T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇLÜ BANT MATRİSİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Hümeyra KIYAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

KONYA, 2010

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇLÜ BANT MATRİSİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Hümeyra KIYAK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2010, 44 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. Dr. Aşır GENÇ

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu tezde belli bir tipteki üçlü bant ve anti pentadiagonal matrislerin r inci kuvvetinin ($r \in \square$) genel ifadesi elde edilmiştir.

Matrisin r inci kuvvetinin genel ifadesi; J, A matrisinin Jordan formu, P dönüşüm matrisi olmak üzere $A^r = PJ^rP^{-1}$ ifadesi kullanılarak elde edilmiştir. J ve P matrislerini hesaplamak için A matrisinin öz değerlerine ve öz vektörlerine ihtiyaç duyulmaktadır. A matrisinin öz değerlerini; kökleri

$$x_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1,n}$$

olarak tanımlanan

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad -1 \le x \le 1$$

ikinci tür Chebyshev polinomuna bağlı olarak bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Üçlü bant matrisler, anti-pentadiagonal matrisler, Chebyshev polinomları, matris kuvveti.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON COMPUTING INTEGER POWERS OF TRIDIAGONAL MATRIX

Hümeyra KIYAK

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2010, Page 44

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Assoc. Prof. Dr. Aşır GENÇ

Asst. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this thesis, the general expression of the r th power $(r \in \mathbb{Z})$ for one type of tridiagonal and anti-pentadiagonal matrices was derived.

The general expression of the r th power of matrix was obtained by using the expression $A^r = PJ^rP^{-1}$, where J is Jordan's form of A, P is the transforming matrix. We need the eigenvalues and eigenvectors of the matrix A to compute J and P matrices. The eigenvalues of the matrix A were found by formula

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad -1 \le x \le 1$$

which is the Chebyshev polynomial of second kind, whose roots are defined as

$$x_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Key Words: Tridiagonal matrices, anti-pentadiagonal matrices, Chebyshev polynomials, matrix power.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi, Prof. Dr. Durmuş BOZKURT danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu tez; 1. Bölüm Giriş bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm Bazı Matrislerin Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması, 5. Bölüm Sonuç ve Öneriler ve 6. Bölüm Kaynaklar olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır.

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Durmuş Bozkurt'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hümeyra KIYAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET……i
ABSTRACT……ii
ÖNSÖZ……...iii
İÇİNDEKİLER……...iv
1. GİRİŞ……...1
1.1. Tezin Yapısı……..2
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI……...3
3. TEMEL KAVRAMLAR……4
3.1. Hessenberg Matrisler……4
3.2. Üçlü Bant Matrisler……...5
3.3. Anti- Üçlü Bant Matrisler……5
3.4. Pentadiagonal Matrisler……6
3.5. Anti-Pentadiagonal Matrisler……6
3.6. Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi……..7
3.7. Jordan Form……..9
3.8. Fark Denklemleri……10
3.8.1. Homojen fark denklemlerinin çözümü……10
3.9. Chebyshev Polinomları……...12
3.9.1. Birinci tür chebyshev polinomları……...12
3.9.2. İkinci tür chebyshev polinomları……14
3.9.3. Üçüncü tür chebyshev polinomları……..15
3.9.4. Dördüncü tür chebyshev polinomları……..16
3.9.5. Chebyshev polinomları arasındaki ilişkiler…….……17
4. BAZI MATRİSLERİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI 18
4.1. Üçlü Bant Bir Matrisin Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması……..……18
4.2. Bazı Anti-Pentadiagonal Matrislerin Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması.33
4.3. Nümerik Örnekler……...37

5. SONUÇ VE ÖNERİLER ……42
6. KAYNAKLAR……..43

1. GİRİŞ

Nümerik analiz, sınır değer problemleri, yüksek mertebeden harmonik filtreleme teorisi gibi pek çok alanda (anti-) üçlü bant, (anti-) pentadiagonal, (anti-) heptadiagonal matrislerle karşılaşılmakta ve bu matrislerin kuvvetlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle J. Rimas (anti-) tridiagonal ve (anti-) pentadiagonal matrislerin kuvvetleri üzerine 2005-2008 yılları arasında otuzu aşkın çalışma yapmıştır.

J. Rimas, yapmış olduğu çalışmalarında dönüşüm formülünden faydalanarak matrislerin kuvvetlerine ulaşmıştır. Dönüşüm formülünden faydalanmak için biliniyor ki, ele alınan matrisin dönüşüm matrisine ve Jordan formuna, dolayısıyla matrisin öz değer ve öz vektörlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için J. Rimas, ele aldığı matrise uygun $\Delta_n(\alpha)$ şeklinde ifade ettiği bir determinant seçmiş ve bu $\Delta_n(\alpha)$'nın rekürans bağıntısını elde etmiştir. Daha sonra elde edilen rekürans bağıntısına başlangıç koşulları belli olan bir fark denklemi olarak yaklaşıp, bu fark denkleminin çözümüne ulaşmıştır. Burada elde edilen çözüm Chebyshev polinomlarına bağlı olarak elde edilmiştir. Daha sonra ele aldığı matrisin karakteristik polinomu ile $\Delta_n(\alpha)$ determinantı arasında en başta kurmuş olduğu ilişkiden faydalanarak; $\Delta_n(\alpha)$'dan karateristik polinoma rahatlıkla geçiş yapmıştır. Böylelikle matrisin karakteristik polinomunu Chebyshev polinomlarına bağlı olarak elde etmiştir. Sonuç olarak Chebyshev polinomları trigonometrik olarak ifade edildiğinden, karakteristik polinomun köklerine, yani matrisin öz değerlerine, ulaşmak trigonometrik ifadeden dolayı çok daha kolay hale gelmiştir. Böylelikle J. Rimas' ın yapmış olduğu çalışmalar bu yönüyle farklılık arz etmektedir.

Sonraki aşamada J. Rimas öz değerleri bilinen matrisin Jordan formuna ve öz vektörlerine ulaşmıştır. Burada J. Rimas'ın, öz değerleri Chebyshev polinomlarına bağlı olarak ifade ettiğinden öz vektörlere de Chebyshev polinomlarına bağlı olarak ulaşmış olduğu açıktır. J. Rimas öz vektörlere ulaştıktan sonra; sütunları, ele alınan matrisin her bir öz vektörü olan dönüşüm matrisini ve bu dönüşüm matrisinin tersini elde etmiştir.

Sonuç olarak dönüşüm formülünü kullanmak için ihtiyaç duyulan bütün matrislere ulaşan J. Rimas; elde ettiği matrislerin çarpımından faydalanarak ele aldığı matrisin kuvvetini ifade eden genel formüle ulaşmıştır.

Bu tezde, J. Rimas'ın (Rimas, 2005) kullanmış olduğu metot, ele alınan matrislere uygulanmış ve bunun sonucunda

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & -1 & & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & (-1)^{n-1} \\ & & & & & (-1)^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki üçlü bant matris için istenilen sonuca ulaşılmıştır.

Ayrıca ele alınan matrislerin bazıları için de bütün mertebeleri için olmasa bile bazı mertebeleri için istenilen kuvvetini hesaplamaya yarayan formüller elde edilmiştir.

Tezin esas kısmında bu çalışmalara yer verilmiştir.

1.1. Tezin Yapısı

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

1. Bölüm; giriş bölümü olup bu bölümde tez konusu hakkında önceden yapılan çalışmalar ve tezde ele alınan problem kısaca tanıtılmıştır.

2. Bölümde; tez konusu ile ilgili literatürde yer alan kaynaklar araştırılıp; kaynak araştırması başlığı altında bu kaynaklar hakkında bilgi verilmiştir.

3. Bölümde; tez boyunca faydalanılacak bazı kavramlar hakkında ön bilgiler verilmiştir.

4. Bölüm, tezin esas kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, üzerinde çalışılan matrisler ve bu matrislerin istenilen kuvvetlerinin hesaplanmasına yardımcı olan formüllerin elde edilişi detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

5. Bölüm, tezin sonuç ve öneriler bölümü olup bu bölümde, bu konuda ileride ne tür çalışmalar yapılabileceği ifade edilmiştir.

6. Bölümde ise tez boyunca faydalanılan kaynaklar belirtilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

I. S. Dhillon (1997), tridiagonal bir matrisin öz değerlerinin hesaplanması için bazı yaklaşım algoritmaları kullanmıştır.

J. Gutierrez-Gutièrrez (2008), hermityen tridiagonal bir matrisin q uncu $(q \in N)$ kuvvetinin genel ifadesini vermiştir.

C. M. da Fonseca (2007), William Trench tarafından iddia edilen bazı simetrik tridiagonal matrislerin öz değerleri üzerindeki bir problem için çözüm vermiştir.

A. D. A. Hadj, M. Elouafi (2008), tridiagonal matrislerin kuvvetlerini ve terslerini tridiagonal matrislerin öz ayrışımlarından faydalanarak elde etmişlerdir. Ayrıca bunlar üzerine rekürans bağıntıları vermişlerdir.

A. Melman (2001), reel simetrik Toeplitz matrisin öz değerleri üzerinde bir çalışma ortaya koymuştur.

D. Kulkarni, D. Schmidt ve S.-K. Tsui (1999), bazı tridiagonal matrislerin öz değerlerini vermiştir.

C. M. da Fonseca (2006), bazı tridiagonal matrislerin öz değerleriyle ilgili sonuçları ortogonal polinomlar yardımıyla elde etmiştir.

M. El-Mikkawy, E. D. Rahmo (2009), pentadiagonal ve anti-pentadiagonal matrisler için yeni ve genel bir algoritma elde etmişlerdir.

J. Rimas (2005), çift mertebeden simetrik tridiagonal bir matrisin kuvveti üzerine bir çalışma ortaya koymuştur.

J. Rimas (2005), tek mertebeden bir tip simetrik tridiagonal bir matrisin kuvveti üzerine bir çalışma ortaya koymuştur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde çalışma boyunca faydalanılacak kavramlara yer verildi. Bu kavramlar, lineer cebirde sıkça karşılaşılan temel kavramlar olan Hessenberg matrisi, (anti-) üçlü bant matrisler, (anti-) pentadiagonal matrisler, dönüşüm matrisi, Jordan form, Chebyshev polinomları gibi kavramlardır.

3.1. Hessenberg Matrisler

Tanım 3.1. $A=[a_{ij}]\in M_n$ matrisinin elemanları $i>j+1$ $(j>i+1)$ için $\forall a_{ij}=0$ ise yani**,**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left(A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde ise bu matrise *üst(alt) Hessenberg matris* denir (Hohn 1973, Horn ve Johson 1985).

Alt Hessenberg matrisinin transpozunun üst Hessenberg matris olduğu tanımdan açıktır.

3.2. Üçlü Bant Matrisler

Tanım 3.2. $A=[a_{ij}]\in M_n$ matrisinin elemanları $|i-j|>1$ iken $\forall a_{ij}=0$ ise bu A, n-kare matrisine *üçlü bant matris* denir. Yani,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi bir üçlü bant matristir (Householder 1964, Strang 1988, Zhang 1999).

A, n-kare matrisi üçlü bant matris ise A matrisi hem üst hem de alt Hessenberg matristir. Buradan üçlü bant matris hem üst hem de alt Hessenberg matris olarak da tanımlayabileceğimiz sonucuna varılır.

3.3. Anti-Üçlü Bant Matrisler

Tanım 3.3. A, n-kare üçlü bant bir matris ve

$$R=\begin{bmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & \iddots & 1 & 0 & \\ 0 & \iddots & \iddots & & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde n-kare bir matris olmak üzere

$$B=AR$$

matrisine *anti-üçlü bant matris* denir (El-Mikkawy ve Rahmo 2009). Yani,

$$B=\begin{bmatrix} & & & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & \\ a_{n-1,1} & \iddots & \iddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & \end{bmatrix}$$

matrisi anti-üçlü bant bir matristir.

3.4. Pentadiagonal Matrisler

Tanım 3.4. $A=[a_{ij}]\in M_n$ matrisinin elemanları, $|i-j|>2$ iken $\forall a_{ij}=0$ ise bu A n-kare matrisine *pentadiagonal matris* denir (Householder 1964, Strang 1988, Zhang 1999). Yani,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & & & \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ & & & \ddots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi pentadiagonal bir matristir.

3.5. Anti-Pentadiagonal Matrisler

Tanım 3.5. A, n-kare pentadiagonal matris ve

$$R=\begin{bmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & \iddots & 1 & 0 & \\ 0 & \iddots & \iddots & & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde n-kare bir matris olmak üzere

$$B=AR$$

matrisine *anti-pentadiagonal matris* denir (El-Mikkawy ve Rahmo 2009).

3.6. Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi

Tanım 3.6. A ve B herhangi iki kare matris olsun.

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde P düzgün (tersi olan) matris varsa A ve B matrislerine *benzer matrisler,* P *'*ye *dönüşüm matrisi* ve dönüşüme de *benzerlik dönüşümü* denir.

Teorem 3.1. Benzer matrislerin karakteristik polinomları ve dolayısıyla öz değerleri aynıdır (Bozkurt ve ark. 2005).

İspat. A ve B benzer matrisler olsun. Bu durumda

$$B = P^{-1}AP$$

dir.

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda \mathrm{I}) &= \det\left(P^{-1}AP-\lambda \mathrm{I}\right)\\ &= \det\left(P^{-1}(A-\lambda \mathrm{I})P\right)\\ &= \det P^{-1}\det(A-\lambda \mathrm{I})\det P\\ &= \det(A-\lambda \mathrm{I})\end{aligned}$$

olup istenen elde edilmiştir.

Teorem 3.2. A herhangi bir n-kare matris olsun. A matrisi, λ_i $(1 \le i \le n)$ öz değerlerine karşılık

$$(A-\lambda_i \mathrm{I})x_i = 0, \quad x_i \neq 0$$

denklemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şeklinde n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olsun. Bu durumda;

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \quad \Lambda = köş\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad veya \quad A = P\Lambda P^{-1}$$

dir (Bozkurt ve ark. 2005).

İspat. $1 \le i \le n$ için

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

olduğundan A matrisi ile P matrisini çarparsak;

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \cdots & Ax_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= P\Lambda \end{aligned}$$

elde edilir. P matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$\det P \neq 0$$

olup P^{-1} vardır. Bu durumda elde edilen

$$AP = P\Lambda$$

eşitliği soldan P^{-1} ile çarpılırsa;

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

sağdan P^{-1} ile çarpılırsa da;

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. A köşegenleştirilebilen bir kare matris ise herhangi bir pozitif k tamsayısı için

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$$

dir (Horn 1985, Bozkurt ve ark. 2005).

İspat. A köşegenleştirilebilir olduğundan

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

olacak şekilde P düzgün matrisi vardır. k tane $P\Lambda P^{-1}$ matrisini çarpım şeklinde yazarsak;

$$A^k = \underbrace{\left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\ldots\left(P\Lambda P^{-1}\right)}_{k \text{ tane}}$$

olur. Matrislerde çarpma işlemi birleşme özelliğine sahip olduğundan;

$$A^k = P\Lambda\left(PP^{-1}\right)\Lambda\left(PP^{-1}\right)\ldots\left(PP^{-1}\right)\Lambda\left(PP^{-1}\right)\Lambda P^{-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$PP^{-1} = \mathrm{I}$$

olduğundan sonuç olarak

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1. Herhangi bir n-kare matrisin benzerlik dönüşümü ile köşegenleştirilmesi için gerek ve yeter şart matrisin n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olmasıdır (Bozkurt ve ark. 2005).

3.7. Jordan Formu

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; A n-kare matrisinin öz değerleri olsun. A matrisinin Jordan formu öz değerlerin durumuna göre aşağıdaki gibi tanımlanır.

Eğer öz değerlerin hepsi birbirinden farklı, yani $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, ise A matrisinin Jordan formu;

$$J = köş\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

öz değerlerden ikisi birbirine eşit diğerleri birbirinden farklı, örneğin $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_n$, A matrisinin Jordan formu;

$$J = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & 0 & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \lambda_n\end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

öz değerlerin hepsinin birbirine eşit olması halinde, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, ise A matrisinin Jordan formu;

$$J = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Horn 1985, Zhang 1999, Bozkurt ve ark. 2005).

3.8. Fark Denklemleri

Birinci mertebeden homojen fark denklemi;

$$f : \square \to \square$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu yardımıyla

$$f(n, y_n, y_{n+1}) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde m *inci mertebeden homojen fark denklemi*

$$f(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) = 0$$

ifadesiyle verilir (Goldberg 1958, Jeffrey 1990, Agarwal 1992).

Bir fark denkleminin mertebesi; y'nin en büyük indisi ile en küçük indisi arasındaki farka eşittir. Fark denkleminin mertebesi ile homojen fark denkleminin çözümünden gelecek olan sabitlerin sayısı aynıdır. Dolayısıyla bir fark denkleminin mertebesini bilmek bize uygulamalarda otokontrolü sağlamaktadır.

Tanım 3.7. Birinci mertebeden

$$ay_{n+1} + by_n = f(n), \qquad a, b \in \square$$

fark denklemini ele alalım. Eğer $f(n)$ fonksiyonu doğrusal (lineer) ise fark denklemine *lineer*, aksi taktirde fark denklemine *lineer olmayan fark denklemi* adı verilir. Eğer $f(n) = 0$ ise fark denklemine *homojen fark denklem,* $f(n) \neq 0$ ise fark denklemine *homojen olmayan fark denklemi* adı verilir (Goldberg 1958, Jeffrey 1990, Agarwal 1992).

Örnek 3.1. $y_{n+1} = n + 2y_n$ fark denklemi birinci mertebeden homojen olmayan lineer bir fark denklemine örnektir.

Örnek 3.2. $y_{n+3} = y_n(1 - y_n)$ fark denklemi ise üçüncü mertebeden homojen olmayan lineer olmayan bir fark denklemine örnektir.

3.8.1. Homojen fark denklemlerinin çözümü

k ıncı mertebeden

$$a_1 y_{n+k} + a_2 y_{n+k-1} + \cdots + a_{k+1} y_n = 0, \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in \square) \tag{3.5}$$

homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$y_n = \alpha^0,$$
$$y_{n+1} = \alpha^1,$$
$$y_{n+2} = \alpha^2,$$
$$\vdots$$
$$y_{n+k} = \alpha^k,$$

alarak α' ya bağlı bir denklem elde ederiz. Daha sonra bu denklemin kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ olarak bulunur. Bulunan bu köklere göre eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_k$ ise (3.5) fark denkleminin çözümü ($c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabit olmak üzere);

$$y_n = c_1(\alpha_1)^n + c_2(\alpha_2)^n + \cdots + c_k(\alpha_k)^n$$

şeklinde olur (Agarwal 1992).

Eğer bu köklerin bazıları birbirine eşitse; örneğin $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$, $\alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9, \ldots$ olması halinde fark denkleminin çözümü;

$$y_n = (c_1 n + c_2)(\alpha_1)^n + (c_3 n^2 + c_4 n + c_5)(\alpha_3)^n + (c_6 n^3 + c_7 n^2 + c_8 n + c_9)(\alpha_6)^n + \cdots$$

şeklindedir (Agarwal 1992).

Verilen iki durumun bir arada olması halinde örneğin α_1 tek katlı, $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$, α_7 tek katlı,… ise fark denkleminin çözümü;

$$y_n = c_1(\alpha_1)^n + (c_2 n + c_3)(\alpha_2)^n + (c_4 n^2 + c_5 n + c_6)(\alpha_4)^n + c_7(\alpha_7)^n + \cdots$$

olur (Agarwal 1992).

Örnek 3.3. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ fark denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$

denkleminin kökleri;

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$$

tür. Buradan fark denkleminin çözümü;

$$y_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.4. $y_{n+3} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ fark denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

denkleminin kökleri;

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2$$

olup, buradan fark denkleminin çözümü;

$$y_n = (c_1 n + c_2)(1)^n + c_3(-2)^n$$

şeklindedir.

Uyarı 3.1. Genel çözümdeki sabitlerin değeri; soruda fark denklemiyle birlikte sabit sayısı kadar başlangıç koşulu verilmesi ile bulunabilir.

Bu uyarıya göre Örnek 3.3' ün genel çözümündeki c_1 ve c_2 sabitlerinin değerlerini bulmak için soruda iki tane başlangıç koşulu verilmelidir. Başlangıç koşulları

$$y_0 = 1 \text{ ve } y_1 = 5$$

olsun.

İlk koşuldan genel çözümde n yerine 0 yazılırsa;

$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

elde edilir.

İkinci koşuldan genel çözümde n yerine 1 yazılırsa;

$$2c_1 + 3c_2 = 5$$

elde edilir. Bu iki denklemden c_1 ve c_2 çözülürse;

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 3$$

ve fark denkleminin genel çözümü;

$$y_n = (-2)(2)^n + 3(3)^n \Rightarrow y_n = -(2)^{n+1} + (3)^{n+1}$$

olarak elde edilir.

3.9. Chebyshev Polinomları

3.9.1. Birinci tür Chebyshev polinomları

Tanım 3.8. $x = \cos\theta$ olmak üzere;

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos x)$$

şeklinde tanımlanan polinoma *birinci tür Chebyshev polinomu* denir (Fox ve Parke 1968, Mason ve Handscomb 2003).

Birinci tür Chebyshev polinomunun ilk beş terimi;

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

şeklindedir.

n inci dereceden birinci tür Chebyshev polinomunun kökleri $[-1,1]$ aralığında olup;

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=\overline{1,n}$$

olarak tanımlanır (Mason ve Handscomb 2003).

Bu polinom aynı zamanda $T_0(x)=1$ ve $T_1(x)=x$ başlangıç koşulları olmak üzere $n\geq 2$ tamsayıları için

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile de tanımlanabilir (Mason ve Handscomb 2003).

Ayrıca birinci tür Chebyshev polinomu;

$$\begin{bmatrix} x & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & \\ & 1 & 2x & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklindeki n-kare üçlü bant matrisin determinantı olarak da bilinmektedir (Mason ve Handscomb 2003).

Son olarak $x=\cos\theta$ olmak üzere,

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right\},$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k},$$

$$T_n(x)=1+n^2(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x-1}{2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$$

eşitlikleri ile de birinci tür Chebyshev polinomunu tanımlamak mümkündür (Mason ve Handscomb 2003).

Birinci tür Chebyshev polinomu bize uygulamalarda kolaylık sağlayan

$$T_n(\cos\theta) \quad =\cos(n\theta),$$
$$T_n(T_m(x))=T_{nm}(x)$$

gibi özelliklere sahiptir (Mason ve Handscomb 2003).

3.9.2. İkinci tür Chebyshev polinomları

Tanım 3.9. $x=\cos\theta$ olmak üzere;

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

şeklinde tanımlanan polinoma *ikinci tür Chebyshev polinomu* denir (Fox ve Parke 1968, Mason ve Handscomb 2003).

İkinci tür Chebyshev polinomunun ilk beş terimi;

$$U_0(x)=1,$$
$$U_1(x)=2x,$$
$$U_2(x)=4x^2-1,$$
$$U_3(x)=8x^3-4x,$$
$$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$$

şeklindedir.

n inci dereceden ikinci tür Chebyshev polinomunun kökleri de $[-1,1]$ aralığında olup;

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{(n+1)}, \quad k = \overline{1,n}$$

olarak tanımlanır (Mason ve Handscomb 2003).

$U_0(x) = 1$ ve $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayıları için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile de ikinci tür Chebyshev polinomu tanımlanabilir (Mason ve Handscomb 2003).

Ayrıca ikinci tür Chebyshev polinomu;

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & \\ & 1 & 2x & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklindeki n-kare üçlü bant matrisin determinantı olarak da bilinmektedir (Mason ve Handscomb 2003).

$x = \cos\theta$ olmak üzere,

$$U_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2}\binom{n+1}{2k+1}(x^2-1)^k x^{n-2k}$$

eşitlikleri de ikinci tür Chebyshev polinomunu verir (Mason ve Handscomb 2003).

3.9.3. Üçüncü tür Chebyshev polinomları

Tanım 3.10. $x = \cos\theta$ olmak üzere;

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos\left(\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\arccos x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}$$

şeklinde tanımlanan polinoma *üçüncü tür Chebyshev polinomu* denir (Fox ve Parke 1968, Mason ve Handscomb 2003).

Üçüncü tür Chebyshev polinomunun ilk dört terimi;

$$V_0(x)=1,$$
$$V_1(x)=2x-1,$$
$$V_2(x)=4x^2-2x-1,$$
$$V_2(x)=8x^3-4x^2-4x+1$$

şeklindedir.

Üçüncü tür Chebyshev polinomunun kökleri $[-1,1]$ aralığında olup;

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{(2n+1)},\quad k=\overline{1,n}$$

olarak tanımlanır (Mason ve Handscomb 2003).

$V_0(x)=1$ ve $V_1(x)=2x-1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n\geq 2$ tamsayıları için üçüncü tür Chebyshev polinomunu

$$V_n(x)=2xV_{n-1}(x)-V_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile de tanımlamak mümkündür (Mason ve Handscomb 2003).

3.9.4. Dördüncü tür Chebyshev polinomları

Tanım 3.11. $x=\cos\theta$ olmak üzere;

$$W_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\frac{\sin\left(\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}$$

şeklinde tanımlanan polinoma *dördüncü tür Chebyshev polinomu* denir (Fox ve Parke 1968, Mason ve Handscomb 2003).

Dördüncü tür Chebyshev polinomunun ilk dört terimi;

$$W_0(x)=1,$$
$$W_1(x)=2x+1,$$
$$W_2(x)=4x^2+2x-1,$$
$$W_3(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

şeklindedir.

Dördüncü tür Chebyshev polinomunun kökleri de $[-1,1]$ aralığında olup;

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{(2n+1)}, \quad k = \overline{1,n}$$

olarak tanımlanır (Mason ve Handscomb 2003).

$W_0(x) = 1$ ve $W_1(x) = 2x+1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayıları için dördüncü tür Chebyshev polinomunu

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile de tanımlamak mümkündür (Mason ve Handscomb 2003).

3.9.5. Chebyshev polinomları arasındaki ilişkiler

Kaynaklarda bize uygulamalarda kolaylık sağlayacak olan Chebyshev polinomları arasındaki geçişlere yer verilmektedir. Bunların bazılarını aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür (Mason ve Handscomb 2003):

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2-1},$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x)),$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_{n-1}(x),$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x),$$

$$V_n(x) = u^{-1}T_{2n+1}(u), \quad \left(u = \cos\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$W_n(x) = U_{2n}(u), \quad \left(u = \cos\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$U_n(x) = \frac{1}{2}\left[V_n(x) + W_n(x)\right],$$

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x),$$

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x),$$

$$W_n(x) = V_n(-x), \quad (n \quad çift)$$

$$W_n(x) = -V_n(-x), \quad (n \quad tek)$$

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x).$$

4. BAZI MATRİSLERİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölüm tezin esas kısmını oluşturmakta olup üç başlık altında toplanmıştır.

4.1. Bir Tip Üçlü Bant Matrisin Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması

Bu kısımda özel bir üçlü bant matrisin r inci kuvvetinin genel ifadesi verilecektir. Bu çalışma yapılırken Rimas'ın (2005), Gutierrez-Gutièrrez'in (2008), Hadj ve Elouafi'nin (2008) üçlü bant matrislerin kuvvetlerinin hesabı üzerine yaptıkları çalışmalardan yararlanılmıştır. Çalışma tamamıyla dönüşüm formülüne, dolayısıyla matrisin öz değer ve öz vektörlerine dayanmaktadır. Öz vektörlere ulaşmak ve dönüşüm matrisini bulabilmek için öncelikle öz değerlere ihtiyaç duyulmaktadır ve bunun için de bilinen klasik yöntemle öz değerleri bulmak yerine, Chebyshev polinomlarını kullanarak matrisin öz değerlerine ulaşacaktır. Bu aşağıda verilecek Teorem 4.1' de daha detaylı bir şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 4.1. *A* n-kare üçlü bant matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & -1 & & & \\ & & -1 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & (-1)^{n-1} \\ & & & & & (-1)^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde verilsin.

A üçlü bant matrisi için; λ_i, A matrisinin öz değerleri, $U_k(x)$ k ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomu ve $\{A^r\}_{ij}$, A^r' nin $(r\in\mathbb{Z})$ (i,j) inci elemanı olmak üzere;

n çift için;

$$\{A^r\}_{ij}=\frac{t_i m_j}{2n+2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^r\left(4-\lambda_k^2\right)U_{n-i}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

n tek için;

$$\{A^r\}_{ij} = (-1)^r \frac{t_i m_j}{2n+2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k{}^r \lambda_{\frac{n+1}{2}+k}^2 U_{n-i}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

formülleri vardır.

İspat. *E n*-kare birim matris olmak üzere,

$$|A - \lambda E| = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri *A* matrisinin öz değerleridir.

Çalışmada ilk olarak, verilen *A* üçlü bant matrisinin çift mertebesi için tamsayı kuvvetlerinin genel ifadesini veren formül elde edilecektir. Şimdi bunun nasıl elde edileceği verildikten sonra, *A* matrisinin tek mertebesi için de bir formül elde edilecektir.

$\alpha = -\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_n(\alpha) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & & & & & \\ -1 & \alpha & 1 & & & & \\ & 1 & \alpha & -1 & & & \\ & & -1 & \alpha & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & \alpha & -1 \\ & & & & & -1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

ve

$$\Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & & \\ & -1 & \alpha & 1 & & & \\ & & 1 & \alpha & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & & -1 & \alpha & 1 \\ & & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

olsun. Buradaki $\Delta_n(\alpha)$ matrisi *A* matrisinin ilk satır ve sütunu ile son satır ve sütununun silinmesi ile elde edilen tipte *n* inci mertebeden bir matristir (Rimas 2005).

(4.2)'den

$$D_1(\alpha)=\alpha,$$
$$D_2(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ -1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2-1,$$
$$D_3(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & -1 & 0\\ -1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3-2\alpha,$$
$$\vdots$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.3)'ten de

$$\Delta_1(\alpha)=\alpha,$$
$$\Delta_2(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ -1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^2-1,$$
$$\Delta_3(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & -1 & 0\\ -1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3-2\alpha,$$
$$\vdots$$

elde edilir. Elde edilen eşitliklerden

$$D_n(\alpha)=\Delta_n(\alpha) \tag{4.4}$$

$$\Delta_n(\alpha)=\alpha\Delta_{n-1}(\alpha)-\Delta_{n-2}(\alpha) \tag{4.5}$$

olduğu açıktır (Rimas 2005). Ayrıca (4.4) eşitliğinin doğruluğunu tümevarımla göstermek de mümkündür.

$n=2$ için,

$$D_2(\alpha)=\Delta_2(\alpha)=\alpha^2-1 \tag{4.6}$$

dir.

$n=2k$ için,

$$D_{2k}(\alpha)=\Delta_{2k}(\alpha) \tag{4.7}$$

olsun.

$n=2k+2$ için

$$D_{2k+2}(\alpha)=\Delta_{2k+2}(\alpha) \tag{4.8}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$D_{2k+2}(\alpha)=\begin{vmatrix} \alpha & -1 & & & & & \\ -1 & \alpha & 1 & & & & \\ & 1 & \alpha & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & 1 & \alpha & -1 & \\ & & & & -1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k+2)\times(2k+2)} \tag{4.9}$$

şeklindedir. Bu determinant ilk satıra göre açılırsa;

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & \alpha & 1 & & \\ & & & 1 & \alpha & -1 & \\ & & & & -1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k+1)\times(2k+1)} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ 0 & \alpha & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & \alpha & 1 & & \\ & & & 1 & \alpha & -1 & \\ & & & & -1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k+1)\times(2k+1)} \tag{4.10}$$

olur. (4.10)' daki ilk determinant son satıra göre, ikinci determinant da ilk sütuna göre açılırsa;

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\left\{\alpha\begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & \alpha & 1 & \\ & & & 1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k)\times(2k)} + \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & \\ & & -1 & \alpha & 0 & \\ & & & 1 & -1 & \end{vmatrix}_{(2k)\times(2k)}\right\}$$
$$-\begin{vmatrix} \alpha & -1 & & & & \\ -1 & \alpha & 1 & & & \\ & & 1 & \alpha & -1 & \\ & & & -1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k)\times(2k)} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11)'deki ilk determinantın $\Delta_{2k}(\alpha)$' ya, en son determinantın ise $D_{2k}(\alpha)$' ya yani (4.7)' den dolayı $\Delta_{2k}(\alpha)$' ya eşit olduğu açıktır. Bu bilgiler göz önüne alınarak (4.11) determinantını tekrar yazacak olursak;

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\left\{\alpha\Delta_{2k}(\alpha)+\begin{vmatrix}\alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & \\ & & & & & \\ & & -1 & \alpha & 0 & \\ & & & 1 & -1 & \end{vmatrix}_{(2k)\times(2k)}\right\}-\Delta_{2k}(\alpha) \qquad (4.12)$$

elde edilir. Şimdi de (4.12)' deki ikinci determinantı son sütuna göre açacak olursak;

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\left\{\alpha\Delta_{2k}(\alpha)-\begin{vmatrix}\alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & \\ & & & & & \\ & & 1 & \alpha & -1 & \\ & & & -1 & \alpha & \end{vmatrix}_{(2k-1)\times(2k-1)}\right\}-\Delta_{2k}(\alpha) \qquad (4.13)$$

elde edilir. Buradan $(2k-1)$. mertebeden determinantın $\Delta_{2k-1}(\alpha)$ olduğu açıktır. Bu durumu ele alarak (4.13) eşitliğini tekrar yazacak olursak,

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\left\{\alpha\Delta_{2k}(\alpha)-\Delta_{2k-1}(\alpha)\right\}-\Delta_{2k}(\alpha) \qquad (4.14)$$

elde edilir. (4.5) eşitliği göz önünde bulundurulursa (4.14)' deki

$$\alpha\Delta_{2k}(\alpha)-\Delta_{2k-1}(\alpha)$$

ifadesi yerine onun eşiti olan $\Delta_{2k+1}(\alpha)$ yazmak mümkündür. Bu durumda

$$D_{2k+2}(\alpha)=\alpha\Delta_{2k+1}(\alpha)-\Delta_{2k}(\alpha)$$

olur. (4.5) eşitliğini tekrar kullanırsak

$$\alpha\Delta_{2k+1}(\alpha)-\Delta_{2k}(\alpha)$$

yerine $\Delta_{2k+2}(\alpha)$ yazabiliriz. Böylece

$$D_{2k+2}(\alpha)=\Delta_{2k+2}(\alpha)$$

elde edilmiş olup, istenilene ulaşılmış olur.

Daha sonra $\Delta_0(\alpha)=1,\ \Delta_1(\alpha)=\alpha,\ \Delta_2(\alpha)=\alpha^2-1$ başlangıç koşullarına sahip (4.5) fark denklemini çözersek; bu denklemin fark denklemi

$$r^2-\alpha r+1=0$$

olup buradan

$$r_1=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2},\quad r_2=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$

dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$\Delta_n(\alpha) = ar_1^n + br_2^n$$

olur (Agarwal 1992). Buradan başlangıç koşullarını kullanarak a ve b bilinmeyenlerine ulaşabiliriz.

$n = 0$ için $\Delta_0(\alpha) = 1 = a + b$ ' den $a = 1 - b$ ve

$$n = 1 \text{ için } \Delta_1(\alpha) = \alpha = a\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) + b\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)$$

ifadelerinden

$$a = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}$$

ve

$$b = -\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}$$

elde edilir. Böylelikle (4.5) fark denkleminin çözümü;

$$\Delta_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}\right)\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)^n - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4}}\right)\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}}\left\{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right)^{n+1}\right\} \qquad (4.15)$$

olarak elde edilir.

$z = \cos\theta$ olmak üzere ikinci tür Chebyshev polinomu için

$$U_{n-1}(z) = \frac{1}{2}\frac{\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n - \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

eşitliği vardır (Mason ve Handscomb 2003). Bu eşitlikte bazı düzenlemeler yaparak (4.15) ifadesini elde edelim. Bunun için n yerine $n+1$, z yerine de $\frac{\alpha}{2}$ yazıp ifadeyi tekrar düzenlersek;

$$U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{\alpha^2-4}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4}}\left\{\frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}\right)^{n+1}-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}\right\}$$

elde edilir ki, bu (4.15) eşitliği ile aynıdır. Dolayısıyla

$$\Delta_n(\alpha)=U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.16}$$

olup böylelikle (4.5) fark denkleminin ikinci tür Cebyshev polinomuna bağlı bir ifadesi elde edilmiş oldu (Rimas 2005).

$x=\cos\theta$ olmak üzere n. dereceden ikinci tür Cebyshev polinomunun

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

şeklinde ifade edildiği bilinmektedir (Mason ve Handscomb 2003). Bu ifadenin kökleri yardımıyla (4.16)'dan α'ya dolayısıyla, A matrisinin öz değerlerine ulaşabiliriz.

$$\Delta_n(\alpha)=U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\left((n+1)\arccos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{\alpha}{2}\right)}=0$$

denkleminden

$$\sin\left((n+1)\arccos\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

denklemine ve buradan da

$$\alpha_k=2\cos\frac{k\pi}{(n+1)},\qquad k=\overline{1,n}$$

ifadesini elde ederiz. $\alpha=-\lambda$ olduğundan A matrisinin öz değerleri

$$\lambda_k=-2\cos\frac{k\pi}{(n+1)},\qquad k=\overline{1,\ n} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir (Dhillon 1997, Kulkarni ve ark. 1999, Melman 2001, Rimas 2005, Fonseca 2006, Fonseca 2007).

λ_k öz değerlerinin katlılığı 1 ve aralarında

$$\lambda_k = -\lambda_{n-k+1}, \qquad \left(k = \overline{1, \frac{n}{2}}\right)$$

ilişkisi mevcuttur. O halde A matrisinin Jordan formunu

$$J = köş\left(-\lambda_n,\ -\lambda_{n-1},\ -\lambda_{n-2},\ldots,\ -\lambda_{\frac{n}{2}+1},\ \lambda_{\frac{n}{2}+1},\ldots,\ \lambda_{n-2},\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n\right) \qquad (4.18)$$

şeklinde yazabiliriz (Horn 1985, Zhang 1999, Bozkurt ve ark. 2005).

λ_i $(1 \le i \le n)$, A matrisinin i. öz değeri ve $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ sütun vektörü olmak üzere

$$(\lambda_i E - A)x = 0 \qquad (4.19)$$

homojen lineer denklem sisteminin çözümünden A matrisinin öz vektörlerine ulaşabiliriz.

(4.19) sisteminin katsayılar matrisinden elemanter satır işlemleri yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & -1 & & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_i & -1 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda_i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & D_n(-\lambda_i) \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

matrisi elde edilir. Buradan $D_n(-\lambda_i) = 0$ olduğundan $rank(\lambda_i E - A) = n - 1$'dir. Yani, bir parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır (Bozkurt ve ark. 2005).

(4.20) matrisinden

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda_i x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - \lambda_i x_3 - x_4 &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-2} - \lambda_i x_{n-1} - x_n &= 0 \\ x_{n-1} + \lambda_i x_n &= 0 \end{aligned}$$

yazmak mümkündür. Buradan özel olarak

$$x_n = -1 = -U_0\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

alırsak *n*'in çift olması halinde iki durum, aynı şekilde *n*'in tek olması halinde de iki durum olmak üzere toplam dört durumla karşılaşılmaktadır.

n çift iken;

1. Durum: *k* tek ise;

$$x_{n-1} = \lambda_i = U_1\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{n-2} = \lambda_i^{\,2} - 1 = U_2\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+2} = -a\lambda_i^{\,n-k-2} + c\lambda_i^{\,n-k-4} + \ldots + \frac{n-k-1}{2}\lambda_i = -aU_{n-k-2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+1} = -a\lambda_i^{\,n-k-1} + b\lambda_i^{\,n-k-3} + d\lambda_i^{\,n-k-5} + \ldots - 1 = -aU_{n-k-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_k = a\lambda_i^{\,n-k} + (-a-b)\lambda_i^{\,n-k-2} + (c-d)\lambda_i^{\,n-k-4} + \ldots + \frac{n-k+1}{4}\lambda_i = aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = e\lambda_i^{\,n-1} - e(n-2)\lambda_i^{\,n-3} + \ldots + \frac{n}{2}\lambda_i = eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

şeklindedir.

Buradaki

$$a = \begin{cases} 1, & n-k \equiv 1 \ \text{ veya } \ 2 \pmod 4 \\ -1, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$b = a(n-k-2)$$

$$c = a(n-k-3)$$

d ; x_{k+3}' deki $\lambda_i^{\,n-k-5}$, in katsayısı ile x_{k+2}' deki $\lambda_i^{\,n-k-6}$' nın katsayısının toplamına eşittir. *e* ise,

$$e = \begin{cases} 1, & n-1 \equiv 1 \ \text{ veya } \ 2 \pmod 4 \\ -1, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2. Durum: *k* çift ise;

$$x_{n-1} = \lambda_i = U_1\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{n-2} = \lambda_i^{\,2} - 1 = U_2\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+3} = -a\lambda_i^{\,n-k-3} + \ldots + \frac{n-k-2}{2}\lambda_i = -aU_{n-k-3}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+2} = -a\lambda_i^{\,n-k-2} + c\lambda_i^{\,n-k-4} + \ldots - 1 = -aU_{n-k-2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+1} = a\lambda_i^{\,n-k-1} + b\lambda_i^{\,n-k-3} + d\lambda_i^{\,n-k-5} + \ldots + \frac{n-k}{2}\lambda_i = aU_{n-k-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_k = a\lambda_i^{\,n-k} + (b-a)\lambda_i^{\,n-k-2} + (c+d)\lambda_i^{\,n-k-4} + \ldots - 1 = aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = e\lambda_i^{\,n-1} - e(n-2)\lambda_i^{\,n-3} + \ldots + \frac{n}{2}\lambda_i = eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

şeklidedir. Burada a ve e, k'nın tek tamsayı olması durumuyla aynı tanımlanırken,

$$b = -a(n-k-2)$$
$$c = a(n-k-3)$$

d; x_{k+3}'deki $\lambda_i^{\,n-k-5}$'in katsayısı ile x_{k+2}'deki $\lambda_i^{\,n-k-6}$'nın katsayısının farkına eşittir.

n tek iken;

1. Durum: *k* tek ise;

$$x_{n-1} = \lambda_i = U_1\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{n-2} = \lambda_i^{\,2} - 1 = U_2\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+3} = -a\lambda_i^{\,n-k-3} + \ldots + \frac{n-k-2}{2}\lambda_i = -aU_{n-k-3}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+2} = -a\lambda_i^{\,n-k-2} + c\lambda_i^{\,n-k-4} + \ldots - 1 = -aU_{n-k-2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+1} = a\lambda_i^{\,n-k-1} + b\lambda_i^{\,n-k-3} + d\lambda_i^{\,n-k-5} + \ldots + \frac{n-k}{2}\lambda_i = aU_{n-k-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_k = a\lambda_i^{n-k} + (b-a)\lambda_i^{n-k-2} + (c+d)\lambda_i^{n-k-4} + \ldots - 1 = aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = e\lambda_i^{n-1} - e(n-2)\lambda_i^{n-3} + \ldots - 1 = eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

şeklinde olup buradaki *a, b, c, d* ve *e*; *n* çiftken *k*'nın da çift olması durumundaki ile aynı tanımlanmaktadır.

2. Durum: *k* çift ise;

$$x_{n-1} = \lambda_i = U_1\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{n-2} = \lambda_i^2 - 1 = U_2\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{k+2} = -a\lambda_i^{n-k-2} + c\lambda_i^{n-k-4} + \ldots + \frac{n-k-1}{2}\lambda_i = -aU_{n-k-2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_{k+1} = -a\lambda_i^{n-k-1} + b\lambda_i^{n-k-3} + d\lambda_i^{n-k-5} + \ldots - 1 = -aU_{n-k-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$x_k = a\lambda_i^{n-k} + (-a-b)\lambda_i^{n-k-2} + (c-d)\lambda_i^{n-k-4} + \ldots + \frac{n-k+1}{4}\lambda_i = aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = e\lambda_i^{n-1} - e(n-2)\lambda_i^{n-3} + \ldots - 1 = eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$$

şeklinde olup burada da *a, b, c, d* ve *e*; *n* çiftken *k*'nın tek olması durumundaki ile aynı tanımlanmaktadır.

P_i'ler A matrisinin öz vektörleri olmak üzere

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{bmatrix}$$

şeklinde olan dönüşüm matrisini tanımlayalım. A matrisinin öz vektörlerini önceden bulmuştuk. Buna göre P dönüşüm matrisini

$$P=\begin{bmatrix} eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & eU_{n-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & aU_{n-k}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -U_3\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & -U_3\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & -U_3\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \\ U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_2\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \\ U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \\ -U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & -U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & -U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

şeklinde yazabiliriz. $\Re_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$, P matrisinin $i.$ satırı olmak üzere (4.21)'den

$$t_i=\begin{cases} 1, & n-i\equiv 1 \pmod 4 \text{ veya } 2 \\ -1, & n-i\equiv 0 \pmod 4 \text{ veya } 3 \end{cases}$$

için

$$\Re_i=\left[t_iU_{n-i}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad t_iU_{n-i}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad \cdots \quad t_iU_{n-i}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right] \tag{4.22}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi P^{-1} matrisini bulalım. $\rho_j^{-1} \quad \left(j=\overline{1,\ n}\right)$, P^{-1} matrisinin $j.$sütunu ve

$$m_j=\begin{cases} 1, & n-j\equiv 1 \pmod 4 \text{ veya } 2 \\ -1, & n-j\equiv 0 \pmod 4 \text{ veya } 3 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\rho_j^{-1}=\left[m_j\left(\frac{4-\lambda_1^2}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad m_j\left(\frac{4-\lambda_2^2}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad m_j\left(\frac{4-\lambda_3^2}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \quad \cdots \quad m_j\left(\frac{4-\lambda_n^2}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right]^T \tag{4.23}$$

şeklindedir. O halde

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} e\left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_3\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ e\left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-1}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_3\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e\left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_3\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & \left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_2\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & -\left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ \left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & -\left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & -\left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$A^r = PJ^rP^{-1}$ eşitliği kullanılarak λ_i, A matrisinin öz değerleri, $U_k(x)$ k ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomu ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\{A^r\}_{ij} = \left\{PJ^rP^{-1}\right\}_{ij} = \Re_i J^r \rho_j^{-1} = \Re_i \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,r} m_j \left(\frac{4-\lambda_1^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ \lambda_2^{\,r} m_j \left(\frac{4-\lambda_2^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \lambda_3^{\,r} m_j \left(\frac{4-\lambda_3^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\ \vdots \\ \lambda_n^{\,r} m_j \left(\frac{4-\lambda_n^{\,2}}{2n+2}\right)U_{n-j}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{t_i m_j}{2n+2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\,r} \left(4-\lambda_k^2\right) U_{n-i}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

elde edilir (Rimas 2005, Gutierrez-Gutièrrez 2008, Hadj ve Elouafi 2008).

Buraya kadar yapılan işlemler ve elde edilen sonuç, A matrisinin çift mertebeden olması halindeydi. Şimdi de tek mertebeden A matrisi için benzer işlemleri yapalım.

$\alpha = -\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_n(\alpha)=\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} \alpha & -1 & & & & & \\ -1 & \alpha & 1 & & & & \\ & 1 & \alpha & -1 & & & \\ & & -1 & \alpha & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & & -1 & \alpha & 1 \\ & & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

ve

$$\Delta_n(\alpha)=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & & \\ 1 & \alpha & -1 & & & & \\ & -1 & \alpha & 1 & & & \\ & & 1 & \alpha & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & \alpha & -1 \\ & & & & & -1 & \alpha \end{vmatrix} \tag{4.25}$$

olup (4.4), (4.5), (4.16), (4.17), (4.21) ve (4.22) ile verilen eşitlikler A'nın tek mertebeden olması halinde de doğrudur.

λ_k öz değerlerinin katlılığı 1 ve

$$\lambda_k=-\lambda_{n-k+1}, \qquad \left(k=\overline{1,\frac{n-1}{2}}\right)$$

ve $\lambda_{\frac{n+1}{2}}=0$ olup A matrisinin Jordan formu;

$$J=köş\left(-\lambda_n,\ -\lambda_{n-1},\ -\lambda_{n-2},\ldots,\ -\lambda_{\frac{n+3}{2}},\ 0,\ \lambda_{\frac{n+3}{2}},\ldots,\ \lambda_{n-2},\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n\right) \tag{4.26}$$

dir (Horn 1985, Zhang 1999, Bozkurt ve ark. 2005).

(4.21) ile verilen eşitliğin A'nın tek mertebeden olması halinde de geçerli olmasından P matrisimizi biliyoruz. Buradan P matrisi yardımıyla elde edilen P^{-1}, den ρ_j^{-1} $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$, P^{-1} matrisinin $j.$sütunu;

$$m_j=\begin{cases} 1, & n-j\equiv 1 \ \text{ veya } \ 2 \pmod 4 \\ -1, & n-j\equiv 0 \ \text{ veya } \ 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\rho_j^{-1} = \left[m_j\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad m_j\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad m_j\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+3}^2}{2n+2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \right.$$
$$\left. \cdots \quad m_j\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \right]^T \tag{4.27}$$

şeklindedir. Buradan da

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} e\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_{n-1}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_3\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ e\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_{n-1}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_3\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_{n-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & \cdots & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_3\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_2\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2}\right) U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2}\right) U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & -\left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2}\right) U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

olur.

Aynı şekilde $A^r = PJ^rP^{-1}$ eşitliği kullanılarak λ_i, A matrisinin öz değerleri, $U_k(x)$ k ıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomu ve $\{A^r\}_{ij}$, A^r'nin $(r \in \mathbb{Z})$ (i, j) inci elemanı olmak üzere;

$$\{A^r\}_{ij} = \{PJ^rP^{-1}\}_{ij} = \Re_i J^r \rho_j^{-1} = \Re_i \begin{bmatrix} \lambda_1^r m_j \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+1}^2}{2n+2} \right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ \lambda_2^r m_j \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+2}^2}{2n+2} \right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ \lambda_3^r m_j \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+3}^2}{2n+2} \right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\ \vdots \\ \lambda_n^r m_j \left(\frac{\lambda_{\frac{n+1}{2}+n}^2}{2n+2} \right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^r \frac{t_i m_j}{2n+2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r \lambda_{\frac{n+1}{2}+k}^2 U_{n-i}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) U_{n-j}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

şeklinde elde edilir (Rimas 2005, Gutierrez-Gutièrrez 2008, Hadj ve Elouafi 2008). Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. Bazı Anti-Pentadiagonal Matrislerin Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması

Bu kısımda anti-pentadiagonal bazı matrislerin bazı mertebelerinin kuvvetleri için genel formüller elde edildi.

Aşağıda elde ettiğimiz formülleri konjektür şeklinde verdik.

Konjektür 4.1. *B, C, D, F, G ve H* matrisleri

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

ve

$$p=\frac{4^r-1}{3}$$

olmak üzere B matrisinin $2r$ inci ($r\in\square$) kuvveti;

$$B^{2r}=\begin{bmatrix} 2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{r-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{r-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

C matrsinin $2r$ inci ($r\in\mathbb{Z}$) kuvveti;

$$C^{2r}=\begin{bmatrix} p+1 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & p+1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & p & 0 & p+1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

D matrisinin $2r$ inci ve $2r+1$ inci ($r\in\mathbb{Z}$) kuvvetleri;

$$D^{2r}=\begin{bmatrix} p+1 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & p+1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & p & 0 & p+1 \end{bmatrix}$$

ve

$$D^{2r+1}=\begin{bmatrix} 2p & 0 & 2p+1 & 0 & 2p+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p+1 & 0 & 2p & 0 & 2p+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2p+1 & 0 & 2p+1 & 0 & 2p \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

F matrisinin $2r$ inci ($r\in\mathbb{Z}$) kuvveti;

$$F^{2r}=\begin{bmatrix} 2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & -2^{r-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{r-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

G matrisinin $2r$ inci ve $2r+1$ inci ($r \in \mathbb{N}$) kuvvetleri;

$$G^{2r} = \begin{bmatrix} (-1)^r 2^{(r-2)/2} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{r+1} 2^{(r-2)/2} & 0 \\ 0 & (-1)^r 2^{(r-2)/2} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{r+1} 2^{(r-2)/2} \\ 0 & 0 & (-1)^r 2^{r/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^r 2^{r/2} & 0 & 0 \\ (-1)^{r+1} 2^{(r-2)/2} & 0 & 0 & 0 & (-1)^r 2^{(r-2)/2} & 0 \\ 0 & (-1)^{r+1} 2^{(r-2)/2} & 0 & 0 & 0 & (-1)^{r+1} 2^{(r-2)/2} \end{bmatrix},$$

$$G^{2r+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} \\ -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2r+1 = 3+4k, k = 0,1,2,\ldots),$$

$$G^{2r+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} \\ 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{(r-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{(r-1)/2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2r+1 = 5+4k, k = 0,1,2,\ldots)$$

şeklindedir.

H matrisinin $2r$ inci ve $2r+1$ inci ($r \in \mathbb{N}$) kuvvetleri;

$$H^{2r} = \begin{bmatrix} \left(2^{2r-2} + 2^{r-1}\right) & 0 & 2^{2r-2} & 0 & 2^{2r-2} & 0 & \left(2^{2r-2} - 2^{r-1}\right) \\ 0 & 2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{r-1} & 0 \\ 2^{2r-2} & 0 & \left(2^{2r-2} + 2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-2} - 2^{r-1}\right) & 0 & 2^{2r-2} \\ 0 & 0 & 0 & 2^r & 0 & 0 & 0 \\ 2^{2r-2} & 0 & \left(2^{2r-2} + 2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-2} + 2^{r-1}\right) & 0 & 2^{2r-2} \\ 0 & 2^{r-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{r-1} & 0 \\ \left(2^{2r-2} - 2^{r-1}\right) & 0 & 2^{2r-2} & 0 & 2^{2r-2} & 0 & \left(2^{2r-2} + 2^{r-1}\right) \end{bmatrix},$$

$$H^{2r+1}=\begin{bmatrix} \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 2^r & 0 & 0 & 0 \\ \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) \\ 0 & 2^r & 0 & 0 & 0 & 2^r & 0 \\ \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 2^r & 0 & 0 & 0 \\ \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}+2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) & 0 & \left(2^{2r-1}-2^{r-1}\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Buradaki p ;

$$C^2 \text{ için } p=1=\underbrace{4^0}_{1 \text{ tane üslü ifade}}$$

$$C^4 \text{ için } p=5=\underbrace{4^0+4^1}_{2 \text{ tane üslü ifade}}$$

$$C^6 \text{ için } p=21=\underbrace{4^0+4^1+4^2}_{3 \text{ tane üslü ifade}}$$

$$\vdots$$

$$C^{2r} \text{ için } p=\underbrace{4^0+4^1+4^2+\ldots+4^{r-1}}_{r \text{ tane üslü ifade}}$$

şeklinde olup geometrik seriden;

$$p=\frac{4^r-1}{3}$$

olarak elde edilir.

4.3. Nümerik Örnekler

Bu kısımda Teorem 4.1 ve Konjektür 4.1 ile ilgili örneklere yer verilmiştir.

Örnek 4.1.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

üçlü bant matrisinin r inci $(r\in\mathbb{N})$ kuvvetinin (i,j) inci elemanlarını hesaplayınız.

A matrisinin öz değerleri

$$\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{5}, \qquad k = \overline{1,4}$$

formülünden;

$$\lambda_1 = -2\cos\frac{\pi}{5} = -a,$$
$$\lambda_2 = -2\cos\frac{2\pi}{5} = -b,$$
$$\lambda_3 = 2\cos\frac{2\pi}{5} = b,$$
$$\lambda_4 = 2\cos\frac{\pi}{5} = a$$

şeklindedir. Bu durumda *A* matrisinin Jordan formu;

$$J = köş(-a, \quad -b, \quad b, \quad a)$$

olur. Daha sonra r 'nin çift olması halinde *A* matrisinin r inci $(r \in \mathbb{N})$ kuvvetinin (i, j) inci elemanları;

$$\left\{A^r\right\}_{11} = \frac{1}{10}(2a^r(4-a^2)(a^3-2a)^2 + 2b^r(4-b^2)(b^3-2b)^2),$$
$$\left\{A^r\right\}_{12} = \left\{A^r\right\}_{21} = 0,$$
$$\left\{A^r\right\}_{13} = \left\{A^r\right\}_{31} = -\frac{1}{10}(2a^{r+1}(4-a^2)(a^3-2a) + 2b^{r+1}(4-b^2)(b^3-2b)),$$
$$\left\{A^r\right\}_{14} = \left\{A^r\right\}_{41} = 0,$$
$$\left\{A^r\right\}_{22} = \frac{1}{10}(2a^r(4-a^2)(a^2-1)^2 + 2b^r(4-b^2)(b^2-1)^2),$$
$$\left\{A^r\right\}_{23} = \left\{A^r\right\}_{32} = 0,$$
$$\left\{A^r\right\}_{24} = \left\{A^r\right\}_{42} = -\frac{1}{10}(2a^r(4-a^2)(a^2-1) + 2b^r(4-b^2)(b^2-1)),$$

$$\left\{A^r\right\}_{33} = \frac{1}{10}(2a^{r+2}(4-a^2) + 2b^{r+2}(4-b^2)),$$
$$\left\{A^r\right\}_{34} = \left\{A^r\right\}_{43} = 0,$$
$$\left\{A^r\right\}_{44} = \frac{1}{10}(2a^r(4-a^2) + 2b^r(4-b^2))$$

şeklinde elde edilir.

Örneğin $r = 4$ için

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak yukarıdaki eşitlikler yardımıyla bulunur.

r'nin tek olması halinde A matrisinin r inci $(r \in \mathbb{Z})$ kuvvetinin (i, j) inci elemanları ise;

$$\{A^r\}_{11} = 0,$$

$$\{A^r\}_{12} = \{A^r\}_{21} = -\frac{1}{10}(2a^r(4-a^2)(a^3-2a)(a^2-1) + 2b^r(4-b^2)(b^3-2b)(b^2-1)),$$

$$\{A^r\}_{13} = \{A^r\}_{31} = 0,$$

$$\{A^r\}_{14} = \{A^r\}_{41} = \frac{1}{10}(2a^r(4-a^2)(a^3-2a) + 2b^r(4-b^2)(b^3-2b)),$$

$$\{A^r\}_{22} = 0,$$

$$\{A^r\}_{23} = \{A^r\}_{32} = \frac{1}{10}(2a^{r+1}(4-a^2)(a^2-1) + 2b^{r+1}(4-b^2)(b^2-1)),$$

$$\{A^r\}_{24} = \{A^r\}_{42} = 0,$$

$$\{A^r\}_{33} = 0,$$

$$\{A^r\}_{34} = \{A^r\}_{43} = -\frac{1}{10}(2a^{r+1}(4-a^2) + 2b^{r+1}(4-b^2)),$$

$$\{A^r\}_{44} = 0,$$

şeklinde elde edilir.

Bu formüller yardımıyla örneğin $r = 5$ için

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

matrisinin onuncu kuvvetini hesaplayınız.

$$C^{10}\ \text{için}\ \ p=\underbrace{4^0+4^1+4^2+4^3+4^4}_{5\ \text{tane üslü ifade}}$$

$$p=\frac{4^5-1}{3}=341$$

olup buradan

$$C^{10}=\begin{bmatrix}342&0&341&0&341\\0&1&0&0&0\\341&0&342&0&341\\0&0&0&1&0\\341&0&341&0&342\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.3.

$$H=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

matrisinin beşinci kuvvetini hesaplayınız.

H^{2r+1} için verilen formülden faydalanarak H matrisinin beşinci kuvvetini

$$H^5 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

J. Rimas'ın 2005-2008 yılları arasında yaptığı çalışmalar incelendikten sonra, üzerinde çalışılacak bu tipteki matrislerin aslında sayısının artacağına karar verilmesi üzerine bu çalışma ortaya çıkmıştır. Ayrıca çalışma konusunun sonuçlarının uygulamalı matematikte kullanılması ve işe yaraması bu fikri destekleyen bir başka nedendir. Sonuç olarak bu konuda yapılacak çalışmaları amacına uygun, yani bilime katkı sağlayan çalışmalardır.

Şimdiye kadar ele alınan matrisler (anti-) üçlü bant ve (anti-) pentadiagonal matrisler olup bu matrisler $-1,0,1$ elemanlarından oluşmaktadır. Bu nedenle ileride daha genel elemanlardan oluşan yani,

$$A=\begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix},\ (a,b,c\in\square)$$

veya

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c & & & & \\ d & a & b & c & & & \\ e & d & a & b & \ddots & & \\ & e & d & a & \ddots & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & b & c \\ & & & e & d & a & b \\ & & & & e & d & a \end{bmatrix},\ (a,b,c,d,e\in\square)$$

şeklindeki matrislere çalışmada kullanılan metot uygulanmaya çalışılabilir (Ayrıca bu matrislerin antileri üzerinde de çalışılabilir).

Ayrıca sadece (anti-) üçlü bant veya (anti-) pentadiagonal matrisler üzerinde değil (anti-) *k* diagonal (*k* tek doğal sayı) şeklindeki daha genel matrisler üzerinde de çalışılabilir.

Sonuç olarak bu tipte oluşturulacak matrislere ve kuvvetlerine pek çok alanda ihtiyaç duyulmaktadır.

6. KAYNAKLAR

[1] Dhillon, I. S., 1997 A New O(n^2) Algorithm for the Symmetric Tridiagonal Eigenvalue/Eigenvector Problem PhD Thesis, *Computer Science Division(EECS), University of California at Berkeley*.

[2] Gutierrez-Gutièrrez, J., 2008 Positive Integer Powers of Certain Tridiagonal Matrices, *Applied Mathematics and Computation* Studies 202:133-140.

[3] Fonseca, C. M. da, 2007 On The Eigenvalues of Some Tridiagonal Matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics* Studies 200:283-286.

[4] Hadj, A. D. A., Elouafi, M., 2008 On The Characteristic Polynomial, Eigenvectors and Determinant of Pentadiagonal Matrix, *Applied Mathematics and Computation* Studies 198:634-642.

[5] Melman, A., 2001 Extreme Eigenvalue of Reel Symetric Toeplitz Matrices, *Math Comput.* Studies:70 (234): 649-669.

[6] Kulkarni, D., Schmidt, D., Tsui, S.-K., 1999 Eigenvalues of Tridiagonal Pseudo-Toeplitz Matrices, *Linear Algebra and its Applications* Studies 297:63-80.

[7] Fonseca, C. M. da, 2006 On the Location of The Eigenvalues of Jacobi Matrices, *Applied Mathematics Letter* Studies 19:1168-1174.

[8] El-Mikkawy, M., Rahmo, E. D., 2009 A New Recursive Algorithm for Inverting General Periodic Pentadiagonal and Anti- Pentadiagonal Matrices, *Applied Mathematics and Computation* Studies 207:164-170.

[9] Rimas, J., 2005 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for One Type of Symmetric Tridiagonal Matrices of Even Order-I, Applied Mathematics and Computation Studies 168:83-787.

[10] Rimas, J., 2005 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for One Type of Symmetric Tridiagonal Matrices of Odd Order-I, Applied Mathematics and Computation Studies 171:1214.1217.

[11] Goldberg, S., 1958. Introduction to Difference Equations, *New York Wiley*.

[12] Householder, A. S., 1964. The Theory of Matrices in Numerical Analysis, *New York: Dover*.

[13] Horn, R., Johson, C., 1985. Matrix Analysis, *Cambridge University Press, Cambridge*.

[14] Hohn, F. E. , 1973. Elementary Matrix Algebra, *Macmillan Company, New York*.

[15] Agarwal, R. P., 1992. Difference Equations and Inequalities, *Marcel Dekker*..

[16] Mason, J. C., Handscomb, D. C., 2003. Chebyshev Polynomials, *CRS Press, Washington*.

[17] Bozkurt, D., Türen, B., Solak S., 2005. Lineer Cebir, *Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya*.

[18] Jeffrey, A., 1990. Linear Algebra and Ordinary Differential Equations, *Blackwell Scientific* Publications.

[19] Zhang, F., 1999. Matrix Theory, *Springer, USA.*

[20] Strang, G., 1988. Linear Algebra and its Applications, *Thomson Learning Press, USA.*

[21] Fox, L., Parke, J. B., 1968. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, *Oxford University Press, London.*