değildir (Rousass, 1973).

3.2. Quantile Dağılım Fonksiyonu

Quantile Dağılım Fonksiyonu QF veya $Q(\tau)$ ile gösterilir. Quantile değeri değişkenin dağılımında yer alan ve dağılımı, kendisinden büyük olanlar ve kendisinden küçük olanlar diye ikiye bölen herhangi bir değerdir. Şöyle ki, değerlerin $\%\tau$'su τ. quantilden daha küçüktür (τ, olasılık değerini ifade etmektedir). Quantile fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğu için $F\left(x_\tau\right) = \tau$'dur. Quantile fonksiyonun gösterimi Şekil 3.6'da verilmektedir.

x_τ'nın değeri, ana kütlenin τ. quantilleri olarak adlandırılır. $x_\tau = Q(\tau)$ fonksiyonu, τ. quantilleri, τ'nun bir fonksiyonu olarak ifade edilir ve quantile fonksiyonu olarak adlandırılır. Quantile fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu, herhangi

(x,τ) çifti için $x = Q(\tau)$ ve $\tau = F(x)$ şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonlar sürekli artan fonksiyonlardır ve $Q(\tau) = F^{-1}(\tau)$ ve $F(x) = Q^{-1}(x)$'dır (Saçaklı, 2005).



Şekil 3.6. Quantile Fonksiyonu

$Q(\tau)$ quantile fonksiyonu ise τ'nun tüm olasılıkları için, $0 \le \tau \le 1$, quantile değerini verir. Medyan değeri $Q(0.5)$ ile verilir, benzer şekilde $Q(1/4)$ 1. quartili ve $Q(3/4)$ 3. quartili göstermektedir. Hesaplamalar için normal dağılım tablosundan yararlanılır, örneğin 1.96 gibi bir değer 0.975 olasılığını alır. $N(\tau)$ standart normal dağılım için quantile fonksiyonuysa $N(0.975)$ değeri 1.96'ya eşittir, böylelikle kullanılan normal tablolar standart normal dağılım için quantile fonksiyon tablolarıdır

Dağılımları modelleyebilmek için quantile fonksiyonu kullanılabilir. X verilmişken y'nin τ.quantilleri,

$$Q_y(\tau / x) = \beta x + \eta S(\tau) \tag{3.5}$$

olarak gösterilir. $\eta S(\tau)$ artık terimi ifade etmektedir. $S(\tau)$ simetrik olması gerekmeyen quantile fonksiyondur, η ölçek parametresidir. y'nin x üzerindeki quantile regresyon fonksiyonu" ya da "koşullu quantile fonksiyonu" olarak adlandırılır (Saçaklı, 2005).

3.3. Quantile Yoğunluk Fonksiyonu

Dağılımları modelleyebilmek için dağılım fonksiyonunun türevini alarak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edildiği gibi, Quantile Dağılım Fonksiyonun türevi alınarak Quantile Yoğunluk Fonksiyonu (QDF) belirlenebilir ve

$$q(\tau)=\frac{dQ(\tau)}{d\tau} \tag{3.6}$$

olarak gösterilir. $Q(\tau)$ azalmayan bir fonksiyon olduğu için eğimi $q(\tau)$ negatif değildir, her zaman $0\le\tau\le1$ birim aralığında yer alır, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise sonsuz tanım aralığında yer alır.

Serinin mod değerinin olasılığı $p-\text{mod}\ge0.5$ ise, dağılım sola çarpıktır ve $q(\tau)$ quantile yoğunluk fonksiyonu $q(\tau)\le q(1-\tau)$ durumunu sağlar, $0\le\tau\le0.5$'tir. Quantile fonksiyonu da $Q(\tau)=Q(1-\tau)\le2\tau(0.5)$ durumunu sağlar ve Ortalama $\le$ Medyan $\le$ Mod eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde serinin mod değerinin olasılığı $p-\text{mod}\le0.5$ ise, dağılım sağa çarpıktır ve $q(\tau)$ quantile yoğunluk fonksiyonu işaretler durumunu sağlar, $0\le\tau\le0,5$ 'tir. Quantile fonksiyonu da $Q(\tau)+Q(1-\tau)\ge2\tau(0.5)$ durumunu sağlar ve Ortalama $\ge$ Medyan $\ge$ Mod eşitsizliği sağlanır (Saçaklı, 2005).

3.4. Quantile Regresyon

Quantile Regresyon, ilk olarak regresyondaki klasik varsayımlardan hata terimlerinin normal dağılması varsayımını ihmal eden robust (sağlam) bir regresyon tekniği olarak ortaya çıkmıştır. Quantile regresyon, daha kapsamlı bir regresyon görüntüsü sunmak amacıyla tasarlanan bir yöntemdir (Koenker, 2005).

Uygulamalı istatistiğin önemli bir kısmı lineer regresyon modeli ve bu modelin tahmininde sıklıkla kullanılan "En küçük Kareler" tahmin metotlarının detaylı bir şekilde incelenmesi olarak görülebilir (Koenker, 2005)

Mostseller ve Tukey önemli eserlerinde;

> *Regresyon eğrisinin yaptığı şey x'lerin kümesine karşılık gelen dağılımların ortalamasının özet bilgisini vermektir. Daha fazla bilgi için dağılımların çeşitli yüzde puanlarına denk gelen farklı regresyon eğrileri hesaplanabilir, bu sayede de kümenin daha detaylı bilgisi elde edilebilir. EKK yönteminde bu yapılmaz ve bu nedenle genellikle regresyon eğrisi bize eksik bilgi verir. Sadece ortalama değerinin bir dağılım için eksik bilgi vermesi gibi,* EKK *regresyon eğrisi de dağılım kümeleri hakkında eksik bilgi verir.*

biçiminde ifade etmişlerdir (Koenker, 2005).

EKK yöntemi, bir ya da daha fazla bağımsız değişken (X) arasındaki ilişkiyi ve $X = x$ verildiğinde Y bağımlı değişkeninin koşullu ortalamasını modeller. (Chen, 2005). Koenker ve Basett (1978) tarafından sunulan Quantile regresyon ise koşullu quantile fonksiyonlarının tahmin modeli için uygun bir yöntem sağlar (Koenker ve Hallock, 2001). Quantile Regresyon, özellikle koşullu quantillerin değişkenlik gösterdiği durumlarda kullanışlıdır. Quantillere bağlı olarak regresyon katsayılarını belirler **(**Chen, 2005).

Lineer regresyon modelinde EKK yönteminin, uygulamalı istatistikte bu kadar yaygın olmasına neden olan üç madde vardır. İlk olarak, lineer tahmin edicilerin hesaplama açısından takip edilebilirliği çok ilgi çekicidir ve bu gözden kaçırılmamalıdır. İlk aşamadaki başarıların arkasındaki itici güç, bu özellikten kaynaklanmaktadır. İkinci olarak, eğer ki gözlemsel gürültü (noise) normal dağılıma sahipse, en küçük kare metodunun bazı optimal özelliklerine sahip olduğu bilinmektedir. Daha fazla dikkat çekici olan şey ise, nispeten yakın zamanda fark edilen, EKK yöntemlerinin koşullu ortalama fonksiyonlarını tahmin etmek için genel bir yaklaşım sağlamasıdır.

Mosteller ve Tukey'in önerdiği gibi, ortalama, tek bir örneğin istatistiksel analizi için bile nadiren tek başına yeterlidir. Daha fazla bilgi kazanmak için dağılımın çarpıklık, basıklık, kutu grafikleri, histogramlar ve daha karmaşık yoğunluk tahminleri sıkça kullanılmaktadır. Buna benzer bir şey regresyonda yapılabilir. Bunun için başlama noktası, en küçük kareler ile tahmin edilen koşullu ortalama yüzeylere bazı tahmin edilen koşullu quantile yüzeyler eklemek olabilir. Regresyon üzerine temel fikirler, bu konudaki ilk çalışmalar olan Boscovich'in 18. yüzyılın ortalarındaki ve Edgeworth'un 19. yüzyılın sonlarındaki çalışmalarından ortaya çıkmıştır (Koenker 2005).

EKK regresyon modelinde hata teriminin değişkenlerin değerinden bağımsız olduğu (varyanslar homojen) varsayılır. Tam tersine quantile regresyon modelinde hata terimlerinin değişkenliğine izin verilir ve varyans yapısına ilişkin herhangi bir varsayımı bulunmamaktadır (Baur ve ark. 2004).

3.4.1. Quantile Regresyonun Doğrusal Programlama Gösterimi

Quantile regresyon tahmin edicileri doğrusal programlama problemi olarak formüle edilebilir ve artıkların iki parçalı doğrusal amaç fonksiyonu optimize edilerek simpleks veya sınır metot yolu ile sayısal değerlerler elde edilebilir (Koenker ve Hallock, 2001).

F dağılım fonksiyonuna sahip Y bağımlı değişkenin, rasgele örneklemi $\{y_t : t = 1,\ldots,T\}$, $\{x_t, t = 1,\ldots,T\}$, $t \times k$ boyutlu tasarım matrisi, $\boldsymbol{b}$, tahmin edilecek katsayı vektörü ve $e_t = y_t - x_t\beta$ hata değeri olmak üzere, τ. regresyon quantili $(0 < \tau < 1)$;

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^K}\left[\sum_{t\in\{t:y_t\geq x_t\boldsymbol{b}\}}\tau\left|y_t - x_t\boldsymbol{b}\right| + \sum_{t\in\{t:y_t<x_t\boldsymbol{b}\}}(1-\tau)\left|y_t - x_t\boldsymbol{b}\right|\right] \tag{3.7}$$

eşitliğinin minimize edilmesiyle elde edilir. (Koenker ve Basett, 1978).

y_i bağımlı değişkeninin τ. quantili,

$$\underset{b\in\mathbb{R}^p}{Min}\sum_{i=1}^{n}\rho_\tau\left(y_i - x_i^T b\right) \tag{3.8}$$

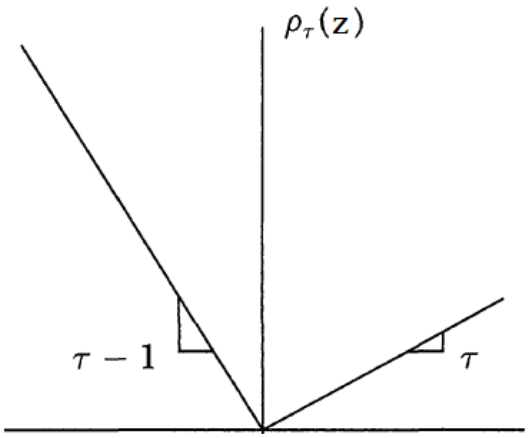
ifadesinin minimize edilmesi ile elde edilmektedir. Quantile regresyonun bu gösterimi doğrusal programlama gösterimi olarak adlandırılır. Burada, ρ_θ kontrol (check) fonksiyonu olmak üzere

$$\rho_\tau(z) = z\left(\tau - I(z \leq 0)\right) \tag{3.9}$$

veya

$$\rho_\tau(z) = \begin{cases} \tau z, & z \geq 0 \\ (\tau - 1)z, & z < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Eşitlik (3.10)'da I, karakteristik fonksiyonu göstermektedir. Kontrol fonksiyonun grafiği Şekil 3.7'de olduğu gibi gösterilebilir (Saçaklı, 2005).



Şekil 3.7. Kontrol Fonksiyonu

En küçük mutlak sapma tahmin edicileri, quantile regresyonda $\tau = \frac{1}{2}$ alınması durumunda medyan regresyondur (Koenker ve Basett 1978).

Eşitlik (3.8) açık bir şekilde yazıldığında,

$$Min\left\{\tau 1_n^T u + (1-\tau) 1_n^T v\right\}$$
$$y - Xb = u - v$$
$$x \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^{2n}$$
$$b \in \mathbb{R}^p$$
$$u, v \in \mathbb{R}_+^{2n}$$

elde edilir. Matris gösterimiyle yazıldığında,

$$Min \;\; c^T x$$
$$Ax = T$$

Burada;

$c = \left(0_p^T, \tau 1_p^T, (1-\tau) 1_p^T\right)^T$

$x = \left(b^T, u^T, v^T\right)^T$

$A = \left[X : I : -I\right]$

$b = y$

$I_n = n$ boyutlu birim matris

$T = 0_n$

biçiminde ifade edilir (Koenker, 2005).

$\tau.$ quantilin hata terimi $\varepsilon_t(\tau)$'nin sıfır olduğu varsayılır:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{K} \beta_k(\tau) x_{tk} + \varepsilon_t(\tau)$$

$$Q_{\varepsilon_t(\tau)}\left(\tau \setminus x_{t1}, \ldots, x_{tK}\right) = 0$$

Bu özellikten, *y*'nin $\tau.$ koşullu quantili

$$Q_{y_t}\left(\tau \setminus x_{t1}, \ldots, x_{tK}\right) = \beta_0(\tau) + \sum_{k=1}^{K} \beta_k(\tau) x_{tk}$$

biçiminde yazılabilir (Baur ve ark. 2004).

3.4.2. Quantile Regresyonun Uygulama Alanları

Quantile regresyon son yıllarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bunlardan bazılar aşağıda verilmektedir.

Tıpta referans çizelgeleri

Tıpta, referans grafikleri uygun quantillerden oluşan bir koleksiyon sunar. Bunlar yaygın olarak ön tıbbi tanı esnasında normalden farklı bazı özel ölçüm değeri olan kişileri belirlemek için kullanılır.

Hayatta kalma analizleri

Hayatta kalma analizleri için uygulamalar, bireysel hayatta kalma süresi üzerinde spesifik bağımsız değişken etkileri çalışmasını içerir. Bağımsız değişkenler orta, düşük ve yüksek riskli bireyler üzerinde farklı bir etkiye sahip olabilir. Bu etkileri yaşam süresi için farklı quantile değerleri ele alınarak anlaşılabilir.

Ekonomi

Quantile regresyon, bağımsız değişkenlerin bir etkisi olarak tüketim piyasalarında düşük, orta ve yüksek tüketim grubuna ait bireyler için çalışma açısından kullanışlıdır. Aynı şekilde, faiz oranlarındaki değişiklikler, orta yüksek ve düşük kar gruplarına ait şirketlerin hisse fiyatları ile ilgili farklı bir sonuç olabilir. Özellikle, quantile regresyon artık ücret ve çalışma ekonomisindeki gelir çalışmaları için bir standart analiz aracı olarak görülmektedir. Ayrıca gelirin çalışanlar arasında paylaştırılması için, vergi stratejilerini belirlemek için ya da sosyal politikaların uygulanması için önemlidir.

Diğer uygulamalar hava koşulları açısından zamana bağlı günlük elektrik talebinin modellenmesini içerir. Klima kullanımında özellikle günün aktif periyotları boyunca yüksek kullanımı yansıtan yüksek quantile eğrileri, geçmiş kullanıma bağlı olarak düşük quantile eğrileri kullanışlıdır.

Çevresel modelleme

Hidroloji, yağış ve nehrin akış modellemesi ile ilgilidir. Dağılımın kuyruğunu modelleme ve uç quantile bilgileri hidrolojinin temel istatistiklerini oluşturmaktadır. Hava kirliliği araştırması yapılarak ortalama hava kirliği seviyesi modellemesi için halk sağlığını az etkileyen model ile üst quantile değerlerinde aşırı kirlilik gösteren konsantrasyon değerleri incelenebilir (Yu ve ark, 2003).

3.4.3. Quantile Regresyon Yönteminin Özellikleri

1) EKK yöntemi y' nin koşullu dağılımının ortalaması hakkında bilgi vermekte, Quantile Regresyon ise farklı quantile değerleri için y' nin x' e göre koşullu dağılımının tümü hakkında bilgi vermektedir.

2) Quantile Regresyon'da; $\underset{b\in\mathbb{R}^p}{Min}\sum_{i=1}^{n}\rho_\tau\left(y_i - x_i^T b\right)$ ifadesinin minimizasyonu, doğrusal programlama (LP) gösterimidir, bu durum tahmini kolaylaştırmaktadır.

3) Quantiller monoton dönüşümlere olanak verirler. Herhangi h(.) monoton fonksiyonu için $Q_{h(y)/x}\left(\tau / x\right) = h\left(Q_{h(y)/x}\left(\tau / x\right)\right)$ olur.

4) Quantiller y' deki aşırı değerlere karşı kararlıdırlar (robust).

5) Hata terimi normal dağılmadığında, quantile regresyon tahmin edicileri EKK tahmin edicilerinden çok daha etkin olabilmektedir.

6) Quantile Regresyon değişen varyansın belirlenmesine imkân vermektedir.

7) Quantile Regresyon amaç fonksiyonu için tahmin edilen katsayı vektörü, bağımlı değişkendeki aşırı değerlere duyarlı değildir ve yerleşimin robust bir ölçüsüdür.

8) Farklı quantillerde farklı sonuçlar çıkması, bağımlı değişkenin koşullu dağılımının farklı noktalarındaki bağımsız değişkenlerdeki değişikliklere farklı tepki vermesi olarak yorumlanabilir (Saçaklı 2005).

9) Quantile Regresyon analizinde $\tau = 0.5$ olması durumunda LAD regresyon analizi elde edilmektedir.

4. EN KÜÇÜK MUTLAK SAPMA YÖNTEMİ

En küçük mutlak sapma (LAD) yöntemi, 1757 yılında Roger Joseph Boschovich tarafından, dünyanın biçimini tahmin amacıyla, yeterli olmayan ölçümlerini uzlaştırmak için bir yol olarak geliştirilmiştir. En küçük kareler metodundan yaklaşık olarak 50 yıl önce ortaya konulmuş, sonrasında ise en küçük kareler metodunun gölgesinde kalmıştır (Birkes ve Dodge, 1993). Hataların normal dağılmaması ve/veya veri kümesi içinde sapan değerlerin bulunması durumunda LAD yöntemi diğer klasik tahmin yöntemlerine göre üstünlük göstermektedir (Temiz, 2006).

4.1 Basit Doğrusal En küçük Mutlak Sapma Regresyonu

Bir bağımlı bir bağımsız değişkenli basit regresyon analizi veri seti için eğim hesabı yardımıyla regresyon doğrusu bulunur. Amaç veri kümesine en uygun, mutlak sapmaların toplamını en küçük yapan doğruyu bulmaktır. Bu işlem için her hangi bir formül bulunmamaktadır. Tahmin bir algoritma yardımıyla yapılmaktadır (Birkes ve Dodge 1993). Öncelikle doğrusal regresyon modeli; $Yi = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i$'nin grafiği çizilip doğrusal olduğu belirlendikten sonra, doğrusal regresyon modeli kullanmaya karar verilir (Saçaklı, 2005).

EKK yöntemi, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahmin edicilerini, hataların karelerinin toplamını $\left(\sum \hat{e}_i^2\right)$ minimum yapacak şekilde hesaplamaya dayanmaktadır. LAD yönteminde ise, hataların mutlak değerlerinin toplamını minimum yapma esasına dayanmaktadır ve bu durum

$$Min \sum |\hat{e}_i| \tag{4.1}$$

biçiminde ifade edilmektedir. $y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)$ farkı, (x_i, y_i) noktasının $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$ doğrusundan sapması olarak tanımlanmakta ve $\sum |\hat{e}_i| = \sum \left| y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)\right|$ olarak yazılabilir. Buradan hareketle LAD yöntemi'nin amacının, $\sum |\hat{e}_i|$'yi minimum yapacak şekilde $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametrelerini tahmin etmek olduğu söylenebilir (Temiz 2006).

LAD Yöntemi'nin ilkeleri EKK yöntemi'nin ilkelerine göre daha basittir. Çünkü $|\hat{e}|$'ın hesaplanması, $\hat{e}^2$ 'nin hesaplanmasından daha kolaydır. Bunun yanında En Küçük

Kareler Yöntemi'nin tahmin edicilerinin hesaplanması belirli formüllere dayanırken, LAD Yöntemi'nin tahmin edicilerinin hesaplanması için hiçbir formül bulunmamaktadır. Bu durum ise, LAD tahmin edicilerinin hesaplanması için bir algoritmanın oluşturulmasını gerekli kılmaktadır (Temiz 2006).

Bu algoritma, mutlak sapmaların toplamının minimum olduğu doğruyu yani veri kümesine en uygun olan doğruyu bulmayı amaçlamaktadır. Örneğin $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ doğrusu ele alındığında, verilerin y_i, y doğrusundan mutlak sapmalarının toplamı $\sum |\hat{e}_i|$, verilerin doğruya olan dikey uzunluklarının toplam boyutunu vermektedir. Doğru, yukarı doğru ε kadar küçük bir miktar hareket ettirilirse, bu durumda her bir mutlak sapma (noktanın doğrunun üzerinde veya altında olmasına bağlı olarak) $\pm\varepsilon$ yönde hareket edecektir. Buradan hareketle, $\sum \left| y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right|$ ifadesinin minimum değerini bulmak için, veriler arasında doğruyu aşağı/yukarı hareket ettirmek gerekmektedir (Temiz, 2006).

Özetle, algoritmanın temel mantığı, verilen bir (x_0, y_0) noktasından geçen tüm doğruların arasından en iyi doğruyu bulmaya dayanmaktadır. (x_0, y_0) noktasından geçen en uygun doğru bulunduktan sonra, "bir doğru iki noktadan geçer" ilkesinden yola çıkılarak bulunan bu doğrunun geçtiği diğer nokta olan (x_1, y_1) noktası bulunmaktadır. Daha sonra (x_1, y_1) noktasından geçen doğrular arasından en uygun doğru bulunmakta ve bu doğrunun da ikinci noktası yani (x_2, y_2) noktası bulunmaktadır. Bu şekilde devam edilerek, her aşamada toplam mutlak sapması daha küçük bir doğru bulunarak, bulunan bir doğru, bir önceki adımda bulunan doğru ile aynı çıkana kadar işlemler devam ettirilmektedir. Aynı doğru ardı ardına iki defa elde edildiğinde ise algoritmaya son verilmektedir. Bulunan bu doğru, tüm doğrular arasında toplam mutlak sapması en küçük olanıdır dolayısıyla en iyisidir ve aranan "En Küçük Mutlaka Sapma Regresyon Doğrusu" dur (Temiz, 2006).

4.1.1 Basit En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu için Algoritma

Adım 1. Başlangıç için bir (x_0, y_0) noktası alınır.

Adım 2. Her bir gözlem noktası (x_i, y_i) için, $(y_i - y_0)/(x_i - x_0)$ eğimi hesaplanır. $x_i = x_0$ olan noktalar ihmal edilir.

Adım 3. Gözlem noktaları $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) \leq \cdots \leq (y_n - y_0)/(x_n - x_0)$ olacak şekilde küçükten büyüğe sıralanarak yeniden numaralandırılır.

Adım 4. $|x_1 - x_0| + \cdots + |x_{k-1} - x_0| < \frac{1}{2}T$

$$|x_1 - x_0| + \cdots + |x_{k-1} - x_0| + |x_k - x_0| > \frac{1}{2}T$$

durumunu sağlayan $k.$ gözlem bulunur. Burada

$$T = \sum |x_i - x_0|$$

dir.

(x_0, y_0) noktasından geçen en iyi doğru

$$\hat{Y} = b_0 * + b_1 * X$$

dir ve burada,

$$b_1 * = \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0} \quad , \quad b_0 * = y_0 - b_1 * x_0 \tag{4.2}$$

dır. Bulunan *k* indisi tekrarlandığında algoritma durdurulur (Birkes ve Dodge, 1993).

4.1.2. Doğrunun İki Gözlem Noktasından Geçme Zorunluluğu

Algoritmayı oluşturmada önemli bir etken LAD regresyon doğrusunun iki gözlem noktasından geçmesidir. Bunun neden böyle olduğunu anlamak için, gözlem noktalarının saçılım grafiğinde bir $y = b_0 + b_1 x$ doğrusu düşünülsün. Bir gözlem noktasının doğrudan olan sapması, noktadan doğruya çizilen düşey çizginin uzunluğudur. $\sum |y_i - (b_0 + b_1 x_i)|$ ifadesi bu uzaklıkların toplamını gösterir.

Doğrunun hiçbir gözlem noktasından geçmediği varsayılsın. Doğru yukarı yönde çok küçük bir ε miktarı hareket ettirilirse, her bir mutlak sapma, gözlem noktasının doğrunun altında veya üstünde olmasına göre ε kadar artacak veya azalacaktır. Mutlak sapmaların toplamı, doğrunun üstünde veya altında daha fazla nokta olmasına göre, doğrunun aşağı ya da yukarı hareketiyle azalabilir (veya en azından artmaz). Doğru bir gözlem noktasına ulaşana kadar hareket ettirilir.

Doğru, kesin olarak bir gözlem noktasından geçtiğinde, ikinci bir veri noktasına rastlayana kadar saat yönünde veya saat yönünün tersi yönünde döndürülür. Böylece, bu gözlem noktası için de mutlak sapma sıfır olur, diğerleri de artabilir veya azalabilir. Mutlak sapmaların toplamında azalma meydana getirmek için, doğru, bu yönlerden birine göre döndürülebilir. Bu da gösterir ki, mutlak sapmaların toplamını en küçük hale getirmek için en az iki gözlem noktasından geçen doğrulara bakılması gerekir (Birkes ve Dodge, 1993).

4.1.3 En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Tek Olmama ve Bozulma Sorunu

Tek olmama bir gözlem noktasından geçen birden fazla en iyi doğru olmasıdır. Bozulma ise, bir gözlem noktasından geçen en iyi doğrunun iki veya daha fazla gözlem noktasından da geçmesidir. Bu durumda bir sonraki adım için gözlem noktası yanlış seçilebilir algoritma bir döngüye girebilir veya seçilen doğru LAD regresyon doğrusu olmayabilir. Bu sorunu gidermek için, tüm gözlem çiftleri için mümkün olan LAD regresyon doğruları bulunur. Aralarından en küçük mutlak sapma toplamını veren doğru seçilir. Ancak bu yöntemin uygulanabilirliği gözlem sayısı n 'ye bağlıdır.

Verilen (x_k, y_k) gözlem noktası için eğim,

$$b_1* = \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0} = \frac{y_{k+1} - y_0}{x_{k+1} - x_0} = \frac{y_{k-1} - y_0}{x_{k-1} - x_0} \tag{4.3}$$

eşitliğinden hesaplanır.

Tek bir doğru olmaması sorununda ise LAD regresyon doğrularından herhangi biri seçilir. (Birkes ve Dodge, 1993).

4.1.4 Eğim Parametresinin Anlamlılık Testi

Eğim parametresinin test etmek için

H_0: $\beta_1 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq 0$

hipotezi kurulur. LAD regresyon tahminleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ile e_i artık değerleri bulunur. Sıfır olanlar çıkarılarak artan sırada sıralanır. $m = n - 2$, sıfır olmayan hataların sayısıdır.

k_1: $\frac{(m+1)}{2} - \sqrt{m}$ 'e en yakın tamsayı

k_2: $\frac{(m+1)}{2} + \sqrt{m}$ 'e en yakın tamsayı

olsun.

$$\hat{\tau} = \frac{\sqrt{m}[e_{(k_2)} - e_{(k_1)}]}{4} \tag{4.4}$$

değerinden

$$est.SD(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \tag{4.5}$$

hesaplanır. Test istatistiği,

$$|t| = \frac{\left|\hat{\beta}_1\right|}{est.SD(\hat{\beta}_1)} \tag{4.6}$$

biçimindedir. $|t| > t_{\alpha;n-2}$ ise H_0 reddedilir (Birkes ve Dodge, 1993).

4.1.5. τ Parametresi

Regresyon doğrusunun eğiminin tahmin edilmesinde, MSE ve LAD regresyon yöntemlerinden hangisinin daha iyi sonuç verdiği $\frac{\tau}{\sigma}$ oranına bağlıdır. σ ve τ, rasgele hata paylarının büyüklüklerinin ölçüsüdür. ϑ medyan etrafındaki hata paylarının dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, $\tau = \frac{1}{2\vartheta}$'dir. σ büyük olduğunda, hata payları geniş bir alana yayılır. Bu durumda medyan etrafındaki olasılık yoğunluk küçüktür, bu sebeple ϑ da küçüktür. Yukarıdaki eşitlikten de görüldüğü üzere, ϑ 'nın küçük olması, τ 'nun büyük olması anlamına gelmektedir.

Özetle;

σ büyük olduğunda τ da büyüktür ve σ küçük olduğunda τ da küçük olmaktadır.

Fakat $\frac{\tau}{\sigma}$'nın gerçek oranı, ana kütle hata paylarının dağılımının şekline bağlıdır. Hata payları normal dağılıyorsa $\frac{\tau}{\sigma} > 1$ olmaktadır. Bu durumda, en azından büyük örnekler için, EKK yöntemi, LAD yönteminden daha iyi sonuç vermektedir. Hata paylarının normal dağılmaması halinde ise, $\frac{\tau}{\sigma} < 1$ olmaktadır. (Temiz 2006).

4.2. Çoklu Doğrusal En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu

Basit doğrusal regresyonda LAD regresyon doğrusu iki noktadan geçmekteydi. *p* tane açıklayıcı değişkene sahip çoklu regresyonda LAD regresyon denklemi (*p*+1) gözlem noktasını sağlar.

Çoklu doğrusal regresyonda $\sum |e_i|$ ifadesini en küçük yapan

$$\min \sum \left| y_i - (b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots + b_p x_{ip}) \right| \tag{4.7}$$

biçiminde verilen optimizasyon probleminin çözülmesi gerekmektedir. Minimizasyon için herhangi bir formül bulunmadığından bir algoritma kullanılır. Basit LAD regresyonda iterasyona bir doğru ile başlanır ve daha iyi bir doğru bularak devam edilir. En iyi doğru bulunana kadar işlem devam eder. Benzer şekilde çoklu LAD regresyon da iteratif bir yöntemdir.

Vektör gösterimi kullanılarak,

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olarak verilir. Eşitlik (4.7)'deki mutlak sapmalar toplamı,

$$\sum | y_i - \boldsymbol{b}' x_i | \tag{4.9}$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (4.9)'u minimize etmek için $\boldsymbol{b}$ vektörünün tahmin edilmesi gerekmektedir. $\boldsymbol{b}$ başlangıç tahmin vektörü,

$$y_i = \boldsymbol{b}' x_i \ , \qquad i = 1, 2, ..., p+1 \tag{4.10}$$

biçiminde belirlenir.

$$A = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{p+1}' \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p+1} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

olmak üzere matris gösterimi ile $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ yazılır. Buradan

$$\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{c} \tag{4.12}$$

olur.
Her adımda $\boldsymbol{b}$ vektörünün iyileştirilmiş hali,

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b} + t\boldsymbol{d} \tag{4.13}$$

olarak hesaplanır. Bu vektörün bulunması için yön vektörü $\boldsymbol{d}$ ve adım uzunluğu t değerlerinin elde edilmesi gerekir. Minimize edilecek ifade,

$$\sum \left| y_i - (\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{d})' x_i \right| \tag{4.14}$$

olacağından, burada,

$$z_i = y_i - \boldsymbol{b}' x_i \, , \quad w_i = \boldsymbol{d}' x_i \tag{4.15}$$

dönüşümü yapılarak,

$$\sum |z_i - t w_i| \tag{4.16}$$

elde edilir. Bu gösterim, $\sum |(y_i - y_0) - \boldsymbol{b}(x_i - x_0)|$ ifadesini minimize edecek olan $\boldsymbol{b}$'yı bulmakla aynıdır. z_i / w_i oranları hesaplanıp, artan sıraya göre dizilir. z ve w yeniden indekslenerek k. indis bulunur.

$$|w_1| + |w_2| \cdots + |w_{k-1}| < \frac{1}{2} T$$

$$|w_1| + |w_2| \cdots + |w_{k-1}| + |w_k| > \frac{1}{2} T \tag{4.17}$$

Burada $T = \sum |w_i|$ 'dir. t'nin minimum yapan değeri

$$z_k / w_k \tag{4.18}$$

olur. Bu ifade

$$t^* = (y_k - \boldsymbol{b}' x_k) / \boldsymbol{d}_j' x_k \tag{4.19}$$

ile gösterilir.

Algoritmanın her adımında (p+1) tane yön vektörü vardır. Bu (p+1) vektörün negatifleri de kullanıldığından 2(p+1) tane yön vektörü elde dilmiş olur.

Başlangıç yön vektörleri $d_1, d_2, ..., d_{p+1}$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} x'_{i_1} \\ x'_{i_2} \\ \vdots \\ x'_{i_{p+1}} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

olmak üzere A^{-1}'nın sütunları yön vektörleridir. $\boldsymbol{b}$'den daha iyi bir tahmin vektörü bulmak için $\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b} + t^* \boldsymbol{d}_j$ hesaplanır.

Yön vektörlerinin arasından eşitlik (4.14)'ü en hızlı biçimde t=0 değerine yaklaştıran yön seçilir. Bu değerin azalmasını belirlemek için eşitlik (4.14)'de ifadesinde sağ tarafın t=0'daki türevi alınır.

$\sum |z_i - tw_i|$ ifadesinde t=0'da sağ tarafın türevi,

$$W_- + W_0 - W_+ \tag{4.21}$$

dır. Burada,

$W_- = \dfrac{z_i}{w_i}$ negatif olduğunda $\sum |w_i|$'dir.

$W_0 = \dfrac{z_i}{w_i}$ sıfır olduğunda $\sum |w_i|$'dir.

$W_+ = \dfrac{z_i}{w_i}$ pozitif olduğunda $\sum |w_i|$'dir.

Tüm yön vektörleri için bu türevler hesaplanır. Türevi negatiflerin en küçüğü olan yön en uygun yöndür. Tüm türevler pozitifse, bu durumda geçerli $\boldsymbol{b}$ vektörü $\boldsymbol{\beta}$'nın en iyi tahminidir ve işlemler bu noktada son bulur (Birkes ve Dodge, 1993).

Çoklu En Küçük Mutlak Sapma Regresyonu için Algoritma

Adım 1. A matrisi ve $\boldsymbol{c}$ vektörü (4.11) ifadesinden belirlenir.

Adım 2. $\boldsymbol{b}$ başlangıç tahmin vektörü (4.12) eşitliği ile hesaplanır.

Adım 3. Başlangıç yön vektörleri A^{-1}'den oluşturulur.

Adım 4. z_i'ler ve her bir yön vektörü için w_i'ler (4.15) ile oluşturulur.

Adım 5. z_i / w_i'ler hesaplanır.

Adım 6. Türev değerleri (4.21) ile hesaplanır ve negatif değerlerin en küçüğünü veren yön vektörü $\underline{d}_j$ seçilir.

Adım 7. z_i / w_i'ler sıralanarak k. indis (4.15) ile verilen eşitsizlikten tespit edilir. t'nin minimum değeri (4.18) ile elde edilir.

Adım 8. Bulunan $\boldsymbol{d}_j$ ve t^* değeri (4.13) eşitliğinde yerine konularak $\boldsymbol{b}^*$ elde edilir.

Adım 9. A'nın j. satırı x_k' ile değiştirilir. Bu yeni matrise A^* denir. Yeni yön vektörleri A^{*-1}'ın sütunlarıdır.

Bulunan k indisi tekrarlandığında algoritma durdurulur (Birkes ve Dodge, 1993).

4.2.1. Çoklu En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Tek Olmama ve Bozulma Sorunu

Çoklu LAD regresyon, verilen bir yönde en iyi tahmin vektörünü bulmak için basit LAD regresyondaki süreci izler. Tek olmama ve bozulma sorunu basit LAD regresyon bölümünde verilmişti. Aynı sorunlar, türevi negatiflerin en küçüğü olan yön vektörünün birden fazla olması veya en küçük türevin sıfır olması durumunda çoklu LAD regresyonda da ortaya çıkar.

Algoritma türevlerinin tamamının pozitif değerler ve sıfırlardan oluştuğu bir adıma gelirse o andaki tahminlerin vektörü bir LAD vektörüdür. Ancak türevi sıfır olan diğer yönlerden de LAD vektörü elde edilebilir. Bazen de algoritma tüm türevlerin en küçük olduğu bir sonuç verebilir ki buna döngü denir.

Teorik olarak, tahminlerin LAD vektörü en az (p+1) gözlem noktasından geçmek zorunda olduğundan, tüm mümkün (p+1) gözleme sahip altkümeler değerlendirilerek mutlak sapmalar toplamını en küçük yapan vektör seçilebilir. Fakat bu çözüm büyük veri kümeleri için uygun olmaz.

Döngü meydana geldiği zaman uygulanabilecek daha uygun bir yol, algoritmaya farklı bir başlangıç vektörü ile başlama olabilir. Diğer bir yöntem de, çok küçük rasgele sayılar üretip, bunları açıklayıcı değişkenlere ekleyerek veriyi değiştirmek olabilir. Bu yöntem döngüyü giderir ve değiştirilen veriden elde edilen LAD vektörünün elde edildiği (p+1) gözlem asıl verinin LAD vektörünü de belirler.

Bozulma sorunu da, eşitlik (4.14)'deki t'nin en küçük değerinin $t^* = 0$ olması durumudur. Böyle bir durumda, farklı bir $\boldsymbol{d}$ yön vektörü kullanılarak sorun giderilebilir (Birkes ve Dodge, 1993).

4.2.2. Çoklu En Küçük Mutlak Sapma Regresyonunda Katsayıların Anlamlılığının Testi

LAD regresyonda katsayıların anlamlılığının test edilmesi indirgenmiş model ve tüm modelin artıklarının mutlak değerlerinin toplamları ile yapılmaktadır. Tüm modelde parametre sayısı *p*, indirgenmiş modelde ise parametre sayısı *q*'dur. İki model tahmin edilip artıklarının mutlak toplamları bulunarak iki model arasındaki farkı oluşturan (*p*-*q*) sayıda parametrenin anlamlılığı birlikte test edilir.

H_0: $\beta_{q+1} = ... = \beta_p = 0$

H_1: En az bir $\beta_i \neq 0$

hipotezi oluşturulur ve test istatistiği,

$$F_{LAD} = \frac{SAR_{reduced} - SAR_{full}}{(p-q)(\hat{\tau}/2)}$$

olarak hesaplanır. Burada, $SAR = \sum |e_i|$'dir. Ayrıca $\hat{\tau}$,

$$\hat{\tau} = \frac{\sqrt{m}\left[e_{(k_2)} - e_{(k_1)}\right]}{4}$$

olarak elde edilir. *m* değeri sıfır olmayan artıkların sayısıdır. $m = n - (p+1)$'dir. $e_{(k_1)}$ ve $e_{(k_2)}$ basit LAD regresyonda açıklandığı gibi hesaplanır (Birkes ve Dodge, 1993).

5. R PROGRAMI

R programı, istatiksel hesaplama ve grafikler için kullanılan bir bilgisayar dilidir. R programı, John Chambers ve çalışma arkadaşları tarafından 1976 yılında Bell Laboratuarında geliştirilen bilgisayar dili S'ye benzeyen bir GNU projesidir. GNU, çok kullanıcılı (multiuser) ve aynı anda birçok işi yapabilen (multitasking) bir işletim sistemidir. İsminin açılımı GNU Unix değildir ("GNU's Not Unix"). Bu ismi almasındaki sebep, tasarımının Unix'e benzerken kendisinin özgür bir yazılım olması ve herhangi bir UNIX kodunu içermemesidir. R programı dili, S-PLUS ve S program dilinin ticari bir uygulamasıdır (Braun ve Murdoch, 2007). R Programı, S program dilinin farklı bir uygulaması olarak görülebilir. Önemli farklılıklar olmasına rağmen S program dili için yazılan kodların çoğu R programı himayesinde değişmeden kalmıştır (http://www.r-project.org/, E.T. 17.07.2010).

R ve S-SPLUS, S dili temeline dayandığından, bundan sonra yapılacak ve eklenecek işlemler S-PLUS da değişiklik olmaksızın uygulanır (Braun ve Murdoch, 2007).

R, açık kaynak kodlu yazılımdır ve CRAN web sitesinden (http://www.r-project.org/) ilgili belgeler ile birlikte ücretsiz indirilebilir. UNIX tabanlı işletim sistemleri için belirtilen kaynaktan R Programı indirilebilir ve kurulabilir (Koenker, 2005). R, Free Software Kuruluşunun kaynak kodu formundaki GNU Kamu Lisansı'nın koşulları altında ücretsiz bir program olarak bulunmaktadır (http://www.r-project.org/, E.T. 17.07.2010).

5.1. R Programının İçeriği

R istatiksel (doğrusal ve doğrusal olmayan modelleme, klasik istatistiksel testler, zaman serileri analizi, sınıflandırma, kümeleme…) ve grafiksel tekniklerin geniş bir analiz çeşitliliğini sunar. R bilgi işleme, hesaplama, grafiksel görünüm için yazılım olanaklarının tümleşik bir takımıdır. İçeriği:

- Etkili bir veri tutma ve depolama düzenidir.
- Belirli ana kalıplarda, diziler üzerinde hesaplamalar için bir işlemci takımıdır.
- Veri analizi için orta düzey kalıpların, büyük, tutarlı ve tümleşik bir koleksiyonudur.

- Ya ekranda ya da çıktıda veri analizi ve görüntülemesi için grafiksel düzenlerdir.
- Koşullar, döngüler, kullanıcı tanımlamalı tekrarlanan fonksiyonlar ve girdi-çıktı olanakları içeren iyi gelişmiş, basit ve etkili bir program dilidir. Bu nedenle Uygulamalı İstatistikte çalışan araştırmacılar, R programını aynı zamanda serbestçe kullanılır ve direkt olarak R'ye tümleyen paketler gibi geniş bir uygulama çeşitliliği sunarlar.
- Uzamsal nokta-örüntü analizi ve benzetimi için spatstat paketi
- Ekolojide sınıflandırma yöntemleri için vegan paketi
- Yönlü istatistikler için circular (döngü) paketi
- Uzamsal veri programlama arabirimi için sp paketi
- Coğrafi veri kaynaklarına GDAL-standart veri girişi için rgdal paketi
- Ayrıca en modern istatistiksel teknikler için paketler mevcuttur.
- Genel doğrusal modeller, temel bileşenler, faktör analizi ve robust regresyonu içeren modelleme yöntemleri (Rositter 2009).

5.2. R Programının Avantajları

1. GNU Kamu Lisansı altında yayınlandığından dolayı tamamen ücretsizdir ve her zaman öyle olacaktır.
2. Büyük bir sunucu ağı aracılığıyla internetten ücretsiz olarak elde edilir.
3. Hemen hemen bütün işletim sistemleriyle çalışır.
4. En üst bilişimsel istatistik uzmanları ve bilgisayar dili tasarımcıları arasında uluslararası işbirliğinin bir ürünüdür.
5. Sınırsız karmaşıklığın canlandırılmasına ve istatistiksel analizine izin vermektedir. Küçük bir dizi prosedür ya da seçeneklerle kısıtlanmaksızın ve katkıda bulunan paketler sayesinde verilen bir hesaplamaya ya da grafiksel sunuya ulaşmanın sadece tek metoduyla sınırlı değildir.
6. Tutarlı, mantıklı bir anlatım dili ile sınırsız boyut ve karmaşıklıktaki objeler üzerinde çalışabilir.
7. Kapsamlı teknik belgeleme ve kullanıcı katkılı eğitmenler tarafından desteklenmektedir. Ayrıca, örnekleme için R'yi (ya da S) kullanan istatistiksel yöntemlerle ilgili çeşitli kitaplar vardır.
8. Bütün hesaplar adım adım kaydedilir ve bu geçmiş daha sonra kullanım ya da belgeleme amacıyla kaydedilebilir.

9. Problem çözme konusunda "düğmeye bas'' zihniyetinden ziyade eleştirel düşünceyi harekete geçirir.
10. Bütün kaynak kodları yayınlanmıştır. Bu yüzden kullanılan kesin algoritmaları görebilir.
11. MS-Excel, metin veya düzeltilmiş ve tanımlanmış formatlarda örneğin CSV'de veri girdisi/çıktısı yapılabilir. Böylece var olan veri setleri kolayca içeri aktarılabilir ve R programında hesaplanan sonuçlar kolayca dışarı aktarılabilir.
12. R'de ticari S-PLUS programı için yazılan çoğu program, değişmeden ya da küçük değişimlerle çalışacaktır (Rositter, 2009).

5.3. R Programında Quantile Regresyon Analizi

R programında Quantile Regresyon analizi yapılabilmek için "quantreg" adlı paketin yüklenmesi gereklidir. R programında Quantile Regresyon paketini yüklemek için kullanılan komut;

> install.packages ("quantreg")

biçimindedir. Eğer bilgisayarınızda düzgün bir internet bağlantısına sahipseniz ve uygun sistem komutlarını istenilen şekilde yazarsanız paketlerin kurulumu otomatik olarak ilerleyecektir. quantreg kurulumu tamamlandığında, güncel R oturumuna erişebilmek için aşağıdaki komuta ihtiyaç duyar.

>library (quantreg)

R programında çevrimiçi (online) yardım imkânları sağlamaktadır. R programının bulunan komutların nasıl kullanılacağı ve bu komutlar hakkında ayrıntılar elde edilebilir. Örneğin;

>help (package = "quantreg")
>help (rq)

komutları kullanılarak önceki komut paketindei bilgiler elde edilebilir. Bu komut quantreg komutunun kısa bir özetini verir. Daha genel bir ifade ile web tarayıcısının yardım kısmına

>help. start ( )

komutu yazılarak ulaşılabilir. R help (yardım) dosyasının önemli bir özelliği, komutları örneklerle açıklayabilmesidir, böylece istenilen komutlar help dosyasından kopyalanıp R programının içine yapıştırılarak kullanılabilir veya help dosyası grup olarak aşağıdaki komutla yürütülür:

> example (rq)

Temel rq komudu için örnekler, "Brownlee Stackloss" verisinin bir analizini içerir. Ayrıca orijinal Engel verisi, yiyecek harcaması ve aile geliri arasındaki ilişki R programında ele alınmaktadır. Engel örneğinde medyan regresyon sonuçlarının ayrıntılı sonuçlarını incelemek için aşağıdaki komut uygulanır.

> data (engel)
>QR0.5 = rq (y~x, tau= 0,5, data = engel)

QR0.5, LAD regresyonun hesaplanmasını sağlar. rq( ) komutu içinde de çok sayıda seçenek vardır. İlk konu olan "formula" istenilen modeli belirler. Bu durumda iki değişkenli lineer modele uygun formül için sadece y~x yazılmalı. Eğer elimizde p bağımsız değişken var ise y~x1+x2+…+xp yazılmalıdır. R programında istediğimiz quantile değerinde Quantile Regresyon analizi yapmak için istenilen quantile değeri formüldeki tau eşitliğine yazılarak bulunabilir. Örneğin;

>QR0.25 = rq (y~x, tau = 0,25, data = engel)

komutu yazılırsa $\tau = 0.25$ için Quantile Regresyon analizi yapılmış olur.

Sonuçların kısa bir özeti görülmek istenirse;

```
> QR0.5
Call:
rq(formula = y ~ x, tau = 0.5, data = engel)

Coefficients:
(Intercept)           x
 81.4822474   0.5601806

Degrees of freedom: 235 total; 233 residual
```

komutu yazılarak özet bilgi elde edilir.

Elimizde sabit modelde tahmin edilen katsayılarının alt ve üst sınırları hakkındaki bilgi;

```
> summary(QR0.5)

Call: rq(formula = y ~ x, tau = 0.5, data = engel)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
            coefficients lower bd  upper bd
(Intercept)  81.48225     53.25915 114.01156
x             0.56018      0.48702   0.60199
```

komutu yazılarak elde edilir.

Elimizde sabit modelde tahmin edilen katsayılara ilişkin; standart hata, t test istatistiği ve *p* değerleri elde edilebilmektedir. Bunun için;

```
> summary(QR0.5, se = "nid")

Call: rq(formula = y ~ x, tau = 0.5, data = engel)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
            Value    Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 81.48225 19.25066    4.23270  0.00003
x            0.56018  0.02828   19.81032  0.00000
```

komutu kullanılır.

Sabit modeldeki hataların özetini görmek için;

> Hata = resid(QR0.5)

Tahmin edilen katsayıların değerlerini görmek için;

> Katsayılar = coef (QR0.5)

komutu yazılır ve sonraki hesaplamalar için bu bilgilerden yararlanılabilir. (Koenker, 2005).

6. UYGULAMA

Bu bölümde, basit regresyon analizi için ve çoklu regresyon analizi için olmak üzere üç farklı veri seti ile lineer regresyon analizi yapılmıştır. Quantile Regresyon analizi için, R Paket programı ve LINDO paket programı; En Küçük Kareler Regresyon analizi için SPSS 15.0 paket programı kullanılmıştır. LAD Regresyon analizi için bu yöntemin algoritması Microsoft Office 2007 EXCEL'de uygulanmıştır.

6.1. Basit Regresyon Modeli için Quantile Regresyon Analizi Uygulaması

Uygulama 1.

Basit doğrusal regresyon modeli için uygulama verisi olarak Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü'nden alınan verilerle 1999-2006 yılları arasında ölçülen, Konya iline ait aylık toplam güneşlenme süresi ve aylık ortalama bulutluluk süresi değerleri alınmıştır. Bağımlı değişken olarak Güneşlenme Süresi (Y), bağımsız değişken olarak Bulutluluk Süresi (X) alınmıştır.

Analiz sonucunda Quantile Regresyon ve En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilen katsayı değerleri, hesaplanan hata kareler ortalaması (MSE) ve ortalama mutlak sapma (MAD) değerleri karşılaştırılmıştır.

Ele alınan basit regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + +\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, 96. \tag{6.1}$$

olmak üzere,

Y bağımlı değişkeni ile X_i bağımsız değişkenlerinin karşılıkları,

Y : Aylık Toplam Güneşlenme Süresi (sa)

X_1 : Aylık Ortalama Bulutluluk (sa)

şeklinde ifade edilmektedir. Bu değişkenlere ilişkin 1999-2006 yılları arasındaki veriler Ek 1'de verilmiştir.

Bu modele ilişkin, SPSS 15.0 programından elde edilen, Regresyon Analizi sonucundaki varyans analizi tablosu Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1. Uygulama 1 için modelin SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu

	Kareler Toplamı	*Serbestlik Derecesi*	*Kareler Ortalaması*	*F*	*P değeri*
Regresyon	540362,947	1	540362,947	395,708	0.000
Hata	128362,497	94	1365,558		
Toplam	668725,443	95			

Modele ait EKK ve Quantile Regresyon analizinin $\tau = 0.25, 0.50, 0.75$ değerleri için R programından elde edilen sonuçlar Çizelge 6.2-6.4'te verilmiştir.

Çizelge 6.2. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR25)

Call: rq(formula = GüneşlenmeSüresi ~ BulutlulukSüresi, tau = 0.25,
    data = b)

tau: [1] 0.25

Coefficients:
                coefficients lower bd  upper bd  Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)     364.12203    339.78505 375.94975 19.74612   18.44018   0.00000
BulutlulukSüresi -42.64407   -46.96080 -39.30660  3.81354  -11.18228   0.00000
```

Çizelge 6.3. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.50$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR50)

Call: rq(formula = GüneşlenmeSüresi ~ BulutlulukSüresi, tau = 0.5,
    data = b)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
                coefficients lower bd  upper bd  Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)     393.21964    374.00936 400.93136  12.36425   31.80295   0.00000
BulutlulukSüresi -43.01786   -43.56943 -40.30416   2.87755  -14.94948   0.00000
```

Çizelge 6.4. Uygulama 1'de R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR75)

Call: rq(formula = GüneşlenmeSüresi ~ BulutlulukSüresi, tau = 0.75,
    data = b)

tau: [1] 0.75

Coefficients:
                coefficients lower bd  upper bd  Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)     410.66250    395.89153 424.48815   6.32128   64.96511   0.00000
BulutlulukSüresi -41.81250   -45.55648 -36.58522   2.32126  -18.01284   0.00000
```

Çizelge 6.5. Uygulama 1'de R Programından elde edilen EKK Sonuçları

```
> summary(EKK1, se = "nid")

Call:
glm(formula = GüneşlenmeSüresi ~ BulutlulukSüresi, data = b)

Deviance Residuals:
     Min        1Q    Median        3Q       Max
-112.099   -21.192     2.505    27.132    75.383

Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       380.146      8.645   43.97   <2e-16 ***
BulutlulukSüresi  -40.982      2.060  -19.89   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 1365.558)

    Null deviance: 668725  on 95  degrees of freedom
Residual deviance: 128362  on 94  degrees of freedom
AIC: 969.47

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

Modele ait EKK ve Quantile Regresyon analizi $\tau = 0.25, 0.50, 0.75$ quantile değerleri için elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri Çizelge 6.6'da verilmiştir.

Çizelge 6.6. Uygulama 1 için elde edilen $\hat{Y}_i$ Tahmin değerleri

Yıl	Ay	Y_i	Tahmini Değerler						Y_i	Tahmini Değerler			
			QR $\tau=0.25$	QR $\tau=0.50$	QR $\tau=0.75$	EKK	Yıl	Ay		QR $\tau=0.25$	QR $\tau=0.50$	QR $\tau=0.75$	EKK
1999	1	101	99.729	126.509	151.425	126.057	2003	1	92.7	57.085	83.491	109.613	85.075
	2	157.7	167.959	195.337	218.325	191.628		2	102.5	65.614	92.095	117.975	93.271
	3	193.8	185.017	212.545	235.050	208.021		3	150	112.522	139.414	163.969	138.352
	4	240.7	206.339	234.054	255.956	228.512		4	199.7	116.786	143.716	168.150	142.450
	5	292.4	231.925	259.864	281.044	253.101		5	284.1	223.397	251.261	272.681	244.905
	6	265.8	193.546	221.148	243.413	216.217		6	315.8	287.363	315.787	335.400	306.378
	7	322.5	274.569	302.882	322.856	294.083		7	357.5	321.478	350.202	368.850	339.164
	8	327	291.627	320.089	339.581	310.476		8	348.5	330.007	358.805	377.213	347.360
	9	281.5	274.569	302.882	322.856	294.083		9	291.4	283.098	311.486	331.219	302.280
	10	228.1	244.719	272.770	293.588	265.396		10	229.1	227.661	255.562	276.863	249.003
	11	181.9	219.132	246.959	268.500	240.807		11	184.9	240.454	268.468	289.406	261.298
	12	145.1	236.190	264.166	285.225	257.199		12	82.8	91.200	117.905	143.063	117.861
2000	1	105	78.407	105.000	130.519	105.566	2004	1	58.3	31.498	57.680	84.525	60.486
	2	115.7	86.936	113.604	138.881	113.762		2	135.5	99.729	126.509	151.425	126.057
	3	243.7	197.810	225.450	247.594	220.316		3	211.1	189.281	216.846	239.231	212.119
	4	194.8	129.580	156.621	180.694	154.744		4	229.8	180.753	208.243	230.869	203.923
	5	241.8	159.430	186.734	209.963	183.432		5	285.5	206.339	234.054	255.956	228.512
	6	311.8	270.305	298.580	318.675	289.985		6	292.1	244.719	272.770	293.588	265.396
	7	364.9	355.593	384.616	402.300	371.949		7	343	312.949	341.598	360.488	330.967
	8	342.7	291.627	320.089	339.581	310.476		8	335.4	287.363	315.787	335.400	306.378
	9	294.5	270.305	298.580	318.675	289.985		9	319.3	321.478	350.202	368.850	339.164
	10	227.7	210.603	238.355	260.138	232.610		10	251.6	248.983	277.071	297.769	269.494
	11	207.6	270.305	298.580	318.675	289.985		11	157	185.017	212.545	235.050	208.021
	12	112.5	103.993	130.811	155.606	130.155		12	118	138.108	165.225	189.056	162.941
2001	1	129.9	103.993	130.811	155.606	130.155	2005	1	118.1	129.580	156.621	180.694	154.744
	2	142	155.166	182.432	205.781	179.334		2	171.3	150.902	178.130	201.600	175.235
	3	208.1	172.224	199.639	222.506	195.726		3	194.7	167.959	195.337	218.325	191.628
	4	243.8	180.753	208.243	230.869	203.923		4	214.2	163.695	191.036	214.144	187.530
	5	219.8	146.637	173.829	197.419	171.137		5	255.1	193.546	221.148	243.413	216.217
	6	345.9	317.214	345.900	364.669	335.065		6	296.5	261.776	289.977	310.313	281.789
	7	348.4	300.156	328.693	347.944	318.673		7	324.7	295.892	324.391	343.763	314.574
	8	334.3	291.627	320.089	339.581	310.476		8	340.6	321.478	350.202	368.850	339.164
	9	300.7	308.685	337.296	356.306	326.869		9	272.7	270.305	298.580	318.675	289.985
	10	259.9	283.098	311.486	331.219	302.280		10	218.4	202.075	229.752	251.775	224.414
	11	135.4	146.637	173.829	197.419	171.137		11	126.8	129.580	156.621	180.694	154.744
	12	80.8	57.085	83.491	109.613	85.075		12	114.2	146.637	173.829	197.419	171.137
2002	1	130	57.085	83.491	109.613	85.075	2006	1	80.8	95.464	122.207	147.244	121.959
	2	164.6	189.281	216.846	239.231	212.119		2	91.2	91.200	117.905	143.063	117.861
	3	210.5	180.753	208.243	230.869	203.923		3	201.6	150.902	178.130	201.600	175.235
	4	169.7	112.522	139.414	163.969	138.352		4	219.2	159.430	186.734	209.963	183.432
	5	317.1	223.397	251.261	272.681	244.905		5	291.6	193.546	221.148	243.413	216.217
	6	292.1	231.925	259.864	281.044	253.101		6	323.6	274.569	302.882	322.856	294.083
	7	316.1	261.776	289.977	310.313	281.789		7	349.4	287.363	315.787	335.400	306.378
	8	313.5	261.776	289.977	310.313	281.789		8	342.8	342.800	371.711	389.756	359.655
	9	252	219.132	246.959	268.500	240.807		9	256.4	244.719	272.770	293.588	265.396
	10	242.1	248.983	277.071	297.769	269.494		10	172.5	150.902	178.130	201.600	175.235
	11	173.9	219.132	246.959	268.500	240.807		11	176.3	231.925	259.864	281.044	253.101
	12	103.59	78.407	105.000	130.519	105.566		12	175.3	240.454	268.468	289.406	261.298

Çizelge 6.7'de EKK ve Quantile Regresyon yöntemine ait katsayılar, katsayıların geçerliliği, modelin hata kareler ortalaması ve modelin mutlak sapmalar ortalaması değerleri verilmiştir. Her iki yöntemden elde edilen tahmin ve güven aralığı grafiği Şekil 6.1'de görülmektedir.

Çizelge 6.7. Uygulama 1 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu

Yöntem	Regresyon Katsayıları		*p* değeri	MSE	MAD	R^2
EKK Yöntemi	b_0	380.14558	0	1337.109	28.82778	0.808049
	b_1	-40.98203	0			
QR Yöntemi $\tau = 0.25$	b_0	364.12203	0	1843.634	35.77211	0.735333
	b_1	-42.64407	0			
QR Yötemi $\tau = 0.50$ **(LAD)**	b_0	393.21964	0	1380.016	28.50053	0.801889
	b_1	-43.01786	0			
QR Yöntemi $\tau = 0.75$	b_0	410.6625	0	2089.141	34.99704	0.70009
	b_1	-41.8125	0			

Modelin parametrelerini test etmek için oluşturulan,

$$H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$$
$$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$$

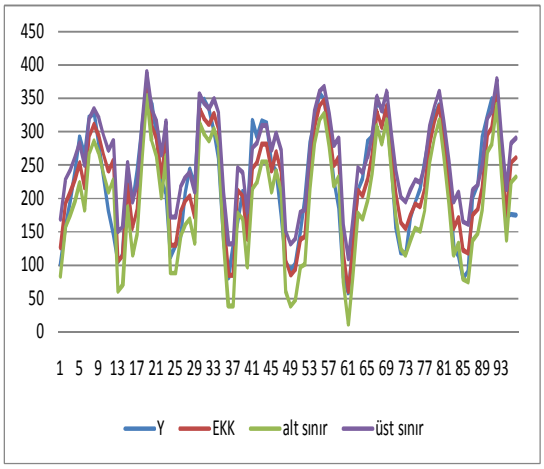
hipotezi için p value (anlamlılık değeri) sıfır olarak bulunmuştur. Hipotez, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test edildiğinde, $p < \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir, yani Güneşlenme Süresi ve Bulutluluk Süresi arasındaki ilişki $\%95$ anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

Parametrelerin bireysel anlamlılık testi için oluşturulan,

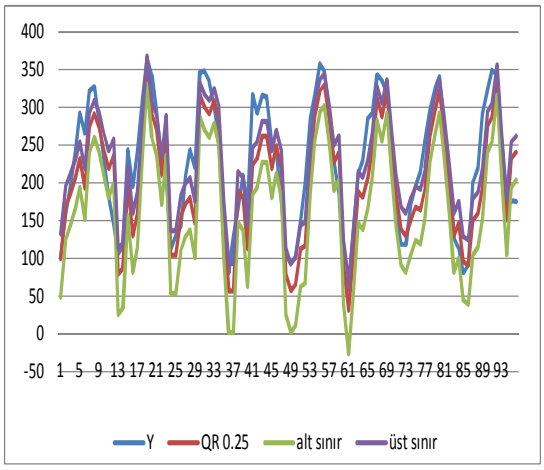
$$H_0 : \beta_i = 0$$
$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

hipotezleri, katsayıların anlamlılığı Quantile Regresyon ve EKK yöntemine göre benzerlik göstermektedir.

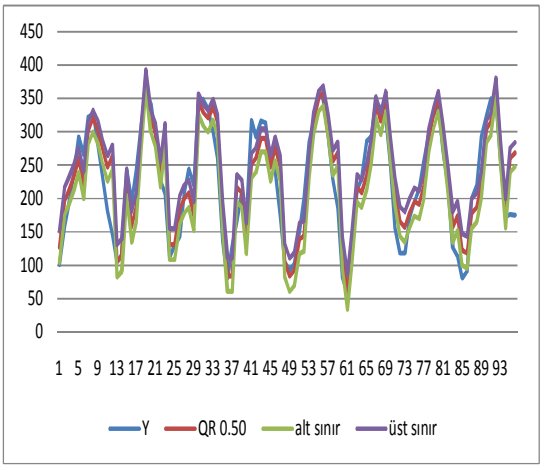
Modelin özet tablosuna göre; EKK yöntemi ve incelenen quantile değerleri için Quantile Regresyon yönteminde değişkenlerin katsayılarının anlamlı çıktığı görülmektedir.



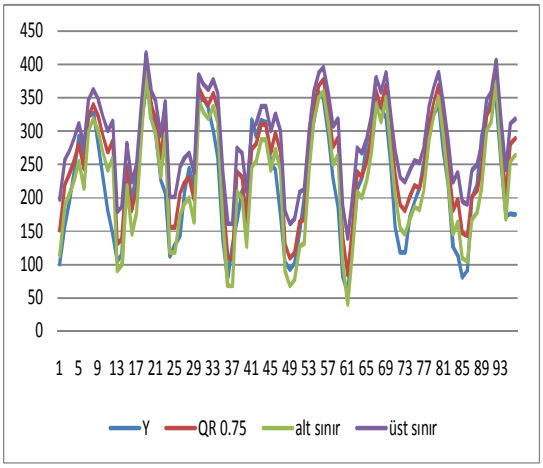
a) EKK



b) Quantile Regresyon $\tau = 0.25$



c) Quantile Regresyon $\tau = 0.5\,(\text{LAD})$



d) Quantile Regresyon $\tau = 0.75$

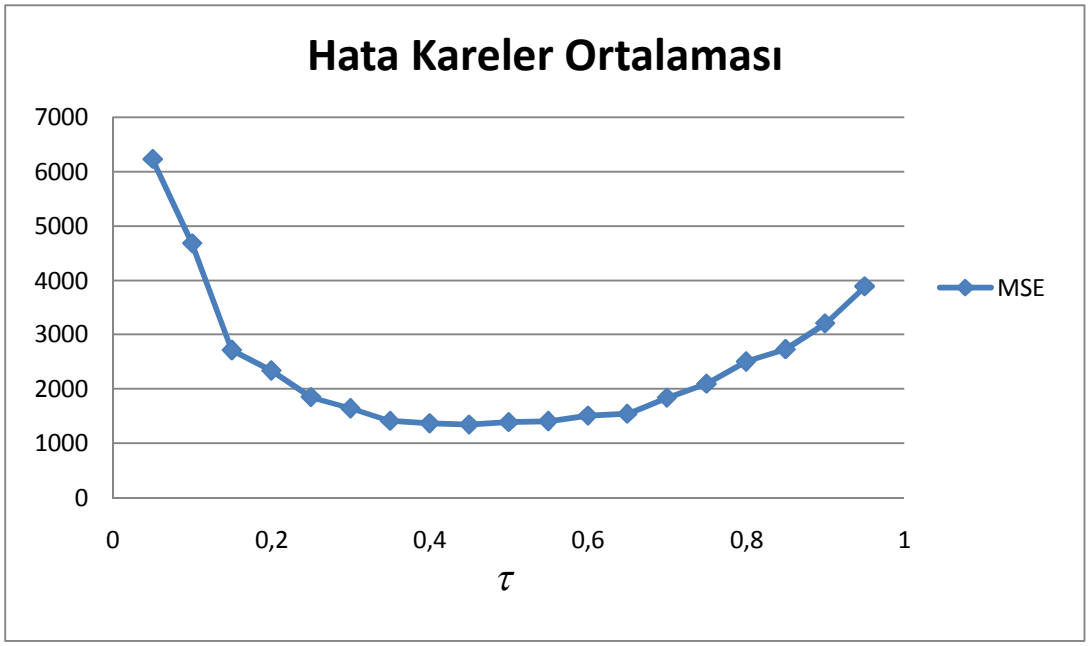
Şekil 6.1. Uygulama 1 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları grafiği

Quantile Regresyon analizi $\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95$ quantile değerleri için elde edilen MSE ve MAD değerleri Çizelge 6.8'de verilmiştir.

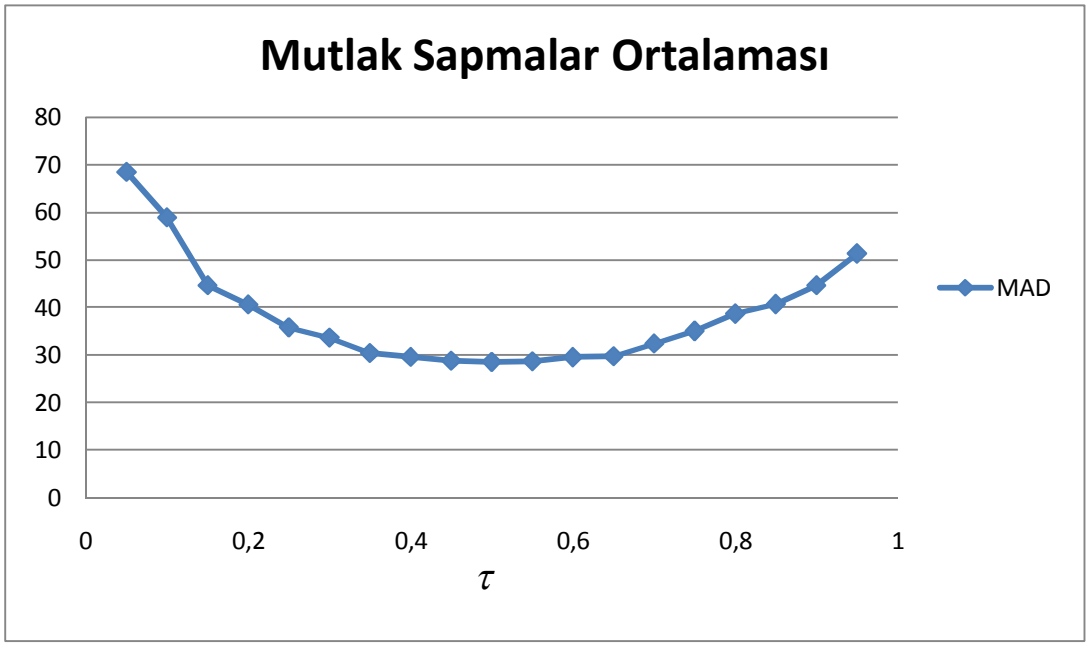
Çizelge 6.8. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri

τ	**MSE**	**MAD**
0.05	6228.84	68.40464
0.1	4675.639	58.87764
0.15	2710.777	44.59997
0.2	2331.528	40.56746
0.25	1843.634	35.77211
0.3	1637.262	33.61904
0.35	1404.149	30.36306
0.4	1361.147	29.51840
0.45	1338.062	28.74657
0.5	1380.016	28.50053
0.55	1400.05	28.62273
0.6	1505.192	29.47411
0.65	1531.986	29.69493
0.7	1834.993	32.35952
0.75	2089.141	34.99704
0.8	2497.128	38.64461
0.85	2725.32	40.64603
0.9	3201.487	44.60712
0.95	3884.606	51.30622

$(\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95)$ quantile değerleri ile MSE değerlerine ilişkin grafik Şekil 6.2'de, quantile değerleri ile MAD değerlerine ilişkin grafik ise Şekil 6.3'de verilmiştir.



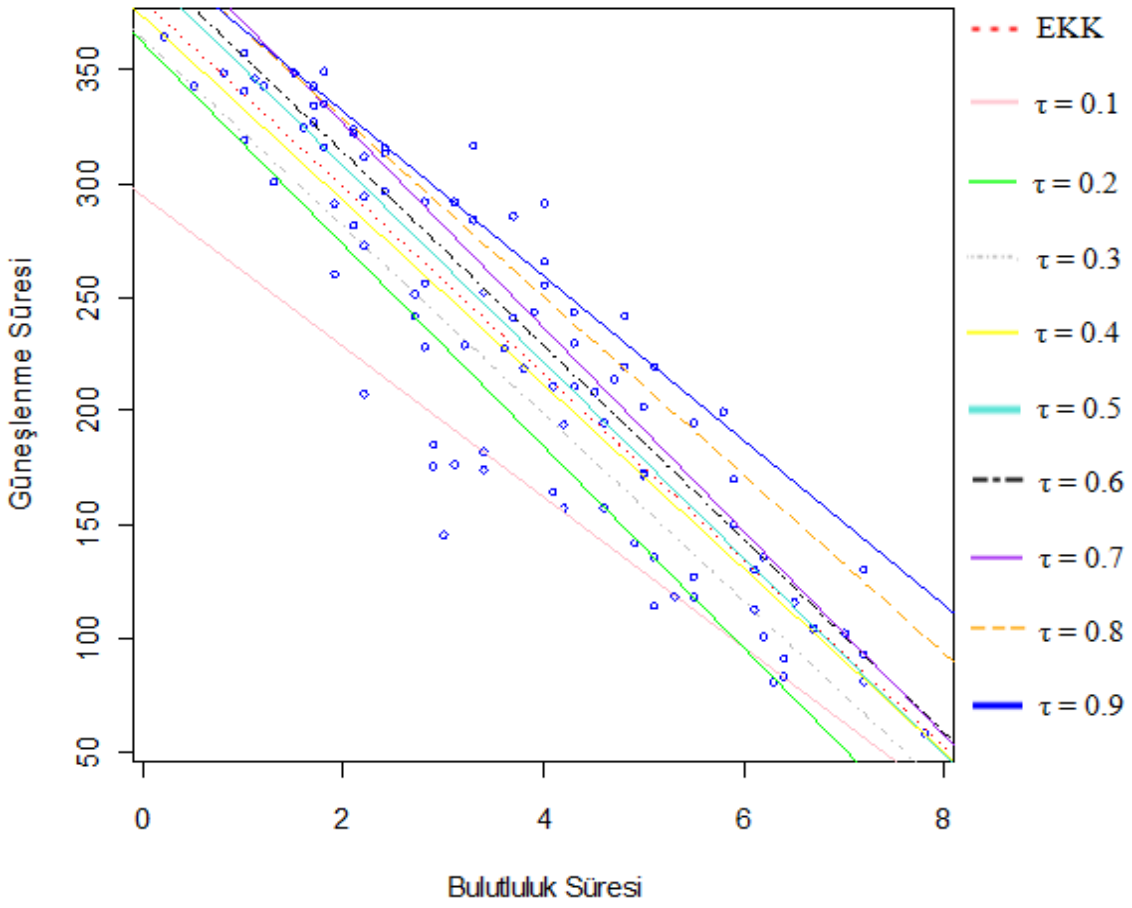
Şekil 6.2. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği



Şekil 6.3. Uygulama 1 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MAD değerleri grafiği

Basit Regresyon uygulamasının daha ayrıntılı bir şekilde gözümüzde canlanmasını sağlamak için verinin grafiği çizilmiş ve uygun quantile regresyon doğruları, saçılım grafiği üzerinde gösterilmiştir.

Grafikte gösterilen çeşitli regresyon doğruları R programında **abline** komutunu kullanarak regresyon katsayılarını kolaylıkla bulabilmektedir.

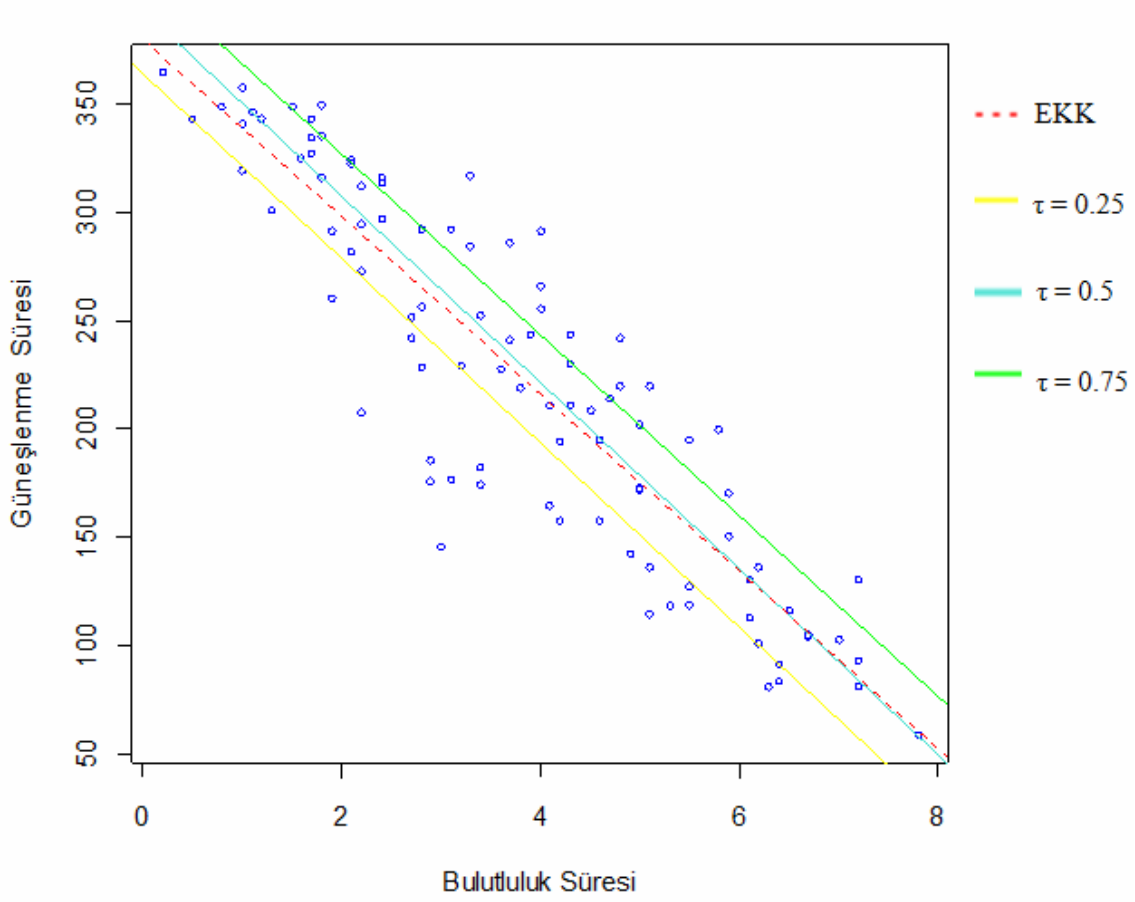


Şekil 6.4. Çeşitli quantile değerleri için Quantile Regresyon yönteminden ve EKK yönteminden elde edilen regresyon doğruları

Şekil 6.4'de verilen Quantile Regresyon ve EKK regresyon doğrularının çizimi için R programında kullanılan komutlar:

```
plot(x, y, cex = 0.25, type = "n", xlab = "Bulutluluk Süresi",ylab = "Güneşlenme Süresi")
points(x, y, cex = 0.75, col = "blue")
abline(lm(y ~ x), lty = 3, col = "red")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.1), col = "pink")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.2), col = "green")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.3),lty = 4, col = "grey")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.4), col = "yellow")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.5), col = "turquoise")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.6), lty = 6,col = "black")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.7), col = "purple")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.8),lty=5, col = "orange")
abline(rq(y ~ x, tau = 0.90), col = "blue")
```

Şekil 6.5'te EKK ve quartile $(\tau = 0.25, 0.5, 0.75)$ değerleri için Quantile Regresyon analizi sonucunda elde edilen regresyon doğruları gösterilmiştir.



Şekil 6.5. Quartile değerleri için Quantile Regresyon yönteminden ve EKK yönteminden elde edilen regresyon doğruları

6.2 Çoklu Regresyon Modeli için Quantile Regresyon Analizi Uygulaması

Uygulama 2

Çoklu Regresyon analizi için ilk uygulama, Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü'nden alınan veriler ile, 2000-2009 yılları arasında aylık ortalama hava sıcaklığını etkileyen etkenlerin incelenmesi hedeflenmiştir. Sıcaklığı etkileyeceği düşünülen hava basıncı, buhar basıncı, nisbi nem ve rüzgâr hızı etkenlerine ilişkin dört bağımsız değişken modele alınmış ve aylık ortalama hava sıcaklığına etkileri Quantile Regresyon ve EKK yöntemleri ile incelenmiştir.

Analiz sonucunda Quantile Regresyon ve En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilen katsayı değerleri, hesaplanan hata kareler ortalaması (MSE) ve ortalama mutlak sapma (MAD) değerleri karşılaştırılmıştır.

Ele alınan veriler için; çoklu regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i1} + \beta_3 X_{i3} + \beta_4 X_{i4} + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, 120.$$

olmak üzere bağımlı ve bağımsız değişkenler,

Y : Aylık ortalama Sıcaklık $\left({}^0C\right)$

X_1 : Aylık Ortalama Hava Basıncı $\left(hPa\right)$

X_2 : Aylık Ortalama Buhar Basıncı $\left(hPa\right)$

X_3 : Aylık Ortalama Nisbi Nem $\left(\%\right)$

X_4 : Aylık Ortalama Hava Basıncı $\left(m/sec\right)$

biçiminde verilir. Bu değişkenlere ilişkin 2000-2009 yılları arasındaki veriler EK-2'de verilmiştir.

Ele alınan modele ilişkin SPSS 15.0 programından elde edilen, Regresyon Analizi sonucunda elde edilen varyans analizi tablosu Çizelge 6.9'da verilmiştir.

Çizelge 6.9. Uygulama 2 için modelin SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu

	Kareler Toplamı	***Serbestlik Derecesi***	***Kareler Ortalaması***	***F***	***P değeri***
Regresyon	9460.951	4	2365.238	2415.575	0.000
Hata	112.604	115	0.979		
Toplam	9573.555	119			

Modele ait EKK ve Quantile Regresyon analizinin $\tau = 0.25, 0.50, 0.75$ değerleri için R programından elde edilen sonuçları Çizelge 6.10-6.13'te verilmiştir.

Çizelge 6.10. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR25)

Call: rq(formula = Sıcaklık ~ HavaBasıncı + Buharbasıncı + NisbiNem +
    RüzgarHızı, tau = 0.25, data = b)

tau: [1] 0.25

Coefficients:
             coefficients lower bd  upper bd   Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)  145.17876     30.35114 210.81949   57.58099    2.52130   0.01306
HavaBasıncı   -0.14062     -0.20887  -0.01411    0.06337   -2.21913   0.02844
Buharbasıncı   1.79368      1.70591   1.90633    0.09153   19.59698   0.00000
NisbiNem      -0.34830     -0.37186  -0.30797    0.01211  -28.75020   0.00000
RüzgarHızı    -0.71900     -1.12203  -0.38614    0.20487   -3.50946   0.00064
```

Çizelge 6.11. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.50$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR50)

Call: rq(formula = Sıcaklık ~ HavaBasıncı + Buharbasıncı + NisbiNem +
    RüzgarHızı, tau = 0.5, data = b)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
             coefficients lower bd  upper bd   Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)   95.51853     62.82901 172.24340   36.81101    2.59484   0.01070
HavaBasıncı   -0.08822     -0.17088  -0.05210    0.04080   -2.16242   0.03266
Buharbasıncı   1.95543      1.74532   2.02219    0.06172   31.68028   0.00000
NisbiNem      -0.32098     -0.35270  -0.30982    0.00915  -35.08049   0.00000
RüzgarHızı    -0.57597     -0.79355  -0.23659    0.15417   -3.73596   0.00029
```

Çizelge 6.12. Uygulama 2'de R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR75)

Call: rq(formula = Sıcaklık ~ HavaBasıncı + Buharbasıncı + NisbiNem +
    RüzgarHızı, tau = 0.75, data = b)

tau: [1] 0.75

Coefficients:
             coefficients lower bd  upper bd   Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept)   64.63542      8.32709 151.08380   44.65865    1.44732   0.15053
HavaBasıncı   -0.05223     -0.15609   0.01026    0.04956   -1.05376   0.29420
Buharbasıncı   1.87229      1.69563   2.20296    0.04513   41.48817   0.00000
NisbiNem      -0.32884     -0.33177  -0.30320    0.00896  -36.71663   0.00000
RüzgarHızı    -0.45344     -0.63730  -0.32457    0.14000   -3.23897   0.00157
```

Çizelge 6.13. Uygulama 2'de R Programından elde edilen EKK Sonuçları

```
> summary(EKK1)

Call:
glm(formula = Sıcaklık ~ HavaBasıncı + Buharbasıncı + NisbiNem +
    RüzgarHızı, data = b)

Deviance Residuals:
     Min        1Q    Median        3Q       Max
-3.05984  -0.46984   0.05413   0.64848   2.83899

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  91.389572  38.698003   2.362   0.0199 *
HavaBasıncı  -0.081286   0.042818  -1.898   0.0602 .
Buharbasıncı  1.821236   0.049182  37.031  < 2e-16 ***
NisbiNem     -0.338569   0.008898 -38.051  < 2e-16 ***
RüzgarHızı   -0.632828   0.146367  -4.324 3.28e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 0.9791615)

    Null deviance: 9573.55  on 119  degrees of freedom
Residual deviance:  112.60  on 115  degrees of freedom
AIC: 344.91

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

Modele ait EKK ve $\tau = 0.25, 0.50, 0.75$ quantile değerleri için Quantile Regresyon analizi sonucunda elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri Çizelge 6.14'de verilmiştir.

Çizelge 6.14. Uygulama 2 için elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri

Yıl	Ay	Y	QR $\tau = 0.25$	QR $\tau = 0.50$	QR $\tau = 0.75$	EKK	Yıl	Ay	Y	QR $\tau = 0.25$	QR $\tau = 0.50$	QR $\tau = 0.75$	EKK
2000	1	-4.9	-2.713	-2.393	-1.475	-2.197	**2005**	1	2.4	1.277	1.880	2.550	1.826
	2	-1.9	-2.291	-1.694	-0.713	-1.573		2	1.7	1.893	2.266	3.023	2.311
	3	3.9	4.162	4.295	5.362	4.639		3	6.7	6.140	6.545	7.345	6.591
	4	12.7	11.754	12.107	12.695	12.022		4	10.8	9.449	10.067	10.758	9.965
	5	14.7	13.974	14.700	15.264	14.469		5	16	14.934	15.542	16.141	15.369
	6	19.5	18.301	18.825	19.575	18.759		6	20.2	20.323	21.183	21.593	20.762
	7	26	23.060	22.915	23.691	23.157		7	25.3	27.879	29.359	29.365	28.356
	8	22.5	21.878	23.032	23.534	22.438		8	24.7	26.160	27.420	27.538	26.608
	9	18.9	17.793	18.181	18.900	18.176		9	17.8	17.800	19.122	19.358	18.437
	10	11.2	9.799	10.509	11.200	10.435		10	10.5	8.617	9.884	10.351	9.437
	11	6.9	7.012	7.459	8.246	7.638		11	4.9	2.344	3.392	4.056	3.147
	12	1.3	-0.559	0.240	0.908	0.122		12	1.5	0.766	1.473	2.113	1.418
2001	1	2.4	2.031	2.581	3.318	2.669	**2006**	1	-2.9	-2.900	-2.242	-1.489	-2.223
	2	2.5	2.248	2.621	3.517	2.739		2	1.1	0.529	1.047	1.589	0.955
	3	10.9	10.622	10.650	11.458	10.906		3	7	5.832	6.382	6.829	6.171
	4	12.7	11.785	11.849	12.681	12.042		4	12.2	11.838	12.399	12.760	12.151
	5	14.9	13.463	14.332	14.909	13.967		5	16.1	15.867	16.785	17.084	16.357
	6	22.5	21.210	21.549	22.259	21.499		6	22	22.430	23.111	23.526	22.816
	7	26.2	25.704	26.200	26.656	25.909		7	23.2	24.632	25.541	25.776	24.997
	8	24.4	24.400	25.366	25.783	24.830		8	26.8	28.622	29.444	29.557	28.867
	9	20.7	20.333	20.600	21.153	20.598		9	18.2	17.964	18.979	19.349	18.529
	10	12.7	12.700	12.790	13.765	13.172		10	13.4	12.103	13.276	13.528	12.715
	11	5.8	4.310	5.207	5.847	4.987		11	4.6	2.933	3.779	4.380	3.654
	12	2.3	0.253	1.086	1.665	0.806		12	-0.1	-0.195	0.462	1.405	0.681
2002	1	-5.8	-4.724	-4.169	-3.297	-3.983	**2007**	1	1.4	0.514	1.148	2.138	1.346
	2	3.1	3.305	3.644	4.427	3.856		2	1.2	0.131	0.711	1.361	0.670
	3	7.7	7.637	7.740	8.553	7.940		3	7.2	6.845	7.200	8.104	7.349
	4	9.7	8.945	9.570	9.928	9.275		4	9.9	9.725	9.911	10.851	10.159
	5	15.1	15.017	15.616	16.108	15.400		5	20.4	19.485	19.946	20.574	19.828
	6	19.7	19.306	20.121	20.657	19.782		6	23.2	21.352	21.972	22.575	21.749
	7	24	23.642	24.180	24.600	23.911		7	26.4	27.804	27.943	28.370	27.911
	8	22.1	22.100	22.595	23.024	22.361		8	26.4	24.980	25.511	26.042	25.285
	9	18.1	18.104	18.867	19.230	18.564		9	21.1	19.378	19.496	20.336	19.738
	10	12.8	12.225	12.755	13.417	12.751		10	14.6	16.002	16.717	17.198	16.567
	11	6.6	6.216	6.653	7.326	6.793		11	7.6	5.916	6.861	7.393	6.639
	12	-3.1	-1.229	-0.817	-0.013	-0.655		12	1.8	0.028	0.926	1.577	0.829
2003	1	3.9	2.373	3.028	3.598	2.891	**2008**	1	-2.2	-1.587	-1.082	-0.176	-0.820
	2	-1.7	-0.123	0.118	1.086	0.253		2	-1.2	-1.053	-0.463	0.442	-0.219
	3	1.8	2.707	2.882	3.805	3.094		3	10.8	11.293	11.130	11.814	11.451
	4	9.5	9.244	9.500	10.156	9.521		4	15.1	14.649	14.583	15.261	14.878
	5	17.2	17.103	17.505	18.073	17.469		5	16.5	16.234	16.463	17.000	16.522
	6	21.2	20.342	20.368	21.097	20.550		6	22.9	22.185	22.419	22.938	22.432
	7	23.5	22.524	22.541	23.191	22.654		7	25.3	24.659	24.672	25.134	24.741
	8	23.6	22.069	22.239	23.006	22.353		8	26.5	25.900	26.032	26.440	26.007
	9	18	17.065	17.589	18.307	17.555		9	20.6	20.212	20.769	21.088	20.536
	10	14.3	13.292	13.921	14.667	13.857		10	12.9	11.741	12.888	13.303	12.506
	11	6.5	5.530	6.218	6.984	6.252		11	8.7	6.616	7.715	8.152	7.391
	12	1.6	-0.322	0.518	1.155	0.377		12	1.3	-0.906	0.040	0.628	-0.098
2004	1	-1.4	-1.828	-1.379	-0.965	-1.544	**2009**	1	2.4	1.218	1.925	2.456	1.831
	2	1.9	2.566	2.936	3.891	3.121		2	4	3.264	3.644	4.000	3.517
	3	6.2	6.730	6.825	7.946	7.285		3	5.8	6.619	6.712	7.301	6.862
	4	10.3	10.374	10.623	11.371	10.739		4	11.5	11.250	11.694	12.151	11.610
	5	15.2	15.161	15.594	16.096	15.473		5	16.2	15.839	16.348	16.819	16.247
	6	19.7	19.767	20.249	20.723	20.133		6	22.2	21.806	22.121	22.639	22.099
	7	22.8	22.052	22.319	22.834	22.286		7	24.1	24.999	25.706	25.922	25.279
	8	23	22.825	23.054	23.520	23.008		8	23.2	22.589	22.609	23.200	22.788
	9	18.6	17.693	17.643	18.600	18.068		9	18.5	18.765	19.346	19.747	19.178
	10	14.5	14.258	14.500	15.257	14.748		10	15.9	15.456	16.117	16.555	15.955
	11	5.7	5.316	5.848	6.587	5.896		11	7.2	5.226	6.200	6.635	5.917
	12	1	0.745	1.358	2.135	1.481		12	5.6	3.557	4.402	4.676	4.045

Çizelge 6.15'te EKK ve Quantile Regresyon yöntemine ait regresyon katsayıları, katsayıların geçerliliği, modelin hata kareler ortalaması ve modelin mutlak sapmalar ortalaması değerleri verilmiştir. Her iki yöntemden elde edilen tahmin ve güven aralığı grafiği Şekil 6.6'da görülmektedir.

Çizelge 6.15. Uygulama 2 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu

Yöntem	Regresyon Katsayıları		*p* değeri	MSE	MAD	R^2
EKK Yöntemi	b_0	91.38957	0.0199	0.9383631	0.7360889	0.9882
	b_1	-0.08129	0.0602			
	b_2	1.82124	0			
	b_3	-0.33857	0			
	b_4	-0.63283	0			
QR Yöntemi $\tau = 0.25$	b_0	145.17876	0.01306	1.188852	0.8572916	0.985099
	b_1	-0.1406183	0.02844			
	b_2	1.7936804	0			
	b_3	-0.3482984	0			
	b_4	-0.7189961	0.00064			
QR Yötemi $\tau = 0.50$ **(LAD)**	b_0	95.51852770	0.0107	1.010935	0.726373	0.987178
	b_1	-0.08821647	0.03266			
	b_2	1.95543244	0			
	b_3	-0.32098167	0			
	b_4	-0.57596678	0.00029			
QR Yöntemi $\tau = 0.75$	b_0	64.6354166	0.01505	1.418583	0.8782613	0.982007
	b_1	-0.0522253	0.2942			
	b_2	1.8722940	0			
	b_3	-0.3288439	0			
	b_4	-0.4534403	0.00157			

Modelin parametrelerini test etmek için oluşturulan,

$H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$

$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$

hipotezi için p value (anlamlılık değeri) değeri sıfır olarak bulunmuştur. Hipotezi $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test edersek, $p < \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir, yani Sıcaklık ile Hava Basıncı, Buhar Basıncı, Nisbi Nem ve Rüzgar Hızı arasındaki ilişki $\%95$ anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

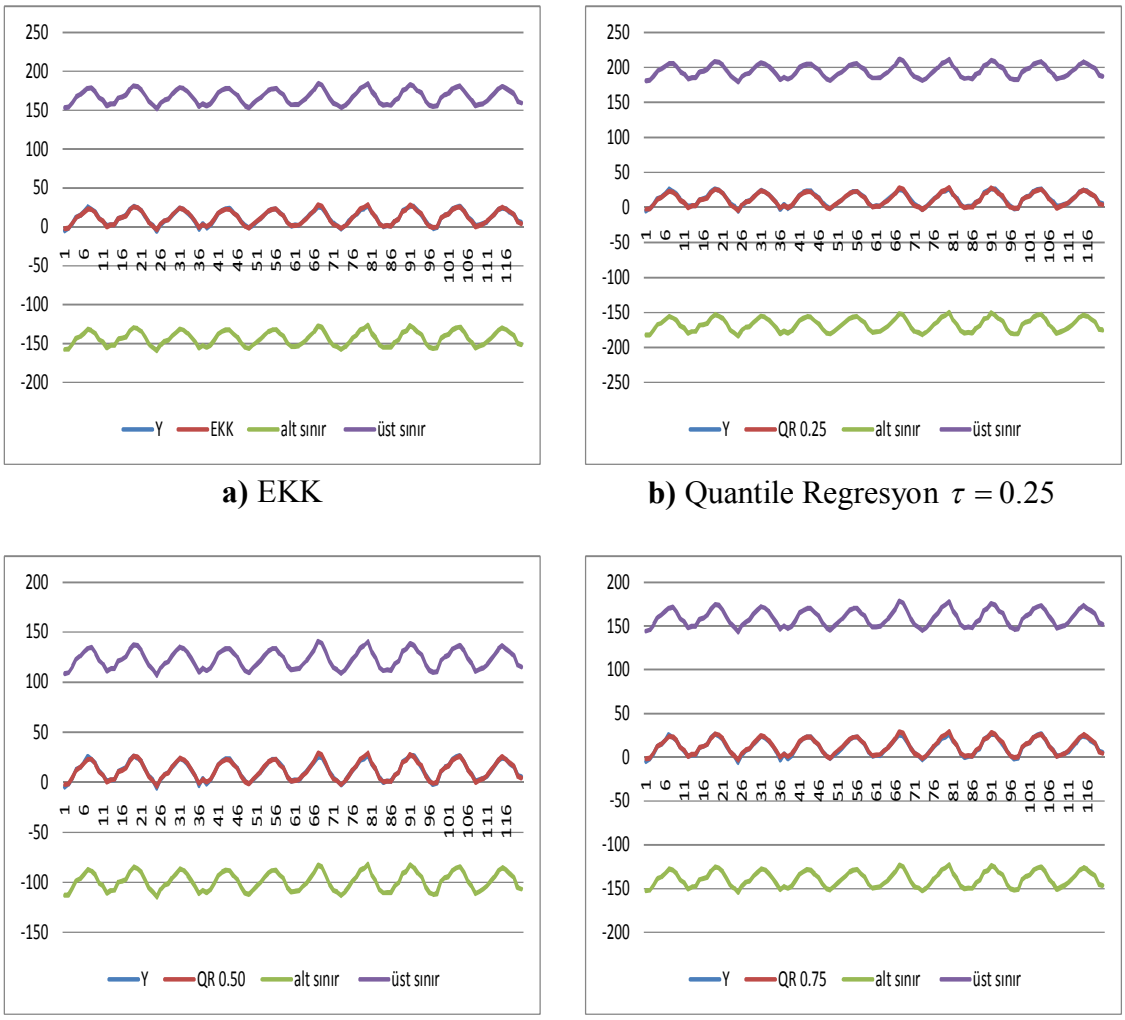
Parametrelerin bireysel anlamlılık testi için oluşturulan,

$H_0 : \beta_i = 0$

$H_1 : \beta_i \neq 0$

hipotezi test edildiğinde, bazı katsayıların anlamlılığı, Quantile Regresyon ve EKK yöntemine göre farklılık göstermektedir.

Modelin özet tablosu incelendiğinde; EKK yönteminde ve $\tau = 0.50$ quantile değeri için Quantile Regresyon yönteminde "Hava Basıncı" değişkeninin katsayısının anlamsız çıktığı görülmektedir.



a) EKK

b) Quantile Regresyon $\tau = 0.25$

c) Quantile Regresyon $\tau = 0.5\,(\text{LAD})$

d) Quantile Regresyon $\tau = 0.75$

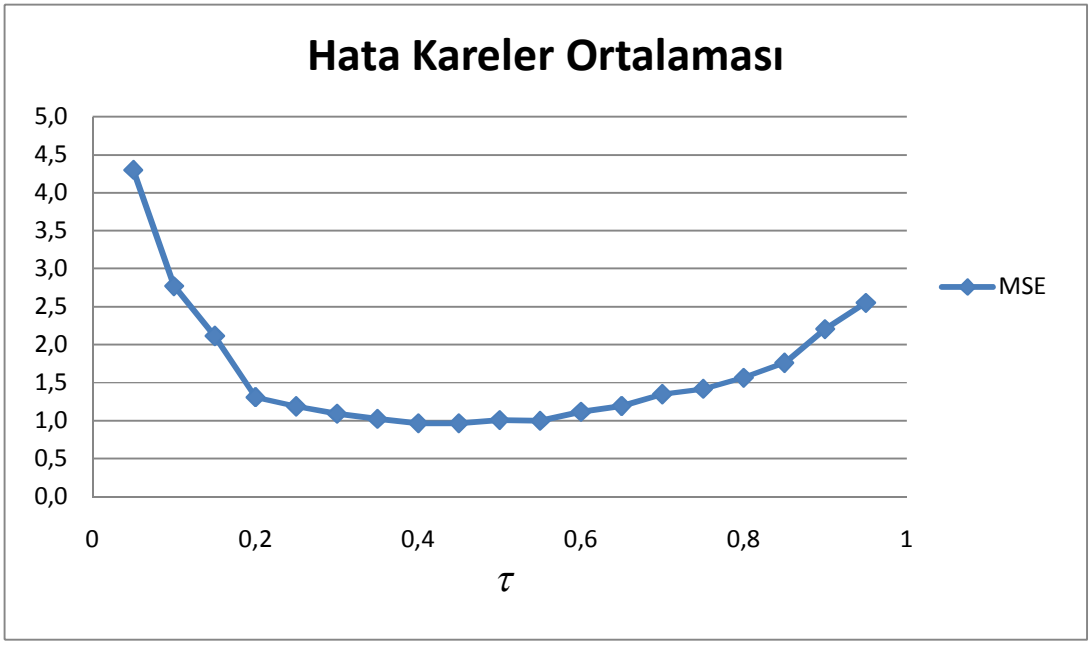
Şekil 6.6. Uygulama 2 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları

Quantile Regresyon analizi $\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95$ quantile değerleri için elde edilen MSE ve MAD değerleri Çizelge 6.16'da verilmiştir.

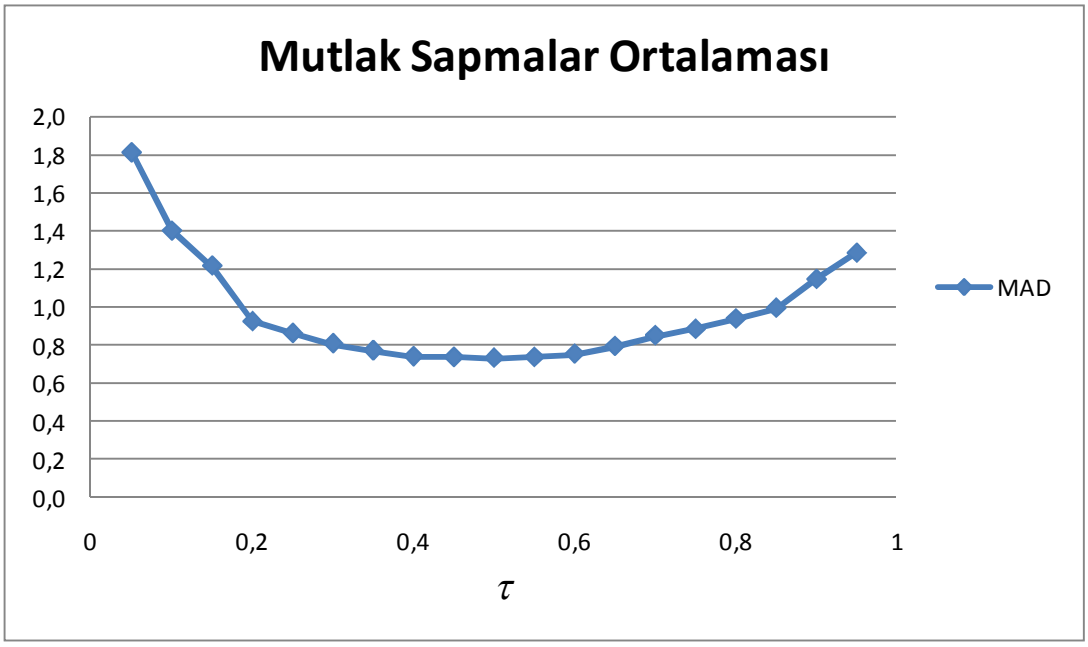
Çizelge 6.16. Uygulama 2'de çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri

τ	**MSE**	**MAD**
0.05	4.300280	1.810290
0.1	2.769580	1.396930
0.15	2.115339	1.212736
0.2	1.309313	0.918910
0.25	1.188852	0.857292
0.3	1.092037	0.802827
0.35	1.022360	0.765511
0.4	0.967451	0.734229
0.45	0.969084	0.730171
0.5	1.010935	0.726373
0.55	0.997302	0.730021
0.6	1.117628	0.748281
0.65	1.195390	0.788990
0.7	1.349483	0.845072
0.75	1.418583	0.878261
0.8	1.567300	0.933358
0.85	1.761534	0.989962
0.9	2.207199	1.141839
0.95	2.551357	1.280167

$(\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95)$ quantile değerleri ile MSE değerlerine ilişkin grafik Şekil 6.7'de, quantile değerleri ile MAD değerlerine ilişkin grafik ise Şekil 6.8'de verilmiştir.



Şekil 6.7. Uygulama 2 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği



Şekil 6.8. Uygulama 2 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MAD değerleri grafiği

Uygulama 3

Çoklu doğrusal regresyonda ikinci uygulama olarak Birkes ve Dodge (1993)'ten alınan verilerle apartman dairelerindeki yangın sayısını etkileyen etkenlerin incelenmesi hedeflenmiştir. Yangın sayısını etkileyeceği düşünülen Apartmanın Yaşı, Hırsız Sayısı ve Gelir etkenlerine ilişkin 4 adet bağımsız değişken modele alınmış ve çıkan yangın sayısına etkileri Quantile Regresyon ve En Küçük Kareler regresyon analizi yöntemleri ile incelenmiştir.

Analiz sonucunda Quantile Regresyon ve En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilen katsayı değerleri, hesaplanan hata kareler ortalaması (MSE) ve ortalama mutlak sapma (MAD) değerleri karşılaştırılmıştır.

Ele alınan veriler için; çoklu regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i1} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, 45.$$

olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişkenler;

Y : Yangın Sayısı (Logaritması alınarak analiz yapılmıştır)

X_1 : Hırsız Sayısı

X_2 : Apartmanın Yaşı

X_3 : Gelir (Aylık)

biçiminde ifade edilmektedir. Bu değişkenlere ilişkin veriler Ek 3'te verilmiştir.

Bu modele ait, SPSS 15.0 programından, Regresyon Analizi sonucunda elde edilen varyans analizi tablosu Çizelge 6.17'de verilmiştir.

Çizelge 6.17. Uygulama 3 için SPSS 15.0'dan elde edilen Varyans Analizi Tablosu

	Kareler Toplamı	***Serbestlik Derecesi***	***Kareler Ortalaması***	***F değeri***	***P değeri***
Regresyon	16.348	3	5.449	25.740	0.000
Hata	8.680	41	0.212		
Toplam	25.027	44			

Modele ait EKK ve Quantile Regresyon analizinin $(\tau = 0.25, 0.50, 0.75)$ R programından elde edilen sonuçları Çizelge 6.18 -6.21'de verilmiştir.

Çizelge 6.18. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.25$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR25)

Call: rq(formula = Yangın ~ HırsızSayısı + ApartmanYaşı + Gelir, tau = 0.25,
    data = b)

tau: [1] 0.25

Coefficients:
             coefficients lower bd upper bd Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)    3.83894      2.15195  5.01823  0.76012    5.05046  0.00001
HırsızSayısı   0.45147     -0.94714  0.56953  0.47505    0.95036  0.34750
ApartmanYaşı   0.00898     -0.00635  0.03328  0.00756    1.18773  0.24177
Gelir         -0.23962     -0.31620 -0.12968  0.04975   -4.81627  0.00002
```

Çizelge 6.19. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.5$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR50)

Call: rq(formula = Yangın ~ HırsızSayısı + ApartmanYaşı + Gelir, tau = 0.5,
    data = b)

tau: [1] 0.5

Coefficients:
             coefficients lower bd upper bd    Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)    4.36214      3.45980  5.72653    0.81588    5.34652  0.00000
HırsızSayısı  -0.09098     -0.48498  1.24767    0.49892   -0.18235  0.85621
ApartmanYaşı   0.01299     -0.01047  0.02335    0.00817    1.59081  0.11933
Gelir         -0.24253     -0.34514 -0.18332    0.05197   -4.66690  0.00003
```

Çizelge 6.20. Uygulama 3'te R Programından $\tau = 0.75$ için elde edilen QR Analizi Sonuçları

```
> summary(QR75)

Call: rq(formula = Yangın ~ HırsızSayısı + ApartmanYaşı + Gelir, tau = 0.75,
    data = b)

tau: [1] 0.75

Coefficients:
             coefficients lower bd upper bd  Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept)    4.73409      3.40687  6.02094   0.64436    7.34698  0.00000
HırsızSayısı   0.32991     -1.34761  1.38844   0.54419    0.60624  0.54770
ApartmanYaşı   0.00730      0.00212  0.01578   0.00472    1.54745  0.12944
Gelir         -0.25175     -0.34078 -0.10497   0.04332   -5.81125  0.00000
```

Çizelge 6.21. Uygulama 3'te R Programından elde edilen EKK Regresyon Analizi Sonuçları

```
> summary(EKK1)

Call:
glm(formula = Yangın ~ HırsızSayısı + ApartmanYaşı + Gelir, data = b)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.8062  -0.3240  -0.0639   0.2758   1.0815

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   4.102321   0.611190   6.712 4.21e-08 ***
HırsızSayısı  0.268916   0.378215   0.711    0.481
ApartmanYaşı  0.009893   0.006250   1.583    0.121
Gelir        -0.223240   0.039311  -5.679 1.24e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 0.2116999)

    Null deviance: 25.0275  on 44  degrees of freedom
Residual deviance:  8.6797  on 41  degrees of freedom
AIC: 63.649

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

Modele ait EKK ve $\tau = 0.25, 0.50, 0.75$ quantile değerleri için Quantile Regresyon analizi sonucunda elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri Çizelge 6.22'de verilmiştir.

Çizelge 6.22. Uygulama 3 için elde edilen $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri

Gözlem Numarası	Y	Tahmin Değerleri			
		QR $\tau = 0.25$	QR $\tau = 0.50$	QR $\tau = 0.75$	EKK
1	1.825	1.558	1.836	2.189	1.930
2	2.251	2.345	2.603	2.961	2.662
3	2.351	2.110	2.350	2.735	2.435
4	2.041	1.920	2.197	2.542	2.269
5	2.152	2.351	2.617	2.940	2.673
6	3.529	2.715	3.201	3.332	3.079
7	1.932	1.694	1.831	2.329	2.013
8	1.988	1.962	2.089	2.566	2.264
9	2.715	2.161	2.269	2.788	2.441
10	3.371	2.602	2.789	3.243	2.876
11	0.788	0.858	1.179	1.515	1.286
12	1.74	0.170	0.538	0.816	0.659
13	0.693	0.693	1.179	1.394	1.177
14	0.916	1.352	1.581	1.982	1.722
15	1.099	1.300	1.578	1.956	1.685
16	1.686	1.686	1.822	2.292	2.009
17	0.788	1.061	1.343	1.733	1.461
18	1.974	1.824	1.974	2.433	2.141
19	2.715	1.995	2.121	2.604	2.294
20	2.803	2.182	2.443	2.803	2.509
21	2.912	2.696	2.931	3.360	2.976
22	3.589	2.919	3.245	3.589	3.212
23	2.918	2.470	2.633	3.136	2.741
24	3.148	2.497	2.684	3.148	2.776
25	2.501	2.501	2.924	3.161	2.853
26	1.723	1.677	1.872	2.311	2.015
27	3.082	2.209	2.327	2.907	2.479
28	3.073	3.073	3.352	3.769	3.337
29	2.197	2.477	2.723	3.112	2.779
30	1.281	1.168	1.603	1.866	1.605
31	1.609	1.560	1.841	2.182	1.934
32	3.353	2.100	2.279	2.736	2.405
33	2.856	2.634	2.892	3.301	2.925
34	2.425	2.705	2.945	3.365	2.987
35	1.224	0.684	1.224	1.380	1.186
36	2.477	1.864	2.230	2.479	2.246
37	2.351	1.993	2.351	2.624	2.362
38	2.37	1.916	2.214	2.525	2.274
39	2.38	1.733	2.045	2.365	2.104
40	1.569	0.886	1.364	1.569	1.357
41	2.342	1.142	1.507	1.789	1.566
42	2.747	1.653	1.942	2.295	2.021
43	1.946	1.502	1.946	2.256	1.912
44	1.96	1.529	1.844	2.187	1.911
45	1.589	1.002	1.340	1.628	1.429

Çizelge 6.23'te EKK ve Quantile Regresyon yöntemine ait regresyon katsayıları, katsayıların geçerliliği, modelin hata kareler ortalaması ve modelin mutlak sapmalar ortalaması değerleri verilmiştir. Her iki yöntemden elde edilen tahmin ve güven aralığı grafiği Şekil 6.9'da görülmektedir.

Çizelge 6.23. Uygulama 3 için EKK ve QR yöntemlerine ilişkin model özet tablosu

Yöntem	Regresyon Katsayıları		*p* değeri	MSE	MAD	R^2
EKK Yöntemi	b_0	4.102321	0	0.1928821	0.3594653	0.653193
	b_1	0.268916	0.481			
	b_2	0.009893	0.121			
	b_3	-0.223240	0			
QR Yöntemi $\tau = 0.25$	b_0	3.8389	0.00001	0.3209457	0.4337897	0.422931
	b_1	0.4515	0.34750			
	b_2	0.009	0.24177			
	b_3	-0.2396	0.00002			
QR Yöntemi $\tau = 0.50$ **(LAD)**	b_0	4.3621	0	0.202802	0.3507546	0.635357
	b_1	-0.091	0.85621			
	b_2	0.013	0.11933			
	b_3	-0.2425	0.00003			
QR Yöntemi $\tau = 0.75$	b_0	4.7341	0	0.2829805	0.4346533	0.491194
	b_1	0.3299	0.54770			
	b_2	0.0073	0.12944			
	b_3	-0.2517	0			

Modelin parametrelerini test etmek için kurulan,

$H_0 : \boldsymbol{\beta} = 0$
$H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq 0$

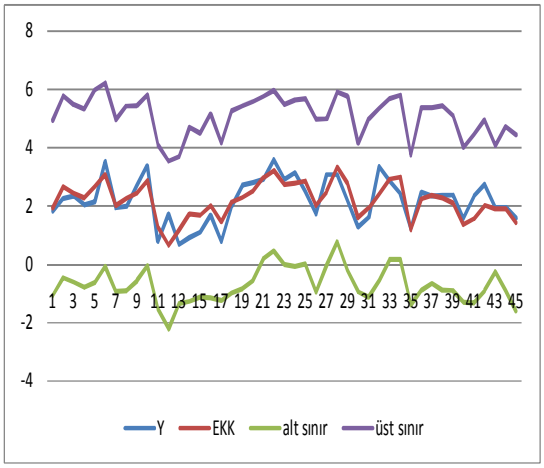
hipotezi için p value (anlamlılık değeri) değeri sıfır olarak bulunmuştur. Hipotezi, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde hipotezi test edersek, $p < \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir, yangın değişkeni ile hırsızlık sayısı, apartman yaşı ve gelir değişkenleri arasındaki ilişki $\%95$ anlam düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

Parametrelerin bireysel anlamlılık testi için oluşturulan,

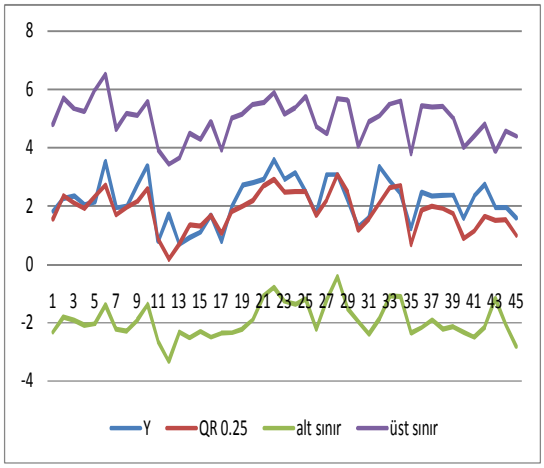
$H_0 : \beta_i = 0$
$H_1 : \beta_i \neq 0$

Hipotezi test edildiğinde, katsayıların anlamlılığı Quantile Regresyon ve EKK yönteminde %95 anlam düzeyinde benzerlik göstermektedir.

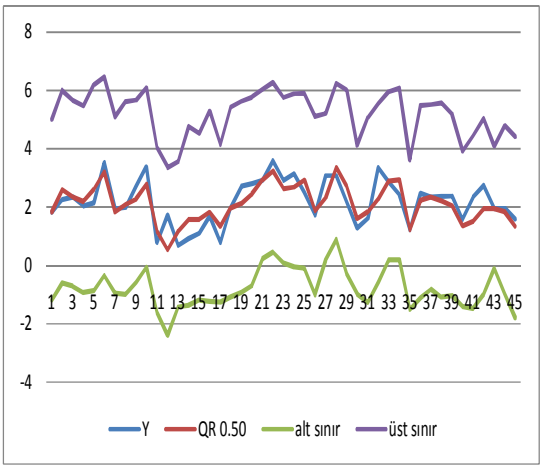
Modelin özet tablosuna göre; EKK yönteminde ve $\tau = 0.25, \tau = 0.50, \tau = 0.75$ quantile değerleri için Quantile Regresyon yönteminde "Hırsız Sayısı" ve "Apartman Yaşı" değişkenlerinin katsayısının anlamsız çıktığı görülmektedir.



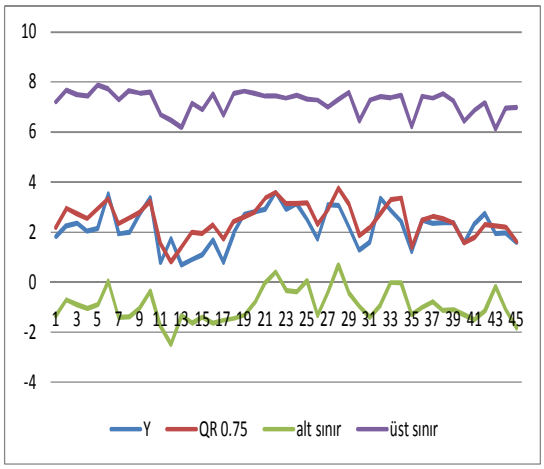
a) EKK



b) Quantile Regresyon $\tau = 0.25$



c) Quantile Regresyon $\tau = 0.5$ (LAD)



d) Quantile Regresyon $\tau = 0.75$

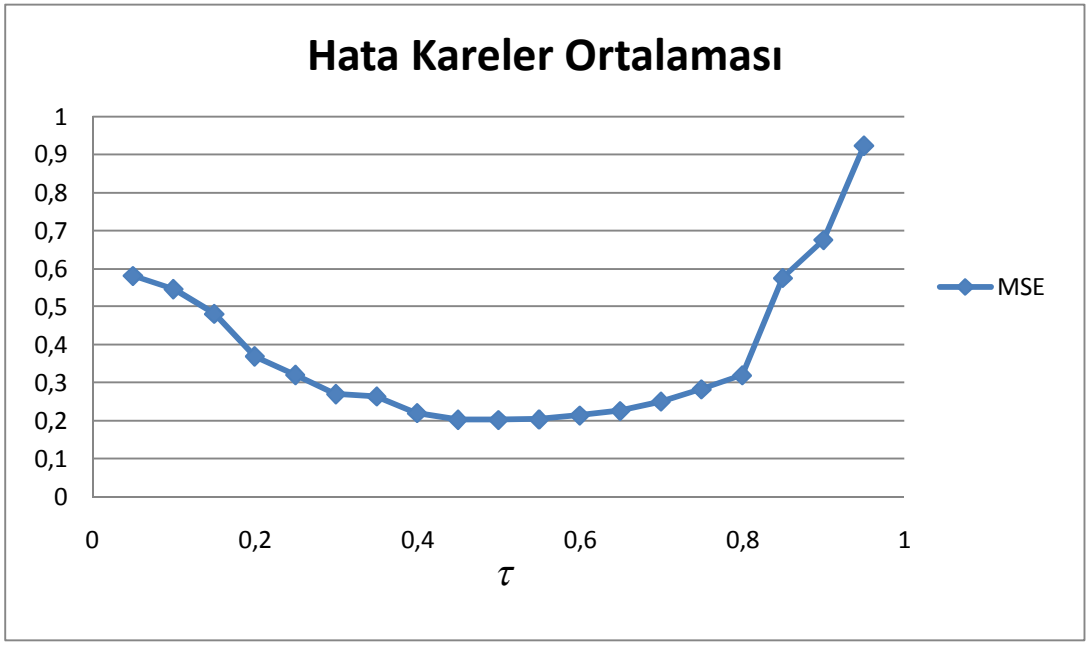
Şekil 6.9. Uygulama 2 için yöntemlere ilişkin tahmin değerleri ve güven aralıkları grafikleri

Quantile Regresyon analizi $\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95$ quantile değerleri için elde edilen MSE ve MAD değerleri Çizelge 6.24'te verilmiştir.

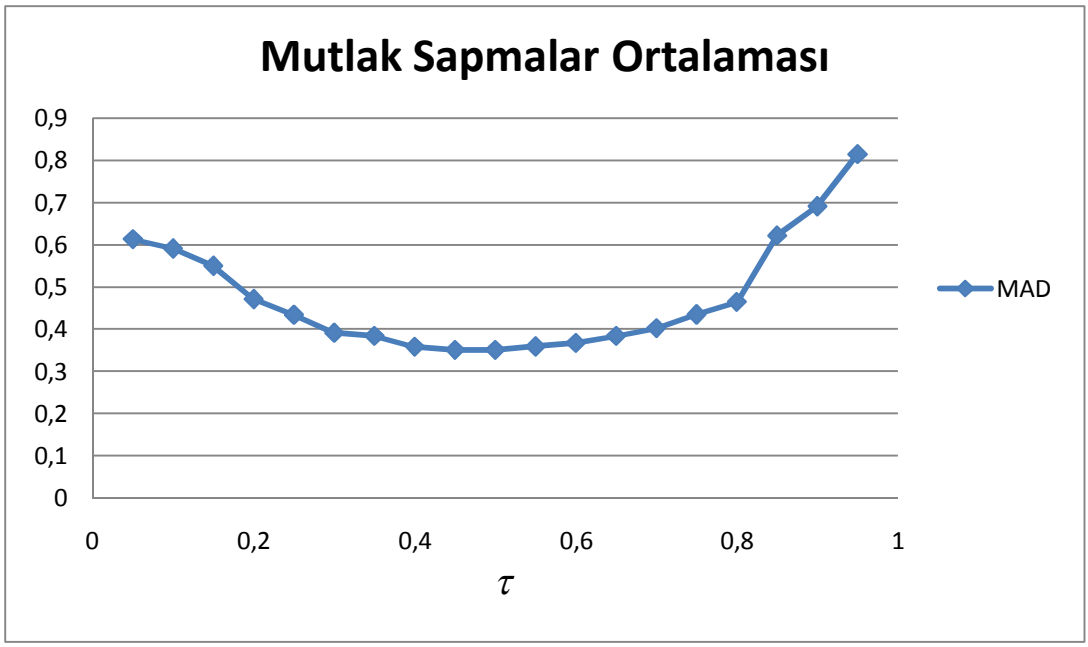
Çizelge 6.24. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE ve MAD değerleri

τ	**MSE**	**MAD**
0.05	0.580844	0.612953
0.1	0.546053	0.590433
0.15	0.481235	0.549717
0.2	0.369446	0.471074
0.25	0.320946	0.43379
0.3	0.270409	0.391091
0.35	0.264011	0.383872
0.4	0.220342	0.358553
0.45	0.203448	0.350938
0.5	0.202802	0.350755
0.55	0.203609	0.358939
0.6	0.214414	0.367274
0.65	0.226413	0.383782
0.7	0.250554	0.402492
0.75	0.282981	0.434653
0.8	0.319765	0.464483
0.85	0.575159	0.621386
0.9	0.674916	0.690562
0.95	0.922993	0.813486

$(\tau = 0.05, 0.10, \ldots, 0.95)$ quantile değerleri ile MSE değerlerine ilişkin grafik Şekil 6.10'da, Quantile değerleri ile MAD değerlerine ilişkin grafik ise Şekil 6.11'de verilmiştir.



Şekil 6.10. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği



Şekil 6.11. Uygulama 3 için çeşitli quantile değerlerine karşılık gelen MSE değerleri grafiği

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tüm regresyon modellerinde amaç e_i hatalarının minimum yapılmasıdır. Bu nedenle, doğrusal regresyon modelinde hataların minimum yapılması amaçlanmış ve çözüm için üç yöntem ele alınmıştır. Bu yöntemler,

- Quantile Regresyon Yöntemi
- En Küçük Kareler Yöntemi
- LAD Yöntemi

dir.

En küçük kareler yöntemi $\hat{\beta}_i$ regresyon parametresi tahmin edicilerini, hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde hesaplamaya dayanmaktadır. Buna alternatif olarak önerilen Quantile Regresyon ve Quantile Regresyonun özel bir hali olan en küçük mutlak sapma yöntemi (LAD), hataların mutlak değerlerinin toplamını minimum yapma esasına dayanmaktadır.

Çalışmanın Birinci Bölümünde, doğrusal regresyon, quantile regresyon ve önceki çalışmalar hakkında genel bilgiler verildi. İkinci Bölüm'de, doğrusal regresyon analizine giriş yapıldı, modele ilişkin gösterimler, EKK ve MLE parametre tahmin yöntemleri, çoklu belirleyicilik katsayısı, parametre tahminlerinin güven aralıkları ve bu parametreler için hipotez testleri verildi. Üçüncü Bölüm'de, quantile, quantile dağılım fonksiyonu, quantile yoğunluk fonksiyonu, Quantile Regresyon kavramlarından bahsedildi. Ayrıca quantile regresyonun doğrusal programlama gösterimi ve quantile regresyonun uygulama alanları ele alındı. Dördüncü Bölüm'de, LAD Regresyon yönteminden bahsedildi, basit doğrusal regresyon ve çoklu doğrusal regresyon için LAD algoritmaları verildi. Beşinci bölüm'de R Paket programının kullanım alanları, kurulumu, avantajları ve Quantile Regresyon yönteminde kullanılan R komutları ele alındı. Altıncı bölüm'de quantile regresyon, LAD ve EKK yöntemleri için basit ve çoklu regresyon analizi için uygulamalar yapıldı ve elde edilen tahminler grafikler yardımıyla irdelendi.

Çalışmanın uygulama bölümünde, basit doğrusal regresyon analizi için ele alınan Uygulama 1'de Devlet Meteoroloji Müdürlüğü'nden alınan 1999-2006 yılları arasında ölçülen Konya iline ait aylık toplam güneşlenme süresi ve aylık ortalama bulutluluk süresi verileri kullanılmıştır. Çoklu regresyon analizi için iki farklı uygulama yapılmıştır. Uygulama 2'de, Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü'nden alınan veriler ile, 2000-2009 yılları arasında aylık ortalama hava sıcaklığını etkileyen etkenler incelenmiştir. Sıcaklığı etkileyeceği düşünülen hava basıncı, buhar basıncı, nisbi nem ve rüzgâr hızı etkenlerine ilişkin dört bağımsız değişken modele alınmıştır. Uygulama 3'te Birkes ve Dodge (1993)'ten alınan verilerle apartman dairelerindeki yangın sayısını etkileyen etkenler incelenmiştir. Apartmanın yaşı, Hırsız Sayısı ve Gelir etkenlerine ilişkin dört bağımsız değişken modele alınmıştır. Bütün uygulamalarda Quantile Regresyon yöntemi için R paket programı ve En Küçük Kareler yöntemi için SPSS 15.0 ve R paket programı, LAD yöntemi için R paket programı ve Microsoft Office Excel 2007 programı kullanılarak analiz yapılmıştır.

Basit doğrusal regresyon analizi için ele alınan Uygulama 1 sonuçlarına göre Çizelge 6.7 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (1337.109) EKK yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (28.5) $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon (LAD) yönteminden elde edilmiştir.

Basit doğrusal regresyon analizi için ele alınan Uygulama 1 Quantile Regresyon sonuçlarına göre Çizelge 6.8 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (1338.062) $\tau = 0.45$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (1.011) $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.

Çoklu doğrusal regresyon analizi Uygulama 2 sonuçlarına göre Çizelge 6.15 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (0.9384) EKK yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (1.011) $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon (LAD) yönteminden elde edilmiştir.

Çoklu doğrusal regresyon analizi Uygulama 2 Quantile Regresyon analizi sonuçlarına göre Çizelge 6.16 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (0.967) $\tau = 0.40$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (0.726) $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.

Çoklu doğrusal regresyon analizi Uygulama 3 sonuçlarına göre Çizelge 6.23 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (0.193) EKK yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (0.35075) $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon (LAD) yönteminden elde edilmiştir.

Çoklu doğrusal regresyon analizi Uygulama 3 Quantile Regresyon analizi sonuçlarına göre Çizelge 6.24 incelendiğinde;

- ✓ MSE kriterine göre, en küçük değer (0.204) MSE değeri $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.
- ✓ MAD kriterine göre, en küçük değer (0.35075) MAD değeri $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon yönteminden elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Quantile regresyon tahmin edicileri gerçek veriler üzerinde uygulandı. Quantile regresyon analizi sonuçlarında MSE ve MAD değerlerine ilişkin Çizelge 6.8, Çizelge 6.16 ve Çizelge 6.24 incelendiğinde en küçük MSE ve MAD değerlerinin $\tau = 0.5$ değeri civarında elde edildiği görülmektedir. Daha sonra yapılacak çalışmalarda, verinin çarpıklık katsayısının yüksek olduğu veriler için bu durumun geçerli olup olmayacağı hakkında çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

Akkaya, Ş., 1990, Ekonometri I, Anadolu Matbaacılık, İzmir.

Alpar, R., 2003**,** Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş – 1, Nobel Yayınevi, Ankara.

Baur, D.,Saisana, M., Niels, N., 2004, Modelling the effects of meteorological variables on ozone concentration a quantile regression approach, Atmospheric Environment, pp. 4689–4699.

Behr, A., 2008, Quantile regression for robust bank efficiency score estimation, European Journal of Operational Research, 200, pp. 568–581.

Birkes, D., Dodge, Y. 1993, Alternative Methods of Regression, John Wiley & Sons,Inc., Canada.

Braun, W., J., Murdoch, D., J., 2007, A First Course in Statistical Programming with R, Cambridge University Pres, New York.

Chen, L., 2005, An Introduction to Quantile Regression and the QUANTREG Procedure, Statistics and Data analysis, pp. 213-230

Coad, A., Rao, R., 2008, Innovation and firm growth in high-tech sectors: A quantile regression approach**,** Research Policy, 37, pp. 633–648.

Eide, E., Showalter, H., M., 1998, The effect of school quality on student performance: A quantile regression approach, Economics Letters, 58, pp. 345–350.

Genç, A., 1997, Çok Değişkenli Lineer Olmayan Modeller: Parametre Tahmini Ve Hipotez Testi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Ankara.

Ghahramani, S., 2005, Fundamantals of Probibility, Addision-Wesley Publishing Company, USA.

Gujerati, D., N., 1999, Temel Ekonometri. Çevirenler: Şenesen, Ü., Şenesen, G.,G., Literatür Yayınları, İstanbul.

Kan, K., Tsai, W., D., 2004, Obesity and risk knowledge, Journal of Health Economics, 23, pp. 907–934.

Kip, E.,1999, Ekonometrik Yöntemler, Gazi Üniversitesi İletişim Fakültesi Basımevi, Ankara.

Koenker, R., Bassett, G.,1978, Regression Quantiles, Econometrica, Vol. 46, No. 1. pp. 33-50.

Koenker R., Hallock, K., F., 2001, Quantile Regression, Journal of Economic Perspectives, Volume 15, Number 4, pp.143–156.

Koenker, R.,2005, Quantile Regression Cambridge University Press, USA

Lee, H., Tanaka, H., 1999, Upper and lower approximation models in interval regression
using regression quantile techniques, European Journal of Operational Research,116, pp. 653-666.

Li, T., Sun, L., Zou, L., 2009, State ownership and corporate performance: A quantile regression analysis of Chinese listed companies, China Economic Review, CHIECO-00395.

Lingren, A., 1997, Quantile regression with censored data using generalized L_1 minimization, Computational Statistics & Data Analysis, 23, pp. 509-524.

Meligkotsidou, A., Vrontos, D., L., Vrontos, D., V., 2009, Quantile regression analysis of hedge fund strategies, Journal of Empirical Finance, 16, pp. 264–279.

Newbold, P., 2000, İşletme ve İktisat için İstatistik, Çevirenler: Şenesen, Ü., Şenesen, Literatür Yayınları, İstanbul.

Ram, R., 2008, Parametric variability in cross-country growth regressions: An application of quantile-regression methodology, Economics Letters, 99, pp. 387–389, 2008.

Rossiter, D., G., 2009, Introduction to the R Project for Statistical Computing for use at ITC, Enschede

Rousass, G,. G., 1973, A First course in Mathematical Statistic, Addison-Wesley Publishing Company, USA.

Saçaklı, İ., 2005, Kantil Regresyon ve Alretnatif Regresyon Modelleri ile Karşılaştırılması, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Stifel, D., C., 2009, Averett, S., L., Childhood overweight in the United States: A quantile regression approach, Department of Economics, Lafayette College, Easton, PA 18042, USA.

Tarı, R., 2006, Ekonometri, Avcı Ofset, İstanbul.

Temiz, S., 2006, Hata Paylarının Normal Dağılmaması Durumunda Tek Değişkenli Klasik Regresyonda Alternatif Tahmin Yöntemleri, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Yıldırım, N., 2010, En Küçük Kareler, Ridge Regresyon ve Robust Regresyon Yöntemlerinde Analiz Sonuçlarına Aykırı Değerlerin Etkilerinin Belirlenmesi,

ÇukurovaÜniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Zootekni Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Adana.

Yu, K., Lu, Z., Stander, J., 2003, Quantile Regression: application and current research areas, The Statistician, 52, Part 3, pp. 331-350.

http://www.r-project.org/ [Ziyaret Tarihi: 10 Temmuz 2010].

EKLER

EK-1 Uygulama 1 Verileri

Yıl	Ay	*Y* Güneşlenme Süresi (sa)	*X* Bulutluluk Süresi (sa)	Yıl	Ay	*Y* Güneşlenme Süresi (sa)	*X* Bulutluluk Süresi (sa)
1999	1	101	6.2	**2003**	1	92.7	7.2
	2	157.7	4.6		2	102.5	7
	3	193.8	4.2		3	150	5.9
	4	240.7	3.7		4	199.7	5.8
	5	292.4	3.1		5	284.1	3.3
	6	265.8	4		6	315.8	1.8
	7	322.5	2.1		7	357.5	1
	8	327	1.7		8	348.5	0.8
	9	281.5	2.1		9	291.4	1.9
	10	228.1	2.8		10	229.1	3.2
	11	181.9	3.4		11	184.9	2.9
	12	145.1	3		12	82.8	6.4
2000	1	105	6.7	**2004**	1	58.3	7.8
	2	115.7	6.5		2	135.5	6.2
	3	243.7	3.9		3	211.1	4.1
	4	194.8	5.5		4	229.8	4.3
	5	241.8	4.8		5	285.5	3.7
	6	311.8	2.2		6	292.1	2.8
	7	364.9	0.2		7	343	1.2
	8	342.7	1.7		8	335.4	1.8
	9	294.5	2.2		9	319.3	1
	10	227.7	3.6		10	251.6	2.7
	11	207.6	2.2		11	157	4.2
	12	112.5	6.1		12	118	5.3
2001	1	129.9	6.1	**2005**	1	118.1	5.5
	2	142	4.9		2	171.3	5
	3	208.1	4.5		3	194.7	4.6
	4	243.8	4.3		4	214.2	4.7
	5	219.8	5.1		5	255.1	4
	6	345.9	1.1		6	296.5	2.4
	7	348.4	1.5		7	324.7	1.6
	8	334.3	1.7		8	340.6	1
	9	300.7	1.3		9	272.7	2.2
	10	259.9	1.9		10	218.4	3.8
	11	135.4	5.1		11	126.8	5.5
	12	80.8	7.2		12	114.2	5.1
2002	1	130	7.2	**2006**	1	80.8	6.3
	2	164.6	4.1		2	91.2	6.4
	3	210.5	4.3		3	201.6	5
	4	169.7	5.9		4	219.2	4.8
	5	317.1	3.3		5	291.6	4
	6	292.1	3.1		6	323.6	2.1
	7	316.1	2.4		7	349.4	1.8
	8	313.5	2.4		8	342.8	0.5
	9	252	3.4		9	256.4	2.8
	10	242.1	2.7		10	172.5	5
	11	173.9	3.4		11	176.3	3.1
	12	103.59	6.7		12	175.3	2.9

EK-2 Uygulama 2 Verileri

Yıl	Ay	*Y* Sıcaklık (^{0}C)	X_1 Hava Basıncı (hPa)	X_2 Buhar Basıncı (hPa)	X_3 Nisbi Nem (%)	X_4 Rüzgar Hızı (*m/sec*)	Yıl	Ay	*Y* Sıcaklık (^{0}C)	X_1 Hava Basıncı (hPa)	X_2 Buhar Basıncı (hPa)	X_3 Nisbi Nem (%)	X_4 Rüzgar Hızı (*m/sec*)
2000	1	-4,9	897,7	3,3	73,4	2,8	2005	1	2,4	898,2	5,4	74	2,1
	2	-1,9	900,6	3,9	73,9	2,9		2	1,7	896	4,9	69,1	2,8
	3	3,9	898,6	4,2	56,9	3,3		3	6,7	897,1	5,9	61,2	3
	4	12,7	894,5	7,6	55,3	2,8		4	10,8	898,2	7,4	59,6	2,7
	5	14,7	898,1	9	55,3	2,5		5	16	897,4	8,9	51,9	2,7
	6	19,5	898,5	9,2	42,3	3,2		6	20,2	897,1	11,2	48,6	2,6
	7	26	895,2	8,7	27,6	3,1		7	25,3	895,7	15,4	49,1	2,6
	8	22,5	897,1	12,2	46,6	3,9		8	24,7	896,1	14,2	47,9	2,5
	9	18,9	897,8	8,8	42,6	2,9		9	17,8	899,1	12	60,6	1,9
	10	11,2	901,1	7,6	59,9	2		10	10,5	902,2	9,1	71,4	1,6
	11	6,9	902,6	6	60,5	1,3		11	4,9	901,5	6,7	76,3	2,1
	12	1,3	899,9	5,4	79	1,9		12	1,5	900,5	5,5	76,5	1,4
2001	1	2,4	901,3	5,2	71	1,4	2006	1	-2,9	900,3	4,3	80,1	1,8
	2	2,5	897,3	4,7	65,7	3,2		2	1,1	896,1	5,3	77,1	1,8
	3	10,9	896,8	6	50	2,5		3	7	894,6	6,9	70,1	2,1
	4	12,7	895,5	6,4	47,8	3,2		4	12,2	895,4	8,5	61,6	1,7
	5	14,9	896,5	9,3	57,1	3,4		5	16,1	898,2	10,4	59,1	1,5
	6	22,5	896	9,6	36,4	3,5		6	22	897,8	11,2	43,3	2,1
	7	26,2	894,3	11,6	35,1	3,2		7	23,2	896,3	12,7	45,1	2,2
	8	24,4	896,2	12,5	42,3	3,4		8	26,8	895,1	13,7	39,9	1,9
	9	20,7	897,2	9,4	40,5	2		9	18,2	899,3	11	54,9	1,9
	10	12,7	901,2	6,2	43,7	2,3		10	13,4	898,9	10,2	68,8	1,4
	11	5,8	899,7	6,9	72	2,3		11	4,6	901,8	6,4	74,8	1,2
	12	2,3	896,2	6	79,6	2,7		12	-0,1	905,7	4,4	71,7	1,3
2002	1	-5,8	902,3	3,3	80	1,5	2007	1	1,4	904,3	4,5	69,3	2
	2	3,1	900,8	4,9	66	1,4		2	1,2	898,1	5,1	76,2	1,9
	3	7,7	896	5,5	55,7	2,8		3	7,2	898,7	5,7	57,5	3
	4	9,7	894,7	8	67,2	1,9		4	9,9	898,6	5,9	50,3	3
	5	15,1	896,7	9,1	53,8	2,3		5	20,4	896,7	9,6	42,1	3
	6	19,7	897,6	10,6	47,4	3		6	23,2	897,1	10,5	40,8	3,2
	7	24	895,8	11,2	39,8	2,5		7	26,4	895,9	11,15	29	1,8
	8	22,1	895,7	10,7	41,9	2,4		8	26,4	896,4	11,3	35,2	3
	9	18,1	898,9	10,4	52,6	1,4		9	21,1	899,5	8,2	35,1	2,5
	10	12,8	900,3	7,8	54,7	1,8		10	14,6	901,55	9,45	53,5	1
	11	6,6	901,9	6	64,1	0,8		11	7,6	901,8	7,5	71,9	1,2
	12	-3,1	899,7	4	74	1,8		12	1,8	902,9	5,7	79,3	1,1
2003	1	3,9	897,6	6	74,6	1,9	2008	1	-2,2	904	3,8	73,5	1,2
	2	-1,7	894,1	3,8	67,1	4,2		2	-1,2	905,3	4,1	73,4	1
	3	1,8	896,1	4,3	62,6	3,3		3	10,8	896,1	5,9	49,7	1,6
	4	9,5	894,9	6,6	57,4	2,7		4	15,1	897,9	6,9	44,9	1,4
	5	17,2	898,2	8,9	47	1,9		5	16,5	897,8	8,3	47,6	1,4
	6	21,2	896,7	8,5	34,8	2,6		6	22,9	897,6	9,8	37,7	1,7
	7	23,5	895,3	9,2	32,5	2,7		7	25,3	895,7	10	32,6	1,6
	8	23,6	897,5	9,2	32,3	3		8	26,5	895,8	10,7	32,6	1,6
	9	18	899,6	8,9	45,1	2,6		9	20,6	897,6	10,5	48	1,2
	10	14,3	899,9	8,2	52	2,7		10	12,9	902,8	9,6	66	1
	11	6,5	902,8	6,3	65,6	1,6		11	8,7	902,6	8,2	74	0,8
	12	1,6	900,3	5,6	79,6	1,7		12	1,3	902,9	5,7	82,6	0,8
2004	1	-1,4	892,9	4,9	83,1	1,8	2009	1	2,4	900,2	5,8	77,9	0,9
	2	1,9	899	4,6	64	3		2	4	894,1	6	74,9	1,2
	3	6,2	901,6	4,5	51,1	2,7		3	5,8	895,8	5,6	61,9	1,5
	4	10,3	897,3	6,6	53,6	2,5		4	11,5	897,4	7,8	59,7	1,3
	5	15,2	896,3	8,7	51,9	2,1		5	16,2	898,9	9	52,1	1,3
	6	19,7	898,5	9,9	45	1,6		6	22,2	898,1	9,9	39,1	1,7
	7	22,8	896,8	9,9	38,3	2		7	24,1	896,1	12,3	43,1	1,7
	8	23	896,1	10,1	37,6	1,9		8	23,2	898	9,2	33,7	1,5
	9	18,6	900,7	7,1	34,2	2,3		9	18,5	899,3	10	49,1	1,1
	10	14,5	902,1	7,3	46,8	1,2		10	15,9	900,3	9,3	54,8	1
	11	5,7	900,2	6	65,1	1,9		11	7,2	901,1	7,6	75,3	0,9
	12	1	903,2	4,9	73	1,1		12	5,6	897	7,3	80,2	0,9

EK-3 Uygulama 3 Verileri

Gözlem Numarası	Y **Yangın Sayısı (Log)**	X_1 **Hırsız Sayısı (Ort)**	X_2 **Apartmanın Yaşı (Yıl)**	X_3 **Gelir (Aylık)**
1	1.825	0.604	29	11.744
2	2.251	0.765	44	9.323
3	2.351	0.735	36	9.948
4	2.041	0.669	37	10.656
5	2.152	0.814	53	9.73
6	3.529	0.526	68	8.231
7	1.932	0.785	18	11.104
8	1.988	0.901	31	10.694
9	2.715	0.898	25	9.631
10	3.371	0.827	34	7.995
11	0.788	0.402	14	13.722
12	1.74	0.279	11	16.25
13	0.693	0.077	11	13.686
14	0.916	0.638	22	12.405
15	1.099	0.512	17	12.198
16	1.686	0.851	27	11.6
17	0.788	0.444	9	12.765
18	1.974	0.842	29	11.084
19	2.715	0.898	30	10.51
20	2.803	0.727	40	9.784
21	2.912	0.729	32	7.342
22	3.589	0.631	41	6.565
23	2.918	0.783	22	8.014
24	3.148	0.79	29	8.177
25	2.501	0.48	46	8.212
26	1.723	0.715	23	11.23
27	3.082	0.731	4	8.33
28	3.073	0.65	31	5.583
29	2.197	0.754	39	8.564
30	1.281	0.208	15	12.102
31	1.609	0.618	32	11.876
32	3.353	0.781	27	9.742
33	2.856	0.686	32	7.52
34	2.425	0.734	34	7.388
35	1.224	0.02	17	13.842
36	2.477	0.57	46	11.04
37	2.351	0.559	42	10.332
38	2.37	0.675	43	10.908
39	2.38	0.58	34	11.156
40	1.569	0.152	19	13.323
41	2.342	0.408	25	12.96
42	2.747	0.578	28	11.26
43	1.946	0.114	3	10.08
44	1.96	0.492	23	11.428
45	1.589	0.466	27	13.731

EK-4. Uygulama 1 için LINDO programı $\tau = 0.25$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	364.122	b_1	-42.6441								
u_1	1.2712	$v1$	0	u_{33}	0	v_{33}	7.9847	u_{65}	79.161	v_{65}	0
u_2	0	$v2$	10.2593	u_{34}	0	v_{34}	23.1983	u_{66}	47.3814	v_{66}	0
u_3	8.783	$v3$	0	u_{35}	0	v_{35}	11.2373	u_{67}	30.0509	v_{67}	0
u_4	34.361	$v4$	0	u_{36}	23.7152	v_{36}	0	u_{68}	48.0373	v_{68}	0
u_5	60.4746	$v5$	0	u_{37}	72.9152	v_{37}	0	u_{69}	0	v_{69}	2.178
u_6	72.2542	$v6$	0	u_{38}	0	v_{38}	24.6814	u_{70}	2.617	v_{70}	0
u_7	47.9305	$v7$	0	u_{39}	29.7475	v_{39}	0	u_{71}	0	v_{71}	28.017
u_8	35.3729	$v8$	0	u_{40}	57.178	v_{40}	0	u_{72}	0	v_{72}	20.1085
u_9	6.9305	$v9$	0	u_{41}	93.7034	v_{41}	0	u_{73}	0	v_{73}	11.4797
u_{10}	0	$v10$	16.6186	u_{42}	60.1746	v_{42}	0	u_{74}	20.3983	v_{74}	0
u_{11}	0	$v11$	37.2322	u_{43}	54.3237	v_{43}	0	u_{75}	26.7407	v_{75}	0
u_{12}	0	$v12$	91.0898	u_{44}	51.7237	v_{44}	0	u_{76}	50.5051	v_{76}	0
u_{13}	26.5932	$v13$	0	u_{45}	32.8678	v_{45}	0	u_{77}	61.5542	v_{77}	0
u_{14}	28.7644	$v14$	0	u_{46}	0	v_{46}	6.883	u_{78}	34.7237	v_{78}	0
u_{15}	45.8898	$v15$	0	u_{47}	0	v_{47}	45.2322	u_{79}	28.8085	v_{79}	0
u_{16}	65.2203	$v16$	0	u_{48}	25.1832	v_{48}	0	u_{80}	19.1221	v_{80}	0
u_{17}	82.3695	$v17$	0	u_{49}	35.6152	v_{49}	0	u_{81}	2.3949	v_{81}	0
u_{18}	41.4949	$v18$	0	u_{50}	36.8864	v_{50}	0	u_{82}	16.3254	v_{82}	0
u_{19}	9.3068	$v19$	0	u_{51}	37.478	v_{51}	0	u_{83}	0	v_{83}	2.7797
u_{20}	51.0729	$v20$	0	u_{52}	82.9136	v_{52}	0	u_{84}	0	v_{84}	32.4373
u_{21}	24.1949	$v21$	0	u_{53}	60.7034	v_{53}	0	u_{85}	0	v_{85}	14.6644
u_{22}	17.0966	$v22$	0	u_{54}	28.4373	v_{54}	0	u_{86}	0	v_{86}	0
u_{23}	0	$v23$	62.7051	u_{55}	36.022	v_{55}	0	u_{87}	50.6983	v_{87}	0
u_{24}	8.5068	$v24$	0	u_{56}	18.4932	v_{56}	0	u_{88}	59.7695	v_{88}	0
u_{25}	25.9068	$v25$	0	u_{57}	8.3017	v_{57}	0	u_{89}	98.0542	v_{89}	0
u_{26}	0	$v26$	13.1661	u_{58}	1.439	v_{58}	0	u_{90}	49.0305	v_{90}	0
u_{27}	35.8763	$v27$	0	u_{59}	0	v_{59}	55.5542	u_{91}	62.0373	v_{91}	0
u_{28}	63.0475	$v28$	0	u_{60}	0	v_{60}	8.4	u_{92}	0	v_{92}	0
u_{29}	73.1627	$v29$	0	u_{61}	26.8017	v_{61}	0	u_{93}	11.6814	v_{93}	0
u_{30}	28.6864	$v30$	0	u_{62}	35.7712	v_{62}	0	u_{94}	21.5983	v_{94}	0
u_{31}	48.2441	$v31$	0	u_{63}	21.8186	v_{63}	0	u_{95}	0	v_{95}	55.6254
u_{32}	42.6729	$v32$	0	u_{64}	49.0475	v_{64}	0	u_{96}	0	v_{96}	65.1542

EK-5. Uygulama 1 için LINDO programı $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	393.2196	b_1	-43.0179								
u_1	0	v_1	25.5089	u_{33}	0	v_{33}	36.5964	u_{65}	51.4464	v_{65}	0
u_2	0	v_2	37.6375	u_{34}	0	v_{34}	51.5857	u_{66}	19.3304	v_{66}	0
u_3	0	v_3	18.7446	u_{35}	0	v_{35}	38.4286	u_{67}	1.4018	v_{67}	0
u_4	6.6464	v_4	0	u_{36}	0	v_{36}	2.6911	u_{68}	19.6125	v_{68}	0
u_5	32.5357	v_5	0	u_{37}	46.5089	v_{37}	0	u_{69}	0	v_{69}	30.9018
u_6	44.6518	v_6	0	u_{38}	0	v_{38}	52.2464	u_{70}	0	v_{70}	25.4714
u_7	19.6179	v_7	0	u_{39}	2.2572	v_{39}	0	u_{71}	0	v_{71}	55.5446
u_8	6.9107	v_8	0	u_{40}	30.2857	v_{40}	0	u_{72}	0	v_{72}	47.225
u_9	0	v_9	21.3821	u_{41}	65.8393	v_{41}	0	u_{73}	0	v_{73}	38.5214
u_{10}	0	v_{10}	44.6696	u_{42}	32.2357	v_{42}	0	u_{74}	0	v_{74}	6.8303
u_{11}	0	v_{11}	65.0589	u_{43}	26.1232	v_{43}	0	u_{75}	0	v_{75}	0.6375
u_{12}	0	v_{12}	119.0661	u_{44}	23.5232	v_{44}	0	u_{76}	23.1643	v_{76}	0
u_{13}	0	v_{13}	0	u_{45}	5.0411	v_{45}	0	u_{77}	33.9518	v_{77}	0
u_{14}	2.0964	v_{14}	0	u_{46}	0	v_{46}	34.9714	u_{78}	6.5232	v_{78}	0
u_{15}	18.25	v_{15}	0	u_{47}	0	v_{47}	73.0589	u_{79}	0.3089	v_{79}	0
u_{16}	38.1786	v_{16}	0	u_{48}	0	v_{48}	1.41	u_{80}	0	v_{80}	9.6018
u_{17}	55.0661	v_{17}	0	u_{49}	9.2089	v_{49}	0	u_{81}	0	v_{81}	25.8803
u_{18}	13.2196	v_{18}	0	u_{50}	10.4054	v_{50}	0	u_{82}	0	v_{82}	11.3518
u_{19}	0	v_{19}	19.7161	u_{51}	10.5857	v_{51}	0	u_{83}	0	v_{83}	29.8214
u_{20}	22.6107	v_{20}	0	u_{52}	55.9839	v_{52}	0	u_{84}	0	v_{84}	59.6286
u_{21}	0	v_{21}	4.0803	u_{53}	32.8393	v_{53}	0	u_{85}	0	v_{85}	41.4071
u_{22}	0	v_{22}	10.6554	u_{54}	0.0125	v_{54}	0	u_{86}	0	v_{86}	26.7053
u_{23}	0	v_{23}	90.9803	u_{55}	7.2982	v_{55}	0	u_{87}	23.4697	v_{87}	0
u_{24}	0	v_{24}	18.3107	u_{56}	0	v_{56}	10.3054	u_{88}	32.4661	v_{88}	0
u_{25}	0	v_{25}	0.9107	u_{57}	0	v_{57}	20.0857	u_{89}	70.4518	v_{89}	0
u_{26}	0	v_{26}	40.4321	u_{58}	0	v_{58}	26.4625	u_{90}	20.7179	v_{90}	0
u_{27}	8.4607	v_{27}	0	u_{59}	0	v_{59}	83.5679	u_{91}	33.6125	v_{91}	0
u_{28}	35.5572	v_{28}	0	u_{60}	0	v_{60}	35.1053	u_{92}	0	v_{92}	28.9107
u_{29}	45.9714	v_{29}	0	u_{61}	0.6197	v_{61}	0	u_{93}	0	v_{93}	16.3696
u_{30}	0	v_{30}	0	u_{62}	8.9911	v_{62}	0	u_{94}	0	v_{94}	5.6304
u_{31}	19.7071	v_{31}	0	u_{63}	0	v_{63}	5.7464	u_{95}	0	v_{95}	83.5643
u_{32}	14.2107	v_{32}	0	u_{64}	21.5572	v_{64}	0	u_{96}	0	v_{96}	93.1678

EK-6. Uygulama 1 için LINDO programı $\tau = 0.75$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	410.6625	b_1	-41.8125								
u_1	0	v_1	50.425	u_{33}	0	v_{33}	55.6062	u_{65}	29.5438	v_{65}	0
u_2	0	v_2	60.625	u_{34}	0	v_{34}	71.3187	u_{66}	0	v_{66}	1.4875
u_3	0	v_3	41.25	u_{35}	0	v_{35}	62.0188	u_{67}	0	v_{67}	17.4875
u_4	0	v_4	15.2563	u_{36}	0	v_{36}	28.8125	u_{68}	0	v_{68}	0
u_5	11.3562	v_5	0	u_{37}	20.3875	v_{37}	0	u_{69}	0	v_{69}	49.55
u_6	22.3875	v_6	0	u_{38}	0	v_{38}	74.6312	u_{70}	0	v_{70}	46.1687
u_7	0	v_7	0.3562	u_{39}	0	v_{39}	20.3687	u_{71}	0	v_{71}	78.05
u_8	0	v_8	12.5812	u_{40}	5.7312	v_{40}	0	u_{72}	0	v_{72}	71.0563
u_9	0	v_9	41.3562	u_{41}	44.4188	v_{41}	0	u_{73}	0	v_{73}	62.5938
u_{10}	0	v_{10}	65.4875	u_{42}	11.0563	v_{42}	0	u_{74}	0	v_{74}	30.3
u_{11}	0	v_{11}	86.6	u_{43}	5.7875	v_{43}	0	u_{75}	0	v_{75}	23.625
u_{12}	0	v_{12}	140.125	u_{44}	3.1875	v_{44}	0	u_{76}	0.0562	v_{76}	0
u_{13}	0	v_{13}	25.5188	u_{45}	0	v_{45}	16.5	u_{77}	11.6875	v_{77}	0
u_{14}	0	v_{14}	23.1813	u_{46}	0	v_{46}	55.6687	u_{78}	0	v_{78}	13.8125
u_{15}	0	v_{15}	3.8938	u_{47}	0	v_{47}	94.6	u_{79}	0	v_{79}	19.0625
u_{16}	14.1062	v_{16}	0	u_{48}	0	v_{48}	26.9288	u_{80}	0	v_{80}	28.25
u_{17}	31.8375	v_{17}	0	u_{49}	0	v_{49}	16.9125	u_{81}	0	v_{81}	45.975
u_{18}	0	v_{18}	6.875	u_{50}	0	v_{50}	15.475	u_{82}	0	v_{82}	33.375
u_{19}	0	v_{19}	37.4	u_{51}	0	v_{51}	13.9688	u_{83}	0	v_{83}	53.8938
u_{20}	3.1188	v_{20}	0	u_{52}	31.55	v_{52}	0	u_{84}	0	v_{84}	83.2188
u_{21}	0	v_{21}	24.175	u_{53}	11.4188	v_{53}	0	u_{85}	0	v_{85}	66.4437
u_{22}	0	v_{22}	32.4375	u_{54}	0	v_{54}	19.6	u_{86}	0	v_{86}	51.8625
u_{23}	0	v_{23}	111.075	u_{55}	0	v_{55}	11.35	u_{87}	0	v_{87}	0
u_{24}	0	v_{24}	43.1063	u_{56}	0	v_{56}	28.7125	u_{88}	9.2375	v_{88}	0
u_{25}	0	v_{25}	25.7063	u_{57}	0	v_{57}	39.8187	u_{89}	48.1875	v_{89}	0
u_{26}	0	v_{26}	63.7813	u_{58}	0	v_{58}	47.7625	u_{90}	0.7438	v_{90}	0
u_{27}	0	v_{27}	14.4062	u_{59}	0	v_{59}	104.5062	u_{91}	14	v_{91}	0
u_{28}	12.9313	v_{28}	0	u_{60}	0	v_{60}	60.2625	u_{92}	0	v_{92}	46.9562
u_{29}	22.3812	v_{29}	0	u_{61}	0	v_{61}	26.225	u_{93}	0	v_{93}	37.1875
u_{30}	0	v_{30}	18.7687	u_{62}	0	v_{62}	15.925	u_{94}	0	v_{94}	29.1
u_{31}	0.4563	v_{31}	0	u_{63}	0	v_{63}	28.1313	u_{95}	0	v_{95}	104.7438
u_{32}	0	v_{32}	5.2813	u_{64}	0	v_{64}	1.0687	u_{96}	0	v_{96}	114.1062

EK-7. Uygulama 2 için LINDO programı $\tau = 0.25$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	145.1795	b_1	-0.1406	b_2	1.7937	b_3	-0.3483	b_4	-0.719		
u_1	0	v_1	2.1865	u_{41}	0.097	v_{41}	0	u_{81}	0.2365	v_{81}	0
u_2	0.3911	v_2	0	u_{42}	0.8576	v_{42}	0	u_{82}	1.2971	v_{82}	0
u_3	0	v_3	0.2617	u_{43}	0.976	v_{43}	0	u_{83}	1.6668	v_{83}	0
u_4	0.9465	v_4	0	u_{44}	1.5314	v_{44}	0	u_{84}	0.0948	v_{84}	0
u_5	0.7258	v_5	0	u_{45}	0.9354	v_{45}	0	u_{85}	0.8859	v_{85}	0
u_6	1.1988	v_6	0	u_{46}	1.0083	v_{46}	0	u_{86}	1.0692	v_{86}	0
u_7	2.9397	v_7	0	u_{47}	0.9701	v_{47}	0	u_{87}	0.3551	v_{87}	0
u_8	0.6218	v_8	0	u_{48}	1.9222	v_{48}	0	u_{88}	0.1746	v_{88}	0
u_9	1.1066	v_9	0	u_{49}	0.4281	v_{49}	0	u_{89}	0.9147	v_{89}	0
u_{10}	1.4015	v_{10}	0	u_{50}	0	v_{50}	0.6657	u_{90}	1.8477	v_{90}	0
u_{11}	0	v_{11}	0.112	u_{51}	0	v_{51}	0.5295	u_{91}	0	v_{91}	1.4035
u_{12}	1.8595	v_{12}	0	u_{52}	0	v_{52}	0.0739	u_{92}	1.42	v_{92}	0
u_{13}	0.3692	v_{13}	0	u_{53}	0.039	v_{53}	0	u_{93}	1.722	v_{93}	0
u_{14}	0.2518	v_{14}	0	u_{54}	0	v_{54}	0.0668	u_{94}	0	v_{94}	1.4016
u_{15}	0.2781	v_{15}	0	u_{55}	0.7481	v_{55}	0	u_{95}	1.6837	v_{95}	0
u_{16}	0.9149	v_{16}	0	u_{56}	0.1753	v_{56}	0	u_{96}	1.7725	v_{96}	0
u_{17}	1.4368	v_{17}	0	u_{57}	0.9065	v_{57}	0	u_{97}	0	v_{97}	0.613
u_{18}	1.2905	v_{18}	0	u_{58}	0.2423	v_{58}	0	u_{98}	0	v_{98}	0.147
u_{19}	0.4956	v_{19}	0	u_{59}	0.3841	v_{59}	0	u_{99}	0	v_{99}	0.4926
u_{20}	0	v_{20}	0	u_{60}	0.2554	v_{60}	0	u_{100}	0.4512	v_{100}	0
u_{21}	0.3675	v_{21}	0	u_{61}	1.1227	v_{61}	0	u_{101}	0.2664	v_{101}	0
u_{22}	0	v_{22}	0	u_{62}	0	v_{62}	0.1932	u_{102}	0.7153	v_{102}	0
u_{23}	1.4903	v_{23}	0	u_{63}	0.5601	v_{63}	0	u_{103}	0.6412	v_{103}	0
u_{24}	2.0472	v_{24}	0	u_{64}	1.3513	v_{64}	0	u_{104}	0.5997	v_{104}	0
u_{25}	0	v_{25}	1.0756	u_{65}	1.0664	v_{65}	0	u_{105}	0.3877	v_{105}	0
u_{26}	0	v_{26}	0.2045	u_{66}	0	v_{66}	0.1226	u_{106}	1.1588	v_{106}	0
u_{27}	0.0634	v_{27}	0	u_{67}	0	v_{67}	2.5787	u_{107}	2.0845	v_{107}	0
u_{28}	0.7548	v_{28}	0	u_{68}	0	v_{68}	1.4599	u_{108}	2.2062	v_{108}	0
u_{29}	0.0834	v_{29}	0	u_{69}	0	v_{69}	0	u_{109}	1.1821	v_{109}	0
u_{30}	0.3936	v_{30}	0	u_{70}	1.8835	v_{70}	0	u_{110}	0.7364	v_{110}	0
u_{31}	0.3577	v_{31}	0	u_{71}	2.5561	v_{71}	0	u_{111}	0	v_{111}	0.8193
u_{32}	0	v_{32}	0	u_{72}	0.7342	v_{72}	0	u_{112}	0.2495	v_{112}	0
u_{33}	0	v_{33}	0.0041	u_{73}	0	v_{73}	0	u_{113}	0.361	v_{113}	0
u_{34}	0.5753	v_{34}	0	u_{74}	0.5708	v_{74}	0	u_{114}	0.3939	v_{114}	0
u_{35}	0.384	v_{35}	0	u_{75}	1.1676	v_{75}	0	u_{115}	0	v_{115}	0.899
u_{36}	0	v_{36}	1.8709	u_{76}	0.3621	v_{76}	0	u_{116}	0.6108	v_{116}	0
u_{37}	1.5273	v_{37}	0	u_{77}	0.2333	v_{77}	0	u_{117}	0	v_{117}	0.2651
u_{38}	0	v_{38}	1.5773	u_{78}	0	v_{78}	0.4296	u_{118}	0.4445	v_{118}	0
u_{39}	0	v_{39}	0.9073	u_{79}	0	v_{79}	1.4322	u_{119}	1.9744	v_{119}	0
u_{40}	0.2559	v_{40}	0	u_{80}	0	v_{80}	1.8215	u_{120}	2.0427	v_{120}	0

EK-8. Uygulama 2 için LINDO programı $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	95.5192	b_1	-0.0882	b_2	1.9554	b_3	-0.321	b_4	-0.576		
u_1	0	v_1	2.5068	u_{41}	0	v_{41}	0.3054	u_{81}	0	v_{81}	0.779
u_2	0	v_2	0.2061	u_{42}	0.8317	v_{42}	0	u_{82}	0.1238	v_{82}	0
u_3	0	v_3	0.3955	u_{43}	0.9587	v_{43}	0	u_{83}	0.8209	v_{83}	0
u_4	0.5928	v_4	0	u_{44}	1.3614	v_{44}	0	u_{84}	0	v_{84}	0.5616
u_5	0	v_5	0	u_{45}	0.4115	v_{45}	0	u_{85}	0.2522	v_{85}	0
u_6	0.6746	v_6	0	u_{46}	0.3791	v_{46}	0	u_{86}	0.4891	v_{86}	0
u_7	3.0852	v_7	0	u_{47}	0.282	v_{47}	0	u_{87}	0	v_{87}	0
u_8	0	v_8	0.5318	u_{48}	1.0816	v_{48}	0	u_{88}	0	v_{88}	0.011
u_9	0.7185	v_9	0	u_{49}	0	v_{49}	0.0213	u_{89}	0.4543	v_{89}	0
u_{10}	0.6908	v_{10}	0	u_{50}	0	v_{50}	1.0362	u_{90}	1.2276	v_{90}	0
u_{11}	0	v_{11}	0.5588	u_{51}	0	v_{51}	0.6247	u_{91}	0	v_{91}	1.5432
u_{12}	1.06	v_{12}	0	u_{52}	0	v_{52}	0.3232	u_{92}	0.8888	v_{92}	0
u_{13}	0	v_{13}	0.1812	u_{53}	0	v_{53}	0.3939	u_{93}	1.604	v_{93}	0
u_{14}	0	v_{14}	0.1208	u_{54}	0	v_{54}	0.5491	u_{94}	0	v_{94}	2.1173
u_{15}	0.2504	v_{15}	0	u_{55}	0.4808	v_{55}	0	u_{95}	0.7391	v_{95}	0
u_{16}	0.8506	v_{16}	0	u_{56}	0	v_{56}	0.0544	u_{96}	0.8736	v_{96}	0
u_{17}	0.5684	v_{17}	0	u_{57}	0.9568	v_{57}	0	u_{97}	0	v_{97}	1.1182
u_{18}	0.9509	v_{18}	0	u_{58}	0	v_{58}	0	u_{98}	0	v_{98}	0.7374
u_{19}	0	v_{19}	0	u_{59}	0	v_{59}	0.1484	u_{99}	0	v_{99}	0.3305
u_{20}	0	v_{20}	0.966	u_{60}	0	v_{60}	0.3578	u_{100}	0.517	v_{100}	0
u_{21}	0.0999	v_{21}	0	u_{61}	0.5203	v_{61}	0	u_{101}	0.0372	v_{101}	0
u_{22}	0	v_{22}	0.0899	u_{62}	0	v_{62}	0.5656	u_{102}	0.4815	v_{102}	0
u_{23}	0.5928	v_{23}	0	u_{63}	0.1554	v_{63}	0	u_{103}	0.6282	v_{103}	0
u_{24}	1.2137	v_{24}	0	u_{64}	0.7329	v_{64}	0	u_{104}	0.4682	v_{104}	0
u_{25}	0	v_{25}	1.6312	u_{65}	0.4577	v_{65}	0	u_{105}	0	v_{105}	0.1692
u_{26}	0	v_{26}	0.5436	u_{66}	0	v_{66}	0.9831	u_{106}	0.0119	v_{106}	0
u_{27}	0	v_{27}	0.0401	u_{67}	0	v_{67}	4.059	u_{107}	0.9845	v_{107}	0
u_{28}	0.1296	v_{28}	0	u_{68}	0	v_{68}	2.7199	u_{108}	1.26	v_{108}	0
u_{29}	0	v_{29}	0.5157	u_{69}	0	v_{69}	1.3225	u_{109}	0.4753	v_{109}	0
u_{30}	0	v_{30}	0.4206	u_{70}	0.6156	v_{70}	0	u_{110}	0.3559	v_{110}	0
u_{31}	0	v_{31}	0.1801	u_{71}	1.5077	v_{71}	0	u_{111}	0	v_{111}	0.9119
u_{32}	0	v_{32}	0.4947	u_{72}	0.027	v_{72}	0	u_{112}	0	v_{112}	0.1941
u_{33}	0	v_{33}	0.7672	u_{73}	0	v_{73}	0.6582	u_{113}	0	v_{113}	0.1477
u_{34}	0.0448	v_{34}	0	u_{74}	0.0529	v_{74}	0	u_{114}	0.0794	v_{114}	0
u_{35}	0	v_{35}	0.053	u_{75}	0.6178	v_{75}	0	u_{115}	0	v_{115}	1.6061
u_{36}	0	v_{36}	2.2825	u_{76}	0	v_{76}	0.1991	u_{116}	0.5909	v_{116}	0
u_{37}	0.8716	v_{37}	0	u_{77}	0	v_{77}	0.685	u_{117}	0	v_{117}	0.846
u_{38}	0	v_{38}	1.8179	u_{78}	0	v_{78}	1.1106	u_{118}	0	v_{118}	0.217
u_{39}	0	v_{39}	1.082	u_{79}	0	v_{79}	2.3407	u_{119}	1.0003	v_{119}	0
u_{40}	0	v_{40}	0	u_{80}	0	v_{80}	2.6439	u_{120}	1.1981	v_{120}	0

EK-9. Uygulama 2 için LINDO programı $\tau = 0.75$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	64.6353	b_1	-0.0522	b_2	1.8723	b_3	-0.3288	b_4	-0.4534		
u_1	0	v_1	3.4246	u_{41}	0	v_{41}	0.8729	u_{81}	0	v_{81}	1.1494
u_2	0	v_2	1.1867	u_{42}	0.1032	v_{42}	0	u_{82}	0	v_{82}	0.1282
u_3	0	v_3	1.4618	u_{43}	0.3085	v_{43}	0	u_{83}	0.2203	v_{83}	0
u_4	0.0054	v_4	0	u_{44}	0.5937	v_{44}	0	u_{84}	0	v_{84}	1.5055
u_5	0	v_5	0.5638	u_{45}	0	v_{45}	0.3071	u_{85}	0	v_{85}	0.7376
u_6	0	v_6	0.075	u_{46}	0	v_{46}	0.3665	u_{86}	0	v_{86}	0.1611
u_7	2.3095	v_7	0	u_{47}	0	v_{47}	0.4842	u_{87}	0	v_{87}	0.9038
u_8	0	v_8	1.0335	u_{48}	0.445	v_{48}	0	u_{88}	0	v_{88}	0.9511
u_9	0	v_9	0	u_{49}	0	v_{49}	0.4346	u_{89}	0	v_{89}	0.1744
u_{10}	0	v_{10}	0	u_{50}	0	v_{50}	1.9911	u_{90}	0.6247	v_{90}	0
u_{11}	0	v_{11}	1.3461	u_{51}	0	v_{51}	1.7462	u_{91}	0	v_{91}	1.9702
u_{12}	0.392	v_{12}	0	u_{52}	0	v_{52}	1.0712	u_{92}	0.3581	v_{92}	0
u_{13}	0	v_{13}	0.9179	u_{53}	0	v_{53}	0.8956	u_{93}	0.7645	v_{93}	0
u_{14}	0	v_{14}	1.0174	u_{54}	0	v_{54}	1.0232	u_{94}	0	v_{94}	2.5983
u_{15}	0	v_{15}	0.5577	u_{55}	0	v_{55}	0.0339	u_{95}	0.2072	v_{95}	0
u_{16}	0.0194	v_{16}	0	u_{56}	0	v_{56}	0.5204	u_{96}	0.2228	v_{96}	0
u_{17}	0	v_{17}	0.0091	u_{57}	0	v_{57}	0	u_{97}	0	v_{97}	2.0243
u_{18}	0.2414	v_{18}	0	u_{58}	0	v_{58}	0.7567	u_{98}	0	v_{98}	1.6417
u_{19}	0	v_{19}	0.4555	u_{59}	0	v_{59}	0.8867	u_{99}	0	v_{99}	1.0138
u_{20}	0	v_{20}	1.383	u_{60}	0	v_{60}	1.1354	u_{100}	0	v_{100}	0.1612
u_{21}	0	v_{21}	0.4534	u_{61}	0	v_{61}	0.1504	u_{101}	0	v_{101}	0.4998
u_{22}	0	v_{22}	1.0648	u_{62}	0	v_{62}	1.323	u_{102}	0	v_{102}	0.0382
u_{23}	0	v_{23}	0.0475	u_{63}	0	v_{63}	0.6451	u_{103}	0.1657	v_{103}	0
u_{24}	0.6354	v_{24}	0	u_{64}	0.0418	v_{64}	0	u_{104}	0.0603	v_{104}	0
u_{25}	0	v_{25}	2.5034	u_{65}	0	v_{65}	0.1406	u_{105}	0	v_{105}	0.4884
u_{26}	0	v_{26}	1.3266	u_{66}	0	v_{66}	1.393	u_{106}	0	v_{106}	0.4033
u_{27}	0	v_{27}	0.8529	u_{67}	0	v_{67}	4.0654	u_{107}	0.5475	v_{107}	0
u_{28}	0	v_{28}	0.2279	u_{68}	0	v_{68}	2.8377	u_{108}	0.672	v_{108}	0
u_{29}	0	v_{29}	1.0081	u_{69}	0	v_{69}	1.5577	u_{109}	0	v_{109}	0.0565
u_{30}	0	v_{30}	0.9568	u_{70}	0.1493	v_{70}	0	u_{110}	0	v_{110}	0
u_{31}	0	v_{31}	0.6001	u_{71}	0.8443	v_{71}	0	u_{111}	0	v_{111}	1.5012
u_{32}	0	v_{32}	0.9239	u_{72}	0	v_{72}	0.6128	u_{112}	0	v_{112}	0.6509
u_{33}	0	v_{33}	1.1299	u_{73}	0	v_{73}	1.4113	u_{113}	0	v_{113}	0.6185
u_{34}	0	v_{34}	0.6169	u_{74}	0	v_{74}	0.4894	u_{114}	0	v_{114}	0.4389
u_{35}	0	v_{35}	0.7255	u_{75}	0.1707	v_{75}	0	u_{115}	0	v_{115}	1.8215
u_{36}	0	v_{36}	3.0868	u_{76}	0	v_{76}	0.5597	u_{116}	0	v_{116}	0
u_{37}	0.3015	v_{37}	0	u_{77}	0	v_{77}	0.9837	u_{117}	0	v_{117}	1.2471
u_{38}	0	v_{38}	2.7856	u_{78}	0	v_{78}	1.5261	u_{118}	0	v_{118}	0.6552
u_{39}	0	v_{39}	2.0052	u_{79}	0	v_{79}	2.5756	u_{119}	0.5654	v_{119}	0
u_{40}	0	v_{40}	0.6562	u_{80}	0	v_{80}	2.7566	u_{120}	0.9243	v_{120}	0

EK-10. Uygulama 3 için LINDO programı $\tau = 0.25$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	38.389	b_1	0.4515	b_2	0.009	b_3	-0.2396				
u_1	0.2671	v_1	0	u_{16}	0	v_{16}	0	u_{31}	0.0494	v_{31}	0
u_2	0	v_2	0.0945	u_{17}	0	v_{17}	0.2734	u_{32}	12.534	v_{32}	0
u_3	0.2407	v_3	0	u_{18}	0.1505	v_{18}	0	u_{33}	0.2219	v_{33}	0
u_4	0.1211	v_4	0	u_{19}	0.7196	v_{19}	0	u_{34}	0	v_{34}	0.2803
u_5	0	v_5	0.1989	u_{20}	0.6211	v_{20}	0	u_{35}	0.5402	v_{35}	0
u_6	0.8142	v_6	0	u_{21}	0.2159	v_{21}	0	u_{36}	0.613	v_{36}	0
u_7	0.2378	v_7	0	u_{22}	0.6701	v_{22}	0	u_{37}	0.3583	v_{37}	0
u_8	0.0264	v_8	0	u_{23}	0.4483	v_{23}	0	u_{38}	0.4539	v_{38}	0
u_9	0.5539	v_9	0	u_{24}	0.6513	v_{24}	0	u_{39}	0.6471	v_{39}	0
u_{10}	0.7691	v_{10}	0	u_{25}	0	v_{25}	0	u_{40}	0.6833	v_{40}	0
u_{11}	0	v_{11}	0.07	u_{26}	0.0457	v_{26}	0	u_{41}	11.999	v_{41}	0
u_{12}	15.702	v_{12}	0	u_{27}	0.8732	v_{27}	0	u_{42}	10.938	v_{42}	0
u_{13}	0	v_{13}	0	u_{28}	0	v_{28}	0	u_{43}	0.4441	v_{43}	0
u_{14}	0	v_{14}	0.436	u_{29}	0	v_{29}	0.2805	u_{44}	0.4308	v_{44}	0
u_{15}	0	v_{15}	0.2008	u_{30}	0.1134	v_{30}	0	u_{45}	0.5875	v_{45}	0

EK-11. Uygulama 3 için LINDO programı $\tau = 0.50$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	43.621	b_1	-0.091	b_2	0.013	b_3	-0.2425				
u_1	0	v_1	0.0106	u_{16}	0	v_{16}	0.1361	u_{31}	0	v_{31}	0.2323
u_2	0	v_2	0.352	u_{17}	0	v_{17}	0.5547	u_{32}	1.074	v_{32}	0
u_3	0.0008	v_3	0	u_{18}	0	v_{18}	0	u_{33}	0	v_{33}	0.0356
u_4	0	v_4	0.1565	u_{19}	0.5939	v_{19}	0	u_{34}	0	v_{34}	0.5202
u_5	0	v_5	0.4647	u_{20}	0.3604	v_{20}	0	u_{35}	0	v_{35}	0
u_6	0.3277	v_6	0	u_{21}	0	v_{21}	0.0188	u_{36}	0.2468	v_{36}	0
u_7	0.1006	v_7	0	u_{22}	0.3439	v_{22}	0	u_{37}	0	v_{37}	0
u_8	0	v_8	0.1012	u_{23}	0.285	v_{23}	0	u_{38}	0.1563	v_{38}	0
u_9	0.4457	v_9	0	u_{24}	0.4642	v_{24}	0	u_{39}	0.3347	v_{39}	0
u_{10}	0.5815	v_{10}	0	u_{25}	0	v_{25}	0.4233	u_{40}	0.2052	v_{40}	0
u_{11}	0	v_{11}	0.3914	u_{26}	0	v_{26}	0.1492	u_{41}	0.8355	v_{41}	0
u_{12}	12.015	v_{12}	0	u_{27}	0.7547	v_{27}	0	u_{42}	0.8047	v_{42}	0
u_{13}	0	v_{13}	0.4857	u_{28}	0	v_{28}	0.2786	u_{43}	0	v_{43}	0
u_{14}	0	v_{14}	0.6652	u_{29}	0	v_{29}	0.5261	u_{44}	0.1155	v_{44}	0
u_{15}	0	v_{15}	0.479	u_{30}	0	v_{30}	0.3219	u_{45}	0.2488	v_{45}	0

EK-12. Uygulama 3 için LINDO programı $\tau = 0.75$ için Quantile Regresyon Analizi Sonuçları

b_0	47.341	b_1	0.3299	b_2	0.0073	b_3	-0.2517				
u_1	0	v_1	0.3637	u_{16}	0	v_{16}	0.6058	u_{31}	0	v_{31}	0.573
u_2	0	v_2	0.7098	u_{17}	0	v_{17}	0.9448	u_{32}	0.6166	v_{32}	0
u_3	0	v_3	0.3841	u_{18}	0	v_{18}	0.4593	u_{33}	0	v_{33}	0.445
u_4	0	v_4	0.5014	u_{19}	0.1114	v_{19}	0	u_{34}	0	v_{34}	0.9397
u_5	0	v_5	0.7882	u_{20}	0	v_{20}	0	u_{35}	0	v_{35}	0.1562
u_6	0.1969	v_6	0	u_{21}	0	v_{21}	0.448	u_{36}	0	v_{36}	0.0018
u_7	0	v_7	0.3972	u_{22}	0	v_{22}	0	u_{37}	0	v_{37}	0.2732
u_8	0	v_8	0.5776	u_{23}	0	v_{23}	0.2176	u_{38}	0	v_{38}	0.1548
u_9	0	v_9	0.0734	u_{24}	0	v_{24}	0	u_{39}	0.0147	v_{39}	0
u_{10}	0.1285	v_{10}	0	u_{25}	0	v_{25}	0.6601	u_{40}	0	v_{40}	0
u_{11}	0	v_{11}	0.7265	u_{26}	0	v_{26}	0.5879	u_{41}	0.5533	v_{41}	0
u_{12}	0.9244	v_{12}	0	u_{27}	0.1746	v_{27}	0	u_{42}	0.4524	v_{42}	0
u_{13}	0	v_{13}	0.7014	u_{28}	0	v_{28}	0.6964	u_{43}	0	v_{43}	0.31
u_{14}	0	v_{14}	10.663	u_{29}	0	v_{29}	0.9147	u_{44}	0	v_{44}	0.2274
u_{15}	0	v_{15}	0.8574	u_{30}	0	v_{30}	0.5846	u_{45}	0	v_{45}	0.0393