T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEHİR AKIMLARININ KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İLE MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Nuri PEKÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
KONYA, 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEHİR AKIMLARININ KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İLE MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Nuri PEKÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez 03/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir

Prof. Dr. Ali BERKTAY
(Üye)

Doç. Dr. Mustafa MAMAK
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ONÜÇYILDIZ
(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEHİR AKIMLARININ KONVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İLE MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Nuri PEKÇETİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa MAMAK

2010, 100 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Ali BERKTAY
Doç. Dr. Mustafa MAMAK
Yrd. Doç. Dr. Mustafa ONÜÇYILDIZ

Sığ sulardaki tuzluluk, nehir, kıyı ve yeraltı sularındaki kirlilik ve askı maddesi taşınımının matematiksel modellemesi, konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümünü içermektedir. Parabolik kısmi diferansiyel bir denklem olan konveksiyon-difüzyon denklemine uygun ayrıklaştırma işlemleri uygulanmıştır. Matematiksel modelleme için sayısal yöntem olarak açık tip sonlu fark yöntemlerinden Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi, Upwind-Differencing Yöntemi, Higher-Order Yöntemi, Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Açık Tip MacCormack Yöntemi kullanılmıştır. Kararlılık şartı olarak von Neumann kararlılık analizinden faydalanılmıştır. Bu çalışmada uzunluğu, akım hızı ve difüzyon katsayısı bilinen bir akarsu parçasına, belirli bir noktadan bırakılan konsantrasyon miktarı belirli sıvı kirleticinin zamanla dağılıp yayılması bir boyutlu olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Her bir sayısal yöntem için zaman adımlarına bağlı hata oranları ve bu hata oranlarına göre de genel bir hata oranı elde edilmiştir. Sonuç olarak analitik çözüme en yakın çözümün Açık Tip MacCormack Yöntemine ait olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon-Difüzyon Denklemi, Açık Tip Sonlu Fark Yöntemleri, Matematiksel Modelleme, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği, Kirletici Konsantrasyonu.

ABSTRACT

Master Thesis

MATHEMATICAL MODELLING OF RIVER FLOWS WITH THE USE OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

Nuri PEKÇETIN

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Civil Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa MAMAK

2010, 100 pages

Jury: Prof. Dr. Ali BERKTAY
Assoc. Prof. Dr. Mustafa MAMAK
Asist. Prof. Dr. Mustafa ONÜÇYILDIZ

Mathematical modelling of the transport of salinity, pollutants at river, coast and groundwater and suspended matter in shallow waters involves the numerical solution of a convection-diffusion equation. Discretization process appropriate to convection-diffusion equation which is a parabolic partial differential equation was applied. For mathematical modelling, The Explicit FTCS and Lax's Method, Upwind-Differencing Method, Higher-Order Method, The Explicit CTCS and DuFort-Frankel's Method and MacCormack's Explicit Method were used from explicit finite difference methods as numerical methods. Von Neumann stability analysis was used for the numerical methods. In this study, length, flow rate and diffusion coefficient of a known piece of river, from a certain point, and spread a liquid dispersion of pollutants over time were examined as one-dimensional. Each time step for numerical methods based on error rates and error rate according to the general error rate was obtained. The results obtained were compared with analytical results. Closest to the analytical solution as a result of the solution was determined to belong to MacCormack's Explicit Method.

Keywords: Convection-Diffusion Equation, Explicit Finite Difference Methods, Mathematical Modelling, Computational Fluid Dynamics, Concentration of Conservative Pollutants.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda bilgisi ve tecrübesi ile daima bana yol gösteren danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa MAMAK'a, çalışmalarımı rahatlıkla yapmam için gerekli şartları sağlayan Sayın Prof. Dr. M. Yaşar KALTAKCI ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa ONÜÇYILDIZ'a, pratik çözüm yöntemleri ile hızla ilerlememi sağlayan Sayın Yrd. Doç. Dr. Meral BÜYÜKYILDIZ'a, maddi ve manevi, her zaman arkamda duran çok değerli annem, babam ve kız kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **4**

3. MATERYAL VE METOT **7**

3.1. Konveksiyon-Difüzyon Denklemi 7
3.1.1. Moleküler difüzyon 7
3.1.2. Türbülans difüzyonu 11
3.1.3. Konveksiyon 14
3.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler 17
3.3. Sonlu Fark Yöntemi 22
3.3.1. Açık tip ftcs ve Lax yöntemi 26
3.3.2. Upwind-differencing yöntemi 27
3.3.3. Higher-order yöntemi 28
3.3.4. Açık tip ctcs ve DuFort-Frankel yöntemi 28
3.3.5. Açık tip MacCormack yöntemi 29

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA **31**

4.1. Analitik Çözüm 32
4.2. Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi ile Çözüm 36
4.3. Upwind-Differencing Yöntemi ile Çözüm 39
4.4. Higher-Order Yöntemi ile Çözüm 43
4.5. Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Çözüm 46
4.6. Açık Tip MacCormack Yöntemi ile Çözüm 50
4.7. Hata Analizi 53
4.8. Karma Yöntemler 69
4.8.1. Ctcs+ftcs karma yöntemi 69
4.8.2. Ctcs+higher-order karma yöntemi 75
4.8.3. Upwind-differencing+ftcs karma yöntemi 81
4.8.4. Upwind-differencing+higher-order karma yöntemi 87

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **95**

KAYNAKLAR **97**

ÖZGEÇMİŞ **100**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A	:	Akımın içinden geçtiği kesit alanı (m^2)
C	:	Konsantrasyon miktarı (kg/m^3 veya N/m^3 veya $adet/m^3$)
c	:	Courant sayısı
D	:	Sonlu fark ifadesinin tam sonucu
H	:	Yüksek mertebeden terim
K_d	:	Konveksiyon-difüzyon kat sayısı (m^2/s)
K_{ii}	:	Hesap koordinatlarının eksenleri ile tansörel eksenlerin paralel olması durumunda türbülans difüzyon katsayısı (m^2/s)
K_{ij}	:	Türbülans difüzyon katsayısı (m^2/s)
K_m	:	Moleküler difüzyon katsayısı (m^2/s)
K_t	:	Homojen ve izotrop türbülans difüzyon katsayısı (m^2/s)
m	:	Difüzyona uğrayan madde miktarı
N	:	Belirli bir hassasiyetteki sayısal çözüm
O	:	Hata oranı
P	:	Difüzyon doğrultusuna dik doğrultuda, birim alandan taşınan maddenin kütle debisi ($kg/s.m^2$ veya $N/s.m^2$ veya $adet/s.m^2$)
Pe	:	Péclet sayısı
r	:	İntegrasyon sabiti
S	:	Kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü
T	:	Isı miktarı
u	:	X-doğrultusundaki akım hızı (m/s)
V	:	Akım hızı (m/s)
v	:	Y-doğrultusundaki akım hızı (m/s)

w : Z-doğrultusundaki akım hızı (m/s)

α : Difüzyon sayısı

Δ : Diskriminant

Δx : X-doğrultusundaki birim mesafe aralığı (m)

Δt : Birim zaman aralığı (s)

ε : Yuvarlama hatası

ρ : Özgül ağırlık (kg/m^3)

Kısaltmalar

CTCS: Central-time, central-space

FTCS: Forward-time, central-space

1. GİRİŞ

Bir akışkan ortamına ilave edilen herhangi bir maddenin dağılıp yayılması problemi uzun yıllardan beri hidrolik ve çevre mühendislerinin ilgi alanlarından birisi olmuştur. Akışkan içerisinde madde taşınımının eksiksiz yapılmış modellenmesi; su kalitesi yönetimi, çevresel kirlenme değerlendirmesi ve hidrolik yapıların tasarımı için gereklidir.

Şehirlerdeki nüfus artışı ve buna bağlı olarak kentleşmenin yarattığı atıkların artış göstermesi, tarımsal mücadele ilaçlarının ve kimyasal gübrelerin bilinçsizce ve kontrolsüz kullanımı su kirliliğine etki eden unsurlardandır.

Su kirlenmesi, su kaynağının fiziksel, kimyasal, bakteriyolojik ve radyoaktif özelliklerinin olumsuz yönde değişmesi şeklinde olur.

Evsel ve sanayi kaynaklı atık suların arıtılmadan veya arıtma işlemine tabi tutulduktan sonra akarsu ya da deniz ekosistemine deşarjı sonucunda su kaynaklarında kirlilik oluşmaktadır. Bu kirlilik alıcı su ortamının yapısını olumsuz yönde değiştirmektedir.

Günümüzde şehirleşme, sanayileşme ve deniz taşımacılığının hızı artışı ile deniz ve akarsu kirliliğinin boyutları zaman zaman bu su kaynaklarının taşıyamayacağı sınırlara ulaşmaktadır. Kirlenmenin olumsuz etkileri özellikle yerleşim birimlerinin yakınlarında bulunan su kaynaklarında belirginleşmektedir. Bu bölgelerde kirliliğin en önemli kaynağı ise su kaynaklarına ve dolaylı olarak da denizlere yapılan kanalizasyon deşarjlarıdır. Deniz ortamına atık girişinin etkileri, atığın yapısı, deniz ortamı içinde taşınımı, ortamdaki canlı türleri, deşarj bölgesinde atığın birikimi ve kalma süresine bağlı olarak değişir (Kocamış, 2006).

Yeraltı sularının doğrudan doğruya kirlenmesi; akiferlere, kirleticiler veya kimyasal değişmelere yol açan maddeler taşıyan atık suların karışması ile olur. Dolaylı kirlenme genellikle fazla çekim veya yeraltı suyunun çok fazla kullanılması ile daha derin formasyonlardan akiferlere istenmeyen mineral bileşiklerin geçmesidir. Burada en çok görülen problem tuzluluğun artmasıdır.

Su havzalarındaki atık su kaynakları genellikle birbirinden farklıdır, ancak yine de aralarında bazı benzerlikler barındırırlar. Kaynaklarına göre su kirliliği, iki farklı sınıfta incelenmektedir:

Noktasal kirlilik, bir su havzasının su borusu veya hendek gibi belli bir noktadan kaynaklanan atıklarla kirlendiğini gösterir. Bu tür kirliliğin kaynakları arasında bir

arıtım tesisinden boşaltılan evsel atıklar, fabrika atıkları veya rögar taşkınları yer almaktadır.

Noktasal olmayan veya yayılı kirlilik ise belirli ve tek bir kaynağı olmayan, yayılmış durumdaki kirliliklere verilen addır. Bu tür kirliliğin nedeni, küçük oranda bazı kirletici maddelerin zamanla birikerek bir yerde yığılmasıdır. Bir tarım arazisinde gübrelenmiş alanlardan sızan ve zamanla biriken azotlu bileşiklerin oluşturduğu kirlilik buna en bilinen örnektir. Yine bir sel sonucunda kopan ve sürüklenen tarım ürünleri veya orman biyosferi de bu tür kirliliğe örnek olarak gösterilmektedir (Anonim, 2010).

Akarsularda sediment taşınımı, akarsu üzerine yapılan tesislerin ekonomik ömrünü azaltmakta ve tarımsal alanlara da zarar vermektedir. Özellikle baraj hazneleri gibi su depolama tesislerinde biriken katı maddeler hazne kapasitesini azaltır ve zamanla su alma ağzının tıkanmasına sebep olur. Su alma yapısının tıkanması ise haznenin fonksiyon görmez duruma gelmesi demektir.

Ayrıca akarsu taşımacılığı, taşkın kontrolü için akarsu düzenlemelerinde, su kuvveti tesislerinin tip ve yerlerinin seçiminde, viyadük, köprü gibi diğer yapıların akarsu içerisinde kalan ayaklarında meydana gelebilecek oyulma ya da yığılma miktarlarının belirlenmesi ve gerekli önlemlerin alınması bakımından katı madde taşınım miktarının tahminleri önemli bir yer tutmaktadır. Katı madde taşınımı aynı zamanda su kalitesini etkilediğinden dolayı sağlık açısından da büyük önem taşımaktadır. Çünkü katı maddelerin kirlilik taşıyıcı bir yönü vardır. Kirlenmiş suların ekolojik dengeyi bozucu birçok problemi beraberinde getirdiği ise bilinen bir gerçektir.

Askı haldeki sediment taşınımı, çözünmüş kirletici madde taşınımı ve nehirlerdeki su kalitesinin modellenmesi için konveksiyon-difüzyon denklemi önemli bir yere sahiptir. Çünkü sığ sulardaki tuzluluk, nehir, kıyı ve yeraltı sularındaki kirlilik ve askı maddesi taşınımının matematiksel modellemesi, konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümünü içermektedir (Sankaranarayanan ve ark., 1998).

Kelime anlamı bakımından difüzyon; iki akışkan maddenin kimyasal tepkimeye girmeden moleküler olarak karşılıklı girişimidir. Konveksiyon ise bir akışkanın, diğer bir akışkan akımında hız dağılımına bağlı olarak yayılmasıdır.

Akışkan hareketinin önemli bir rol oynadığı problemlerde, konveksiyon etkisi dikkate alınmalıdır. Doğada konveksiyonun yanında daima difüzyon olayı gerçekleşir; bu nedenle konveksiyon ve difüzyonu beraber ele alan yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada su ortamına noktasal bir kaynaktan bırakılan çözünmüş kirletici madde konsantrasyonu incelenmiştir. Bu durum için bir-boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin çeşitli sonlu farklar yöntemleri ile sayısal çözümleri yapılıp analitik sonuçla karşılaştırılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Lapidus ve Amundston (1952) kimyasal maddelerin nehir yataklarında absorbe edilmesini, Isenberg ve Gutfinger (1973) ince bir drenaj tabakasındaki ısı transferi olayını, Parlange (1980) suyun toprak içine sızmasını, Salmon ve ark. (1980) sığ göllerdeki kirletici dağılımını, Chaudhry ve ark. (1983) nehir sistemlerindeki sıcaklık ile ilgili kirlenmeyi, Guvanasen ve Volker (1983) yeraltı suyundaki çözünmüş tuzun dağılımını, Kumar (1983) gözenekli yapı içindeki akışı, Holly ve Usseglio-Polatera (1984) koylardaki ve deniz kıyılarındaki çözünmüş maddelerin dağılımını ve Chatwin ile Allen (1985) tuzlu suyun temiz suya karışmasını ve nehirlerdeki kirleticilerin dağılımını bir-boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemini kullanarak incelemişlerdir.

Upwind şeması (Spalding, 1972) ve düzeltilmiş akış şeması (Boris ve Book, 1973) gibi pek çok sonlu fark yöntemleri konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde kullanılmıştır. Bir diğer yöntem ise konveksiyon ve difüzyon koşullarının iki farklı yöntemle çözüldüğü ayrık-işletmen yöntemidir (Sobey, 1983; Li ve Chen, 1989).

Imam ve ark. (1983) yaptıkları çalışma ile bir sediment havuzunun sayısal modellemesini sunmuşlardır. Bu modelleme hız ve sediment konsantrasyon dağılım alanını içermektedir. Düşey hız dağılım alanı, sürekli türbülans viskozitesi ile çevrinti-taşınım akış fonksiyon denklemlerinin sonlu fark yöntemi ile elde edilmiştir. Çevrinti-taşınımı Kapalı Alternatif Doğrultu yöntemi ile ele alınmıştır. Hesaplanan düğüm noktalarındaki azami etkinliği sağlamak için çeşitli ızgara şebekeleri kullanılmıştır. Konveksiyon terimleri için ağırlıklı merkezi fark-upwind şemasından faydalanılmıştır. İki boyutlu sediment taşınım (konveksiyon-difüzyon) denklemi çevrinti-taşınım denklemi için kullanılan aynı sayısal yaklaşım ile çözülmüştür. Oluşturulan bu model, katı maddelerin düzenli ve düzensiz taşınımı için de kullanılabilir.

Noye ve Tan (1988) bir-boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için değiştirilmiş eşdeğer kısmi diferansiyel eşitliği ile avantaj sağlayan bir ayrıklaştırma kullanmışlardır. Daha sonra, Noye ve Tan (1989) bu tekniği iki-boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi için geliştirmiş, ancak yukarıda bahsedilen tekniklerin kullanımı her bir zaman adımındaki geniş ters matrislerden dolayı üç boyutlu problemlerin çözümünde güç olmuştur.

Sommeijer ve Kok (1995) üç-boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sonlu farklar yöntemi kullanarak sayısal çözümü için farklı zaman-integrasyon teknikleri

hakkında detaylı çalışmalar yapmışlardır. Bu sayısal model, değişken ve üniform olmayan akımdaki Gauss dağılımının taşınma olayındaki analitik sonuçlarla karşılaştırılarak doğruluğu onaylanmıştır.

Oñate ve ark. (1996) yaptıkları çalışmada difüzyon ve konveksiyon tarzı taşınım ve sıkıştırılabilir akım problemlerinin uygulama örneklerini ikinci dereceden sonlu nokta enterpolasyonları kullanarak açıklamışlardır. Sonlu nokta yöntemi, integral yaklaşımı değerlendirilmesi için nokta düzenlenmesi ile birlikte ağırlıklı en küçük kare enterpolasyonu işlemini temel alan bir yöntemdir. Bu çalışmada konveksiyon terimlerinin kararlılığı ve doğru sonuçlar elde etmede önemli rol oynayan von Neumann sınır şartları için önemli vurgular yeralmaktadır.

Lin ve Falconer (1996) haliç ve kıyı sularındaki üç boyutlu askı maddesinin sayısal modellemesi hakkında çalışma yapmışlardır. Model, askı maddesi için taşınım denklemi ve kütle ile momentum korunum denklemlerini çözmek için sonlu fark tekniği ile ilgilenmiştir. Ayrık-işletmen tekniği ve yüksek hassasiyetteki sonlu fark şeması askı maddesi taşınım denklemini çözmede kullanılmıştır. Bu model farklı akış tipleri ve sınır şartları için laboratuar ölçümleri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Aynı zamanda Birleşik Krallık'taki Humber Halicinde sediment akımının tahmininde uygulanmıştır.

Songsheng ve Jianing (1998) çok gözlü boru hatlarındaki, konveksiyon ve difüzyon etkisi altındaki kirletici madde taşınımını incelemişlerdir. Türbülanslı boru akımlarında genellikle konveksiyon tarafından kontrol edilen difüzyon denklemleri çalışmalarının ana konusunu oluşturmaktadır. Difüzyon denklemi, sayısal çözümler içeren karakteristik yöntem ile çözülen saf konveksiyon denklemine ve sonlu fark yöntemi ile çözülen difüzyon denklemine ayrılmaktadır.

Olsen ve Kjellesvig (1998) küçük bir kanalda dikey olarak yerleştirilmiş dairesel kesitli silindir bir ayak etrafındaki üç boyutlu su akışını modellemişlerdir. Bu sayısal model k-ε türbülans modeli ile Navier-Stokes denklemini çözmektedir. Bu şekilde akarsu yatağındaki kayma gerilmeleri verilmektedir. Yapılan çalışmada akarsu yatağındaki konsantrasyon için kayma gerilmesinin bir fonksiyonu olan bir formülasyon kullanılmıştır. Sedimentlerin konveksiyon difüzyon denklemi çözümünde yataktaki konsantrasyonlardan faydalanılmıştır. Yatağın hemen üzerindeki hücrelerin sürekliliği yataktaki değişimi vermektedir. Suyun akım alanı aynı zamanda sediment konsantrasyonu ile de çözülmektedir. Akarsu yatağı ve su yüzü kotları arasındaki değişime uyumlu bir ızgara şebekesi kullanılmıştır. Çalışılan bu model, silindir ayağın etrafındaki üç boyutlu oyulma çukurunun gelişimini vermektedir. Bu çalışmada sayısal

çözümlerden elde edilen ve yersel oyulma için verilen ampirik formüller ile karşılaştırılan oyulma çukurunun maksimum derinliği elde edilmiştir.

Wu ve ark. (2000) yaptıkları çalışmada açık kanallardaki sediment taşınımı ve akımın hesaplanması için 3-boyutlu bir modelden bahsetmişlerdir. Yaptıkları bu çalışmada askı maddesi taşınımının modellemesini deneysel tortu-hızı terimi ile genel konveksiyon-difüzyon denklemi vasıtası ile gerçekleştirmişlerdir. Sürüntü maddesi taşınımının modellenmesi ise ayrıntılı kütle-dengesi denkleminden elde edilen yatak deformasyonu ve kütle eşitsizliğine dayalı bir yöntem ile yapılmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Konveksiyon-Difüzyon Denklemi

Akışkanlar mekaniğinde difüzyon ve konveksiyon üç başlık altında incelenmektedir:

Moleküler Difüzyon: Akışkan moleküllerinin karşılıklı etkileşimi ile durgun akışkanlarda veya difüzyon akışkanına göre rölatif olarak üniform hıza sahip akışkanlarda oluşur.

Türbülans Difüzyonu: Bir akışkanın, diğeri içinde türbülans etkisi ile yayılmasıdır.

Konveksiyon: Bir akışkanın, hız alanı yersel olarak değişen diğer bir akışkan içinde, hız dağılımına uygun biçimde yayılmasıdır.

Su mühendisliği problemlerinin birçoğunda akım türbülanslı olduğundan maddenin yayılmasında türbülans difüzyonu, moleküler difüzyondan daha etkilidir. Ancak moleküler difüzyon ile türbülans difüzyonu ve konveksiyon arasında görülen benzerlikler nedeni ile moleküler difüzyonun öncelikle ele alınmasında fayda vardır (Kırkgöz, 2007).

3.1.1. Moleküler difüzyon

Moleküler difüzyon aşağıda verilen ampirik Fick Kanunu ile ifade edilmektedir:

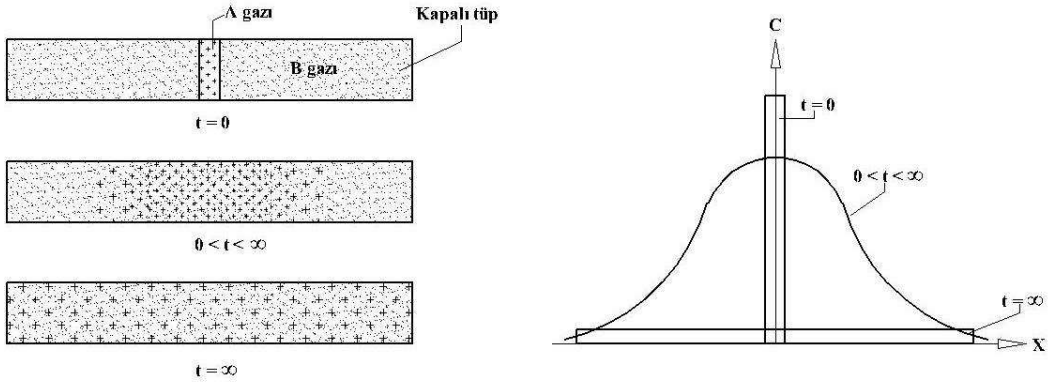
$$P=-K_m \frac{\partial C}{\partial x} \quad , \quad C=C(x,t) \quad , \quad P=P(x,t) \tag{3.1}$$

Burada;

K_m [m^2/s]	:Moleküler difüzyon katsayısı
C [kg/m^3 veya N/m^3 veya $adet/m^3$]	:Difüzyonla taşınan maddenin konsantrasyonu
X [m]	:Difüzyon doğrultusunda mesafe
P [$kg/s.m^2$ veya $N/s.m^2$ veya $adet/s.m^2$]	:x'e dik doğrultuda birim alandan taşınan maddenin kütle debisidir.

Buna göre Fick Kanunu, x'e dik doğrultuda birim alandan geçen madde debisinin moleküler difüzyon katsayısı ve madde konsantrasyonunun negatif gradyanı ile orantılı olduğunu ifade etmektedir.

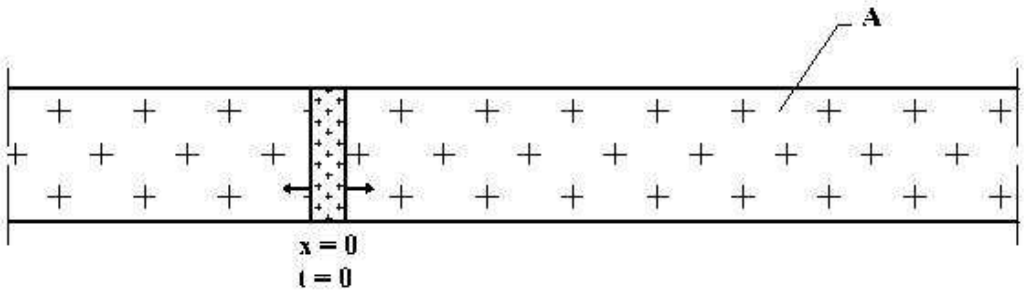
Fick ifadesinin anlamı, Şekil 3.1'de görüldüğü gibi, bir A akışkanının, B akışkanı ile dolu kapalı ince bir tüp içindeki tek boyutlu difüzyonunun gözlemlenmesi ile daha iyi anlaşılabilir.



Şekil 3.1. Fick ifadesinin anlamı

Buradaki sürekli akışkan ortamında, moleküler difüzyon, akışkan moleküllerinin gelişigüzel hareketi sonucu oluşmaktadır. Taşıyıcı akışkan ortamındaki moleküller, durgun veya üniform hıza sahip olabilir.

Şekil 3.2'de görüldüğü gibi bir tüp içindeki akışkan ortamında aynı hıza sahip veya durgun akışkan moleküllerinin x=0, t=0 durumunda konsantre olduğu düşünülsün. Burada basitlik olması açısından A ve B akışkanlarının benzer moleküler yapıya sahip olduğu varsayılmıştır. Yani aynı akışkanın self-difüzyon problemi ele alınmaktadır.



Şekil 3.2. Self difüzyon

Bir boyutlu akım için kütlenin korunumu denklemi aşağıda verildiği gibidir:

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}=0 \tag{3.2}$$

Buna göre; birim uzunluklu bir akım tüpü kontrol yüzeyinden birim zamanda çıkan net kütle ile kontrol hacmi kütlesinin birim zamandaki değişimi toplamı sıfırdır. Yukarıdaki denklem "A" kesit alanı ile bölünerek birim hacim için yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{3.3}$$

$[\rho V]=\left[kg/s.m^2\right]=[P]$ ve $[\rho]=\left[kg/m^3\right]=[C]$ olduğuna göre (3.3) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial C}{\partial t} \tag{3.4}$$

(3.4) eşitliğinde de görüldüğü gibi, birim hacimden birim zamanda net olarak çıkan molekül miktarı, aynı hacim ve zaman aralığında molekül miktarındaki azalmaya eşit olmaktadır. (3.4) denklemindeki P ifadesi yerine (3.1) denklemi ile verilen Fick Kanunu yazılırsa bir boyutlu difüzyon denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=K_m\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliği ile verilen kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$C(x,t)=\frac{r}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4K_m t}} \tag{3.6}$$

Bu ifade, x mesafesinde t zaman sonra oluşacak madde konsantrasyonunu vermektedir.

“r” integrasyon sabiti olup problemin özel çözümünden elde edilir. Bu integrasyon sabiti aşağıdaki gibi bulunabilir. Difüzyon olayının gerçekleşmesi sırasında herhangi bir anda sistemdeki difüzyona uğrayan madde miktarı:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} CAdx = A\frac{r}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4K_m t}}dx$$

şeklinde bulunabilir. Burada $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ yazılırsa elde edilen denklem aşağıdaki gibi olur:

$$m=Ar\sqrt{4\pi K_m}$$

Difüzyona uğrayan madde miktarı “m” biliniyorsa “r” integrasyon sabiti aşağıdaki gibi bulunur:

$$r=\frac{m}{A\sqrt{4\pi K_m}} \qquad (3.7)$$

(3.7) ifadesi (3.6) denkleminde yerine yazılırsa “C” için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$C=\frac{m}{A\sqrt{4\pi K_m t}}e^{-\frac{x^2}{4K_m t}} \qquad (3.8)$$

3.1.1.1 Üç boyutlu moleküler difüzyon denklemi

Süreklilik denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \text{ veya } \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho=-\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

Buradan 3-boyutlu kartezyen koordinat sistemi için süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \tag{3.9}$$

(3.9) denkleminde $\rho=C$, $\rho u=P_x$, $\rho v=P_y$, $\rho w=P_z$ yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial w} \tag{3.10}$$

(3.1) denklemi (3.10) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki 3-boyutlu difüzyon denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = K_m\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_m\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_m\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \tag{3.11}$$

K_m skaler büyüklük olarak tansör notasyonu ile difüzyon denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i\frac{\partial C}{\partial x_i} = K_m\frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i} \tag{3.12}$$

3.1.2. Türbülans difüzyonu

Difüzyona esas madde konsantrasyonu ve akımın çeşitli özellikleri, türbülans difüzyonunda gelişigüzel karaktere sahiptirler. Türbülans difüzyonunu moleküler difüzyona benzetmek mümkündür. Bunun için (3.12) denklemi kullanılır.

Türbülanslı akımda $C=\overline{C}+C'$ ve $u_i=\overline{u_i}+u_i'$ yazılırsa:

$$\frac{\partial (\overline{C}+C')}{\partial t} + (\overline{u_i}+u_i')\frac{\partial (\overline{C}+C')}{\partial x_i} = K_m\frac{\partial^2 (\overline{C}+C')}{\partial x_i \partial x_i} \tag{3.13}$$

(3.13) denklemindeki terimlerin zamansal ortalamaları alınırsa:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}+\overline{u_i'\frac{\partial C'}{\partial x_i}}=K_m\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i \partial x_i} \text{ ve } \overline{u_i'\frac{\partial C'}{\partial x_i}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{C'u_i'}\right) \text{ yazılırsa}$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}=K_m\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i \partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{C'u_i'}\right) \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) ifadesinde (3.12) ifadesinden farklı olarak ilave bir terim gelmiştir.

Bu ilave terimdeki $\overline{C'u_i'}$ değeri, $\overline{C}$ konsantrasyonuna sahip maddenin u_i doğrultusuna dik birim alandan türbülans ile oluşan ortalama taşınma debisini temsil etmektedir. $\overline{C'u_i'}$ Teriminin birimi incelenirse Fick kanunundaki P teriminin birimi ile aynı olduğu görülür.

$$\left[\overline{C'u_i'}\right]=\left[\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s}\right]=\left[\frac{kg}{s.m^2}\right]$$

Buna göre $\overline{C'u_i'}$ için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\overline{C'u_i'}=-K_{ij}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} \qquad (3.15)$$

Burada K_{ij} türbülans difüzyon katsayısını ifade etmektedir ve $\overline{C}$ skaler bir büyüklük olduğu için K_{ij} ya ikinci dereceden bir tansör ya da bir skaler olmak durumundadır. (3.15) denklemi (3.14) denkleminde kullanılırsa;

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}=K_m\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i \partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}\right) \text{ veya}$$

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}+K_m\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}\right) \qquad (3.16)$$

elde edilir.

Hesap koordinatlarının eksenleri ile tansörel eksenlerin paralel olması durumunda türbülans difüzyon katsayısı tansörünün sadece diyagonal terimleri sıfırdan farklı olur.

$$K_{ij}=\begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix}=K_{(ii)}$$

Buradan (3.15) denklemi $\overline{C'u_i'}=-K_{(ii)}\dfrac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}$ haline dönüşür ve (3.16) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(K_{(ii)}+K_m\right)\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}\right] \qquad (3.17)$$

Türbülanstan dolayı oluşan gelişigüzel hareketler, moleküler hareketten çok daha büyüktür. Buna göre $K_{(ii)} >> K_m$ olmaktadır. Böylelikle (3.17) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}_i\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{(ii)}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i}\right) \qquad (3.18)$$

Homojen- ve izotrop- olmayan difüzyon hali için türbülans difüzyon denklemi açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right) \qquad (3.19)$$

Homojen türbülans hali için $K_{(ii)} \neq f\left(x_i\right)$ olmaktadır. Buna göre (3.18) denklemi aşağıdaki hale dönüşmektedir:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} = K_{(ii)} \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i \partial x_i} \tag{3.20}$$

Homojen ve izotrop türbülans hali için $K_{(ii)}=K_t$ olmaktadır. Buna göre (3.18) denklemi aşağıdaki hale dönüşmektedir:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} = K_t \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i \partial x_i} \tag{3.21}$$

3.1.2.1. Bir boyutlu akım için homojen izotrop türbülans difüzyonu

Akım bir boyutlu olduğu için $\overline{u}_i=\overline{u}$ yazılır. Buna göre (3.21) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

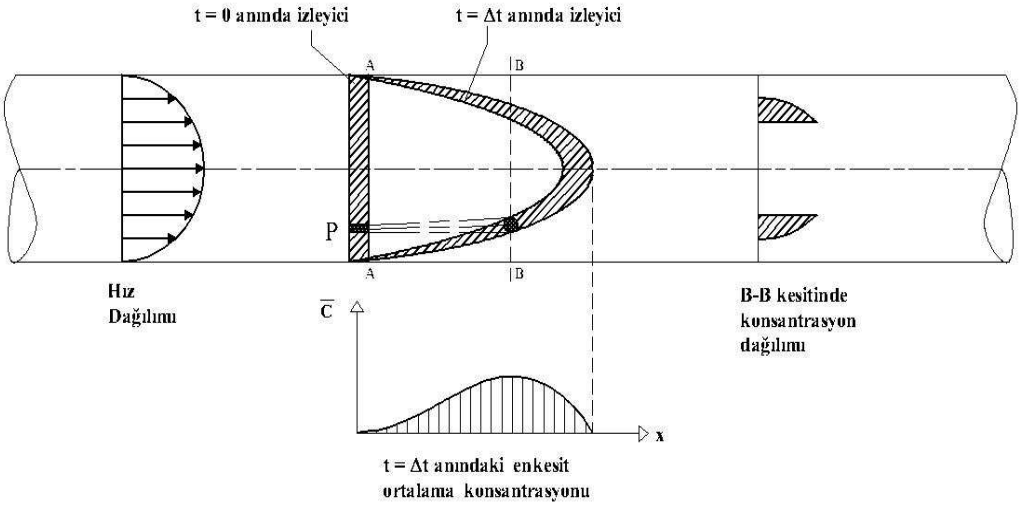
$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = K_t \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} \tag{3.22}$$

(3.22) denkleminin özel çözümü x=0 ve t=0 durumunda akıma, kütlesi m olan bir sıvı ilave edilmesi ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C(x,t) = \frac{m}{A\sqrt{4\pi K_t t}} e^{-\frac{(x-\overline{u}t)^2}{4K_t t}}$$

3.1.3. Konveksiyon

Bir akarsu veya boru enkesitinde hız dağılımı üniform karakterde değildir. Bu nedenle suya karıştırılan bir izleyici boyuna doğrultuda farklı biçimde yayılma gösterecektir. Şekil 3.3'de türbülanslı boru akımında konveksiyon-difüzyonu görülmektedir.



Şekil 3.3. Türbülanslı boru akımında konveksiyon-difüzyon

t=0 anında bir A-A kesiti üzerinde izleyici bir madde bulunduğu varsayılsın. Akışkan hız dağılımındaki farklılık nedeniyle, bu izleyici madde Δt zaman sonra üniformluktan uzaklaşarak boru boyunca dağılmaya maruz kalacaktır.

Akımda türbülans difüzyonu var olduğu sayılarak bir P noktası için aşağıdaki türbülans difüzyonu denklemi yazılabilir ($\overline{v} = \overline{w} = 0$) :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right) \tag{3.23}$$

Boru boyunca olan türbülans difüzyonu konveksiyon-difüzyonun yanında küçük olduğundan (3.23) denkleminin sağındaki ilk terim ihmal edilebilir:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right) \tag{3.24}$$

Madde konsantrasyonu ve akım hızının zamansal ortalama değerleri kesit ortalama değerleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\overline{C} = C + C' \text{ ve } \overline{u} = V + V' \tag{3.25}$$

C’ ve V’ değerleri kesit ortalamalarından sapmaları göstermektedir. Denklem (3.25) deki değerler (3.24) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(C+C'\right)+\left(V+V'\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(C+C'\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial}{\partial y}\left(C+C'\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial}{\partial z}\left(C+C'\right)\right) \tag{3.26}$$

(3.26) denkleminin türbülans difüzyon terimleri ihmal edilerek diğer terimlerin zamansal ortalamaları alınır:

$\frac{\partial C}{\partial t}+V\frac{\partial C}{\partial x}+\overline{V'\frac{\partial C'}{\partial x}}=0$ ve $\overline{V'\frac{\partial C'}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{V'C'}\right)$ yazılırsa:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+V\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{V'C'}\right)=0 \tag{3.27}$$

elde edilir. Moleküler ve türbülans difüzyonuna benzer şekilde Fick Kanunu yardımıyla:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{V'C'}\right)=-K_d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{3.28}$$

yazılabilir. K_d konveksiyon-difüzyon katsayısı olup (3.28) ifadesi (3.27) denkleminde yerine yazılırsa konveksiyon-difüzyon denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+V\frac{\partial C}{\partial x}=K_d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{3.29}$$

Bu denklem moleküler ve türbülans difüzyon denklemlerine benzer olup çözümü aşağıdaki gibidir:

$$C\left(x,t\right)=\frac{m}{A\sqrt{4\pi K_d t}}e^{-\frac{\left(x-Vt\right)^2}{4K_d t}} \tag{3.30}$$

3.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Akışkanlar dinamiğinde olayı idare eden kısmi diferansiyel denklemlerdeki yüksek mertebeden türevler, bütün durumlarda lineer olarak bulunmaktadır; yani ne çarpım ne de üstel fonksiyon şeklindedir. Bağımlı değişkenlerin fonksiyonları cinsinden katsayılar ile çarpılmışlardır. Bu tür denklem takımına quasi (yarı, sanki)-lineer sistem adı verilir. İki bağımsız değişkenli quasi-lineer ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemler üç tipe ayrılabilir: hiperbolik, parabolik ve eliptik. Bu ayırma işlemi çözüm hakkında bilgiler içeren eğrilerin karakteristik yapısına dayanmaktadır (Anderson, Jr., 1995).

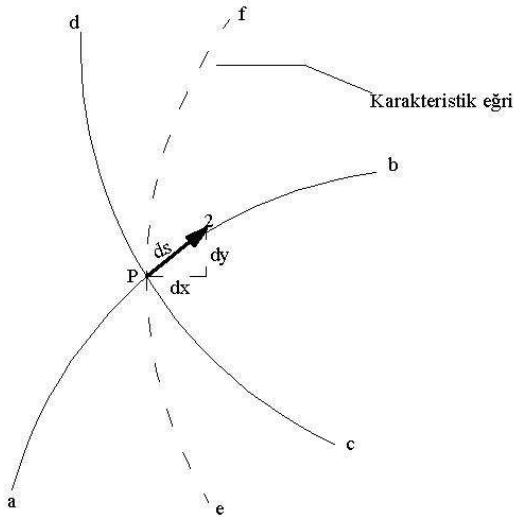
Aşağıdaki gibi bir quasi-lineer denklem takımı tanımlansın:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \tag{3.31}$$

$$a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} = f_2 \tag{3.32}$$

Burada u, v, x ve y'ye bağlı değişkenler $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1$ ve f_2 sabit katsayılar olabileceği gibi, x'e ve y'ye bağlı fonksiyonlar da olabilirler. Ayrıca u ve v, x ve y'ye göre sürekli fonksiyonlardır. u ve v ifadeleri, xy uzayında sürekli bir hız alanını temsil ediyor olabilir. xy uzayında herhangi bir noktada u ve v ifadeleri tek bir değer almaktadır. Bununla birlikte u ve v'nin türevleri, $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ bu noktada sonlu değerler almaktadır.

Şekil 3.4'de görüldüğü gibi xy düzleminde P gibi bir nokta düşünülsün. Bu noktadan geçen ve u ve v'nin türevlerinin belirsiz (tanımsız) olduğu doğrular aranmaktadır.



Şekil 3.4. Karakteristik eğri gösterimi

Aranan bu özel doğrular, karakteristik doğrular olarak bilinir. x ve y'nin toplam türevleri yazılırsa:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{3.33}$$

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \tag{3.34}$$

(3.31), (3.32), (3.33) ve (3.34) denklemleri, dört bilinmeyenli $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y)$ dört adet lineer denklem takımı oluşturur. Matris formunda yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Katsayılar matrisi [A] ile gösterilirse.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

(3.36) denklemi $\partial u/\partial x$ için Cramer kuralı ile çözülsün. [A] matrisinin birinci sütununu, (3.35) matrisinin sağ tarafındaki sütun vektörü ile değiştirip, yeni oluşan matrise [B] matrisi denilirse:

$$[B]=\begin{bmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ du & dy & 0 & 0 \\ dv & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

[A] ve [B] matrislerinin determinantı |A| ve |B| ile gösterilsin. Cramer kuralına göre $\partial u/\partial x$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|B|}{|A|} \tag{3.38}$$

şeklinde bulunur. $\partial u/\partial x$'i net olarak elde etmek için du, dv, dx ve dy değerlerinin bilinmesi gerekir. P noktasından geçen ab eğrisi ele alınsın. Bu eğri üzerinde P noktasından 2 noktasına kadar ds yolu boyunca ilerlenirse. x yönündeki değişim $dx=x_2-x_P$ ve y yönündeki değişim ise $dy=y_2-y_P$ olur. P ve 2 noktalarında u ve v değerlerinin farklı olduğu kabulü ile $du=u_2-u_P$ ve $dv=v_2-v_P$ olur. Elde edilen du, dv, dx ve dy değerleri (3.36) ve (3.37) matrislerinde yerine yazılırsa, (3.38) ifadesindeki $\partial u/\partial x$ için bir çözüme ulaşılır. $(dx \to 0,\ dy \to 0)$

Şimdi yine P noktasından geçen fakat farklı bir doğrultuda olan cd eğrisi düşünülsün. ab eğrisi için yapılan işlemler, cd eğrisi için de uygulanacak olursa, $dx \to 0$ ve $dy \to 0$ limit durumlarında $\partial u/\partial x$ için aynı değer elde edilecektir. Bu, zaten olması gereken bir durumdur; çünkü P noktasında $\partial u/\partial x$'in değeri sabittir. Burada seçilen eğrilerin doğrultuları rastgeledir.

(3.38) denkleminde |A| determinantını sıfır yapacak bir doğrultuda P noktası hareket ettirilirsin. ef eğrisi böyle bir doğrultuda olsun. Bu durumda (3.38) denkleminin paydası sıfır olacak ve $\partial u/\partial x$ ifadesinin hesaplanması mümkün olmayacaktır. $\partial u/\partial x$ ifadesi belirsiz olacak ve tanım gereği ef eğrisi, bir karakteristik eğri olarak adlandırılacaktır.

Karakteristik eğri denklemleri,

$$|A|=0 \tag{3.39}$$

eşitliği çözülerek bulunabilir. |A| ifadesinin elemanlarını hatırlanacak olursa:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} = 0 \text{ determinantı açılırsa:}$$

$$(a_1c_2-a_2c_1)(dy)^2-(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)dxdy+(b_1d_2-b_2d_1)(dx)^2=0 \tag{3.40}$$

(3.40) ifadesi $(dx)^2$ ile bölünürse:

$$(a_1c_2-a_2c_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)\frac{dy}{dx}+(b_1d_2-b_2d_1)=0 \tag{3.41}$$

(3.41) denklemi ikinci dereceden bir denklemdir ve xy düzleminde herhangi bir nokta için bu denklemin çözümü, u ve v ifadelerinin türevlerini belirsiz yapan doğruların eğimini verecektir. (3.41) denkleminde,

$$a=(a_1c_2-a_2c_1)$$
$$b=-(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)$$
$$c=(b_1d_2-b_2d_1)$$

ifadeleri yerine yazılırsa:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0 \tag{3.42}$$

elde edilir. P noktasından geçen karakteristik eğrilerin eğimleri, bu denklemin çözümünden bulunabilir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.43}$$

(3.43) denklemindeki diskriminanta $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$ bağlı olarak karakteristik eğriler farklı özellikler göstermektedir.

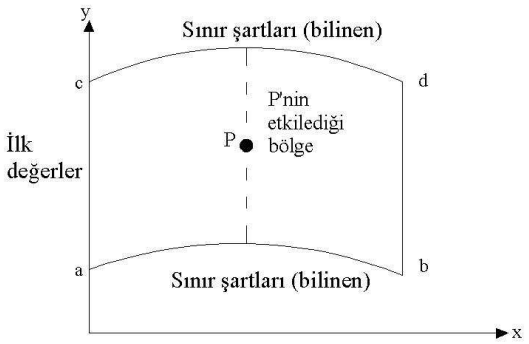
$\Delta > 0$ iki reel ve farklı değer, hiperbolik denklem

$\Delta = 0$ tek reel değer , parabolik denklem

$\Delta < 0$ karmaşık değerler , eliptik denklem

Konveksiyon-difüzyon olayını idare eden denklem yani matematiksel modelimiz parabolik bir diferansiyel denklemdir. Bu yüzden parabolik denklemler daha yakından incelenmiştir.

Şekil 3.5'deki gibi xy düzleminde P noktası düşünülsün. Parabolik bir denklem ile ilgilenildiği için sadece tek bir karakteristik doğrultu (P noktasından geçen) olacaktır. ac aralığında ilk değerler, ab ve cd eğrileri üzerinde de sınır şartları verilmiş olsun. Karakteristik doğrultu, P noktasından çizilen dik bir doğru üzerinde bulunsun. Bu durumda, P noktasında oluşacak herhangi bir hareket, düşey karakteristik ve iki sınır arasında etkili olacaktır.



Şekil 3.5 Parabolik Denklem

Parabolik denklemler ileriye adım yöntemi ile çözülmektedir. ac aralığında verilen ilk değerler kullanılarak, ab ve cd sınırları arasında kalan bölgede, x yönünde adım adım ilerleyerek çözüm yapılmaktadır (Anderson, Jr., 1995).

3.3. Sonlu Fark Yöntemi

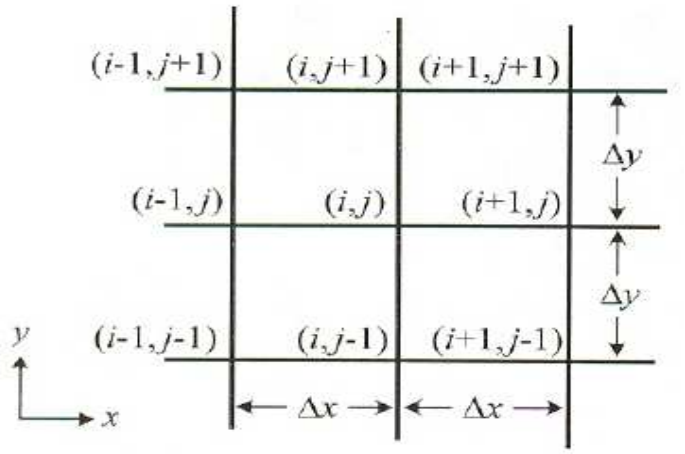
Parabolik diferansiyel denklemin sayısal çözümü için bu denkleme uygun bir ayrıklaştırma işlemi uygulanmalıdır. Yani diferansiyel denklem, ayrık zamansal ve yersel konumlara göre elde edilmiş değişkenler içeren cebirsel denklemler sistemine yakınlaşmalıdır. Denklemin ayrıklaştırılmasında temel düşünce türevler yerine fonksiyon değerlerinin kullanılmasıdır. Ayrıklaştırma işlemi için birden çok yaklaşım çeşidi vardır ama bunlardan en önemlileri: sonlu fark, sonlu hacim ve sonlu elemanlar yöntemleridir. Bu yöntemlerin her biri eğer çok hassas bir ızgara şebekesine sahipse aynı çözümü vermektedir. Ancak bazı yöntemler birtakım problemler için diğerlerine göre daha kullanışlıdır. Kısmi diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmasına sonlu farklar denilmektedir ve bu çalışmada sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır (Anderson, Jr., 1995).

Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri kapalı formdaki ifadeleri içermektedir. Bu ifadeler, etki alanının her yerinde sürekli olarak bağımlı değişkenlerin çeşitliliğini vermektedir. Buna karşın sayısal çözümler sadece etki alanındaki ayrık noktalarda cevaplar verebilirler. Bu ayrık noktalara düğüm noktası denilmektedir.

İki bağımsız değişkenli fonksiyon u ve bağımsız değişkenler x ve y olsun. Bu fonksiyonun x_i,y_j noktasındaki değeri $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ile gösterilsin. u(x,y) fonksiyonu, Şekil 3.6'da görüldüğü gibi, serbest değişkenleri Δx ve Δy gibi eşit aralıklarla sıralanan bir ızgara şebekesi üzerinde verilsin. x_i ve y_j noktası civarında $u_{i+1,j}$ ve $u_{i-1,j}$ değerleri Taylor serisi kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \tag{3.44}$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \tag{3.45}$$



Şekil 3.6 Izgara sistemi

u(x,y) fonksiyonunun (x_i,y_j) noktasında x'e göre kısmi türevi, (3.44) denkleminden, (3.45) denkleminden veya (3.44) ile (3.45) denkleminin birbirinden çıkartılmasından üç ayrı şekilde elde edilebilir. (3.44) bağıntılarında "H" ile gösterilen terim yüksek mertebeli terimlerdir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{3.48}$$

(3.46) denklemine birinci mertebe ileriden sonlu fark, (3.47) denklemine birinci mertebe geriden sonlu fark ve (3.48) denklemine birinci mertebe merkezi sonlu fark denklemi denilmektedir. u(x,y) fonksiyonunun (x_i,y_j) noktasında y'ye göre kısmi türevi de benzer şekilde bulunabilir. Denklemlerdeki "O" ifadesi hata oranlarını vermektedir.

u(x,y) fonksiyonunun (x_i,y_j) noktasında x'e göre ikinci mertebe kısmi türevini bulmak için (3.44) bağıntısındaki denklemler toplanır. Böylece (3.49) bağıntısını elde edilir. u(x,y) fonksiyonunun (x_i,y_j) noktasında y'ye göre ikinci mertebe kısmi türevini de benzer şekilde bulunabilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{3.49}$$

Sonlu fark ayrıklaştırma yönteminde açık tip (explicit) ve kapalı tip (implicit) olmak üzere iki farklı çözüm tipi mevcuttur. Açık tip yöntemde bir üst zaman dilimindeki bilinmeyenler adım adım bulunabilirken kapalı tip yöntemde bir üst zaman dilimindeki bilinmeyenlerin tümü aynı anda bulunabilmektedir. Açık tip yöntemin çözümü kolay olmakla birlikte Δx ve Δt değerleri küçük olmadıkça çözüm güvenli değildir. Kapalı tip yöntemin çözümü zor olup büyük Δx ve Δt değerlerinde bile güvenlidir (Anderson, Jr., 1995). Bu tez çalışmasında açık tip yöntemler kullanılmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçları ile denklemin analitik çözümünden elde edilen sonuçlar daima farklıdır. Bu fark ayrıklaştırma ve basamak sayılarındaki yuvarlama hatalarından dolayı olmaktadır. Hata ve kararlılık analizini anlamak için bir boyutlu ısı transfer denklemini incelenmiştir (Anderson, Jr., 1995).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.50}$$

Bu denklemin sonlu fark gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t} = \frac{K\left(T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n\right)}{\left(\Delta x\right)^2}$$

Ayrıklaştırma hatası; kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü ile sonlu fark denkleminin tam sonucu arasındaki farka eşittir. Yuvarlama hatası ise hesaplamalarda kullanılan basamak sayısından dolayı oluşan sayısal hatadır.

Eğer,

S=kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü

D=sonlu fark ifadesinin tam sonucu

N=belirli bir hassasiyetteki sayısal çözüm olarak tanımlanırsa;

$$\begin{aligned}&\text{Ayrıklaştırma hatası} = S-D\\ &\text{Yuvarlama hatası} = \varepsilon = N-D\end{aligned} \tag{3.51}$$

Buradan;

$$N = D+\varepsilon \tag{3.52}$$

olmaktadır.

N sayısal çözümü de fark denklemini sağlamak zorundadır.

$$\frac{D_i^{n+1}+\varepsilon_i^{n+1}-D_i^n-\varepsilon_i^n}{K\Delta t}=\frac{\left(D_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-2D_i^n-2\varepsilon_i^n+D_{i-1}^n+\varepsilon_{i-1}^n\right)}{(\Delta x)^2} \tag{3.53}$$

Tanım gereği, D, fark ifadesinin tam sonucu olup, fark denklemini kesin olarak sağlamaktadır. Bu durumda,

$$\frac{D_i^{n+1}-D_i^n}{K\Delta t}=\frac{\left(D_{i+1}^n-2D_i^n+D_{i-1}^n\right)}{(\Delta x)^2} \tag{3.54}$$

yazılabilir. (3.54) denklemi (3.53) denkleminden çıkartılırsa:

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{K\Delta t}=\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.55) denkleminden de görüldüğü gibi ε hatası da, fark denklemini sağlamaktadır.

Hata miktarı her adımda küçülüyor veya en azından sabit kalıyorsa, sayısal çözümümüz kararlı demektir. Kararlı bir çözüm için;

$$\left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right|\le 1 \tag{3.56}$$

şartı sağlanmalıdır.

Lineer kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümünde von Neumann kararlılık analizi, projeksiyon matris yöntemi ve süreksiz-karışıklık yöntemi gibi yöntemler mevcuttur. Bunlardan uygulanması en kolay olanı von Neumann kararlılık analizi yöntemidir.

von Neumann yöntemi lineer kısmi diferansiyel denklemlere uygulanan sonlu fark yönteminin kararlılığını kontrol etmektedir. Bu yöntem aynı zamanda Fourier kararlılık analizi olarak ta bilinmektedir. Çünkü von Neumann yöntemi, Fourier serisi açılımını temel alan bir yöntemdir (Anonymous, 2010).

Bir boyutlu kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark ile çözümü için von Neumann kararlılık analizi sonucu aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2K} \tag{3.57}$$

Hindmarsh ve Gresho (1984) bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin açık (explicit) tip sonlu fark çözümü için (3.57) eşitsizliğini temel alarak kararlılık şartını aşağıdaki gibi sunmuşlardır:

$$\Delta t \le \frac{1}{2\left[\frac{K}{(\Delta x)^2}\right] + \frac{V}{\Delta x}} \tag{3.58}$$

Sankaranarayanan ve ark. (1998) tarafından yapılan çalışmadaki akım özellikleri kullanılarak, sıvı ortamına bırakılan sıvı bir kirleticinin dağılıp yayılması, konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümleri ile incelenmiştir. Bu tez çalışmasında sayısal yöntem olarak çeşitli sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler aşağıdaki gibidir:

Açık Tip FTCS (Forward-Time Central-Space) ve Lax Yöntemi

Upwind-Differencing Yöntemi

Açık Tip CTCS (Central-Time Central-Space) ve DuFort-Frankel Yöntemi

Higher-Order Yöntemi

Açık Tip MacCormack Yöntemi

3.3.1. Açık tip ftcs ve Lax yöntemi

(3.30) eşitliği ile verilen bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi için ileri-zaman, merkezi-konum sonlu fark denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + V\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} = K_d\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \tag{3.59}$$

Burada “i” konum indisi, “n” ise zaman indisi olarak gösterilmektedir. (3.59) eşitliğinin her iki tarafı Δt ile çarpılırsa;

$$C_i^{n+1} - C_i^n + V\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x}\Delta t = K_d\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2}\Delta t \qquad (3.60)$$

elde edilir. Burada $\frac{V\Delta t}{\Delta x}$ terimine Courant Sayısı denir ve “c” ile gösterilir. $\frac{K_d\Delta t}{\Delta x^2}$ terimine ise difüzyon sayısı denir ve α ile gösterilir. Courant Sayısı’nın difüzyon sayısına oranı Péclet Sayısını (Pe) vermektedir. Buna göre:

$$Pe = \frac{c}{\alpha} = \frac{V\Delta x}{K_d} \qquad (3.61)$$

Péclet Sayısı sıfıra eşit olursa, madde taşınımında konveksiyon olayı görülmemektedir. Bu durumda saf difüzyon oluşmaktadır. Péclet Sayısı sonsuza gidiyorsa, madde taşınımında difüzyon olayı gerçekleşmemektedir. Bu durumda saf konveksiyon meydana gelmektedir.

(3.60) denklemi düzenlenip, tekrar yazılırsa Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi denklemi elde edilir:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{c}{2}\left(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n\right) + \alpha\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right) \qquad (3.62)$$

Bu yöntemin kararlı olması için $c^2<2\alpha<1$ şartı sağlanmalıdır (Pozrikidis, 1997).

3.3.2. Upwind-differencing yöntemi

Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminde birinci derece konumsal türev ifadesi için geriden sonlu fark, ikinci derece konumsal türev ifadesi için merkezi sonlu fark ve zamansal türev ifadesi için de ileriden sonlu fark denklemleri yazılırsa (3.63) eşitliği elde edilir.

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+V\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}=K_d\frac{C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n}{\Delta x^2}+O(\Delta t)+O(\Delta x) \quad (3.63)$$

(3.63) denklemi Δt ile çarpılıp yeniden düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$C_i^{n+1}=C_i^n-c\left(C_i^n-C_{i-1}^n\right)+\alpha\left(C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n\right) \quad (3.64)$$

Bu yöntemin kararlı olması için $c^2<c+2\alpha<1$ şartı sağlanmalıdır (Pozrikidis, 1997).

3.3.3. Higher-order yöntemi

Bu yöntem Upwind-Differencing Yönteminin bir takım bilim adamı tarafından geliştirilmesi ile elde edilmiştir. Higher-order yönteminde de bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemindeki zamansal türev ifadesi için ileriden sonlu fark ve ikinci derece konumsal türev ifadesi için merkezi sonlu fark denklemleri kullanılmıştır. Birinci konumsal türev ifadesi için ise üçüncü mertebe geriden sonlu fark denklemi kullanılmıştır.

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+V\frac{2C_{i+1}^n+3C_i^n-6C_{i-1}^n+C_{i-2}^n}{6\Delta x}=K_d\frac{C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n}{\Delta x^2}+O(\Delta t)+O(\Delta x^2) \quad (3.65)$$

(3.62) denklemi Δt ile çarpılıp tekrar düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$C_i^{n+1}=C_i^n-\frac{c}{6}\left(2C_{i+1}^n+3C_i^n-6C_{i-1}^n+C_{i-2}^n\right)+\alpha\left(C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n\right) \quad (3.66)$$

Kararlılık şartı upwind-differencing yöntemindeki gibidir (Pozrikidis, 1997).

3.3.4. Açık tip ctcs ve DuFort-Frankel yöntemi

Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi için merkezi-zaman ve merkezi-konum sonlu fark denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^{n-1}}{2\Delta t}+V\frac{C_{i+1}^{n}-C_{i-1}^{n}}{2\Delta x}=K_d\frac{C_{i+1}^{n}-2C_i^{n}+C_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}+O(\Delta t^2)+O(\Delta x^2) \tag{3.67}$$

(3.67) eşitliğindeki ikinci derece merkezi sonlu fark ifadesi için DuFort ve Frankel (1953) bir düzeltme sunmuşlardır. Bu düzeltmeye göre;

$$C_i^{n}=\frac{C_i^{n+1}+C_i^{n-1}}{2} \tag{3.68}$$

olmalıdır. (3.68) ifadesi (3.69) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^{n-1}}{2\Delta t}+V\frac{C_{i+1}^{n}-C_{i-1}^{n}}{2\Delta x}=K_d\frac{C_{i+1}^{n}-2\left[\frac{1}{2}\left(C_i^{n+1}+C_i^{n-1}\right)\right]+C_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} \tag{3.69}$$

(3.69) eşitliğinin iki tarafı da Δt ile çarpılıp yeniden düzenlenirse Açık tip CTCS ve DuFort-Frankel denklemi elde edilir:

$$C_i^{n+1}=\frac{c+2\alpha}{1+2\alpha}C_{i-1}^{n}+\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}C_i^{n-1}-\frac{c-2\alpha}{1+2\alpha}C_{i+1}^{n} \tag{3.70}$$

Bu yöntemin kararalı olması için $|c|<1$ şartı sağlanmalıdır (Pozrikidis, 1997).

3.3.5. Açık tip MacCormack yöntemi

MacCormack (1969) bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi için iki adımlı bir sonlu fark yöntemi geliştirmiştir. Buna göre ilk adımda zamansal türev ifadesi için ileri-zaman, birinci derece yersel türev ifadesi için ileri-konum ve ikinci derece yersel türev ifadesi için ise merkezi-konum sonlu fark denklemlerini kullanarak yeni bir fonksiyon elde etmiştir.

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^{n}}{\Delta t}+V\frac{C_{i+1}^{n}-C_i^{n}}{\Delta x}=K_d\frac{C_{i+1}^{n}-2C_i^{n}+C_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} \tag{3.71}$$

(3.71) denkleminin her iki tarafı Δt ile çarpılıp, denklem yeniden düzenlenirse:

$$C_i^{n+1} = (1+c)C_i^n + cC_{i+1}^n + \alpha\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right) \tag{3.72}$$

(3.72) ifadesinde $C_i^{n+1} = C_i^*$ yazılırsa ifade aşağıdaki gibi olur:

$$C_i^* = (1+c)C_i^n - cC_{i+1}^n + \alpha\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right) \tag{3.73}$$

İkinci adımda bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminde zamansal türev ifadesi için ileri-zaman, birinci derece yersel türev ifadesi için karışık (ileri-konum ve geri-konum) ve ikinci derece yersel türev ifadesi için ise merkezi-konum sonlu fark denklemlerini kullanmıştır. Birinci ve ikinci derece yersel türev ifadelerini sonlu fark denklemi şeklinde yazarken (3.73) denklemi ile gösterilen C_i^* ifadesinden yararlanmıştır (Pozrikidis, 1997).

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + \frac{V}{2}\left(\frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} + \frac{C_i^* - C_{i-1}^*}{\Delta x}\right) = K_d \frac{C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*}{\Delta x^2} \tag{3.74}$$

(3.74) denkleminin her iki tarafı Δt ile çarpılıp, denklem yeniden düzenlenirse:

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[C_i^n + C_i^* - c\left(C_i^* - C_{i-1}^*\right) + \alpha\left(C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*\right)\right] \tag{3.75}$$

Bu yöntem hem yersel hem de zamansal olarak ikinci-mertebeden bir yöntemdir ve c<0.90 ile $\alpha \leq 0.50$ olması durumunda kararlıdır (Pozrikidis, 1997).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Sankaranarayanan ve ark. (1998) tarafından yapılan çalışmada akım yönündeki akış hızı 0,8 m/s olan bir akarsuyun 9 m uzunluğundaki kısmı ele alınmıştır. Bu çalışma alanında, x-doğrultusundaki difüzyon katsayısı $K_x = 0,005\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ olarak alınmıştır. Bu tez çalışmasında akarsu parçasının başlangıcından 1 metre uzaklığa Gauss eğrisine uyumlu 1 birimlik bir kirletici bırakılıp, 5 saniye boyunca çalışma alanında dağılıp yayılması, dördüncü bölümde açıklanan yöntemlerle incelenmiştir.

Açık tip sonlu fark yöntemlerinin analitik değerlere yakın sonuç vermesi için küçük Δt ve Δx aralıkları seçilmesi gerektiği dördüncü bölümde bahsedilmişti. Buna göre $\Delta x = 0,025\ \mathrm{m}$ seçilip, denklem (3.58)'de yerine yazılırsa $\Delta t \le 0,0208\ \mathrm{s}$ elde edilir. Buna göre $\Delta t = 0,0125\ \mathrm{s}$ seçilmiştir.

Seçilen Δx ve Δt değerlerine göre Courant ve difüzyon sayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$c = \frac{V\Delta t}{\Delta x} = \frac{0,8x0,0125}{0,025} = 0,4 \tag{4.1}$$

$$\alpha = \frac{K_x \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0,005x0,0125}{(0,025)^2} = 0,1 \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) denklemleri kullanılarak Péclet Sayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$Pe = \frac{c}{\alpha} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \tag{4.3}$$

c ve α değerlerine göre, dördüncü bölümde verilen açık tip sonlu fark yöntemleri için kararlılık şartları aşağıda kontrol edilmiştir.

Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi için;

$0,4^2 < 2x0,1 < 1 \rightarrow 0,16 < 0,20 < 1$ olduğundan kararlılık şartı sağlanmıştır.

Upwind-Differencing yöntemi için;

$0,4^2 < 0,4+2x0,1 < 1 \rightarrow 0,16 < 0,60 < 1$ olduğundan kararlılık şartı sağlanmıştır.

Higher-Order yöntemi için kararlılık şartı, Upwind-Differencing yönteminde olduğu gibi sağlanmıştır.

Açık tip CTCS ve DuFort-Frankel yöntemi için;

|0,4|<1 olduğundan kararlılık şartı sağlanmıştır.

Açık tip MacCormack yöntemi için;

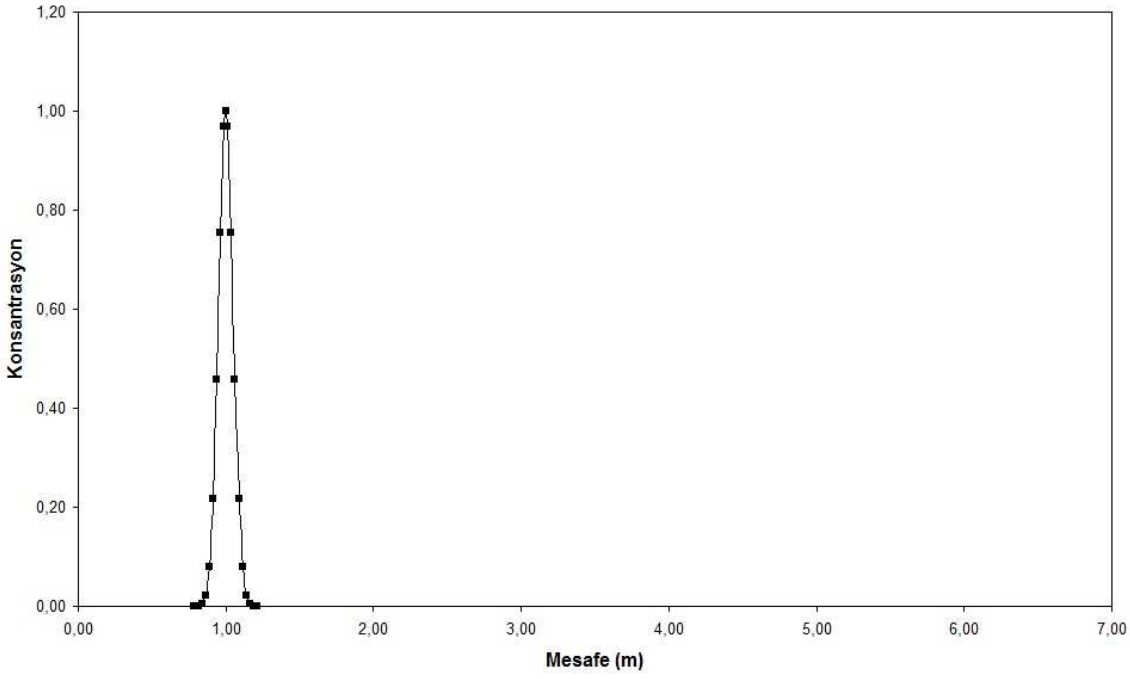
0,40<0,90 ve $0,10 \leq 0,50$ olduğundan kararlılık şartı sağlanmıştır.

4.1. Analitik Çözüm

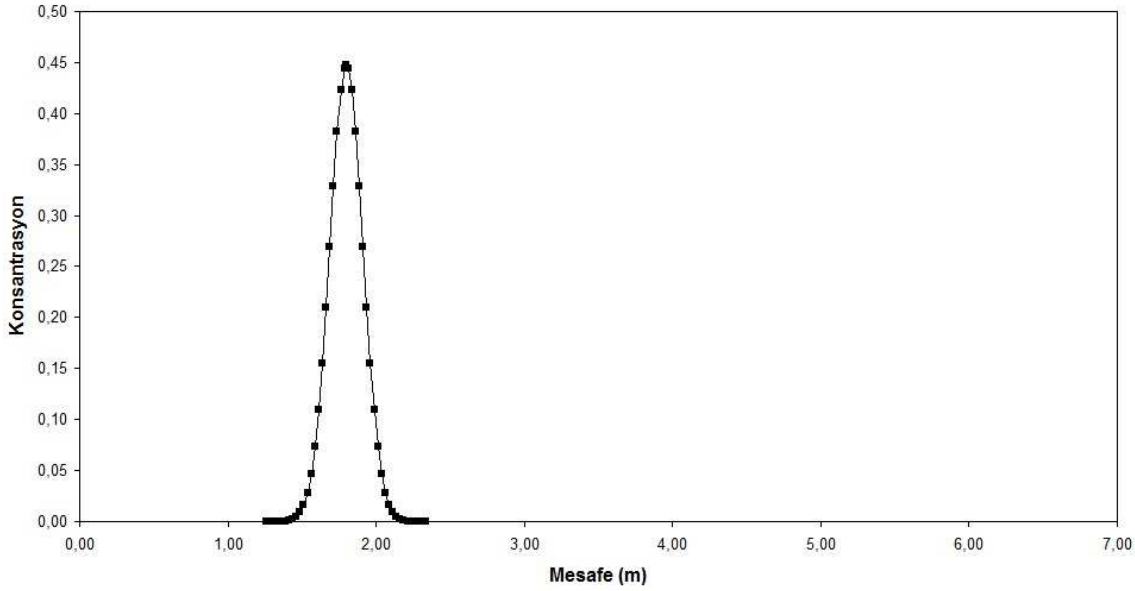
(3.30) denklemi ile verilen bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin analitik çözümü, Microsoft Excel programı kullanılarak Pe=4 için hesaplanmıştır. Çizelge 4.1'de Gauss eğrisine uygun sonuçların maksimum değerleri verilmiştir. Şekil 4.1-4.6 arasındaki grafiklerde ise bu sonuç eğrileri görülmektedir.

Çizelge 4.1. Maksimum analitik sonuçlar

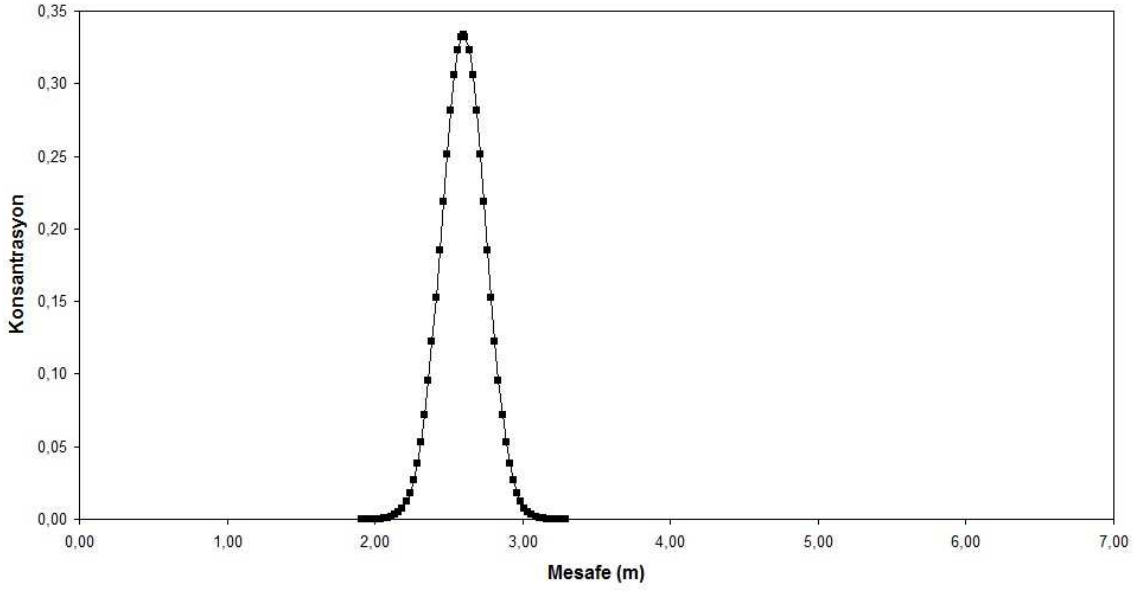
Süre t (s)	Analitik Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
0	1,000	1,00
1	0,447	1,80
2	0,333	2,60
3	0,277	3,40
4	0,243	4,20
5	0,218	5,00



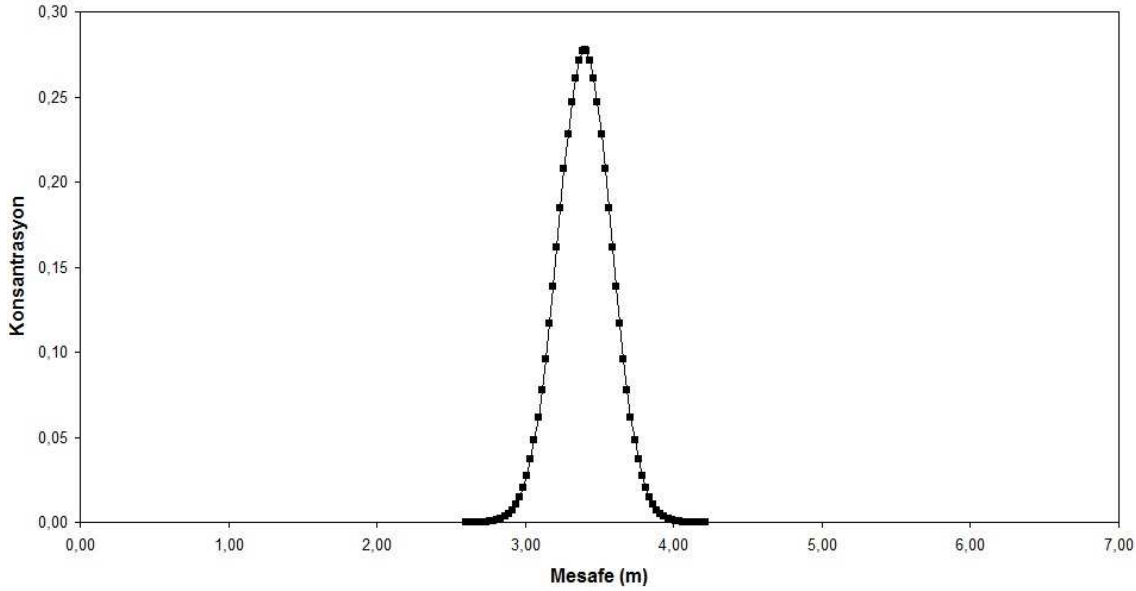
Şekil 4.1. Pe=4 ve t=0 s için analitik sonuç



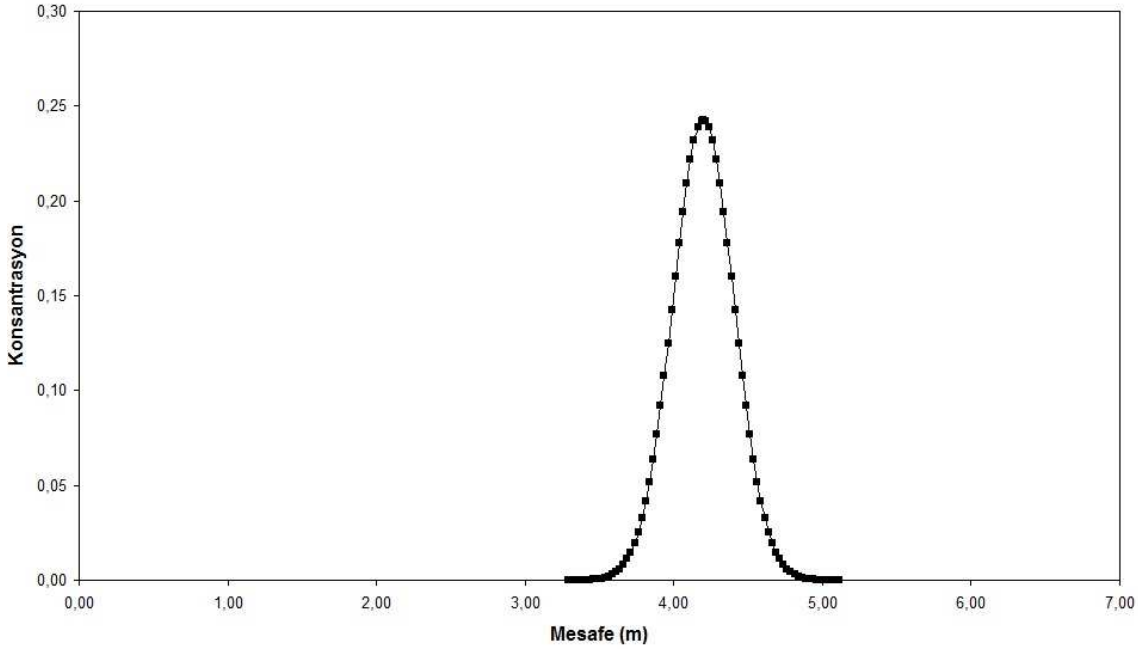
Şekil 4.2. Pe=4 ve t=1 s için analitik sonuç



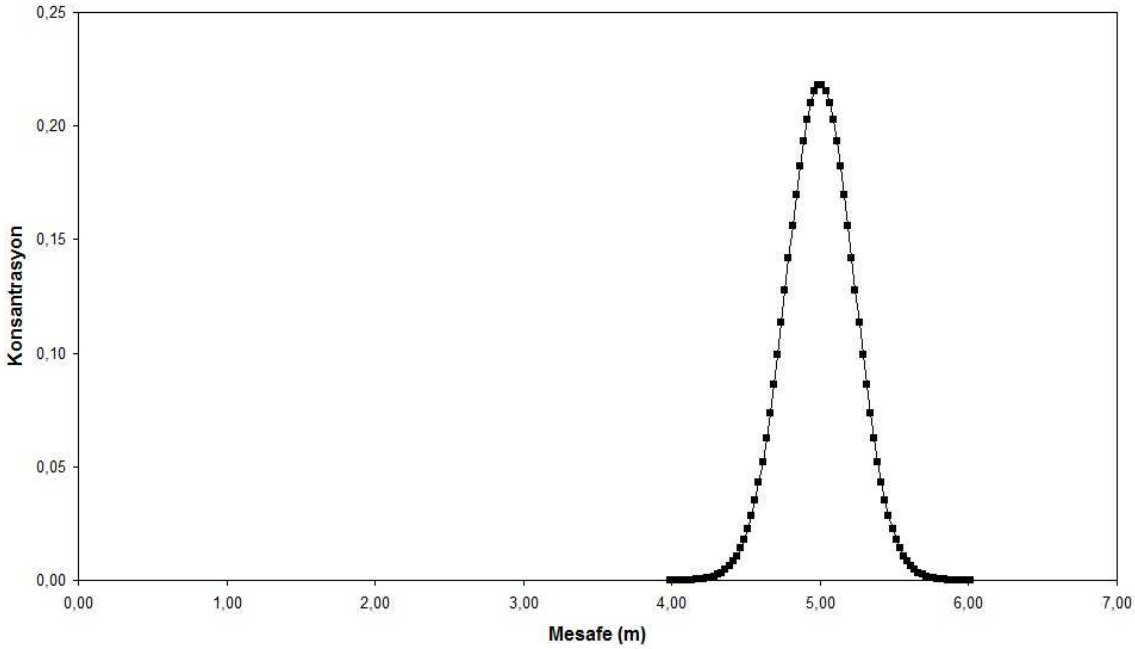
Şekil 4.3. Pe=4 ve t=2 s için analitik sonuç



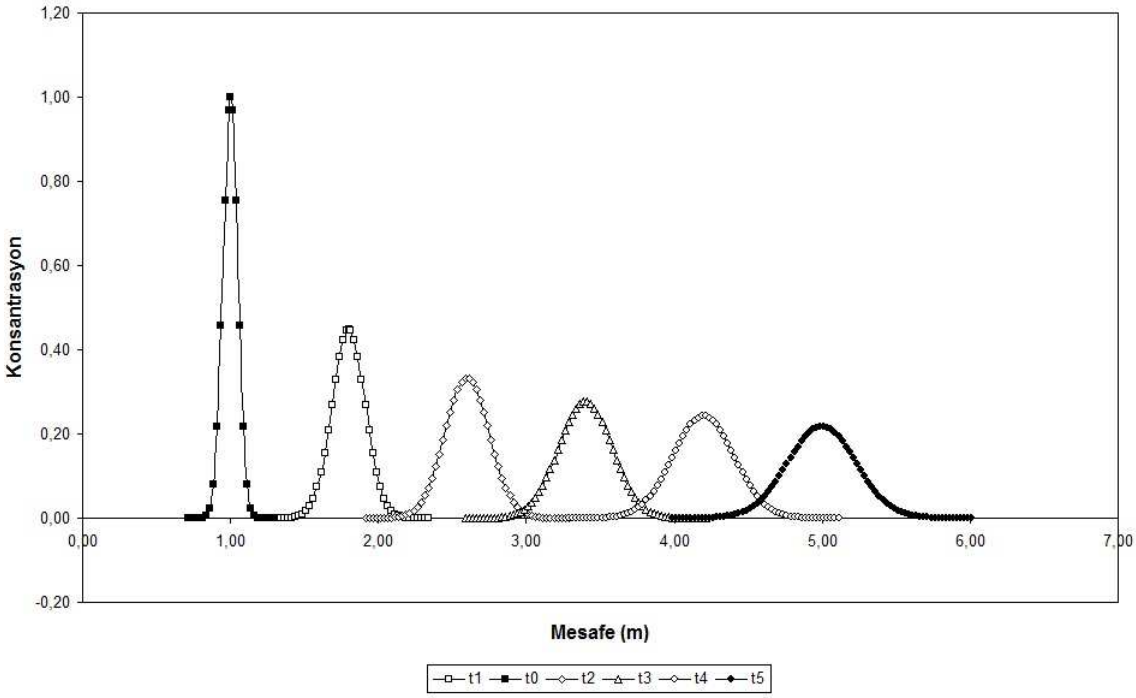
Şekil 4.4. Pe=4 ve t=3 s için analitik sonuç



Şekil 4.5. Pe=4 ve t=4 s için analitik sonuç



Şekil 4.6. Pe=4 ve t=5 s için analitik sonuç



Şekil 4.7. Pe=4 için 5 saniyelik analitik sonuç

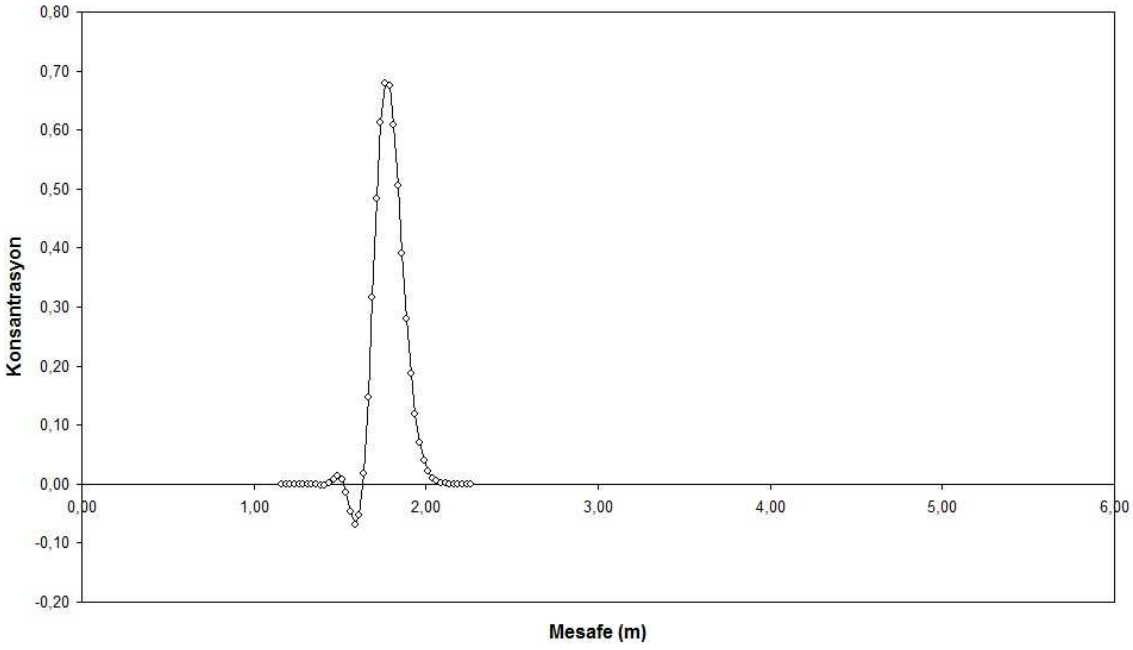
4.2. Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi ile Çözüm

(3.62) eşitliği ile verilen Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi denklemi, Pe=4 için Microsoft Excel programı kullanılarak çözülmüştür. Çizelge 4.2'de sonuç eğrilerinin maksimum değerleri görülmektedir.

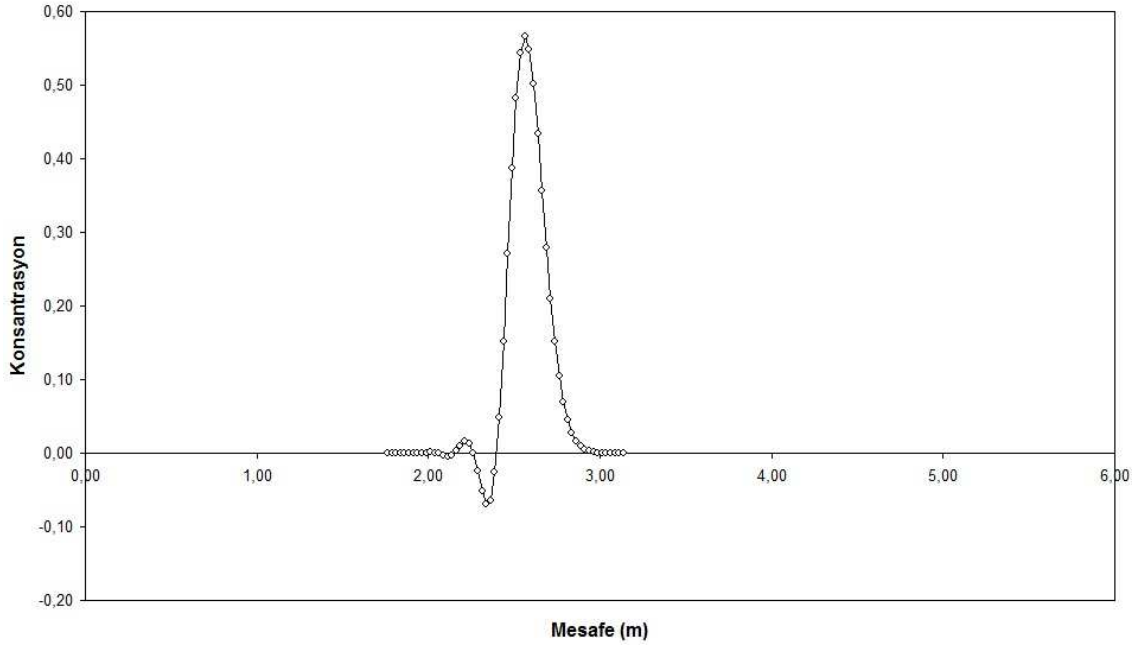
Çizelge 4.2. Maksimum sayısal sonuçlar (FTCS)

Süre t (s)	Sayısal Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
1	0,680	1,76
2	0,565	2,56
3	0,495	3,36
4	0,446	4,16
5	0,410	4,96

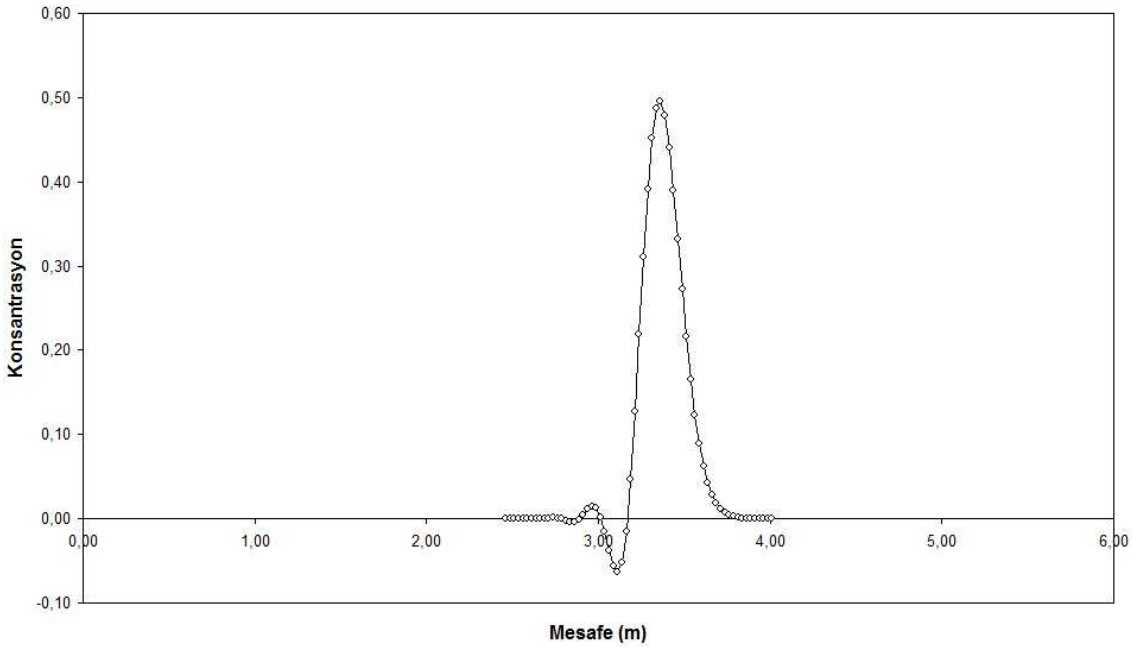
Bu değerlere ait grafikler Şekil 4.8-4.12 arasında verilmiştir.



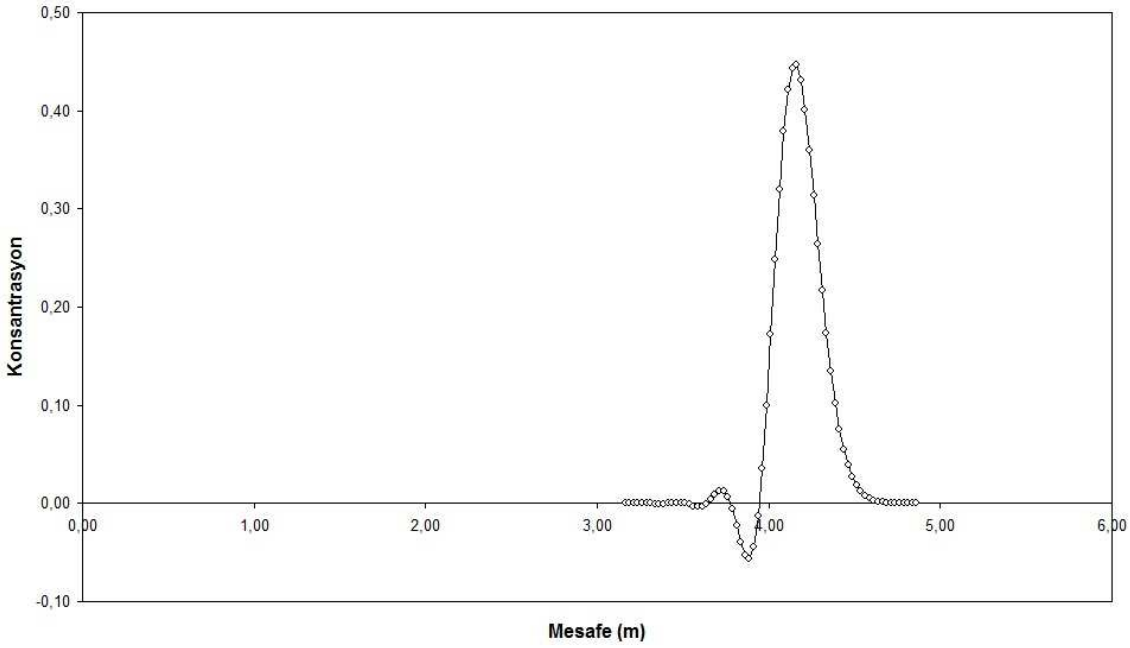
Şekil 4.7. Pe=4 ve t=1 s için Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi



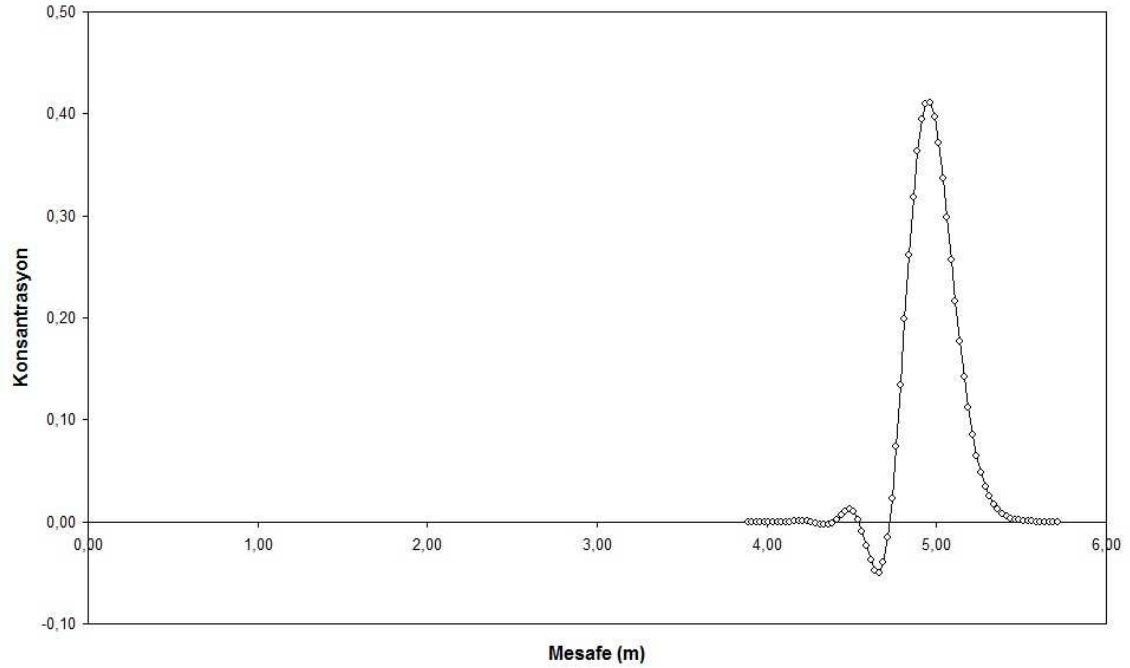
Şekil 4.9. Pe=4 ve t=2 s için Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi



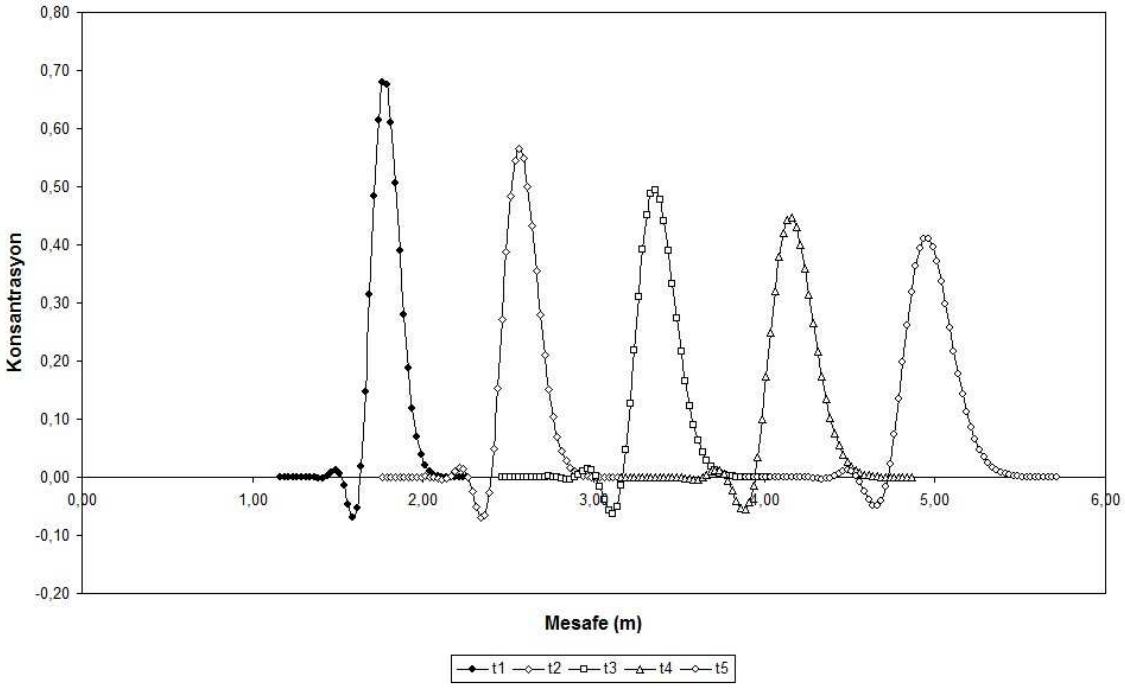
Şekil 4.10. Pe=4 ve t=3 s için Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi



Şekil 4.11. Pe=4 ve t=4 s için Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi



Şekil 4.12. Pe=4 ve t=5 s için Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi



Şekil 4.13. Pe=4 için 5 saniyelik Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi

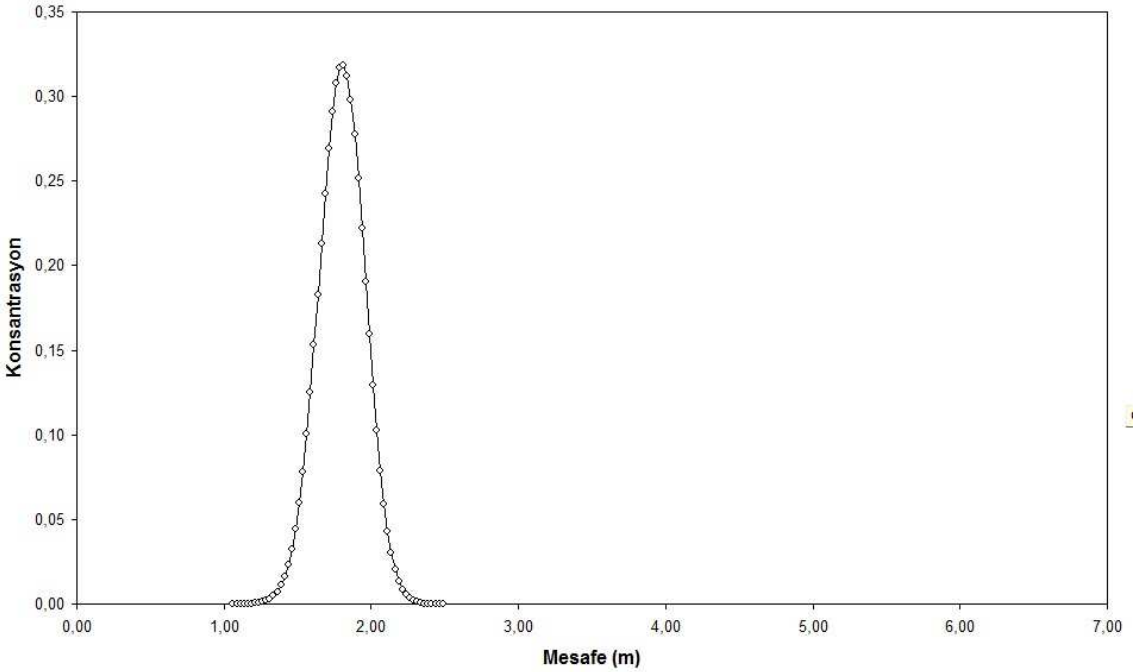
4.3. Upwind-Differencing Yöntemi ile Çözüm

(3.64) eşitliği ile verilen Upwind-Differencing denklemi, Pe=4 için Microsoft Excel programı kullanılarak çözülmüştür. Çizelge 4.3'de sonuç eğrilerinin maksimum değerleri görülmektedir.

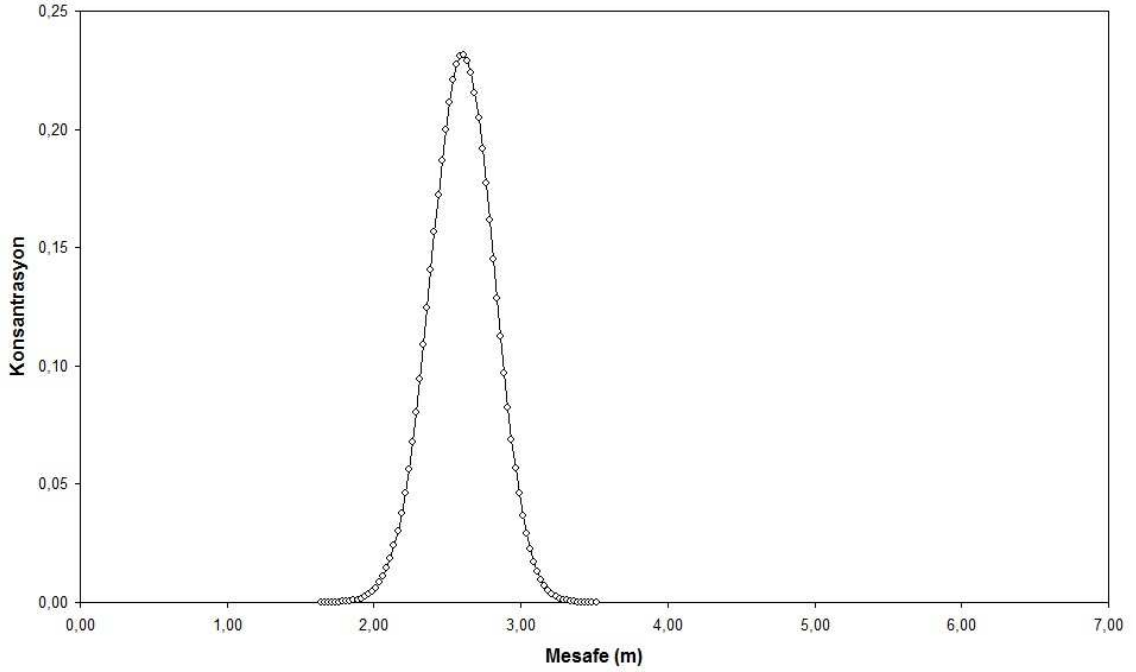
Çizelge 4.3. Maksimum sayısal sonuçlar (Upwind)

Süre t (s)	Sayısal Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
1	0,319	1,81
2	0,232	2,61
3	0,191	3,41
4	0,166	4,21
5	0,149	5,01

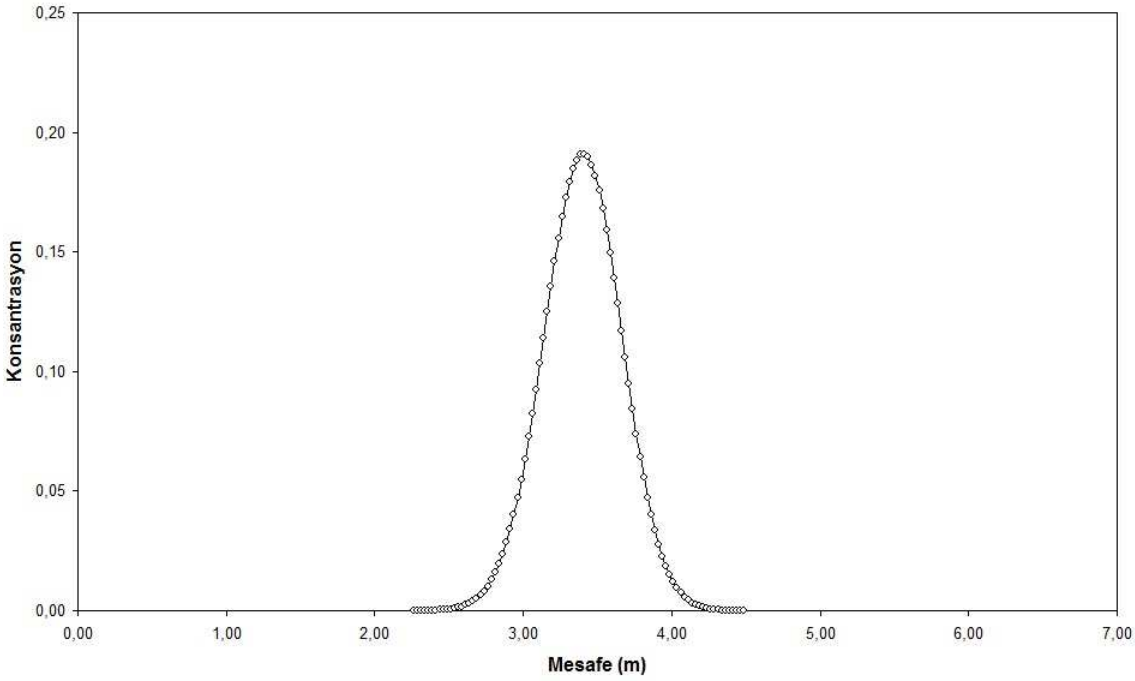
Bu değerlere ait grafikler Şekil 4.14-4.18 arasında verilmiştir.



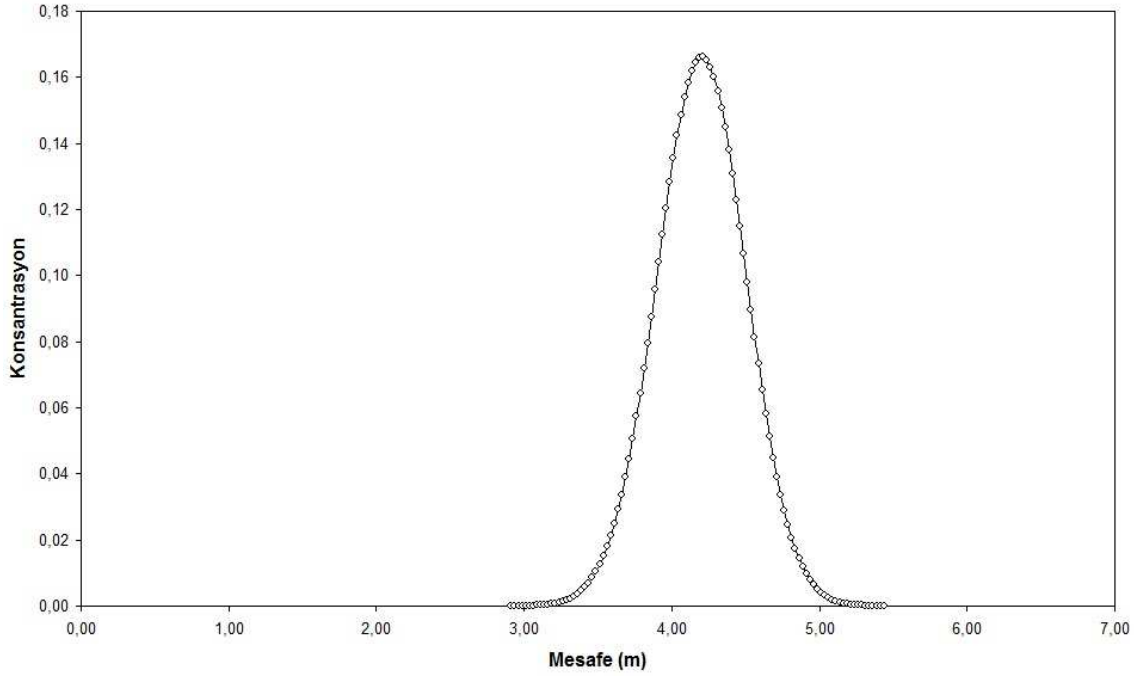
Şekil 4.14. Pe=4 ve t=1 s için Upwind-Differencing Yöntemi



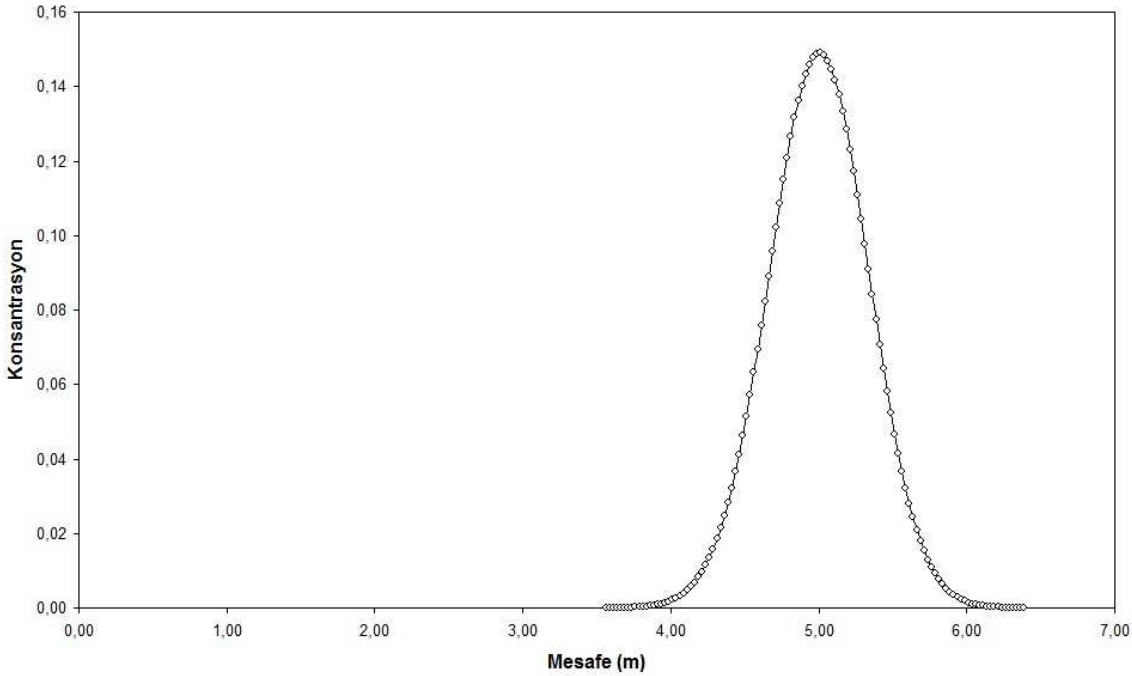
Şekil 4.15. Pe=4 ve t=2 s için Upwind-Differencing Yöntemi



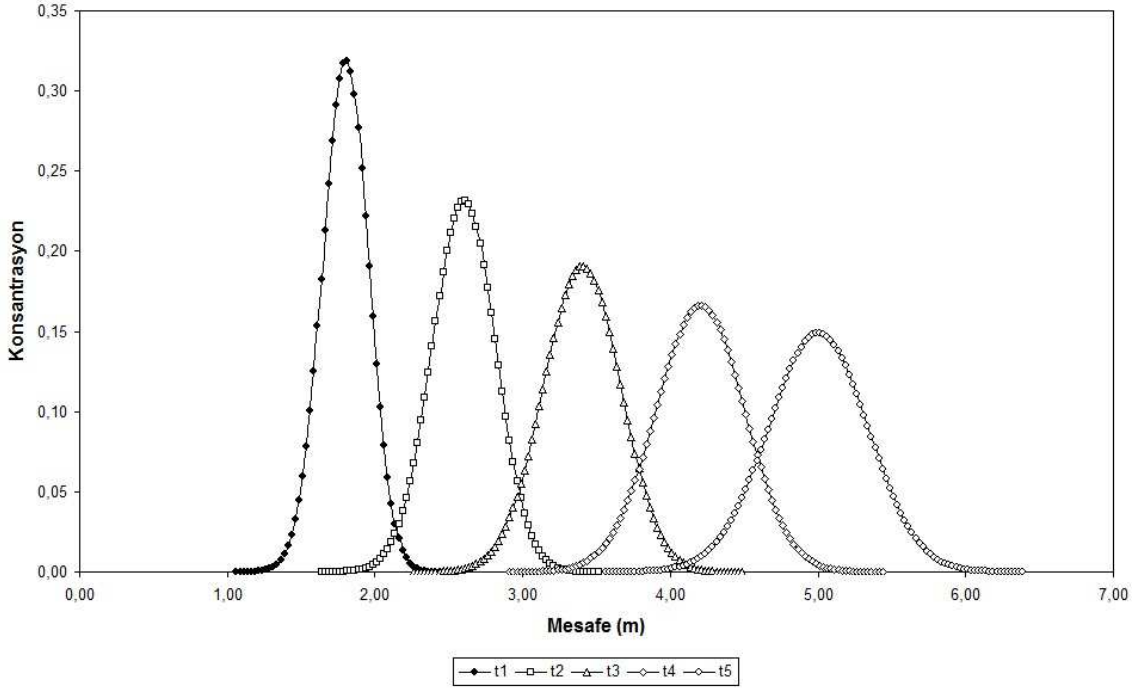
Şekil 4.16. Pe=4 ve t=3 s için Upwind-Differencing Yöntemi



Şekil 4.17. Pe=4 ve t=4 s için Upwind-Differencing Yöntemi



Şekil 4.18. Pe=4 ve t=5 s için Upwind-Differencing yöntemi



Şekil 4.19. Pe=4 için 5 saniyelik Upwind-Differencing Yöntemi

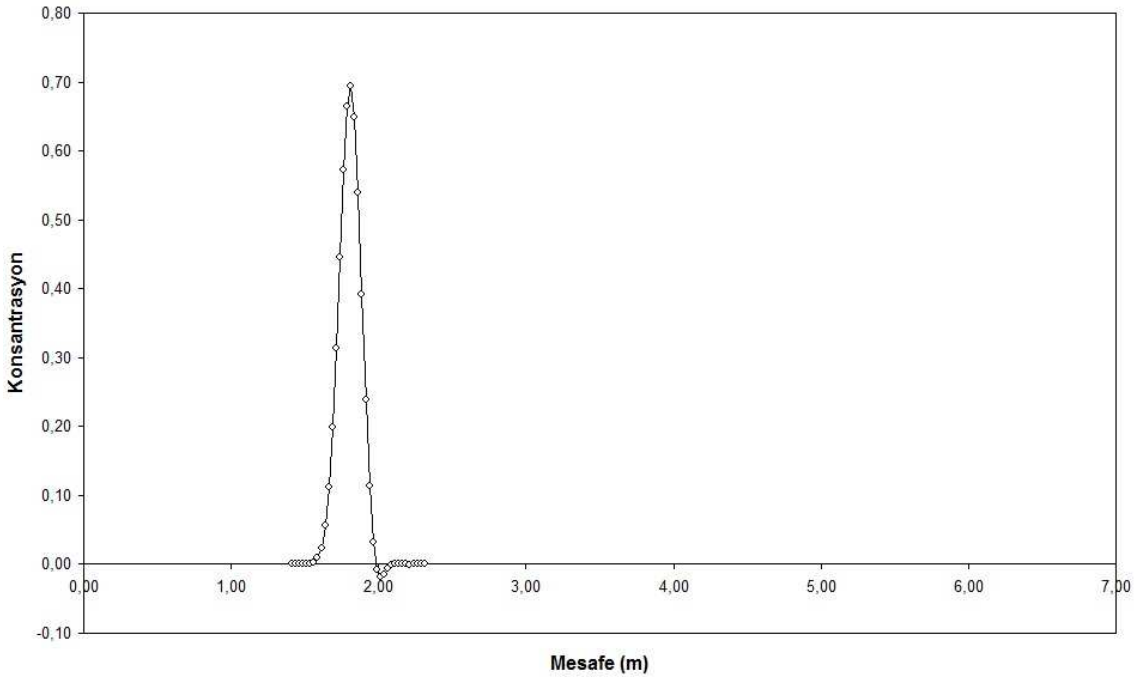
4.4. Higher-Order Yöntemi ile Çözüm

(3.66) eşitliği ile verilen Higher-Order denklemi, Pe=4 için Microsoft Excel programı ile çözülmüştür. Çizelge 4.4'de sonuç eğrilerinin maksimum değerleri görülmektedir.

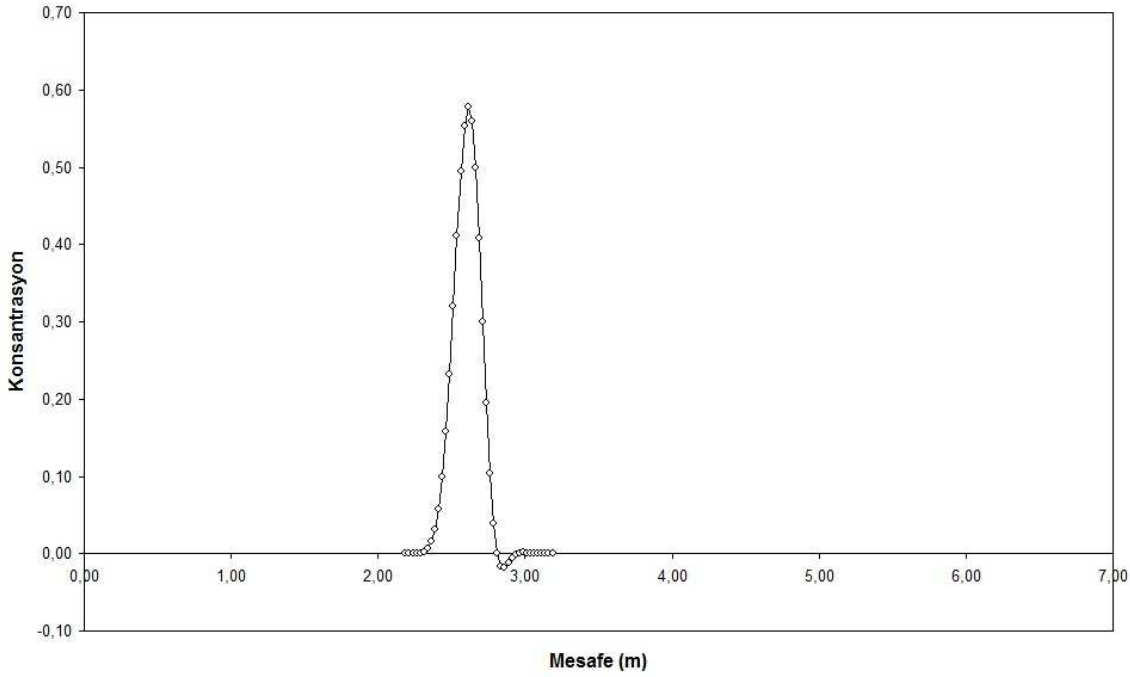
Çizelge 4.4. Maksimum sayısal sonuçlar (Higherorder)

Süre t (s)	Sayısal Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
1	0,694	1,81
2	0,577	2,61
3	0,507	3,41
4	0,459	4,21
5	0,422	5,01

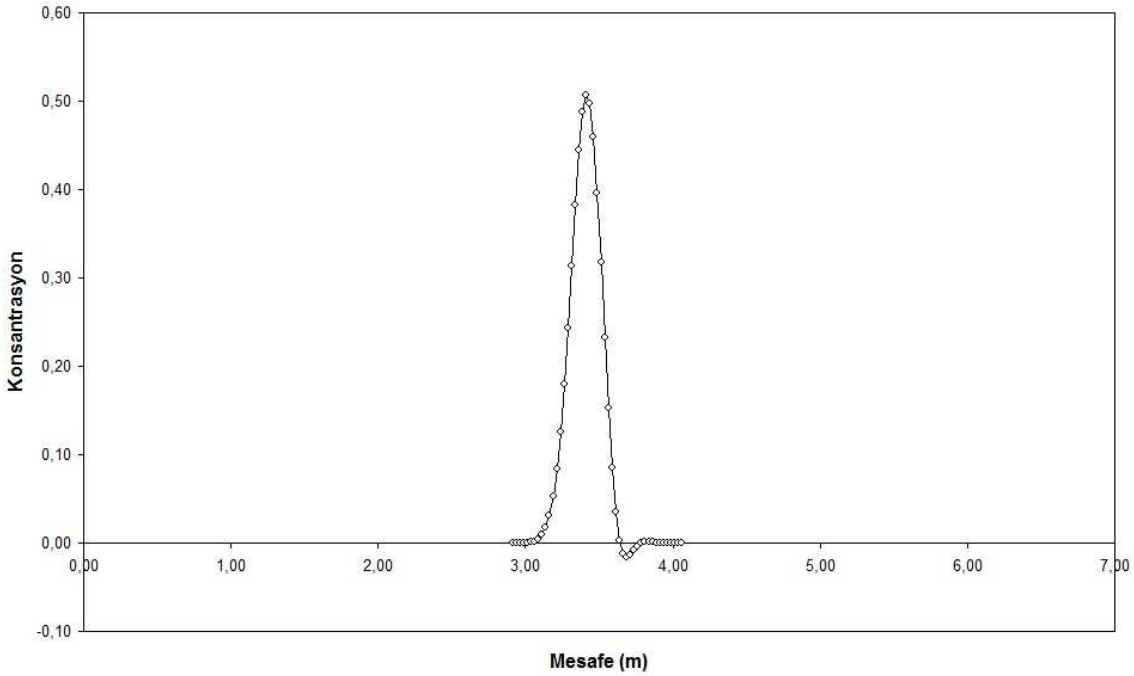
Bu değerlere ait grafikler Şekil 4.20-4.24 arasında verilmiştir.



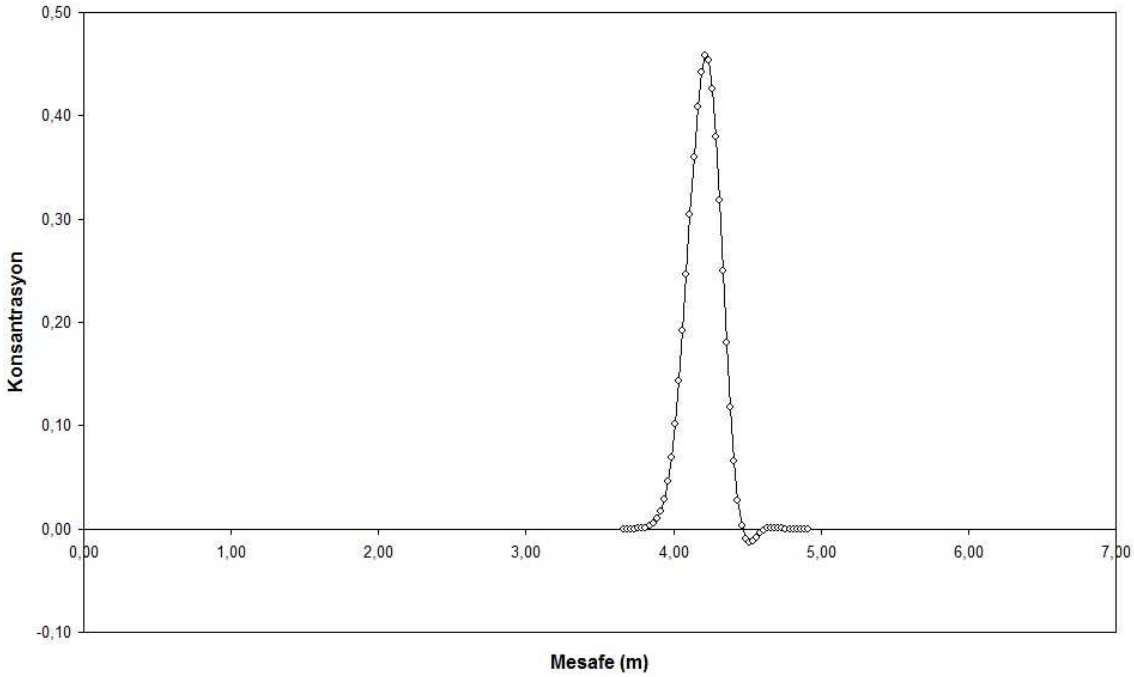
Şekil 4.20. Pe=4 ve t=1 s için Higher-Order Yöntemi



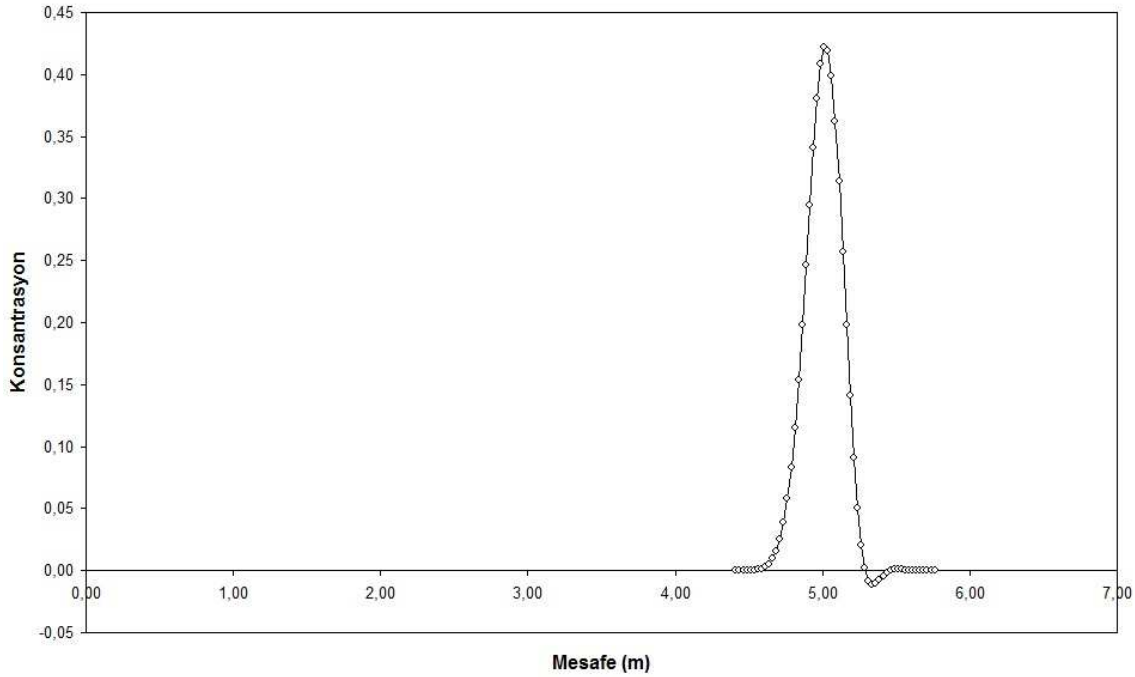
Şekil 4.21. Pe=4 ve t=2 s için Higher-Order Yöntemi



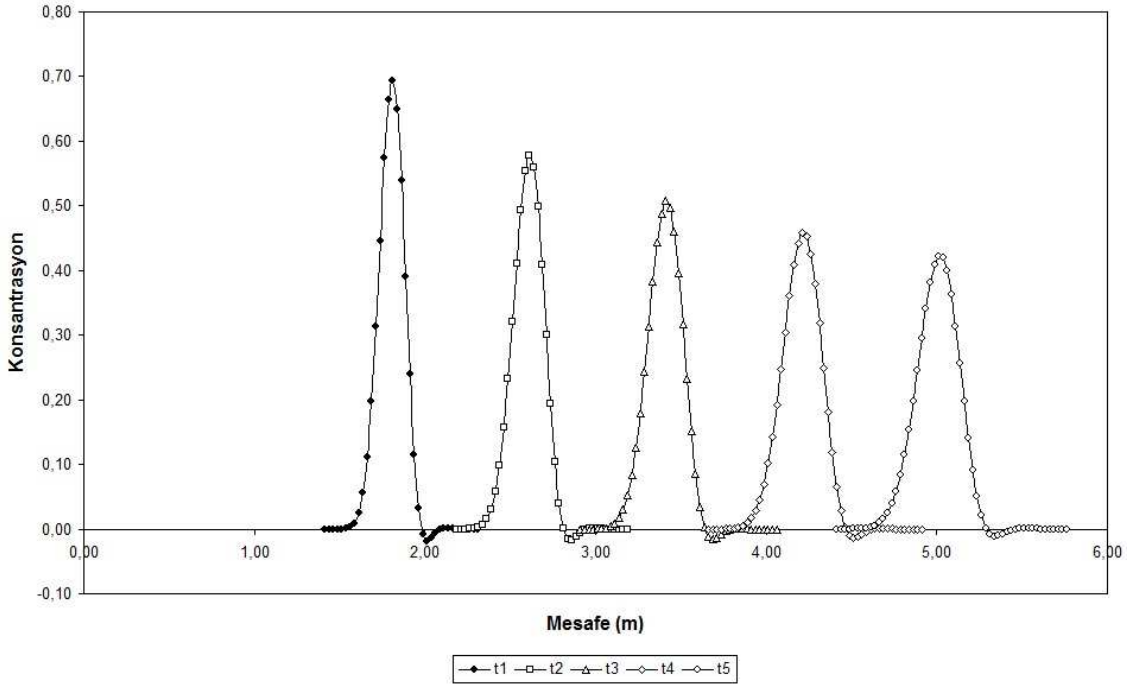
Şekil 4.22. Pe=4 ve t=3 için Higher-Order Yöntemi



Şekil 4.23. Pe=4 ve t=4 s için Higher-Order Yöntemi



Şekil 4.24. Pe=4 ve t=5 s için Higher-Order Yöntemi



Şekil 4.25. Pe=4 için 5 saniyelik Higher-Order Yöntemi

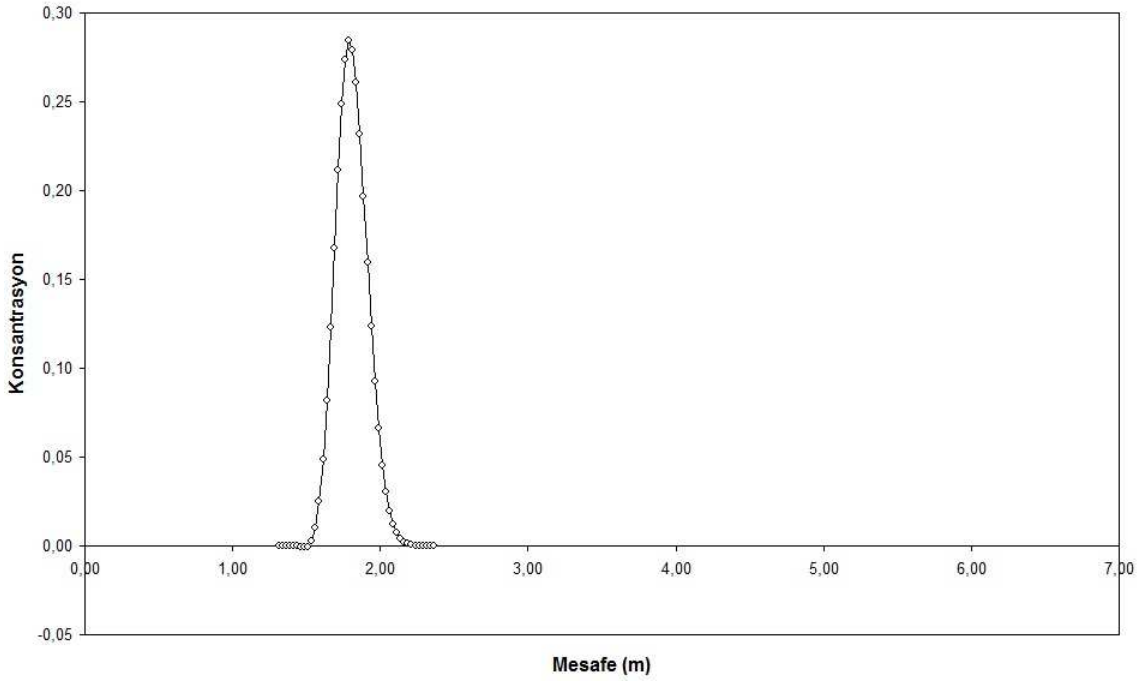
4.5. Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Çözüm

(3.70) eşitliği ile verilen Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel denklemi, Pe=4 için Microsoft Excel programı ile çözülmüştür. Elde edilen sonuç eğrilerinin maksimum değerleri Çizelge 4.5'de görülmektedir.

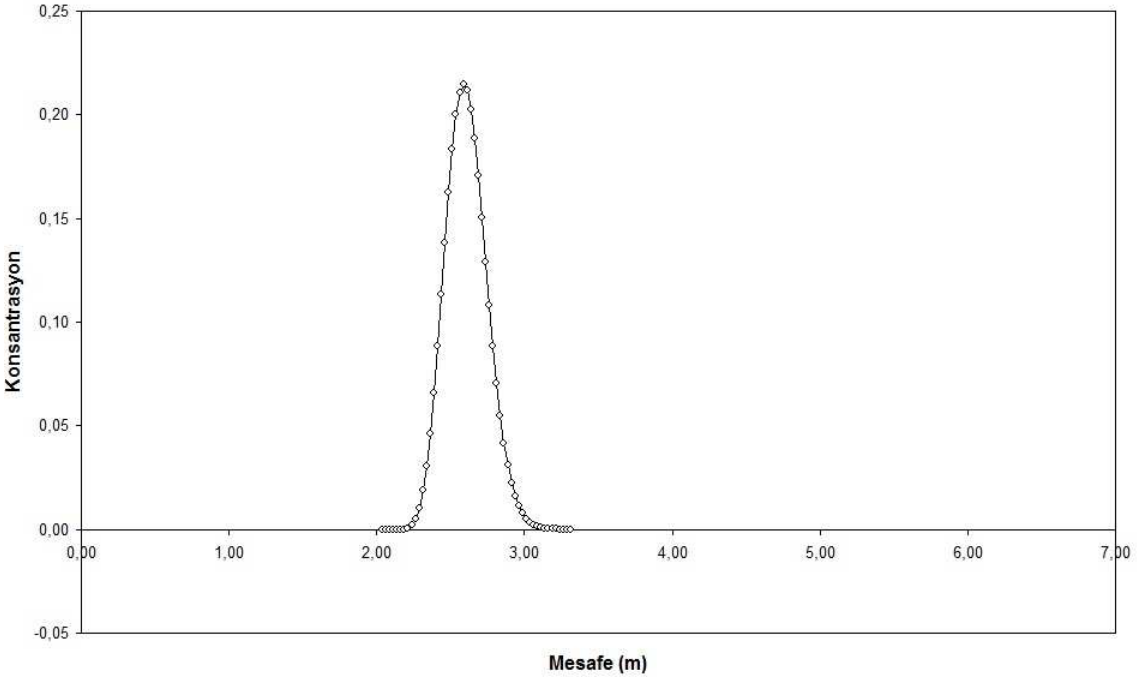
Çizelge 4.5. Maksimum sayısal sonuçlar

Süre t (s)	Sayısal Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
1	0,284	1,79
2	0,214	2,59
3	0,179	3,39
4	0,094	4,19
5	0,085	4,99

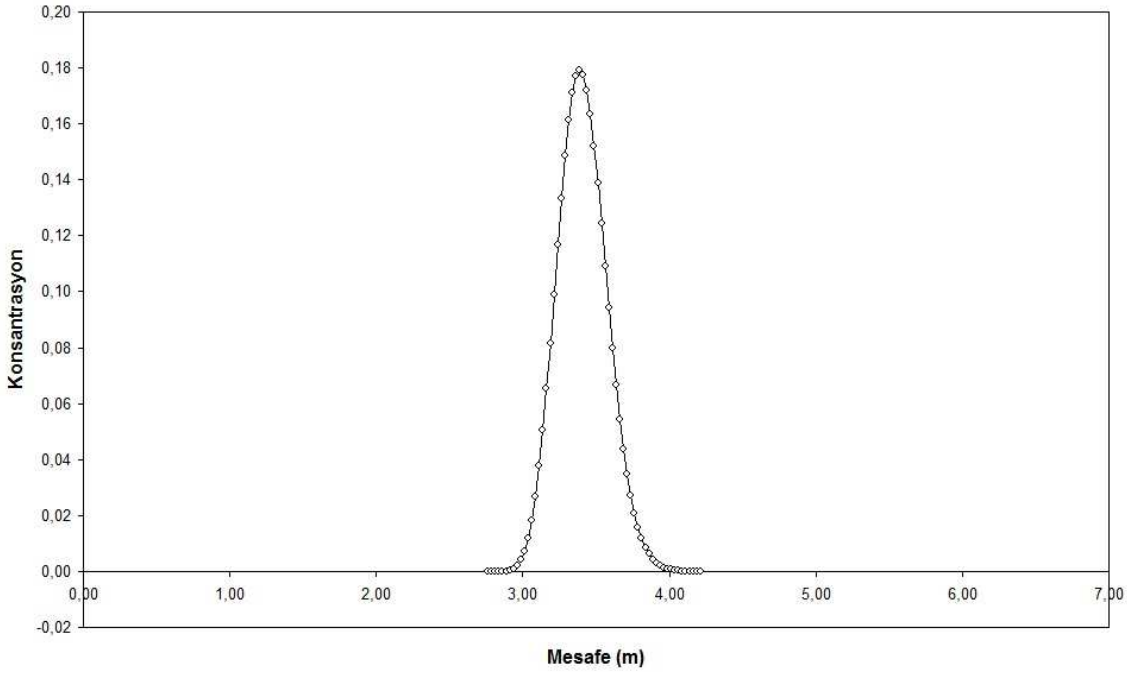
Bu değerlere ait grafikler Şekil 4.26-4.30 arasında gösterilmiştir.



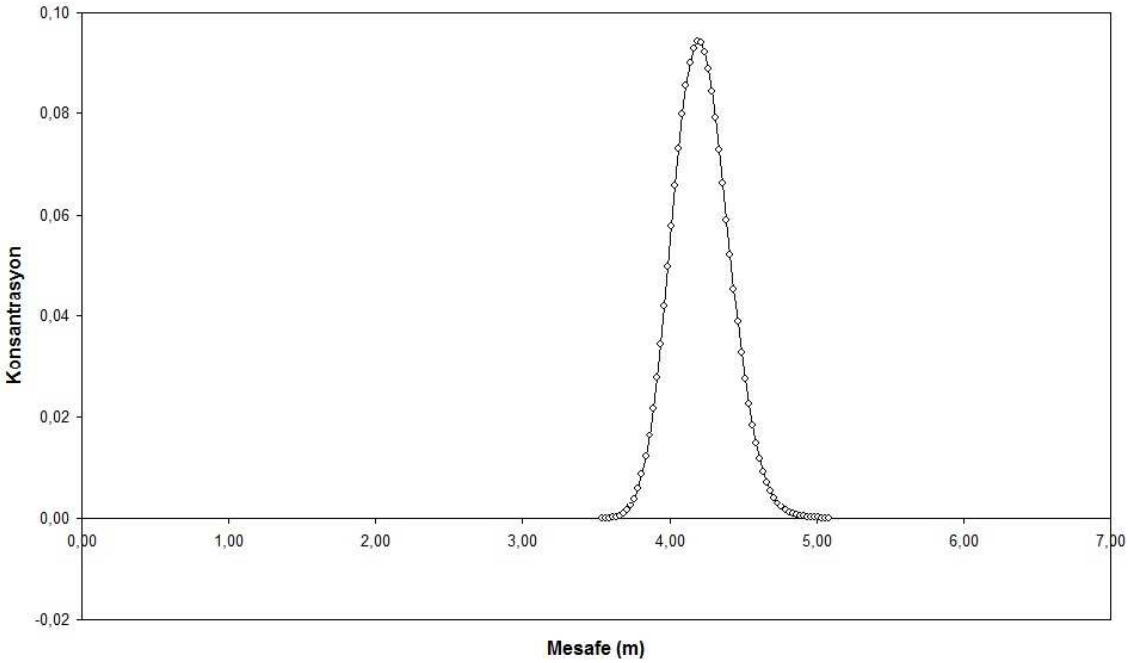
Şekil 4.26. Pe=4 ve t=1 s için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi



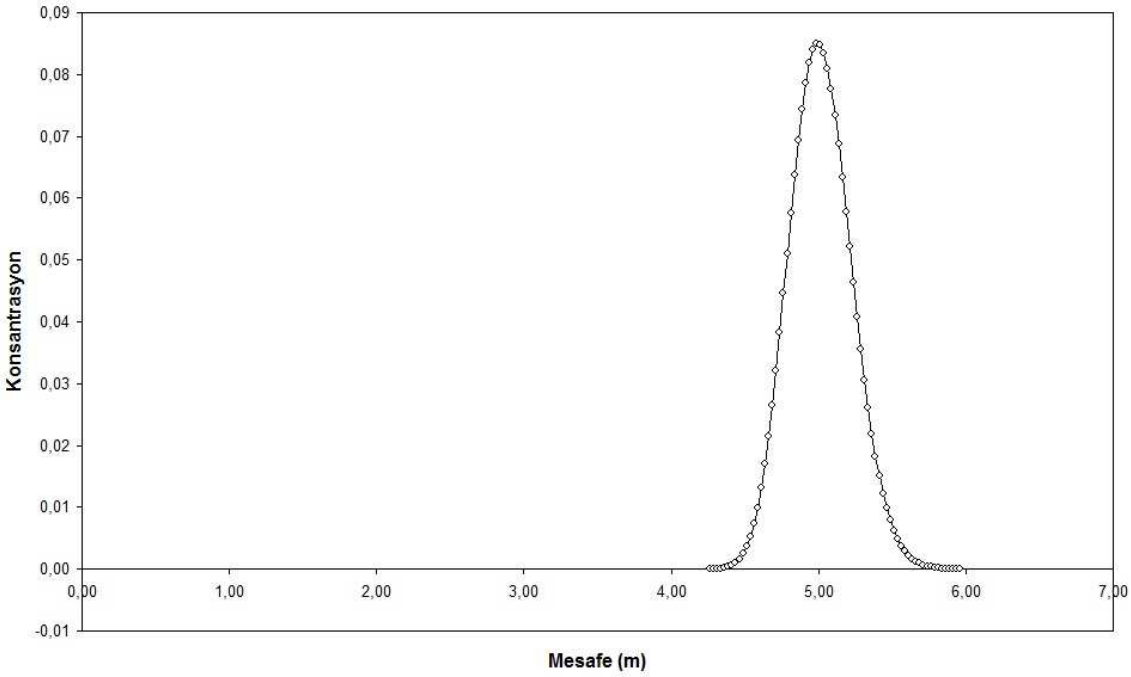
Şekil 4.27. Pe=4 ve t=2 s için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi



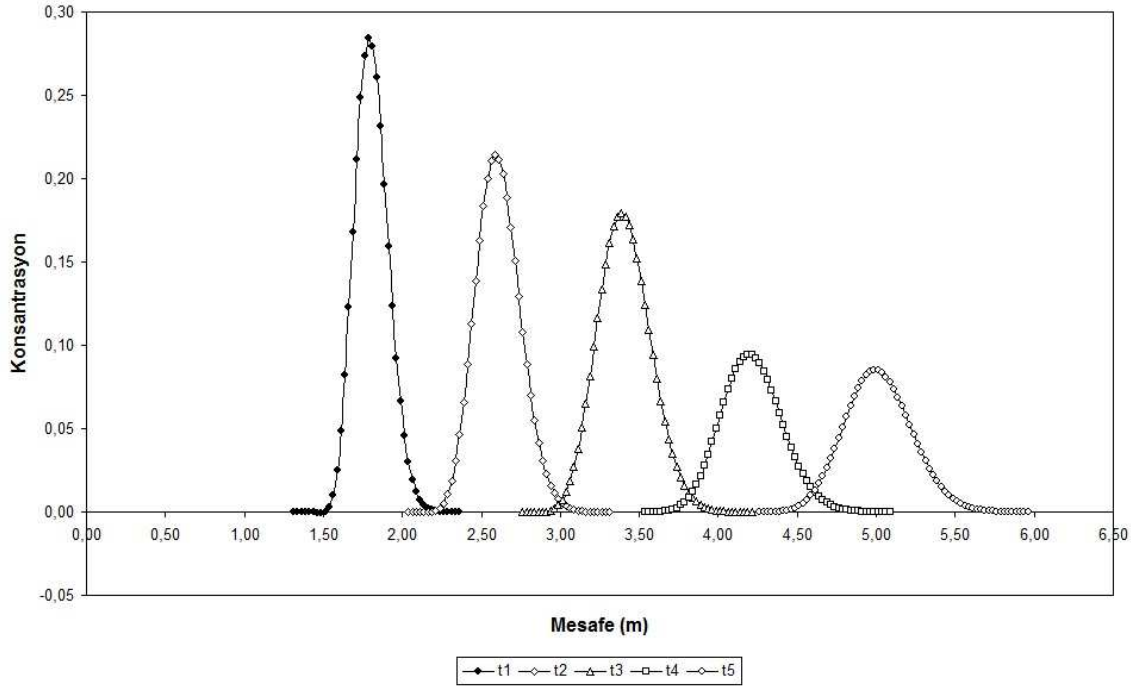
Şekil 4.28. Pe=4 ve t=3 s için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi



Şekil 4.29. Pe=4 ve t=4 s için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi



Şekil 4.30. Pe=4 ve t=5 s için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi



Şekil 4.31. Pe=4 için 5 saniyelik Açık Tip CTCS ve
DuFort-Frankel Yöntemi

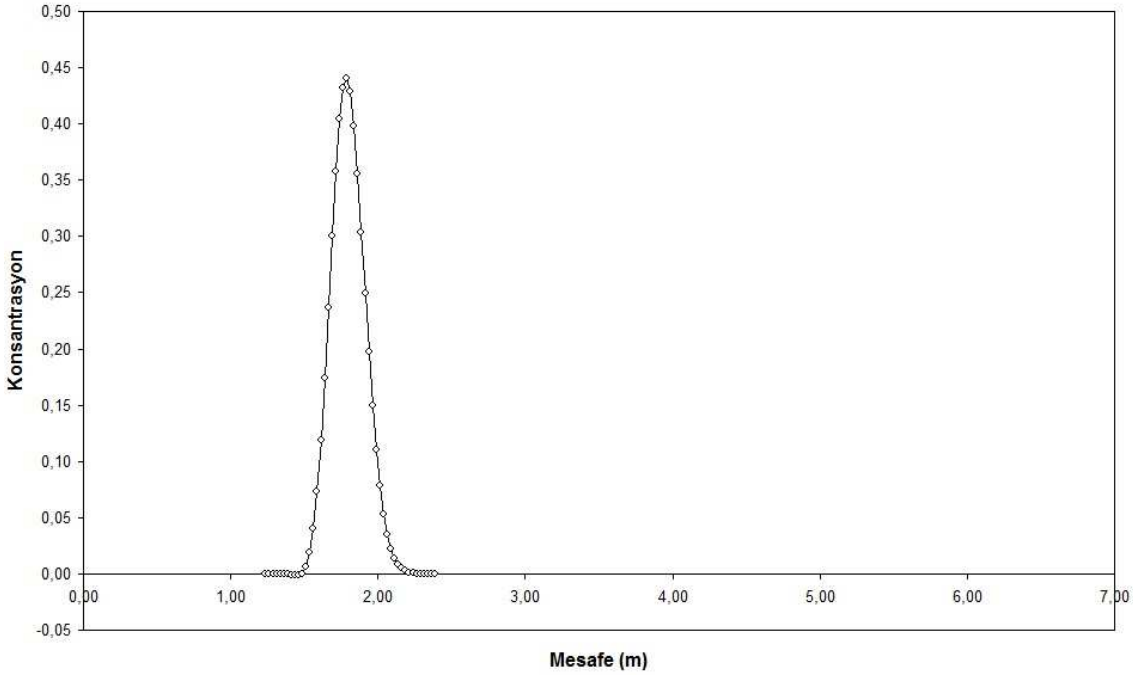
4.6. Açık Tip MacCormack Yöntemi ile Çözüm

(3.75) eşitliği ile verilen Açık Tip MacCormack Yöntemi denklemi, Pe=4 için Microsoft Excel programı kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuç eğrilerinin maksimum değerleri Çizelge 4.6'da görülmektedir.

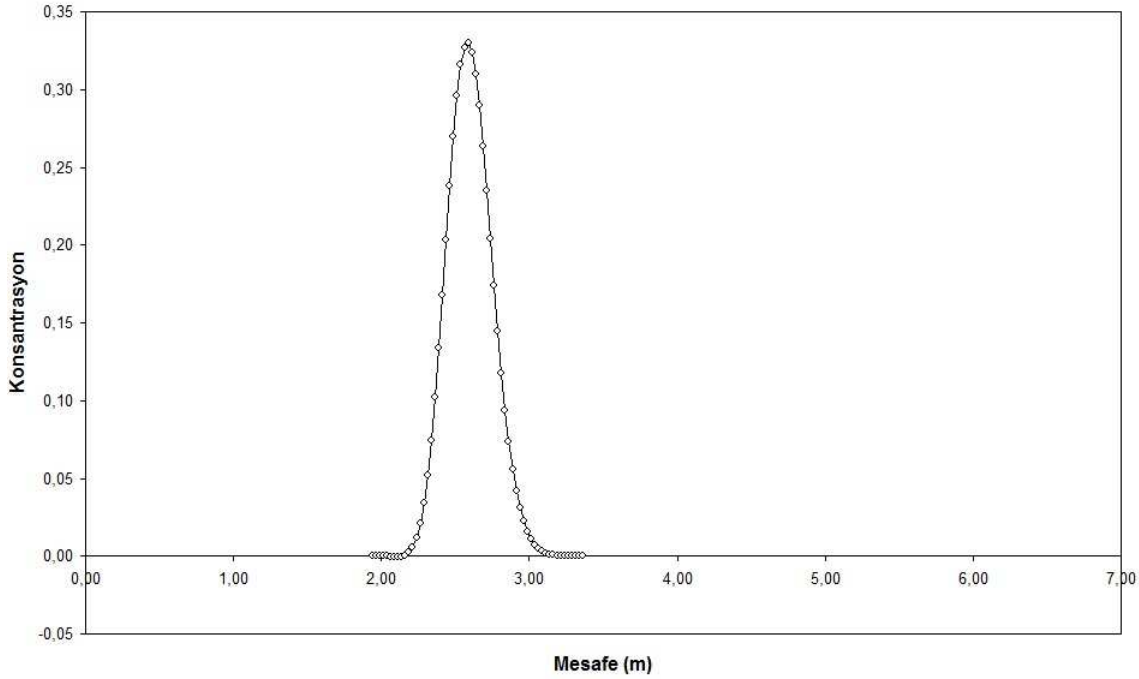
Çizelge 4.6. Maksimum sayısal sonuçlar

Süre t (s)	Sayısal Çözüm (C)	Başlangıç Noktasına Uzaklık (m)
1	0,441	1,79
2	0,330	2,59
3	0,275	3,39
4	0,241	4,19
5	0,217	4,99

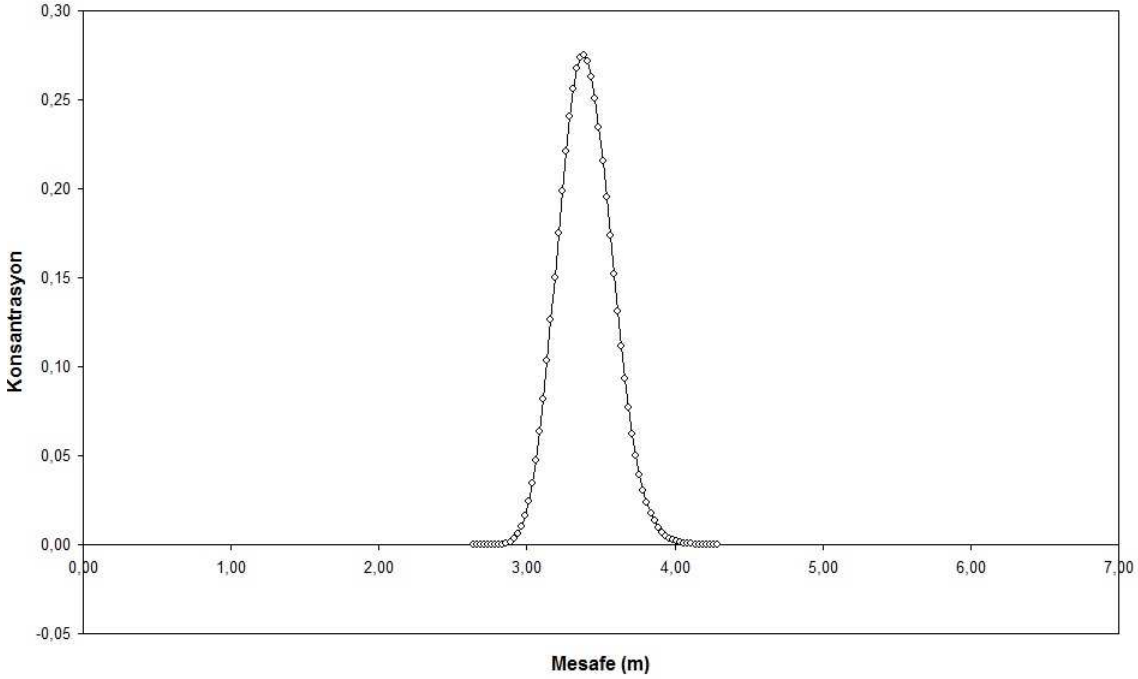
Bu değerlere ait grafikler Şekil 4.32-4.36 arasında gösterilmiştir.



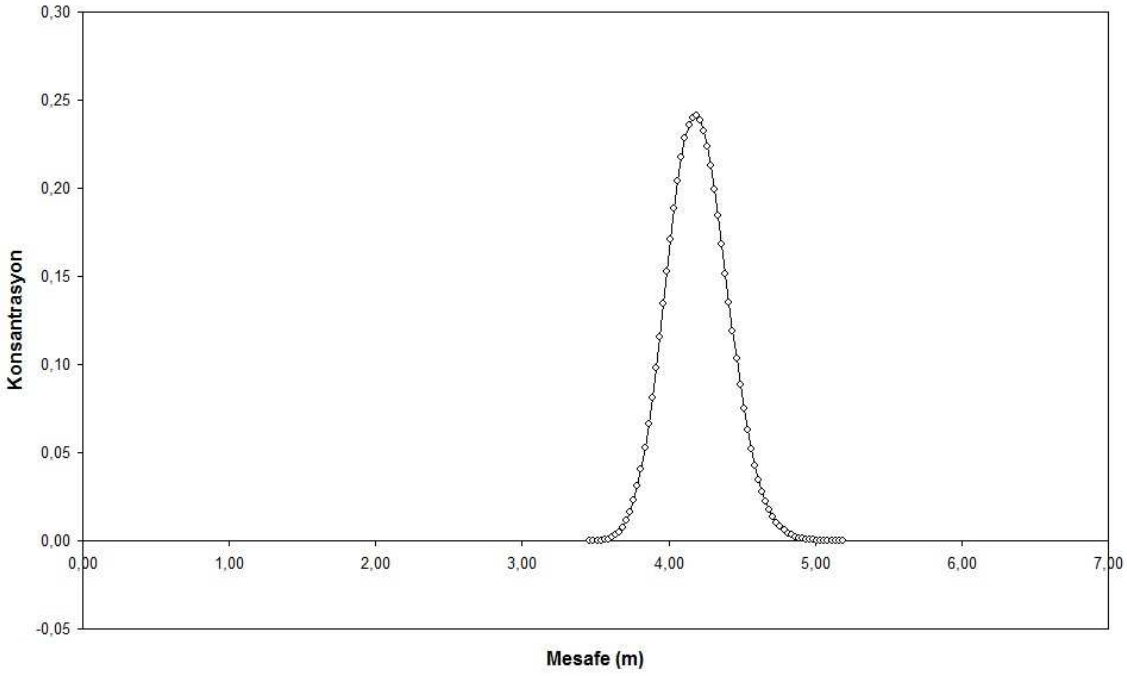
Şekil 4.32. Pe=4 ve t=1 s için Açık Tip MacCormack Yöntemi



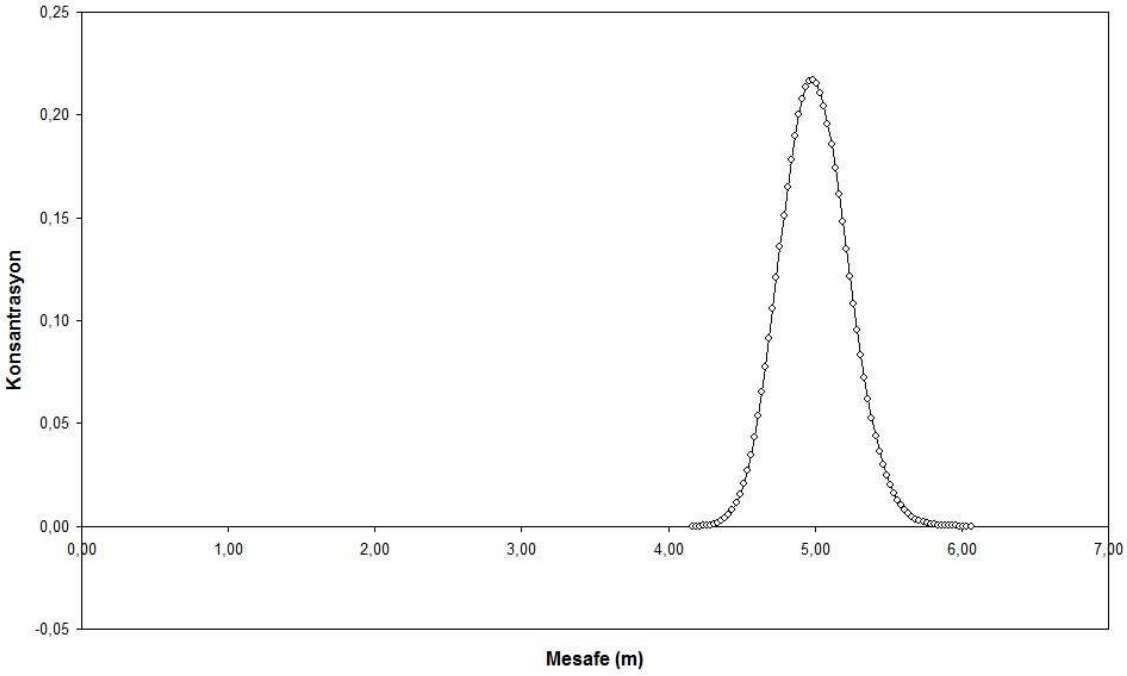
Şekil 4.33. Pe=4 ve t=2 s için Açık Tip MacCormack Yöntemi



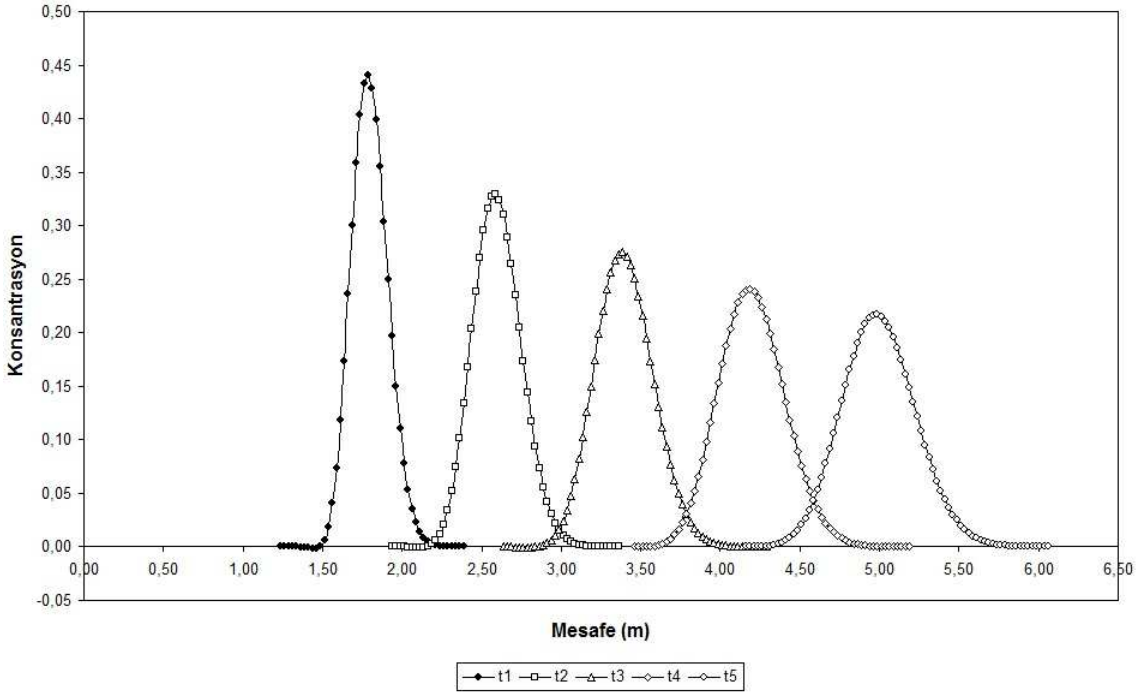
Şekil 4.34. Pe=4 ve t=3 s için Açık Tip MacCormack Yöntemi



Şekil 4.35. Pe=4 ve t=4 s için Açık Tip MacCormack Yöntemi



Şekil 4.36. Pe=4 ve t=5 s için Açık Tip MacCormack Yöntemi



Şekil 4.37. Pe=4 için 5 saniyelik Açık Tip MacCormack Yöntemi

4.7. Hata Analizi

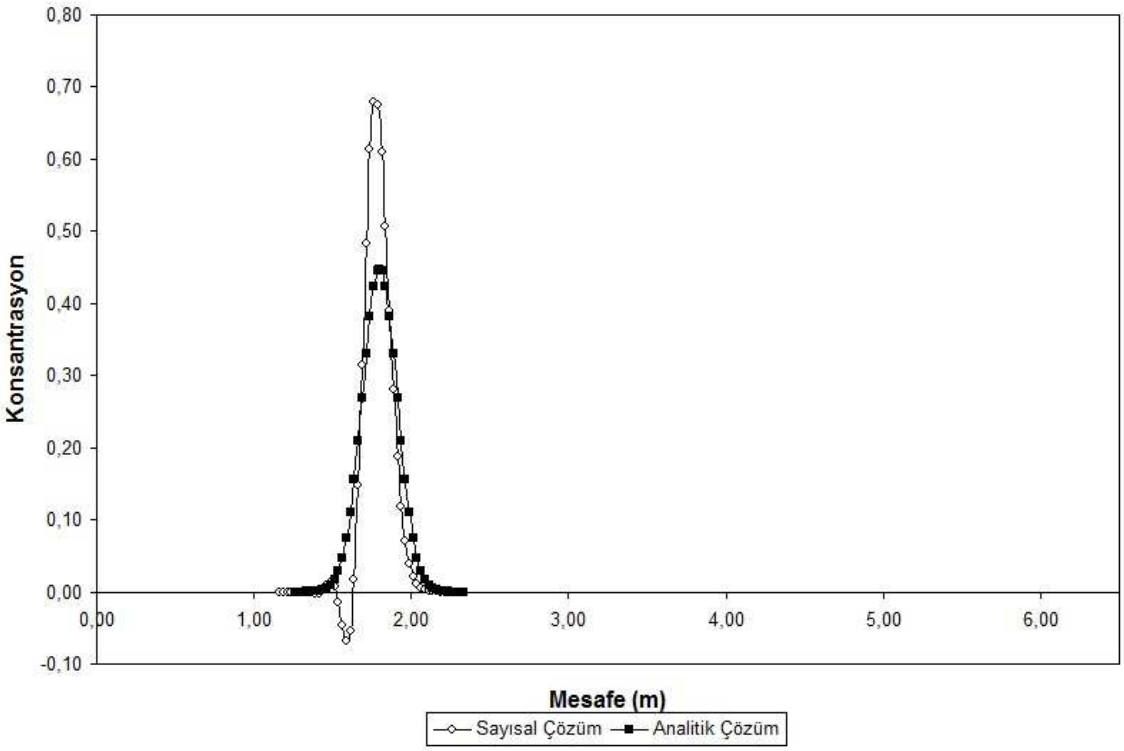
Analitik yöntemden elde edilen sonuçlar ile sayısal yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında bir miktar hata oranı olduğu görülmüştür. Bu bölümde her bir yöntem için hata oranları hesaplanmıştır.

Hata oranları aşağıda verilen (4.4) eşitliği ile hesaplanmıştır.

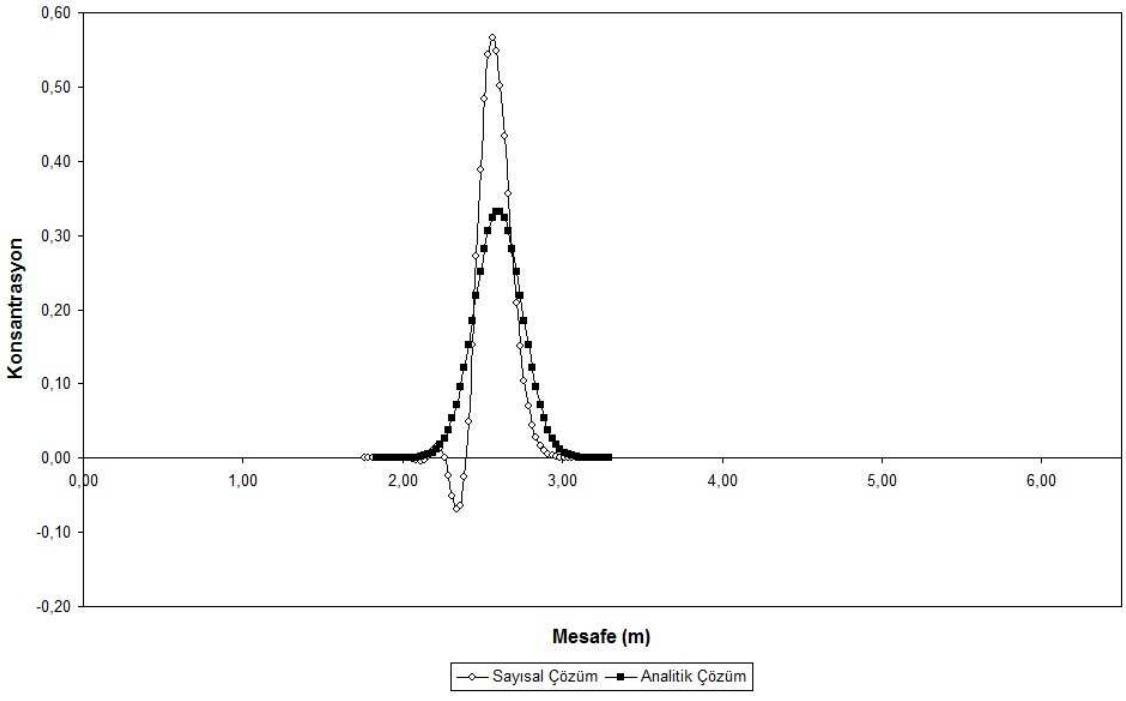
$$\text{Hata Oranı} = \frac{\text{Sayısal Çözüm-Analitik Çözüm}}{\text{Analitik Çözüm}} \text{x}100 \qquad (4.4)$$

Her bir zaman adımındaki sayısal yöntem çözümü için hata oranları hesaplandıktan sonra o sayısal yöntemin 5 saniyelik ortalama hata oranı hesaplanmıştır. Ortalama hata oranı, her bir zaman adımındaki hata oranlarının mutlak değerinin aritmetik ortalaması ile hesaplanmıştır.

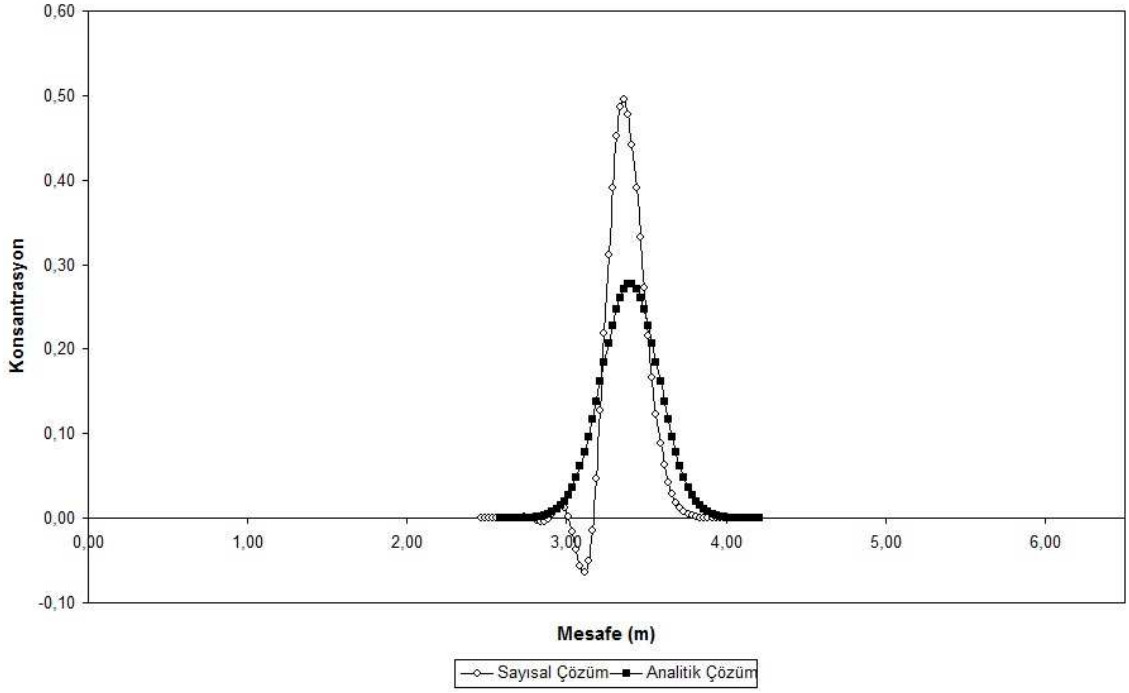
Pe=4 için Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminden elde edilen sayısal bulgular ile analitik çözümden hesaplanan kesin değerler Şekil 4.38-4.42'da görüldüğü gibi grafik üzerinde verilmiştir.



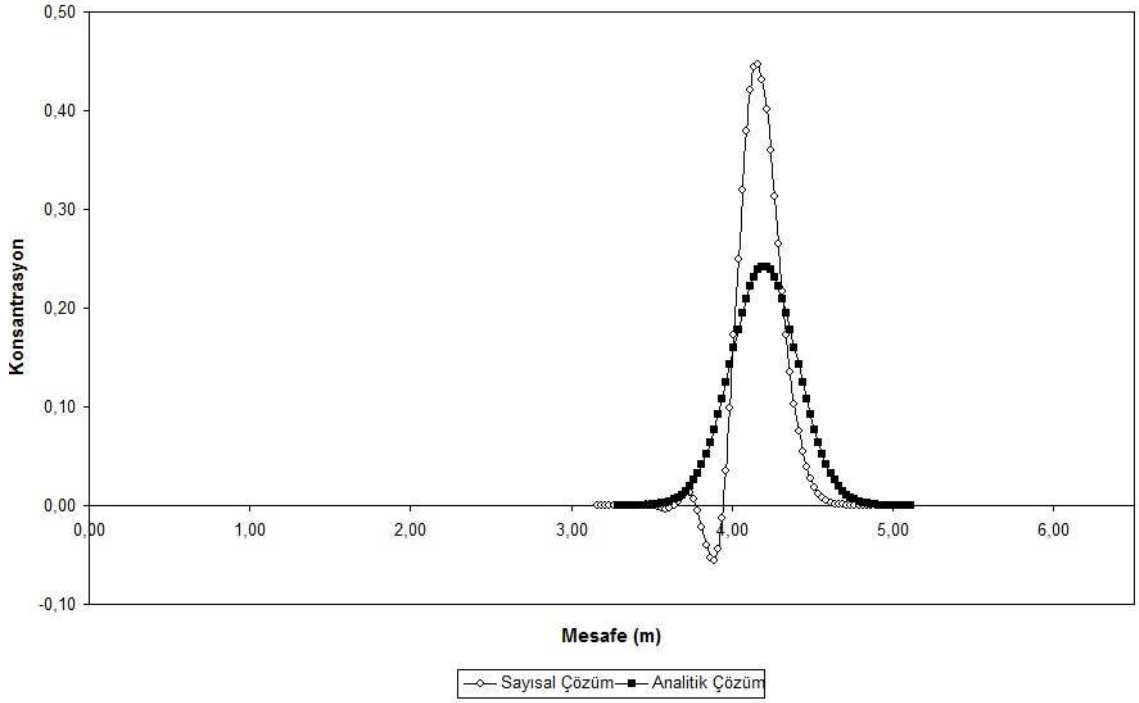
Şekil 4.38. Pe=4 ve t=1 s için Analitik çözüm ile Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi çözümü



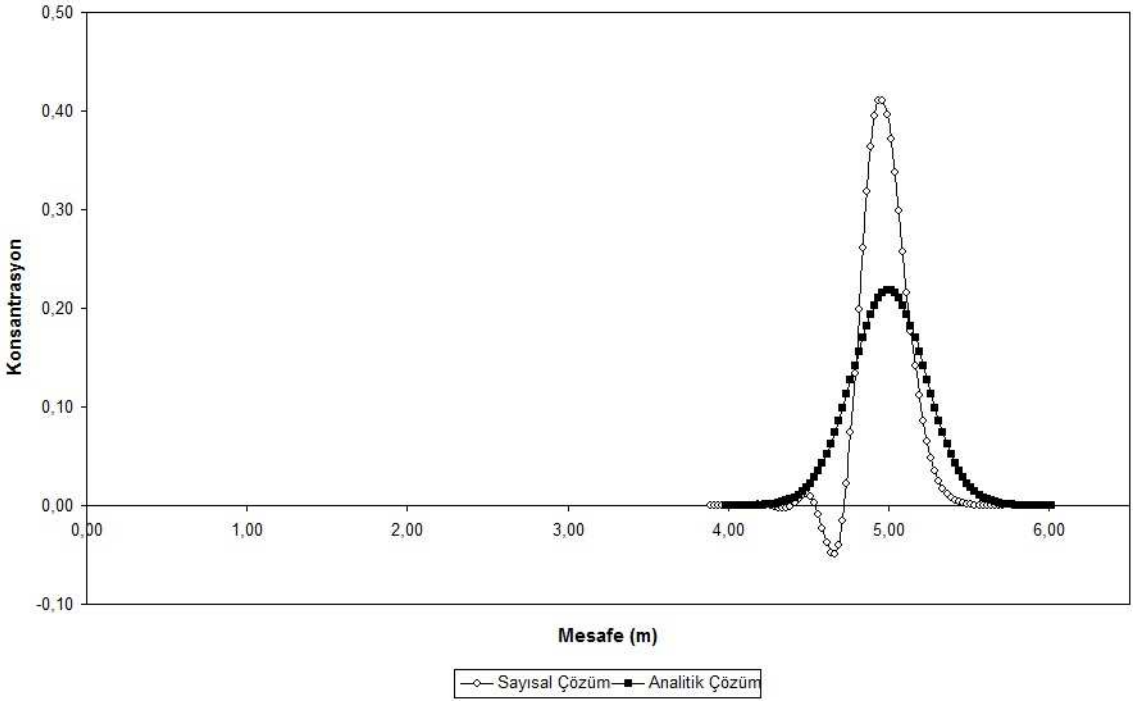
Şekil 4.39. Pe=4 ve t=2 s için Analitik çözüm ile Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi çözümü



Şekil 4.40. Pe=4 ve t=3 s için Analitik çözüm ile Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi çözümü



Şekil 4.41. Pe=4 ve t=4 s için Analitik çözüm ile Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi çözümü



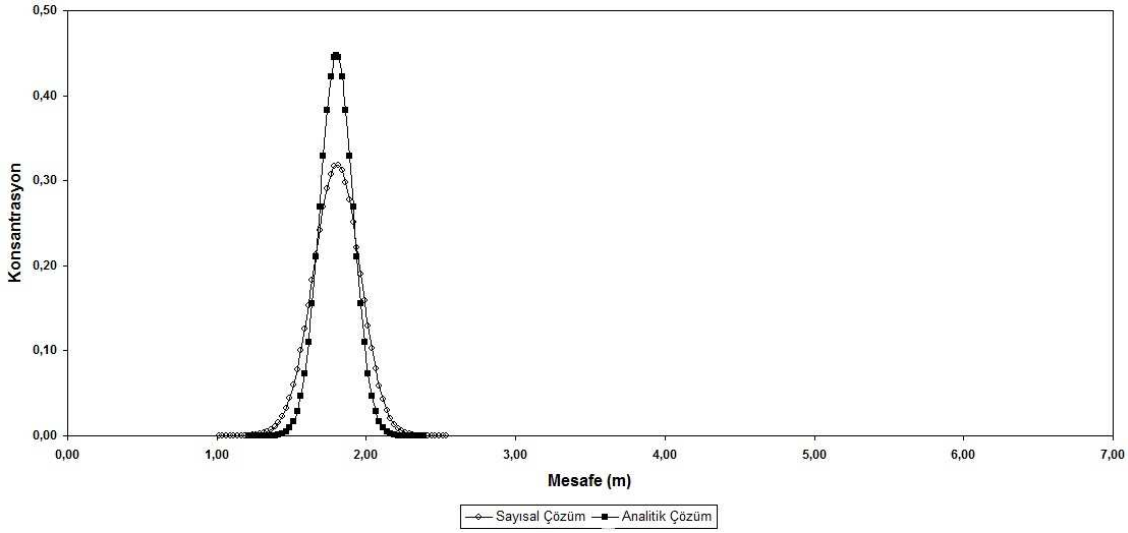
Şekil 4.42. Pe=4 ve t=5 s için Analitik çözüm ile Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi çözümü

Pe=4 için Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminin hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.7'de verilmiştir.

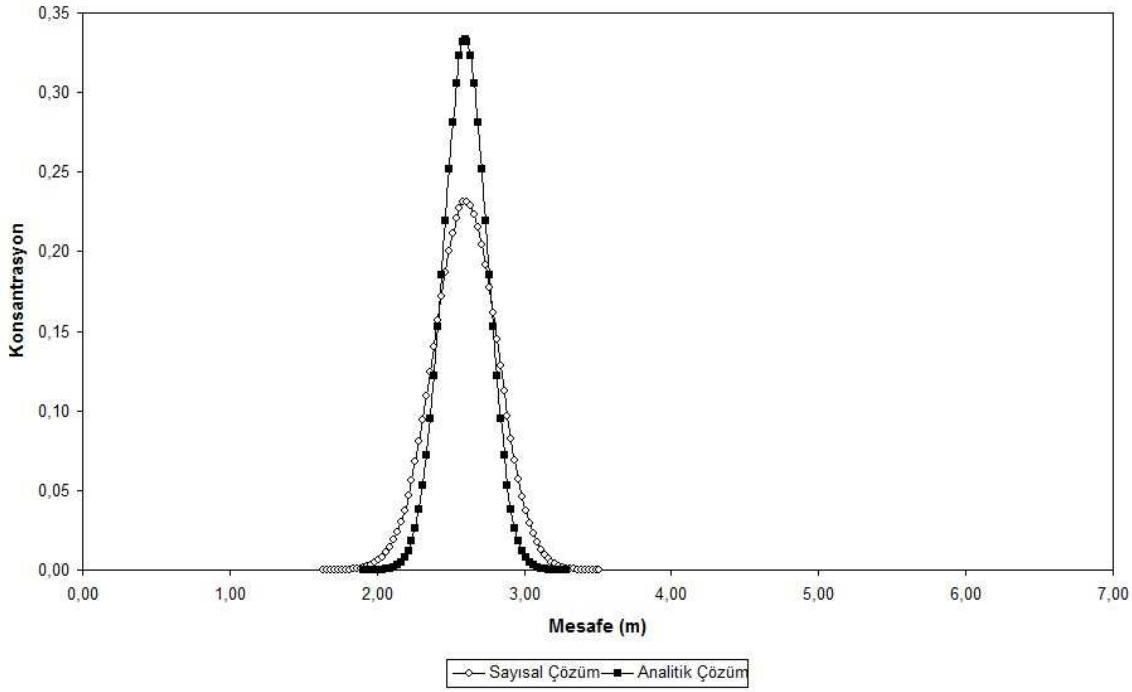
Çizelge 4.7. Pe=4 için Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,680	52,90
2	0,332	0,565	70,20
3	0,277	0,495	78,86
4	0,242	0,446	84,35
5	0,218	0,410	88,30
ORTALAMA HATA ORANI			74,92

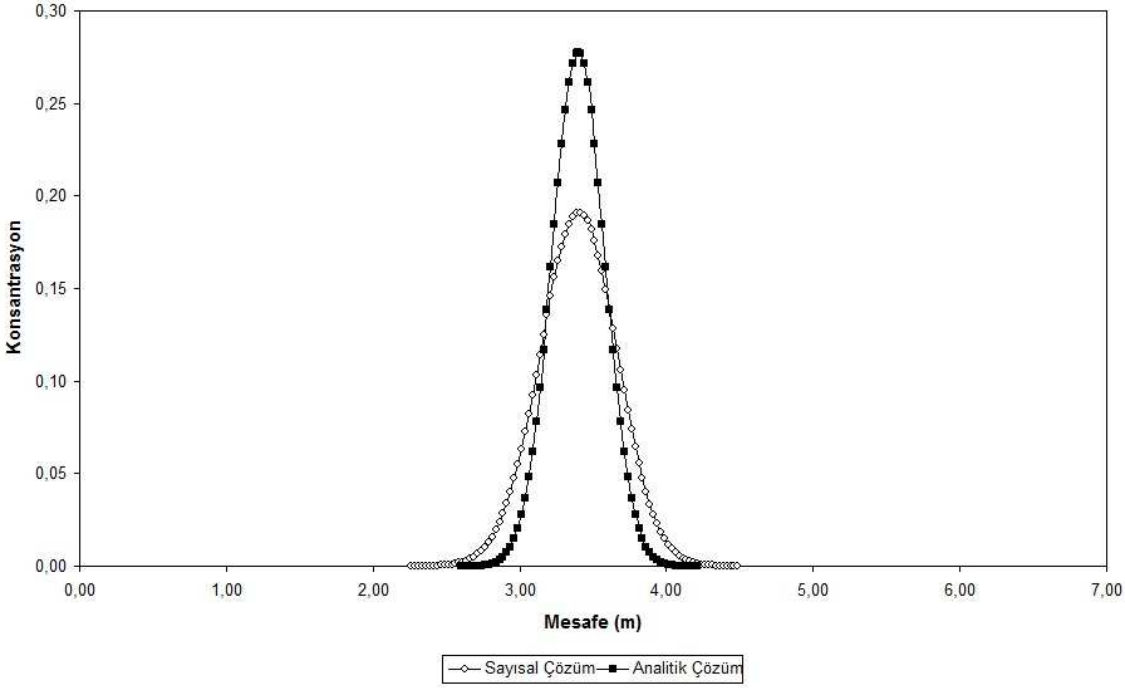
Pe=4 için Upwind-Differencing Yönteminden elde edilen sayısal bulgular ile Analitik çözümden hesaplanan kesin değerler Şekil 4.43-4.47'de görüldüğü gibi grafik üzerinde verilmiştir.



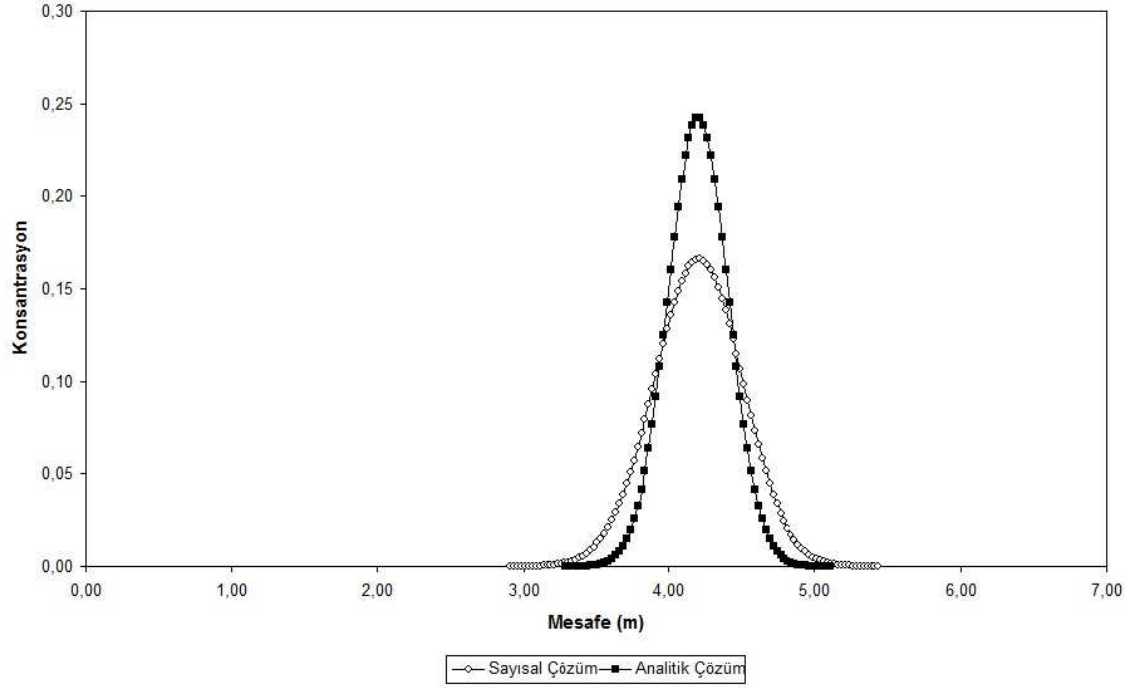
Şekil 4.43. Pe=4 ve t=1 s için Analitik çözüm ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümü



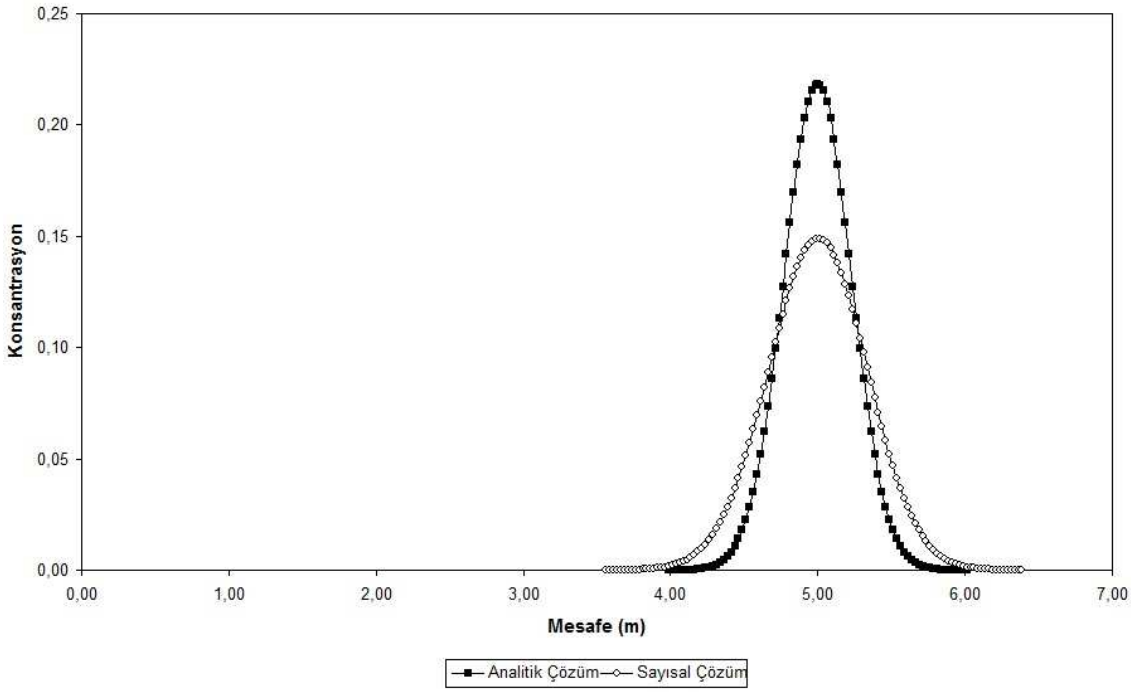
Şekil 4.44. Pe=4 ve t=2 s için Analitik çözüm ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümü



Şekil 4.45. Pe=4 ve t=3 s için Analitik çözüm ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümü



Şekil 4.46. Pe=4 ve t=4 s için Analitik çözüm ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümü



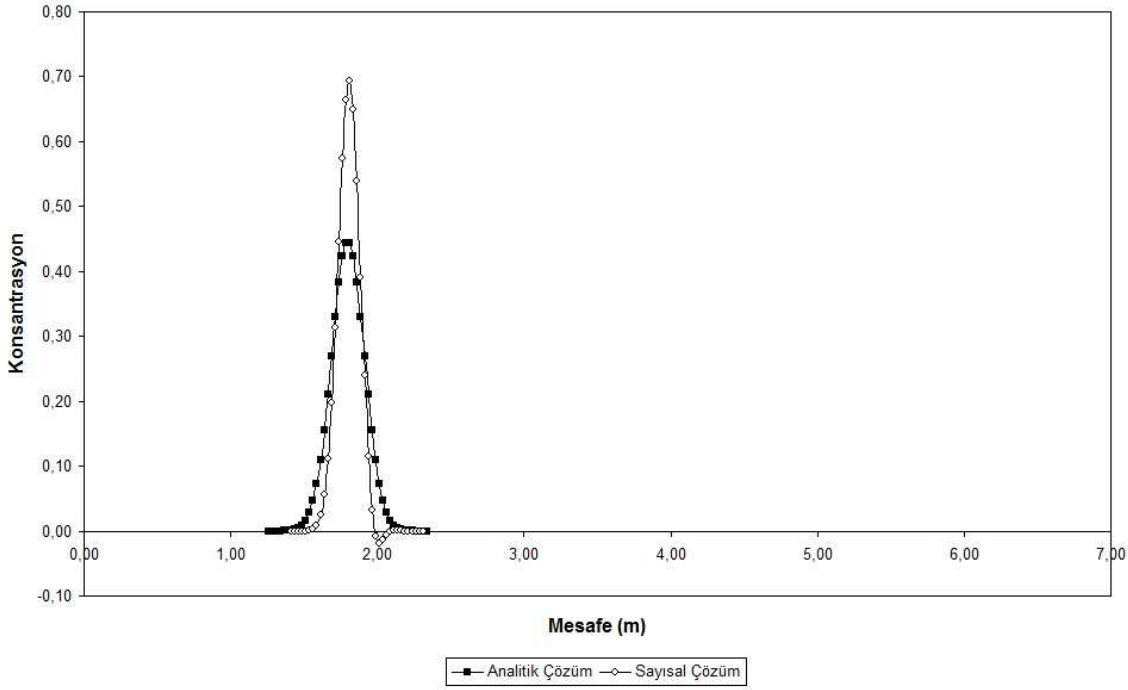
Şekil 4.47. Pe=4 ve t=5 s için Analitik çözüm ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümü

Pe=4 için Upwind-Differencing Yönteminin hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.8'de verilmiştir.

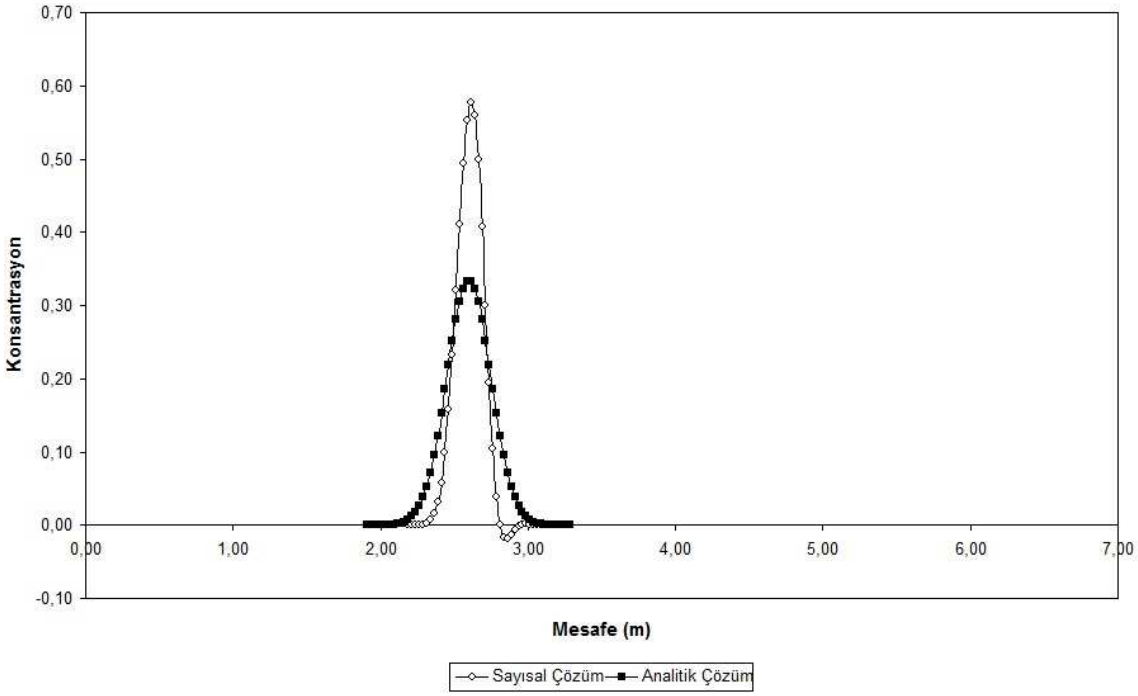
Çizelge 4.8. Pe=4 için Upwind-Differencing Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,319	-28,29
2	0,332	0,232	-30,28
3	0,277	0,191	-31,01
4	0,242	0,166	-31,39
5	0,218	0,149	-31,62
ORTALAMA HATA ORANI			30,52

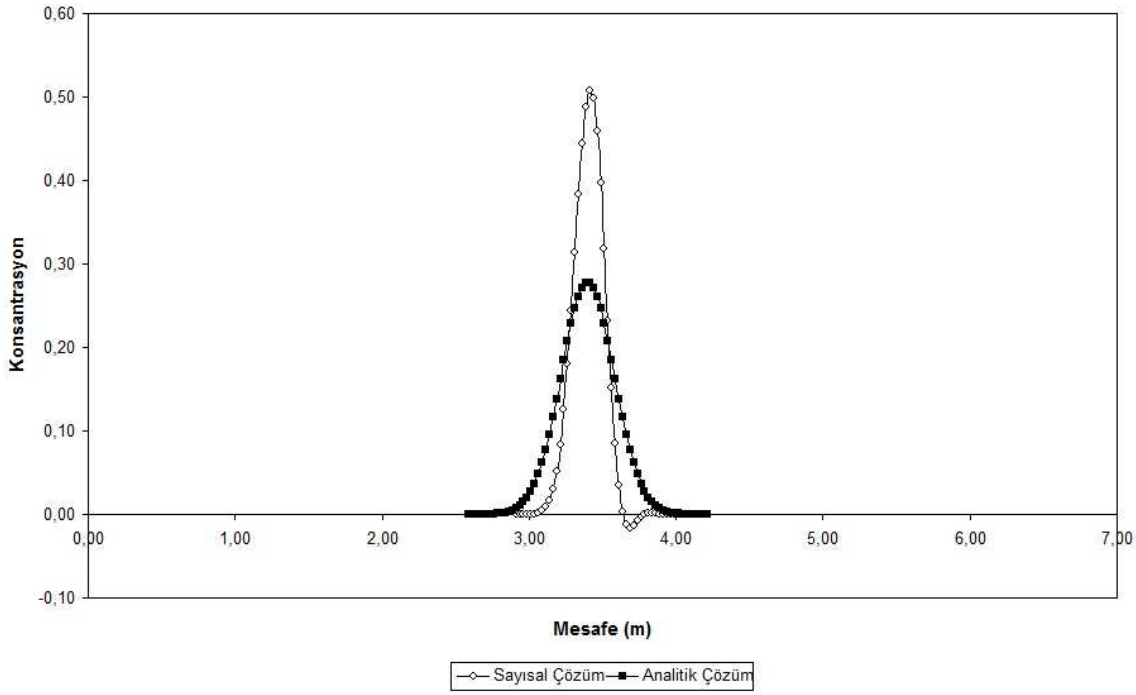
Pe=4 için Higher-Order Yönteminden elde edilen sayısal bulgular ile Analitik çözümden hesaplanan kesin değerler Şekil 4.48-4.52'de görüldüğü gibi grafik üzerinde verilmiştir.



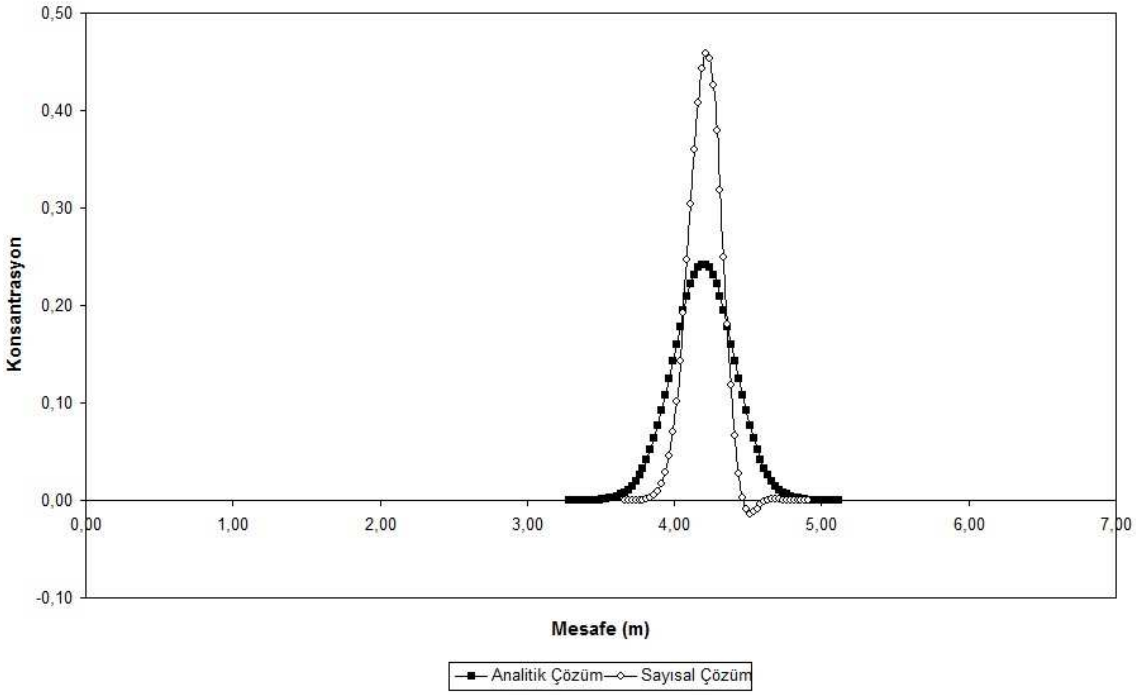
Şekil 4.48. Pe=4 ve t=1 s için Analitik çözüm ile Higher-Order Yöntemi çözümü



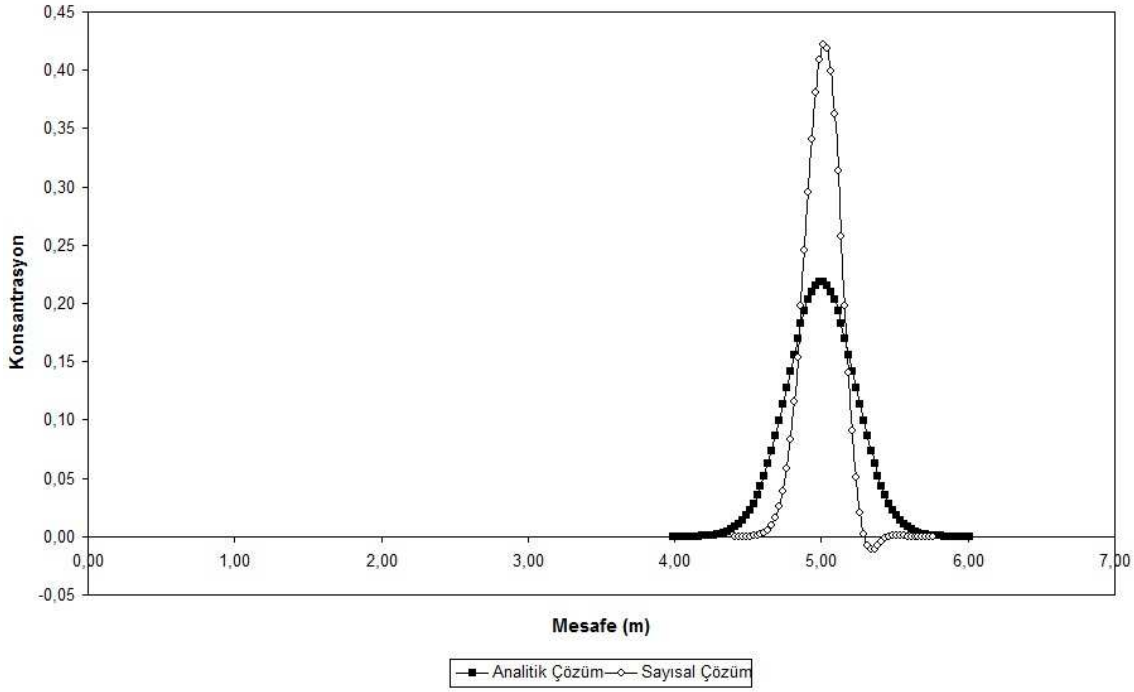
Şekil 4.49. Pe=4 ve t=2 s için Analitik çözüm ile Higher-Order Yöntemi çözümü



Şekil 4.50. Pe=4 ve t=3 s için Analitik çözüm ile Higher-Order Yöntemi çözümü



Şekil 4.51. Pe=4 ve t=4 s için Analitik çözüm ile Higher-Order Yöntemi çözümü



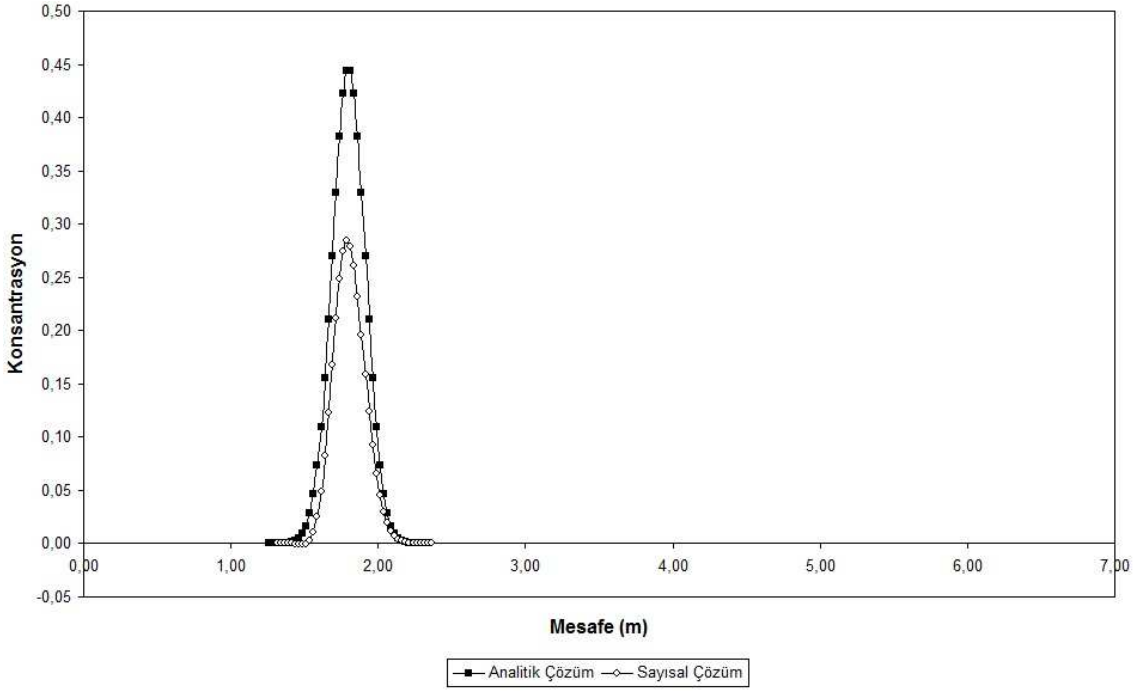
Şekil 4.52. Pe=4 ve t=5 s için Analitik çözüm ile Higher-Order Yöntemi çözümü

Pe=4 için Higher-Order Yönteminin hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.9'da verilmiştir.

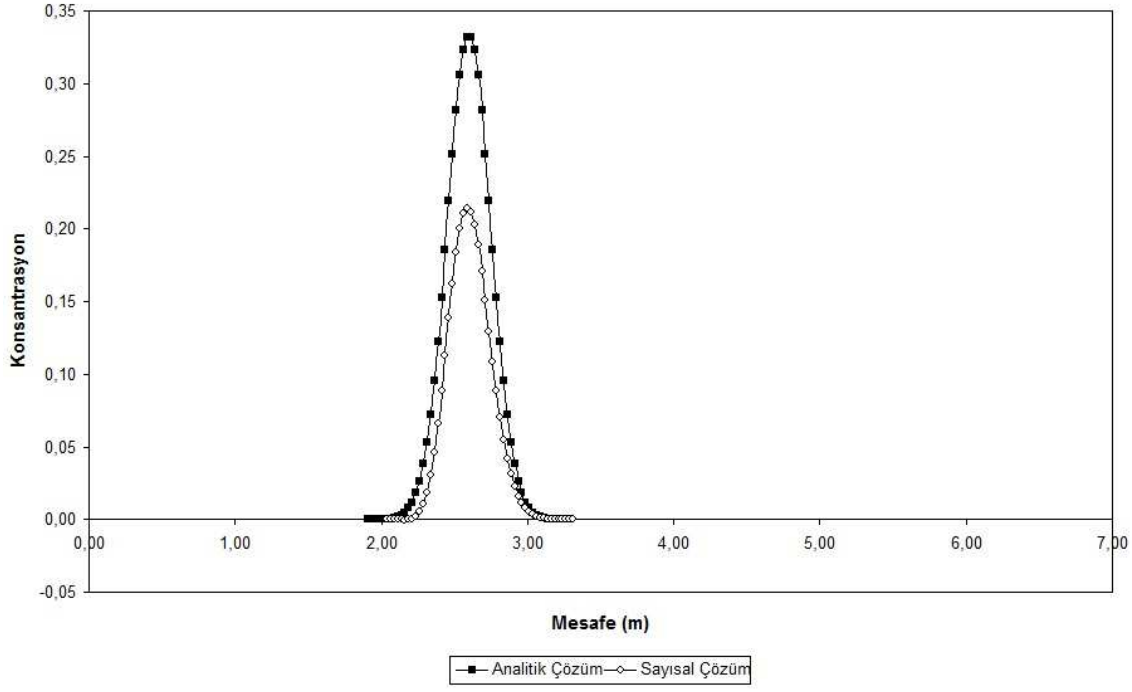
Çizelge 4.9. Pe=4 için Higher-Order Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,694	56,17
2	0,332	0,577	73,81
3	0,277	0,507	83,34
4	0,242	0,459	89,47
5	0,218	0,422	93,80
ORTALAMA HATA ORANI			79,32

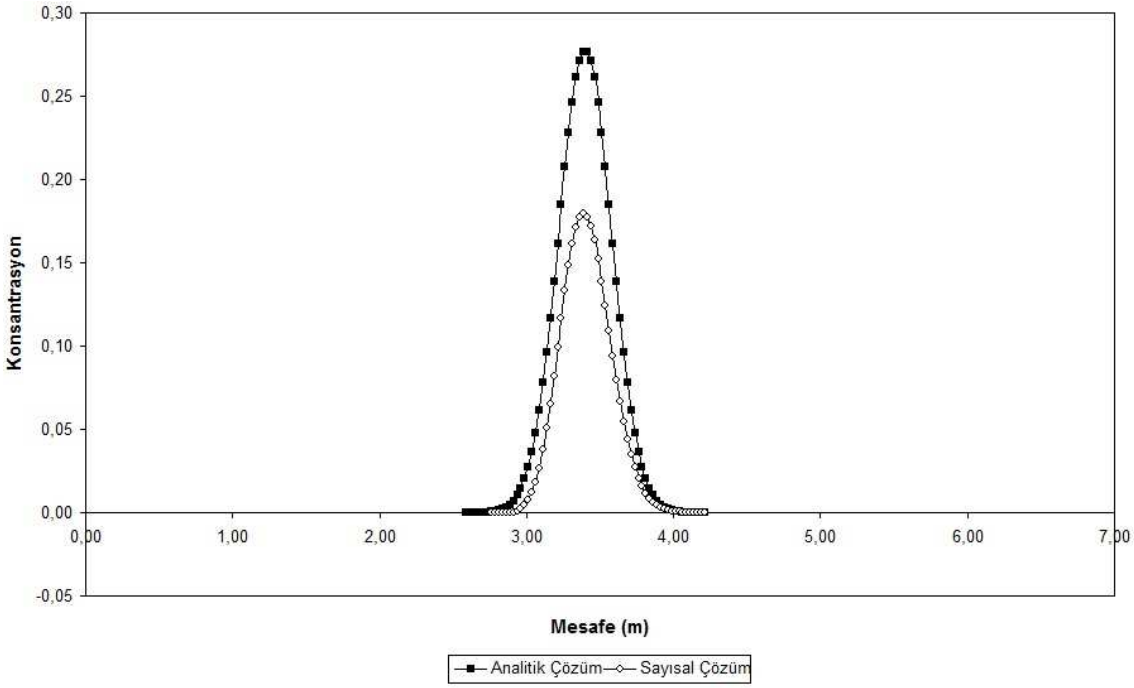
Pe=4 için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yönteminden elde edilen sayısal bulgular ile Analitik çözümden hesaplanan kesin değerler Şekil 4.53-4.57'de görüldüğü gibi grafik üzerinde verilmiştir.



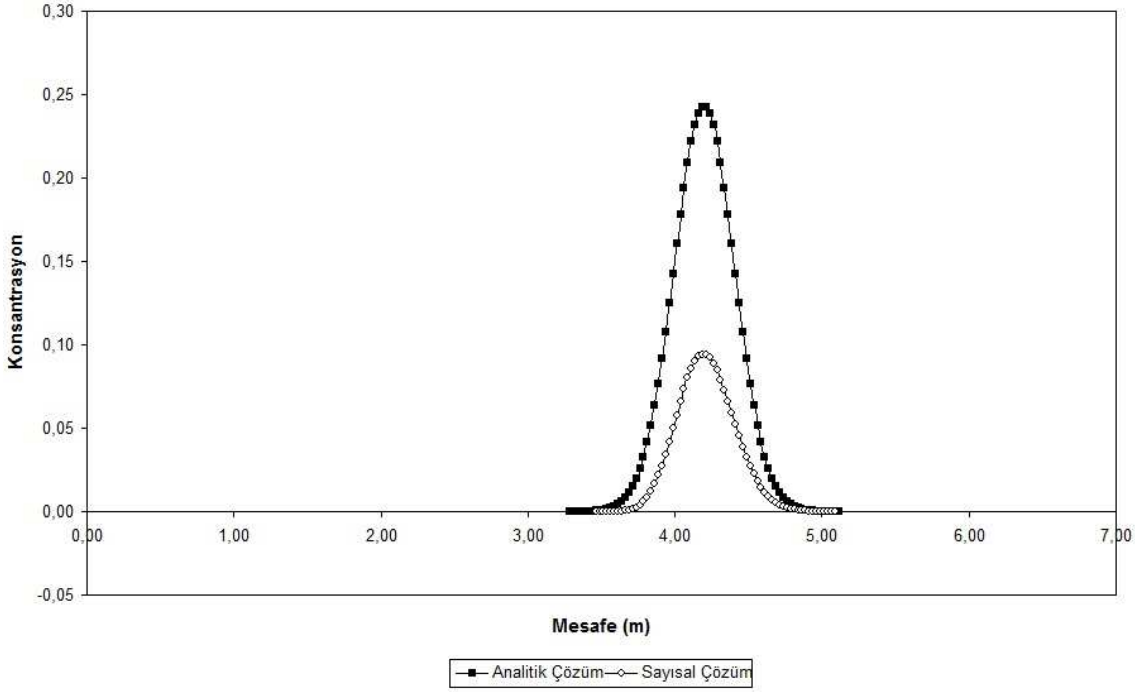
Şekil 4.53. Pe=4 ve t=1 s için Analitik çözüm ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi çözümü



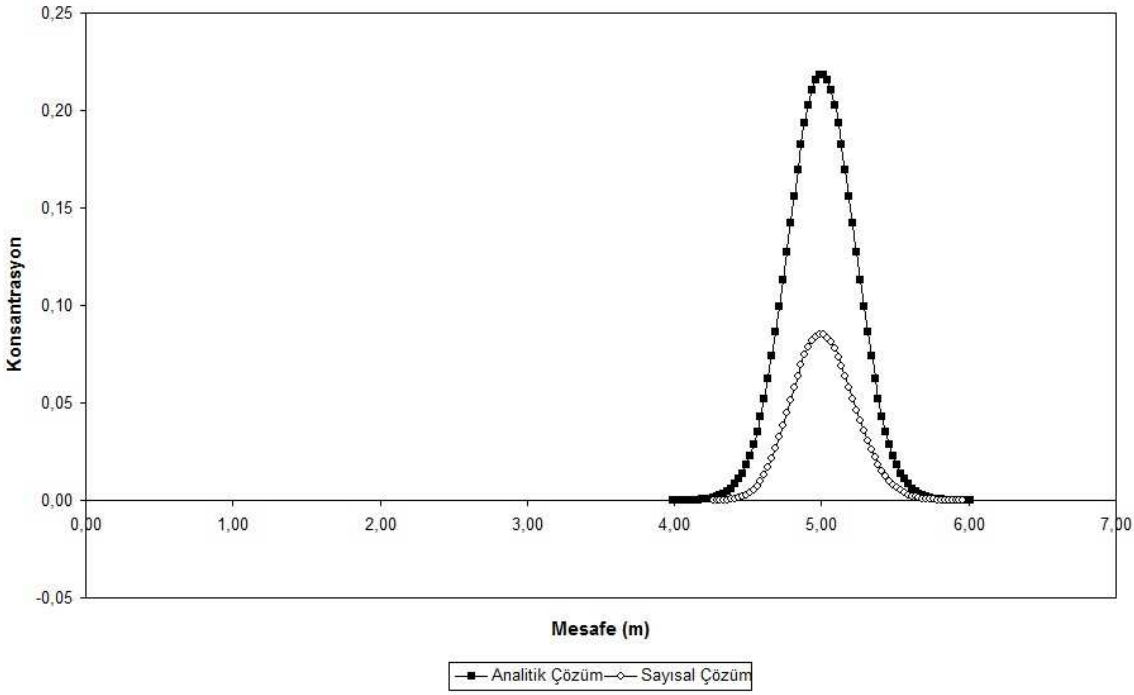
Şekil 4.54. Pe=4 ve t=2 s için Analitik çözüm ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi çözümü



Şekil 4.55. Pe=4 ve t=3 s için Analitik çözüm ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi çözümü



Şekil 4.56. Pe=4 ve t=4 s için Analitik çözüm ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi çözümü



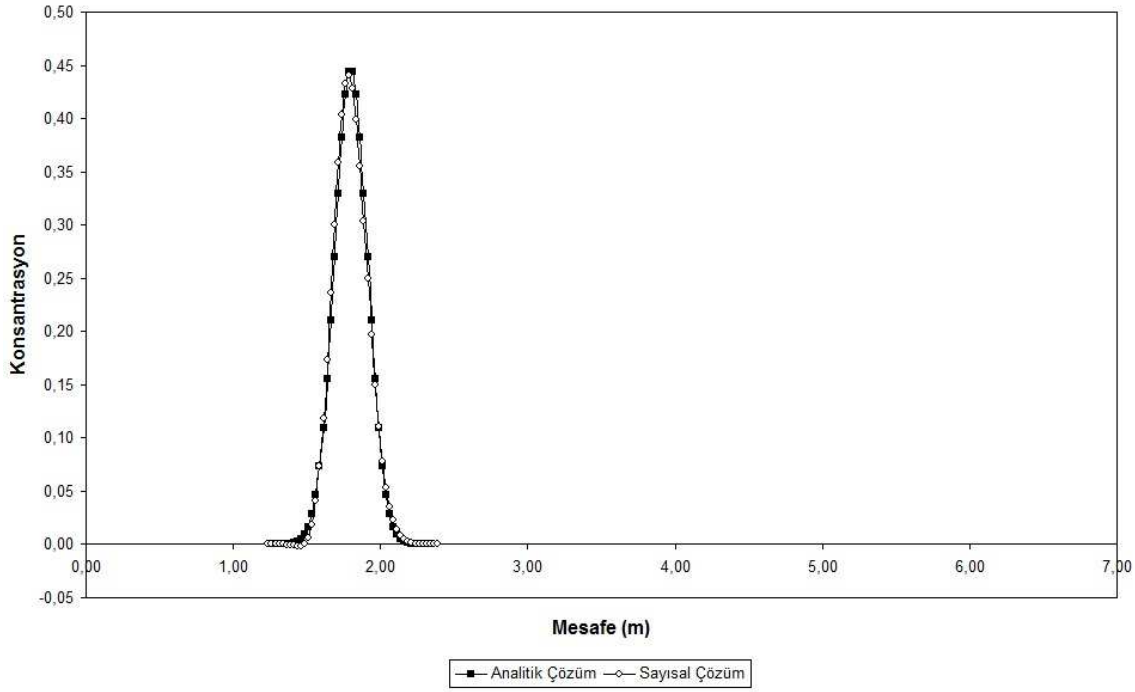
Şekil 4.57. Pe=4 ve t=5 s için Analitik çözüm ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi çözümü

Pe=4 için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yönteminin hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.20'de verilmiştir.

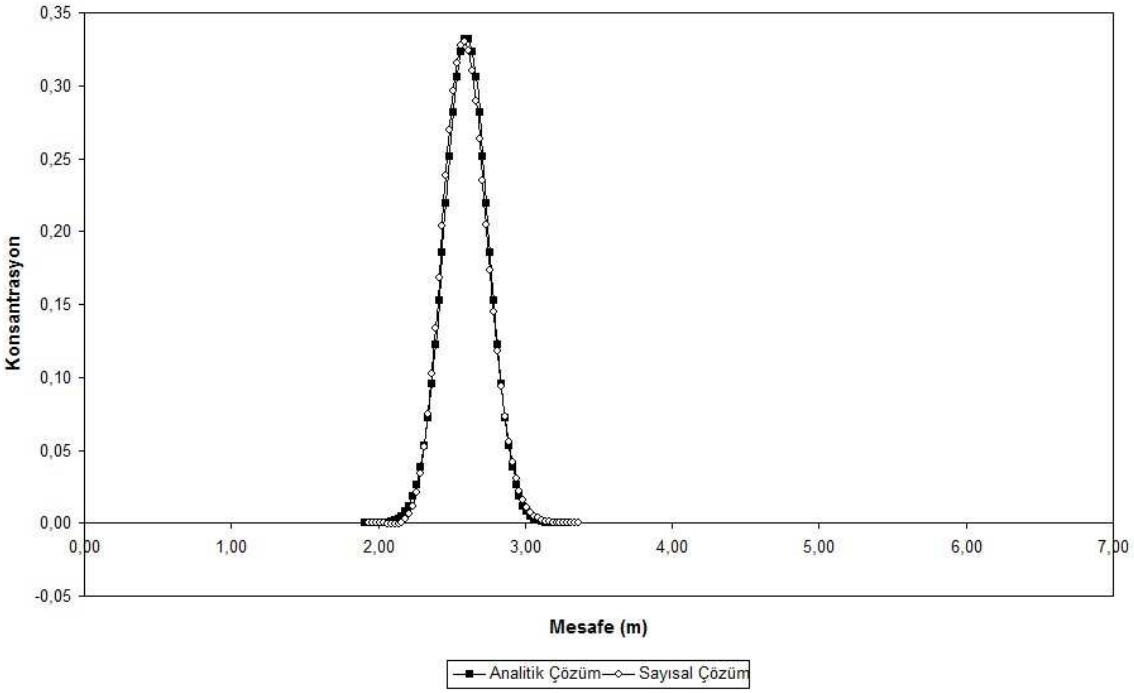
Çizelge 4.20. Pe=4 için Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,284	-36,03
2	0,332	0,214	-35,46
3	0,277	0,179	-35,20
4	0,242	0,094	-61,09
5	0,218	0,085	-60,99
ORTALAMA HATA ORANI			45,75

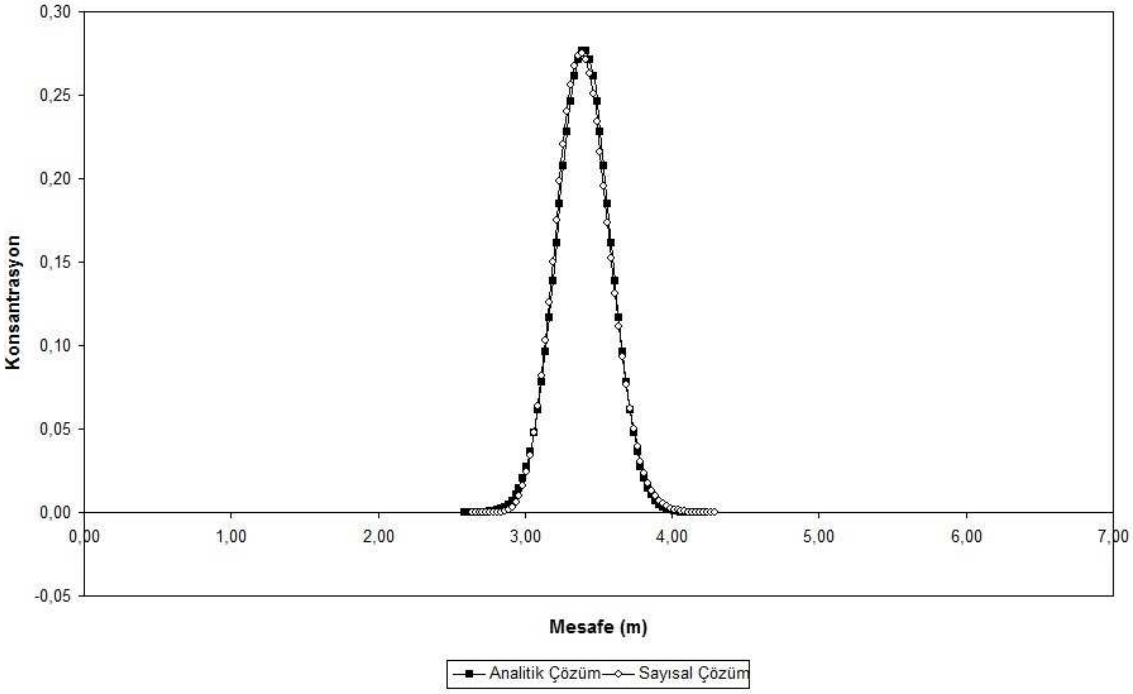
Pe=4 için Açık Tip MacCormack Yönteminden elde edilen sayısal bulgular ile Analitik çözümden hesaplanan kesin değerler Şekil 4.58-4.62'de görüldüğü gibi grafik üzerinde verilmiştir.



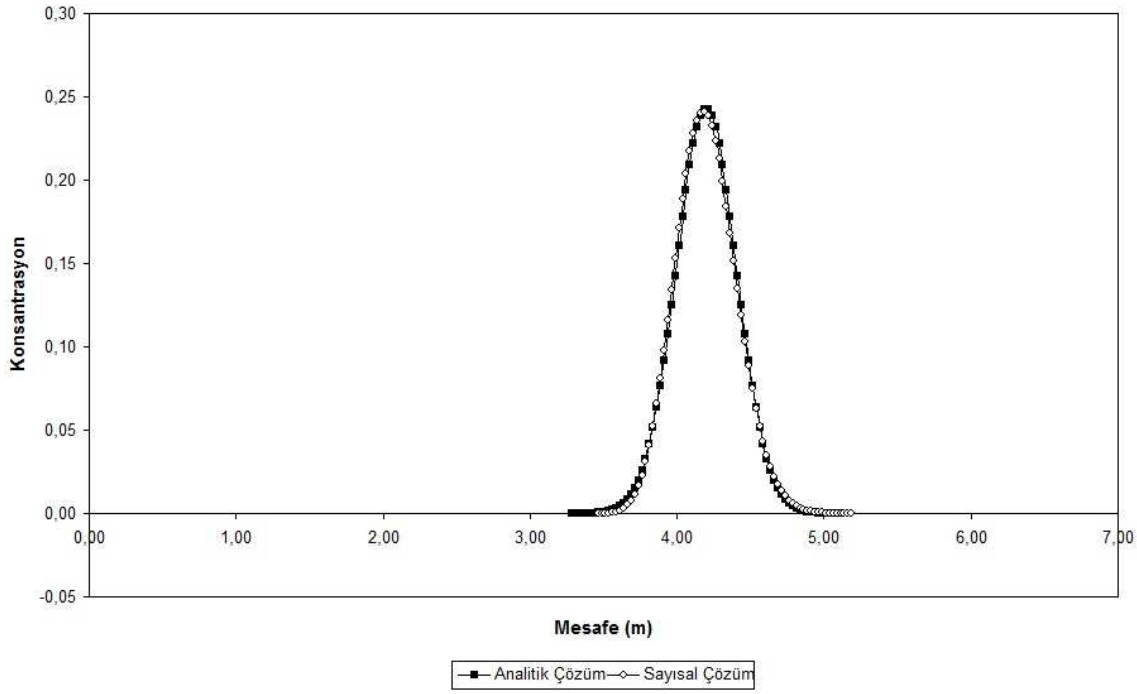
Şekil 4.58. Pe=4 ve t=1 s için Analitik çözüm ile Açık Tip MacCormack Yöntemi çözümü



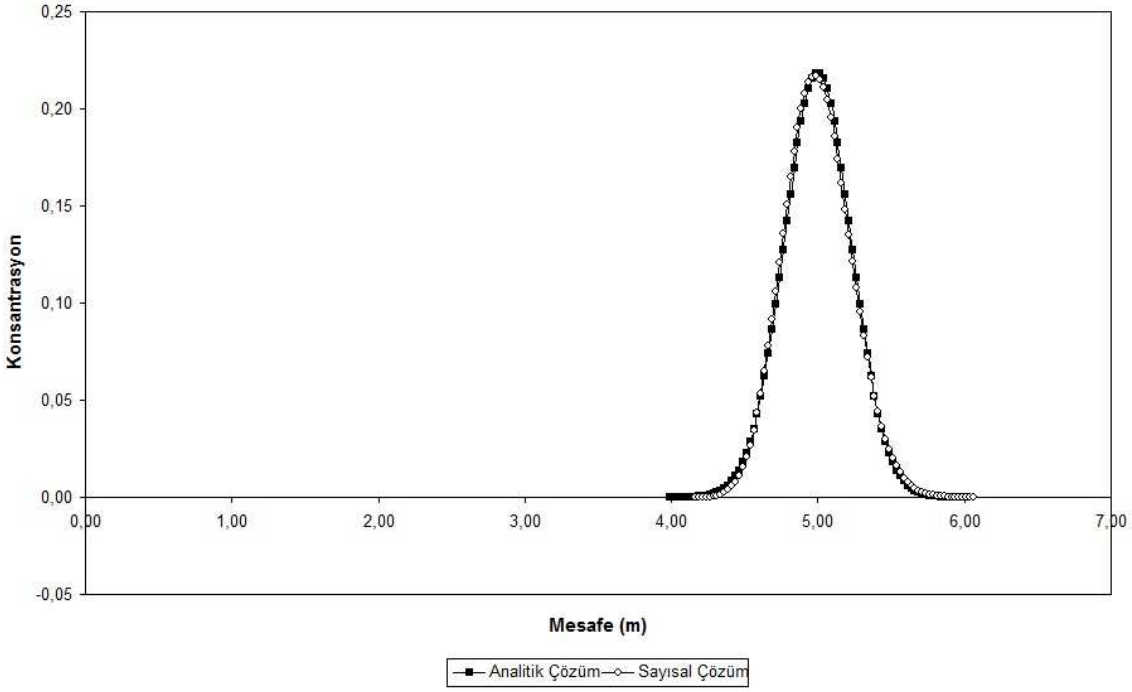
Şekil 4.59. Pe=4 ve t=2 s için Analitik çözüm ile Açık Tip MacCormack Yöntemi çözümü



Şekil 4.60. Pe=4 ve t=3 s için Analitik çözüm ile Açık Tip MacCormack Yöntemi çözümü



Şekil 4.61. Pe=4 ve t=4 s için Analitik çözüm ile Açık Tip MacCormack Yöntemi çözümü



Şekil 4.62. Pe=4 ve t=5 s için Analitik çözüm ile Açık Tip MacCormack Yöntemi çözümü

Pe=4 için Açık Tip MacCormack Yönteminin hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.21'de verilmiştir.

Çizelge 4.21. Pe=4 için Açık Tip MacCormack Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,441	-0,83
2	0,332	0,330	-0,69
3	0,277	0,275	-0,54
4	0,242	0,241	-0,45
5	0,218	0,217	-0,41
ORTALAMA HATA ORANI			0,59

Kullanılan 5 adet sonlu fark yönteminin hata oranları Çizelge 4.22'de görülmektedir. Çözümü yapılan ilk 4 yöntemin hata oranları oldukça fazladır. Açık Tip FTCS ve Lax Yöntemi ile Higher-Order Yöntemi çözümlerinden elde edilen sonuçlar analitik çözümden elde edilen sonuçlardan daha büyük değerlerde, Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Upwind-Differencing Yöntemi çözümlerinden elde edilen sonuçlar ise analitik çözümden elde edilen sonuçlardan daha küçük değerlerdedir. Bu nedenle Péclet sayısı yine 4 alınarak Karma Yöntemler ile çözüm yapılmıştır.

Çizelge 4.22. Ortalama hata oranları

SAYISAL YÖNTEMLER	ORTALAMA HATA ORANI (%)
Açık Tip FTCS ve Lax	74,92
Upwind-Differencing	30,52
Higher-Order	79,32
Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel	45,75
Açık Tip MacCormack	0,59

Yapılan çalışmalara göre analitik sonuca en yakın sonucu MacCormack Yöntemi vermiştir.

4.8. Karma Yöntemler

Bölüm 4.7'deki hata analizlerinin incelenmesi sonucunda, sayısal çözümleri analitik sonuçlardan büyük çıkan yöntemler ile küçük çıkan yöntemler birbirleriyle eşleştirilerek aritmetik ortalamaya dayalı karma bir çözüm yöntemi ele alınmıştır. Pe=4 için elde edilen 4 adet karma yöntem aşağıda verilmiştir.

CTCS+FTCS

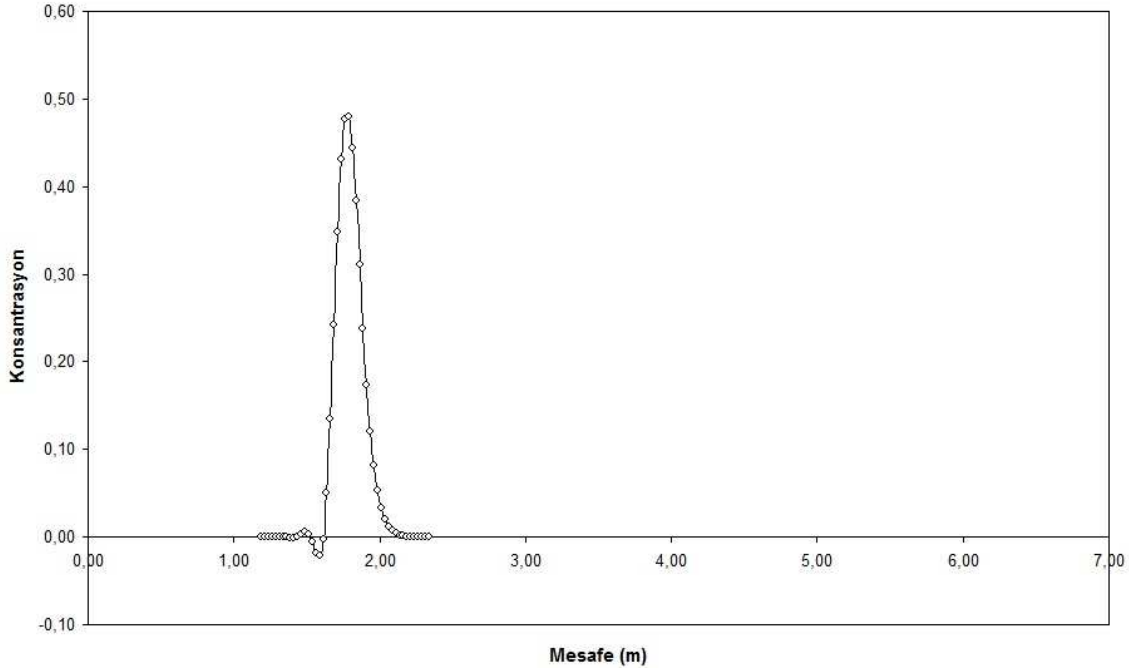
CTCS+Higher-Order

Upwind-Differencing+FTCS

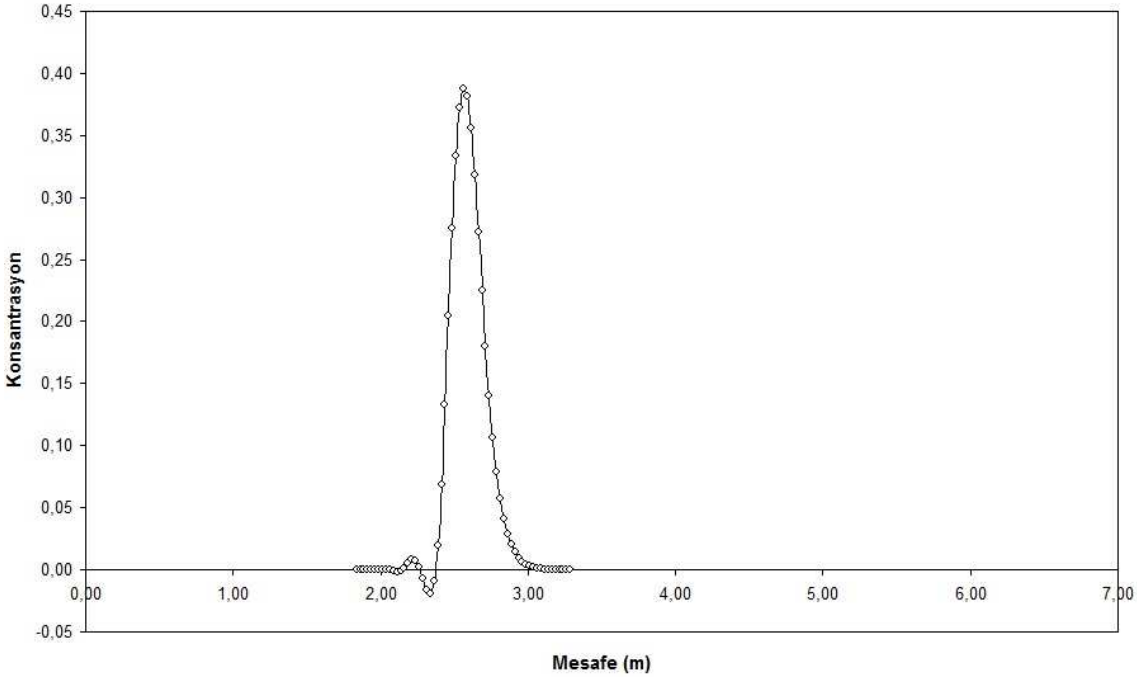
Upwind-Differencing+Higher-Order

4.8.1. Ctcs+ftcs karma yöntemi

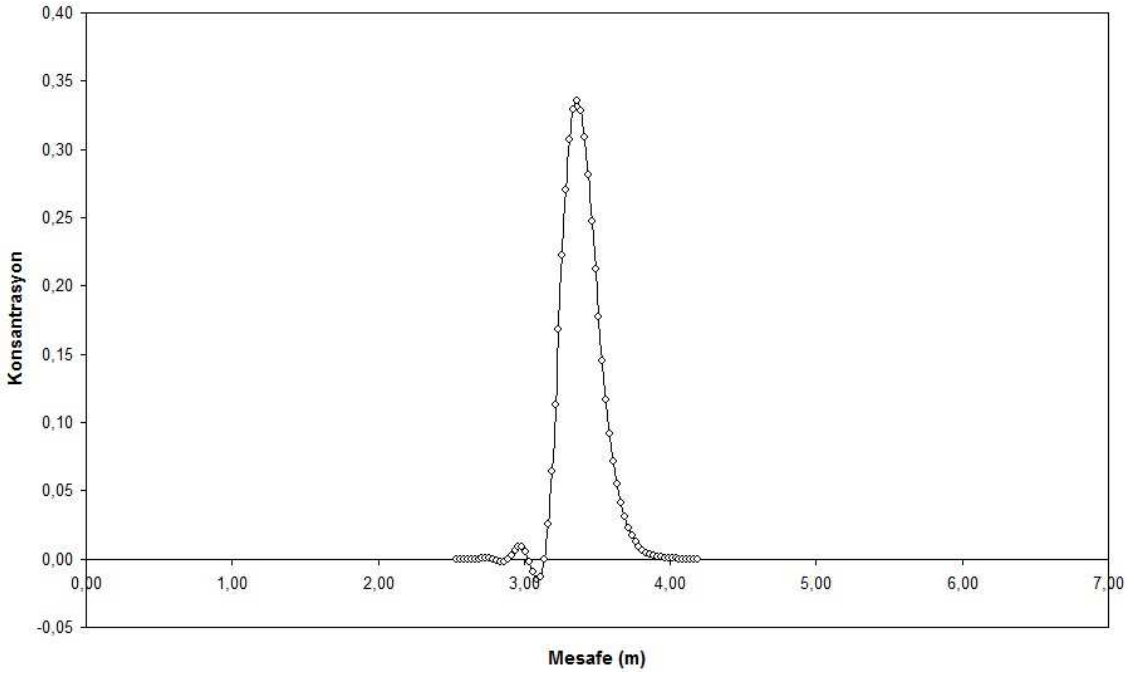
Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminin Pe=4 için elde edilen sonuçları aritmetik ortalama alınarak karma bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemdeki sonuçlar ile Analitik Yöntem çözümünden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekil 4.63-4.67'de bu karma yöntemin Pe=4 için sonuçları grafik üzerinde gösterilmiştir.



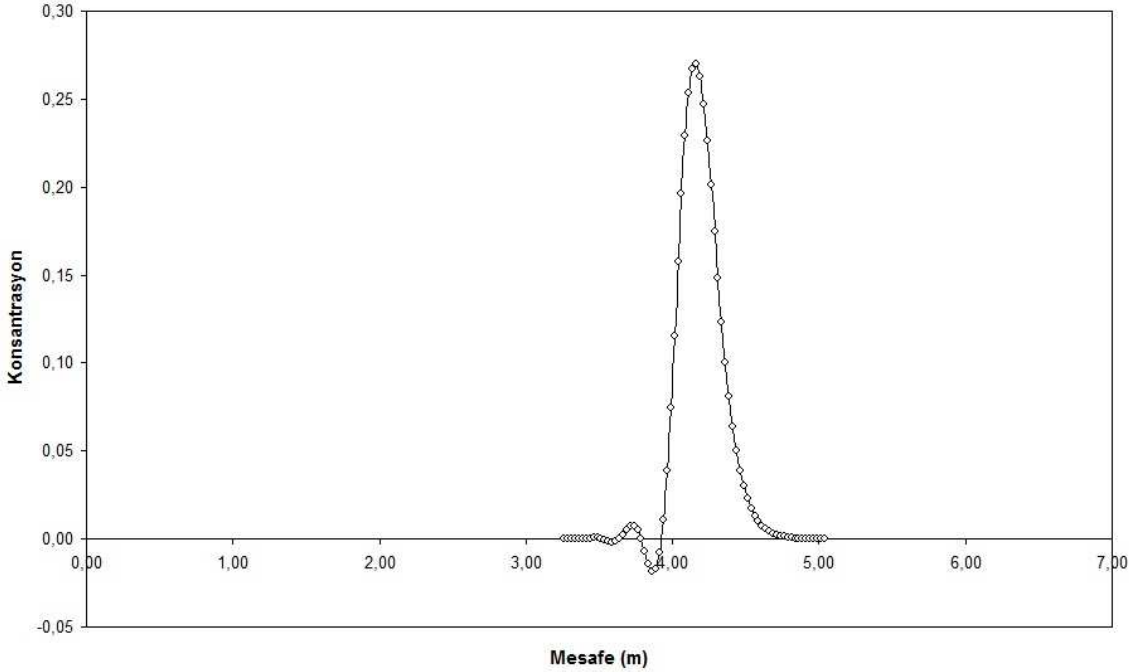
Şekil 4.63. Pe=4 ve t=1 s için CTCS+FTCS Yöntemi çözümü



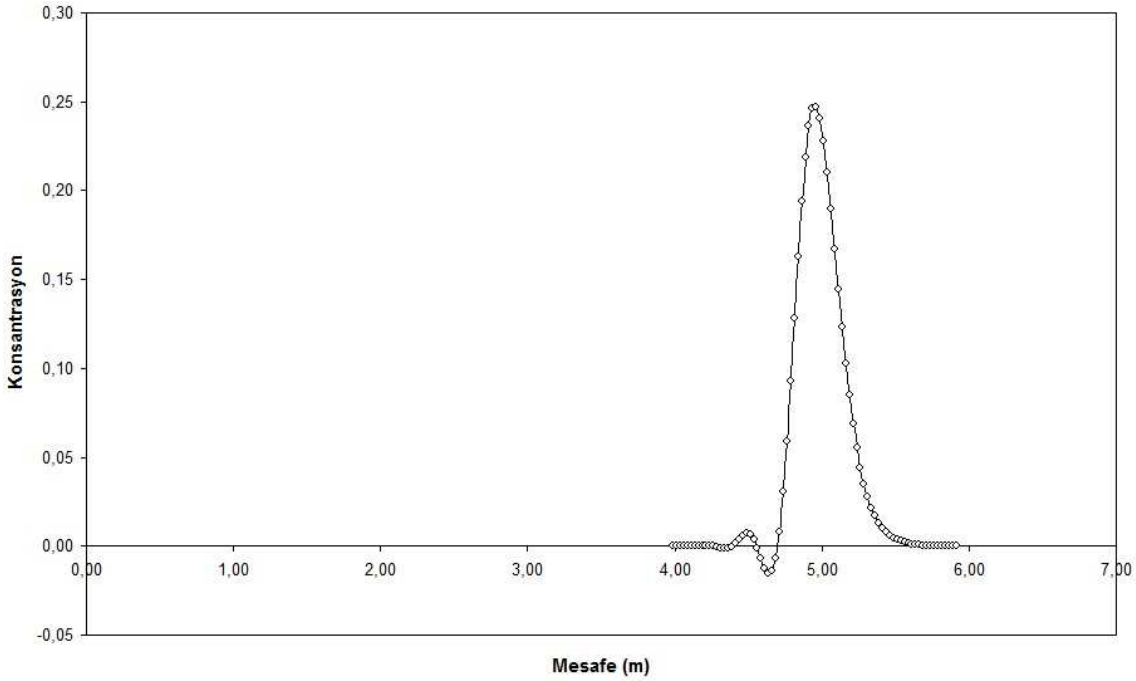
Şekil 4.64. Pe=4 ve t=2 s için CTCS+FTCS Yöntemi çözümü



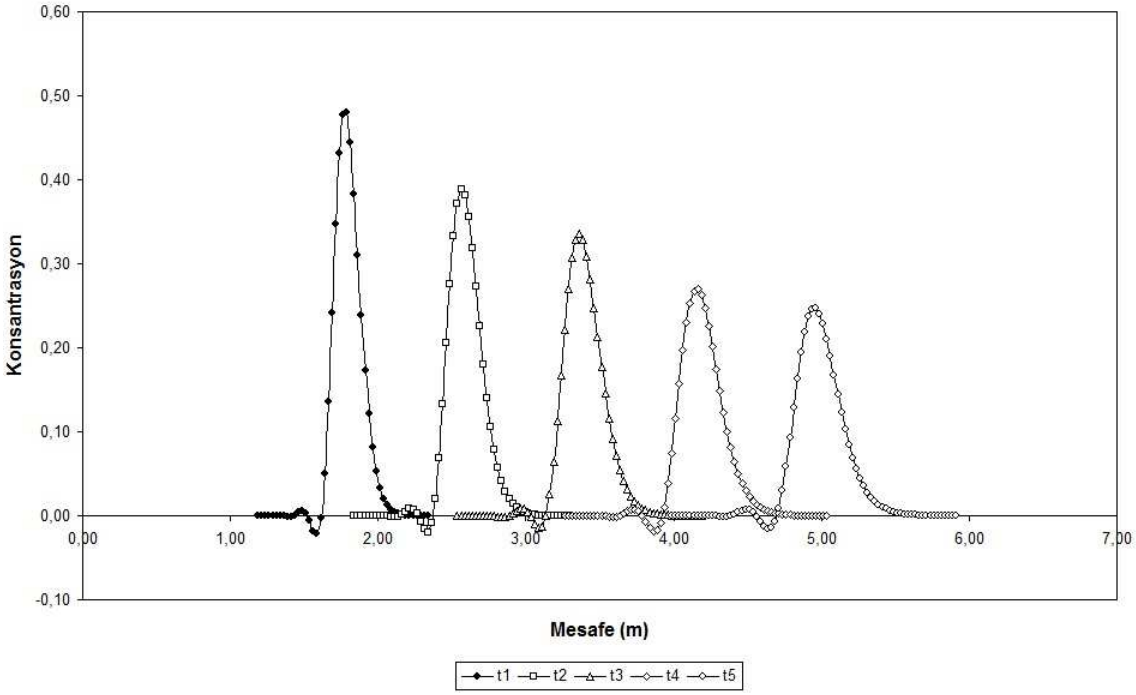
Şekil 4.65 Pe=4 ve t=3 s için CTCS+FTCS Yöntemi çözümü



Şekil 4.66. Pe=4 ve t=4 s için CTCS+FTCS Yöntemi çözümü

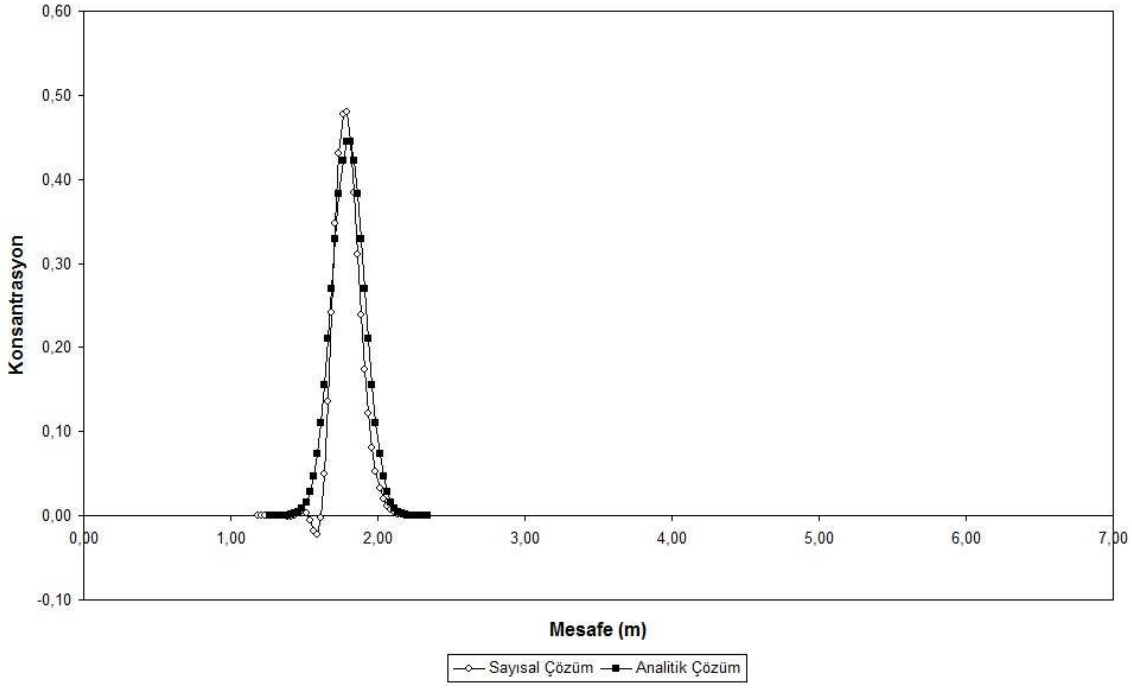


Şekil 4.67. Pe=4 ve t=5 s için CTCS+FTCS Yöntemi çözümü

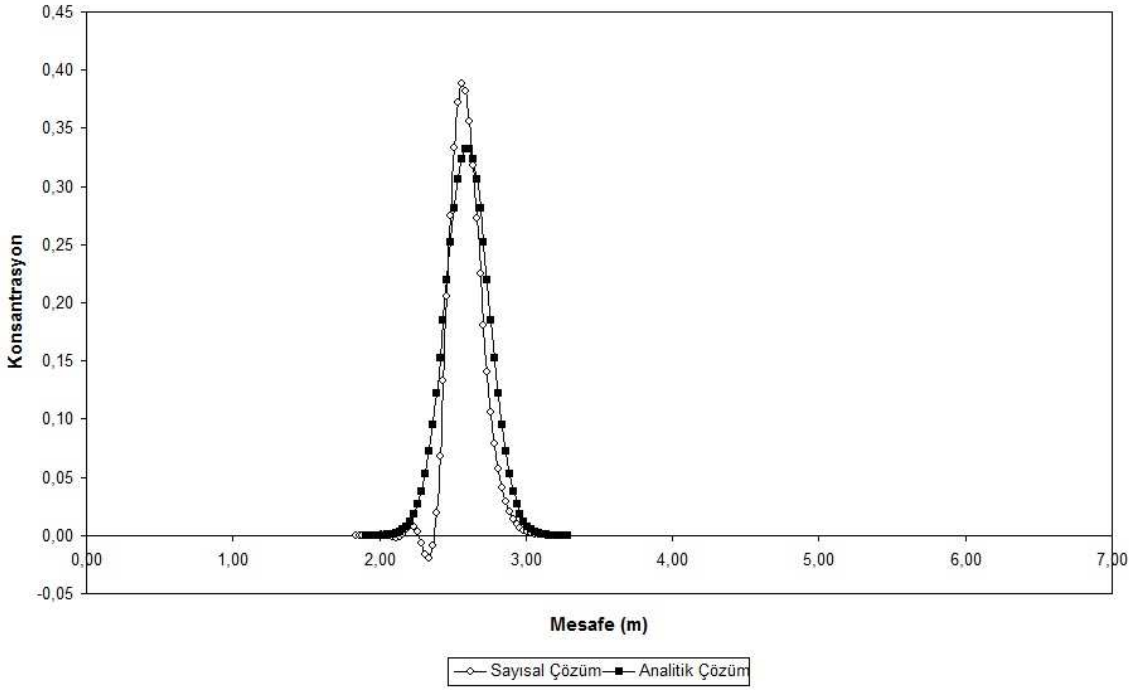


Şekil 4.68. Pe=4 için 5 saniyelik CTCS+FTCS Yöntemi Çözümü

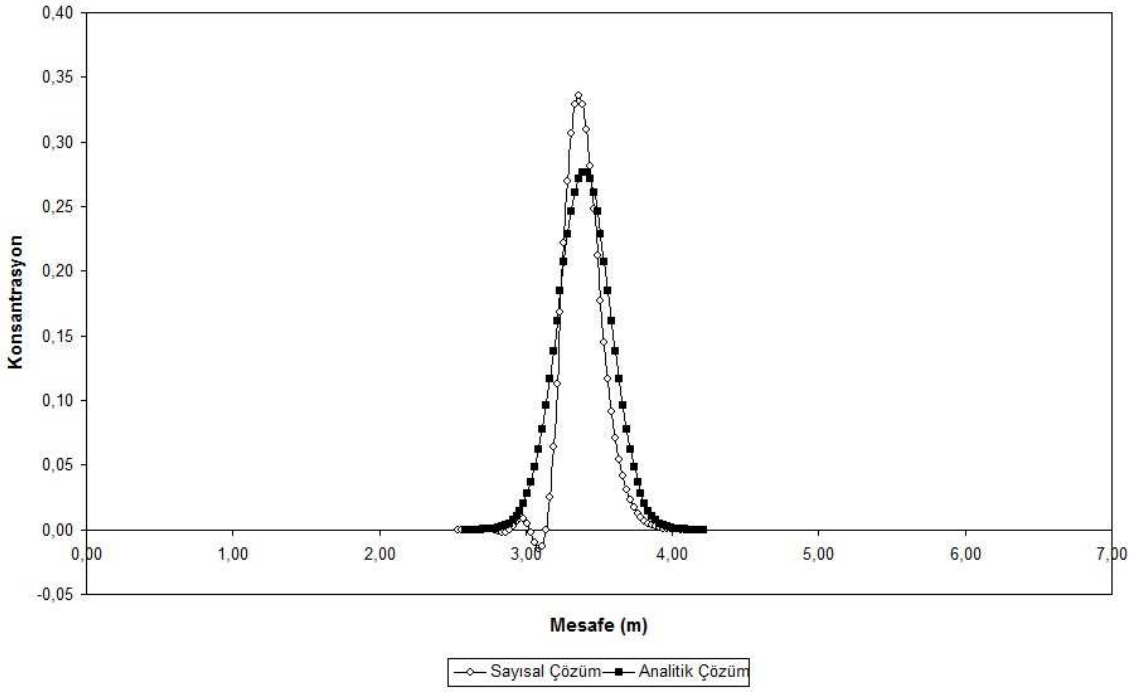
Şekil 4.69-4.73'de CTCS-FTCS karma yöntemi ile Analitik çözümler karşılaştırılmıştır.



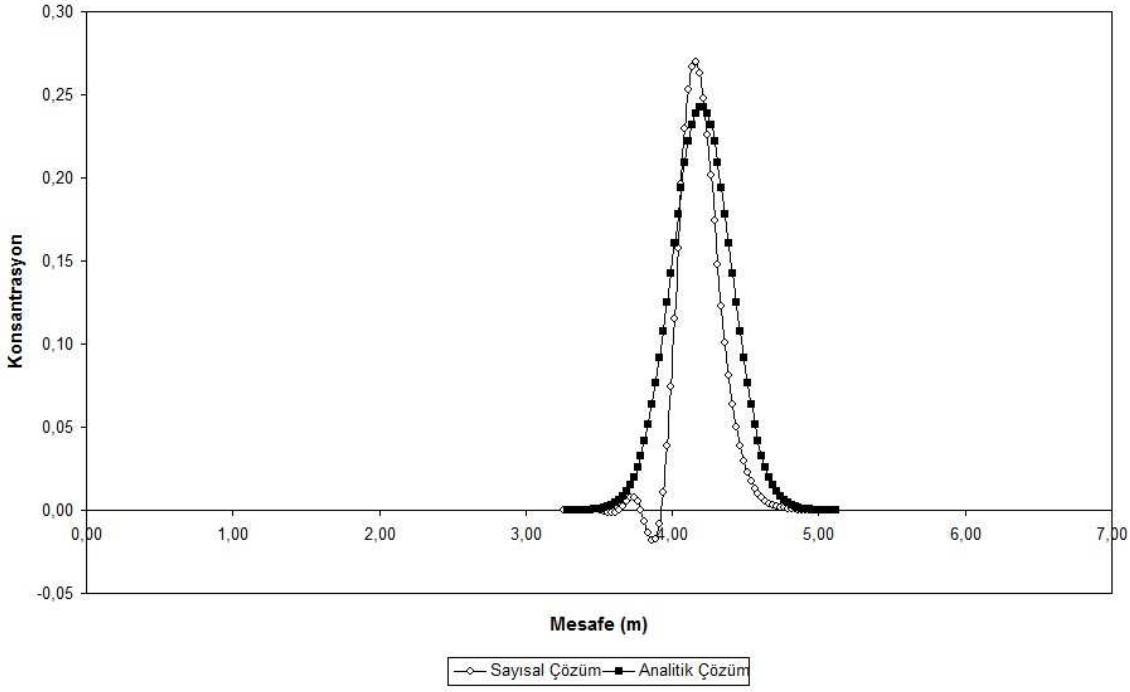
Şekil 4.69. Pe=4 ve t=1 s için CTCS+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



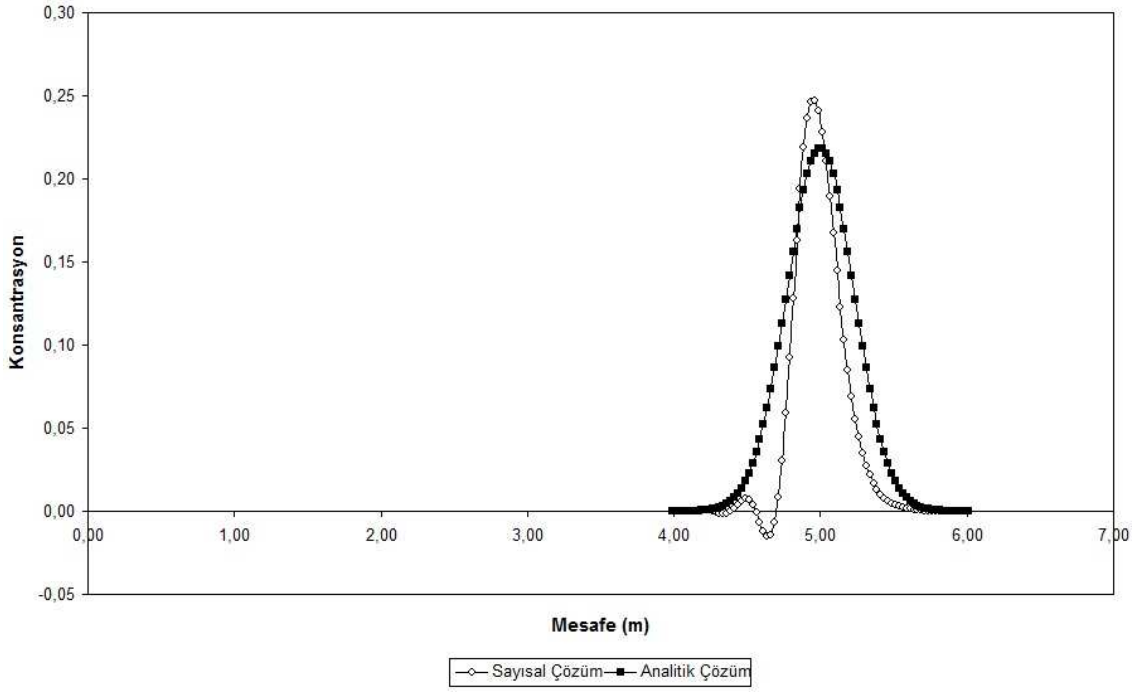
Şekil 4.70. Pe=4 ve t=2 s için CTCS+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.71. Pe=4 ve t=3 s için CTCS+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.72. Pe=4 ve t=4 s için CTCS+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.73. Pe=4 ve t=5 s için CTCS+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması

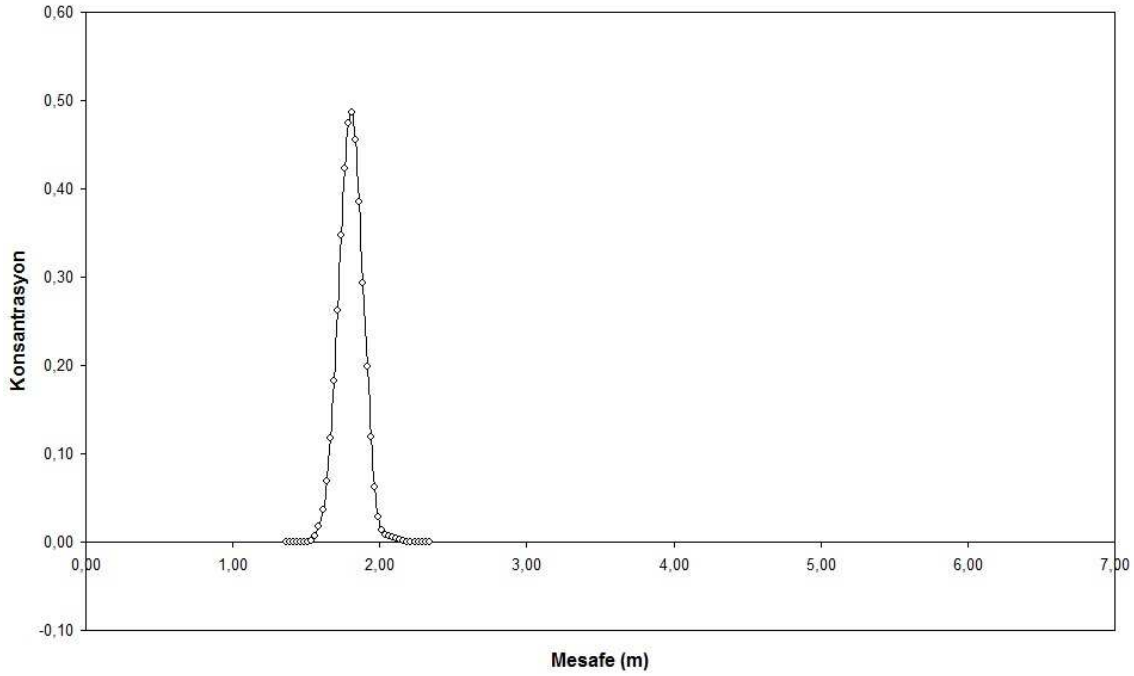
Bu karma yöntem için hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.23'de görülmektedir.

Çizelge 4.23. Pe=4 için CTCS+FTCS Yönteminin hata oranı

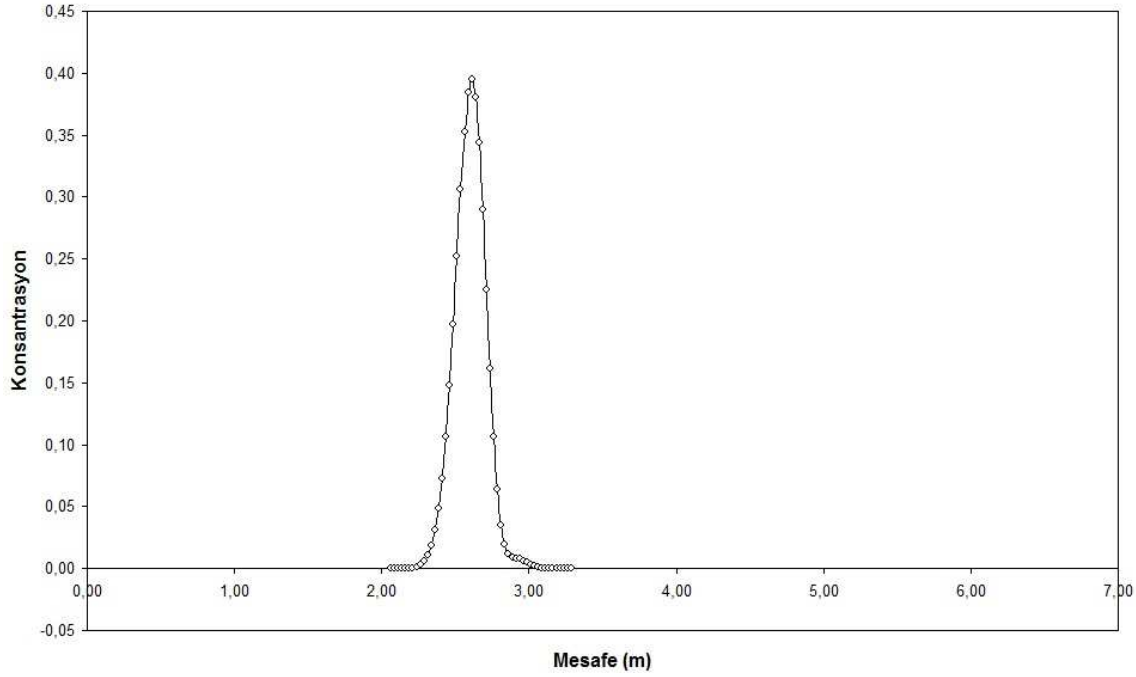
t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,479	7,88
2	0,332	0,388	16,80
3	0,277	0,336	21,43
4	0,242	0,270	11,36
5	0,218	0,247	13,40
ORTALAMA HATA ORANI			14,17

4.8.2. Ctcs+higher-order karma yöntemi

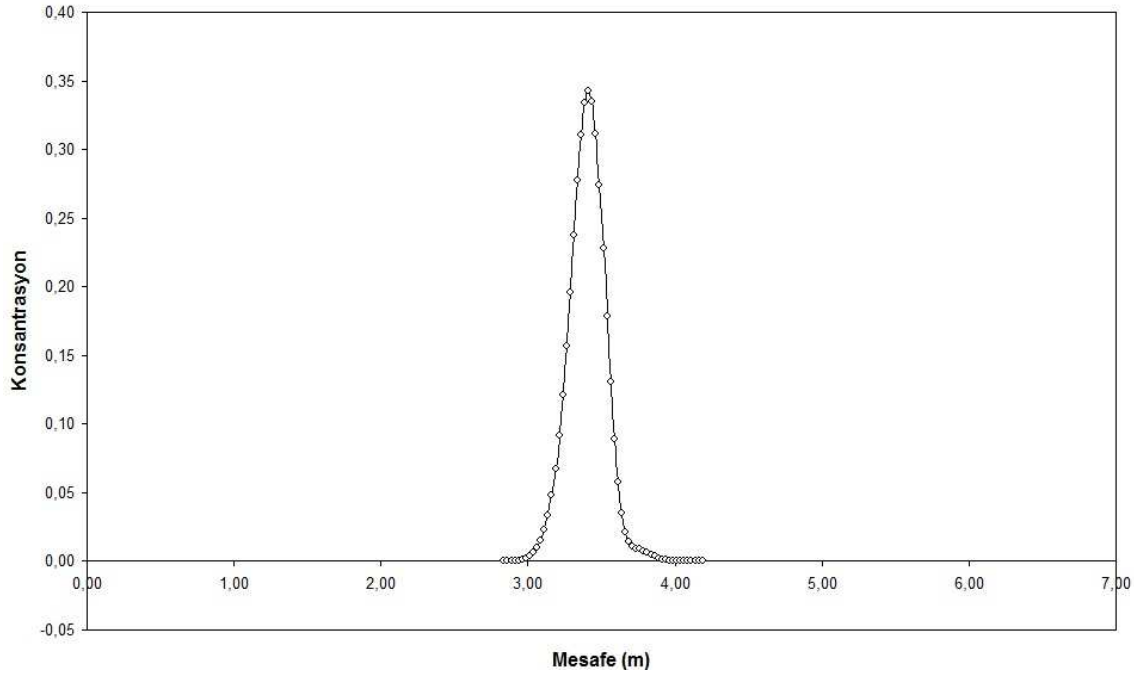
Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi ile Higher-Order Yönteminin Pe=4 için elde edilen sonuçları aritmetik ortalama alınarak karma bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemdeki sonuçlar ile Analitik Yöntem çözümünden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekil 4.74-4.78'de bu karma yöntemin Pe=4 için sonuçları grafik üzerinde gösterilmiştir.



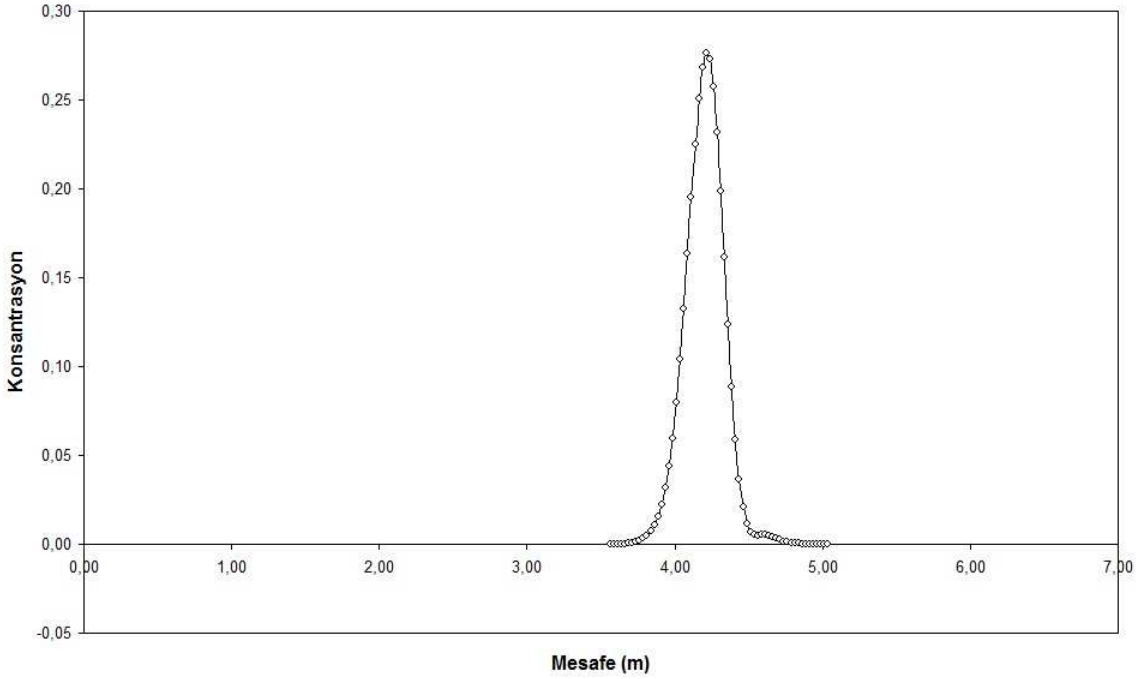
Şekil 4.74. Pe=4 ve t=1 s için CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü



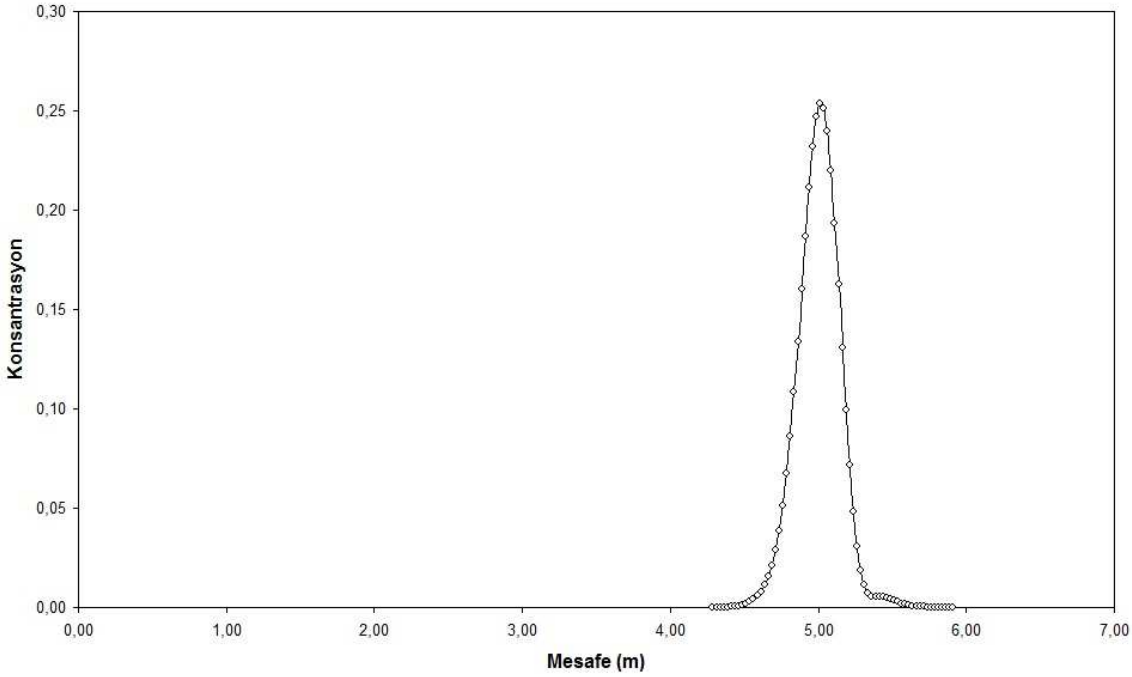
Şekil 4.75. Pe=4 ve t=2 s için CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü



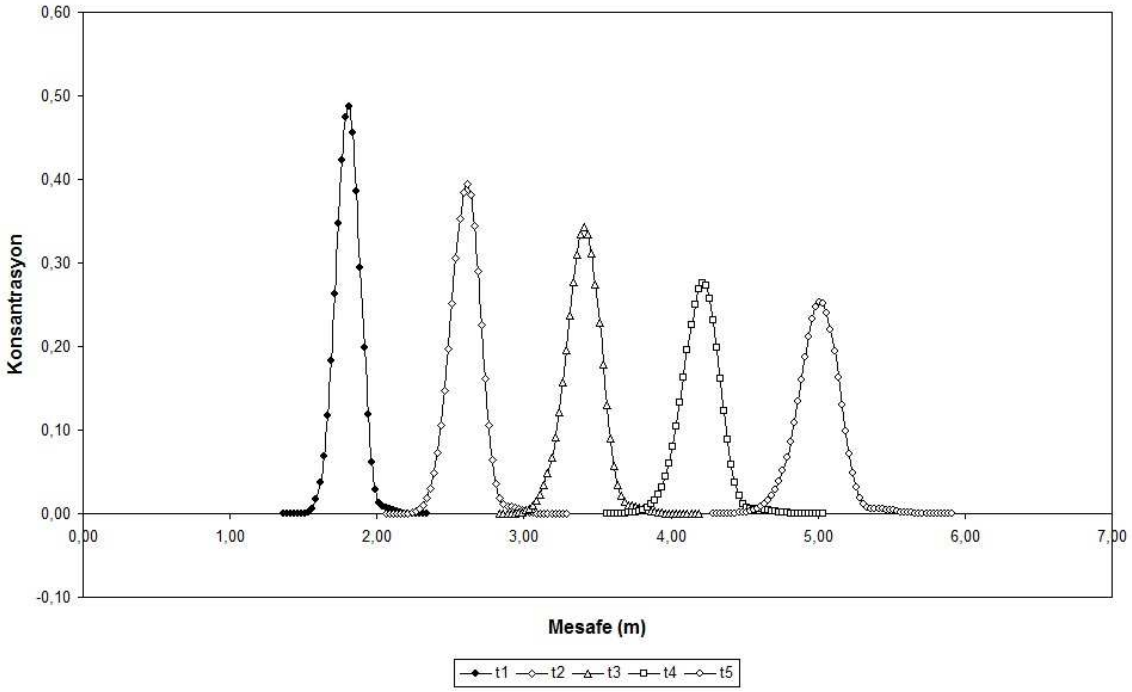
Şekil 4.76. Pe=4 ve t=3 s için CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü



Şekil 4.77. Pe=4 ve t=4 s için CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü

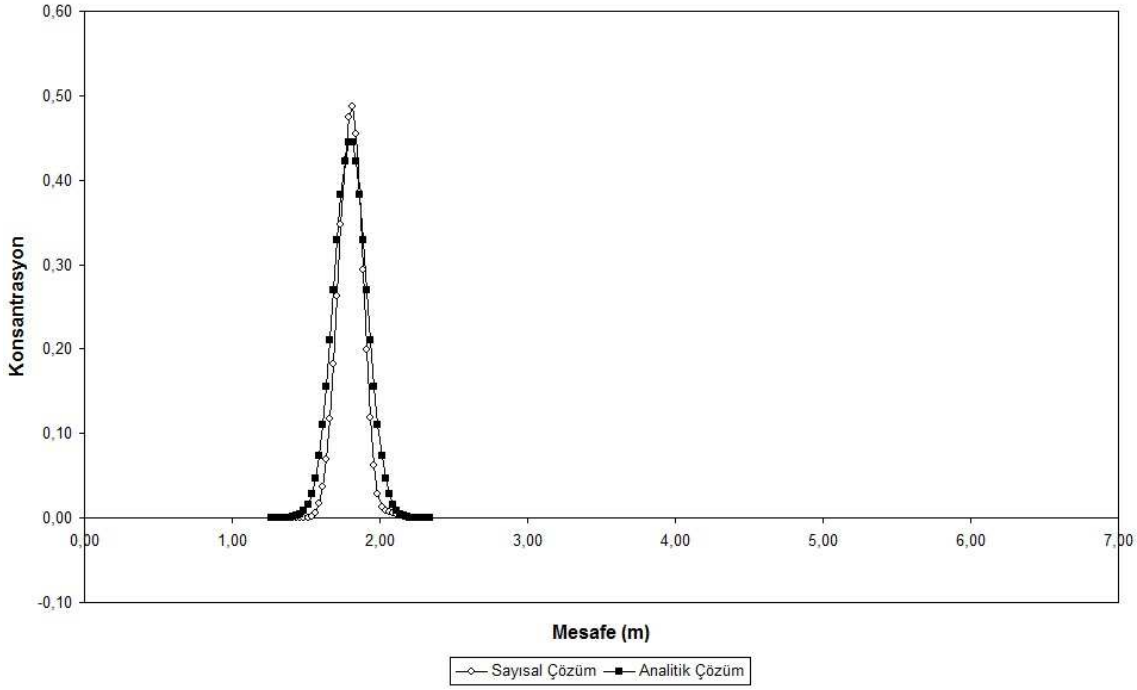


Şekil 4.78. Pe=4 ve t=5 s için CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü

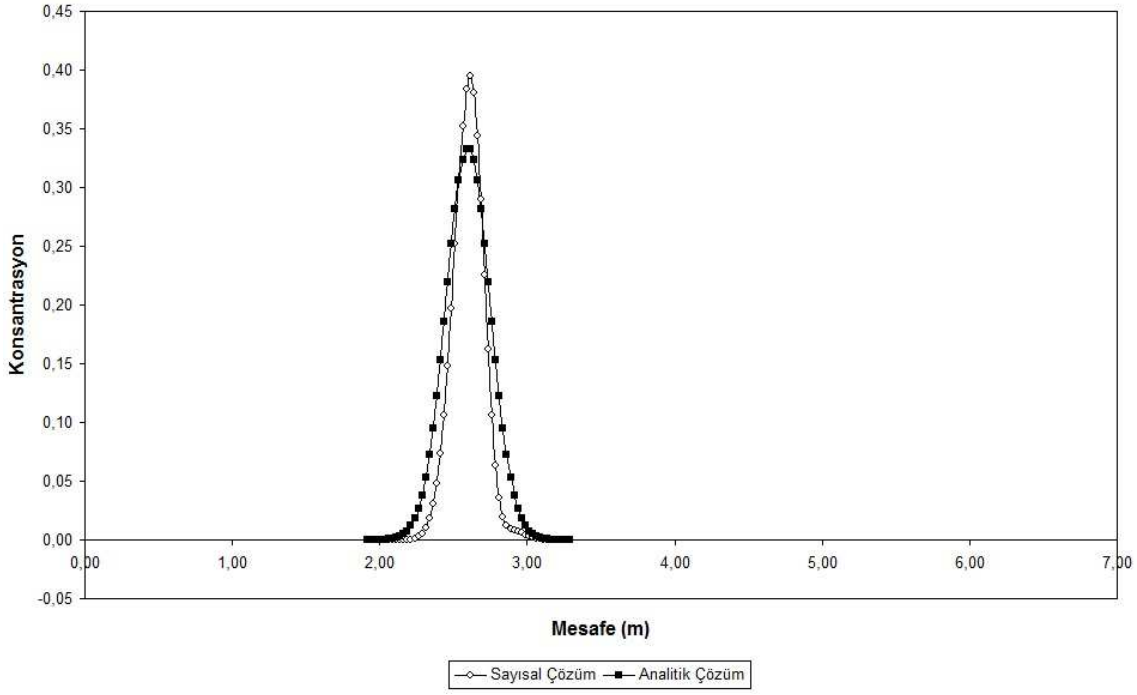


Şekil 4.79. Pe=4 için 5 saniyelik CTCS+Higher-Order Yöntemi çözümü

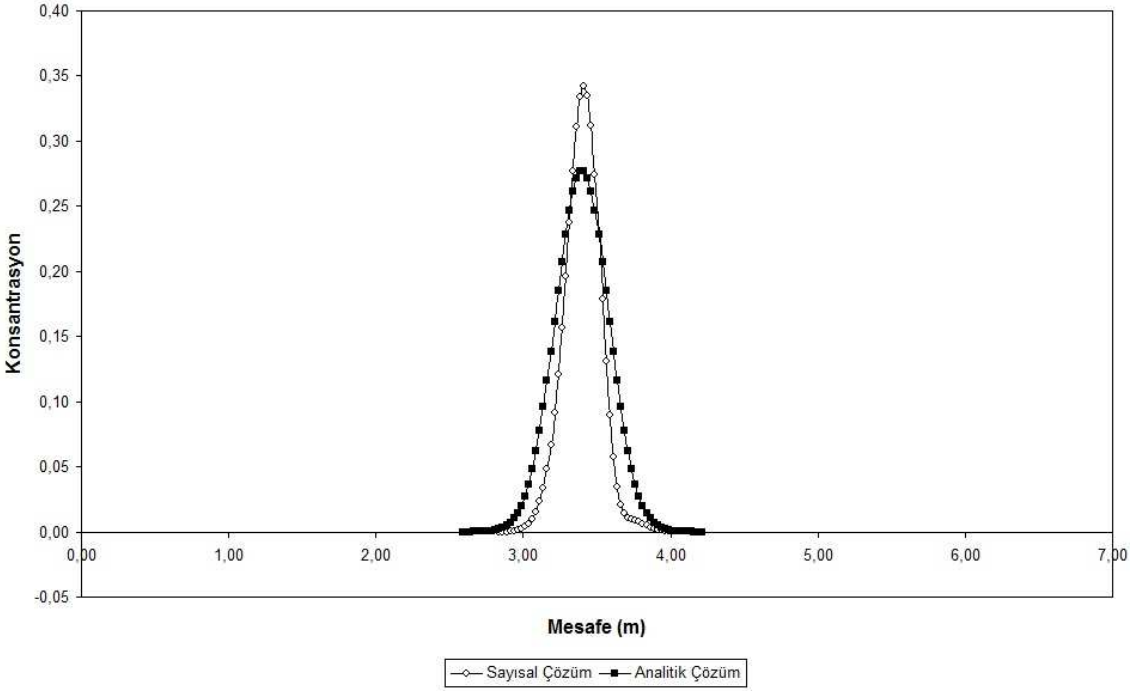
Şekil 4.80-4.84'de CTCS+Higher-Order karma yöntemi ile Analitik çözümler karşılaştırılmıştır.



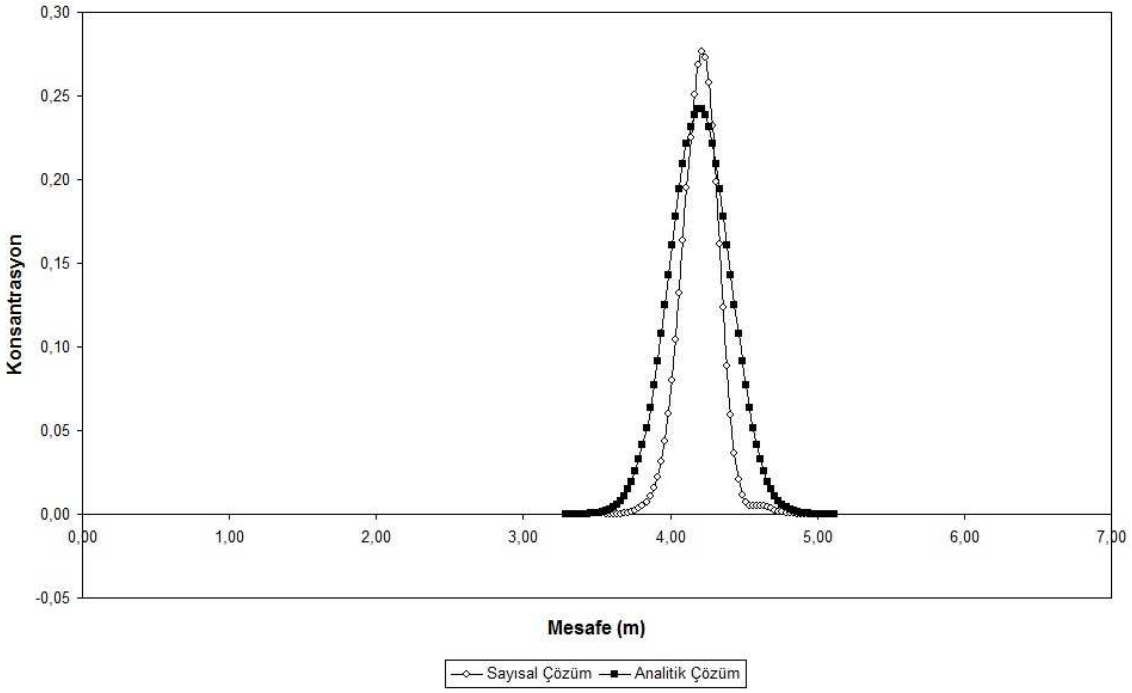
Şekil 4.80. Pe=4 ve t=1 s için CTCS+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



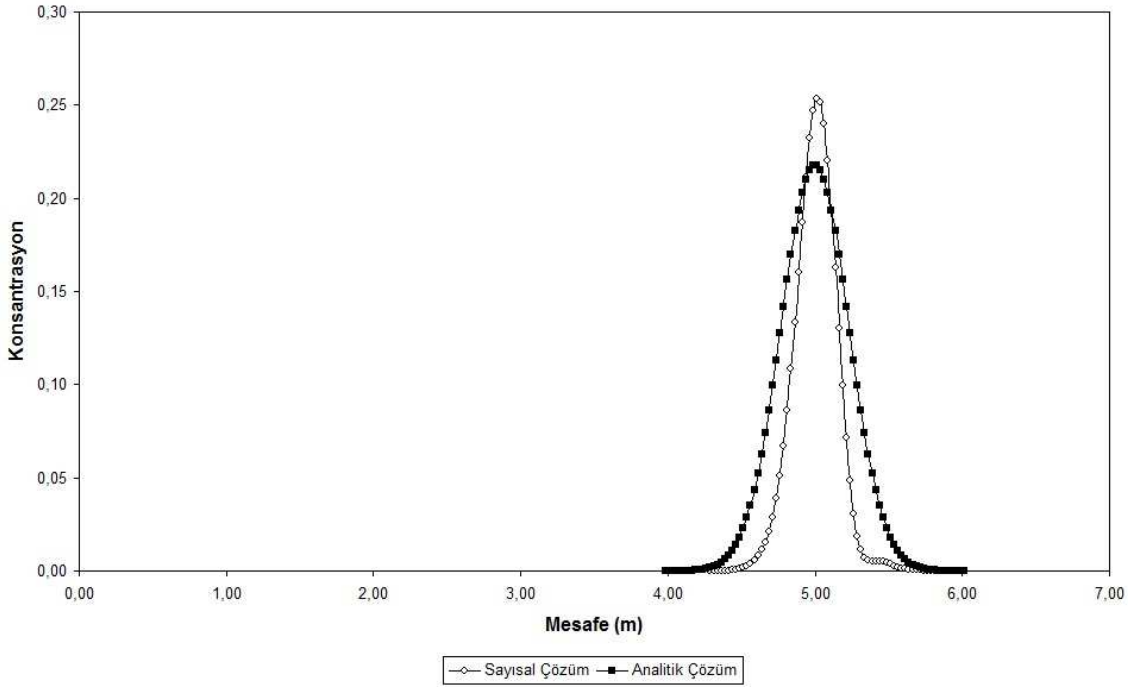
Şekil 4.81. Pe=4 ve t=2 s için CTCS+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.82. Pe=4 ve t=3 s için CTCS+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.83. Pe=4 ve t=4 s için CTCS+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.84. Pe=4 ve t=5 s için CTCS+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması

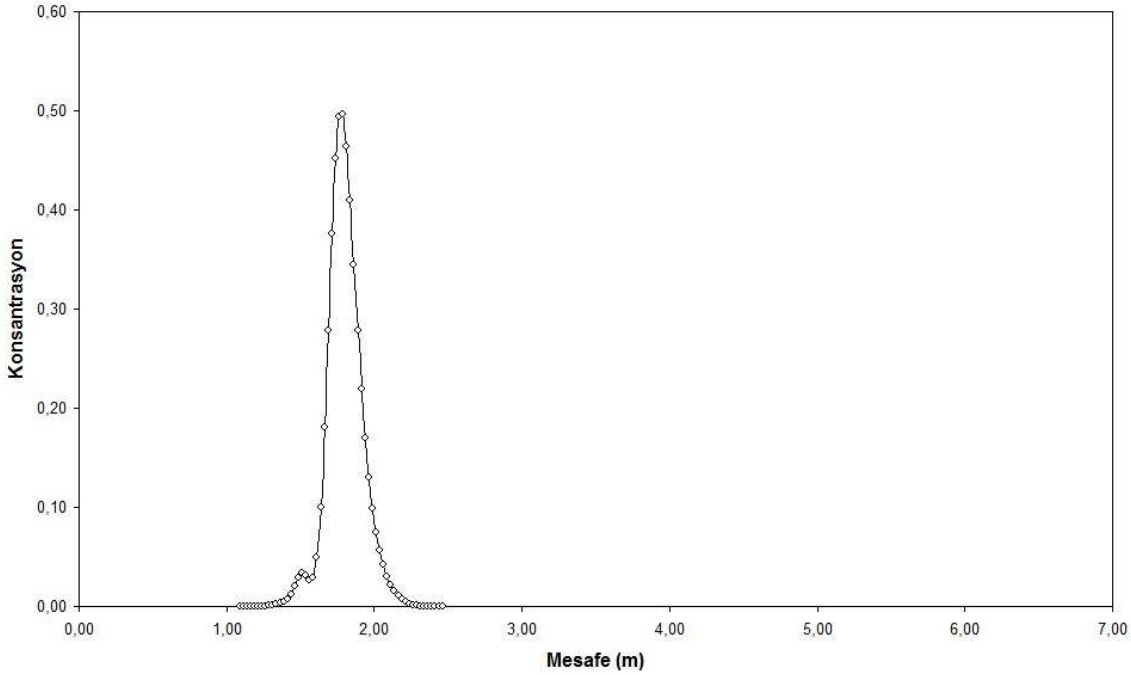
Bu karma yöntem için hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.24'de görülmektedir.

Çizelge 4.24. Pe=4 için CTCS+Higher-Order Yönteminin hata oranı

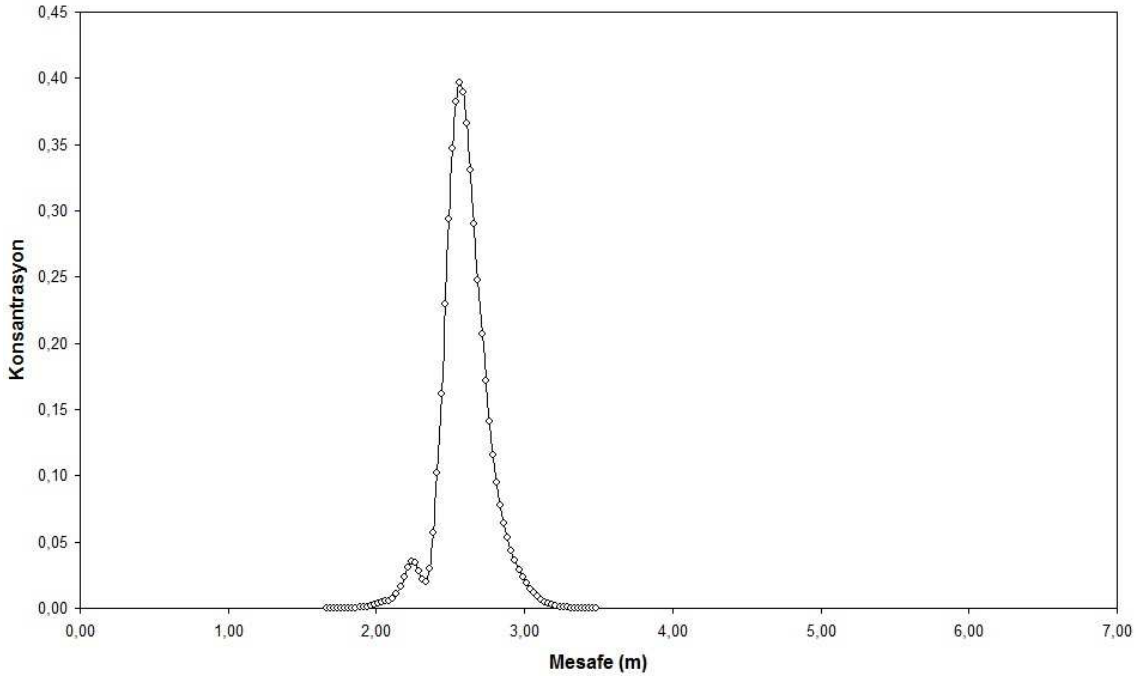
t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,487	9,52
2	0,332	0,395	18,75
3	0,277	0,342	23,74
4	0,242	0,276	14,13
5	0,218	0,254	16,34
ORTALAMA HATA ORANI			16,50

4.8.3. Upwind-differencing+ftcs karma yöntemi

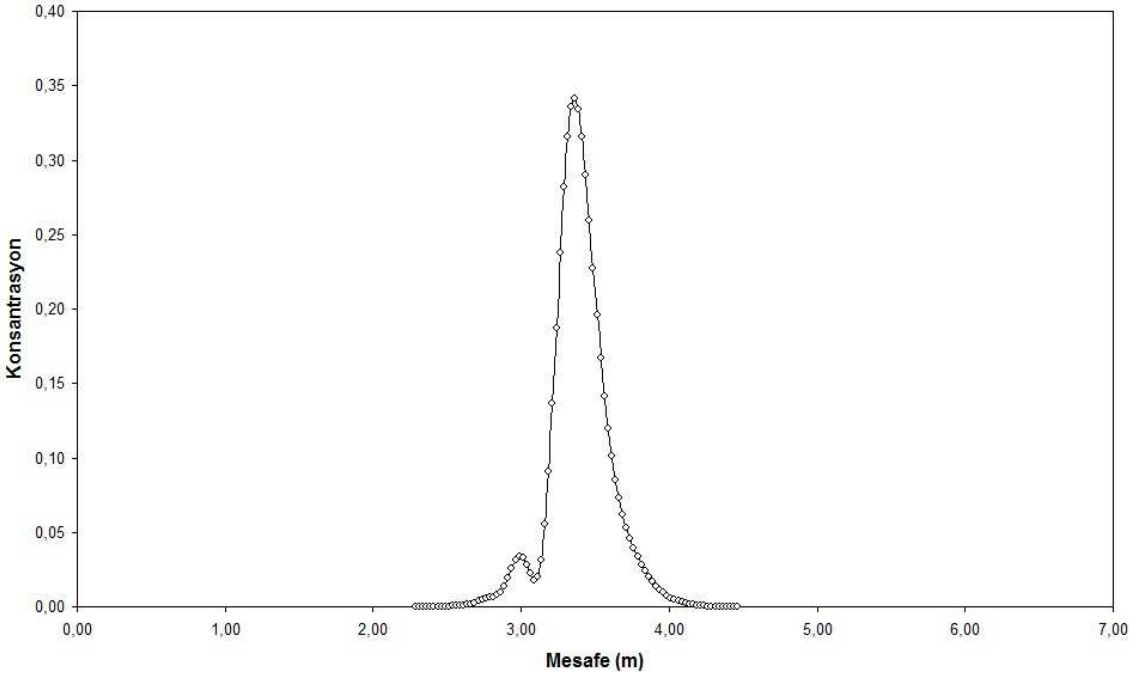
Upwind-Differencing Yöntemi ile Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminin Pe=4 için elde edilen sonuçları aritmetik ortalama alınarak karma bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemdeki sonuçlar ile Analitik Yöntem çözümünden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekil 4.85-4.89'da bu karma yöntemin Pe=4 için sonuçları grafik üzerinde gösterilmiştir.



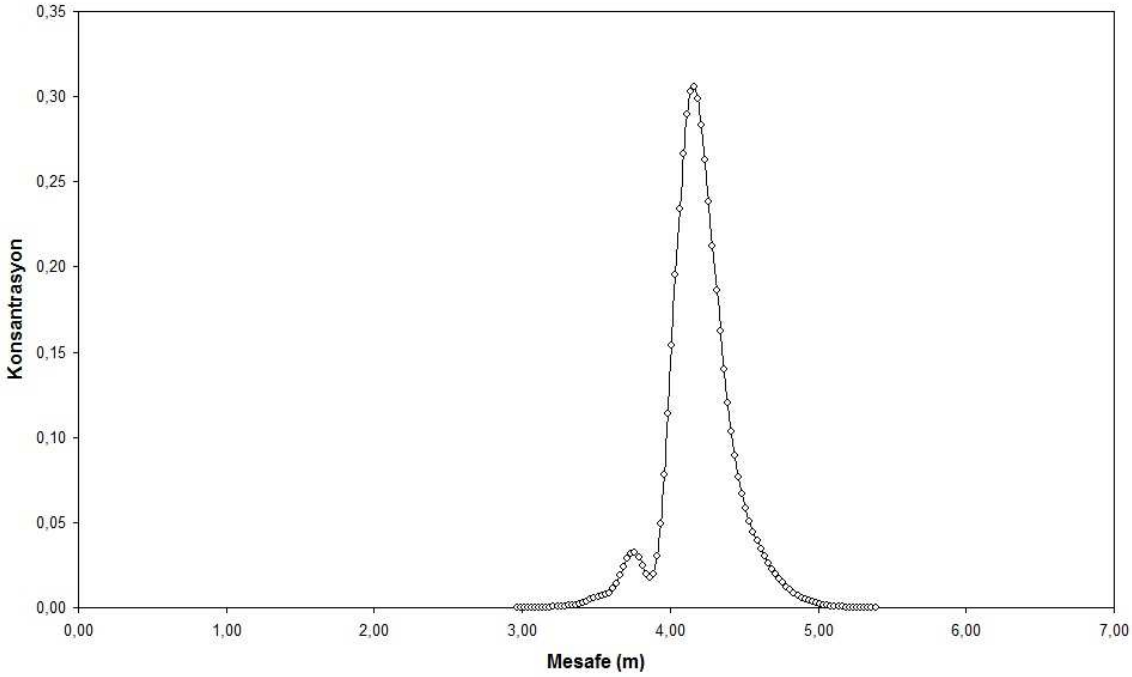
Şekil 4.85. Pe=4 ve t=1 s için Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü



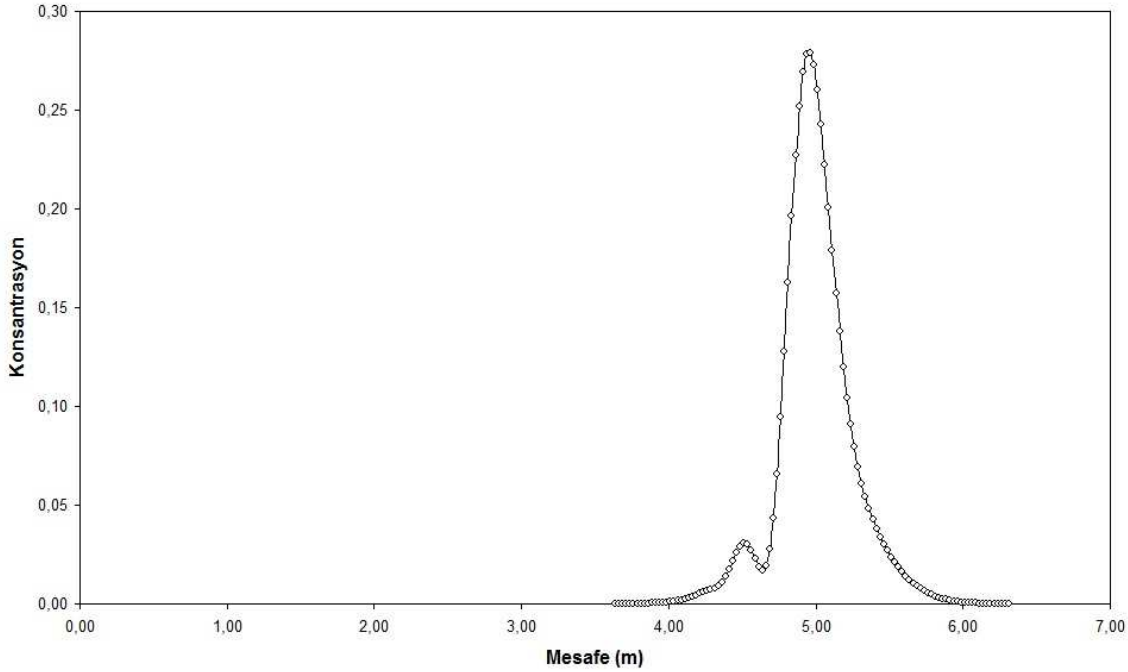
Şekil 4.86. Pe=4 ve t=2 s için Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü



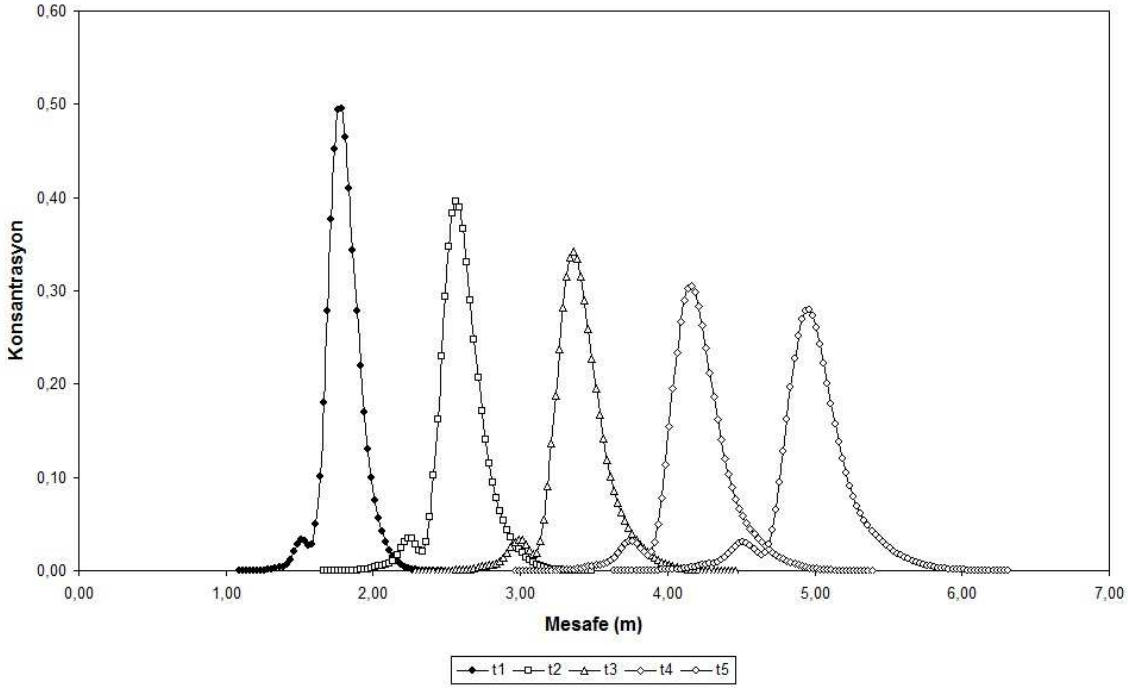
Şekil 4.87. Pe=4 ve t=3 s için Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü



Şekil 4.88. Pe=4 ve t=4 s için Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü

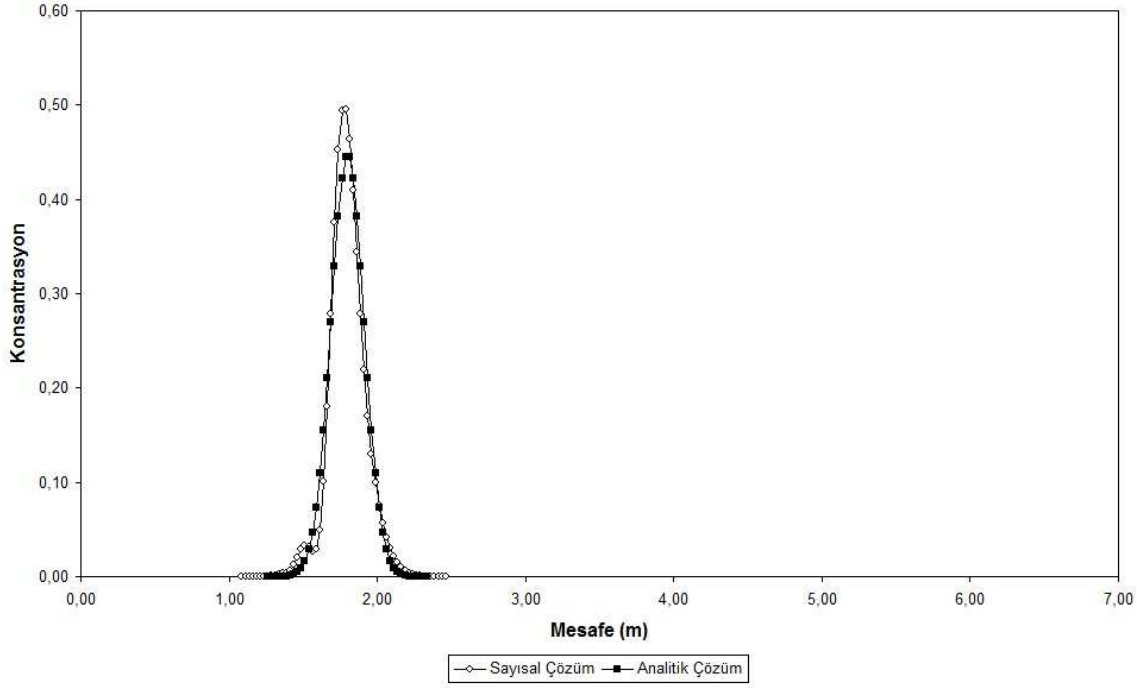


Şekil 4.89. Pe=4 ve t=5 s için Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü

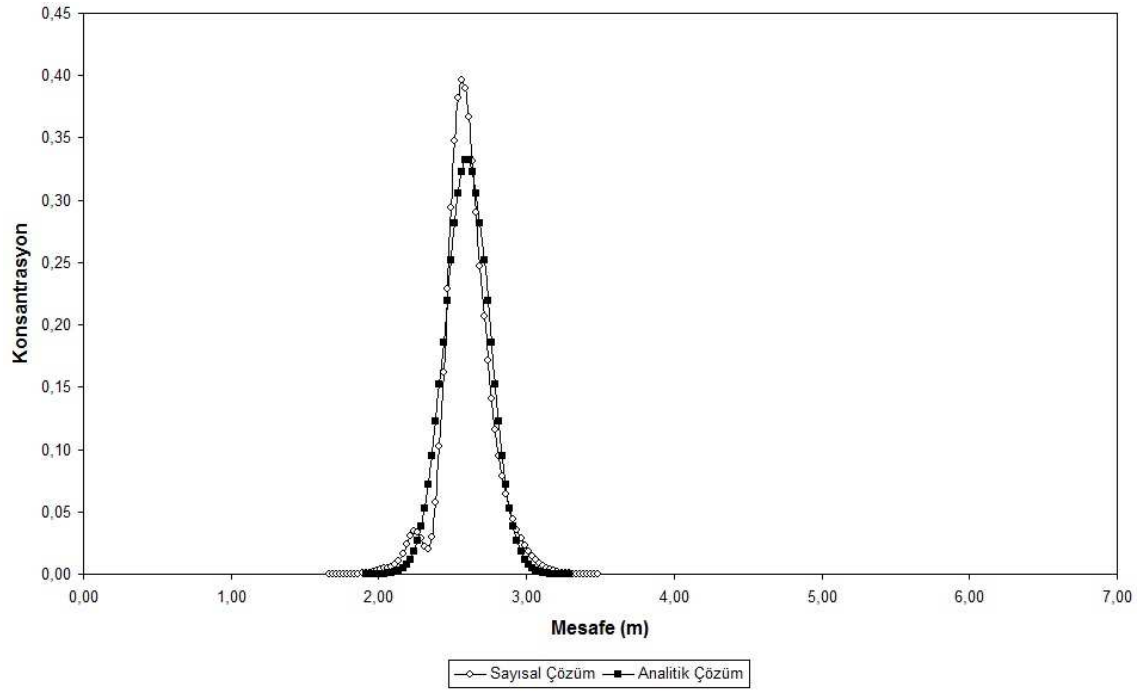


Şekil 4.90. Pe=4 için 5 saniyelik Upwind-Differencing+FTCS Yöntemi çözümü

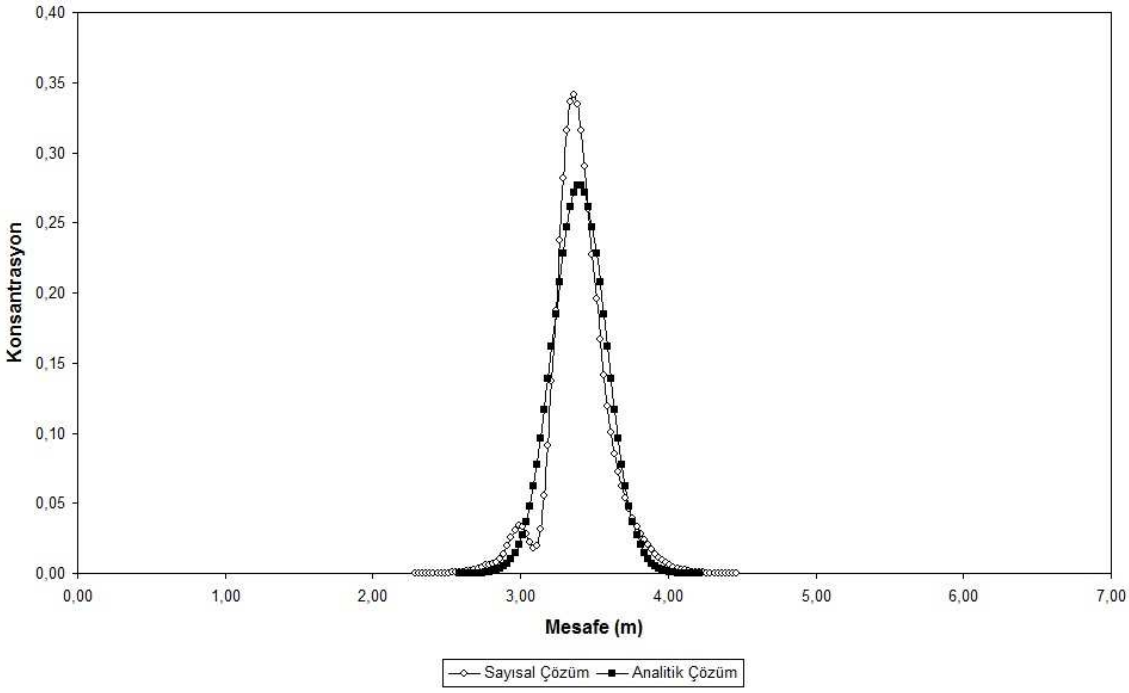
Şekil 4.91-4.95'de Upwind-Differencing+FTCS karma yöntemi ile Analitik çözümler karşılaştırılmıştır.



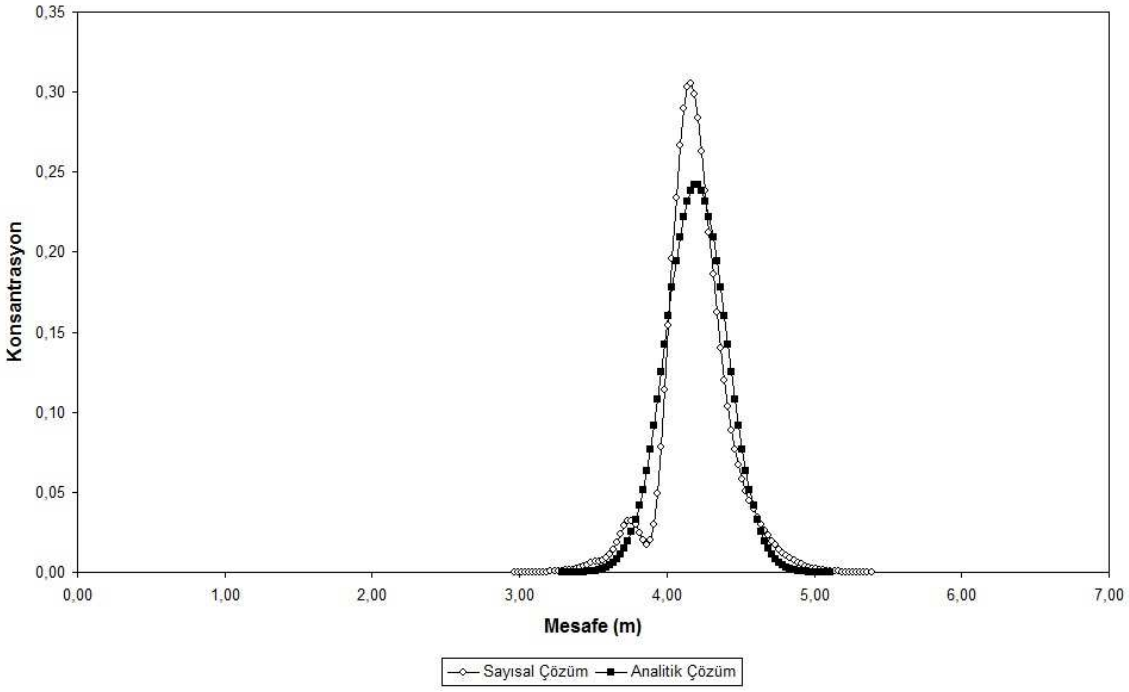
Şekil 4.91. Pe=4 ve t=1 s için Upwind-Differencing+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



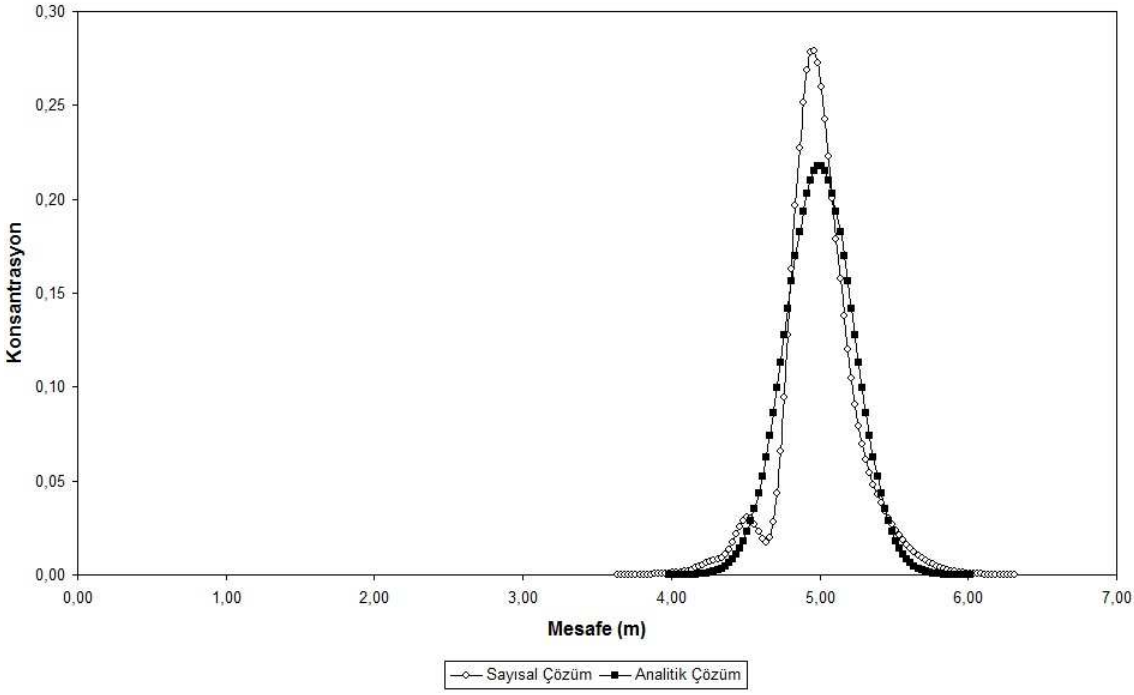
Şekil 4.92. Pe=4 ve t=2 s için Upwind-Differencing+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.93. Pe=4 ve t=3 s için Upwind-Differencing+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.94. Pe=4 ve t=4 s için Upwind-Differencing+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.95. Pe=4 ve t=5 s için Upwind-Differencing+FTCS ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması

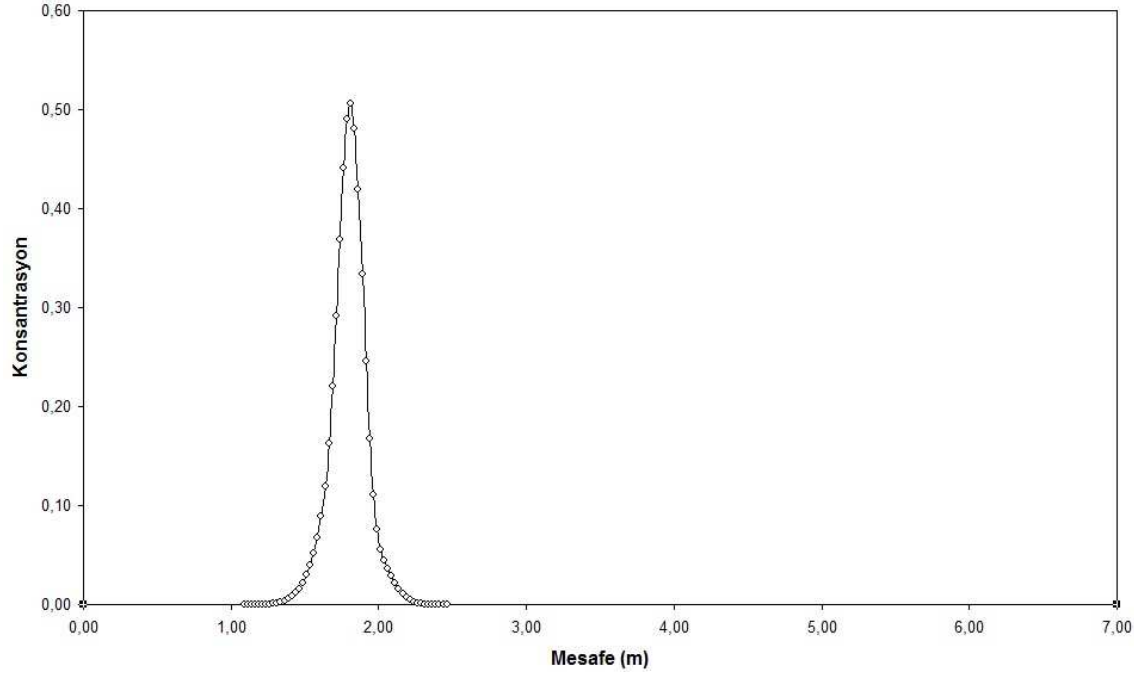
Bu karma yöntem için hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.25'de görülmektedir.

Çizelge 4.25. Pe=4 için Upwind-Differencing+FTCS Yönteminin hata oranı

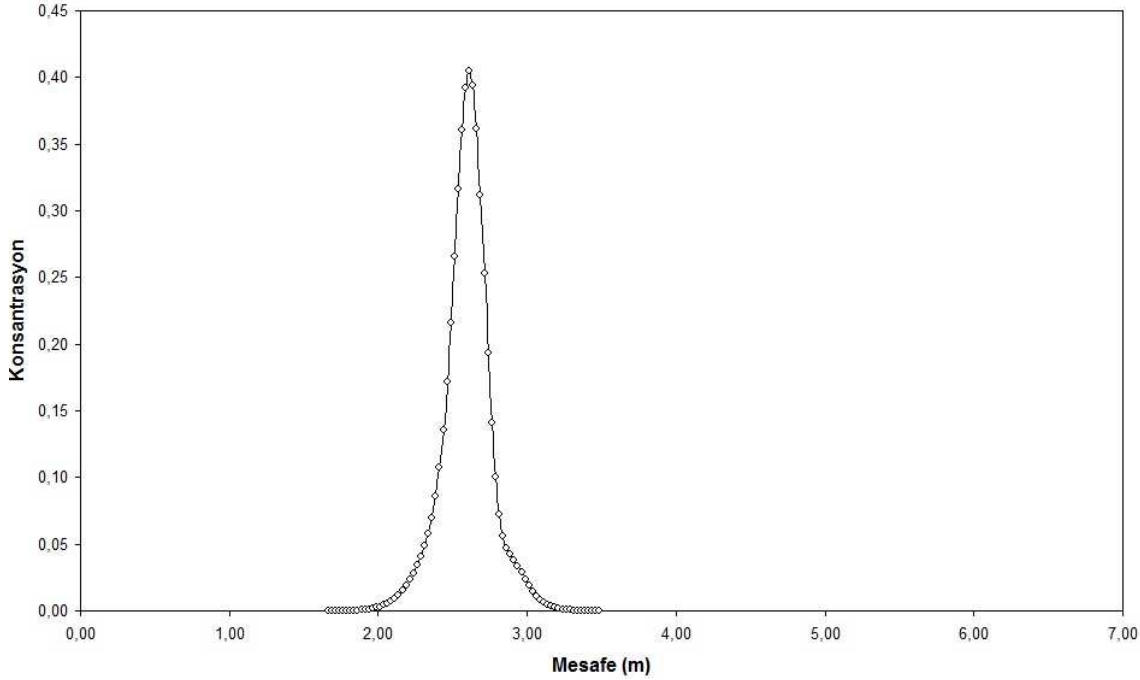
t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,496	11,57
2	0,332	0,396	19,30
3	0,277	0,342	23,49
4	0,242	0,305	26,15
5	0,218	0,279	28,09
ORTALAMA HATA ORANI			21,72

4.8.4. Upwind-differencing+higher-order karma yöntemi

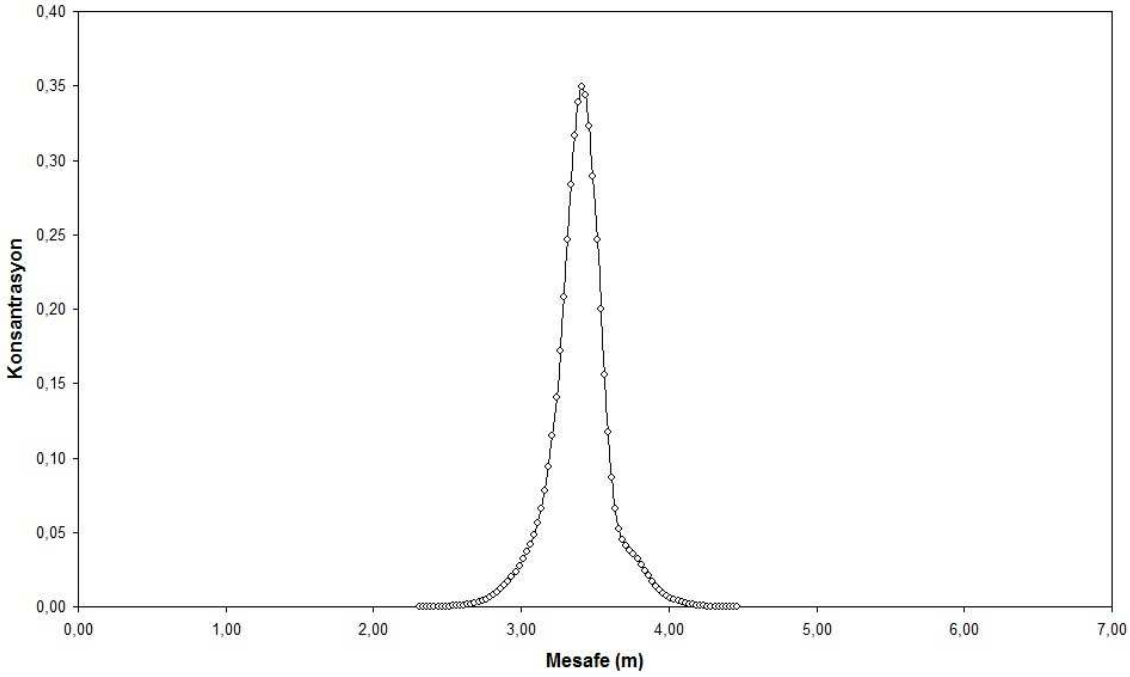
Upwind-Differencing Yöntemi ile Higher-Order Yönteminin Pe=4 için elde edilen sonuçları aritmetik ortalama alınarak karma bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemdeki sonuçlar ile Analitik Yöntem çözümünden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Şekil 4.96-4.100'de bu karma yöntemin Pe=4 için sonuçları grafik üzerinde gösterilmiştir.



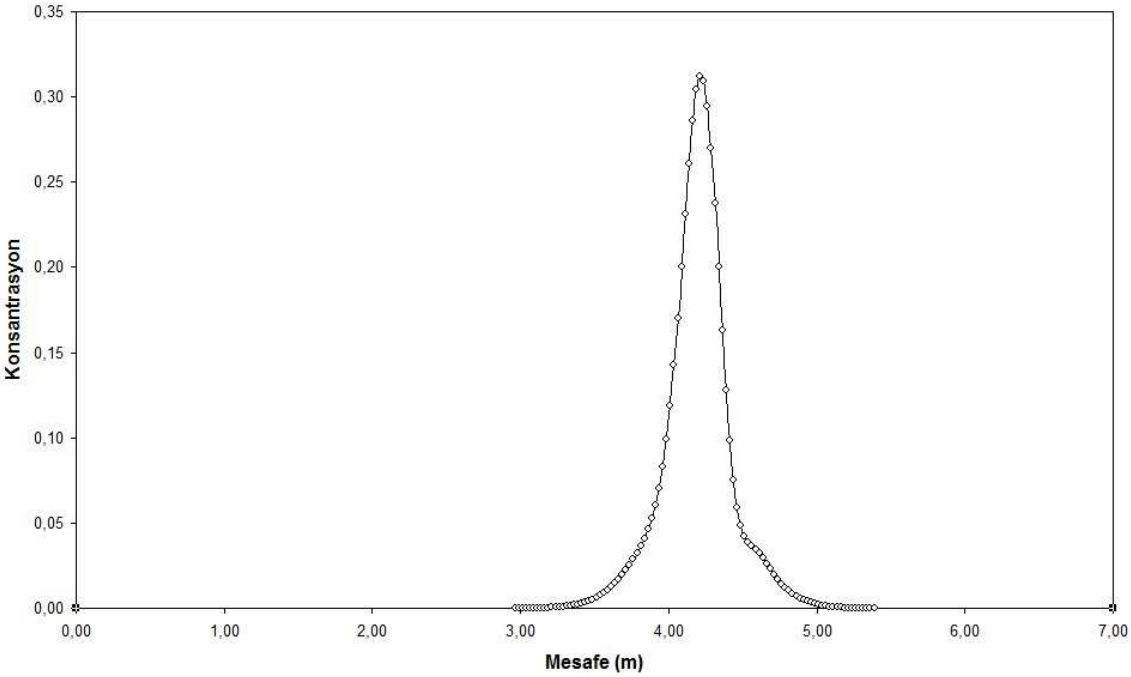
Şekil 4.96. Pe=4 ve t=1 s için Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü



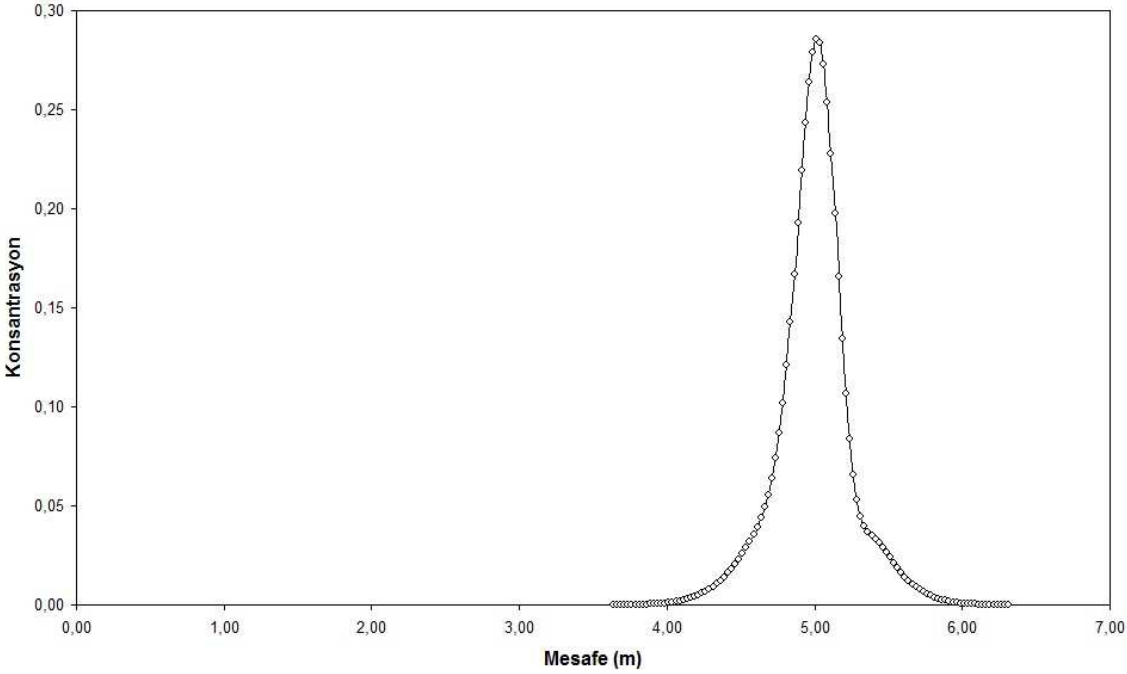
Şekil 4.97. Pe=4 ve t=2 s için Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü



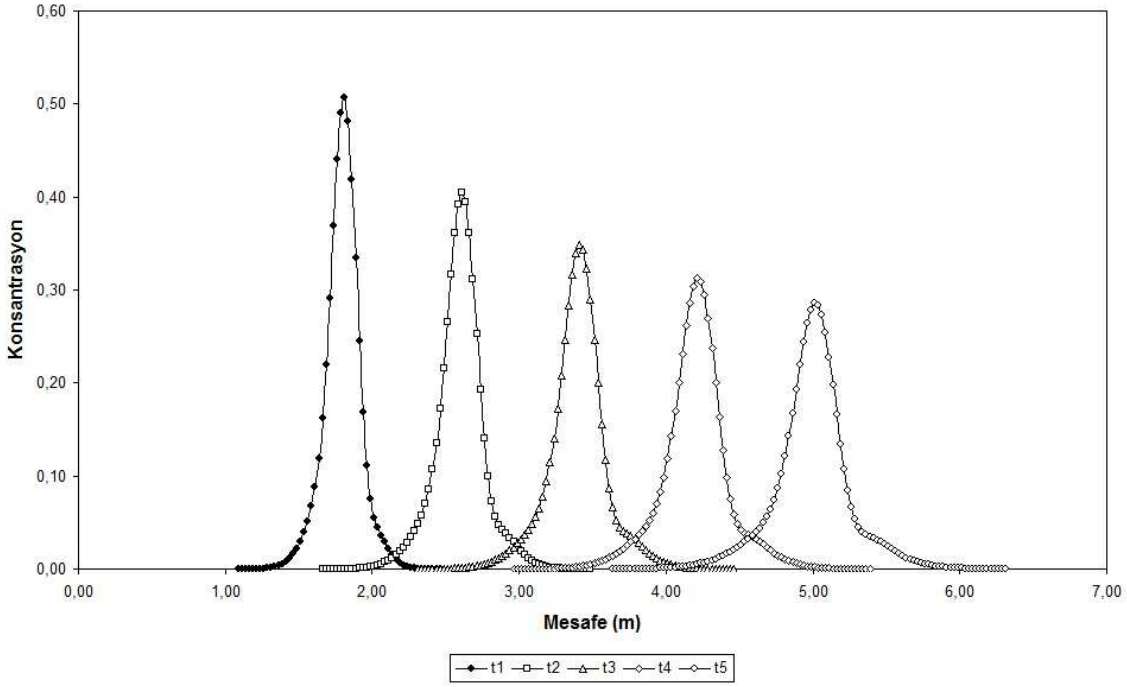
Şekil 4.98. Pe=4 ve t=3 s için Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü



Şekil 4.99. Pe=4 ve t=4 s için Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü

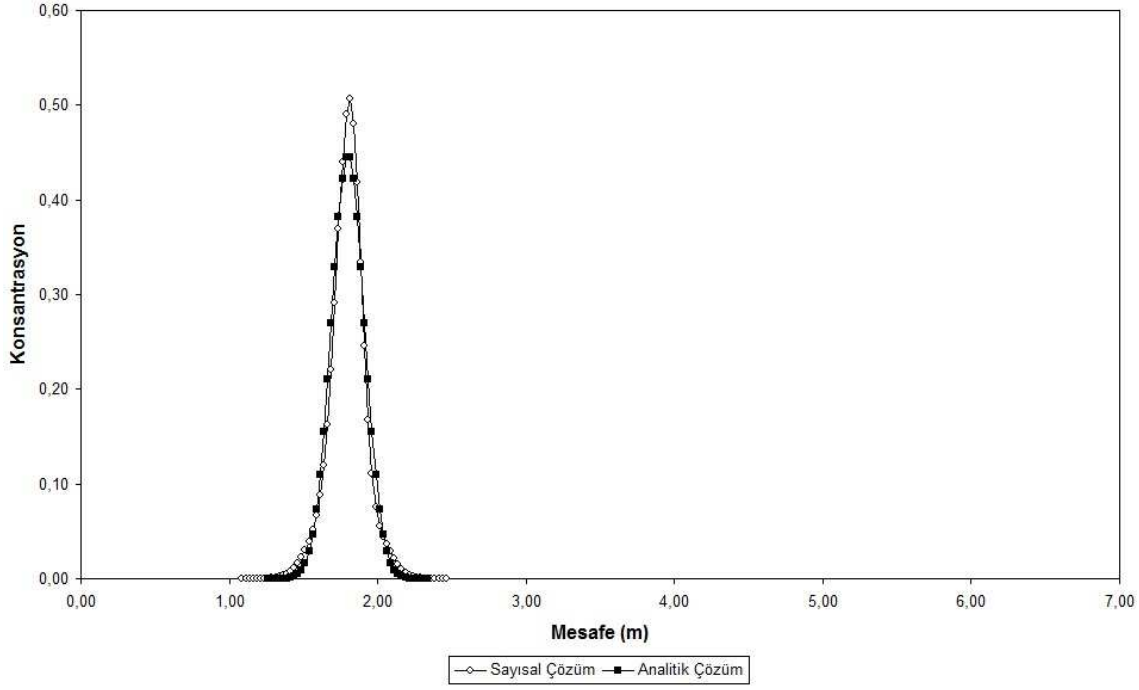


Şekil 4.100. Pe=4 ve t=5 s için Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü

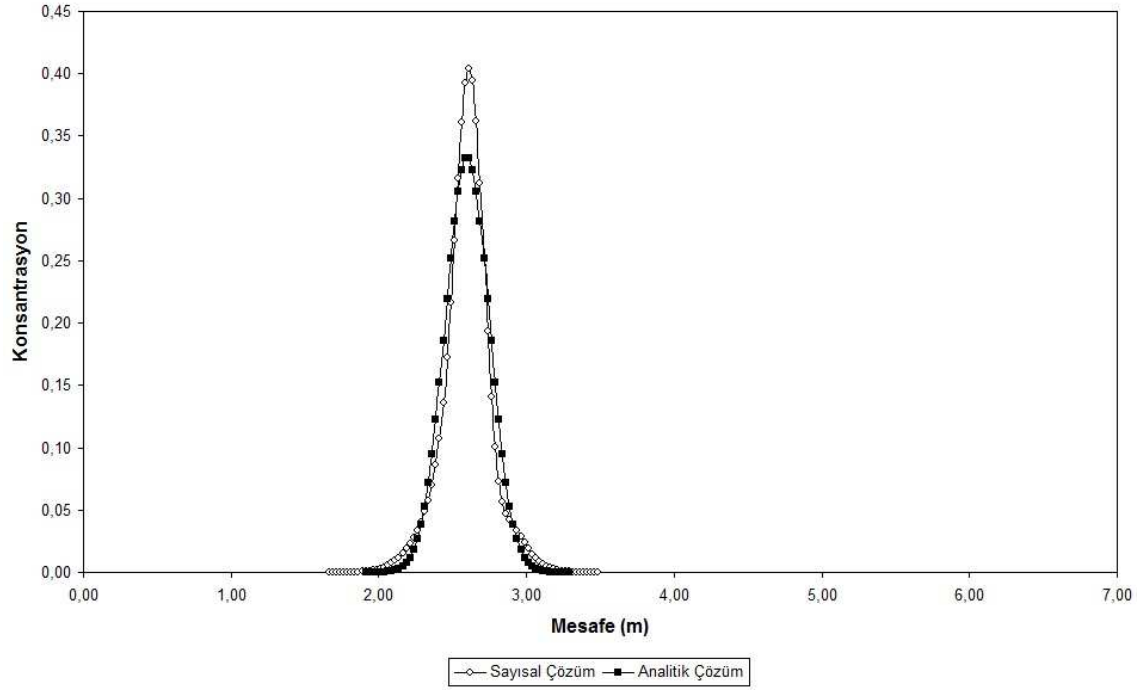


Şekil 4.101. Pe=4 için 5 saniyelik Upwind-Differencing+Higher-Order Yöntemi çözümü

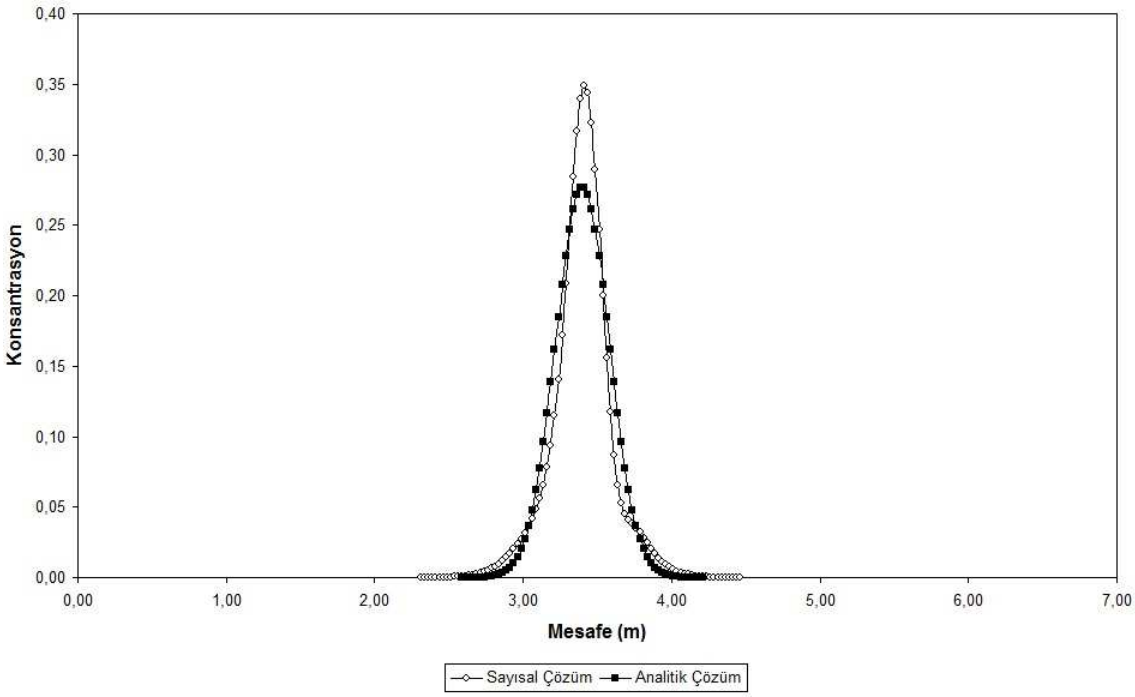
Şekil 4.102-4.106'da Upwind-Differencing+Higher-Order karma yöntemi ile Analitik çözümler karşılaştırılmıştır.



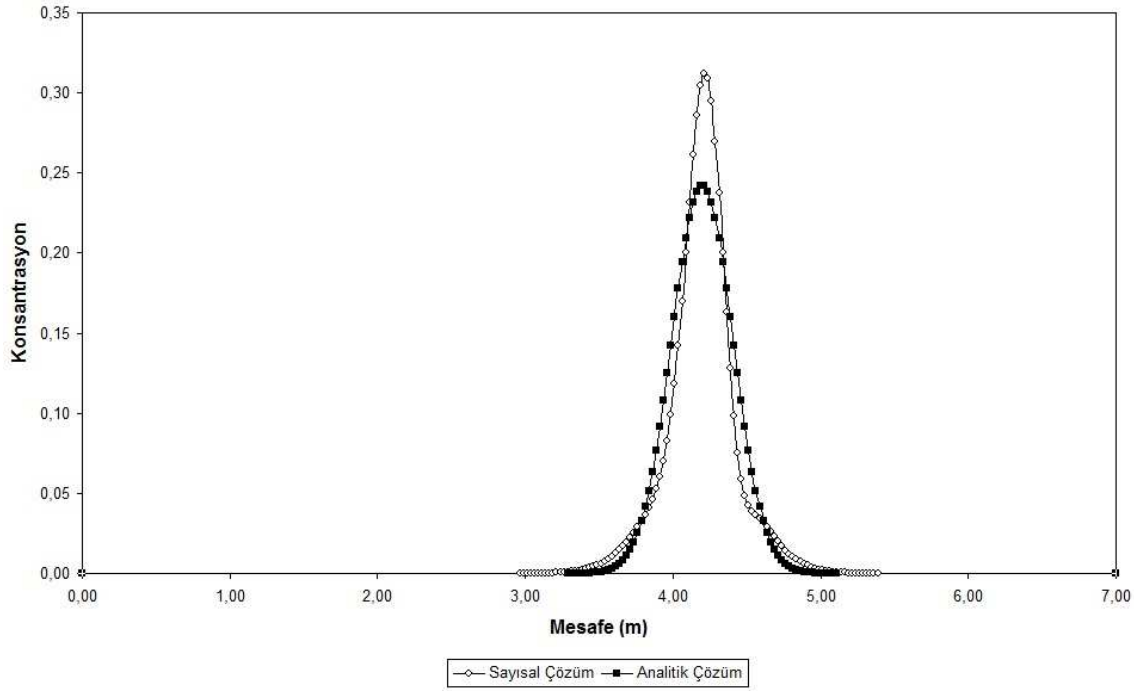
Şekil 4.102. Pe=4 ve t=1 s için Upwind-Differencing+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



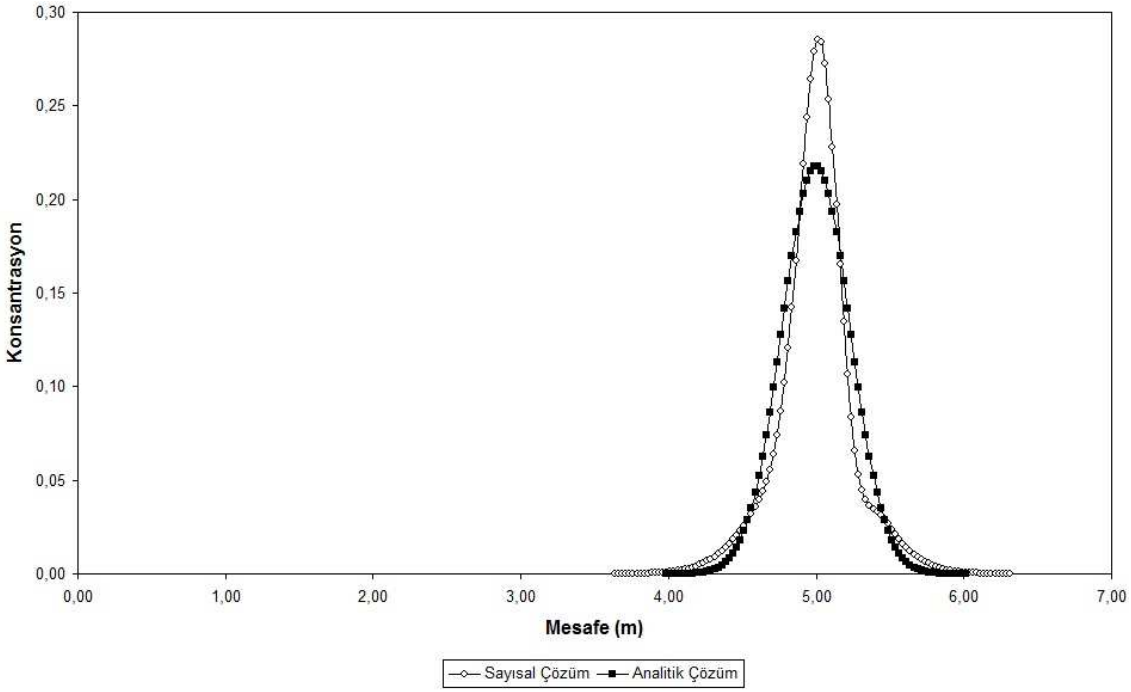
Şekil 4.103. Pe=4 ve t=2 s için Upwind-Differencing+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.104. Pe=4 ve t=3 s için Upwind-Differencing+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.105. Pe=4 ve t=4 s için Upwind-Differencing+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması



Şekil 4.106. Pe=4 ve t=5 s için Upwind-Differencing+Higher-Order ile Analitik Yöntemin karşılaştırılması

Bu karma yöntem için hata analizi ve ortalama hata oranı Çizelge 4.26'da görülmektedir.

Çizelge 4.26. Pe=4 için Upwind-Differencing+Higher-Order Yönteminin hata oranı

t (s)	Analitik	Sayısal	Hata Oranı(%)
1	0,444	0,506	13,95
2	0,332	0,405	21,76
3	0,277	0,349	26,17
4	0,242	0,312	29,04
5	0,218	0,286	31,07
ORTALAMA HATA ORANI			24,40

Yapılan çözümlerden de görüleceği üzere Karma yöntemlerin hata oranları tekil yöntemlerin hata oranlarına göre azalmıştır. Çizelge 4.27'de Karma yöntemlerin ortalama hata oranları görülmektedir. Bu tabloya göre hata oranı en az olan Karma yöntem CTCS-FTCS Yöntemi olmuştur.

Çizelge 4.27. Karma yöntemlerin ortalama hata oranları

KARMA YÖNTEMLER	ORTALAMA HATA ORANI (%)
Upwind-FTCS	21,72
CTCS-FTCS	14,17
CTCS-Higherorder	16,50
Upwind-Higherorder	24,40

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

9 m uzunluğunda, x-doğrultusunda 0,005 m2/s lik difüzyon katsayısı ve 0,8 m/s lik akım hızına sahip bir akarsu parçasına, başlangıç noktasına 1 m uzaklıktan 1 birim değerinde sıvı bir kirletici bırakılması olayı bir-boyutlu olarak incelenmiştir. Bu veriler yardımıyla ve $\Delta x=0,025$ m seçilerek kararlılık şartı göz önüne alındığında $\Delta t=0,0125$ m seçilmiştir. Seçilen Δx ve Δt değerleri ile Pe=4 elde edilmiştir.

Pe=4 için 5 farklı açık tip sonlu fark yöntemden analitik sonuca en yakın sonucu veren %0,59 hata oranıyla MacCormack Yöntemi olmuştur. Bunun sebebi Açık Tip MacCormak Yönteminin iki adımlı tahmin edici-düzeltici (*predictor-corrector*) bir yöntem olmasıdır. Higher-Order Yöntemi ise %79,32 hata oranıyla analitik sonuçtan en uzak sonucu veren yöntemdir. Bu yüksek hata oranının ayrıklaştırmada kullanılan dört noktalı üçüncü derece geriden fark ifadesinden kaynaklandığı tahmin edilmektedir. Upwind-Differencing ile Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yönteminin sonuçları analitik sonuçlardan daha küçük değerlere sahiptir. Açık Tip FTCS ve Lax ile Higher-Order Yönteminin sonuçları ise analitik sonuçlardan daha büyük değerlere sahiptir. MacCormack dışındaki bu dört yöntem için aritmetik ortalama kullanılarak karma yöntemler oluşturulmuş ve Pe=4 için çözüm yapılmıştır. Buradaki amaç hata oranları azaltmaktır.

Karma yöntemler içinde analitik sonuca en yakın sonuç %14,17 hata oranıyla Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel ile Açık Tip FTCS ve Lax Yönteminden elde edilen yöntemin sonucudur. Karma yöntemler içinde analitik sonuca en uzak sonuç ise %24,40 hata oranıyla Upwind-Differencing ile Higher-Order Yönteminden elde edilen yöntemin sonucudur. Ayrıca Açık Tip CTCS ve DuFort-Frankel Yöntemi kullanılarak elde edilen karma yöntemler diğer karma yöntemlere göre daha doğru sonuçlar vermiştir.

Higher-Order Yöntemi gerek tekil olarak gerekse karma yöntemlerde en fazla hata oranına sahip açık tip sonlu fark yöntemidir.

Açık tip FTCS ve Lax Yöntemindeki sapmaları ortadan kaldırmak için daha küçük Δx aralığı ile çalışma yapılması önerilmektedir.

Aritmetik ortalama kullanılarak elde edilen karma yöntemlerde tekil yöntemlerdeki hata oranları azalmıştır. Ancak yinede MacCormack Yönteminden elde edilen sonuç kadar hassas bir çözüme ulaşılamamıştır.

Herhangi bir nehir akımındaki sediment, kirletici madde veya tuz taşınımı için Açık Tip MacCormack Yöntemi kullanılarak başarılı sonuçlar elde edileceği tahmin edilmektedir.

KAYNAKLAR

Anderson, Jr., J. D., 1995, Computational Fluid Dynamics: The Basic with Applications, *McGraw-Hill International Editions*, Singapore, 97-100, 111-112, 125-133, 152-153, 153-156.

Boris, J. B., Book, D. L., 1973, Flux Corrected for Transport Algorithm that Works, *Journal of Computational Physics, 11, 38-69*.

Chatwin, P. C., Allen, C. M., 1985, Mathematical Models of Dispersion in Rivers and Estuaries, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 17, 119-149.

Chaudhry, M. H., Cass, D. E., Edinger, J. E., 1983, Modelling of Unsteady-Flow Water Temperatures, *Journal of Hydraulic Engineering*, 109 (5), 657-669.

DuFort, E. C., Frankel, S. P., 1953, Stability Conditions in The Numerical Treatment of Parabolic Differantial Equations, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 7 (43), 135-152.

Guvanasen, V., Volker, R. E., 1983, Experimental Investigations of Unconfined Aquifer Pollution from Recharge Basins, *Water Resources* Research, 19 (3), 707-717.

Hindmarsh, A. C., Gresho, P. M., 1984, The Stability of Explicit euler Time-Integration for Certain Finite Difference Approximations of The Multi-Dimensional Advection-Diffusion Equation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4, 853-897.

Holly, F. M., Usseglio-Polatera, J. M., 1984, Dispersion Simulation in Two-Dimensional Tidal Flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 111, 905-926.

http://tr.wikipedia.org/wiki/Su_kirliliği [Ziyaret Tarihi: 05.05.2009]

http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_stability_analysis [Ziyaret Tarihi: 10.06.2009]

Imam, E., McCorquodale, J. A., Bewtra, J. K., 1983, Numerical Modelling of Sedimentation Tanks, *Journal of Hydraulic Engineering*, 109 (12), 1740-1754.

Isenberg, J., Gutfinger, C., 1973, Heat Transfer to a Draining Film, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16 (2), 505-512.

Kırkgöz, S., 2007, IM514 Hidrodinamik II Ders Notları, *Çukurova Üniversitesi Müh.-Mim. Fakültesi İnşaat Müh. Bölümü*, Adana, 43-55.

Kocamış, Z. A., 2006, Deniz Deşarjlarında Kirlilik Dağılımının Bilgisayar Destekli İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Adana, 3.

Kumar, N., 1983, Unsteady Flow Against Dispersion in Finite Porous Media, *Journal of Hydrology*, 63 (3-4), 345-358.

Lapidus, J., Amundson, N. R., 1952, Mathematics of Adsorption in Beds: VI. The Effect of Longitudinal Diffusion in Ion Exchange and Chromatographic Columns, *The Journal of Physical Chemistry*, 56 (8), 984-988.

Li, Y. S., Chen, C. P., 1989, An Efficient Split Operator Scheme for 2D Advection-Diffusion Equation Using Finite Elements and Characteristics, *Applied Mathematical Modelling*, 13, 248-253.

Lin, B., Falconer, R. A., 1996, Numerical Modelling of Three-Dimensional Suspended Sediment for Estuarine and Coastal Waters, *Journal of Hydraulic Research*, 34 (4), 435-456.

MacCormack, R. W., 1969, The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, *AIAA Papper*, 69-354.

Noye, B. J., Tan, H. H., 1988, A Third-Order Semi-Implicit Finite Difference Method for Solving The One-Dimensional Convection-Diffusion Equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 1615-1629.

Noye, B. J., Tan, H. H., 1989, Finite Difference Methods for The Two-Dimensional Advection-Diffusion Equation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 9, 75-98.

Olsen, N. R. B., Kjellesvig, H. M., 1998, Three-Dimensional Numerical Flow Modelling for Estimation of Maximum Local Scour Depth, *Journal of Hydraulic Research*, 36 (4), 579-590.

Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1996, A Finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 (22), 3839-3866.

Parlarge, J. Y., 1980, Water Transport in Soils, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2, 77-102.

Pozrikidis, C., 1997, Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics, *Oxford University Pres*, New York, 560, 585, 589-593.

Salmon, J. R., Liggett, J. A., Gallager, R. H., 1980, Dispersion Analysis in Homogeneous Lakes, *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, 15, 1627-1642.

Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J., Cheong, H. F., 1998, Three-Dimensional Finite Difference Model for Transport of Conservative Pollutants, *Ocean Engineering*, 25 (6), 425-442.

Sobey, R. J., 1983, Fractional Step Algorithm for Estuarine Mass Transport, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3, 567-581.

Sommeijer, B. P., Kok, J., 1995, Implementation and Performance of The Time Integration of a 3D Numerical Transport Model, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21, 349-367.

Songsheng, D., Jianing, P., 1998, Application of Convection-Diffusion Equation to The Analyses of Contamination Between Batches in Multi-Products Pipeline Transport, *Applied Mathematics and Mechanics*, 19 (8), 757-764.

Spalding, D. B., 1972, A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expression Involving Both First and Second Derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4 (55), 1-9.

Wu, W., Rodi, W., Wenka, T., 2000, 3D Numerical Modelling of Flow and Sediment Transport in open Channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, 126 (1), 4-15.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nuri Pekçetin
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Adana, 1985
Telefon : 05357834242
e-mail : npekcetin@windowslive.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	İ. S. Ö. Anadolu Lisesi, Seyhan, ADANA	2003
Üniversite	:	Mustafa Kemal Üniversitesi, Antakya, HATAY	2007
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008	Aktif Yapı Denetim Ltd. Şti.	Yardımcı Kontrol Mühendisi
2008	Ade Ltd. Şti.	Şantiye Şefi
2009	Özgören İnşaat Ltd. Şti.	Şantiye Şefi
2010	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Hidrolik

YABANCI DİLLER

İngilizce, Almanca