T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BELİRLİ İNTEGRALLERİN SPLINE FONKSİYONLARLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI

Uçman AKTOP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 2010

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRLİ İNTEGRALLERİN SPLINE FONKSİYONLARLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI

Uçman AKTOP

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Haydar BULGAK

2010, 37 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Şaziye Yüksel

Prof. Dr. Haydar Bulgak

Doç. Dr. İsmail Ekincioğlu

Belirli integralin hesaplanması için kullanılan spline fonksiyonuna dayalı yöntemler analiz, fonksiyonel analiz ve uygulamalı matematikte çok iyi bilinmektedir. Bu çalışmada dördüncü ve beşinci dereceden spline fonksiyonlarla çalışılmıştır. Beşinci dereceden spline fonksiyonun probleme uygulanması verilmiştir. Ayrıca yaklaşım hatasının bir üst sınırı nitelikli olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: spline, kuartik spline, 5. dereceden spline

ABSTRACT

Master Thesis

APROXIMATE EVALUATION OF DEFINITE INTEGRALS WITH SPLINE FUNCTIONS

Uçman AKTOP

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Haydar BULGAK

2010, 37 Pages

Jury: Prof. Dr. Şaziye Yüksel

Prof. Dr. Haydar Bulgak

Doç. Dr. İsmail Ekincioğlu

The problem of definite integral evaluation is well known in the mathematics, especially in the analysis, functional analysis and applied mathematics. In this paper quartic and fifth degree spline functions are studied. In case of fifth degree spline function the approximation error is estimated.

Key Words: spline, quartic spline, fifth degree spline

ÖNSÖZ

Matematikte belirli integralin hesaplanması analiz, fonksiyonel analiz ve uygulamalı matematikte karşımıza sıkça çıkan problemdir. Bu problem matematik ve matematik eğitiminin de dayanak noktalarından birisidir.

Matematik eğitiminin temel kavramlarından birisi fonksiyonlardır. Fonksiyonları, ister grafik olarak ister diğer inceleme alanlarında olsun öğrenci öğrenmekte zorluklar çeker. Bu zorluğu aşmak için 1994'de Selçuk Üniversitesinde uygulamalı matematik araştırma merkezi kuruldu. Bu merkezin çatısı altında "Graphics Constructor" (Bulgak ve Eminov 2003) bilgisayar yazılımı hazırlandı. Bu yazılımla doğrusal, kuadratik, kübik spline fonksiyonların grafikleri çizimle birlikte tabloyla yaklaştırılan fonksiyonun belirli integrali de yaklaşık hesaplandı. Bu yazılımın dayanak noktası olan kübik spline fonksiyonu kullanarak, bir hiperbolik denklemi için Cauchy probleminin yaklaşık çözümünü elde edip, bu fonksiyonun grafiğini çizilmesi için bir bilgisayar yazılımı (Sinan 2008) hazırlandı. Benzer hiperbolik probleminin çözümü için kuartik spline fonksiyonlara dayalı yöntemler (Liu ve Liu 2010), (Liu ve ark. 2009) uygulandı. Bu çalışmada ise kuartik spline fonksiyonun uygulamalarda bazı zorluklar karşımıza getirebileceğini göstererek belirli integralin hesaplanması için beşinci dereceden spline fonksiyonun uygulaması verildi. Ayrıca yaklaşım hatasını "düzgün" (ikinci dereceden türevlerin sürekli olduğu) fonksiyonlar için ne kadar bu spline fonksiyonu yaklaştırıyor ve integralin ne kadar hatayla yaklaştırıyor gösterildi. Bu yaklaşımın üst sınırı nitelikli olarak verildi. Burada tüm çizilen grafikler "Graphics Constructor" (Bulgak ve Eminov 2003) bilgisayar yazılımla çizildi.

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardım eden Öğr. Gör. Dr. Ayşe Bulgak, Öğr. Gör. Dr. Oğuzer Sinan ve çalışma sırasında bana her konuda yardımı esirgemeyen Prof. Dr. Haydar Bulgak'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
1 GİRİŞ 1
2 KUARTİK SPLINE FONKSİYONLAR 13
3 BELİRLİ İNTEGRALİN KÜÇÜK ARALIKTA YAKLAŞIK HESAPLANMASI 23
4 BELİRLİ İNTEGRALİN KÜÇÜK ARALIKTA BEŞİNCİ DERECEDEN SPLİNE FONKSİYONLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI 26
5 BELİRLİ İNTEGRALİN BEŞİNCİ DERECEDEN SPLİNE FONKSİYONLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI 33
KAYNAKLAR 37

1 GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin bir klasik problemi; a,b kapalı aralığında

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

belirli integralinin hesaplanmasıdır. Bu konu (1984 Süer ve Demir), (1991 Cerit ve Canoğlu), (2002 Bayram), (2002 Tapramaz), (2003 Charpa ve Canale), (2003 Thomas) kitaplarda anlatılmıştır. Bu konuda bol literatür mevcuttur, burada birkaç tanesine yer verdik. Esas olarak Bilgisayarla Matematik Analiz (Aydın ve ark. 2003) kitabı ele alınmıştır.

Genel olarak $f(x)$ analitik olarak verilse bile istenilen I analitik olarak bulunmayabilir. Bu sebeple yaklaşık yöntemler kullanılması pratikte ağırlık kazandı. Burada en yaygın yöntem verilen kapalı aralığı parçalara bölerek, her bir alt aralıkta fonksiyon yerine ona yakın olan doğru veya diğer basit tipte eğri ile yaklaşmaktır (bu paraboller de olabilir). Kısmi basit eğrilerden oluşan fonksiyonlara literatürde spline fonksiyonları denir (2002 Tapramaz), (2003 Charpa ve Canale), (2003 Aydın ve ark.).

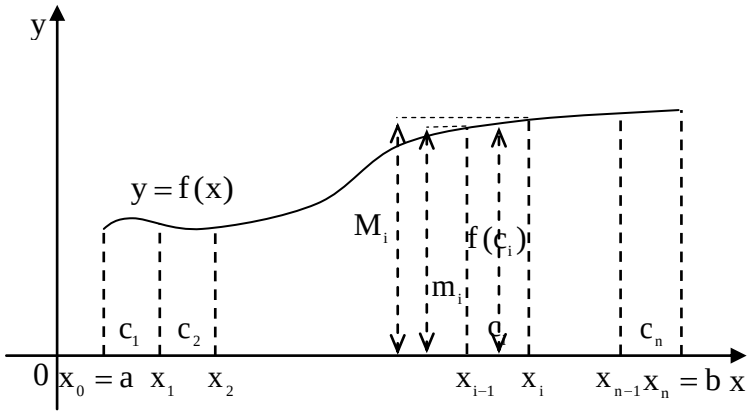
Belirli itegralin tanımını hatırlatalım. (Cerit 1991) $f(x)$ fonksiyonu a,b aralığında sürekli veya parça parça sürekli olsun. a,b aralığının seçimi bütünüyle keyfi x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{n-2}, x_{n-1} noktaları ile n adet alt aralığa ayıralım. $a = x_0$, $b = x_n$ yazalım. Bu alt aralıklardan ilkinde bir c_1, ikincisinde bir c_2, üçüncüsünde bir c_3, $\cdots$ ve nihayet sonuncusunda bir c_n noktası seçelim. $i = 0,1,2,\cdots,n-1$ için c_i noktalarının seçimi de, c_i noktası i-inci aralığa ait olmak kaydıyla bütünüyle keyfidir. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ yazıp

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (1.1)$$

sağlayacak tarzda alt aralıkların sayısını sınırsız olarak artıralım. Bir başka deyişle (1.1) de $\Delta x_i \to 0$ olmasını sağlayacak tarzda $n \to \infty$ için limite geçilir. Mevcut olması halinde bu limite $f(x)$ fonksiyonunun a dan b ye kadar Riemann anlamında belirli integrali denir ve

$$S_n = f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

yazılır.



Şekil 1.1 Alanın Alt Aralıklara Bölünmesi

Şekil 1.1'de bir fonksiyonu için n alt aralıklara tanım aralığın bölünmesi ve konunun daha kolay anlaşılması için verilmiştir.

Yaklaşık hesaplamalara ışık tutan literatürde iyi bilinen ortalama değer teoremi (Thomas 2003) aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.1. (Birinci Ortalama Değer Teoremi) Eğer $f(x)$ fonksiyonu, verilen a,b aralığında sürekli ise bu takdirde

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

sağlayan $a \le c \le b$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

Literatürde $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olan onun ilkel fonksiyonu $F(x)$ şeklinde gösterilir. Şöyle ki $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ dir.

Teorem 1.2. (İntegral Hesabının Temel Teoremi) (Cerit 1991) $f(x)$ fonksiyonu a,b de sürekli ve $F(x)$ fonksiyonu, $F'(x)=f(x)$ bağıntısını gerçekleyen herhangi bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

dir.

Problemimizin uygulanmasında ilkel fonksiyonun rolü yüksektir. Seçilen alt aralıkta verilen $f(x)$ fonksiyonu ilkel fonksiyonları kolay hesaplanan fonksiyonlardandır.

Yaklaşık hesaplamaların hata oranını tespit etmek için aşağıdaki teorem de elverişlidir (Aydın ve ark. 2003).

Teorem 1.3. (İkinci Ortalama Değer Teoremi) $f(x)$ fonksiyonu,

1) a,b kapalı aralığında türetilebilen bir fonksiyon

2) (a,b) açık aralığında sonlu ikinci dereceden türeve sahip

ise bu aralıktaki keyfi seçilen z noktası için

$$f(z)-f(a)\frac{z-b}{a-b}-f(b)\frac{z-a}{b-a}=\frac{f''(s)}{2}(z-a)(z-b)$$

olacak şekilde en az bir $s=s(z)$, $(a<s<b)$ değeri vardır.

Teorem 1.4. (Aydın ve ark. 2003) $f(x)$, verilen a,b aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $M=\sup_{a<s<b}|f'(s)|$ bir reel sayı ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)\right| \le \frac{M}{2}|b-a|^2,$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(b)(b-a)\right| \le \frac{M}{2}|b-a|^2$$

dır.

Kaynaklarda ve ders kitaplarında bile yer alan konular ilk 3 dereceden spline fonksiyonlardır. Bunları hatırlatalım.

(Cerit ve Canoğlu 1991) takip ederek birinci dereceden (doğrusal) spline fonksiyonun tanımını verelim.

n doğal sayı, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $y_0, y_1, \cdots, y_n$ reel sayılar olmak üzere (x_j, y_j), $j = 0,1,2,\cdots,n$ noktalarını sırasıyla doğru parçalarıyla bağlayalım. Elde edilen grafik birinci dereceden spline fonksiyonunun bir grafiğidir.

Aynı problemi tablo kullanarak tanıtabiliriz (bak. Tablo 1.1). Bu tabloda X ve Y gibi iki satır vardır. X kümesinde verilen $n+1$ elemandan oluşan $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ değerlerini içine alır. Y kümesinde verilen $n+1$ elemandan oluşan $y_0, y_1, \cdots, y_n$ reel sayılardır. Tablomuzda x_i elemanı y_i elemanının üstünde verildi.

X	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
Y	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Tablo 1.1

(Cheney ve Kincaid 1980) de birinci dereceden spline fonksiyonları karakterize eden özelikler aşağıdaki biçimde verilmiştir.

1. $y = f(x)$ fonksiyonun tanım kümesi $[x_0, x_n]$ aralığıdır.
2. $y = f(x)$ fonksiyonu $[x_0, x_n]$ aralığında süreklidir.

3. $\left[x_0, x_n\right]$ aralığının $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ biçimindeki her $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ alt aralıklarında da Y fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur.

Burada $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ noktalara "knots" (Cheney ve Kincaid 1980) noktalar denir. Çeviri kitapta (Chapra ve Canale 2003) bu noktalara düğüm noktaları denilmiştir. Ayrıca birinci dereceden spline fonksiyon gibi fonksiyonlara "picewise linear" (Maron 1984) fonksiyon denir.

Bir tablolu fonksiyon için iki farklı fonksiyon tanımlanabilir. Birisi interpolasyon fonksiyon; bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemi olarak tanımlanmaktadır (Bayram 2002). İkincisi ise extrapolasyon fonksiyon – verilen aralığın dışındaki değerlerini belirliyor.

M dereceli bir spline fonksiyonun $f^{(M+1)}(x) = 0$, $x_0 \le x \le x_1$ olduğu açıktır. Bu fonksiyonlar kaynaklarda bilinen (Volkov 1982) defekt kavramını hatırlatalım.

İlk M türevi sürekli ise bu spline fonksiyonun defekti sıfırdır.

İlk $M-1$ türevi sürekli ise spline fonksiyonu 1 defektli olur. Benzer şekilde spline fonksiyonun defekti 2, defekti 3, …., defekti $M-2$ olarak tanıtılabilir.

İlk 1 türevi sürekli ise spline fonksiyonun defekti $M-1$ dir.

Türev sürekli değil ise spline fonksiyonun defekti M dir.

Örnek 1.1.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2, \\ \frac{1}{4}x^2 + 1, & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

fonksiyonunun derecesi $M = 2$ ve sürekli türevin derecesi $m = 1$ olduğundan defekti $M - m = 1$ dir. Çünkü $f'(2-0) = 1$, $f'(2+0) = 1$, $f''(2-0) = 0$ ve $f''(2+0) = \frac{1}{4}$ dir.

Örnek 1.2.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1,\\ x, & 1\le x\le 2,\\ \frac{1}{2}x^2 & 2\le x\le 3. \end{cases}$$

fonksiyonunun derecesi $M=2$ ve sürekli türevin derecesi $m=0$ olduğundan defekti $M-m=2$ dir. Çünkü $x=1$ için $f'(1-0)=0$ ve $f'(1+0)=1$ olduğundan süreksizdir. $x=2$ için $f''(2-0)=1$ olduğundan süreksizdir.

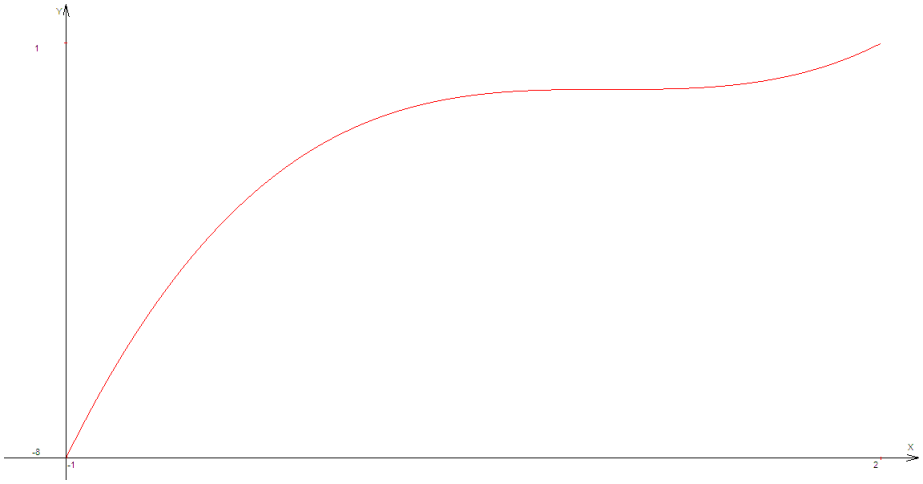
Örnek 1.3.

X	–1	0	1	2
Y	–8	–1	0	1

tablosuna göre

$$f(x)=\begin{cases} a_0^{(1)}x^3+a_1^{(1)}x^2+a_2^{(1)}x+a_3^{(1)}, & -1\le x\le 0,\\ a_0^{(2)}x^3+a_1^{(2)}x^2+a_2^{(2)}x+a_3^{(2)}, & 0\le x\le 1,\\ a_0^{(3)}x^3+a_1^{(3)}x^2+a_2^{(3)}x+a_3^{(3)}, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

için defektleri 3, 2, 1 ve 0 olan 3. dereceden spline fonksiyonları bulunabilir. Örneğin, 0 defektli spline fonksiyonu $f(x)=(x-1)^3$ dir. Derecesi 3 olan bu fonksiyonun sürekli türevinin derecesi $m=3$ olduğundan defekti $M-m=0$ dır. Çünkü elde edilen 3. dereceden polinom ve düğüm noktalarda istenildiği kadar sürekli türevi vardır. Grafiği de aşağıda verilmiştir.

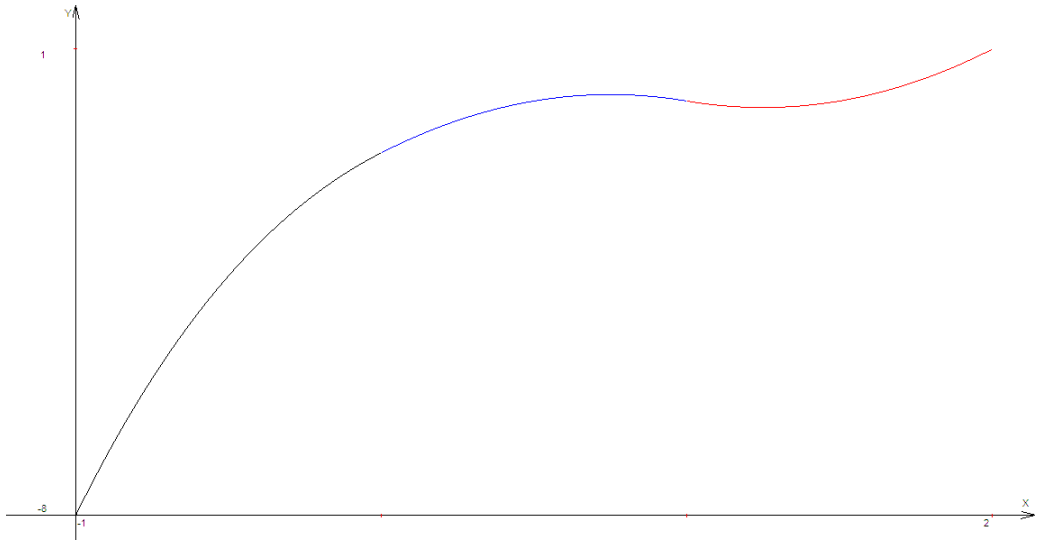


Şekil 1.2

Örnek 1.4. Örnek 1.3.'deki tabloya göre

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & -1\le x\le 0,\\ -2x^2+3x-1, & 0\le x\le 1,\\ 2x^2-5x+3, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

fonksiyonunun defekti 2 dir. Derecesi 3 olan bu fonksiyonun sürekli türevinin derecesi $m=1$ olduğundan defekti $M-m=2$ dir. Çünkü $x=0$ ve $x=1$ için $f'(0-0)=3$ ve $f'(0+0)=3$; $f''(0-0)=-6$, $f''(0+0)=-4$; $f'(1-0)=-1$, $f'(1+0)=-1$; $f''(1-0)=-4$ ve $f''(1+0)=4$ tür. Grafiği de aşağıda verilmiştir.

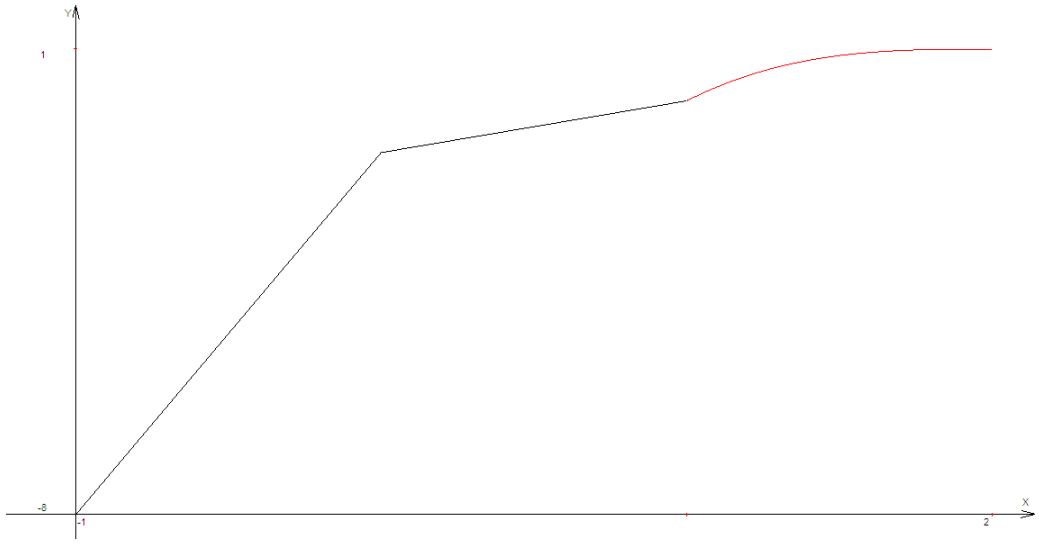


Şekil 1.3

Örnek 1.5. Örnek 1.3.'deki tabloya göre

$$f(x)=\begin{cases} 7x-1, & -1\le x\le 0,\\ x-1, & 0\le x\le 1,\\ (x-1)^3, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

fonksiyonunu defekti 3 tür. Derecesi 3 olan bu fonksiyonun sürekli türevinin derecesi $m=0$ olduğundan defekti $M-m=3$ dir. Çünkü $x=0$ ve $x=1$ için $f'(0-0)=7$ ve $f'(0+0)=1;\ f'(1-0)=-1,\ f'(1+0)=0$ dır. Grafiği de aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.4

İki spline fonksiyonunun birleştiği düğüm noktalarda eğim değişebilir. Eğer değişmiyorsa bu noktadaki türevin değerine spline fonksiyonun eğimi denir.

Doğrusal spline yanında burada ikinci dereceden (kuadratik) spline fonksiyonun tanımını özetle hatırlatalım. Bu konu literatürde iyi bilinmektedir.

Tablo 1.1'i tekrar ele alalım. Bu tablo ile tanımlanan interpolasyon fonksiyonu her $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, $i = 0,1,2,\cdots,n-1$ aralıkta bir parabol ise bu fonksiyona kuadratik spline fonksiyonu denir. İyi bilinmektedir ki Tablo 1.1'i sağlayan istenilen kadar çok kuadratik spline fonksiyonu vardır (Aydın ve ark. 2003).

Eğer Tablo 1.1'i genişletiriz; bir x_i noktasında interpolasyon fonksiyonun türevi sabitlensin. Örneğin $n=1$ için Tablo 1.2 verilsin.

X	x_0	x_1
Y	y_0	y_1
F	f_0	

Tablo 1.2

Tablo 1.2'yi sağlayan parabol;

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad x_0 \le x \le x_1;$$
$$y'(x_0) = f_0$$

biçiminde tanımlanırsa

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c;$$
$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c;$$
$$f_0 = 2ax_0 + b.$$

şartları sağlayan tek (a,b,c) üçlüsü vardır.

Ancak Tablo 1.1'i genişletilerek her düğüm noktası için türev sabitlenirse böyle paraboller olmayabilir (Aydın ve ark. 2003).

Tablo 1.1'den farklı ve daha geniş olan Tablo 1.3'i ele alalım.

X	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
Y	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n
F	f_0	f_1	f_2	…	f_{n-1}	f_n

Tablo 1.3

Tablo 1.3 ile tanımlanan interpolasyon fonksiyonu her $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, $i = 0,1,2,\cdots,n-1$ aralıkta bir üçüncü dereceden polinom fonksiyon ise bu fonksiyona kübik spline fonksiyonu denir.

$$y_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad x_i \le x \le x_{i+1};$$
$$y(x_i) = f_i$$

Burada tüm aralıkta en az bir x^3 katsayısı sıfırdan farklı olmak zorundadır.

Kübik spline fonksiyonu iyi bilinmektedir.

Spline fonksiyonun derecesi, eğim ve defekt kavramlarını karakterize eder. (Volkov 1982). Düğüm noktalardaki birinci türev sürekli ise bu noktalardaki türevin değerine spline fonksiyonun bu noktadaki eğimi denir (Volkov 1982). Bir Kübik Spline'nin düğüm noktalarda eğimleri sabit ise bu kübik spline fonksiyonuna "lokal" (yerel) spline fonksiyonu denir. Lokal kübik spline fonksiyonu var ve tektir. Bununla ilgili formüller (Volkov 1982) veya (Aydın ve ark. 2003) bulunabilir.

(Volkov 1982) bir a,b aralıkta ilk $k+1$ türevi sürekli ise lokal kübik spline fonksiyonun ne kadar "temsil" edebilir verilen fonksiyonu belirlendi. Bu Teoremde yakınlığını bir sabitinin varlığına dayanarak ifade edildi. Katsayı net bir sayı ile verilmedi. Bu da kaynaklarda genel olan durumu gösterir.

Spline fonksiyonlar diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözüm elde etmek için yaygın bir şekilde kullanılırlar;

Örneğin (Wang 2006) makalesinde lineer olmayan bir diferensiyel denklemin başlangıç problemi ele alındı. Bu problemin çözümü için üst ve alt sınırlar spline fonksiyonlara dayalı bir algoritma ile hesaplanır. Bu algoritmada, denklemin "kalan" kısmını kullanarak çözümlerin üst ve alt sınırları için monoton özelikleri incelendi. Burada, M. dereceden diferensiyel denklemin yaklaşık çözümlerinde, $t_{i-1} \le t \le t_i$ bölgesinde $M+1$. dereceden polinom ile birleştirilerek kabul edilmiştir.

(Rashidina ve ark. 2007) makalelerinde, fonksiyon katsayılı dördüncü dereceden homojen denkleminin iki noktalı sınır değer problemi ele alındı. Bu problemin çözümü için kübik spline fonksiyonlara dayalı bir metot tanıtıldı.

(Zhu ve Wang 2009) makalelerinde, kübik B-spline tanıtıldı. Bu splinelara dayalı olarak Burger denkleminin çözüm yöntemi önerildi. Tam çözümler ile elde edilen yaklaşık çözümler iyi uyum gösterdi.

(Zheng ve ark. 2004) makalelerinde fonksiyon katsayılı ikinci dereceden homojen olmayan denkleminin iki noktalı sınır değer problemi ele alındı. Bu problemi çözmek için spline fonksiyonlara ve Bezier kontrol noktalara dayalı bir algoritma tanıtıldı.

(Wang ve ark. 2008) makalelerinde, beşinci dereceden lineer olmayan iki noktalı sınır değer probleminin çözümünün üst ve alt sınırlarını hesaplamak için altıncı dereceden B-spline fonksiyonlara dayalı bir algoritma önerildi. Bu

algoritmada denklemin “kalan” kısmını kullanarak daha hassas yaklaşım elde edilebilir.

(Siddiqi ve ark. 2008) makalelerinde, fonksiyon katsayılı ikinci dereceden homojen olmayan bir denklemin iki noktalı sınır değer problemi ele alındı. Bu problemi çözmek için dördüncü dereceden bir spline metot tanıtıldı.

(Sinan 2008) doktora tezinde Dr. Ayşe Bulgak ve D. Eminov tarafından hazırlanan bilgisayar yazılımı, iki boyutlu splineları bilgisayarla çizen yazılıma genişletildi. Bu tezde bir hiperbolik denklemin çözüm için kübik spline fonksiyonu kullanıldı.

(Liu ve ark. 2009) makalelerinde yarı diskrete yönteminde, kuartik spline fonksiyonlar bir hiperbolik denklemin çözümü için kullanıldı.

(Liu ve Lui 2010) makalede kuartik spline fonksiyonlar bir boyutlu telegrafik denklemlerin çözümü için kullanıldı. Bu makalede uzay değişkene göre kuartik spline fonksiyonu ve zamana göre yamuklar kuralının bir genel halini kullanarak ikinci dereceden yeni fark şeması tanıtıldı. Yaklaşım hatası $O(k^2+h^3)$ olarak biliniyor. Makalede ise kontrol parametrelerin seçimle yaklaşım hatasının $O\ k^3+h^3$ olduğu gösterildi.

Bu tezde ise bir integral hatasının O’ya göre değil hatanın verilen fonksiyonun üçüncü dereceden türeve bağlı olarak yaklaşım hatasının nitelikli bir üst sınırı verildi.

2 KUARTİK SPLINE FONKSİYONLAR

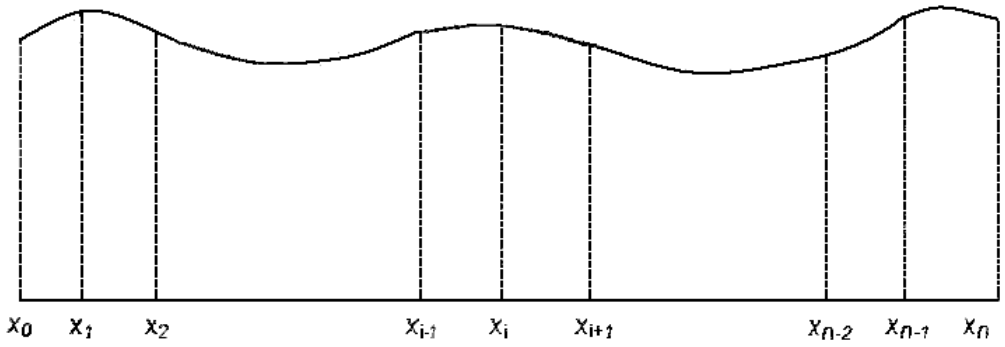
Tablo 1.1'i tekrar ele alalım. Bu tablo ile tanımlanan interpolasyon fonksiyonu her $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ aralıkta bir dördüncü dereceden bir polinom ise bu fonksiyona dördüncü dereceden (kuartik) spline fonksiyonu denir.

Tablo 1.1'den farklı ve daha geniş olan Tablo 2.1'i ele alalım.

X	x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
Y	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n
F	f_0	f_1	f_2	…	f_{n-1}	f_n

Tablo 2.1

Kuartik spline fonksiyonun grafiğinin şeklini Şekil 2.1 ile verebiliriz.



Şekil 2.1

Şimdi $n=1$ alarak Tablo 2.1'in özel halini ele alalım. Aranan dördüncü dereceden spline fonksiyon

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad x_0 \le x \le x_1$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun katsayıları a reel sayısına bağlı olarak

$$b = -\frac{2}{x_1 - x_0}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{f_1 + f_0}{2}\right) - 2a\frac{x_1^3 - x_1x_0^2 - x_0x_1^2 + x_0^3}{x_1 - x_0},$$

$$c = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - f_0\right)\frac{1}{x_1 - x_0} - a\frac{x_1^3 + x_1x_0^2 + x_0x_1^2 - 3x_0^3}{x_1 - x_0} - b\frac{x_1^2 + x_1x_0 - 2x_0^2}{x_1 - x_0},$$

$$d = f_0 - 4ax_0^3 - 3bx_0^2 - 2cx_0,$$

$$e = y_0 - ax_0^4 - bx_0^3 - cx_0^2 - dx_0$$

yazılabilir.

Örnek olarak Tablo 2.2'ye karşılık gelen 3 farklı kuartik polinom fonksiyonların grafiklerini Şekil 2.2 ile gösterelim. (Bu şekil "Graphics Constructor" yazılımı ile yapıldı.)

Örnek olarak Tablo 2.2'yi alalım.

X	–1	1
Y	–1	1
F	–11	13

Tablo 2.2

Burada $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $y_0 = -1$, $y_1 = 1$, $f_0 = -11$, $f_1 = 13$. Dolayısıyla $a \in \mathbb{R}$ parametreye bağlı olarak $y(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $-1 < x < 1$ interpolasyon polinom katsayıları

$$b = 0, \quad c = 6 - 2a, \quad d = 1, \quad e = a - 6$$

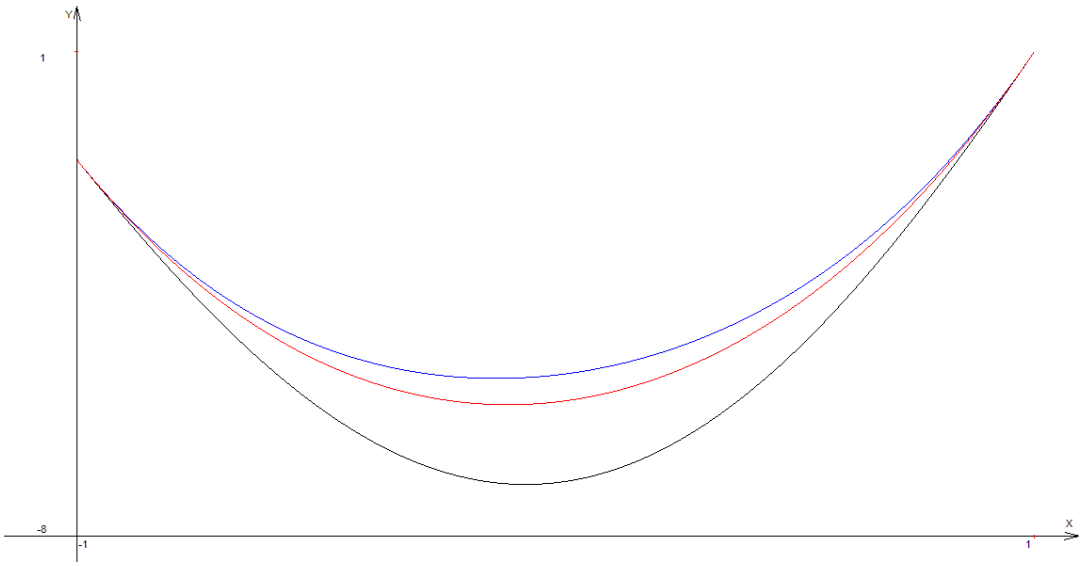
dır. Tablo 2.2'ye karşılık gelen $-1{,}1 \times -8{,}1$ dikdörtgeni içinde 3 farklı polinomların $a=-1$, $a=\frac{1}{2}$ ve $a=1$ için

$$g_1(x) = -x^4 + 8x^2 + x - 7,$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^2 + x - \frac{11}{2},$$

$$g_3(x) = x^4 + 4x^2 + x - 5$$

dir. Graphics Constructor ile çizilen grafikler Şekil 2.2'de verildi.



Şekil 2.2

Kuartik spline fonksiyonu için bir kısıtlama getirelim; sol noktadaki ikinci türevi belli bir sayı olsun. Bu takdirde, Tablo 1.1 yerine genişletilmiş Tablo 2.3 $(n=1)$ olsun. Burada G satırındaki ilk eleman spline fonksiyonun x_0 noktasındaki sağdan ikinci türevinin değeri olsun.

X	x_0	x_1
Y	y_0	y_1
F	f_0	f_1
G	g_0	

Tablo 2.3

Tablo 2.3'e göre kuartik polinom

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad x_0 \le x \le x_1$$

biçiminde tanımlanırsa katsayıları tek ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$a = -\frac{3\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{f_1 + f_0}{2}\right) + \frac{x_1 - x_0}{2}\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - g_0\right)}{(x_1 - x_0)^3},$$

$$b = \frac{1}{3(x_1 - x_0)}\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - g_0\right) - \frac{4a}{3} \cdot \frac{x_1^2 + x_0 x_1 - 2x_0^2}{x_1 - x_0},$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - 2a(x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2) - \frac{3b}{2}(x_1 + x_0),$$

$$d = f_0 - 4ax_0^3 - 3bx_0^2 - 2cx_0,$$

$$e = y_0 - ax_0^4 - bx_0^3 - cx_0^2 - dx_0.$$

Örnek olarak aşağıdaki Tablo 2.4, Tablo 2.5 ve Tablo 2.6 ile verilenleri sağlayan değerler alınırsa

X	0	1
Y	0	1
F	0	4
G	0	

Tablo 2.4

X	0	1
Y	2	3
F	–2	1
G	–2	

Tablo 2.5

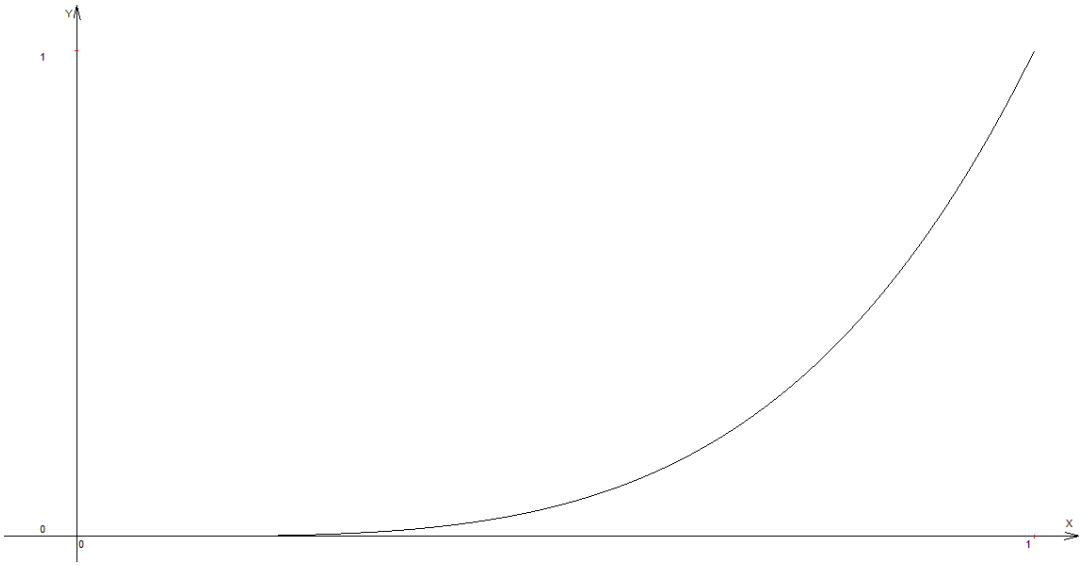
X	0	1
Y	3	–5
F	1	–3
G	–2	

Tablo 2.6

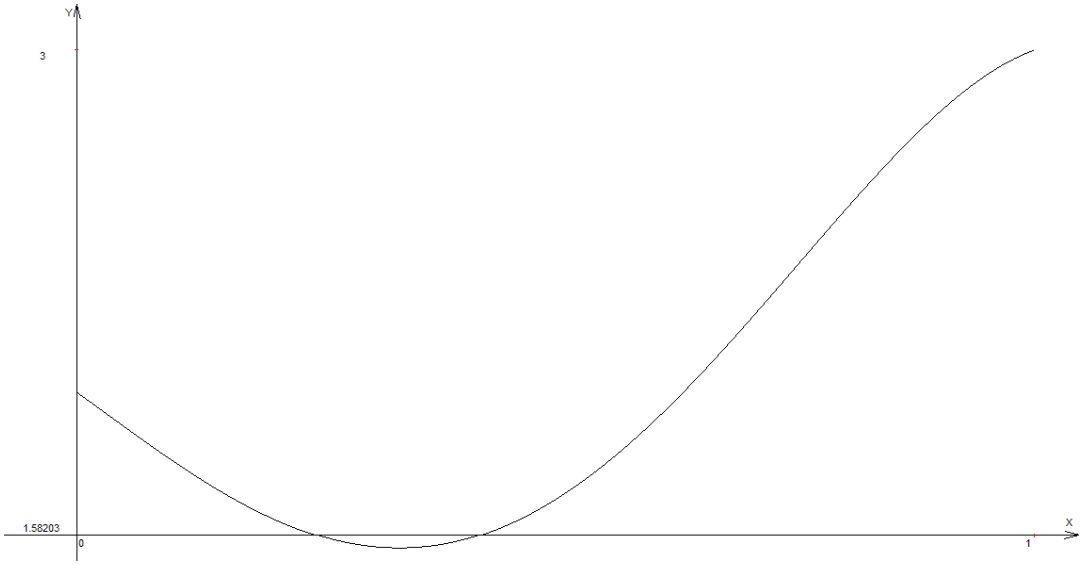
aşağıdaki dördüncü dereceden fonksiyonlar elde edilir:

$$f_1(x) = x^4,$$
$$f_2(x) = -7x^4 + 11x^3 - x^2 - 2x - 2,$$
$$f_3(x) = 22x^4 - 30x^3 - x^2 + x + 3.$$

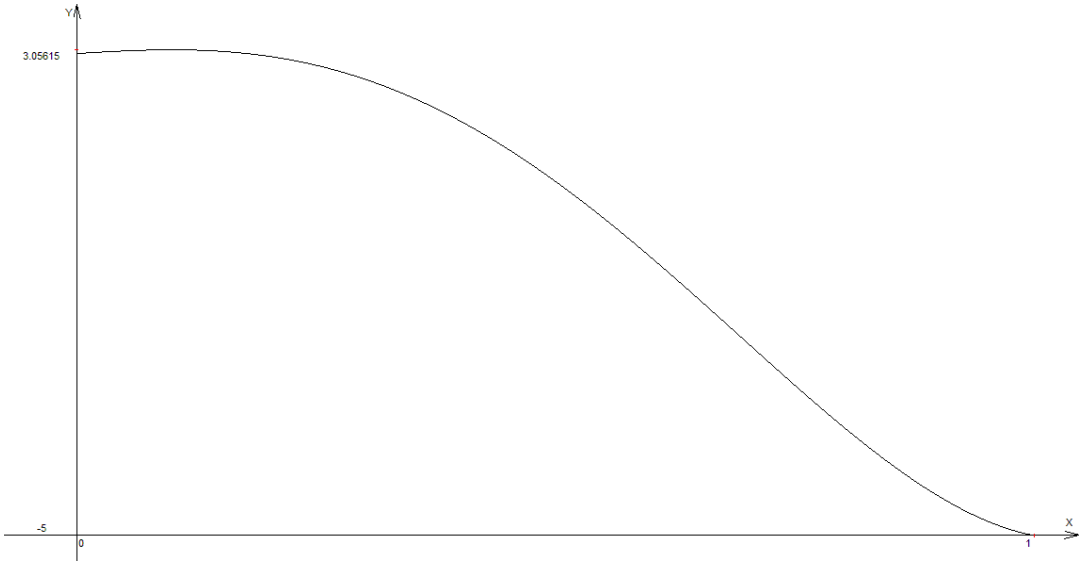
Elde edilen bu kuartik spline fonksiyonların grafikleri Graphics Constructor ile çizilirse sırasıyla Şekil 2.3, Şekil 2.4 ve Şekil 2.5 oluşmaktadır.



Şekil 2.3



Şekil 2.4



Şekil 2.5

Böylece tek bir çözüm elde edilir.

Dolayısıyla, Tablo 2.3 ile tanımlanan kuartik spline fonksiyonun çözümünün tek olduğu ispatlanmış oldu.

Sonuç 2.1. Tablo 2.3 ile tanımlanan ve

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$
$$y'(x_0) = f_0, \quad y'(x_1) = f_1,$$
$$y''(x_0) = g_0,$$

şartlarını sağlayan kuartik polinom

$$y(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad x_0 \le x \le x_1$$

vardır ve tektir.

Kuartik spline fonksiyonu için ikinci kısıtlama daha getirelim; sağ noktadaki ikinci türevi belli bir sayı olsun. Bu takdirde, Tablo 1.1 yerine genişletilmiş Tablo 2.7 $(n = 1)$ olsun. Burada G satırındaki ikinci eleman spline fonksiyonun x_1 noktasındaki soldan ikinci türevinin değeri olsun.

Benzer şekilde Sonuç 2.2 ispatlanabilir.

X	x_0	x_1
Y	y_0	y_1
F	f_0	f_1
G		g_1

Tablo 2.7

Sonuç 2.2. Tablo 2.7 ile tanımlanan ve

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$
$$y'(x_0) = f_0, \quad y'(x_1) = f_1,$$
$$y''(x_1) = g_1$$

şartlarını sağlayan kuartik polinom

$$y(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad x_0 \le x \le x_1$$

vardır ve tektir.

Sonuç 2.1 ve sonuç 2.2 ye göre Sonuç 2.3 doğal olarak yazılabilir.

Sonuç 2.3. Bir k; 0, n arasındaki bir tam sayı için keyfi seçilen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, y_i , f_i , $j = 0,1,2,\cdots,n$ ve g_k reel sayılar olmak üzere Tablo 2.8'e uygun olarak;

$$f(x_j) = y_j,\ f'(x_j) = f_j,\ j = 0,1,2,\cdots,n;$$
$$f''(x_k) = g_k$$

bulunan ve a, b aralıkta tanımlı olan $f(x)$ kuartik spline fonksiyonu;

$$f(x) = a_j x^4 + b_j x^3 + c_j x^2 + d_j x + e_j, \quad x_j \le x \le x_{j+1}, \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

var ve tektir.

X	x_0	x_1	…	x_k	…	x_{n-1}	x_n
Y	y_0	y_1	…	y_k	…	y_{n-1}	y_n
F	f_0	f_1	…	f_k	…	f_{n-1}	f_n
G				g_k			

Tablo 2.8

Kuartik spline fonksiyonu için bir üçüncü kısıtlama daha değerlendirelim; düğüm noktalarda ikinci türevleri sabitlenirse ne olur. Bu durumda bazen çözüm olmadığını bir örnekle gösterelim. Tablo 2.8'e uygun bir

X	0	1
Y	–10	–2
F	14	0
G	0	–1

Tablo 2.9

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad 0 \le x \le 1$$

kuartik spline fonksiyonu bulmaya çalışalım;

$$f(0) = -10,\ f(1) = -2,\ f'(0) = 14,\ f'(1) = 0,\ f''(0) = 0,\ f''(1) = -1.$$

Böyle bir fonksiyonun olmadığı kolayca kontrol edilebilir.

Fakat bu da matematikte lineer denklem teorisinde çözüm için alternatif olarak bilinen bazı şartlarda istenilen kadar çok dördüncü dereceden spline fonksiyonu bulunabilir.

Bu sonucun basit uygulaması aşağıdadır.

Sonuç 2.4. Bir k; 0, n arasındaki bir tam sayı için keyfi seçilen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, y_i , f_i , $j = 0,1,2,\cdots,n$ ve g_k reel sayılar olmak üzere Tablo 2.8'e uygun olarak;

$$f(x_j) = y_j,\ f'(x_j) = f_j,\ j = 0,1,2,\cdots,n;$$

$$f''(x_k) = g_k$$

bulunan ve a,b aralıkta tanımlı olan $f(x)$ kuartik spline fonksiyonu;

$$f(x) = a_j(x-x_j)^4 + b_j(x-x_j)^3 + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j) + e_j,$$
$$x_j \le x \le x_{j+1}, \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

var ve tektir.

Sonuç 2.5. $x_0 < x_1,\ y_0, y_1, f_0, f_1, g_0$ reel sayılar olmak üzere

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1,$$
$$P'(x_0) = f_0, \quad P'(x_1) = f_1,$$
$$P''(x_0) = g_0,$$

şartlarını sağlayan

$$P(x) = a(x-x_0)^4 + b(x-x_0)^3 + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0) + e, \quad x_0 \le x \le x_1$$

kuartik polinom var ve tektir. Ayrıca

$$a = \frac{1}{(x_1-x_0)^4}\left[-3(y_1-y_0) + (2f_0+f_1)(x_1-x_0) + \frac{g_0}{2}(x_1-x_0)^2\right],$$
$$b = \frac{1}{(x_1-x_0)^3}\left[4(y_1-y_0) - (3f_0+f_1)(x_1-x_0) - g_0(x_1-x_0)^2\right],$$
$$c = \frac{g_0}{2}, \qquad d = f_0, \qquad e = y_0$$

dir.

3 BELİRLİ İNTEGRALİN KÜÇÜK ARALIKTA YAKLAŞIK HESAPLANMASI

$[x_0, x_1]$ kapalı aralığında sürekli ve ilk 3 türevi de sürekli olan bir F(x) fonksiyonu ele alalım. F(x) fonksiyonu verilen aralıkta bir P(x) kuartik spline fonksiyonla ne kadar iyi temsil edildiğini araştıralım.

Verilere göre Tablo 3.1'i oluşturalım.

X	x_0	x_1
Y	$F(x_0)$	$F(x_1)$
F	$F'(x_0)$	$F'(x_1)$
G	$F''(x_0)$	

Tablo 3.1

Kısa yazmak için aşağıdaki simgeleri kullanalım;

$$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1,$$
$$F'(x_0) = f_0, \quad F'(x_1) = f_1,$$
$$F''(x_0) = g_0.$$

Sonuç 2.5.'e göre istenilen P(x) polinom

$$P(x) = a(x - x_0)^4 + b(x - x_0)^3 + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0) + e, \quad x_0 \le x \le x_1;$$

$$a = \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[-3(y_1 - y_0) + (2f_0 + f_1)(x_1 - x_0) + \frac{g_0}{2}(x_1 - x_0)^2\right],$$

$$b = \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[4(y_1 - y_0) - (3f_0 + f_1)(x_1 - x_0) - g_0(x_1 - x_0)^2\right], \qquad (3.1)$$

$$c = \frac{g_0}{2}, \qquad d = f_0, \qquad e = y_0$$

dir.

Küçük aralıkta belirli integralin yaklaşık hesaplanmasındaki hatanın üst sınırını aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} P(x)) - F(x)\ dx\right| \le \frac{7}{2}M(x_1 - x_0)^4.$$

Bir örnek alalım. $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$ integrali için integral altındaki fonksiyon yerine ona yakın kuartik polinomu alınırsa bu takdirde Tablo 3.2 oluşturulabilir.

X	1	2
F	0	$\frac{\ln 2}{2}$
F'	1	$\frac{1-\ln 2}{4}$
F''	–1	

Tablo 3.2

Bu integral için $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = 0,24023$ elde edilir. Alınan bu tablo ile tanımlanan kuartik polinomun katsayıları $a = 0,53699$, $b = -2,83839$, $c = 4,79321$, $d = -2,21923$ ve $e = -0,27259$ dir ve aranan yaklaşık integral değeri ise 0,26813 olarak bulunur.

Kuartik spline fonksiyonlar (Liu ve ark. 2009) ve (Liu ve Liu 2010) diferensiyel denklemin yaklaşık çözümü için kullanıldı. Uygulamalarda tüm hataları hesaba katmak için kuartik spline fonksiyonların bu çalışmada tartışılan variyantı elverişsizdir. Nedeni ise sadece bir noktada ikinci türev sabitlendi. Kalan noktalarda yöntem kendisi elde edilen türevlere katlanmak zorundadır. Bizim açımızdan bu bir eksikliktir. Yaklaşım hata analizi yaparken biriktirilen hataları da hesaba katmak zorundayız. Bu eksiklik beşinci dereceden spline fonksiyonlar için yoktur. Sonraki bölümlerde bu konu ele alındı.

4 BELİRLİ İNTEGRALİN KÜÇÜK ARALIKTA BEŞİNCİ DERECEDEN SPLİNE FONKSİYONLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI

$[x_0, x_1]$ aralığında özel olarak beşinci dereceden spline fonksiyonu bulunabilir. Sonuç 4.1 doğru olur;

Sonuç 4.1. $x_0 < x_1$, $y_0, y_1, f_0, f_1, g_0, g_1$ reel sayılar olmak üzere

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1,$$
$$P'(x_0) = f_0, \quad P'(x_1) = f_1,$$
$$P''(x_0) = g_0, \quad P''(x_1) = g_1,$$

şartlarını sağlayan

$$P(x) = a(x-x_0)^5 + b(x-x_0)^4 + c(x-x_0)^3 + \alpha(x-x_0)^2 + \beta(x-x_0) + \gamma, \; x_0 \le x \le x_1$$

beşinci dereceden polinom var ve tektir. Ayrıca

$$a = \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[y_1 - y_0 - \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{2}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \frac{1}{6}g_1(x_1-x_0)^2 \right],$$

$$b = \frac{1}{(x_1-x_0)^4}\left[-5(y_1-y_0) + \left(\frac{8}{3}f_0 + \frac{7}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \left(\frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{3}g_1\right)(x_1-x_0)^2 \right],$$

$$c = \frac{1}{(x_1-x_0)^3}\left[5(y_1-y_0) - \left(\frac{10}{3}f_0 + \frac{5}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \left(\frac{1}{6}g_1 - g_0\right)(x_1-x_0)^2 \right],$$

$$\alpha = \frac{g_0}{2}, \qquad \beta = f_0, \qquad \gamma = y_0$$

dir.

$[x_0, x_1]$ kapalı aralığında sürekli ve ilk 3 türevi de sürekli olan bir $F(x)$ fonksiyonu ele alalım. $F(x)$ fonksiyonu verilen aralıkta bir $P(x)$ beşinci dereceden spline fonksiyonla ne kadar iyi temsil edildiğini araştıralım.

Verilere göre Tablo 4.1'i oluşturalım.

X	x_0	x_1
Y	$F(x_0)$	$F(x_1)$
F	$F'(x_0)$	$F'(x_1)$
G	$F''(x_0)$	$F''(x_1)$

Tablo 4.1

Kısaca yazmak için aşağıdaki simgeleri kullanalım;

$$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1,$$
$$F'(x_0) = f_0, \quad F'(x_1) = f_1,$$
$$F''(x_0) = g_0, \quad F''(x_1) = g_1.$$

Sonuç 4.1.'e göre istenilen P(x) polinomu

$$P(x) = a(x-x_0)^5 + b(x-x_0)^4 + c(x-x_0)^3 + \alpha(x-x_0)^2 + \beta(x-x_0) + \gamma, \; x_0 \le x \le x_1;$$

$$a = \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[y_1 - y_0 - \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{2}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \frac{1}{6}g_1(x_1-x_0)^2 \right]$$

$$b = \frac{1}{(x_1-x_0)^4}\left[-5(y_1-y_0) + \left(\frac{8}{3}f_0 + \frac{7}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \left(\frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{3}g_1\right)(x_1-x_0)^2 \right] \qquad (4.1)$$

$$c = \frac{1}{(x_1-x_0)^3}\left[5(y_1-y_0) - \left(\frac{10}{3}f_0 + \frac{5}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \left(\frac{1}{6}g_1 - g_0\right)(x_1-x_0)^2 \right]$$

$$\alpha = \frac{g_0}{2}, \qquad \beta = f_0, \qquad \gamma = y_0$$

dir.

Kısaca hedefimiz $|P(x)-F(x)|$, $x_0 \le x \le x_1$ üst sınırını hesaplamaktır.

Kalan kısmı Lagrange formunda olan Taylor formülü (Bronstein ve Semendyayev 1986)

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + F''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + F'''(z_0)\frac{(x-x_0)^3}{6}$$

$$x_0 < z_0 = z_0(x) < x_1$$

ele alalım. Seçilen simgelere göre

$$F(x) = y_0 + f_0(x-x_0) + \frac{g_0}{2}(x-x_0)^2 + F'''(z_0)\frac{(x-x_0)^3}{6}$$

dir. Aralığın son noktasında $(z = z_0(x_1))$

$$y_1 = y_0 + f_0(x_1-x_0) + \frac{g_0}{2}(x_1-x_0)^2 + F'''(z)\frac{(x_1-x_0)^3}{6} \qquad (4.2)$$

olduğu açıktır.

Benzer şekilde her bir x için bir $h_0 = h_0(x) \in (x_0, x)$ vardır ve şöyle ki

$$F'(x) = F'(x_0) + F''(x_0)(x-x_0) + F'''(h_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

veya seçilen simgelerimize göre $(h = h_0(x_1))$

$$f_1 = f_0 + g_0(x_1-x_0) + F'''(h)\frac{(x_1-x_0)^2}{2} \qquad (4.3)$$

dir.

Benzer şekilde her bir x için bir $w_0 = w_0(x) \in (x_0, x)$ vardır ve şöyle ki

$$F''(x) = F''(x_0) + F'''(w_0)(x-x_0)$$

veya seçilen simgelerimize göre $(w = w_0(x_1))$

$$g_1 = g_0 + F'''(w)(x_1 - x_0) \tag{4.4}$$

dir.

$x_0 \le x \le x_1$ aralığında

$$\begin{aligned} P(x) - F(x) &= a(x-x_0)^5 + b(x-x_0)^4 + c(x-x_0)^3 + \alpha(x-x_0)^3 + \beta(x-x_0) + \gamma - F(x) \\ &= a(x-x_0)^5 + b(x-x_0)^4 + c(x-x_0)^3 + 0.5g_0(x-x_0)^2 + f_0(x-x_0) + y_0 \\ &\quad -F'''(z)/6(x-x_0)^3 - 0.5g_0(x-x_0)^2 - f_0(x-x_0) - y_0 \\ &= -F'''(z)/6(x-x_0)^3 + a(x-x_0)^5 + b(x-x_0)^4 + c(x-x_0)^3 \end{aligned} \tag{4.5}$$

dir.

İlk önce $|a|$'nın bir üst sınırını bulalım. (4.1)'e göre

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[y_1 - y_0 - \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{2}{3}f_1\right)(x_1-x_0) + \frac{1}{6}g_1(x_1-x_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[y_1 - y_0 - f_0(x_1-x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1-x_0)^2 \right] \\ &\qquad + \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[\frac{2}{3}(f_0-f_1)(x_1-x_0) + \left(\frac{1}{2}g_0 + \frac{1}{6}g_1\right)(x_1-x_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[y_1 - y_0 - f_0(x_1-x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1-x_0)^2 \right] \\ &\qquad + \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[\frac{2}{3}\ (f_0-f_1) + g_0(x_1-x_0)\ (x_1-x_0) + \frac{1}{6}(-g_0+g_1)(x_1-x_0)^2 \right] \end{aligned}$$

(4.2)-(4.4) kullanarak

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(x_1-x_0)^5}\left[-\frac{F'''(z)}{6}(x_1-x_0)^3 - \frac{1}{3}F'''(h)(x_1-x_0)^3 + \frac{1}{6}F'''(w)(x_1-x_0)^3 \right] \\ &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2}\left[-\frac{F'''(z)}{6} - \frac{F'''(h)}{3} + \frac{F'''(w)}{6} \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. F fonksiyonunun üçüncü türevi sürekli olduğuna göre verilen aralıkta bu fonksiyonun mutlak değerinin maksimumu vardır ve M ile gösterilsin. Bu takdirde

$$|a| \le \frac{2}{3}\frac{M}{(x_1 - x_0)^2}$$

olduğu açıktır.

Şimdi $|b|$ 'nin bir üst sınırını bulalım. (4.1)'e göre

$$b = \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[-5(y_1 - y_0) + \left(\frac{8}{3}f_0 + \frac{7}{3}f_1\right)(x_1 - x_0) + \left(\frac{1}{2}g_0 - \frac{1}{3}g_1\right)(x_1 - x_0)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[-5\left\{ y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1 - x_0)^2 \right\}\right]$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[\frac{7}{3}(f_1 - f_0)(x_1 - x_0) - \left(2g_0 + \frac{1}{3}g_1\right)(x_1 - x_0)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[-5\left\{ y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1 - x_0)^2 \right\}\right]$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[\frac{7}{3}\ f_1 - f_0 - g_0(x_1 - x_0)\ \ (x_1 - x_0) + \frac{1}{3}(g_0 - g_1)(x_1 - x_0)^2 \right]$$

(4.2)-(4.4) kullanarak

$$b = \frac{1}{(x_1 - x_0)^4}\left[-\frac{5F'''(z)}{6}(x_1 - x_0)^3 + \frac{7}{6}F'''(h)(x_1 - x_0)^3 - \frac{1}{3}F'''(w)(x_1 - x_0)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0}\left[-\frac{5F'''(z)}{6} + \frac{7F'''(h)}{6} + \frac{F'''(w)}{3} \right]$$

olur. Dolayısıyla

$$|b| \le \frac{7}{3}\frac{M}{x_1 - x_0}$$

dir.

Şimdi $|c|$'nin bir üst sınırını bulalım. (4.1)'e göre

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[5(y_1 - y_0) - \left(\frac{10}{3}f_0 + \frac{5}{3}f_1\right)(x_1 - x_0) + \left(\frac{1}{6}g_1 - g_0\right)(x_1 - x_0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[5\left\{y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1 - x_0)^2\right\}\right]$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[\frac{5}{3}(f_0 - f_1)(x_1 - x_0) + \left(\frac{1}{6}g_1 + \frac{3}{2}g_0\right)(x_1 - x_0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[5\left\{y_1 - y_0 - f_0(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}g_0(x_1 - x_0)^2\right\}\right]$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[\frac{5}{3}\ f_0 - f_1 + g_0(x_1 - x_0)\ \ (x_1 - x_0) + \frac{1}{6}(g_1 - g_0)(x_1 - x_0)^2\right]$$

(4.2)-(4.4) kullanarak

$$c = \frac{1}{(x_1 - x_0)^3}\left[\frac{5F'''(z)}{6}(x_1 - x_0)^3 - \frac{5}{3}F'''(h)(x_1 - x_0)^3 + \frac{1}{3}F'''(w)(x_1 - x_0)^3\right]$$

$$= \frac{5F'''(z)}{6} - \frac{5F'''(h)}{3} + \frac{F'''(w)}{3}$$

olur. Dolayısıyla

$$|c| \le \frac{17}{6}M$$

dir.

(4.5)'e göre $x_0 \le x \le x_1$ aralıkta

$$\begin{aligned}
|P(x)-F(x)| &\le \frac{1}{6}M(x-x_0)^3 + |a|(x-x_0)^5 + |b|(x-x_0)^4 + |c|(x-x_0)^3 \\
&\le 3M(x-x_0)^3 + |a|(x-x_0)^5 + |b|(x-x_0)^4 \\
&\le \left[3M + \frac{2}{3}M\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} + \frac{7}{3}M\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right](x-x_0)^3 \\
&\le 6M(x-x_0)^3
\end{aligned}$$

dir.

Elde edilen eşitsizlikleri kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x_1}(P(x)-F(x))dx\right| &\le \int_{x_0}^{x_1}|P(x)-F(x)|dx \\
&\le \int_{x_0}^{x_1}6M(x-x_0)^3dx \\
&= \frac{3}{2}M(x_1-x_0)^4
\end{aligned}$$

Bu ise küçük aralıkta belirli integralin yaklaşık hesaplamasındaki hatanın üst sınırıdır.

5 BELİRLİ İNTEGRALİN BEŞİNCİ DERECEDEN SPLİNE FONKSİYONLA YAKLAŞIK HESAPLANMASI

a,b kapalı aralığında sürekli ve ilk 3 türevi de sürekli olan bir $F(x)$ fonksiyonu alındığında

$$I = \int_a^b F(x)dx \tag{5.1}$$

belirli integralini yaklaşık hesaplamak için farklı yöntemler kullanılmaktadır.

Burada Beşinci Derece Spline Fonksiyonla (5.1) İntegral Hesaplanması problemini ele alalım. Bu yöntemin başarı oranı düğüm noktalarının seçimine ve F fonksiyonun a,b aralıkta türev özelliklerine bağlıdır.

X	x_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
Y	$F(x_0)$	$F(x_1)$	…	$F(x_{n-1})$	$F(x_n)$
F	$F'(x_0)$	$F'(x_1)$	…	$F'(x_{n-1})$	$F'(x_n)$
G	$F''(x_0)$	$F''(x_1)$	…	$F''(x_{n-1})$	$F''(x_n)$

Tablo 5.1

a,b aralığında $n+1$ adet düğüm noktaları seçilsin;

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tablo 2.7'ye uygun olarak;

$$f(x_j) = F(x_j),\quad f'(x_j) = F'(x_j),\quad f''(x_j) = F''(x_j),\quad j = 0,1,2,\cdots,n$$

bulunan ve a,b aralıkta tanımlı olan $f(x)$ beşinci dereceden spline fonksiyonu;

$$f(x)=a_j(x-x_j)^5+b_j(x-x_j)^4+c_j(x-x_j)^3+\alpha_j(x-x_j)^2+\beta_j(x-x_j)+\gamma_j,$$
$$x_j\le x\le x_{j+1};\quad j=0,1,2,\cdots,n-1$$

var ve tektir. Elde edilen spline fonksiyonun I_n belirli integrali

$$I_n=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(a_j(x-x_j)^5+b_j(x-x_j)^4+c_j(x-x_j)^3+\alpha_j(x-x_j)^2+\beta_j(x-x_j)+\gamma_j)dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{6}a_j(x_{j+1}-x_j)^6+\frac{1}{5}b_j(x_{j+1}-x_j)^5+\frac{1}{4}c_j(x_{j+1}-x_j)^4\right]$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{3}\alpha_j(x_{j+1}-x_j)^3+\frac{1}{2}\beta_j(x_{j+1}-x_j)^2+\gamma_j(x_{j+1}-x_j)\right]$$

olduğu açıktır. Sonuç 4.1.'i uygulayarak

$$|I-I_n|\le\frac{3}{2}\max_{x\in[a,b]}|F'''(x)|\max_{j=0,1,\ldots,n-1}|x_{j+1}-x_j|^4$$

Hesaplanan integralin istenilen integrale ne kadar yakın olduğunun bir üst sınırı verildi.

X	0	1
F	1	2.71828
F′	1	2.71828
F″	1	2.71828

Tablo 5.2

Örnek 5.1. $I=\int_0^1 e^x dx = 1,71828$ integrali $n=1$ için 5. dereceden spline fonksiyonunu kullanarak integralin yaklaşık değerini bulalım.

Burada Tablo 5.2'ye dayanarak

$$f(x) = 0,02581x^5 + 0,01182x^4 + 0,18065x^3 + 0,5x^2 + x + 1$$

beşinci dereceden polinom elde edilir. Bu polinomun integrali istenilen integrale 0,000214 kadar yakındır. Hatanın üst sınırı 4,07742 dır.

X	0	1
F	0	0.841471
F′	1	0.540302
F″	0	–0.841471

Tablo 5.3

Örnek 5.2. $I=\int_0^1 \sin x dx = 0,459698$ integrali $n=1$ için 5. dereceden spline fonksiyonunu kullanarak integralin yaklaşık değerini bulalım.

Burada Tablo 5.3'e dayanarak

$$f(x) = 0,00769x^5 + 0,00051x^4 - 0,16673x^3 + x$$

beşinci dereceden polinom elde edilir. Bu polinomun integrali istenilen integrale 0,000004 kadar yakındır. Hatanın üst sınırı 0,81045 dır.

X	0	0.33	0.66	1
F	0	0,324043	0,613117	0,841471
F′	1	0,946042	0,789992	0,540302
F″	0	–0,324043	–0,613117	–0,841471

Tablo 5.4

Örnek 5.3. $I = \int_0^1 \sin x dx = 0,459698$ integrali $n = 3$ için 5. dereceden spline fonksiyonunu kullanarak integralin yaklaşık değerini bulalım.

Burada Tablo 5.4'e dayanarak beşinci dereceden spline fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} -0,69399x^5 + 0,00001x^4 - 0,16667x^3 + x, & 0 \le x \le 0,33, \\ -0,65512x^5 + 0,00445x^4 - 0,15616x^3 - 0,16202x^2 + 0,94604x + 0,32404, & 0,33 \le x \le 0,64, \\ -0,53542x^5 + 0,00864x^4 - 0,12878x^3 - 0,30656x^2 + 078999x + 0,61312, & 0,64 \le x \le 1. \end{cases}$$

elde edilir.

Bu polinomun integrali istenilen integrale 0,008805 kadar yakındır. Hatanın üst sınırı 0,01082 dır.

KAYNAKLAR

Aydın, K., Bulgak, A., Bulgak, H., 2003, Bilgisayarla Matematik Analiz, SelÜn Vakfı, KONYA.

Bayram, M., 2002, Nümerik Analiz, Aktif Yayınevi, İstanbul.

Bronstein, I. N., Semendyayev, K.A., 1986, Matematik El Kitabı, (13. Baskı), Nauka, Moskova (Rusça)

Bulgak, A., Eminov, D., 2003, Graphics Costructor 2.0. Selçuk J. Appl. Math., 4, No. 1, 42-57.

Cerit, C., Canoğlu, A., 1991, Matematik Analiz 2, İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, İkinci Baskı, İstanbul.

Chapra, S. C., Canale, R. P., Çevirenler: H. HEPERKAN, U. KESGİN, 2003, Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Cheney, W., Kincaid, D., 1980, Numerical Mathematics and Computing. Brooks / Cole Publishing Company, Monterey, California.

Liu L.-B., Liu H.-W., 2010, Kuartik spline methods for solving one-dimensional telegraphic equations. Appl. Math. Comp., V. 216 (3), 951-958 pp.

Liu H.-W., Liu L.-B., Chen Y., 2009, A semi-discretization method based on kuartik splines for solving one-space-dimensional hyperbolic equations Appl. Math. Comp., V. 210 (2), 508-514 pp.

Rashidina, J., Mohammadi, R., Jalilian, R., Ghasemi, M., 2007, Convergence of cubic-spline approach to the soution of a system of boundrary-value problems, Appl. Math. Comp., V. 192 (2), 319-331 pp.

Siddiqi, S. S., Arkam, G., Elahi, A., 2008, Kuartik spline solution of linear fifth order boundry value problems, Appl. Math. Comp., V. 196 (1), 214-220 pp.

Sinan, O., 2008, İki boyutlu spline fonksiyonları, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Süer, B., Demir, H., 1984, Freshman Calculus, Book One, Part One-two, ODTÜ Yayınları, İkinci Baskı, Ankara.

Tapramaz, R., 2002, Sayısal Çözümleme, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Thomas, G. B., (Finney R. L., Weir M. D. ve Giardano F. R. düzeltmelerle). 2003, Thomas' CALCULUS, Pearson Education, Onuncu Baskı, USA.

Volkov, E. A, 1982, Nümerik Yöntemler, Nauka, Moskova, Rusça.

Wang, C.-C., 2006, Use residual correction method to calculate the upper and lower solutions of initial value problem, Appl. Math. Comp., V.181(1), 29-39pp.

Wang, C.-C., Lee, Z.-Y., Kuo, Y., 2008, Application of residual correction method in calculating upper and lower approximate solutions of fifth-order boundary-value problems, Appl. Math. Comp., V. 199(2), 677-690 pp.

Zheng, J., Sederberg, T.W., Jonson, R. W., 2004, Least squares methods for solving differential equations using Bezier control points, Appl. Num. Math., V. 48 (2), 237-252 pp.

Zhu, C.-G., Wang, R. H., 2009, Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, Appl. Math. Comp., V. 208 (1), 260-272 pp.

Maron, M. J., 1984, Numerical Analysis, A Practical Approach, Macmillan Publishing Co., Inc. New York, Collier Macmillan Publishers London.