



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU KUANTUM NANO YAPILARIN THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ

Abdullah ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Temmuz-2010
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Abdullah ÖZTÜRK

İKİ BOYUTLU KUANTUM NANO YAPILARIN THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ülfet ATAV

Bu çalışmada şiddetli magnetik alan içinde bulunan kuantum Hall tabanlı bazı kuantum nano yapıların elektron dağılımları öz uyumlu olarak belirlendi. Bu tür yapıların öz uyumlu olarak incelenmesinde yapıyı tanımlayan birbiri ile çiftlenimli Schrödinger ve Poisson denklemlerinin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekir. Ancak ilgilendiğimiz sistem çok sayıda elektron içerdiği için Schrödinger denklemi yerine yarı klasik bir yaklaşım olan Thomas Fermi yaklaşımını kullanıldı. Elektron dağılımını iteratif bir yaklaşımla hesaplamak için bir bilgisayar programı hazırlandı. Ayrıca iteratif yaklaşımın her adımında Poisson denkleminin bilinen bir yük yoğunluğu için çözümüne ihtiyaç duyuldu. Bu amaçla Poisson denklemini üç boyutlu bir grid üzerinde sayısal olarak çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Hall etkisi, sıkıştırılamaz şeritler, sıkıştırılabilir şeritler, Thomas Fermi yaklaşımı, kuantum Hall çubuğu, elektronik Mach Zehnder İnterferometresi

ABSTRACT

MS Thesis

INVESTİGATİON OF TWO DİMENSİONAL QUANTUM NANO SYTEMS WİTHİN THOMAS FERMİ APPROACH

Abdullah ÖZTÜRK

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Ülfet ATAV

In this study, the electron densities and screened potential are investigated self-consistently in the certain nano structures which are based on quantum Hall effect in the presence of strong magnetic field. In the investigation of this structures self-consistently, Schrödinger and Poisson equations which are paired with each other must be solved simultaneously. However we use Thomas-Fermi approximation which is a semi-classical model instead of Schrödinger equation since too much electrons are involved in the system which we study. This Thomas-Fermi approximation is a semi-classic model. In order to calculate the electron distribution with an iterative method we prepared a computer program/source code. Also in each step of the iterative method, we need a solution of Poisson equation for a known charge density. With this purpose, we solved the Poisson equation numerically in a three dimensional grid.

Key Words: Quantum Hall effect, incompressible strips, compressible strips, Thomas-Fermi approximation, quantum Hall bar, electronic Mach-Zhender interferometer.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur. Bu çalışmada iki boyutlu bazı nano yapılar Thomas-Fermi yaklaşımı ile incelenmiştir.

Şiddetli magnetik alan içinde bulunan iki boyutlu elektron gazında kuantum Hall olayı olarak adlandırılan bir etki gözlenir. Bu etki temel olarak iki boyutlu elektron gazının sınırlandırılması sonucu oluşan kenar etkileri ile yakından ilgilidir. Son yıllarda teknolojideki gelişmeler sayesinde iki boyutlu elektron gazının çeşitli şekillerde sınırlandırılmasıyla bazı kuantum nanoyapılar oluşturulabilir. Farklı geometrilere sahip yapılar oluşturularak kuantum Hall etkisi ile bağlantılı kenar etkileri kontrol edilebilir. Bu şekilde oluşturulan aygıtlar oldukça ilginç fiziksel davranış göstermektedir. Bu tür aygıtların dış etkilere karşı vereceği tepkiler, sistemin elektron dağılımından yola çıkılarak belirlenebilir. Bu sebeple yapı içerisinde bulunan elektron dağılımının doğru bir şekilde belirlenmesi son derece önemlidir. Bu aygıtları detektör olarak kullanılması, kuantum bilgisayarlarda kuantum bitlerinin saklanması ve kuantum bilgilerinin taşınması gibi geleceğe yönelik teknolojik alanlarda potansiyel uygulama alanına sahiptir. Bu tez çalışmasının bu tür uygulama alanları için yararlı olacağı kanısındayız.

Bu tez çalışması boyunca bana desteğini esirgemeyen ve danışmanlıktan daha fazla yardımı dokunan danışmanım sayın Prof. Dr. Ülfet ATAV hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması esnasında, kuantum Hall olayını çalışmak üzere bir araya gelmiş araştırmacılardan oluşan grubumuzun yardımlarını gördüm. Bu grubun üyeleri Prof. Dr. Ülfet ATAV, Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL, Arş. Grv. Ahmet Emre KAVRUK, Arş. Grv. Teoman ÖZTÜRK, Abdullah ÖZTÜRK ve Alptekin YILDIZ dır. Çalışma grubundaki bu arkadaşların çok büyük maddi ve manevi katkıları olmuştur. Çok sevdiğim, değer verdiğim ve ayrıca kendilerine borçlu hissettiğim bu arkadaşlara minnettarlığımı ifade etmek istiyorum. Ayrıca Kadir TÜYSÜZ arkadaşıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Çalışmanın özellikle Thomas-Fermi kısmında deneyimini ve bilgilerini bizden hiç esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Berna GÜLVEREN'e çok teşekkür ederim.

Son olarak bugüne kadar bana her konuda maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Abdullah ÖZTÜRK

KONYA 2010

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT ..... **iv**

ÖNSÖZ ..... **v**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. DÜŞÜK BOYUTLU SİSTEMLER VE 2BEG **4**

2.1 Düşük Boyutlu Yapılar 4

2.2 Yarı İletken Bir Eklemde Oluşan İki Boyutlu Elektron Gazı 6

3. METALLERDE HALL OLAYI **10**

3.1 Metallerde Elektrik Akımı 10

3.2 Özdirencin Serbest Elektron Modeli 12

3.3 Klasik Hall Olayı 14

4. LANDAU DÜZEYLERİ VE KUANTUM HALL OLAYI **20**

4.1 Magnetik Alanda Elektronun Hareketi 20

4.2 Şiddetli Bir Magnetik Alandaki Elektronların Enerjisi 22

4.3 Landau Seviyelerinin Dejenereliği ve Doluluk Çarpanı 28

4.4 Kuantum Hall Olayı 32

4.5 Kenar Durum Modeli 37

5. POISSON DENKLEMİ VE SAYISAL ÇÖZÜMÜ **42**

5.2 Poisson Denkleminin Çözümü İçin Sınır Şartları 46

5.3 SOR İle Poisson Denkleminin Sayısal Çözümü 49

5.4 Kullandığımız Yapının Geometrisi 51

6. THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI **55**

6.1 Giriş 55

6.2 Durum Yoğunluğu 56

6.2.1 B = 0 Durumu 56

6.2.2 $B \neq 0$ Durumu 58

6.3 Thomas – Fermi Yaklaşımı 60

6.3.1 T = 0 ve B = 0 Durumu 61

6.3.2 $T \neq 0$ ve $B = 0$ Durumu 62

6.3.3 $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ Durumu 63

7. ÖZ UYUMLU (SELF CONSISTENT) ÇÖZÜM 64

7.1 Termodinamik Durum Yoğunluğu 65

7.2 Newton Raphson Yöntemi 66

8. HESAPLAMA VE SONUÇ 69

KAYNAKLAR 84

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniği, *1940*'lı yılların sonunda, transistörün ortaya çıkmasıyla birlikte katı hal elektroniği üzerinde önemli bir etki yapmaya başladı. *1960*'lı yılların başlarında yarıiletken lazerin bulunması ve heteroeklemlerin ortaya çıkışı kuantum fiziğinin katıhal elektroniğinde gittikçe artan bir öneme sahip olmasını sağlamıştır (Şahin *2005*).

Yarıiletken aygıtlarda kuantum sınırlandırma etkileri üzerindeki tartışmalar *1957*'lerde başlar. Bu yıllarda Schrieffler, Silisyum Metal Oksit Yarıiletken *(MOS)* yapıdaki potansiyel kuyusunda hapsedilmiş elektronların klasik olarak davranamayacaklarını ve enerji düzeylerinin sınırlandırmanın olduğu boyutta kuantumlu hale geleceğini ileri sürmüştür. *1960* larda, **Moleküler Demet Epitaksi** *(MBE)* yönteminin bulunuşu (Cho ve Arthur *1975*), heteroeklem kuantum yapılarında o zamana kadar görülmemiş gelişmelere imkan sağlamıştır. Bu yöntem sayesinde bir materyal tabakalar halinde büyütülebiliyordu. Küçük bant aralığına sahip bir materyal, geniş bant aralıklı bir materyal arasına konulduğunda bir potansiyel kuyusu meydana gelir. Elektronlar bu potansiyel kuyusunda birikmeye başlarlar. Elektronlar bu kuyudan dışarı çıkamadıkları için hapsolurlar. Burada biriken elektronlar iki boyutlu elektron gazını meydana getirirler.

Şiddetli magnetik alan içinde bulunan iki boyutlu elektron gazında kuantum Hall olayı olarak adlandırılan bir etki gözlenir. Bu etki temel olarak iki boyutlu elektron gazının sınırlandırılması sonucu oluşan kenar etkileri ile yakından ilgilidir. Son yıllarda teknolojideki gelişmeler sayesinde iki boyutlu elektron gazının çeşitli şekillerde sınırlandırılmasıyla bazı kuantum nano yapılar oluşturulabilir. Bu kuantum nano yapıların ilk örneği kuantum Hall çubuğu adı verilen kuantum tellerdir. Diğer bir yapı ise elektronik Mach Zehnder İnterferometresidir *(e-MZI).* Başka bir örnek ise Aharanov Bohm İnterferometresidir. Farklı geometrilere sahip bu tarz yapılar oluşturularak kuantum Hall etkisi ile bağlantılı kenar etkileri kontrol edilebilir. Bu şekilde oluşturulan aygıtlar oldukça ilginç fiziksel davranış göstermektedir. Bu

aygıtları detektör olarak kullanılması, kuantum bilgisayarlarda kuantum bitlerinin saklanması ve kuantum bilgilerinin taşınması gibi geleceğe yönelik teknolojik alanlarda potansiyel uygulama alanına sahiptir.

Bu tür aygıtların dış etkilere karşı vereceği tepkiler, sistemin elektron dağılımından yola çıkılarak belirlenebilir. Bu sebeple yapı içerisinde bulunan elektron dağılımının doğru bir şekilde belirlenmesi son derece önemlidir.

Bu tez çalışmasında şiddetli magnetik alan içinde bulunan bazı kuantum nano yapıların (kuantum Hall çubuğu ve *e-MZI*) elektron dağılımlarını öz uyumlu (self-consistent) olarak belirleyeceğiz. Bu tür yapıların öz uyumlu olarak incelenmesinde yapıyı tanımlayan birbiri ile çiftlenimli Schrödinger ve Poisson denklemlerinin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekmektedir.

Çok sayıda elektron içeren sistemlerde Schrödinger denklemi yerine yarı klasik bir yaklaşım olan Thomas-Fermi yaklaşımı kullanılabilir (Lier ve Gerhardts *1994*, Oh ve Gerhardts *1997*, Güven ve Gerhardts *2003*, Siddiki ve Gerhardts *2003*). Bu tez çalışmasında bu yöntemi kullandık. Şiddetli magnetik alan içinde yer alan iki boyutlu elektron gazındaki elektron yoğunluğu etkin potansiyele bağlı olarak

$$n(\vec{r}) = \frac{g_s}{\pi \ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{exp[(E_n + V_{ext} + V_H - \mu)/k_B T] + 1} \tag{1.1}$$

şeklinde nonlineer bir fonksiyonla ifade edilebilir. Burada g_s : Spin dejenerelik katsayısı, ℓ:Siklotron yarıçapı, E_n: *n*. Landau seviyesi enerjisi, V_{ext}: Dış potansiyel, V_H: Hartree potansiyeli μ: Kimyasal potansiyel, *T*: Sıcaklık (*K*) *k*: Boltzman sabitidir.

Yukarıda Denk. 1.1 de yer alan ve elektronlar arası etkileşimi temsil eden V_H Hartree potansiyeli elektron yoğunluğuna bağlı olarak

$$\nabla^2 V_H = -\frac{e n_A}{\varepsilon_0} \tag{1.2}$$

şeklinde Poisson denklemi ile verilir.

Sistemin elektron dağılımının elde edilmesi için bu iki denklem birlikte çözülmelidir. Ancak Denk. 1.2 nonlineer bir denklemdir ve bu denklemin çözümü kompleks bir yaklaşım gerektirebilir. Bu amaçla aranan çözümü iteratif bir yaklaşımla elde eden bir bilgisayar programı hazırlanmıştır ve sistemin elektron dağılımını hesaplanmıştır. Ayrıca iteratif yaklaşımın her adımında Poisson denkleminin bilinen bir yük yoğunluğu için çözümüne ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla Poisson denkleminin üç boyutlu bir ızgara üzerinde sayısal olarak çözülmüştür. Çözümde **Ardışık Aşırı Durulma** *(AAD)*, diğer bir deyişle **Succesive Over Relaxation** *(SOR)* yöntemini kullanılmıştır. Bu yöntemi kullanan başka araştırmacılar da olmuştur (Speyer ve ark. *2001*, Lai ve ark. *2006*).

Magnetik alan altında elektron dağılımını elde edebilmek için Poisson denklemi ile Thomas Fermi denklemlerini öz uyumlu olarak çözüldü. Ancak Thomas Fermi yaklaşımı ile Poisson denkleminin öz uyumlu olarak çözülmesi genelde yakınsamayan bir problemdir. Bu problemi yakınsatabilmek için birçok yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan biriside yukarıda bahsettiğimiz Ardışık Aşırı Durulma yöntemidir. Ancak bu yöntem çok kararlı değildir. Bu problemi yakınsatabilmek için daha kararlı olan Newton – Raphson yöntemini kullanıldı. Bu yöntem birçok çalışmada kullanılmıştır (Trellakis ve ark. *1997*, Oh ve Gerhardts *1997*, Fiori ve ark. *2002*, Güven ve Gerhardts *2003*, Siddiki ve Gerhardts *2004*, Kim ve Won *2005*).

Bundan sonraki bölümde düşük boyutlu sistemler ve iki boyutlu elektron gazının elde edilişi hakkında bilgi verilecektir. Üçüncü bölümde madde içindeki elektrik akımı ve klasik Hall olayından bahsedilecektir. Dördüncü bölümde şiddetli magnetik alan altındaki elektronların enerji durumlarından (Landau düzeyleri) ve kuantum Hall olayına vurgu yapıldı. Beşinci bölümde Poisson denklemi için kullandığımız sayısal yöntemlere değinildi. Altıncı bölümde Thomas Fermi yaklaşımını açıklandı. Yedinci bölümde ise öz uyumlu çözümü ve Newton Raphson yöntemini açıklandı. Son bölümde de konu ile ilgili deneysel çalışmalar yapan bazı gruplar tarafından oluşturulan gerçek sistemler için hesaplamalar yaparak bulunan sonuçları deneysel sonuçlarla da karşılaştırıldı.

2. DÜŞÜK BOYUTLU SİSTEMLER VE 2BEG

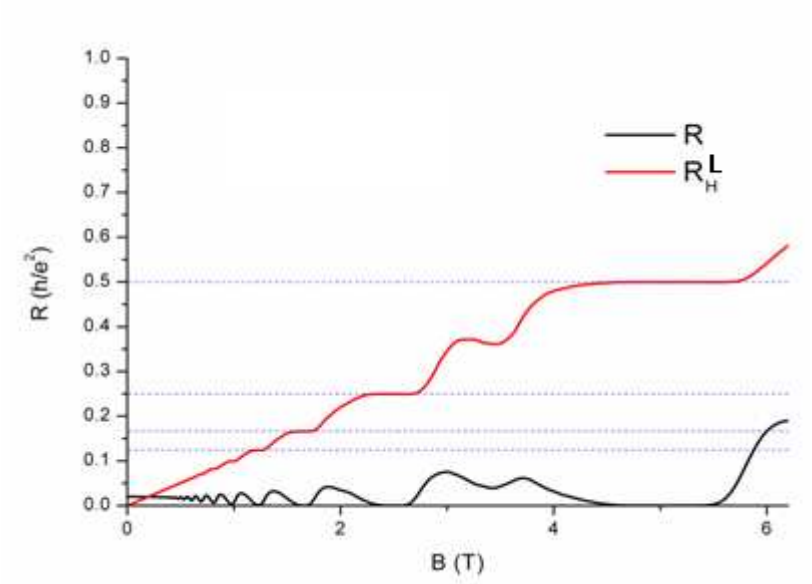
2.1 Düşük Boyutlu Yapılar

Elektronikte kullanılan aygıtlar yıllar boyunca büyükten küçüğe doğru bir gelişim süreci geçirdiler. Elektronik aygıtlarının küçültülmesi, ancak onu oluşturan elektronik devre elemanlarının küçültülmesi ile mümkün olabilir. Bu noktada düşük boyutlu yapılar devreye girmektedir. Elektronik devre elemanlarının boyutları ilk başlarda cm boyutundaydı. Daha sonra meydana gelen gelişmelerle mikron mertebesine düştüler. Günümüzde kullanılan teknoloji ile bu elektronik cihazların boyutları nanometre ölçeğindedir. Bu süreçte elde edilen kazanımlar, sıradan klasik fizik dünyasından, çok daha farklı olan kuantum mekaniksel dünyaya girişin bir yolunu verir (Bamham ve Vvdensky *2001*). Klasik fizik dünyası katıların kaba özellikleri ile ilgilenir. Böyle özellikler, normal olarak örneklerin biçim ve büyüklüklerinden bağımsız katsayılar cinsinden belirlenebilir. Örneğin, özgül ısı sığası, örneğin kütlesi ile çarpıldığında o örneğin ısı sığasını veren bir katsayıdır. Katının boyutlarından biri ve ya bir kaçı yeterince küçültülürse, katının özellikleri artık bu kaba katsayılar cinsinden verilmez. Böylece, bu örnek, ***Düşük Boyutlu Sistem*** *(DBS)* olarak tanımlanır. Düşük boyutlu sistemler düşürülen boyutların sayısına göre sınıflandırılır. Örneğin ince filmler iki boyutludur, çünkü sadece filmin kalınlığı küçültülmüştür; ince teller bir boyutludur, çünkü sadece uzunluğu büyüktür; noktalar ve zerreler sıfır boyutludur, bu durumda üç boyutta küçüktür (Hook ve Hall *2006*).

Elektronlar De Broglie dalga boyu mertebesindeki bir bölgeye sıkıştırıldığında sistemlerde kuantum mekaniksel etkiler (kaba davranışlardan ayrılmalar) oluşur. Bu durumda katıdaki uyarmaların doğası değişir ve bunun sonucu olarak bu uyarılmalarla belirlenen herhangi bir özellikte değişir. Düşük boyutlu sistemlerin özellikleri onların kaba özelliklerinden çok farklı ve çoğu zaman beklenmeyen yönde olabilir.

de Broglie dalga boyu mertebesindeki sınırlandırmalar bir boyutta (*z* yönü) oluşturulduğunda, elektron sadece *x* ve *y* yönünde serbest hareket eder. Bu şekilde oluşturulan yapıya ***İki Boyutlu Elektron Gazı*** *(2BEG)* adı verilir. Eğer hareket iki yönde sınırlandırılırsa ve elektron sadece *x* yönünde hareket ederse oluşan yapı *1BEG* dir. Elektronun hareketi üç boyutta da sınırlandırılırsa *0BEG* oluşur. Düşük boyutlu elektronik aygıtlardaki elektronik taşınmalar için en önemli yapı *2BEG* dir.

İçinden elektrik akımı geçen bir metale dik bir magnetik alan uygulandığında Hall olayı meydana gelir. Düşük boyutlu sistemlerde meydana gelen önemli olaylardan birisi kuantum Hall olayıdır. Kuantum Hall olayı, *2BEG* de Hall olayının oldukça düşük sıcaklıklarda gözlendiği kuantum mekaniksel bir biçimidir. Şekil 2.1 de magnetik alana bağlı olarak, bu olayda meydana gelen Hall direncinin değişimini göstermektedir. Şekil 2.1de görüldüğü gibi düşük magnetik alanda deneysel sonuçlar klasik sonuçlarla uyuşmaktadır. Ancak yüksek magnetik alanda Hall direnci basamaklı bir hal almaktadır. Bu basamaklı durum klasik olarak açıklanamamaktadır. Bu durumun kuantum mekaniksel bir açıklaması vardır. Sürekli kuantum kelimesini kullanmasının nedeni budur.



Şekil 2.1: Düşük boyutlu sistemlerde meydana gelen kuantum Hall olayında gözlenen deneysel sonuçlar.

2.2 Yarı İletken Bir Eklemde Oluşan İki Boyutlu Elektron Gazı

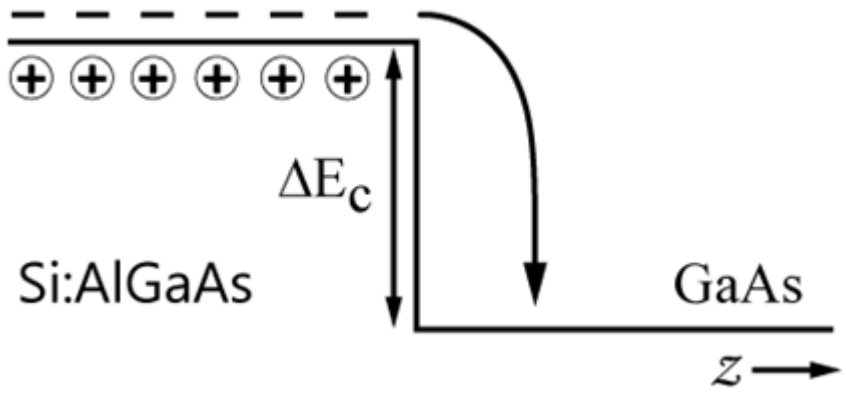
2BEG, Metal Oksit Yarıiletken *(MOS)* yapıların ve Alan Etkili Metal Oksit Yarıiletken Transistör *(MOSFET)* gibi birçok önemli elektronik aygıtın temelini oluşturur.

İki Boyutlu Elektron Gazının yarıiletken bir eklemde nasıl oluşturulduğu önemlidir. Yarıiletken eklemler daha önceleri ağırlıklı olarak Si/SiO_2 malzeme kullanılarak oluşturulurken, günümüzde ağırlıklı olarak $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ gibi malzemeler kullanılmaktadır. Verici safsızlıklarını oluşturmak için $Al_xGa_{1-x}As$ yapısının içine *Si* katkılandırılmaktadır.

Yarıiletken yapı tasarımı ve üretimindeki teknolojik gelişmeler elektronik mühendisleri ve bilgisayar tasarımcıları için yeni bir olanak yaratmıştır. Bu alandaki en önemli gelişmelerden biri, tek bir cins ve ya farklı cins malzemelerden yapılmış ince filmleri, benzer yapıdaki kristallerden oluşturulan temel bir tabaka üzerine yerleştirebilme tekniğidir. Epitaksi olarak bilinen bu işlem, moleküller demet epitaksi ile teknolojinin en üst noktasına ulaşmıştır. Galyum Arsenik tek kristali alt tabaka olarak kullanılır ve bunun üzerine Alüminyum ve Alüminyum Arsenik alaşımları eklemlenir. Galyum Alüminyum ve Arsenik havası boşaltılmış bir odacıkta buharlaştırılıp Galyum Arsenik tabaka üzerine demetler halinde gönderilir. Demetler kalınlığı kontrol edilebilen düzgün katmanlar halinde alt taş tabaka üzerinde biriktirilir. Buhar halindeki demetler yüzey üzerinde saniyede bir katman oluşturabilirler. Alt taş üzerine biriktirilen katmanların, bileşimleri, farklı buhar demetlerini farklı oranlarda yüzeye yönlendirilerek kontrol edilir. Yabancı katkı atomları *(Si)*, katmanların oluşum sürecinde, istenilen miktarlarda ilave edilir. Böylelikle çok düzgün ve kalınlıkları atom boyutlarına kadar indirgenebilen yarıiletken katmanlar oluşturulur (Fishbane, Gasirowicz ve Thornton *2003*).

Günümüzde en çok kullanılan ve bizim de burada ele aldığımız yapı $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ heteroeklemidir. Önce, verici safsızlık atomları olan *Si* atomlarının elektronlarını vermedikleri anı düşünelim, bu anda iletkenlik bant yapısı Şekil 2.2 de görüldüğü gibidir. Burada *Si* atomlarının valans elektronlarından fazla olanlar henüz

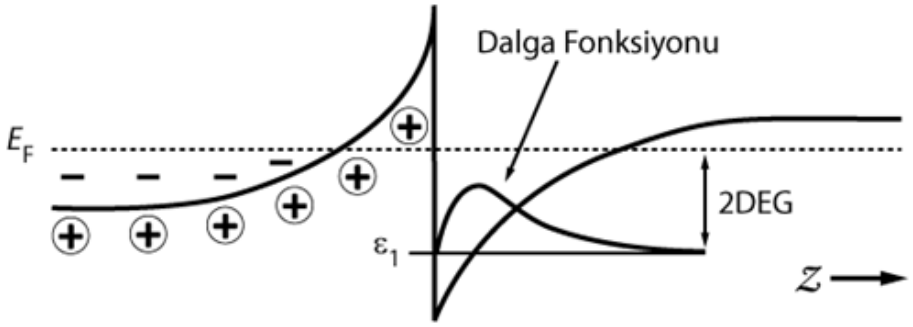
Silikon atomlarını terk etmedikleri için yarıiletkenin tümü nötr haldedir. Şekil 2.2 *GaAs* ile $Al_xGa_{1-x}As$ bileşiklerinin iletim bantları arasındaki farkı göstermektedir. Ayrıca şu an başka hiçbir etki olmadığından bant yapısı düzgündür. Acaba Silikon atomlarındaki elektronlar termal olarak uyarıldığında ne olacak? Termal olarak uyarılan elektronlar, Şekil 2.2 de görüldüğü gibi, *GaAs*'ın iletim bandı daha az enerjiye sahip olduğu için elektronlar enerjilerini kaybederek $Al_xGa_{1-x}As$ kısmından *GaAs* kısmına doğru hareket edeceklerdir. *GaAs* kısmında bu olurken $Al_xGa_{1-x}As$ kısmında ise elektron eksikliğinden dolayı *Si* ile katkılanmış kısım pozitif yüklenmeye başlar. Pozitif yüklü *Si* iyonları yarıiletken içinde hareket edemezler. Bulundukları yerden kaybettikleri elektronları geri çekmeye çalışırlar. Fakat *GaAs* içerisindeki elektronlar, $Al_xGa_{1-x}As$ ile *GaAs*'ın iletkenlik bandları arasındaki fark nedeni ile $Al_xGa_{1-x}As$ kısmına geçemezler. Şekil 2.3 de görüldüğü gibi *Si* iyonlarının oluşturduğu Coulomb çekiminden dolayı bantlar bükülür. Sonuç olarak serbest elektronlar $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ ekleminin olduğu ara yüzeye sıkışırlar.



Şekil 2.2. *GaAs* ve *Si* katkılanmış $Al_xGa_{1-x}As$'ın iletim bandının şematik gösterimi.

Şekil 2.3 de görüldüğü gibi bu ara yüzeyde sıkışan elektronlar kabaca üçgen kuyuya benzer bir yapı içinde tuzaklanmış elektronlar gibidir. Büyütme yönünü *z* yönü seçersek elektronların *z* yönündeki hareketleri kuantumlaşır. Kuyunun genişliği yaklaşık *10* nm civarındadır. Elektronlar kuyunun en düşük enerji seviyesi olan temel seviyeye yerleşecekler ve sonuç olarak elektronların *z* yönündeki hareketi tamamen

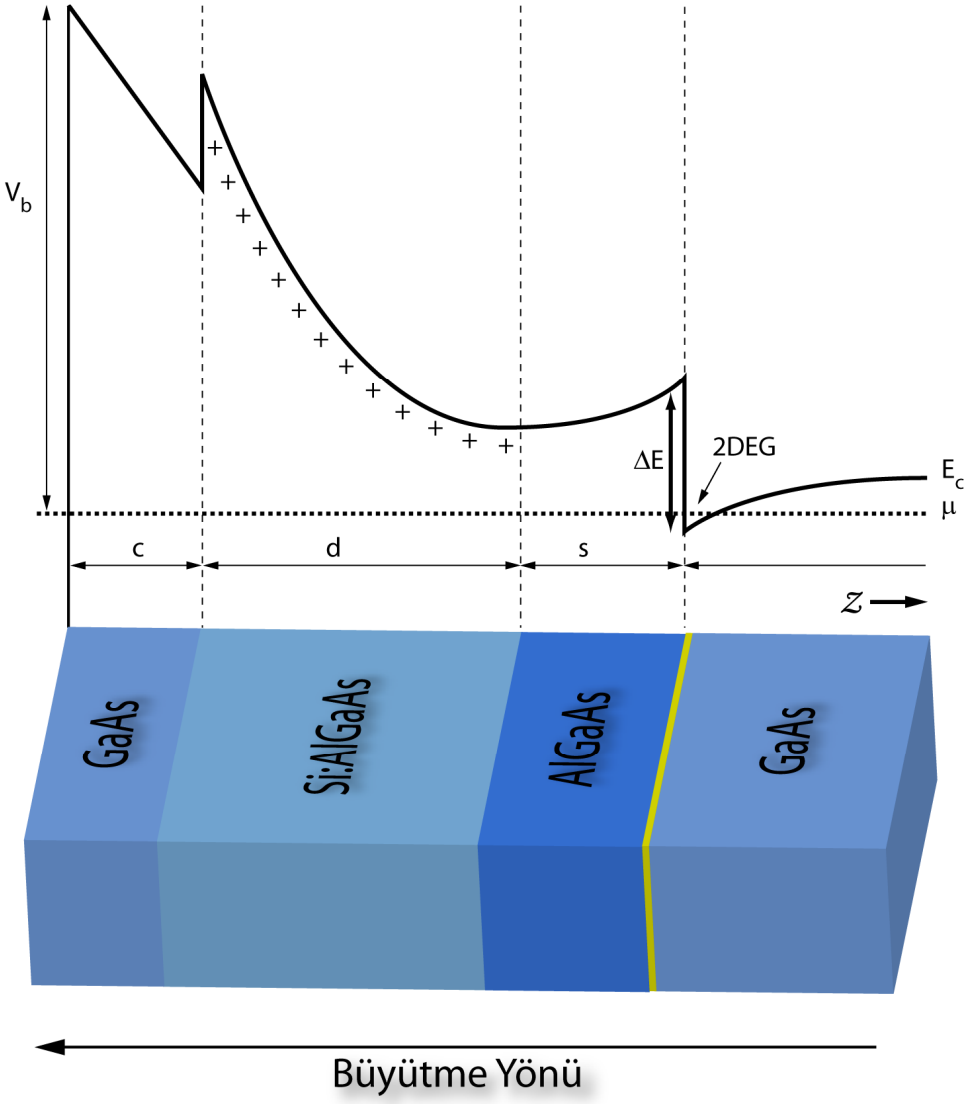
kısıtlanmış olacaktır. Elektronların hareketi *z* doğrultusunda sınırlandırılmış olmasına rağmen *x* ve *y* doğrultularında tamamen serbest hareket ederler. Bu da *z* doğrultusundaki temel seviyenin, elektronların *x* ve *y* deki hareketlerine göre dejenere seviyeler topluluğu olduğunu gösterir.



Şekil 2.3. Katkı atomları olan *Si* atomlarının iyonlaştıktan sonraki iletim bandının yapısı.

z doğrultusunda hareketleri tamamen kısıtlanmış fakat *x* ve *y* doğrultularında serbest olan elektronların oluşturduğu bu yapıya ***İki Boyutlu Elektron Gazı*** *(2BEG)* denir.

Deneysel çalışmalarda kullanılan yapı Şekil 2.4'te gösterilmektedir. Alttaş+Tampon *(GaAs)* tabakadan başlayarak kullanılan malzemenin bant yapısına bakalım. Alttaş+Tampon tabaka katkılanmadığı için bu tabakanın bant yapısında bükülme yoktur ve düzdür. Yapının büyütme yönüne doğru hareket ettiğimizde ilk karşılaştığımız şey *2BEG* i oluşturan yüklerdir. Bu yüklerin işareti negatiftir. Bu yüzden *2BEG*'in olduğu yerde bant aşağı doğru bükülür. Heteroeklem de maksimum eğime ulaşılır. Elektronların hepsi bu bükülmenin olduğu yerde toplanır. Böylece *2BEG* oluşur. Ara tabaka *AlGaAs* içine girdiğimizde, bant yukarı doğru ΔE kadar kaymıştır. Ancak ara tabaka boyunca eğim sabit kalarak yük yoğunluğu değişmemiştir. Katkılanmış *AlGaAs* tabakası içine girdiğimizde, bu tabakadaki pozitif yüklerden (donor) dolayı bant yukarı doğru bükülmüştür. Katkılanmış tabakadan en üst tabakaya (*GaAs*) geçtiğimizde bantta aşağı doğru ΔE kadar bir kayma olmuştur. Sonuç olarak bant, büyük sabit bir eğimle yukarı doğru bükülerek metal kapıya ulaşır.



Şekil 2.4. Deneysel çalışmalarda kullanılan genel yapı.

Katkılaşma ile elde edilen, Şekil 2.4 teki yapının iki yararı vardır. Birincisi donorları ve elektronları birbirinden ayırarak, elektronları iki boyutta sınırlandırır. İkincisi ise, katkılı *AlGaAs* ile *GaAs* arasına bir ara tabaka *AlGaAs* yerleştirilir. Böylece safsızlık atomlarının neden olduğu saçılmaların önüne geçilir. Sonuç olarak yüksek mobiliteli ve daha temiz yapılar elde edilir. Bu tür yapılar fiziksel deneylerde hayati önem taşır (Davies *1999*).

3. METALLERDE HALL OLAYI

3.1 Metallerde Elektrik Akımı

Yüklerin, içinde kolayca hareket ettiği maddelere ***iletken***, zorlukla hareket ettiği maddelere ***yalıtkan***, bu ikisinin arasındaki maddelere *yarı iletken* ve belirli şartlar altında özellikle düşük sıcaklıklarda yüklerin hiçbir engelleme ile karşılaşmadığı maddelere ***süper iletken*** denir. Önemli olan yüklerin madde içinde nasıl taşındığıdır. Basit olarak akım, elektronların metal içinde serbest parçacık gibi hareket etmesi şeklinde düşünülür. Metal içinde, $\vec{F} = -e\vec{E}$ kuvveti etkir ve elektron $\vec{E}$ elektrik alanına ters yönde hızlanır. Hareket eden elektronlar bir elektrik alan olsun ya da olmasın, metalin kristal yapısını oluşturan pozitif iyonlarla sürekli çarpışma halindedir. Alan bulunmadığında, elektronlar ortalama olarak belli bir yönde hareket etmez. Hareketleri hava moleküllerindeki gibi rastgeledir. Elektrik alan uygulandığında ise elektronlar elektrik kuvveti yönünde hareket ederler. Bu hareket sırasında meydana gelen çarpışmalarla elektronların akışını etkileyen bir sürüklenme kuvveti meydana gelir. Bir paraşütün düşüşünde olduğu gibi, sürükleme, hareketin kuvvet yönünde kararlı bir akış haline gelmesini sağlar. Elektronlar sabit bir eşik hızı ile hareket eder, bu hıza ***sürüklenme hızı*** denir. Sürüklenme hızını *v* ile gösterildi. Serbest elektronların metal içindeki yoğunluğu

$$I = n_A q v A \tag{3.1}$$

şeklinde verilir. Burada *A*, metal telin kesit alanıdır. Buradan sürüklenme hızı

$$v = \frac{I}{n_A q A} \tag{3.2}$$

olur. Bir teldeki akım yoğunluğu, $J = I/A$ olduğundan

$$\vec{J} = n_A q \vec{v} \tag{3.3}$$

şeklinde bulunur. Burada q yükünün negatif işaretli $-e$ olması nedeniyle $\vec{j}$ nin gerçekten v ile ters yönde olduğu görülür.

Yükün madde içinde ne kadar kolaylıkla hareket ettiğini, o maddenin elektriksel direnci belirler. Direnç R ile gösterilir. ***Elektriksel direnç*** potansiyel farkının, madde içinden geçen akıma oranı olarak tanımlanır:

$$R = \frac{V}{I} \tag{3.4}$$

Potansiyel farkı ile akım arasında ***Ohm Kanunu*** olarak bilinen bu lineer ilişki

$$V = IR \tag{3.5}$$

şeklindedir. Burada R direnci V 'den bağımsız olarak ölçülen bir büyüklüktür.

Direnç iletkenin uzunluğu ile doğru kesiti ile ters orantılı bir büyüklüktür. Bu orantı iletkenin fiziksel bir özelliği olan ***özdirenci*** tanımlar;

$$\rho = R\frac{A}{L} \tag{3.6}$$

Görüldüğü gibi özdirenç sadece iletkenin cinsine bağlı bir büyüklüktür. Denk. 3.6 R için çözüldüğünde

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{3.7}$$

olur. Özdirencin tersine ***iletkenlik*** denir ve σ ile gösterlir:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{3.8}$$

Denk. 3.7 Denk. 3.5 te yerine konularak ve gerekli işlemler yapılarak potansiyel fark özdirenç ve iletkenlik cinsinden

$$\frac{V}{L} = \rho\frac{I}{A} \tag{3.9}$$

şeklinde yazılır. V/L, maddeye uygulanan elektrik alan şiddeti E'yi verir, I/A ise akım yoğunluğu $\vec{j}$ yi verir. Böylece

$$\vec{E} = \rho\vec{j} \tag{3.10}$$

olur. Bu ifade Denk. 3.8'de kullanılarak

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır (Fishbane, Gasirowicz ve Thorton *2003*).

3.2 Özdirencin Serbest Elektron Modeli

Özdirencin doğru anlaşılması için kuantum mekaniğine ihtiyaç vardır. Ancak Ohm Kanununu anlamamıza yardımcı olacak basit bir klasik özdirenç modeli de mevcuttur. Bu ilk olarak Paul Drude tarafından *1900* yılında ortaya atılmıştır ve serbest elektron modeli ya da Drude modeli olarak bilinir. Bu modelin her ne kadar temel eksiklikleri bulunsa da iki nedenden ötürü üzerinde çalışmaya değer; birincisi özdirenç kavramına odaklamayı sağlaması, ikincisi ise bir modelin fizik biliminde nasıl kurulup geliştirildiği ve bu modelin başarılı ya da kusurlu olup olmadığının nasıl tespit edileceği konusunda iyi bir örnek oluşturmasıdır.

Model, katıların madde içinde hareket edebilen ve yük taşıyabilen serbest elektronlar içerdiği varsayımına dayanır. Serbest elektron yoğunluğu n_A maddeye bağlıdır ve iletken, yalıtkan ve yarıiletkenler arasındaki farkı belirler. Metallerde gevşek bağlı elektronların (bu elektronlar serbest elektron gibi davranır) sayısı atom başına *1.0* ile *1.3* arasında değişir.

Model, serbest elektronların T sıcaklığından bağımsız parçacıklardan meydana gelen bir gaz oluşturduğunu kabul eder. Akım üretildiğinde elektronlar, uygulanan elektrik alan ile hızlanır, fakat katı maddenin kristal kafes yapısını oluşturan atom ya da iyonlarla çarpıştıklarında yavaşlarlar. Başka bir ifade ile sürüklenme kuvvetleri elektronlara ortalama olarak etkir. En basit sürüklenme

kuvveti elektronların hızı ile orantılıdır. Böyle olduğu kabul edildiğinde, elektronun uygulanan alana paralel olan hareket bileşeni için Newton'un ikinci kanunu,

$$ma = -eE - (sabit\ sayı)v \tag{3.12}$$

olur. Elektron kütlesi *m* ile gösterilmiştir. Sabitin birimi $kütle/zaman$dır ve bu m/τ olarak yazılır. τ zaman boyutunda olan bir değişkendir ve çarpışmalar arasındaki ortalama zaman olarak tanımlanır ve elektron hareketine karşı koyan bu çarpışmalardır. Elektron hızı sürüklenme hızı v 'ye ulaşırken ivmede sıfıra yaklaşır. İvme sıfır olduğunda

$$v = -\frac{eE\tau}{m} \tag{3.13}$$

olur. İfadedeki eksi işareti, negatif yük taşıyıcıları için uygun olduğu gibi, sürüklenme hızının yönünün elektrik alan yönünün tersine olduğunu göstermektedir.

Denk. 3.13 Denk. 3.3 te akım yoğunluğu ifadesinde yerine konduğunda

$$j = \frac{n_A e^2 \tau}{m} E \tag{3.14}$$

bulunur. Bu eşitlik Denk 3.11 ile karşılaştırıldığı zaman iletkenlik için

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{n_A e^2 \tau}{m} \tag{3.15}$$

ifadesi elde edilir. Bu bulduğumuz iletkenlik ifadesi magnetik alan olmadığı zamanki iletkenliktir. Bu ifadeyi daha sonra tekrar kullanacağımız için Denk. 3.15 te görüldüğü gibi kolaylık olsun diye buna σ_0 adını verdik. Benzer şekilde Denk. 3.15 i Denk. 3.8 de kullandığımızda özdirenç

$$\rho = \frac{m}{n_A e^2 \tau} \tag{3.16}$$

olur.

Normal elektrik alanlar için Denk. 3.16 daki büyüklüklerin hiçbiri *E* 'ye bağlı değildir, dolayısıyla özdirenç (veya iletkenlik) sabittir. Bu görüş, Drude tarafından *1900* yılında, Ohm kanununun atomik boyutlardaki açıklaması olarak ortaya atılmıştır.

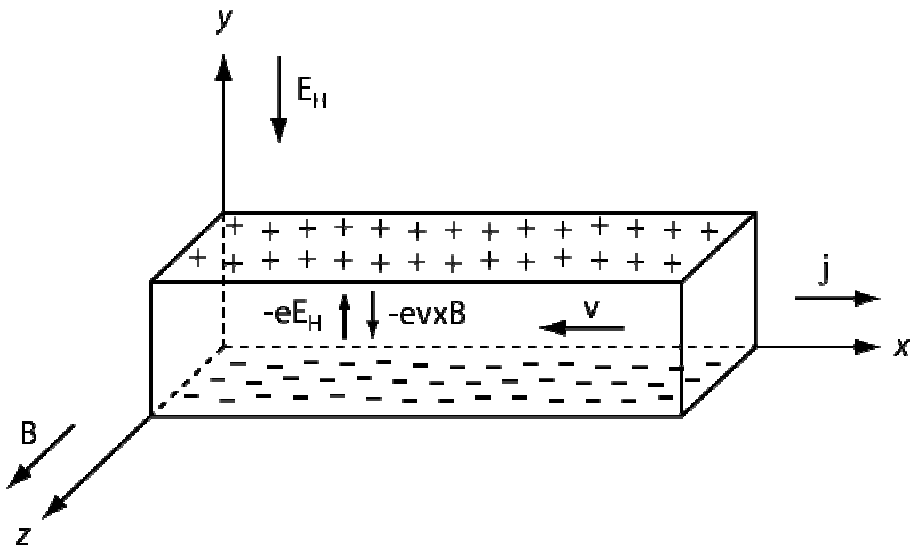
Serbest elektron modeli kabaca doğru olsa da tam anlamıyla gerçek bir model olarak kabul edilemez. Elektriksel iletkenlik için doğru bir modelin kurulabilmesi ancak kuantum mekanik bilgisi ile mümkündür. İletkenlik elektronları, birbiri ile etkileşime girmeyen klasik gaz elektronları gibi hareket etmezler, aksine kuantum kurallarına göre belirlenen hız dağılımına uyarlar. Kuantum fiziği, elektronları, maddenin örgüsünden saçılan dalgalar olarak ele alır ve sabit, düzgün sıralı kusursuz kristal yapılar içinde elektron akışına karşı bir direnç bulunmayacağını ileri sürer. Örgüyü oluşturan atomların ölçülebilir sıcaklıklardaki termal titreşimleri ve örgü kusurları nedeni ile iletkenliğe karşı bir direnç oluşur. Yüksek sıcaklıklarda, elektron akışına karşı direnç tamamen termal titreşimlerden kaynaklanır. Düşük sıcaklıklarda ise direnç, kafes kusurları nedeniyle saçılan elektronlardan kaynaklanır. Kuantum fiziğindeki bu görüşlerin doğruluğu deneysel olarak kanıtlanmıştır. Gerçekten kuantum mekaniği maddenin bütün özelliklerini doğru olarak açıklar (Fishbane, Gasirowicz ve Thornton *2003*).

3.3 Klasik Hall Olayı

1879'da E. H. Hall, içinden *j* akım yoğunluğu geçen bir metal, metal düzlemine dik, düzgün magnetik alan içine yerleştirildiğinde akım ve magnetik alanın her ikisine dik doğrultuda, enine bir gerilim farkı oluştuğunu gözlemledi (Hall 1879). Bu olaya ***Hall olayı*** denir. Burada oluşan V_H gerilimine ***Hall gerilimi*** ve E_H elektrik alanına da ***Hall elektrik alanı*** denir.

Hall olayı; akım taşıyıcıların işaretlerinin belirlenmesinde, sayı yoğunluklarının ve $\vec{v}$ sürüklenme hızlarının ölçümünde kullanılagelen önemli bir deneydir. Magnetik alan ölçüm aletlerinin ölçü proplarının yapısı da Hall olayına dayanır (Dereli ve Verçin *2000*).

Magnetik alanı $+z$ yönünde, akımın akış yönünü de $+x$ yönünde alırsak klasik Hall olayın geometrisi Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Olayın başlangıcı magnetik alan içinde iletim elektronlarına etkiyen Lorentz kuvvetidir. Yük taşıyıcıları elektronlar ise Şekil 3.1 de gösterildiği gibi akım $+x$ yönünde akarken, elektronlar $-x$ yönünde hızı ile sürüklenirler. Bu esnada $+z$ yönündeki magnetik alandan kaynaklanan Lorentz kuvveti elektronları metalin alt yüzeyine doğru saptırır. Bu sapma sonucu metalin alt yüzeyinde bir negatif yüklenme, metalin üst yüzeyinde de elektron eksikliğinden dolayı pozitif bir yüklenme oluşur. Bu yüklenme sonucunda metal içinde $-y$ yönünde bir elektrik alanı oluşur. Oluşan bu elektrik alan Hall elektrik alanıdır. Bu elektrik alan magnetik alanın tam aksine elektronlara $+y$ yönüne doğru bir kuvvet uygular. Bir noktadan sonra bu iki kuvvet birbirlerini dengeler ve elektronlar sadece $-x$ yönünde akmaya devam ederler (Hook ve Hall *2006*).



Şekil 3.1. Klasik Hall olayının şematik gösterimi.

Böylece denge durumunda bir elektrona etkiyen toplam kuvvet

$$\vec{F} = m\vec{a} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.17}$$

olur. Eğer τ çarpışmalar arasındaki ortalama zaman ise, çarpışmadan önceki hız

$$\vec{v} = a\tau = \frac{\vec{F}}{m}\tau \tag{3.18}$$

olur. Böylece

$$\frac{m\vec{v}}{\tau} = \vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.19}$$

şeklinde olur. Burada $\vec{B} = B\hat{k}$ alırsak ve Denk. 3.19 daki vektörel çarpım dahil gerekli işlemleri yaparsak *x* ve *y* yönündeki hızları

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \frac{eB}{m}\tau v_y \tag{3.20.a}$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \frac{eB}{m}\tau v_x \tag{3.20.b}$$

şeklinde buluruz. Burada siklotron frekansı $\omega_c = eB/m$ olmak zere

$$v_x + \omega_c\tau v_y = -\frac{e\tau}{m}E_x \tag{3.21.a}$$

$$v_y - \omega_c\tau v_x = -\frac{e\tau}{m}E_y \tag{3.21.b}$$

eşitliklerini elde ederiz. Denk. 3.21.a $\omega_c\tau$ ile çarpılıp Denk. 3.21.b ile toplanırsa

$$v_y = \frac{1}{(1 + \omega_c^2\tau^2)}\left[-\frac{e\omega_c\tau^2}{m}E_x - \frac{e\tau}{m}E_y\right] \tag{3.22}$$

elde edilir. Akım yoğunluğunu daha önce Denk. 3.3 ile ifade etmiştik. Bu eşitlikten yararlanmak için Denk. 3.22 nin her iki tarafını $-n_A e$ ile çarpalım. Burada n_A: birim alandaki elektron sayısını göstermektedir. Bu işlemi yaptıktan sonra ve Denk. 3.15 i kullandığımızda akım yoğunluğunun *y* bileşenini

$$j_y = -n_A e v_y = \frac{\sigma_0}{(1+\omega_c^2\tau^2)}\left[\omega_c\tau E_x + E_y\right] \tag{3.23}$$

şeklinde buluruz. Yaptığımız bu işlemlere benzer işlemleri akım yoğunluğunun *x* bileşeni için yaparsak

$$j_x = -n_A e v_x = \frac{\sigma_0}{(1+\omega_c^2\tau^2)}\left[E_x - \omega_c\tau E_y\right] \tag{3.24}$$

şeklinde olur. Bulduğumuz bu $\vec{j}$ yi tensör şeklinde yazarsak

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{(1+\omega_c^2\tau^2)}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

ifadesine ulaşırız. Bu eşitliği Denk. 3.11 ile karşılaştırdığımızda

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_0}{(1+\omega_c^2\tau^2)}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

olur. Bu ifadeye ***iletkenlik tensörü*** denir. Bu iletkenlik tensörü

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki σ_{xx} 'e ***boyuna iletkenlik*** ve σ_{xy}'ye ise ***Hall iletkenliği*** denir. Denk. 3.8 de görüldüğü gibi iletkenlik tensörünün terside $\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$ ***özdirenç tensörü*** olarak adlandırılır. Bir matrisin tersi kofaktörler matrisinin transpozunun, determinantına bölümüdür. Bu tanımı ve Denk. 3.8 i kullandığımızda sonuç ifademiz

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2\right)}\begin{pmatrix} \rho_{xx} & -\rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

olur.

Akım yoğunluğunun *x* ve *y* bileşenlerini daha önce Denk. 3.23 ve Denk. 3.24 de bulmuştuk. Denge durumunda $j_y = 0$ dır. Bu durumda Denk. 3.23 e geri dönersek ve gerekli işlemleri yaparsak elektrik alanın *y* bileşenini

$$E_y = -\omega_c \tau E_x \tag{3.29}$$

olur. Denk. 3.29 u Denk. 3.24 te yerine yazıp gerekli işlemleri yaptığımızda

$$j_x = \sigma_0 E_x \tag{3.30}$$

ifadesine ulaşırız. Denk. 3.10 u

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

şeklinde yazabiliriz. $j_y = 0$ olduğundan dolayı

$$E_x = \rho_{xx} j_x \tag{3.32}$$

olur. Denk. 3.30 u Denk. 3.32 de yerine yazarsak

$$\rho_{xx} = \frac{m}{n_A e^2 \tau} \tag{3.33}$$

olarak bulunur. Bu ρ_{xx} ifadesine ***boyuna özdirenç*** denir. Benzer işlemler E_y bileşeni için tekrarlanırsa

$$E_y = \rho_{yx} j_x \tag{3.34}$$

şeklinde olur. Denk. 3.29 ve Denk. 3.30 u Denk. 3.34 te yerine yazıp gerekli işlemleri yaparsak

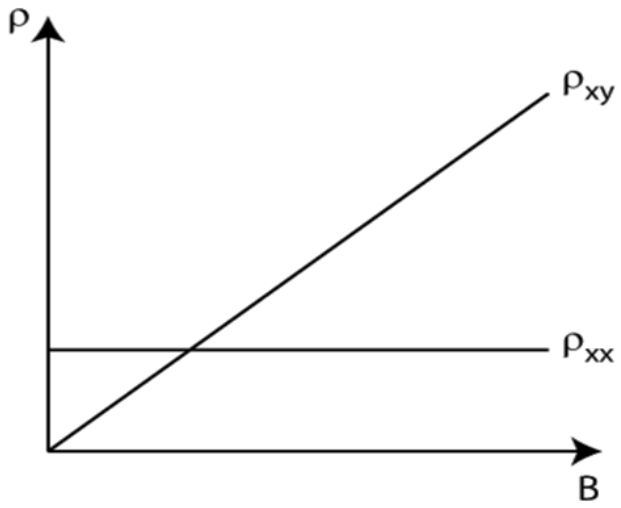
$$\rho_{yx} = -\frac{B}{n_A e} \tag{3.35}$$

ifadesini elde ederiz. $\rho_{xy} = -\rho_{yx}$ olduğundan dolayı sonuç olarak

$$\rho_{xy} = \frac{B}{n_A e} \tag{3.36}$$

olur. Elde ettiğimiz bu ρ_{xy} ifadesine ***enine*** *(Hall)* ***özdirenç*** denir. Şekil 3.2 de ve Denk. 3.33 de görüldüğü gibi boyuna direnç ρ_{xx} magnetik alandan bağımsız ve sabit

kalmaktadır. Yine Şekil 3.2 ve Denk. 3.36 dan görüldüğü gibi Hall (enine) direnci magnetik alan ile doğru orantılı bir şekilde artmaktadır.



Şekil 3.2 Klasik Hall Olayında boyuna ve Hall direncin magnetik alanla değişimi.

4. LANDAU DÜZEYLERİ VE KUANTUM HALL OLAYI

4.1 Magnetik Alanda Elektronun Hareketi

$\vec{B} = B\hat{k}$ şeklinde $+z$ yönünde sabit ve homojen magnetik alan içinde hareket eden *m* kütleli ve q yüklü noktasal bir parçacığa

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.1}$$

şeklinde verilen Lorentz kuvveti etki eder. Parçacığın hareket denklemi

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{4.2}$$

dir. Denk. 4.1 i Denk. 4.2 de yerine yazıp, buradaki vektörel çarpımı ve diğer işlemleri yaptığımızda *x*, *y* ve *z* yönündeki ivmeleri

$$\dot{v}_x = \omega_c v_y \tag{4.3.a}$$

$$\dot{v}_y = -\omega_c v_x \tag{4.3.b}$$

$$\dot{v}_z = 0 \tag{4.3.c}$$

şeklinde buluruz. Kuvvetin *z* bileşeni olmadığından *z* ekseni üzerindeki izdüşümü bir düzgün doğrusal hareket olup v_z bir hareket sabitidir. Newton'un *II*. Hareket Kanunundan yola çıkarak Denk. 4.3.a yı açalım. Gerekli işlemleri yaptığımızda, $\beta_y = -(v_x - \omega_c y)m$ olmak üzere

$$\frac{v_x^2}{\omega_c^2} = \left(y - \frac{\beta_y}{m\omega_c}\right)^2 \tag{4.4}$$

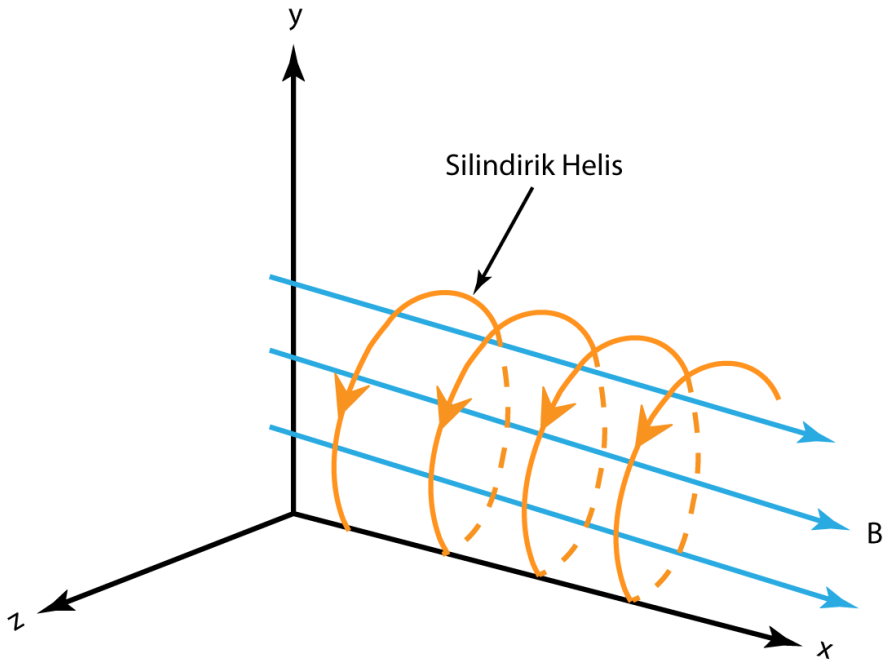
ifadesine ulaşırız. Aynı işlemleri Denk. 4.3.b için yaptığımızda ve $\beta_x = \left(v_y + \omega_c x\right)m$ olmak üzere

$$\frac{v_y^2}{\omega_c^2} = \left(x - \frac{\beta_x}{m\omega_c}\right)^2 \tag{4.5}$$

ifadesine ulaşırız. Burada $\vec{\beta} = \beta_x \hat{\imath} + \beta_y \hat{\jmath}$ vektörü de bir başka hareket sabitidir. Denk. 4.4 ile Denk.4.5 i toplayalım. Son olarak $v_\perp = \omega_c R$ eşitliğinden yararlanalım. Gerekli işlemleri yaptığımızda sonuç ifademiz

$$\left(x - \frac{\beta_x}{m\omega_c}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta_y}{m\omega_c}\right)^2 = R^2 \tag{4.6}$$

olur. Buna göre elektronun yörüngesi, merkezi $\beta/m\omega_c$ konumunda bulunan silindirik bir helistir (Şekil 4.1). $\beta/m\omega_c$ niceliği xy düzlemindeki siklotron çemberinin merkezinin konum vektörüdür.



Şekil 4.1 Düzgün ve sabit magnetik alan içinde yüklü parçacıkların yörüngesi *R* yarıçaplı silindirik bir helistir.

Dış magnetik alanda *xy* düzleminde etkileşmeyen elektronlar için yaptığımız bu hesaplamalar metal içinde olan elektronlar için de geçerlidir. Çünkü metal içindeki elektronlar serbest hareket ederler.

İçinden elektrik akımı geçen bir metale dik bir magnetik alan uygulandığında meydana gelen Hall olayını (Bölüm 3.3) daha önce açıklamıştık. Bu olayda meydana gelen kutuplanmadan dolayı bir elektrik alan (Hall elektrik alanı) oluşur. Bu nedenle metal içinde hareket eden elektronlar hem magnetik alan hem de elektrik alanın etkisinde kalırlar. Bu nedenle bu elektronlar daha karmaşık bir yörüngede hareket ederler. Ancak normal sıcaklıklarda ve güçlü magnetik alanlarda bu düzenli hareket çarpışmalarla bölünür. Çok daha düşük sıcaklıklarda ve güçlü magnetik alanlarda çarpışmaların etkisi ihmal edilir ve elektronlar belirli bir yörüngeyi takip ederler. Bu aşırı şartlar altında klasik teori uygulanamaz ve hareket kuantumlu hale gelmiş olur. Bunun anlamı şudur: enerji sadece belirli değerler alabilir. Bu enerji seviyeleri de Landau seviyeleri olarak adlandırılır.

4.2 Şiddetli Bir Magnetik Alandaki Elektronların Enerjisi

Magnetik alanda hareket eden bir elektronun momentumu iki kısımdan oluşur:

$$\vec{p} = \vec{p}_k + \vec{p}_{alan} \tag{4.7}$$

Bunlardan birincisi bildiğimiz kinetik momentum $\vec{p}_k = m\vec{v}$ ve diğeri de $\vec{p}_{alan} = -e\vec{A}$ şeklinde verilen alan momentumudur. Buradaki $\vec{A}$ vektör potansiyelidir. Toplam momentum veya kanonik momentum

$$\vec{p} = \vec{p}_k + \vec{p}_{alan} = m\vec{v} - e\vec{A} \tag{4.8}$$

olur. Buradan bildiğimiz momentum ifadesini çekersek

$$m\vec{v} = \vec{p} + e\vec{A} \tag{4.9}$$

olur. Buradaki kinetik enerji

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 \tag{4.10}$$

olur. Bu enerjiye karşılık gelen Hamiltoniyen

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 \tag{4.11}$$

olur. $\left(\hbar/_i\right)\vec{\nabla}$ ifadesini $\mathcal{H}\psi = E\psi$ denkleminde kullanırsak

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \mathrm{e}\vec{\mathrm{A}}\right)^2 \psi = E\psi \tag{4.12}$$

ifadesini elde ederiz. Bu denklemdeki parantez karesini açıp gerekli işlemleri yaptığımızda elde ettiğimiz son ifade

$$-\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{im}\vec{A}\vec{\nabla}\psi + \frac{\hbar e}{2im}\psi\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi = E\psi \tag{4.13}$$

olur. Buradan itibaren bu denklem $\vec{A}$ nın seçimine göre sınıflandırılablir.

Maxwell denkleminde $\vec{B}$ alanı $\vec{A}$ cinsinden $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ şeklinde tanımlanabiliyorsa, vektör potansiyeline keyfi bir skaler fonksiyonun gradyentini ekleyebiliriz. Yani $\vec{A}$ yerine $\vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ yazabiliriz. Bu dönüşüm altında $\vec{B}$ değişmez. Bu tür dönüşümlere ***ayar*** *(gauge)* ***dönüşümü*** denir.

Biz burada magnetik alan içindeki yüklü parçacıkların hareketi ile ilgilendiğimizden dolayı vektör potansiyelini

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{\mathrm{r}} + \vec{\nabla} f(\vec{r}) \tag{4.14}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sonuç her keyfi *f* fonksiyonu için bu ifadenin rotasyonelinde sabit bir $\vec{B}$ alanı verir. Burada magnetik alanı $\vec{B} = B\hat{k}$ şeklinde $+z$ yönünde düşünürsek en genel vektör potansiyeli

$$\vec{A}(r) = \left(-\frac{1}{2}yB + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}xB + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{4.15}$$

şeklinde yazılır. Burada *f* sabit alınırsa bu ayara ***simetrik ayar*** denir ve

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{2}B(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}) \tag{4.16}$$

olur. Öte yandan $f = Bxy/2$ veya $-Bxy/2$ seçilirse sırasıyla vektör potansiyelleri

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{By}{2} \quad veya \quad -\frac{By}{2} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{Bx}{2} \quad veya \quad -\frac{Bx}{2} \tag{4.18}$$

olur. Bu durumda $\vec{A} = Bx\hat{\jmath}$ veya $\vec{A} = -By\hat{\imath}$ olur. Bunlardan ilkine ***1. Landau ayarı*** ikincisine ***2. Landau ayarı*** denir. Biz bu problemi Landau ayarı ile çözelim. Yani $\vec{A} = Bx\hat{\jmath}$ ya da $\vec{A} = -By\hat{\imath}$ seçelim. Burada $\vec{A} = Bx\hat{\jmath}$ seçelim. Bu durumda

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Bx\hat{\jmath}) = 0 \tag{4.19}$$

olur. Bu ifadeyi Denk. (4.13) te kullanırsak Denk. (4.13)

$$-\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{im}(Bx\hat{\jmath})\vec{\nabla}\psi + \frac{\hbar e}{2im}\psi\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{e^2}{2m}(Bx\hat{\jmath})^2\psi = E\psi \tag{4.20}$$

haline dönüşür. *2BEG* ile uğraştığımıza göre $\vec{\nabla}^2$ operatörü iki boyut için

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4.21}$$

şeklinde olacaktır. Denk. 4.21 i Denk. 4.20 de yerine yazarsak ve gerekli düzeltmeleri yaparsak

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] + \frac{\hbar e}{im}Bx\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{e^2B^2x^2}{2m}\psi = E\psi \tag{4.22}$$

ifadesine ulaşırız. Şimdi buradaki dalga fonksiyonunu

$$\psi = \Phi(x)e^{-ik_y y} \tag{4.23}$$

şeklinde seçersek ve Denk. 4.21 i kullanırsak

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial\phi(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}^2} e^{-iky} - \phi(x)k^2 e^{-iky} \tag{4.24}$$

olur. Ayrıca Denk. 4.23 ün *y* bileşenine göre türevini alırsak

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \phi(x)(-ik)e^{-iky} \tag{4.25}$$

olur. Denk. 4.23 ü, Denk. 4.24 ü ve Denk. 4.25 i, Denk. 4.22 de yerine yazıp gerekli düzeltmeleri yaparsak bu ifade

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left[\frac{eB}{m}\left(mx - \frac{\hbar k}{eB/m}\right)\right]^2 \phi = E\phi \tag{4.26}$$

şekline dönüşür. Burada daha önce tanımladığımız gibi $\omega_c = eB/m$ siklotron frekansı ve $X_0 = \hbar k/\omega_c m$ gibi bir sabit olsun. Bu ifadeleri kullandığımızda ve gerekli işlemleri yaptığımızda sonuç ifademiz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - X_0)^2\phi = E\phi \tag{4.27}$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeyi daha tanıdık bir ifadeye dönüştürmek için Denk.4.27 nin her iki tarafını $2/\hbar\omega_c$ ile çarpalım ve gerekli düzeltmeleri yaparsak

$$-\frac{\hbar}{m\omega_c}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{m\omega_c}{\hbar}(x - X_0)^2\phi = \frac{2E}{\hbar\omega_c}\phi \tag{4.28}$$

şeklinde yazılır. Bu tür fonksiyonlar özel fonksiyonlardır ve Hermite fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır. Şimdi bu denklemin çözümünü yapalım. Bu amaçla bu denklemi yeni bir düzenlemeye tabi tutalım. Bu nedenle $2E/\hbar\omega_c = \epsilon_n$ ve $\xi = \sqrt{m\omega_c/\hbar}\,(x - X_0)$ olmak üzere değişkeni *x*'ten ξ değişkenine dönüştürerek bu denklemi tekrar

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + (\epsilon_n - \xi^2)\phi = 0 \tag{4.29}$$

şeklinde yazarız. Eğer $\phi = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ ise gerekli işlemler yapıldığında bu diferansiyel denklem

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + (\epsilon_n - 1)H = 0 \tag{4.30}$$

haline gelir. Buradaki $\epsilon_n - 1 = 2n$ gibi bir tam sayı ise bu denklem bir Hermite polinomudur ve $\phi = H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ Hermite fonksiyonudur. Böylece

$$\phi = H\left(\frac{x - X_0}{\ell}\right)e^{-\left(\frac{x-X_0}{\ell}\right)^2} \tag{4.31}$$

olur. Burada ℓ

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \tag{4.32}$$

şeklinde tanımlanan magnetik uzunluktur. $\epsilon_n - 1 = 2n$ ise

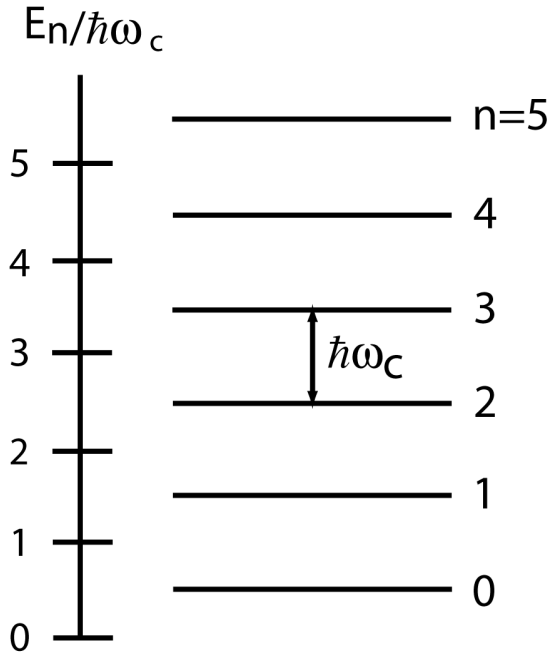
$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{4.33}$$

olacaktır. Burada *n=0,1,2,3...* değerlerini alabilir. Bu enerji seviyeleri ***Landau seviyeleri*** olarak adlandırılır.

Düzgün bir magnetik alana dik düzlemde hareket eden elektronun enerjisinin bilinmesi sadece $R = v_\perp/\omega_c = (2E/m\omega_c^2)^{1/2}$ siklotron yarıçapını belirler; fakat çemberin ve özel olarak merkezinin nerede olduğu sadece enerji ile belirlenemez. Elektron *xy* düzleminin herhangi bir yerinde dairesel hareketini yapabilir. Başka bir deyişle, sonsuz tane elektron aynı enerji ile aynı anda bu düzlemde siklotron hareketi yapabilir.

Denk. 4.33 den de görüldüğü gibi Landau düzeyleri ile bir boyutlu çizgisel harmonik salınıcının enerji düzeyleri birbirlerine oldukça benzer. Aralarındaki en önemli farklılık, bir boyutlu harmonik salınıcının enerji düzeyleri dejenere değil iken, Landau düzeylerinin yüksek oranda dejenere oluşudur. Uygulamada Landau

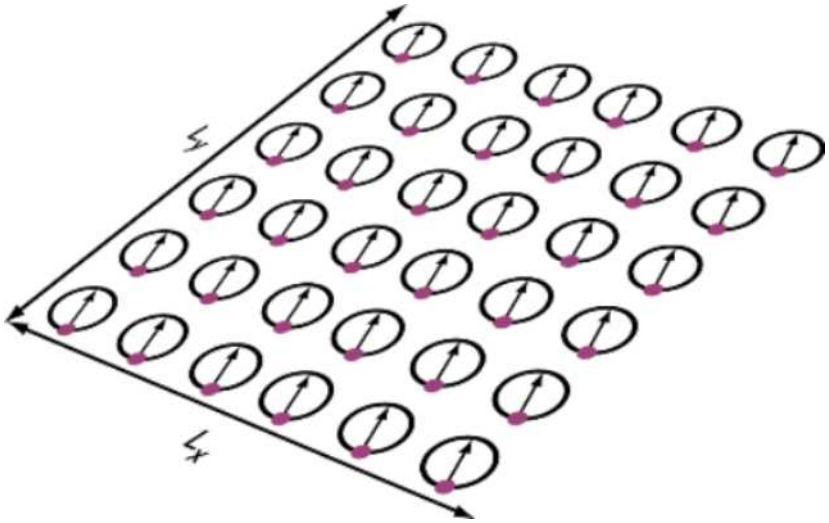
düzeylerini önemli kılan dejenerelikleridir. *n=0*'a karşılık gelen tüm dejenere Landau düzeylerine ***1. Landau düzeyi***, *n=1'*e karşılık gelenlere ***2. Landau düzeyi*** denir. Eğer elektronlar magnetik alana dik sonlu bir düzlemde hareket ederse, Landau düzeylerinin dejenereliği de artık sonlu olur. Bu konuyu sonraki kısımda inceleyeceğiz.



Şekil 4.2 Landau düzeyleri, harmonik salınıcı düzeyleri gibi eşit $\hbar\omega_c$ aralıklı düzeylerdir. Aralarındaki en önemli fark Landau düzeylerinin dejenere oluşudur. Ayrıca ω_c siklotron frekansı bir dış parametre olan *B* magnetik alanına bağlıdır.

4.3 Landau Seviyelerinin Dejenereliği ve Doluluk Çarpanı

Düzgün ve sabit $\vec{B} = B\hat{k}$ magnetik alanına dik, yüklü parçacık (elektron) problemini $\vec{A} = Bx\hat{j}$ seçerek Landau ayarında çözdük. Problemi Landau ayarında çözdüğümüzde gerek Schrödinger denkleminin ve gerekse enerji öz değer ve öz fonksiyonlarının harmonik salınıcınınkine benzerlikleri oldukça açık şekilde ortaya çıktı. Henüz elektronun sonlu bir düzlemde hareket edip etmediğini dikkate almadık. Uygulamada $L_x \times L_y$ boyutlu dikdörtgensel bir düzleme kısıtlanmış elektronların hareketini incelemek çok önemlidir. Burada bu konuyu inceleyeceğiz.



Şekil 4.3 $L_x \times L_y$ boyutlu sonlu düzlemdeki harmonik osilatörler.

Şimdi elektronların Şekil 4.3 te görüldüğü gibi $L_x \times L_y$ şeklinde sonlu bir düzlemde hareket ettiklerini varsayalım. Daha önce harmonik osilatörün merkezi X_0 ı aşağıdaki gibi tanımladık:

$$X_0 = \frac{\hbar k_y}{\omega_c m} \tag{4.34}$$

Denk. 4.34 de ω_c ifadesini yerine yazarsak bu ifade

$$X_0 = \frac{\hbar}{eB} k_y \tag{4.35}$$

olur. İki ardışık dalga arası mesafe

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \tag{4.36}$$

şeklinde verilir. Bu eşitliği kullandığımızda ve gerekli işlemleri yaptığımızda, iki harmonik osilatör merkezi arasındaki fark

$$\Delta X_0 = \frac{h}{eBL_y} \tag{4.37}$$

olacaktır. L_x uzunluğuna

$$N_\phi = \frac{L_x}{\Delta X_0} \tag{4.38}$$

tane harmonik osilatör yerleşebilir. Bu da bize Landau seviyelerinin dejenereliğini verir. Denk. 4.37 yi Denk. 4.38 de yerine yazdığımızda

$$N_\phi = \frac{L_x L_y B}{h/e} \tag{4.39}$$

olur. Dikdörtgen düzlemin alanı $A = L_x L_y$ olduğundan $L_x L_y B = \phi$ bize magnetik akıyı verir. $\phi_0 = h/e$ ***magnetik akı kuantumu*** olarak tanımlanır. Yaptığımız bu tanımlamaları Denk. 4.39 da yerine yazdığımızda Landau düzeylerinin dejenereliği

$$N_\phi = \frac{\phi}{\phi_0} \tag{4.40}$$

şeklinde verilir. Denk. 4.40 a göre, sonlu düzlemde her bir Landau düzeyinin dejenereliği $L_x \times L_y$ dikdörtgeninden geçen magnetik akı kuantumlarının sayısına eşittir. Başka bir deyişle örnekteki durum sayısı, magnetik alan kuantumlarının sayısına (yüzeyden geçen magnetik akı çizgisi) eşittir.

Toplam elektron sayısının, sonlu düzlemdeki durum sayısına oranı bize uygulamada önemli bir yere sahip olan doluluk çarpanını verir:

$$\frac{N_{el}}{N_{\phi}} = \nu \tag{4.41}$$

Birim alan başına düşen magnetik akı kuantumu sayısı n_{ν} ise

$$N_{\phi} = n_{\nu} L_x L_y \tag{4.42}$$

şeklinde verilir. Burada Denk. 4.40 deki N_{ϕ} yi yerine yazdığımızda bu ifade

$$n_{\nu} = eB/h \tag{4.43}$$

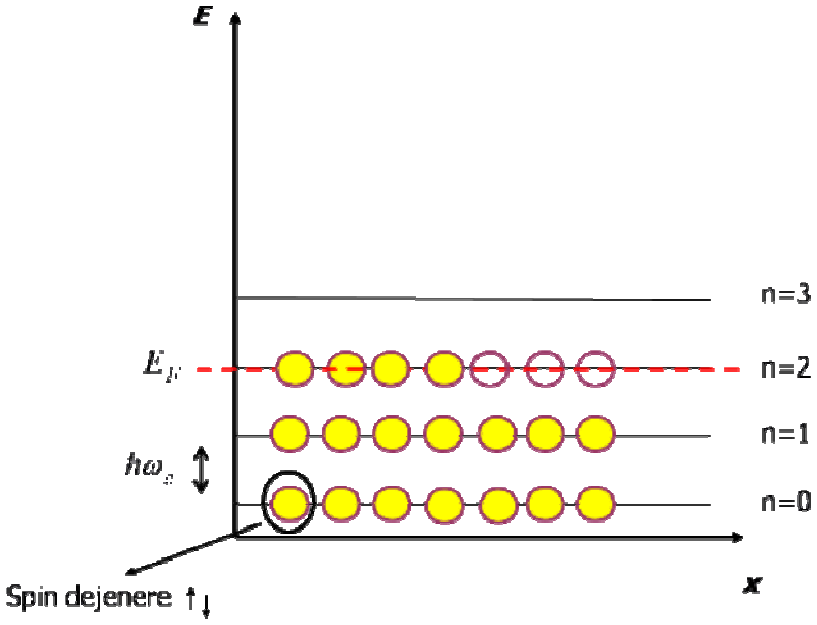
olur. Denk. 4.43 e göre, magnetik alan arttıkça birim alana düşen magnetik akı kuantum sayısı artmaktadır. Böylece bu sonlu yüzeye yerleşen elektron sayısı artmaktadır. Bu yüzeydeki elektron yoğunluğu n_A olmak üzere yüzeydeki toplam elektron sayısı

$$N_{el} = n_A L_x L_y \tag{4.44}$$

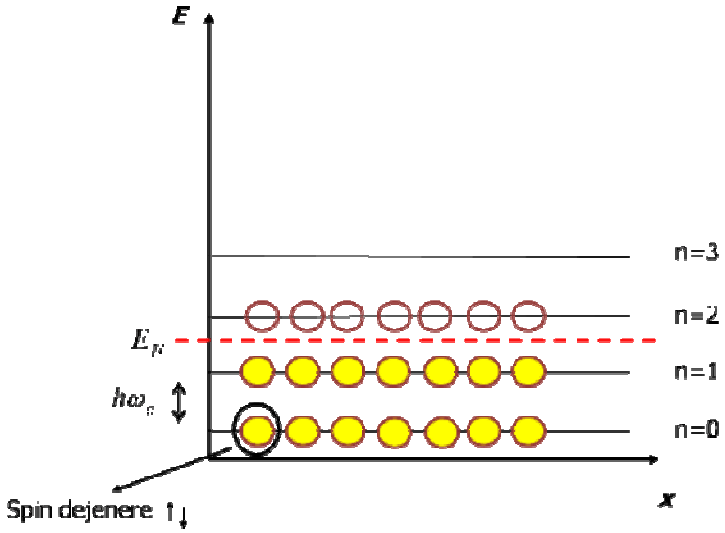
olur. Denk. 4.44 ve Denk. 4.42 yi, Denk. 4.41 de yerine yazıp gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$\nu = \frac{n_A \phi_0}{B} \tag{4.45}$$

ifadesine ulaşılır. Burada ν ***doluluk çarpanıdır.*** Bu çarpan bir tam sayı iken bir Landau seviyesi tam doludur. Örneğin $\nu = 1$ ise ilk Landau düzeyi ve $\nu = 2$ ise ilk iki Landau düzeyi tam doludur. $\nu = 1.6$ iken ilk Landau düzeyi tam dolu, ikincisi ise % 60 doludur. Bu parametre daha sonra ele alacağımız kuantum Hall olayının teorik olarak izahı için önemli bir parametredir.



Şekil 4.4 Landau seviyelerinin dolması. Şekilde görüldüğü gibi *n=2* Landau seviyesi ile E_F Fermi enerjisi çakışmaktadır. Bu çakışmadan dolayı bu düzeyde hem işgal edilmiş durumlar, hem de işgal edilmemiş durumlar söz konusudur. Ve ya elektronlar boş olan yerleri doldurmaya çalışıyorlar.



Şekil 4.5 Landau seviyelerinin dolması. Burada ise Fermi enerjisi *(E_F)* iki Landau seviyesi arasındadır. Buradaki elektronların tümü E_F enerji düzeyi altındaki düzeylere yerleşirler. Çünkü sıcaklık çok düşük olduğu için elektronlar bir Landau düzeyinden ötekine uyarılmazlar.

4.4 Kuantum Hall Olayı

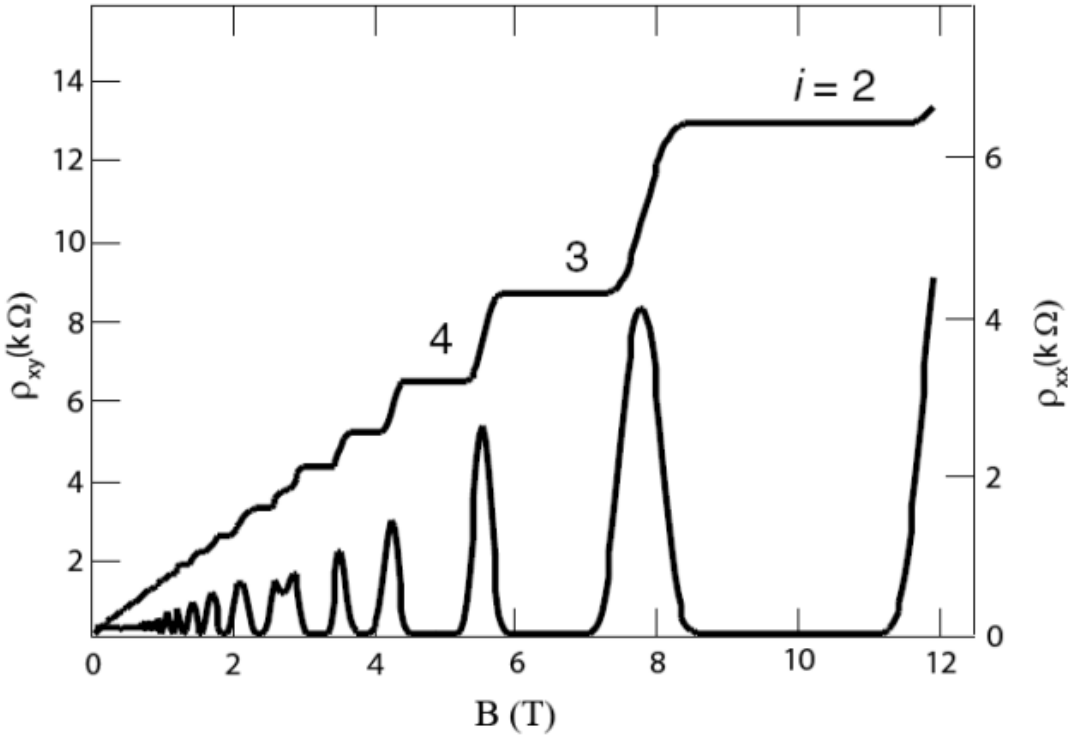
E. Hall'ın çalışmasından yaklaşık bir asır sonra *1980* de von Klitzing Dorda ve Pepper kuantum Hall olayını keşfettiler (Klitzing ve ark. *1980*). Bu keşiften dolayı von Klitzing 'e *1985* yılında Nobel fizik ödülü verilmiştir. Kuantum Hall olayı düşük sıcaklık ve yüksek magnetik alan içinde bulunan yük taşıyıcıları esas alınarak iki boyutta hareket eden sistemlerde gözlenir. Tam sayı kuantum Hall olayı için sıcaklık *(1 - 4)* $°K$ ve magnetik alan *(3 - 15)* Tesla aralığındadır. Düşük sıcaklık elektronların düzleme dik yöndeki hareketlerini kısıtlarken, düzleme dik yöndeki magnetik alan, sistemi kuantumlayarak elektronların Landau düzeylerine yerleşmesini sağlar.

Bölüm 3.3 te elde ettiğimiz Denk. 3.33 ve Denk. 3.36 daki sonuçlara göre boyuna özdirenç (ρ_{xx}) magnetik alandan bağımsız, kuantum Hall olayının büyüklüğünü belirleyen enine özdirenç (ρ_{xy}) ise magnetik alanla doğru orantılıdır. Ancak von Klitzing ve arkadaşlarının elde ettiği deneysel sonuçlar bu klasik sonuçlardan çok farklıdır. Bu deneysel sonuçlar Şekil 4.6 daki gibidir. Şekil 4.6 da görüldüğü gibi enine özdirenç (Hall direnci) ρ_{xy} basamaklar halinde artmaktadır. Boyuna özdirenç ρ_{xx} ise basamakların sabit olduğu yerde sıfırdır. Enine özdirencin arttığı yerde boyuna özdirenç pik yapmaktadır:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{i}\frac{h}{e^2} \tag{4.46}$$

$$\rho_{xx} = 0 \tag{4.47}$$

Burada i bir tam sayıdır. Bu sonuçlar elde edilene kadar, özdirencin, ölçümün yapıldığı malzemenin cinsine, magnetik alana, sıcaklığa ve frekansa bağlı olduğu biliniyordu. Ancak elde edilen bu deney sonuçları, bunun böyle olmadığını gösterdiği için önemlidir. Ölçülen enine özdirenç ρ_{xy} nin değerleri numunenin yapıldığı malzemenin cinsinden bağımsızdır. Daha da önemlisi yapılan bu ölçüm bugüne kadar fizikte ölçülen en kesin ölçümlerden birisidir. Enine özdirenç ρ_{xy} yaklaşık 10^{-8} hassasiyetle ölçülmüştür.



Şekil 4.6 Deneylerde ölçülen Hall (enine) direnci ve boyuna direncin magnetik alanla değişimi. *T= 0.3 °K* dir.

İki boyutta direnç ve özdirencin aynı boyutta olduğunu hatırlayarak *i=1* için bulunan

$$R_{K-90} \equiv \rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \cong 25812{,}807\ \Omega \tag{4.48}$$

direncine von Klitzing sabiti denir. Bu direnç değeri, *1990*'dan başlayarak yeni direnç standardı olarak benimsenmektedir. Kuantum Hall olayının bir diğer önemli özelliği

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \tag{4.49}$$

ince yapı sabitini diğer yöntemlere ek olarak katı hal ölçümleri ile belirleme olanağını sağlamasıdır (Davies *1999*).

Aklımıza şöyle bir soru gelebilir: ρ_{xx} in sıfır olması durumunda, boyuna sonsuz iletkenlik olması gerekmez mi? Bunun, böyle olmadığını *Bölüm 3.3* te gösterdik (Denk. 3.25 – 3.28). Burada Denk. 3.28 e göre iki boyutta iletkenlik bileşenleri

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \tag{4.50.a}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \tag{4.50.b}$$

ile verilir. Denk. 4.50 ye göre ρ_{xx} sıfır fakat ρ_{xy} sonlu ise, o zaman σ_{xx} de sıfır olan ilgi çekici özelliğe sahiptir. Buna göre, boyuna iletkenlik ve direnç aynı zamanda sıfır olur. Uygulama da bu, şu anlama gelir: indüklenen bir akım, sadece enine elektrik alanı doğurur ve indüklenen elektrik alanı sadece enine akım doğurur (Hook ve Hall *2006*).

Birim alan başına düşen durum sayısını daha önce Denk. 4.43 ile verdik. Eğer birim yüzeyde n_A elektron varsa, bu durum n_A/n_ν bir i tam sayısına eşit olunca Landau düzeyleri tam olarak dolu olur. O zaman Denk. 4.43, i Landau düzeylerinin tam olarak dolu olduğu B_i alanını

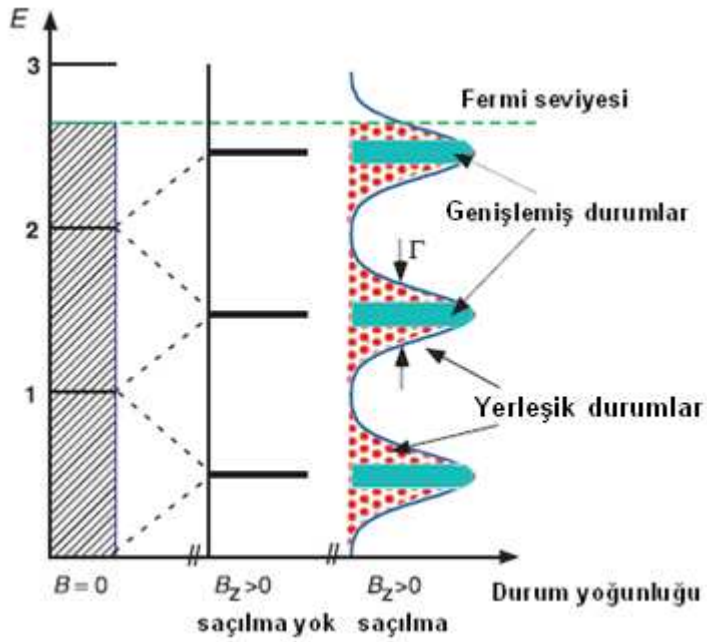
$$B_i = \frac{n_\nu h}{e} = \frac{n_A h}{ie} \tag{4.51}$$

biçiminde belirler. Bu sonuç, Landau düzeylerinin doldurulmasının kuantum Hall olayına bağlı olduğunu göstermemize izin verir. Bunun için, klasik parçacıklar için olan sonucumuzu (Denk. 3.36) kullanarak Denk. 4.51 ile verilen alanlarda enine direnci hesaplayalım. Bu direnç

$$\rho_{xy} = \frac{h}{ie^2} \tag{4.52}$$

olur. Bu bulduğumuz sonuç, tam olarak Şekil 4.6 daki basamakların yatay kısımları boyunca olan ρ_{xy} değerleridir. Ayrıca Denk. 4.51 i daha önce bulduğumuz doluluk çarpanı ifadesinde (Denk. 4.45) yerine yazarsak $i = \nu$ bulunur. Yani doluluk çarpanı

bir tam sayı olduğunda Şekil 4.6 daki basamaklı durum gözlenir. Bu basit açıklama Şekil 4.6 da görülen basamaklardaki iletkenlik ve direnç değerlerini tam açıklaması yanında, basamakların genişliğini, basamaklar arası geçişi ve daha da önemlisi, boyuna ρ_{xx} direncinin Şekil 4.6 da açıkça görülen salınımlı davranışını açıklayamamaktadır.



Şekil 4.7 Örgü içindeki kusurlar nedeni ile genişlemiş Landau düzeylerine eşlik eden durumlar yoğunluğu.

Gerçek Hall numunelerinde elektronlar, pozitif yüklerden oluşan bir örgüde hareket ederler. Bu örgü mikroskobik olarak incelendiğinde ideal olmaktan uzaktır. Örgünün her noktasındaki kusurlar veya safsızlıklar, elektronlar için bir saçılma merkezi gibi davranır. İki boyutlu elektron gazında bu safsızlıkların varlığı ilk olarak Landau seviyelerinin dejenereliğini artırarak, bu seviyeleri alt bantlara ayırırlar. İkinci olarak bunlar genişlemiş ve yerelleşmiş durumlar yaratırlar. Akım sadece genişlemiş durumlardan akacaktır. Elektron yoğunluğu artarken Fermi enerjisi de kayacaktır. Fermi enerjisi yerelleşmiş durumların olduğu bölgede hareket ettiği sürece Hall basamakları arası bir geçiş gözlenir, bu geçiş olurken boyuna dirençte ani

bir pik gözlenir. Fermi enerjisi genişlemiş duruma ulaştığı anda boyuna direnç sıfır olur. Hall basamakları sadece Fermi enerjisi genişlemiş durumda iken gözlenir. Böylelikle kuantum Hall olayı, Şekil 4.7 de gösterildiği gibi, Fermi enerjisinin durum yoğunluğu boyunca hareket ederken yerelleşmiş ve yerelleşmemiş geçişlerin bir sırası olarak düşünülebilir (Jeckelmann ve Jeanneret *2001*)

1982'de yapılan deneylerle Denk. 4.46 nın *i=1/3, 2/3, 2/5, 3/5, 4/3, 5/3* şeklinde basit kesirli (*p* ve *q* göreli asal, *q* tek bir tamsayı olmak üzere *p/q* şeklinde) değerleri içinde geçerli olduğu gözlendi. Buna ***kesirli kuantum Hall olayı*** denir. Bu çalışmada bundan bahsedilmemiştir. Bu olayı ilk kez *1982*'de gözleyenler Tsui, Störmer ve Gossard olmuştur (Tsui ve ark. *1982*).

Buraya kadar Kuantum Hall olayının teorik olarak anlaşılmasında Landau seviyelerinin çok önemli rol üstlendiklerini gördük. Bu olayı açıklamak için yapılan deneylerde kullanılan malzemeler, bir kristal örgüde hareket eden etkileşmeyen iki boyutlu elektron sistemleri olarak ele alınmaları aşırı bir basitleştirmedir. Malzeme içerisinde hareket eden elektronlara yerleşik atomlardan dolayı bir potansiyel etki eder. Günümüzde bu etkiler etkin kütle yaklaşımı ile ve Coulomb etkileşmelerinde boşluğun dielektrik katsayısının kullanılması yerine malzemenin dielektrik katsayısının kullanılması ile açıklanmaya çalışılmaktadır. Ayrıca deneylerde kullanılan yapının üzerine oturtulan kapıların, yapı içerisinde iyonlaşmış donorların ve yapının kenarlarından kaynaklanan etkilerde söz konusudur. Bir de gerçek malzemeler yapı kusurları ve safsızlıklar içerirler. Kuantum Hall olayının doyurucu bir açıklaması için, elektronlar arası etkileşmeler, elektron fonon etkileşmeleri de dikkate alınmalıdır. Tüm bu nedenlerden dolayı, malzeme içindeki bir kristal örgüde, bir tek elektronun magnetik alan altındaki hareketini açıklayan Denk. 4.27 deki serbest elektron Schrödinger denklemi yerine

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2(x-X_0)^2\Phi+V_{bg}(x)\Phi+V_H(x)\Phi=E\Phi \qquad (4.53)$$

ifadesi olmalıdır. Burada V_{bg} kapılar, donorlar ve kenar etkilerinden ileri gelen potansiyeldir. V_H ise Hatree potansiyeli diye adlandırdığımız elektronların kendi

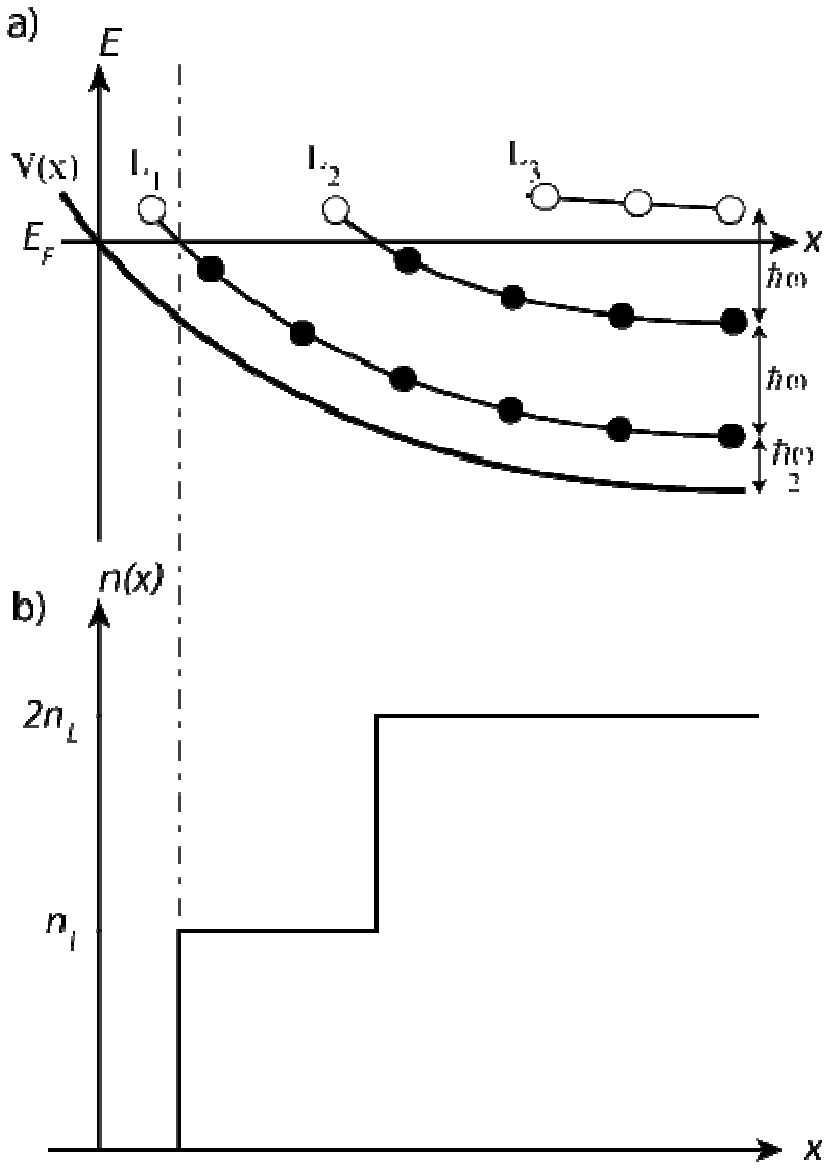
aralarındaki Coulomb etkileşmesinden ileri gelen potansiyeldir. Bu potansiyellerin açık ifadesini elde etmek için Poisson denkleminin çözülmesi gerekir. Bu konu oldukça önemlidir. Eğer malzeme içerisinde elektronların düşük sıcaklıkta ve şiddetli magnetik alan altında nasıl davrandıklarını bilmek istiyorsak her şeyden önce bu hareketlerini ifade eden gerçek bir denklemi elde etmek gerekir. Denk.4.53 ün gerçek fiziksel şartları yansıtabilmesi için malzeme içinde ve dışında

$$\nabla^2 V = -\rho \tag{4.54}$$

Poisson denkleminin çözülmesi gerekir.

4.5 Kenar Durum Modeli

Kuantum Hall olayını açıklamak için birçok teorik model öne sürülmüştür. Bu modeller arasında yukarıda bahsettiğimiz yerelleşme teorisini çok iyi açıklayan Laughlin'nin modeli de vardır. Bu modellerin çoğu özel sınır şartlarına sahip ideal sistemler olarak düşünülür. Gerçek bir örneğin kenarlarındaki sınırlayıcı potansiyel Landau seviyelerinin yukarı doğru kıvrılmasını sağlar. Fermi enerjisini kesen her Landau seviyesi için bir kenar kanalı şekillenir. Bu da Landau seviyelerinin bu noktalara kadar dolmasına neden olacaktır. Elektronlar arası etkileşmeyi hesaba katmasak ve elektron dağılımı çizilirse, Şekil 4.8 de görüldüğü gibi sabit bir dağılım olacaktır. Böyle bir dağılım elektrostatik olarak mümkün değildir (Jeckelmann ve Jeanneret *2001*).



Şekil 4.8 a) Sınırlayıcı potansiyelin *(V_x)* Landau seviyelerini *(L_1, L_2, L_3)* kıvırması.

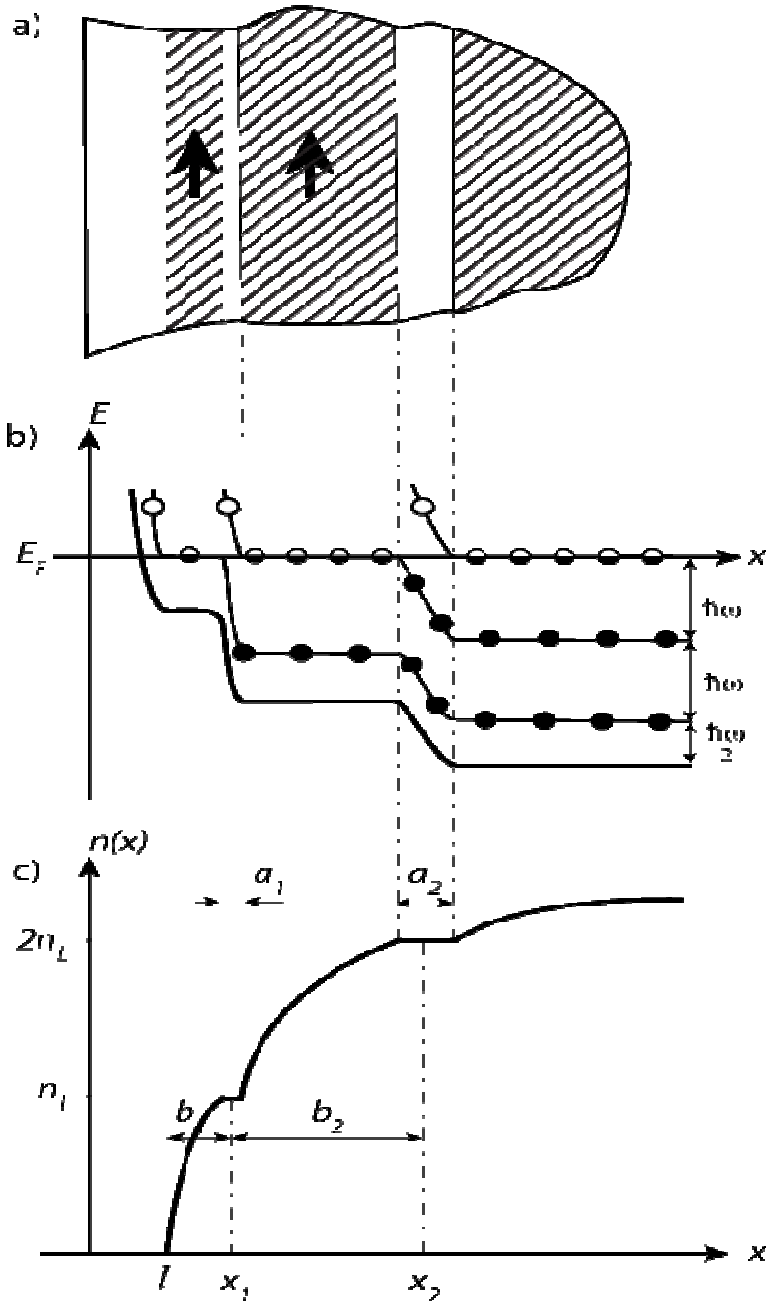
b) Oluşan elektron dağılımı.

Kuantum Hall olayının keşfinden kısa bir süre sonra, Halperin (Halperin 1982) *2BEG* te iletimin nasıl olduğunu anlamada bu kenar kanalarının önemli roller üstlendiklerini fark etti. Halperin'in bu çalışmasından sonra, farklı yaklaşımlara dayanan ve kenarlarla ilişkilendirilen birçok teori geliştirildi (MacDonald ve Streda *1984*, Heinonen ve Taylor *1985*, Apenko ve Lozovik *1985*).

Geliştirilen çoğu model elektronların birbiriyle etkileşmesini hesaba katmamıştır. Elektronların birbiriyle etkileşmesinden bir perdeleme (screening) potansiyeli oluşur. Bu perdeleme potansiyeli, kanalları sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlere ayırır (Beenakker *1990*). Bu perdeleme potansiyelini dikkate alan Chklovskii ve arkadaşları (Chklovskii ve ark. *1992*, Chklovskii ve ark. *1993*, Glazman ve Larkin *1991*) yeni bir model önermişlerdir. Bu model ağırlıklı olarak problemin elektrostatik çözümüne dayanmaktadır. Şekil 4.9 da bu modele göre sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin oluşumu ve elektron dağılımı görülmektedir. Şekil 4.9 da görüldüğü gibi potansiyel de basamaklı bir yapı göstermektedir. Şekil 4.9 da neler olduğunu şöyle açıklayabiliriz: Kenardan içeriye doğru giderken elektronların Fermi enerjisi ilk Landau seviyesinin altında kaldığından bu kısma hiçbir elektron yerleşemez. Çünkü o aralıkta elektronların yerleşebileceği herhangi bir izinli seviye yoktur. Fermi enerjisi ilk Landau seviyesiyle kesiştiğinde, elektronlar ilk Landau seviyesine yerleşmeye başlarlar. Kısmen doldurulmaya başlanan birinci Landau seviyesinde elektronların rahatlıkla hareket etmelerine olanak veren boş yerler olduğu için bu bölge tıpkı bir metal gibi davranıp potansiyelin değişmemesini yani sabit kalmasını sağlayacaktır. Böylece elektronlar birinci Landau seviyesini yavaş yavaş doldurmaya devam ederler. Dolma işlemi birinci Landau seviyesi tam doluncaya kadar sürer. Birinci Landau seviyesi tam dolduğunda artık elektronların hareket edebilecekleri başka boş yerler olmadığı için, bu elektronlar, bağlı elektronlar gibi hareket özgürlüklerini kaybederler ve daha fazla potansiyeli perdeleyemezler. Perdelenme olmadığı için, ikinci Landau seviyesi Fermi enerjisiyle kesişene kadar kenar etkisi sebebiyle potansiyel düşmeye devam eder. Landau seviyelerinin kısmi dolu olduğu bölgede bir plato gözlenir. Bu bölgeler ***sıkıştırılabilir şeritler*** olarak adlandırılır. Bu platolar arasında kalan bölgelerde Landau seviyeleri tam doludur ve yeni bir elektron eklenemez. Bu yüzden bu bölgeler de ***sıkıştırılamaz şeritler*** olarak adlandırılır. Sıkıştırılamaz şeritlerin oluştuğu kısımda Fermi enerjisi, iki Landau seviyesi arasında kaldığı için elektronlar üst seviyeye de yerleşemezler. Bu kısımda birinci Landau seviyesi tam dolu, ikinci Landau seviyesine hiçbir elektron yerleşemediği için elektron dağılımı sabittir. Potansiyel $\hbar\omega/e$ düşene kadar bu durum böyle devam eder. Bu düşme gerçekleştiğinde Fermi enerjisi ikinci Landau seviyesi ile çakışacak ve elektronlar

ikinci Landau seviyesine de doldurmaya başlayacaklardır. Böylelikle ikinci sıkıştırılabilir bölgeye girmiş oluruz. Bu bölgede de yine metalik özellikten dolayı potansiyel sabit olacaktır.

Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz bölgelerin konumları ve kalınlıklarını belirlemek için Denk. 4.53 ün çözülmesi gerekir. Bu nedenle problemin elektrostatik kısmı çok önemlidir. Gelecek bölümde üç boyutlu Poisson denklemi ve çözümüyle ilgileneceğiz.



Şekil 4.9 a) Kenar bölgesinde elektronların dağılımı. Taralı kısımlar ***sıkıştırılabilir Şeritleri*** taralı olmayan kısımlar ise ***sıkıştırılamaz Şeritleri*** göstermektedir. **b)** Elektronlar arası etkileşme hesaba katılınca oluşan basamaklı dış potansiyel yapısı. Burada ● dolu Landau seviyelerini, **O** boş Landau seviyelerini ve **K** ise yarı dolu Landau seiyelerini göstermektedir. **c)** Oluşan elektron dağılım yoğunluğu, sıkışltırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin konumları.

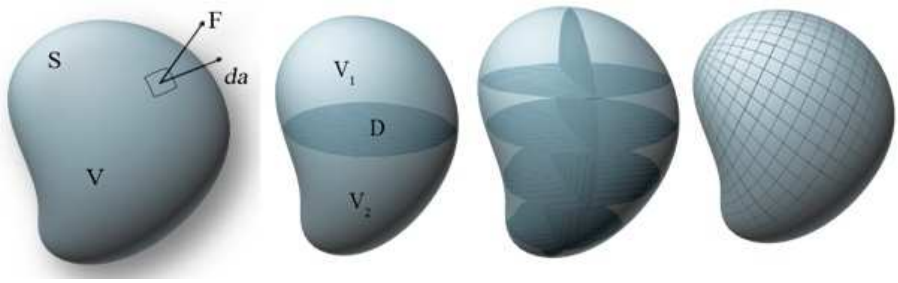
5. POISSON DENKLEMİ VE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1 Poisson Denklemi

Yüzeyi *S* olan, herhangi bir *V* hacmini ele alalım. Bu *S* yüzeyinden geçen toplam Φ akısı, *F* vektörünün tüm *S* yüzeyi üzerinden alınan yüzey integraline eşittir:

$$\Phi = \int_S \vec{F}.d\vec{a} \tag{5.1}$$

İntegraldeki $d\vec{a}$, büyüklüğü *S*'nin küçük bir parçasının yüzeyine eşit olan ve bu küçük yüzeyin normali doğrultusunda dışa doğru yönelmiş, sonsuz küçük bir vektördür (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 *S* yüzeyi tarafından sınırlanmış bir hacmin küçük parçalara ayrılması.

Şimdi, bir *D* yüzeyi ile ele aldığımız *V* hacmini iki bölgeye ayıralım (Şek.5.1). Bu iki bölgenin hacimleri V_1 ve V_2 olsun. Sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeylerine sahip bu iki hacmin yüzey integrallerinin toplamı

$$\int_{S_1} \vec{F}.d\vec{a}_1 + \int_{S_2} \vec{F}.d\vec{a}_2 \tag{5.2}$$

olacaktır. Bu sonuç Denk. 5.1'e eşittir. Çünkü V_1'den *D* yüzeyi ile çıkan akı, V_2'ye aynı yüzeyle girmektedir.

V hacmini bölmeye devam edelim. *V*, yüzeyleri S_1, S_2, …, S_N olan V_1, V_2, …, V_N hacimli çok sayıda parçaya bölelim. Bu durumda toplam akı,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{F}.d\vec{a} = \int_{S} \vec{F}.d\vec{a} = \Phi \tag{5.3}$$

olacaktır. Bu yönteme göre, bölgeleri temsil eden *N* sayısı çok büyük bir değer aldığında çok küçük bir bölgenin belirgin özelliklerini tanımlayabilir miyiz? Böyle küçük bir bölgede, Denk. 5.1 deki yüzey integrali bize istediğimiz bilgiyi veremez. Çünkü *N* sayısını *2N*'ye çıkararak bu yüzeyi yeniden ikiye bölebiliriz. Böylece aynı bölgede daha küçük hacimler alırsak, böyle bir küçük hacim üzerinden alınan yüzey integrali daha da küçük olacaktır. Ama ne kadar küçük parçalara ayırırsak ayıralım, bu hacimlerin toplamı başlangıçtaki hacmi verecektir. Bu durumda, yüzey integralinin, hacme oranını tanımlayabiliriz;

$$\frac{\int_{S_i} \vec{F}.d\vec{a}}{V_i} \tag{5.4}$$

Eğer *N* sayısını yeterince büyük alırsak, çok küçük bir parça elde etmek için hacmi yarıladığımızda, yüzey integrali de yarılanacak ve böylece bir limit durum elde edeceğiz.

Bulduğumuz bu değer, *F* vektör fonksiyonunun bu bölgedeki belirgin bir özelliği olup *F*'nin diverjansıdır ve *divF* olarak yazılır. Buna göre

$$divF = \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F}.d\vec{a_i} \tag{5.5}$$

olarak gösterilebilir. Burada V_i, incelenen bölgenin hacmi, S_i ise bu hacmi sınırlayan yüzeydir.

Denk. 5.5 ten görüldüğü gibi *divF*, sonsuz küçük bir V_i hacminden çıkan akının, birim hacim başına düşen miktarı olup, kartezyen koordinatlarda

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{5.6}$$

şeklinde hesaplanabilir. Elde edilen bu skaler nicelik, yalnızca koordinatların bir fonksiyonu olup, konuma bağlı olarak değişmektedir.

Eğer koordinatların fonksiyonu olan $divF$'yi biliyorsak, bir hacim üzerinden alınan yüzey integralini yazabiliriz:

$$\int_S \vec{F}.d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \vec{F}.d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} V_i \left(\frac{\int_{S_i} \vec{F}.d\vec{a}}{V_i} \right) \tag{5.7}$$

$N \to \infty, V_i \to 0$ limit durumunda, parantez içindeki ifade $divF$ olur. Bu durumda sağ taraf hacim integraline döner:

$$\int_S \vec{F}.d\vec{a} = \int_V div\vec{F}\mathrm{d}v \tag{5.8}$$

Denk. 5.8 herhangi bir vektör alanı için geçerli bir teoremdir. Bu teoreme ***Gauss teoremi*** adı verilir.

Bu teoremi elektrostatikte de kullanabiliriz:

$$\int_S \vec{E}.d\vec{a} = \int_V div\vec{E}dv \tag{5.9}$$

olur. Gauss yasasına göre

$$\int_S \vec{E}.d\vec{a} = 4\pi \int_V \rho dv \tag{5.10}$$

şeklindedir. Denk. 5.9 ve 5.10 u birleştirirsek, elektrik alanının diverjansı için her noktada

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \tag{5.11}$$

bağıntısını elde ederiz. Bu eşitliğe Gauss yasasının diferansiyel şekli denir.

Denk. 5.11 de elde ettiğimiz sonuç ile

$$\vec{E} = -gradV = -\left(\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{5.12}$$

arasında açık bir ilişki vardır. Denk. 5.11, potansiyelden bir alan elde ederken, Denk. 5.12 ise bu alanı skaler bir ifadeye çeviriyor. Bu iki denklemi birleştirdiğimizde

$$div\vec{E} = -div(gradV) = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 4\pi\rho \tag{5.13}$$

olur. Denk. 5.13 te yapılan işlem, bir fonksiyonun gradyentinin diverjansını alma işlemidir. Bu işleme ***Laplace işlemi*** denir ve

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.14}$$

şeklindedir. Bu durumda sonuç ifademiz

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.15}$$

şeklini alır. Bir noktadaki yük yoğunluğu ile bunu çevreleyen potansiyel arasında ilişki kuran bu ifadeye ***Poisson denklemi*** denir. Kartezyen koordinatlarda, bu denklemi açıkça yazarsak

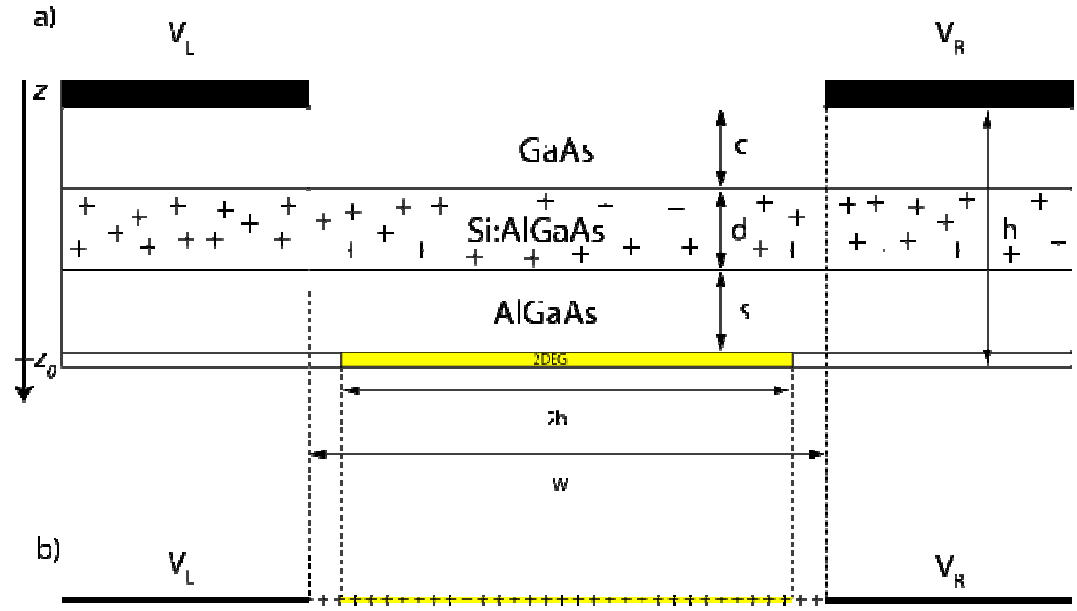
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.16}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadeye göre, eğer bir noktadaki potansiyel fonksiyonunu biliyorsak, sadece bu fonksiyon ile ilgili noktadaki yük değeri hakkında bilgi elde edebiliriz. Veya bildiğimiz yük dağılımı fonksiyonuyla kuracağımız diferansiyel denklemi çözerek, ilgilendiğimiz bölgedeki potansiyele ulaşabiliriz (Purcell *1997*).

5.2 Poisson Denkleminin Çözümü İçin Sınır Şartları

Magnetik alan altında elektron dağılımını elde edebilmek için Denk. 5.16 da elde ettiğimiz Poisson denkleminin çözülmesi gerekir. Bu ikinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü büyük bir problemdir. Bu tarz denklemlerin çözümünde doğru sonuca ulaşmak sınır şartlarının doğru bir şekilde belirlenmesiyle mümkün olur. Sınır şartları ne kadar gerçeğe yakın verilirse problemin çözümü de o denli gerçek sistemleri yansıtacaktır.

Şimdiye kadar bu problemi çözmek için birçok teorik çalışma yapılmıştır. Ve ağırlıklı olarak bu çalışmalarda Green fonksiyonları yöntemi kullanılmıştır. Bu teorik çalışmaların ilki Glazman Chklovskii ve arkadaşları tarafından yürütüldü. Bu çalışmada problemi daha basitleştirmek ve analitik olarak çözebilmek için düzlem yaklaşımını kullanmışlardır. Düzlem yaklaşımında Şekil 5.2 de görülen kapılar ile *2BEG* arasındaki mesafe ihmal edilmiştir *($h << 2b$)*. Böylece kapılar, verici atomlar ve *2BEG* aynı düzlemde *($z = z_0$)* kabul edilmiştir. Ayrıca akım yönü olan *y* yönünde yük dağılımı sabit kabul edilerek Poisson denklemi iki boyutta indirgenmiştir. Bu varsayımlardan dolayı problemin çözümü gerçek sistemleri yansıtamamaktaydı. Ancak elde edilen analitik sonuçlar çok iyiydi. Ve bu çalışma Kuantum Hall olayının anlaşılmasına büyük bir katkı yaptı (Chklovskii ve ark. *1992*; Chklovskii ve ark. *1993*).



Şekil 5.2 a) Kullandığımız yapının *y* yönünden görünümü. **b)** Chklovskii ve arkadaşlarının düzlem yaklaşımı

Poisson denklemini ilk kez üç boyutlu olarak ele alan bilim adamları Davies ve arkadaşlarıdır (Davies *1988*; Davies ve ark. *1995*). Davies bu çalışmasında Şekil 5.2 de görüldüğü gibi *z* yönündeki derinliği de hesaba katmıştır. Bundan dolayı problemi çözerken sınır koşulları önem kazanır. Davies'in kullandığı sınır şartları şunlardır:

- *z = 0* da (numunenin yüzeyinde) sınır koşulunu kapıların olduğu yerde kapı potansiyeli almıştır. Kapıların olmadığı yerlerde potansiyel sıfır alınmıştır.
- da *z* doğrultusundaki elektrik alan sıfır kabul edilmiştir. Bu için demektir.
- Elektron gazının serbest olduğu *x* ve *y* doğrultusunda ise periyodik sınır koşulları alınmıştır.

Davies'in bu çalışması Kuantum Hall olayının anlaşılmasına büyük bir katkı yapmıştır. Günümüzde bile birçok bilim insanı bu problemle uğraşırken problemin

elektrostatik kısmında Davies'in çalışmalarını esas almaktadır (Siddiki ve ark. *2008*; Ihnatsenka ve Zozoulenko *2006*; Ihnatsenka ve Zozoulenko *2008*).

Davies'in çalışmasını kullanan araştırmacılar genelde birçok şekilde verici atomların etkisini elle simüle etmektedirler. Davies'in çalışmaları *2BEG*'in elektrostatik problem kısmını da içermemektedir. Bu nedenle şimdiye kadar bu konu ile ilgilenen bilim insanlarının tümü *2BEG*'in elektrostatik çözümü için Green fonksiyonlar teoremini ve Fourier açılımlarını kullanıyorlardı (Lier ve Gerhardts *1994*; Oh ve Gerhardts *1997*; Siddiki ve Gerhardts *2003*; Siddiki ve Gerhardts *2004*). Verici atomların ve kapıların oluşturduğu sınırlandırıcı potansiyel bir kez elde edildikten sonra bu potansiyel *2BEG* için elde edilen potansiyel üzerine eklenmektedir.

Poisson denklemini ilk kez sayısal olarak üç boyutlu çözen araştırmacılar Weischselbaum ve Ulloa'dır. Araştırmacılar Poisson denklemini üç boyutlu çözmek için kullandıkları sınır şartlarına açık sınır şartları adını verdiler. Bu araştırmacılar Poisson denklemini çözebilmek için kendilerinin geliştirdiği özel bir ağırlık ortalaması kullanmışlardır. Ayrıca ***Ardışık Aşırı Durulma*** *(Successive Over Relaxation, SOR)* olarak adlandırılan sayısal yöntemi kullanmışlardır (Weichselbaum ve Ulloa *2003*). Sayısal olarak çözdükleri Poisson denklemi ile sadece kapıların ve verici atomların oluşturduğu potansiyel bulunuyordu. Daha sonra diğer bilim insanları gibi *2BEG*'in potansiyelini bulmada Green fonksiyonlarını ve Fourier açılımlarını kullanmışlardır.

Biz bu çalışmamızda üç boyutlu Poisson denkleminin öz-uyumlu olarak her adımda yeniden çözülmesi gerektiğini düşünüyoruz. Analitik çözümler her zaman sayısal çözümlerden daha üstün ve daha doğrudur. Ancak üç boyutlu Poisson denkleminin analitik çözümünü elde edebilmek için birçok kabullenme yapılır. Bu varsayımlardan dolayı elde edilen çözümler gerçek fiziksel sistemleri yansıtamamaktadır. Bu çalışmada gerçek fiziksel sistemleri yansıtabilmek için Poisson denklemini üç boyutta sayısal olarak çözüyoruz. Poisson denklemini sayısal olarak çözdüğümüzde elektronlar arası etkileşmeyi de hesaba katmış oluyoruz. Ayrıca *screening* (perdeleme) etkisi Poisson denkleminin içerisinde mevcuttur.

Bundan dolayı bu etki için ayrı bir hesap yapmamıza gerek kalmayacaktır. Bütün bunlar için Poisson denklemini nasıl sayısal bir denkleme dönüştürdüğümüze bakalım.

5.3 SOR İle Poisson Denkleminin Sayısal Çözümü

Herhangi bir *f(x)* fonksiyonun $x = x_0$ noktası etrafındaki Taylor seri açılımı

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + O((x - x_0)^4) \tag{5.17}$$

şeklindedir. Denk. 5.17 ye göre bu *f(x)* fonksiyonunu $x - h_x$ ve $x + h_x$ için *x* noktası etrafında seriye açtığımızda

$$f(x + h_x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)h_x + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)h_x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x)h_x^3 + O(h_x^4) \tag{5.18}$$

$$f(x - h_x) = f(x) - \frac{df}{dx}(x)h_x + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)h_x^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x)h_x^3 + O(h_x^4) \tag{5.19}$$

şeklinde iki seri elde ederiz. Burada $O(h_x^4)$ dördüncü ve daha üst düzeyden kalan terimleri içeren kısımdır. Bu iki seriyi taraf tarafa toplarsak $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi için

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{f(x + h_x) + f(x - h_x) - 2f(x)}{h_x^2} + O(h_x^2) \tag{5.20}$$

ifadesini elde ederiz. Üç boyutlu Poisson denklemi kartezyen koordinatlarda

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \tag{5.21}$$

şeklinde verilir. Buradaki *V(x,y,z)* nin ikinci dereceden kısmi türevlerinin yerine Denk. 5.20 yi kullanarak bulduğumuz ifadeleri yazarız. Daha sonra gerekli düzenlemeleri yaparsak herhangi bir *(x, y, z)* noktasındaki potansiyel için

$$\begin{aligned} V(x,y,z) = {} & \frac{h_y^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x+h_x, y, z) \\ & + V(x-h_x, y, z)\} \\ & + \frac{h_x^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x, y+h_y, z) \\ & + V(x, y-h_y, z)\} \\ & + \frac{h_x^2 h_y^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x, y, z+h_z) \\ & + V(x, y, z-h_z)\} + \frac{h_x^2 h_y^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \\ & + O(h^4) \end{aligned} \tag{5.22}$$

ifadesini elde ederiz. Burada h_x, h_y ve h_z; *x*, *y* ve *z* yönündeki çok küçük farkları göstermektedir. Denk. 5.22 deki ifadeye göre bir noktadaki potansiyelin değerini bilmek için tıpkı bir ortalama alır gibi komşu altı noktadaki potansiyellerin değerini bilmek gerekir. Bu formül *h*'nin dördüncü dereceden ifadelerini içermediği için dördüncü dereceden bir yaklaşım olarak adlandırılır.

Denk. (5.22) de verilen formülü kullanmak için uzayı belli sayıda mesh noktalarına bölmek gerekir. Böylece oluşan mesh üzerinde sınır şartları da kullanılarak her noktadaki potansiyel hesaplanır. Bu hesap öz-uyumlu olarak tekrarlanır. İki tekrar arasındaki fark istenildiği kadar küçük olunca da işleme son verilir. Her seferinde elde edilen değerler bir öncekinin yerine yazılır. Genel olarak bu yaklaşıma ***Ardışık Durulma*** (*Successive Relaxation, SR)* denir. Fakat bu yaklaşım oldukça yavaş kalabilir. Bundan dolayı yaklaşımı hızlandırmak için yeni elde edilen değer doğrudan eskisinin üzerine yazılmak yerine

$$V_i^{n+1} = \omega V_i^{yeni} + (1-\omega) V_i \tag{5.23}$$

ifadesi kullanılır. Burada ω, 1 ile 2 arasında değer alan bir katsayıdır ve yakınsamanın hızlanmasını sağlar. ω nın ideal değerini Weichselbaum ve Ulloa'nın kullandığı ifadeden

$$\omega = \frac{2}{1 + \pi/min(Meshx, Meshy, Meshz)} \tag{5.24}$$

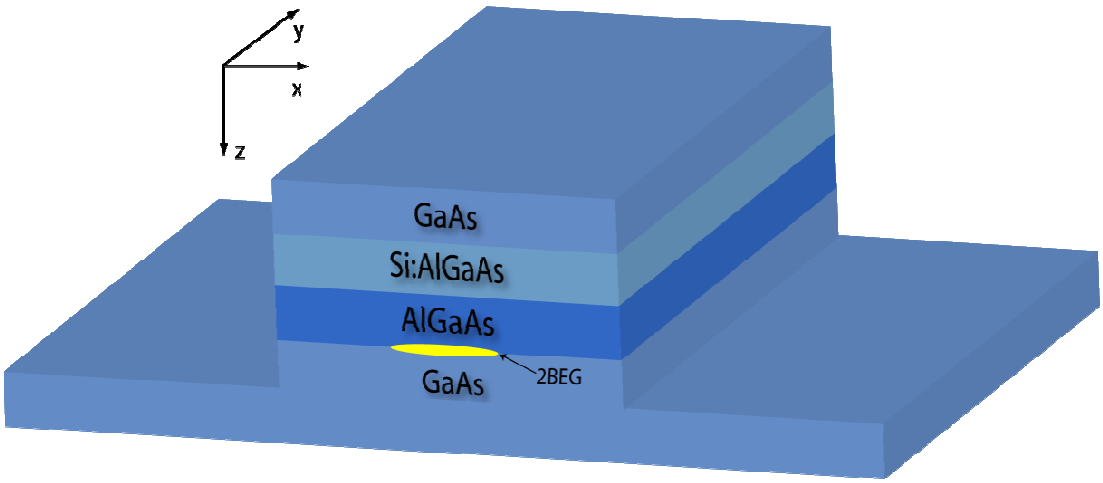
bulduk (Weichselbaum ve Ulloa *2003*). Burada *Meshx, Meshy* ve *Meshz* ifadeleri *x, y* ve *z* doğrultularındaki mesh sayılarını göstermektedir. Denk. (5.23) kullanılarak hızlandırılan bu yaklaşıma da ***Ardışık Aşırı Durulma*** (*Successive Over Relaxation, SOR)* denir.

5.4 Kullandığımız Yapının Geometrisi

Kuantum Hall olayı ilk kez Kuantum Hall çubukları olarak bilinen kuantum tellerde gözlemlendi. Kuantum teller, elektronların iki potansiyel duvarı arasına hapsedilmesiyle oluşturulan yapılardır. *2BEG*'i oluşturan elektronlar da büyütme yönünde $Al_xGa_{1-x}As$ ile *GaAs* ara yüzeyinde sınırlandırılıyor. Şimdi iki boyutta serbest olan elektronları akım yönüne dik olan diğer yönde de sınırlandırmak gerekir. Bu sınırlandırmayı yapmak için birçok yöntem vardır (Davies *1988*):

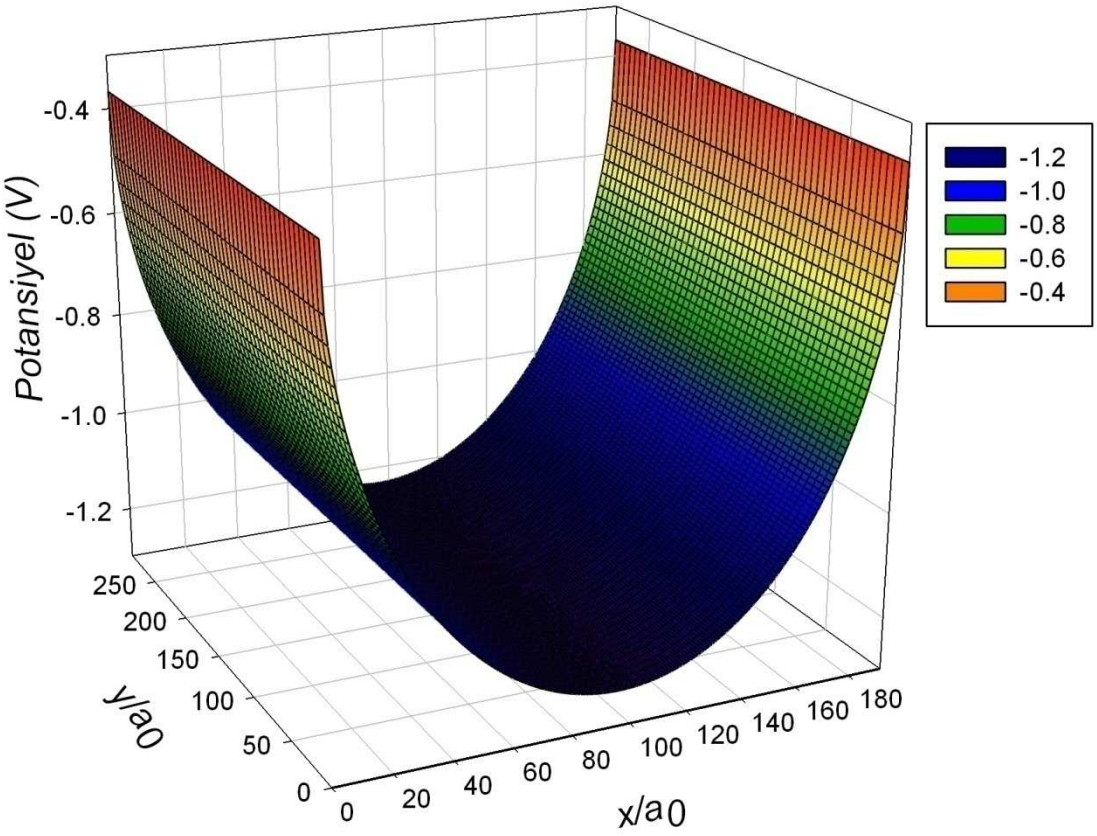
- Bulk (yığın) yapı üzerine kapılar yerleştirme yöntemi
- Derin kesme yöntemi
- Derin kesmeyle birlikte bulk yapı üzerine kapı yerleştirme yöntemi

En bilindik yöntem bulk yapı üzerine kapı yerleştirme yöntemi ve derin kesme yöntemidir. Bu tez çalışmasında derin kesme yöntemini kullandık. Derin kesme yöntemi *2BEG* dahil tabakalı yapının değişik yöntemlerle kesilmesidir. Derin kesme yöntemiyle oluşturulan yapılarda birçok çalışma yapılmıştır (Ahlswede ve ark. *2001*). Şekil 5.3 te derin kesme yöntemi ile oluşturulmuş bir kuantum Hall çubuğu görülmektedir.



Şekil 5.3 Derin kesme yöntemi ile oluşturulmuş bir kuantum Hall çubuğu.

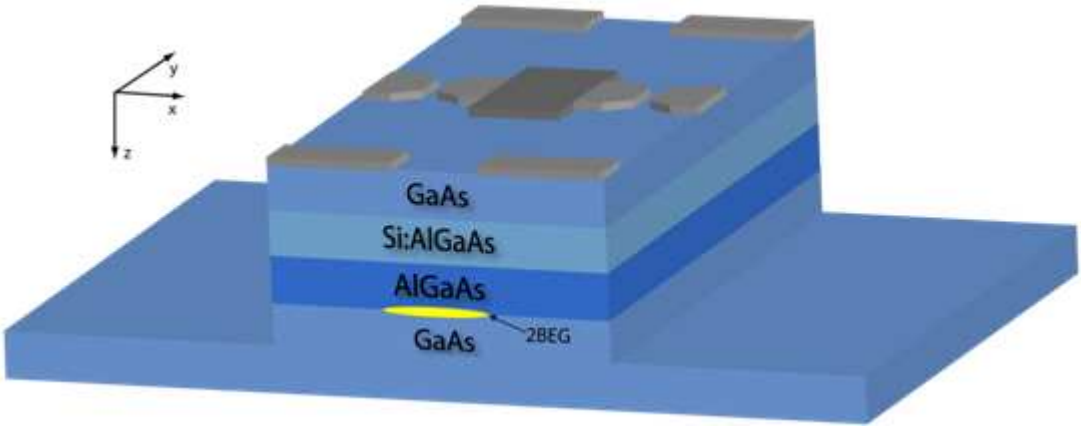
Eğer malzeme derin kesme yöntemi kullanılarak sınırlandırılırsa Şekil 5.3'te görüldüğü gibi *x* yönünde malzeme bir noktada sona erer ve sistem hava ile temas eder. Burada bir potansiyel duvarı oluşur. Ayrıca derin kesme yönteminde elektronları hapseden potansiyele bir katkı da verici atomlardan (donor) gelir. Başka etkilerde söz konusudur. Özellikle kesme işleminin türüne bağlı olarak hesaplanamayan kenar etkilerinden dolayı iletim bandında bir bükülme meydana gelir. Elektronları malzeme içine hapseden potansiyel, iletim bandındaki bu bükülme, hava ortamına geçişte oluşan potansiyel duvarı ve donorların oluşturduğu potansiyellerin toplamıdır (Davies *1999*). Bu etkilerden dolayı oluşan sınırlandırıcı potansiyeli bazı araştırmacılar kapılarla simüle etmişler (Chklovskii ve ark. *1992*; Lier ve Gerhardts *1994*). Ancak bu etkilerin hesaplanması zordur ve karmaşıktır. Bu nedenle bu etkiler genellikle sinüs, kosinüs, parabol ve benzeri fonksiyonlarla elle simüle edilir (Siddiki ve ark. *2008*). Biz ise daha önce hiç kullanılmamış bir fonksiyonu kullanarak bu etkileri simüle ettik. Bu tez çalışmasında bu etkilerin oluşturduğu sınırlandırıcı potansiyeli yarım bir elips ile simüle ettik. Bu yarım elips aynı zamanda hesaplamada kullandığımız arka fon (background) potansiyelidir. Elektronları sınırlandıran ve yarım bir elips biçiminde olan potansiyel Şekil 5.4 'te gösterilmektedir.



Şekil 5.4. Hesaplamalarımızda kullandığımız arka fon (background) potansiyeli. Arka fon potansiyelimiz yarım bir elipstir.

Bu çalışmada kullandığımız diğer bir yapı ise Şekil 5.5'te gösterildiği gibi *e-MZI* İnterferometresidir. Şekil 5.5 teki gerçek e-MZI'nın topolojik eşdeğeridir. Bu geometride sınırlandırıcı potansiyeli iki etki meydana getirir. Bu potansiyele ilk katkı kapılardan dolayı gelir. İkinci katkı ise donorlardan gelir. Ayrıca kenar etkileri de potansiyelde bir bükülmeye neden olur. Donor ve kenar etkilerinin neden olduğu bükülmeyi yarım bir elips ile simüle ettik.

2BEG'i oluşturan elektronlar arası etkileşimi hesaplamak için üç boyutlu Poisson denklemini sayısal olarak çözdük. Bu çözümde kullandığımız sınır şartları şunlardır: *z* yönünde kapıların olduğu yerde kapı potansiyelini, kapıların olmadığı yerde kapı potansiyelini sıfır aldık. *x* ve *y* yönünde ise periyodik sınır şartlarını kullandık.



Şekil 5.5. Kesme yöntemi ve yüzeye kapılar yerleştirilerek oluşturulan bir e-MZI'nın topolojik eşdeğeri.

6. THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI

6.1 Giriş

Bilindiği gibi, kuantum mekaniksel bir sistemin fiziksel özelliklerini belirlemek için, öncelikle bu sistemin yeterince iyi bir teorik modele oturtulması gerekir. Ayrıca göz önüne alınan sistemde, tek parçacıklı ya da çok parçacıklı oluşuna göre bir takım yaklaşımlar yapmak gerekir. Kuantum mekaniksel sistemleri oluşturan elektronların sayısı arttıkça, taban durumu ve elektron yoğunluğu gibi fiziksel özelliklerin hesabı oldukça karmaşık bir problem haline gelir. Elektron sayısı yeterince fazla ise, sistem elektron gazı gibi davranır. Bu durumda ***Thomas-Fermi*** *(T-F)* yaklaşımını kullanmak yararlı hale gelir. Yöntem, çok elektronlu sistemlerin fiziksel özelliklerinin hızlı ve doğru bir şekilde hesabını sağlar. T-F modeli, çok elektronlu atomik sistemleri çalışmak amacıyla ortaya atılmış olmasına rağmen daha sonra moleküler teori, katıhal teorisi gibi alanlarda oldukça uygulama bulmuştur (Gülveren *2005*). Bu bölümde *T–F* yaklaşımını ele alacağız. Ancak bunu yapmadan önce *T–F* yaklaşımında elektronların dağılımını elde ederken karşımıza çıkan ve önemli bir parametre olan durum yoğunluğundan bahsedelim.

6.2 Durum Yoğunluğu

6.2.1 B = 0 Durumu

Durum yoğunluğu, birim enerji aralığındaki durum sayısı olarak tanımlanır. *2BEG* ile ilgilendiğimiz için, kenarları *L* olan sonsuz derin bir kare kuyudaki elektronları göz önüne alalım. Kuyunun içindeki elektronlar serbest bir parçacık gibi davranırlar. de Broglie hipotezine göre, serbest bir parçacığın momentumu, parçacığa eşlik eden dalganın dalga boyuna $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ şeklinde bağlıdır. Buna göre kuyudaki serbest elektronun enerjisi

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{6.1}$$

şeklinde verilir. Bu enerjiye karşılık gelen dalga fonksiyonlarının değeri kenarlarda sıfır olduğundan bu dalga fonksiyonları sinüs dalgası şeklindedir. Bu durumda

$$\psi(x,y) = Asin(k_x x)sin\left(k_y y\right) = 0 \tag{6.2}$$

olmalıdır. Denk. 6.2 deki sinüs ifadesi içindeki değer π'nin tam katları olduğunda sıfır olur. Yani Denk. (6.2) deki ifade ancak

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L} \tag{6.3a}$$

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L} \tag{6.3b}$$

olursa sağlanır. $\vec{k}$ dalga vektörünün büyüklüğü, bu iki bileşeninin karelerinin toplamının karekökü eşittir. Yani

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \tag{6.4}$$

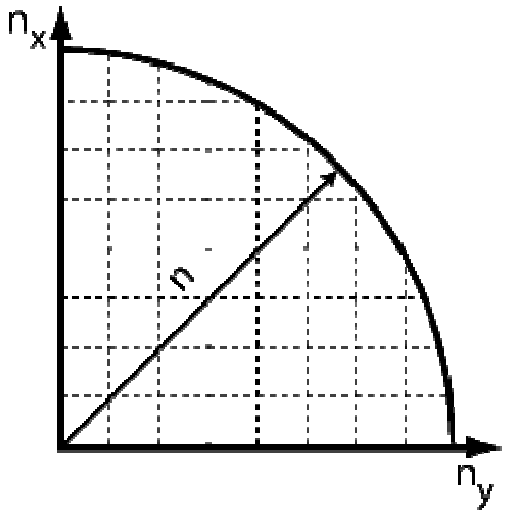
olur. Bulduğumuz k^2 ifadesini Denk. (6.1) de yerine yazarsak

(6.5)

eşitliğini elde ederiz. Denk. 6.5 den olmak üzere son ifademiz

(6.6)

olur.



Şekil 6.1. Girilebilir durumların sayısı. Izgaradaki her kesişim noktası bir enerji seviyesine karşılık gelir.

Her bir enerji seviyesi, genelde farklı takımlarından elde edilir. Ve bu seviyeler genellikle dejenere olmuş seviyelerdir. Bu seviyeler girilebilir durumları gösterir. Şekil 6.1 de görüldüğü gibi düzleminde girilebilir durum sayısı dairenin ü kadardır. Bu durumda girilebilir durum sayısını ile gösterirsek

olur. Burada spin dejenereliğini göstermektedir. Her seviyeye bir yukarı bir aşağı spinli olmak üzere iki elektron yerleşebileceği için dir. Denk. 6.6 yı Denk. 6.7 de yerine yazarsak girilebilir durum sayısı

$$\Omega(E) = \frac{g_s m E L^2}{2\hbar^2 \pi} \tag{6.8}$$

olur. Birim alandaki girilebilir durum sayısına $\omega(E)$ dersek

$$\omega(E) = \frac{\Omega(E)}{L^2} = \frac{g_s m E}{2\hbar^2 \pi} \tag{6.9}$$

olur. Birim alanda birim enerji başına girilebilir durum sayısına ***durum yoğunluğu*** denir ve

$$D(E) = D_0 = \frac{d\omega(E)}{dE} = \frac{g_s m}{2\hbar^2 \pi} \tag{6.10}$$

şeklinde verilir. Denk. 6.10 dan görüldüğü gibi magnetik alan yok iken iki boyuttaki durum yoğunluğu enerjiden bağımsız bir sabittir.

6.2.2 $B \neq 0$ Durumu

Magnetik alanın varlığında durum yoğunluğu değişmektedir. Enerji seviyeleri artık sürekli değildir. Sürekli olan enerji seviyeleri kuantumlu hale gelir. Kuantumlaşan bu enerji seviyelerine Landau seviyeleri denir. Bu durumda durum yoğunlukları da Şekil 6.2 de görüldüğü gibi kuantumlu hale gelir. Elektronlar sadece izinli olan Landau seviyelerine yerleşebilirler. İzinli olmayan seviyelere ise hiçbir elektron yerleşemez. Daha önce de bahsettiğimiz gibi Landau seviyeleri belli bir dejenereliğe sahiptir. Landau seviyelerinin ne kadar dolu olduğunu söyleyen doluluk çarpanını daha önce

$$\nu = \frac{n_A \phi_0}{B} \tag{6.11}$$

şeklinde tanımlamıştık. Burada magnetik akı kuantası $\phi_0 = h/e$ şeklinde verilmişti. Bunu yerine yazdığımızda

$$\nu = \frac{n_A h}{eB} \tag{6.12}$$

olur. Denk. 6.12 nin pay ve paydasını *2π* ile çarpalım. $h/2\pi = \hbar$ olmak üzere, Denk. 4.32 yi kullandığımızda

$$\nu = 2\pi n_A \ell^2 \tag{6.13}$$

olur. Buradan elektron yoğunluğu

$$n_A = \frac{\nu}{2\pi\ell^2} \tag{6.14}$$

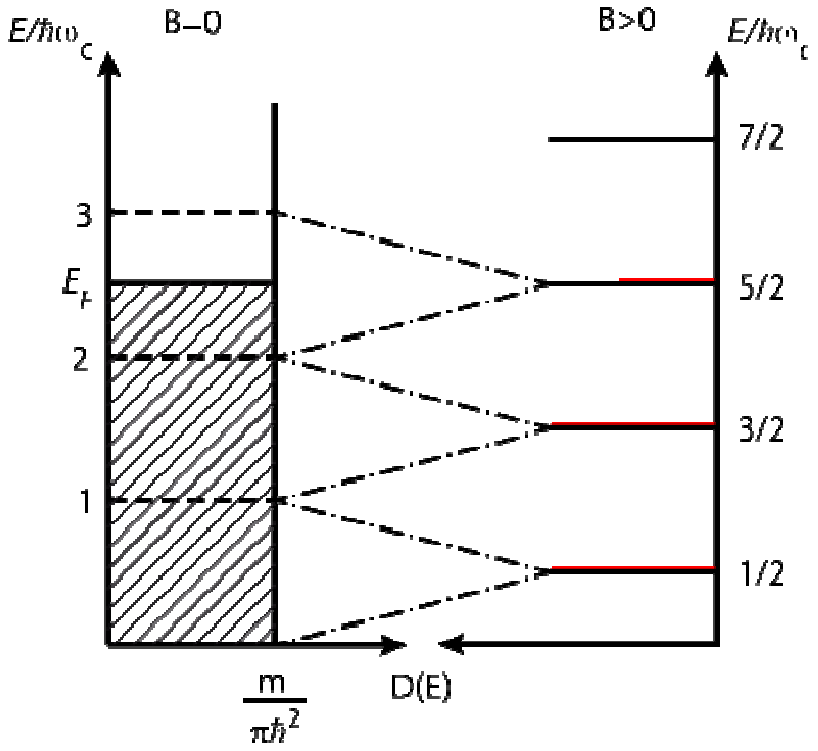
şeklinde elde edilir. $\nu = 1$ olduğunda Landau seviyesi tam doludur. Başka bir deyişle doluluk çarpanı Landau seviyesinin dejenereliğini verir. Elektronların spinleri göz önüne alındığında dejenerelik iki katına çıkar. Böylece bir Landau seviyesinin dejenereliği

$$\frac{g_s}{2\pi\ell^2} \tag{6.15}$$

olur. Burada $g_s = 2$ dir. Bu durumda durum yoğunluğu

$$D(E) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2}\sum_{n=0}^{\infty}\delta(E - E_n) \tag{6.16}$$

şeklinde elde edilir. Denk. 6.16 ya göre birden fazla enerji seviyesi vardır ve elektronlar bu enerji seviyeleri etrafına dağılmaktadır.



Şekil 6.2. Magnetik alanın yokluğunda ve varlığında oluşan durum yoğunluğu

6.3 Thomas – Fermi Yaklaşımı

T–F yaklaşımı *Thomas (1927)* ve *Fermi (1928)* tarafından ortaya konulan istatistiksel bir modeldir. Bu yaklaşımın amacı potansiyelini ve elektron yoğunluğunu hesaplayan bir yöntem elde etmektir.

T-F yaklaşımında elektron yoğunluğu

(6.17)

şeklinde verilir. Burada durum yoğunluğu, üç boyutlu Poisson denkleminin çözümünden elde edilen kapıların, verici atomların oluşturduğu potansiyel ve aynı zamanda elektronların kendi aralarındaki etkileşmesinden oluşan potansiyeli de içeren potansiyel fonksiyonu, kimyasal potansiyel ve ise iki

boyutlu uzaysal değişkenimizdir. Ayrıca $f([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)$ fonksiyonuna ***Fermi Fonksiyonu*** denir ve

$$f([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)}} \tag{6.18}$$

ifadesi ile verilir.

6.3.1 T = 0 ve B = 0 Durumu

Şimdi $T=0$ ve $B=0$ da *T-F* yaklaşımına göre elektron dağılımının nasıl olacağına bakalım. Burada iki durum söz konusudur. Eğer $(E+V(\vec{r})-\mu)>0$ ise $T=0$ için $\mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)}$ ifadesi ∞ olur. Denk. 6.18 deki Fermi fonksiyonu ise sıfıra gider. Sonuç olarak Denk. (6.17) ile verilen $n_A(\vec{r})$ sıfır olur. Diğer taraftan eğer $(E+V(\vec{r})-\mu)<0$ ise $T=0$ için $\mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)}$ ifadesi sıfıra gider. Bu durumda Fermi fonksiyonu $f([E+V(\vec{r})-\mu]/k_bT)=1$ olur. Buna göre Denk. (6.17) deki durum yoğunluğu

$$n_A(\vec{r})=\frac{m}{\hbar^2\pi}\int_0^{\mu-V(\vec{r})}dE \tag{6.19}$$

olur. Bu integralin sonucu da

$$n_A(\vec{r})=\frac{m}{\hbar^2\pi}\left(\mu-V(\vec{r})\right) \tag{6.20}$$

olur. Sonuç olarak $T=0$ ve $B=0$ da elektron dağılımı bir basamak fonksiyonuna dönüşür.

6.3.2 $T \neq 0$ ve $B = 0$ Durumu

Şimdi $T \neq 0$ ve $B = 0$ için elektron dağılımını *T-F* yöntemi ile türetelim. Denk. 6.10 da verilen D_0 enerjiden bağımsız olduğu için integralin dışına çıkar. Böylece Denk. 6.17

$$n_A(\vec{r}) = D_0 \int_0^\infty dE f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{6.21}$$

haline dönüşür. Denk. 6.18 i Denk. 6.21 de yerine yazarsak

$$n_A(\vec{r}) = D_0 \int_0^\infty \frac{dE}{1+\mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}} \tag{6.22}$$

olur. Denk. 6.22 nin hem payını hem de paydasını $-k_B T$ ile çarpalım. Böylece ifademiz

$$n_A(\vec{r}) = -D_0 k_B T \int_0^\infty \frac{-\frac{1}{k_B T} dE}{1+\mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}} \tag{6.23}$$

halini alır. Denk. 6.23 ün hem payını hem de paydasını bu sefer $\mathrm{e}^{-([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}$ ile çarpalım. Bunu yaptıktan sonra ifademiz

$$n_A(\vec{r}) = -D_0 k_b T \int_0^\infty \frac{-\frac{1}{k_b T}\mathrm{e}^{-([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}}{\mathrm{e}^{-([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)} + 1} dE \tag{6.24}$$

olur. İntegraldeki kesrin paydasına *u* dersek pay du olur. Böylece integral

$$n_A(\vec{r}) = -D_0 k_b T \int_0^\infty \frac{du}{\mathrm{u}} \tag{6.25}$$

haline dönüşür. Bu integralin sonucu $ln\, u$'dur. *u*'nun değerini yerine yazdığımızda $T \neq 0$ ve $B = 0$ için elektron dağılımı

$$n_A(\vec{r}) = -D_0 k_b T \, ln\left[e^{([\mu - V(\vec{r})]/k_b T)} + 1\right] \tag{6.26}$$

olur.

6.3.3 $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ Durumu

Şimdi 6.2.2 de elde ettiğimiz durum yoğunluğunu kullanarak $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ için elektron dağılımını elde edelim. Denk. 6.16 yı, Denk. 6.17 de yerine yazdığımızda

$$n_A(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int dE \delta(E - E_n) f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{6.27}$$

ifadesini elde ederiz. Burada Dirac delta fonksiyonunun integral özelliğini kullanılarak Denk. (6.27) nin sonucunun

$$n_A(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} f([E_n + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{6.28}$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir.

7. ÖZ UYUMLU (SELF CONSISTENT) ÇÖZÜM

Magnetik alan altında elektron dağılımını elde edebilmek için Poisson denklemi ile *T–F* denklemlerini *öz-uyumlu (Self-Consistent)* olarak çözmek gerekir. Bu çözümü yapmak için C dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın başında arkafon (background) potansiyelini tanımlayıp donorları yerleştirilmiştir. Arka fon potansiyelini *T=0* ve *B=0* durumundaki *T–F* denkleminde kullanarak elektron dağılımını elde edilir. Elde edilen bu elektron dağılımı ile Poisson denklemine geri dönülür. Elektron dağılımı kararlı hale gelene kadar bu döngü devam eder. Daha sonra programın ikinci kısmına geçiyoruz. Birinci döngünün sonunda elde ettiğimiz potansiyeli $T \neq 0$ ve *B=0* durumundaki *T–F* denkleminde kullanarak elektron yoğunluğunu elde edilmiştir. Elde edilen elektron yoğunluğu ile Poisson denklemine geri dönüyoruz. Ancak bu sefer ki potansiyel değeri çok düşük kalmaktadır. Ve çözüm dalgalanarak ıraksar. Bu problemi yakınsatabilmek için programın bu kısmında Newton Raphson yöntemini kullanılmıştır. Bu kısımda Newton Raphson yöntemini anlatacağız.

7.1 Termodinamik Durum Yoğunluğu

Daha önce bölüm 6.3.3 te $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ durumu için elektron yoğunluğunu elde etmiştik (Denk. 6.28). Şimdi ise bu ifadeyi kullanarak durum yoğunluğunu sıcaklığın bir fonksiyonu olarak tanımlayabiliriz:

$$\mathrm{D}_{TDOS}(\mu, T) = \frac{dn_A}{d\mu} \tag{7.1}$$

Bu şekilde tanımlanan durum yoğunluğuna ***Termodinamik durum yoğunluğu (TDOS)*** denir. Denk. 6.28 i yukarıdaki ifadede yerine yazarsak ve Denk. 6.18 deki Fermi fonksiyonunu da kullanırsak

$$D_{TDOS}(\mu, T) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{1 + e^{\left(\frac{[E_n + V(\vec{r}) - \mu]}{k_B T}\right)}} \right) \tag{7.2}$$

olur. Parantez içindeki ifadenin μ ye göre türevini aldığımızda

$$D_{TDOS}(\mu, T) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \frac{1}{k_B T} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + e^{\left(\frac{[E_n + V(\vec{r}) - \mu]}{k_B T}\right)} \right)^{-2} \left(e^{\left(\frac{[E_n + V(\vec{r}) - \mu]}{k_B T}\right)} \right) \tag{7.3}$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeyi daha sade bir hale getirelim. Bunun için Denk. 6.18 deki Fermi fonksiyonunu f_n ile gösterelim. Şimdi de

$$1 + e^{\left(\frac{[E_n + V(\vec{r}) - \mu]}{k_B T}\right)} = \frac{1}{f_n} \tag{7.4}$$

şeklinde bir dönüşüm uygulayalım. Burada $e^{\left(\frac{[E_n + V(\vec{r}) - \mu]}{k_B T}\right)} = \frac{1}{f_n} - 1$ olur. Denk. 7.4 ü Denk. 7.3 te yerine yazıp gerekli düzeltmeleri yaparsak sonuç olarak

$$D_{TDOS}(\mu, T) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1 - f_n)}{k_B T} \tag{7.5}$$

elde edilir.

7.2 Newton Raphson Yöntemi

f(x)=0 denkleminin bir kökünün bulunmasında kullanılan iteratif yöntemlerin başında gelir. İteratif yöntemlerin içinde en etkin olan yöntemdir. Bu yüzden çok sık kullanılır. *f(x)* sürekli ve türevi alınabilen fonksiyonun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. *f(x_n+h)* fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \;\; \xi \in (x_n, x_n + h) \tag{7.6}$$

yazılabilir. $x_n + h = x_{n+1}$ değerinin gerçek köke yakın olduğu yani *f(x_n+h)*'ın hemen hemen sıfır olduğu düşünülürse

$$0 = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \;\; \xi \in (x_n, x_n + h) \tag{7.7}$$

yazılır. Şayet *h* yeterince küçük ise h^2'yi içeren terim ihmal edilebilir. Böylece

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.8}$$

elde edilir. Eğer $h = x_{n+1} - x_n$ olduğu göz önüne alınırsa Newton Raphson için iterasyon denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7.9}$$

olur (Oturanç *2008*).

$T \neq 0$ ve $B \neq 0$ için elektron yoğunluğunu daha önce

$$n_A(\vec{r}) = n_A[V(\vec{r})] = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} f([E_n + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{7.10}$$

biçiminde elde etmiştik. Gerçek elektron dağılımını elde etmek için gerçek potansiyeli bilmemiz gerekir. Potansiyel ile elektron yoğunluğu arasındaki ilişki Poisson denklemi ile verilir:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon} n_A(\vec{r}) \tag{7.11}$$

Denk.7.10 daki $n_A(\vec{r})$ yi Poisson denkleminde yerine yazdığımızda

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon} \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} f([E_n + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{7.12}$$

olur. Bu kısımdaki amacımız Denk. 7.12'yi sayısal olarak nasıl çözdüğümüzü açıklamaktır. Başlangıç olarak şöyle bir varsayım yapalım:

$$\tilde{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}) \tag{7.13}$$

Burada $\tilde{V}(\vec{r})$ olması gereken gerçek potansiyel, $V(\vec{r})$ ise elimizdeki yaklaşık potansiyeldir. Şimdi de $n_A[\tilde{V}(\vec{r})]$ ifadesini $n_A[V(\vec{r})]$ etrafında

$$n_A\big[\tilde{V}(\vec{r})\big] = n_A[V(\vec{r})] + \frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})} \delta V + O(\delta V^2) \tag{7.14}$$

şeklinde Taylor serisine açalım. Denk. 7.13 ü Denk. 7.11 de yerine yazdığımızda

$$\nabla^2 \big(V(\vec{r}) + \delta V(\vec{r})\big) = -\frac{q}{\epsilon} n_A[\tilde{V}(\vec{r})] \tag{7.15}$$

olur. Şimdi ise $n_A[\tilde{V}(\vec{r})]$ yerine Denk. 7.14 teki Taylor seri açılımını yazalım:

$$\nabla^2 (V(\vec{r}) + \delta V) = -\frac{q}{\epsilon} \left(n_A[V(\vec{r})] + \frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})} \delta V \right) \tag{7.16}$$

Denk. 7.10 dan görüldüğü gibi

$$\frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})} = -\frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial \mu} \tag{7.17}$$

olur. Buradaki $\frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial \mu}$ ifadesine ***Termodinamik durum yoğunluğu*** denir ve bunu bölüm 7.1 de elde etmiştik. Bu ifadeyi Denk. 7.16 da kullandığımızda sonuç olarak

$$\nabla^2 \delta V - \frac{q}{\epsilon}\frac{\partial n_A[V(\vec{r})]}{\partial \mu}\delta V = -\nabla^2\big(V(\vec{r})\big) - \frac{q}{\epsilon} n_{A}[V(\vec{r})] \tag{7.18}$$

ifadesine ulaşırız. Bundan sonra Denk. 7.11 ile verilen Poisson denklemini çözmek yerine Denk. 7.18 ile verilen ifadede δV yi çözerek gerçek potansiyeli

$$V^{n+1}(\vec{r}) = V^{n}(\vec{r}) + \delta V \tag{7.19}$$

biçiminde hesaplarız. Böylece daha önce ıraksayan çözüm, bu ifadeyi kullandığımızda yakınsar.

Bölüm 5.3 te yaptığımız sayısal çözüme benzer bir çözümü Denk. 7.18 için yaptığımızda

$$\begin{aligned}
&\delta V(x,y,z) \\
&= \frac{1}{2h_y^2h_z^2 + 2h_x^2h_z^2 + 2h_x^2h_y^2 + h_x^2h_y^2h_z^2\,\frac{q}{\epsilon}\frac{\partial n_{el}(x,y,z)}{\partial \mu}}\Big\{h_y^2h_z^2[\delta V(x+h_x,y,z) \\
&+ \delta V(x-h_x,y,z) + V(x+h_x,y,z) + V(x-h_x,y,z)] \\
&+ h_x^2h_z^2\big[\delta V\big(x,y+h_y,z\big) + \delta V\big(x,y-h_y,z\big) + V\big(x,y+h_y,z\big) \\
&+ V\big(x,y-h_y,z\big)\big] \\
&+ h_x^2h_y^2[\delta V(x,y,z+h_z) + \delta V(x,y,z-h_z) + V(x,y,z+h_z) \\
&+ V(x,y,z-h_z)] - 2V(x,y,z)\big[h_y^2h_z^2 + h_x^2h_z^2 + h_x^2h_y^2\big] \\
&+ h_x^2h_y^2h_z^2\frac{q}{\epsilon}n_A(x,y,z)\Big\}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi sayısal olarak çözdüğümüzde δV yi buluyoruz. Böylece gerçek potansiyeli ve gerçek elektron yoğunluğunu bulmuş oluruz.

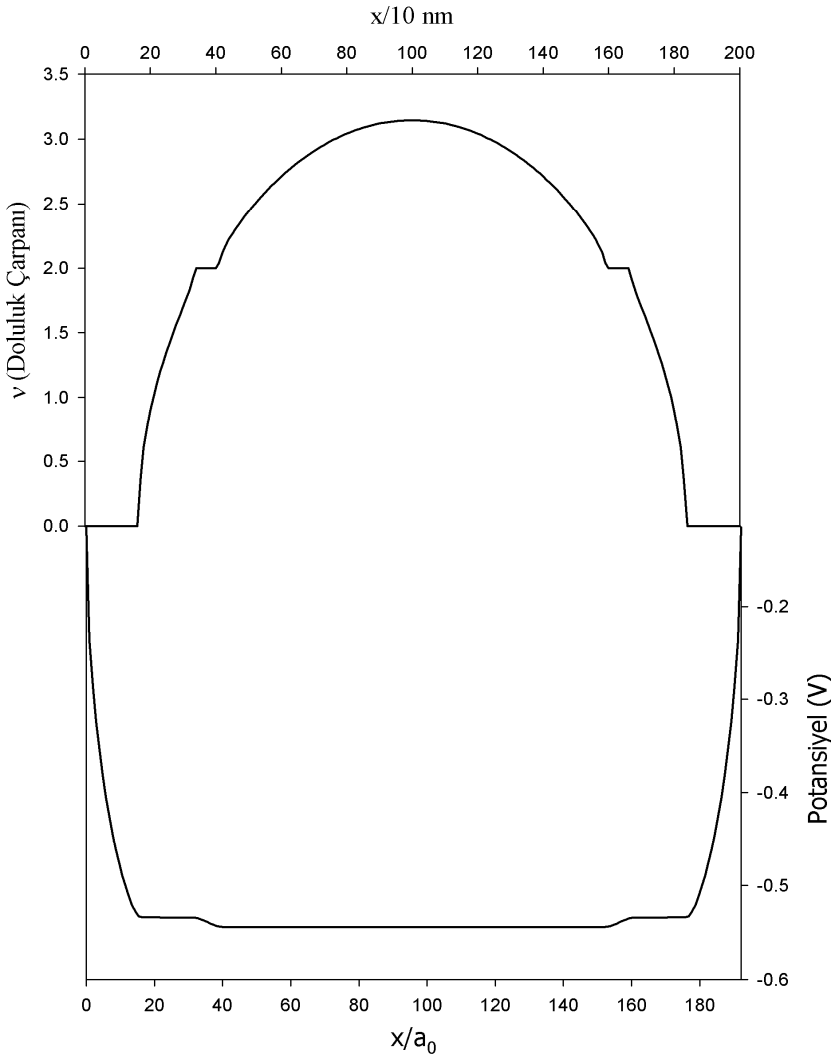
8. HESAPLAMALAR ve SONUÇLAR

Başlangıç olarak ele aldığımız kuantum nano yapı kuantum Hall çubuğudur. Kuantum Hall çubuğumuzun eni (*x* yönü) *0.002 mm (2000 nm)* boyu (*y* yönü) ise *0.003 mm (3000 nm)* dir. Kuantum Hall çubuğunun derinliğini (*z* yönü) *0.001 mm (1000 nm)* aldık. Kuantum Hall çubuğunu *x* yönünde *200* mesh aralığına, *y* yönünü *50* mesh aralığına ve *z* yönünü de *100* mesh aralığına böldük. *x, y* ve *z* yönünde mesh aralıklarını sırasıyla *10, 60* ve *10 nm* aldık.

Yapılan hesaplamalarda bütün verici atomların (donorlar) iyonlaştığı varsayılmıştır. Böylece iyonlaşan donor sayısı ile *2BEG*'deki elektron sayısı eşit alınmıştır. Donorların yerleştirildiği yer kuantum Hall çubuğunun yüzeyinden *50 nm* derinliğinde, *2BEG*'in olduğu yer ise yüzeyden *90 nm* derinliktedir. Donor yoğunluğu (n_d) ise $3 \times 10^{15}\ m^{-2}$ alınmıştır. Bu çalışmadaki donor katkılamasının delta bir katkılama olduğu kabul edilmiştir.

Yapılan hesaplamalarda üç boyutlu Poisson denklemi ve Thomas Fermi denklemlerini öz uyumlu olarak çözdük. Öz uyumlu bu çözüm kolay kolay yakınsamıyor. Bu yakınsamayı ancak Newton Raphson yöntemiyle sağlıyoruz. Newton Raphson yönteminin kötü tarafı yakın bir noktadan başlanmasıdır. Bundan dolayı hesaplamaya *T=0 K* ve *B=0 T* da *SOR* yöntemini kullanarak elektron dağılımını ve perdelenmiş potansiyeli elde ettik. İkinci adımda ise ilk adımda elde ettiğimiz sonuçları kullanarak $T \neq 0$ ve *B=0* 'da Newton Raphson yöntemi ile elektron dağılımını ve perdelenmiş potansiyeli hesapladık. Son adımda ise ikinci adımdaki sonucu kullanarak $T \neq 0$ ve $B \neq 0$'da belirlediğimiz hedef sıcaklığa varıncaya kadar sıcaklık belli adımlarla düşürülerek hedef sıcaklığındaki elektron dağılımını ve perdelenmiş potansiyeli elde ettik. Hesaplamalarımızda ilk sıcaklık değerini *60 K* aldık. Hedef sıcaklığımız ise *1.4 K*'dir. Son sıcaklık ilk sıcaklığın $3/4$'ü olacak şekilde hedef sıcaklığa ulaşıyoruz. Seçtiğimiz bu hedef sıcaklıkta elektronlar bir üst enerji seviyesine uyarılamaz ve magnetik alanın etkisi tam olarak belirginleşir.

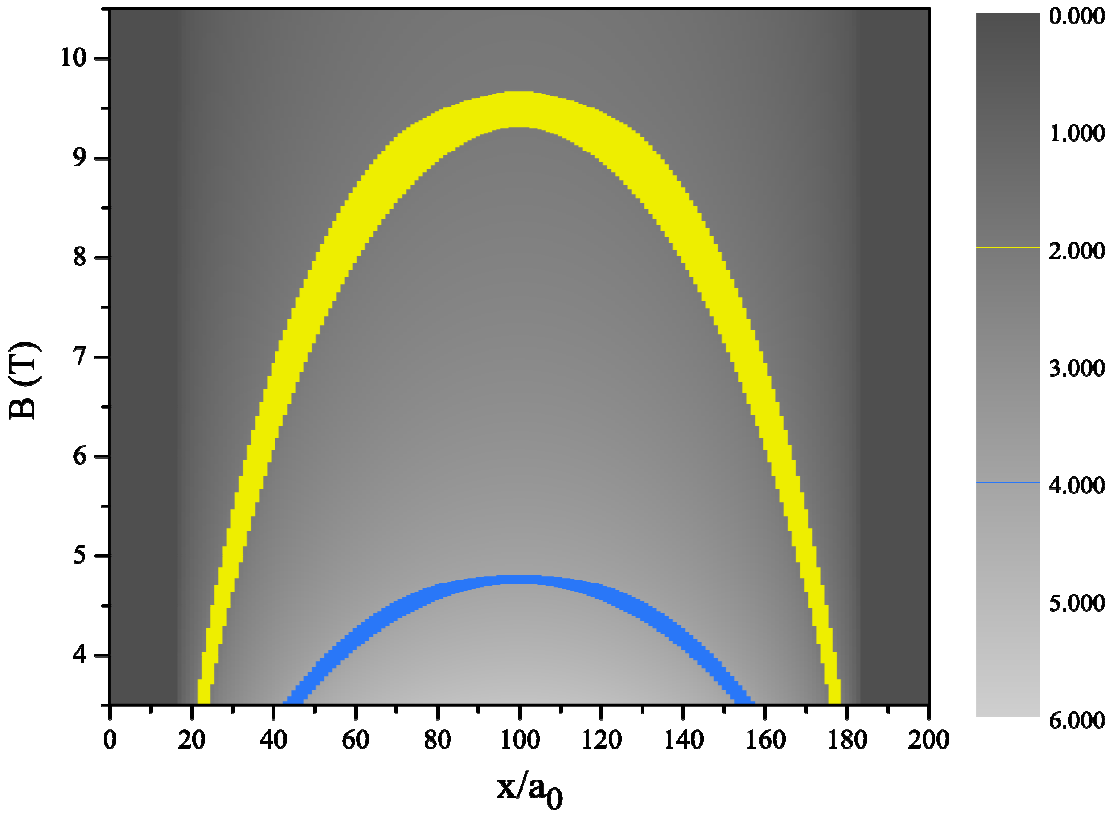
Yukarıda bahsettiğimiz süreçle elde ettiğimiz ilk sonuçlar Şekil 8.1 de gösterilmiştir. Şekil 8.1 deki elektron dağılımında görüldüğü gibi sıkıştırılabilir şeritler (compressible strips) ve sıkıştırılamaz şeritler (incompressible strips) belirgin bir şekilde gözlenmektedir. Bu elektron dağılımına karşılık gelen perdelenmiş potansiyelde aynı şekil üzerinde gösterilmiştir. Elde ettiğimiz sonuçlar literatürdeki çalışmalarla uyuşmaktadır (Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Weitz ve ark. 2000; Ahlswede ve ark. 2001; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004). Şekil 8.1 de görüldüğü gibi kenardan içerdeki bir noktaya kadar hiç elektron yoktur. Çünkü Fermi enerjisi ilk Landau seviyesinin altında kaldığından elektronlar bu seviyelere yerleşemiyorlar. Fermi enerjisi ilk Landau seviyesiyle kesiştiğinde, elektronlar ilk Landau seviyesini doldurmaya başlıyorlar. Kısmen dolu olan Landau seviyesinde elektronlar rahatlıkla hareket edebiliyorlar. Böylece bu bölge tıpkı bir metal gibi davranır. Bu nedenle Şekil 8.1 de görüldüğü gibi potansiyel sabit kalıyor. Yani potansiyel tamamen perdeleniyor. Metal gibi davranan bu bölgeye ***sıkıştırılabilir şerit*** adı verilir. Potansiyeldeki bu perdeleme birinci Landau seviyesi tam doluncaya kadar sürer. Birinci Landau seviyesi tam dolduğunda elektronlar hareket edebilecekleri boş yerler bulamazlar. Landau seviyesinin tam dolu olduğu bu bölgeye ***sıkıştırılamaz şerit*** adı verilir. Elektronlar hareket özgürlüklerini kaybettikleri için potansiyeli daha fazla perdeleyemezler. Sonuçta perdeleme olmadığı için potansiyelde bir düşme meydana gelir. Şekil 8.1 de açıkça görüldüğü gibi potansiyeldeki bu düşme sıkıştırılamaz şerit bölgesinden çıkana kadar devam eder.



Şekil 8.1. *B=6.1 T* için elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımı. Burada sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritler açıkça görülmektedir. *x* doğrultusu için iki farklı uzunluk birimi kullanılmıştır. Birisi *GaAs* için $a_0 \cong 10.41$ nm değeri, diğeri ise *x* doğrultusundaki mesh aralıkları arasındaki uzunluktur.

Kuantum Hall çubuğu için *B=3.5–10.5 T* aralığında *0.01* adımlarla sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıklarını hesapladık. Elde ettiğimiz sonuç Şekil 8.2 de gösterilmektedir. Şekil 8.2 ye baktığımızda yaklaşık *B=9.7 T*'nın yukarısında sıkıştırılamaz şerit oluşmaz. Çünkü yüksek magnetik alanda dejenerelik fazla

olduğundan sistemde var olan elektronlar birinci Landau seviyesini tam olarak dolduramamaktadırlar. Magnetik alan *9.7 T*'nın altına düştüğünde de sıkıştırılamaz şerit kuantum Hall çubuğunun orta kısmında oluşmaya başlar. Bunun nedeni ise; magnetik alan şiddeti azaldığı için dejenerelik azalır. Böylece birinci Landau seviyesi tam dolar ve sıkıştırılamaz şerit gözlenir. Magnetik alan küçüldükçe sıkıştırılamaz şerit orta kısımdan kenarlara doğru genişlemeye başlar. Yaklaşık *B=9.32 T* da 'deki sıkıştırılamaz şeridin genişliği maksimum olur. Magnetik alan şiddeti yaklaşık *3.5 T* ya indiğinde Landau seviyelerinin dejenereliği azalır. Bu sebeple sistemde var olan elektronlar birinci ve ikinci Landau seviyelerini tam doldururlar. Böylece ve için iki sıkıştırılamaz şerit gözlenir. için sıkıştırılamaz şerit yaklaşık *B=4.8 T* da oluşmaya başlar. *B=4.72 T* da maksimum genişlikte olur. Magnetik alan şiddeti *4.72 T*'nın altına düştüğünde yeni bir sıkıştırılabilir şerit bölgesine girilmiş olur.

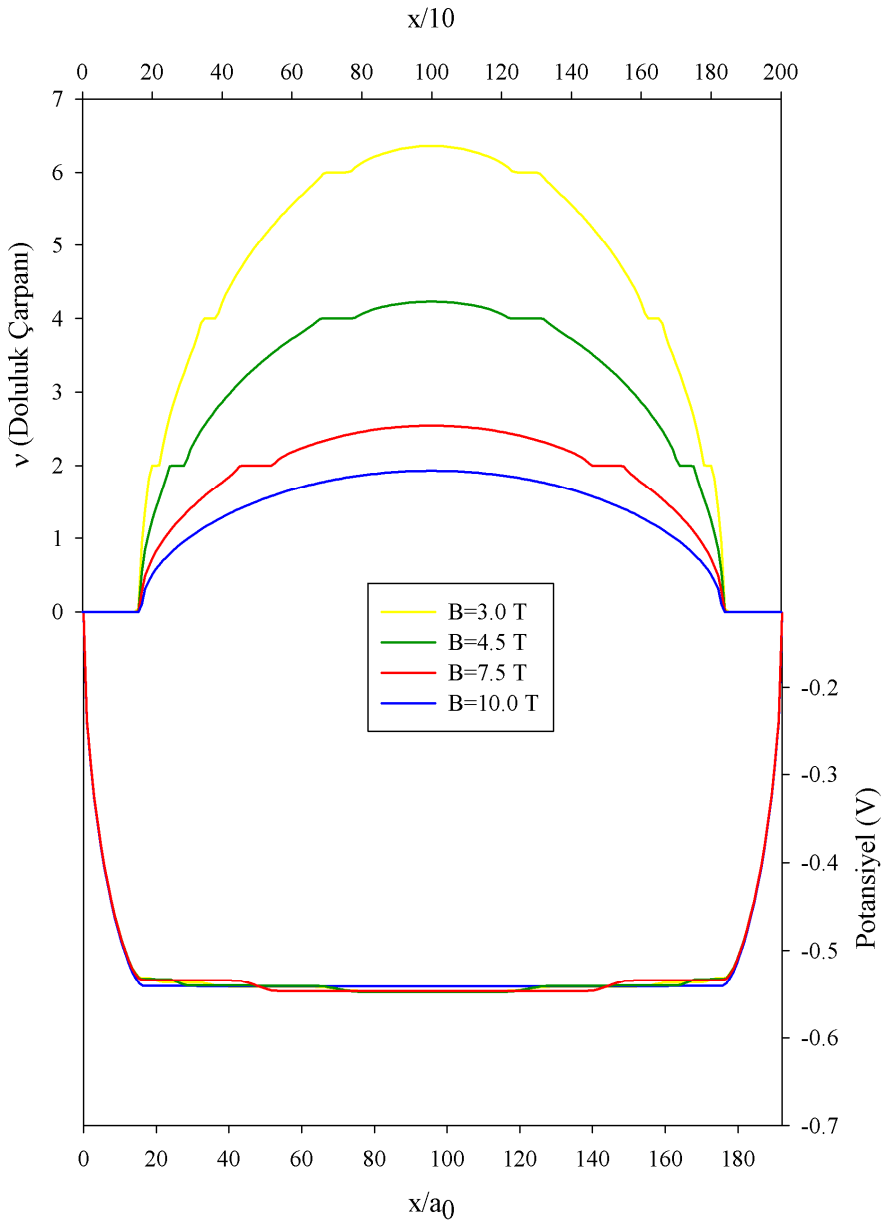


Şekil 8.2. Kuantum Hall çubuğu için *B=3.5–10.5 T* aralığında *0.01* adımlarla sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları. Doluluk çarpanı oluğunda oluşan sıkıştırılamaz şeridi sarı renk

ile, doluluk çarpanı $\nu = 4$ olduğunda oluşan sıkıştırılamaz şeridi ise mavi renk ile gösterilmektedir.

Şekil 8.3'te birkaç farklı magnetik alan değeri için elektron dağılımı ve buna karşılık gelen perdelenmiş potansiyel gösterilmektedir. Şekil 8.3'te görüldüğü gibi B=3.0 T gibi düşük bir magnetik alanda doluluk çarpanı $\nu = 2, 4$ ve *6* olmak üzere üç tane sıkıştırılamaz şerit oluşmaktadır. Bu magnetik alan değerinde Landau seviyelerinin dejenereliği düşük olduğu için ilk üç Landau seviyesi tam dolu, dördüncü ise kısmen doludur.

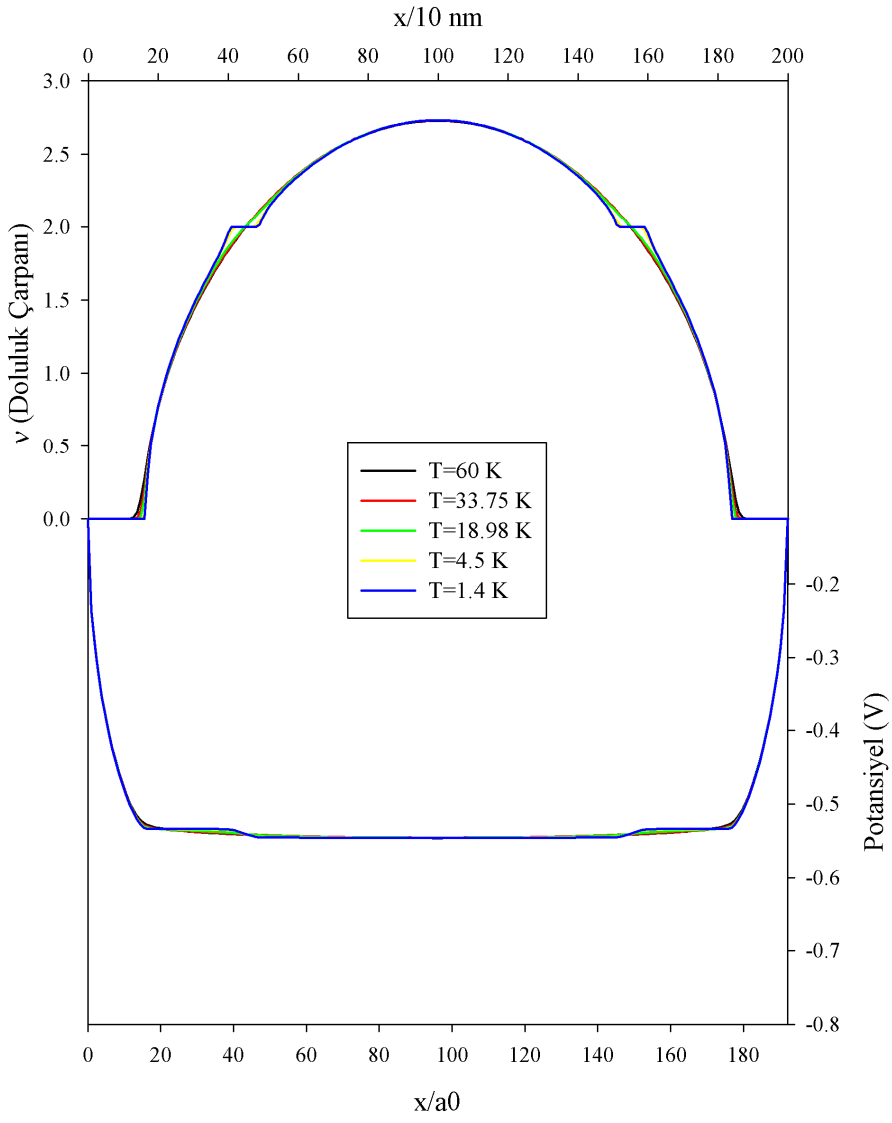
B=4.5 T için elektron dağılımı Şekil 8.3'te gösterilmektedir. Bu durumda ise doluluk çarpanı $\nu = 2$ ve 4 olmak üzere iki tane sıkıştırılamaz şerit oluşmaktadır. Bunun nedeni ise artan magnetik alanda Landau seviyelerinin dejenereliği arttığı için yapıdaki elektronlar ancak birinci ve ikinci Landau seviyelerini tam, üçüncü seviyeyi ise kısmen dolduruyorlar. Magnetik alan daha da arttırıldığında *(B=7.5 T)* $\nu = 4$'e karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit kaybolur. Çünkü dejenerelik öyle arttı ki artık elektronlar sadece birinci ve ikinci Landau seviyelerine yerleşirler. Magnetik alan daha da şiddetlendiğinde dejenerelik öyle artar ki sistemde var olan tüm elektronlar birinci Landau seviyesine yerleşirler. Hatta bu seviyeyi bile tam dolduramazlar. Bu durumda sıkıştırılamaz şerit gözlenmez. Sonuç olarak magnetik alan arttıkça Landau seviyelerinin dejenereliği artar. Bu da o seviyeye daha fazla elektron yerleşeceği anlamına gelir. Şekil 8.3'te görüldüğü gibi sıkıştırılabilir şerit bölgelerinde potansiyel tamamen perdelenmekte sıkıştırılamaz şerit bölgelerinde ise potansiyel düşmektedir.



Şekil 8.3. Birkaç farklı magnetik değeri için elektron dağılımı ve bu dağılıma karşılık gelen perdelenmiş potansiyel dağılımı. Burada sıcaklık 1.4 K'dir. Sarı renk *B=3.0 T*'yı, yeşil renk *B=4.5 T*'yı, kırmızı renk *B=7.5 T* yı, mavi renk ise *B=10.0 T*'yı göstermektedir.

Şekil 8.4'te birkaç farklı sıcaklık için elektron dağılımı gösterilmektedir. Şekil 8.4'te görüldüğü gibi yüksek sıcaklıklarda elektronlar rahatlıkla bir üst enerji seviyesine çıkabilmektedir. Bu yüzden yüksek sıcaklıklarda sıkıştırılamaz şeritler oluşmamaktadır. Sıcaklık düştükçe elektronların enerjisi azalır. Ve elektronlar bir üst

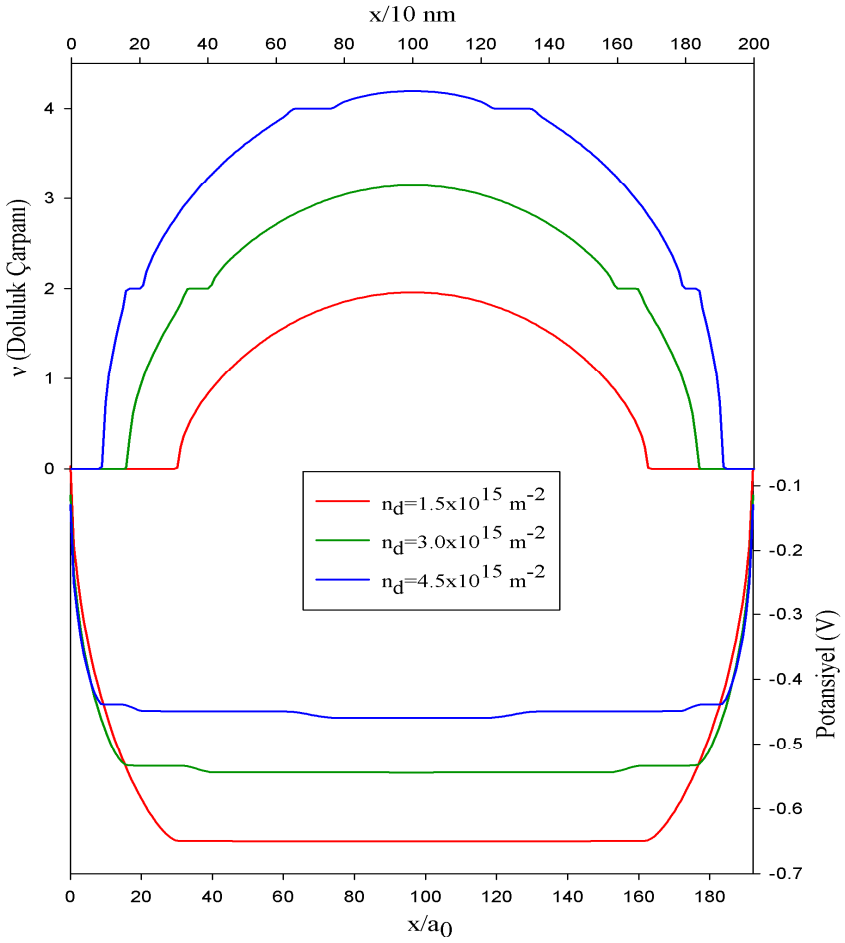
Landau seviyesine geçemezler. Böylece magnetik alanın etkisi görülmeye başlanır. Bu etki Şekil 8.4 te belirgin olarak oluşan sıkıştırılamaz şeritleri meydana getirir.



Şekil 8.4. Sıcaklığın elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel üzerindeki etkisi. Burada *B=7 T* dır. Sıcaklık düştükçe sıkıştırılamaz şeritler belirginleşiyor. Kırmızı renk *60 K*'yı, yeşil renk *33.75 K*'yı, sarı renk *18.98 K*'yı, mavi renk *4.5 K*'yı ve gri renk ise hedef sıcaklığımız olan *1.4 K*'yı göstermektedir.

Şekil 8.5'te *1.4 K* hedef sıcaklığımızda *6.1 T* magnetik alanda farklı donor yoğunluğunda oluşan elektron dağılımı gösterilmektedir. Şekil 8.4'te görüldüğü gibi sistemde $n_D = 1.5 \times 10^{15} m^{-2}$ elektron olduğunda bu sayı birinci Landau seviyesini bile dolduramıyor. Şekil 8.5'te görüldüğü gibi bu yoğunluk değerinde sıkıştırılamaz

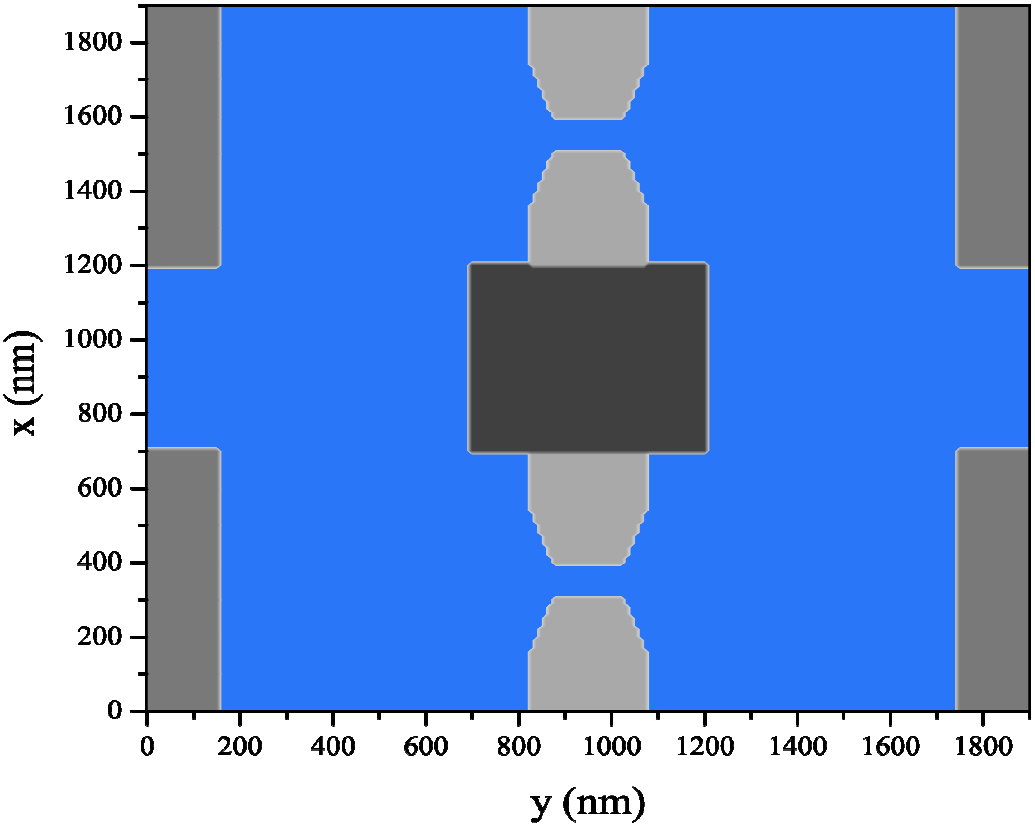
şerit oluşmamaktadır. Sıkıştırılamaz şerit gözlenmek istenirse donor yoğunluğu artırılır ve ya magnetik alan şiddeti düşürülür. $n_D = 3.0 \times 10^{15} m^{-2}$ alındığında $\nu = 2$'de sıkıştırılamaz şerit gözlenmektedir. Sistemde var olan elektron sayısı birinci Landau seviyesini dolduracak kadar çoktur. Son olarak Şekil 8.5'te görüldüğü gibi aynı magnetik alan değerinde $n_D = 4.5 \times 10^{15} m^{-2}$ alındığında birinci ve ikinci Landau seviyesi tam dolu üçüncü seviye ise kısmen doludur. Bu yoğunluk değerinde iki sıkıştırılamaz şerit gözlenmektedir. Şekil 8.5'te görüldüğü gibi elektron sayısı arttıkça perdeleme potansiyeli de artmaktadır.



Şekil 8.5. Birkaç farklı verici atom yoğunluklarında oluşan elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel. Burada B=6.1 T ve sıcaklık 1.4 K'dır. Verici atom yoğunluğu $1.5 \times 10^{15}\ m^{-2}$ olduğunda kırmızı renk, verici atom yoğunluğu $3.0 \times 10^{15}\ m^{-2}$ olduğunda yeşil renk ve verici atom yoğunluğu $4.5 \times 10^{15}\ m^{-2}$ olduğunda mavi renk kullanılmıştır.

Bu çalışmada ele aldığımız diğer bir nano yapı ise *e-MZI* dır. *e-MZI* geometrisinde kapıların etkisini hesaba katmak için her adımda Poisson denklemini sayısal olarak çözdük. Daha sonrada yarım bir elips ile simüle ettiğimiz donor ve kenar etkilerini bu sonuca ilave ettik. Böylece toplam perdelenmiş potansiyeli hesapladık. Hesapladığımız bu potansiyeli Denk. 6.17'deki Thomas Fermi ifadesinde kullanarak elektron yoğunluğunu elde ettik.

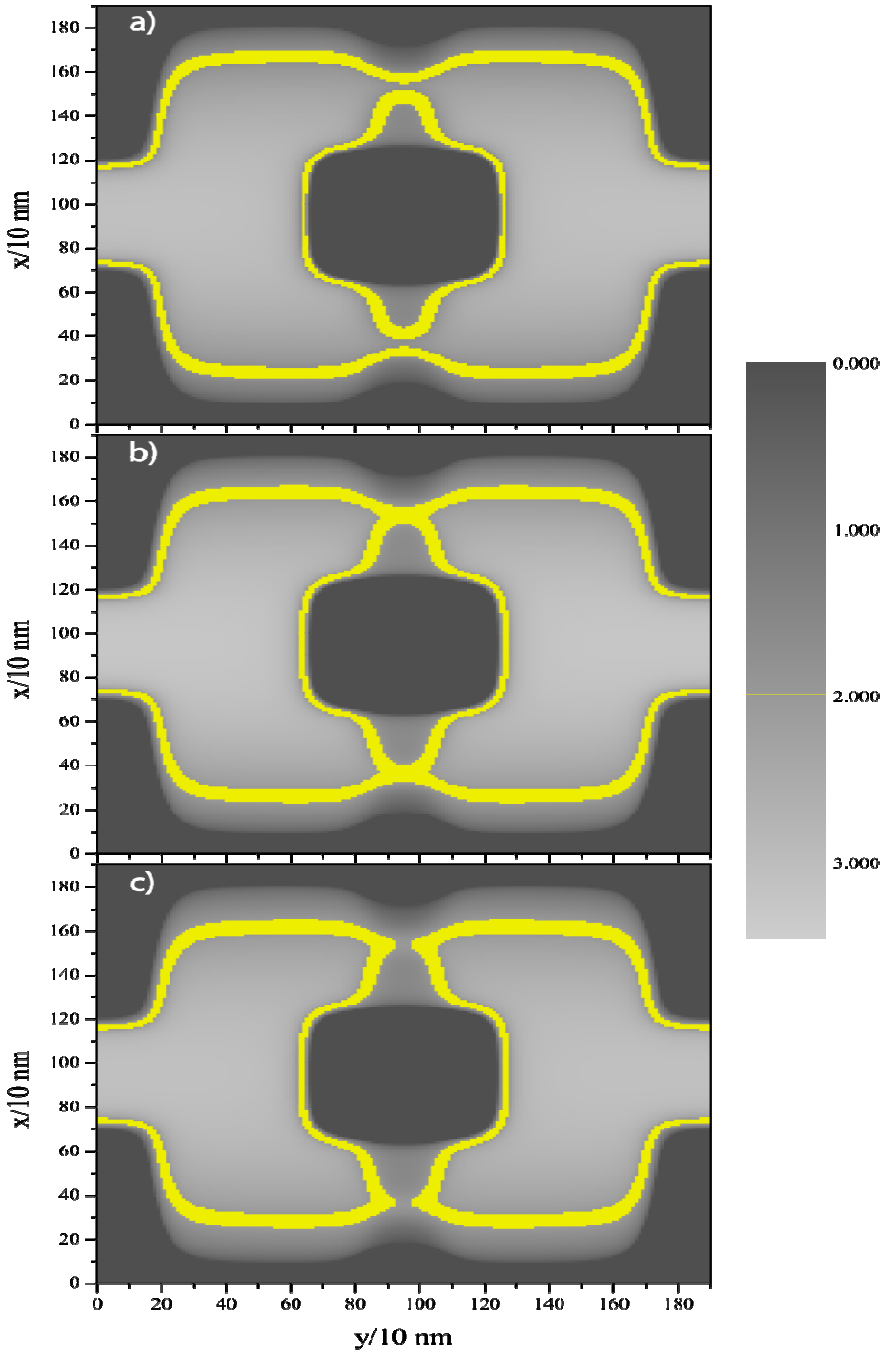
Ele aldığımız geometri Şekil 8.6 da gösterilmiştir. Şekil 8.6 da kuantum nokta kontak *(Quantum Point Contact, QPC)* arası mesafe *100* nm'dir. Şekil 8.6 daki ortadaki büyük kare kapıya *-1.5 V* gerilim uygulanmıştır. Kenarlardaki dört büyük kapıya *-1.0 V* gerilim uygulanmıştır. *QPC*'lere ise *-0.3* ve *-0.5 V* gerilim uygulanmıştır.



Şekil 8.6. Hesaplamada kullandığımız e-MZI nın topolojik eşdeğeri.e-MZI de donorların yerleştirildiği yer yüzeyden *50 nm* derinlikte, *2BEG*'in olduğu yer ise yüzeyden *90 nm* derinliktedir. Donor yoğunluğu ise alınmıştır.

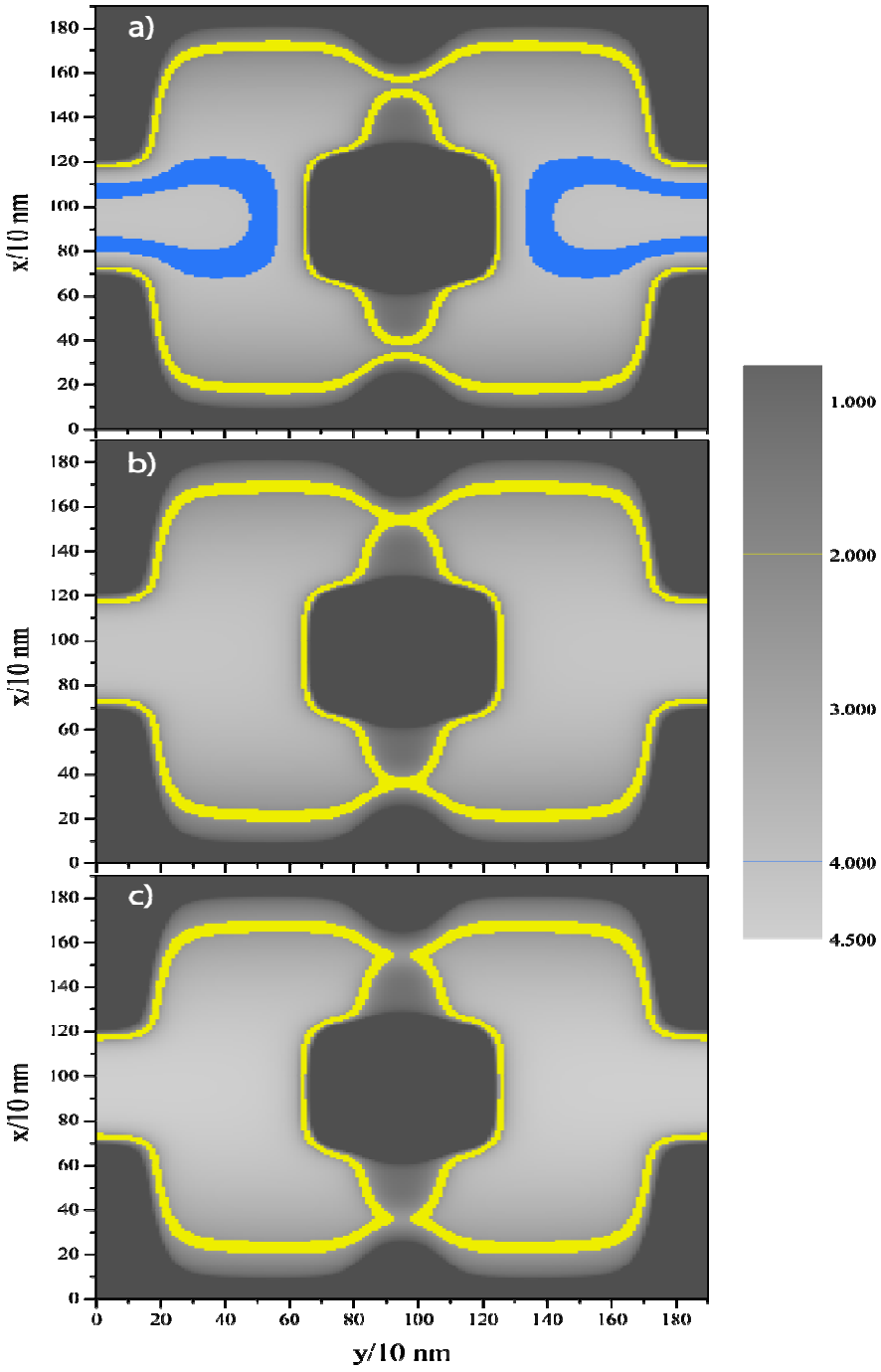
QPC'lere -0.3 V gerilim uygulandığında farklı magnetik alan değerlerinde iki boyutta oluşan doluluk çarpanı Şekil 8.7 de gösterilmektedir. Buradaki magnetik alan değerleri *7.3 T, 7.9 T* ve *8.3 T* dir. Şekil 8.7a da gösterildiği gibi *B=7.3 T* da iki kenarda oluşan sıkıştırılamaz şeritler *QPC*'de birbirleriyle temas etmemektedirler. Çünkü iki sıkıştırılamaz şeridin arasına bir sıkıştırılabilir şerit girmiştir. Şekil 8.7b de görüldüğü gibi *7.9 T* da iki sıkıştırılamaz şerit birbirleriyle temas eder. Bunun nedenini açıklamaya çalışalım: Magnetik alan şiddeti arttırılınca, kuantum Hall çubuğunda yaptığımız tartışmalarda olduğu gibi dejenerelik artar. Böylece $\nu = 2$'yi aşmak için daha çok elektrona ihtiyaç vardır. Bu nedenle sıkıştırılamaz şerit daha çok elektronun olduğu orta kısımlara doğru kayar. Bu nedenlerden dolayı iki sıkıştırılamaz şerit Şekil 8.7b de görüldüğü gibi birbiriyle temas eder. Magnetik alan daha da şiddetlendiğinde *(B=8.3 T)*, Landau seviyelerinin dejenereliği o kadar artar ki sistemde var olan elektronlar birinci Landau seviyesini dolduramazlar. Bundan dolayı Şekil 8.7c de görüldüğü gibi $\nu = 2$'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit *QPC* den geçemez.

$\nu = 2$'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit sistemi boydan boya geçtiğinde sistem plato bölgesindedir (Siddiki ve ark. *2008*). Şekil 8.7a da $\nu = 2$ sıkıştırılamaz şerit boydan boya geçmektedir. Ancak *QPC* de sıkıştırılamaz şerit birbirleriyle temas etmediğinden girişim gözlenmez. Şekil 8.7b de ise $\nu = 2$'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şeritler *QPC* arasında birbirleriyle temas etmektedirler. Bu nedenle girişim olayının rahat gözlenmesi beklenir. Şekil 8.7c'de ise $\nu = 2$'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit *QPC* den geçemez. Ve sistemi boydan boya geçen bir sıkıştırılamaz şerit söz konusu değildir. Bu nedenle girişim gözlenmez ve sistem artık plato bölgesinde değildir.



Şekil 8.7. Şekil 8.6 da gösterilen e-MZI İnterferometresinin QPC'lerine -0.3 V gerilim uygulandığında meydana gelen doluluk çarpanının iki boyutta gösterimi. **a)** B=7.3 T **b)** B=7.9 T ve **c)** B=8.3 T dir. ile verilen doluluk çarpanı sağ taraftaki renk skalasında sarı renkle gösterilmektedir.

Şekil 8.6 da görülen geometride *QPC*'lere *-0.5 V* gerilim uygulayınca oluşan doluluk çarpanının iki boyutlu grafiği Şekil 8.8 de gösterilmektedir. Yukarıdaki paragrafta yaptığımız bütün tartışmalar Şekil 8.8 için de geçerlidir. Şekil 8.7 ve Şekil 8.8 arasındaki fark ise Şekil 8.7 de meydana gelen olaylar Şekil 8.8 de daha düşük magnetik alan değerlerinde meydana gelmektedir. Bunun nedeni ise kapılara uygulanan gerilim şiddeti arttırıldığında *QPC* arasındaki elektron yoğunluğu düştüğü için sistem plato bölgesine daha düşük magnetik alanda girmektedir.



Şekil 8.8. Şekil 8.6 da gösterilen e-MZI İnterferometresinin QPC'lerine -0.5 V gerilim uygulandığında meydana gelen doluluk çarpanının iki boyutta gösterimi. a) B=6.3 T b) B=7.1 T ve c) B=7.5 T dir. ile verilen doluluk çarpanı sağ taraftaki renk skalasında sarı ve ise mavi renkle gösterilmektedir.

Sonuç olarak, çeşitli nano yapılar için elektron dağılımını ve perdelenmiş potansiyeli elde edildi. Elektron dağılımını ve perdelenmiş potansiyeli iteratif bir yaklaşımla hesaplandı. Ayrıca iteratif yaklaşımın her adımında Poisson denklemini üç boyutlu bir grid üzerinde sayısal olarak çözüldü.

Kuantum Hall çubuğunda sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları ve konumları için pek çok hesap yapılmıştır. Burada sıkıştırılamaz şeritlerin magnetik alana, sıcaklığa ve farklı verici atom yoğunluğuna göre durumları incelendi. Kuantum Hall olayı tabanlı *e-MZI* de ise girişim olayı gözlendi. Girişim olayının magnetik alana olan ilişkisine baktık. Bir de *QPC*'lere farklı gerilim uygulandığında oluşan durumları incelendi. Bu tez çalışmasında kesme etkisini daha önce hiç kullanılmayan bir fonksiyonla simüle edildi. Simüle etmek için kullandığımız fonksiyon yarım bir elipstir. Daha önceki çalışmalarda genellikle yarım sinüs ve ya kosinüs fonksiyonları kullanılmıştır (Siddiki ve Marquardt 2007; Siddiki ve ark. 2008). Elde ettiğimiz sonuçların tümü literatürdeki deneysel ve teorik çalışmalarla uyum içerisindedir (Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Weitz ve ark. 2000; Ahlswede ve ark. 2001; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004). Yarım elips fonksiyonunun kesme etkisini daha önce kullanılan yarım sinüs ve ya kosinüs fonksiyonlarından daha iyi simüle ettiği kanısındayız.

Kuantum Hall olayı tabanlı aygıtlar girişim gibi ilginç fiziksel davranışlar göstermektedir. Bu tür aygıtların dedektör olarak kullanılması, kuantum bilgisayarlarda kuantum bitlerin saklanması ve kuantum bitlerin taşınması gibi geleceğe yönelik teknolojik alanlarda potansiyel uygulama alanına sahiptir. Bu tez çalışmasının bu tür uygulama alanları için yararlı olacağı kanısındayız.

KAYNAKLAR

Ahlswede, E., Weitz, P., Weis, J., & Klitzing, K. v. (2001). Hall potential profiles in the quantum Hall regime measured by a scanning force microscope. *Physica B: Condensed Matter 298:* , 562.

Anderson, R. L. (1962). Experiments On Ge-GaAs Heterojunctions. *Solid-State Electron* , 5: 341-344.

Apenko, S. M., & Lozovik, Y. E. (1985). The quantised Hall effect in strong magnetic fields. *Journal Phys. C: Solid State Phys.* 18: 1197-1203.

Bamham, K., & Vvedensky, D. (2001). *Low Dimensional Semiconductor Structure: Fundamentals and device applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bardeen, J., & Brattain, W. H. (1948). The Transistor, A Semiconductor Triode. *Physical Review* 74: 230-231.

Beenakker, C. W. (1990). Edge channels for the fractional quantum Hall effect. *Phys. Review Letters* 64: 216-219.

Chklovskii, D. B., Matveev, K. A., & Shklovskii, B. I. (1993). Ballistic conductance of interacting electrons in the quantum Hall regime. *Physical Review B* 47: 12605.

Chklovskii, D. B., Shklovskii, B. I., & Glazman, L. (1992). Electrostatic of edge channels. *Physical Review B* 46: 4026.

Cho, A. Y., & Arthur, J. R. (1975). Molecular Beam Epitaxy. *Progress in Solid State Chemistry* 10: 157-191.

Davies, J. H. (1988). Electronic states in narrow semiconducting wires near threshold. *Semiconductor Science and Technology* 3: 995.

Davies, J. H. (1999). *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors: An Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press.

Davies, J. H., Larkin, I. A., & Sukhoruvkov, E. V. (1995). Modeling the patterned two-dimensional electron gas. *Electrostatics. Journal of Applied Physics* 77: 4504.

Dereli, T., & Verçin, A. (2000). *Kuantum Mekaniği 2.* Ankara: Metu Press.

Fiori, G., Iannaccone, G., & Macucci, M. (2002). Modeling of Shallow Quantum Point Contacts Defined on AlGaAs/GaAs Heterostructures: The Effect of Surface States. *Journal of Computational Electronics* 1: 39.

Fishbane, P. M., Gasiorowicz, S., Thornton, T., & Yayına Hazırlayan Prof. Dr. Yalçın, C. (2003). *Temel Fizik Cilt II.* Ankara: Arkadaş Yayınevi.

Glazman, L. I., & Larkin, I. A. (1991). Lateral position control of an electron channel in a split-gate device. *Semiconductor Science and Technology* 6: 32.

Gülveren, B., Atav, Ü., & Tomak, M. (2005). Electronic properties of a large quantum dot at a finite temperature. *Physica E 28*: 482-490.

Güven, K., & Gerhardts, R. R. (2003). Self-Consistent Local Equilibrium Model for Density Profile and Distribution of Dissipative Currents in a Hall Bar Under Strong Magnetic Fields. *Physical Review B* 67: 115327.

Hall, E. H. (1879). On a New Action of The Magnet On a Electric Currents. *American Journal of Mathematics* 2: 287.

Hall, R. N., Fenner, G. E., Kingsley, J. D., Soltys, T. J., & Carlson, R. O. (1962). Coherent Light Emission From GaAs Junctions. *Physical Review Letters* 9: 366-368.

Heinonen, O., & Taylor, P. L. (1985). Current distributions in the quantum Hall effect. *Phys. Rev. B* 32: 633-639.

Hook, J. R., Hall, H. E., Çevirenler: Prof. Dr. Köksal, F., Prof. Dr. Altunbaş, M., Prof. Dr. Dinçer, M., & Yard. Doç. Dr. Başaran, E. (2006). *Katıhal Fiziği.* İstanbul: Literatür Yayınları.

Ihnatsenka, S., & Zozoulenko, I. V. (2008). Interacting electrons in the Aharonov-Bohm interferometer. *Physical Review B* 77: 235304.

Ihnatsenka, S., & Zozoulenko, I. V. (2006). Spin polarization of edge states and the magnetosubband structure in quantum wires. *Physical Review B* 73: 075331.

Jeckelmann, B., & Jeanneret, B. (2001). The Quantum Hall Effect as an Electrical Resistance Standart. *Rep. Prog. Phys.* 64: 1603-1655.

Kim, K. D., & Won, T. Y. (2005). 2D Quantum Mechanical Device Modeling and Simulation: Centre-Channel (CC) and Double-Gate (DG) Mosfet. *Molecular Simulation* 31: 825.

Klitzing, K. v., Dorda, G., & Pepper, M. (1980). New Method for High-Accracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Physical Review Letter* 45: 494.

Lai, M. C., Li, Z., & Lin, X. (2006). Fast Solvers for 3D Poisson Equations Involving Interfaces in a Finite or the Infinite Domain. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 191:106.

Lier, K., & Gerhardts, R. R. (1994). Self-Consistent Calculations of Edge Channels in Laterally Confined Two-Dimensional Electron System. *Physical Review B* 50: 7757.

MacDonald, A. H., & Streda, P. (1984). Quantized Hall effect and edege currents. *Phys. Rev. B* 29: 1616-1619.

Oh, J. H., & Gerhardts, R. R. (1997). Self-Consistent Thomas-Fermi Calculation of Potential and Current Distributions in a Two-Dimensional Hall Bar Geometry. *Physical Review B* 56: 13519.

Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M. E., & Keskin, Y. (2008). *Sayısal Analiz.* Konya: Dizgi Ofset.

Purcell, E. M. (1997). *Elektrik ve Magnetizma : Berkeley fizik dersleri.* (T. N. Durlu, & Y. Elerman, Çev.) Ankara: Bilim.

Shockleey, W. (1949). Bell System. *Technical Journal* 28: 435.

Siddiki, A., & Gerhardts, R. R. (2004). Incompressible Strips in Dissipative Hall Bars as Origin of Quantized Hall Plateaus. *Physical Review B* 70: 195335.

Siddiki, A., & Gerhardts, R. R. (2003). Thomas-Fermi-Poisson Theory of Screening for Laterally Confined Two Dimensional Electron Systems in Strong Magnetic Fields. *Physical Review B* 68: 125315.

Siddiki, A., Kavruk, A. E., Öztürk, T., Atav, Ü., Şahin, M., & Hakioğlu, T. (2008). The self-consistent calculation of the edge states at quantum Hall effect (QHE) based Mach-Zehnder interferometers (MZI). *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*.

Siddiki, A., & Marquardt, F., (2007). Self-consistent of the electron distribution near a quantum point contact in the integer quantum Hall effect. *Physical Review B* 75: 045325.

Speyer, G., Vasileska, D., & Goodnick, S. M. (2001). Efficient Poisson Equation Solvers for Large Scale 3D Simulations. *Nanotech 2001 Vol 1 (Technical Proceedings of the 2001 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems)* 1: 23. (www.cr.org).

Şahin, M. (2005) Yarıiletken kuantum nokta yapıların elektronik özelliklerinin incelenmesi *Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya

Trellakis, A., Galick, A. T., Pacelli, A., & Ravaioli, U. (1997). Iteration Scheme Fort he Solution of the Two-Dimensional Schrödinger-Poisson Equations in Quantum Structures. *Journal of Applied Physics* 81: 7880.

Tsui, D. C., Stormer, H. L., & Gossard, A. C. (1982). Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Physical Review Letters* 48: 1559.

Weichselbaum, A., & Ulloa, S. E. (2003). Potential landscapes and induced charges near metallic islands in three dimensions. *Physical Review E* 68: 056707.