T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİZİLER VE BAZI ÖZEL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Mustafa BAHŞİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
KONYA - 2010

ÖZET

DOKTORA TEZİ

DİZİLER VE BAZI ÖZEL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Mustafa BAHŞİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Süleyman SOLAK

2010, 51 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Eşref HATIR
Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Naim TUĞLU
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada, elemanları bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin terimleri olacak şekilde seçilen Toeplitz, Hankel ve circulant matrislerin normu, özdeğerleri, determinantı gibi özelliklerini inceledik. Sonuçları dizinin ilk terimine, ortak farkına (ortak katına) ve matrisin mertebesine bağlı olarak elde ettik. Ayrıca elde edilen sonuçlarla ilgili nümerik örnekler verdik.

Anahtar Kelimeler: Aritmetik Dizi, Geometrik Dizi, Toeplitz Matris, Hankel Matris, Circulant Matris, Özdeğer, Matris Normu.

ABSTRACT

PhD Thesis

Sequences and Properties of Some Special Matrices

Mustafa BAHŞİ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

2010, 51 Pages

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Eşref HATIR
Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, we have investigated the properties as eigenvalues, norm and determinant of Toeplitz, Hankel and circulant matrices which, entries are consist of arithmetic or geometric sequences. We have obtained the results which depend on the first term of sequence, the common difference (or common multiplier) of sequence and dimension of matrix. Also, we have given numerical examples related to obtained results.

Key Words : Arithmetic Sequence, Geometric Sequence, Toeplitz Matrix, Hankel Matrix, Circulant Matrix, Eigenvalue, Matrix Norm.

ÖNSÖZ

Diziler ve Bazı Özel Matrislerin Özellikleri adlı bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç. Dr. Süleyman SOLAK yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Bu tezin hazırlanmasında bana yol gösteren ve her türlü desteği sağlayan danışmanım Sayın Doç. Dr. Süleyman SOLAK Bey'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa BAHŞİ
KONYA - 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii
ABSTRACT iv
ÖNSÖZ v

1. GİRİŞ 1
1.1. Problemin Tanıtımı 1
1.2. Literatür Özeti 2
1.3. Tezin Yapısı 4
2. TEMEL BİLGİLER 5
2.1. Diziler 5
2.2. Toeplitz, Hankel ve Circulant Matrisler 6
2.3. Matris Normları 9
3. DİZİLER VE MATRİSLER 12
3.1. Diziler ve Circulant Matrisler 12
3.2. Diziler ve Toeplitz Matrisler 29
3.3. Diziler ve Hankel Matrisler 38
4. NÜMERİK SONUÇLAR 45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 49
KAYNAKLAR 50

1. GİRİŞ

Teknolojinin hızla ilerlediği günümüzde, matematik ile diğer bilimler arasında bir yakınlaşma doğmuştur. Bu yakınlaşmada matris teorisinin ayrı bir önemi vardır. Çünkü; mühendislik, istatistik ve diğer pek çok alanda matrislerle karşılaşılmaktadır.

Özdeğer, singüler değer ve norm gibi kavramlar matris teorisinin önemli konularındandır. Matrisin mertebesi büyüdükçe, bu kavramların sayısal değerlerini hesaplamak zorlaşmakta hatta imkansız hale gelmektedir. Örneğin 4×4 ve daha büyük mertebedeki matrislerin özdeğerlerini hesaplamak zor ve oldukça zaman alır. Ancak matrisi veya elemanlarını özel seçmek, bize hem kolaylık, hem de dikkate değer bulgular sunmaktadır.

Bizim bu çalışmadaki amacımız ise; elemanlarını özel olarak seçtiğimiz matrislerin özelliklerini araştırmaktır. Çalışmamızda ele alacağımız matrisler Circulant, Toeplitz ve Hankel matrisler olup elemanları ise bir aritmetik veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacaktır.

Bu bölümde, problemin tanıtımı, literatür özeti ve tezin yapısı ele alınacaktır.

1.1. Problemin Tanıtımı

Toeplitz ve Hankel matrisleri 19. yüzyılın sonlarından bugüne kadar matematik literatüründe önemli bir yer tutmaktadır. Şöyle ki, Toeplitz ve Hankel matrisleri matematiğin çeşitli dallarında (cebir, fonksiyonel analiz, ihtimal teori, matris teori, harmonik analiz gibi) geniş bir uygulama sahasına sahiptir. Circulant matrislerden ise 4 ve daha az dereceli polinomların köklerini bulmada yararlanılmaktadır.

Genel anlamdaki bir circulant, Toeplitz ve Hankel matrisin bilinen özellikleri vardır. Biz ise böyle matrislerin elemanlarını özel seçip özelliklerini inceleyeceğiz. Şöyle ki; a ve r birer reel sayı olmak üzere, bir $C=\left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ circulant matrisin elemanlarını,

$$c_{ij} = a + \left(\left(j - i \right) \pmod{n} \right) r \tag{1.1}$$

veya

$$c_{ij} = ar^{\left((j-i) \pmod{n} \right)} \tag{1.2}$$

şeklinde, bir $T = \left(t_{ij} \right)_{i,j=0}^{n-1}$ Toeplitz matrisin elemanlarını,

$$t_{ij} = a + (j - i)r \tag{1.3}$$

veya

$$t_{ij} = ar^{j-i} \tag{1.4}$$

şeklinde, bir $H = \left(h_{ij} \right)_{i,j=0}^{n-1}$ Hankel matrisin elemanlarını,

$$h_{ij} = a + (i + j)r \tag{1.5}$$

veya

$$h_{ij} = ar^{i+j} \tag{1.6}$$

şeklinde seçeceğiz. (1.1) de $i = 1$, (1.3) ve (1.5) de $i = 0$ için, $\left(c_{1j} \right)_{j=1}^{n}$, $\left(t_{0j} \right)_{j=0}^{n-1}$ ve $\left(h_{0j} \right)_{j=0}^{n-1}$ dizilerinin aritmetik dizi, (1.2) de $i = 1$, (1.4) ve (1.6) da $i = 0$ için, $\left(c_{1j} \right)_{j=1}^{n}$, $\left(t_{0j} \right)_{j=0}^{n-1}$ ve $\left(h_{0j} \right)_{j=0}^{n-1}$ dizilerinin ise geometrik dizi olduğu açıktır.

Biz bu çalışmada, elemanları (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) ve (1.6) ile tanımlanan circulant, Toeplitz ve Hankel matrislerin özdeğer, singüler değer, determinant, norm gibi özelliklerini inceleyeceğiz.

1.2. Literatür Özeti

Circulant, Toeplitz ve Hankel matrisler, üzerinde çok sayıda araştırma yapılmış özel yapılı matrislerdir. Biz bunlardan bazılarını kısa kısa özetleyeceğiz.

Davis (1979), circulant matris çeşitlerini, onların özelliklerini ve bazı geometrik uygulamalarını ele almıştır.

Atkin ve ark. (1997), circulant matrislerin kuvvetlerini incelemişlerdir.

Hladnik (1999), blokları circulant olan blok circulant matrislerin, Schur normunun hesaplanmasıyla ilgili bir formül vermiştir.

Zhang (1999), circulant matrisler ve polinomlar arasındaki ilişkiyi ve bir circulant matrisin köşegenleştirilmesini ele almıştır. Ayrıca bir circulant matrisin özdeğer, özvektör ve determinantını polinomlara bağlı olarak vermiştir.

Karner ve ark. (2003), sağ circulant matris, sol circulant matris, ters sağ circulant matris ve ters sol circulant matris olarak tanımlanan, circulant matrislerin dört tipi için singüler değer ayrışımını ve spektral ayrışımını incelemişlerdir.

Solak (2005), elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral ve Euclidean normları için sınırlar elde etmiştir.

Szegö (1920), Toeplitz matrislerin özdeğerlerinin dağılımı ile ilgili bir temel teoremi ispat etmiştir.

Parter (1986) ve Tyrtyshnikov (1996), Szegö'nün bu temel teoreminden yola çıkarak Toeplitz matrislerin singüler değerlerinin dağılımı için bu temel teoremi genişletmişlerdir.

Tyrtyshnikov (1994), A_n Toeplitz matris ve C_n circulant matris olmak üzere, $A_n - C_n$ matrisinin Euclidean normu için bir eşitlik vermiştir.

Tilli (1998), Toeplitz matrislerin özdeğerlerinin ve singüler değerlerinin dağılımı ile ilgili Szegö, Parter ve Tryrtyshnikov'un çalışmalarını kombine ederek, Toeplitz matrislerin oluşturduğu geniş bir sınıfın asimptotik spektral dağılımı ile ilgili yeni sonuçlar elde etmiştir.

Bozkurt (1998), $T_n = \left[2/(1+2(i-j)\right]_{i,j=1}^{n}$ olarak tanımladığı Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p $(1 < p < \infty)$ normu için bir alt ve üst sınır elde etmiştir

Bozkurt (1999), $H_n = \left[2/(1+2(i+j)\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Hankel matrisi ve $T_n = \left[2/(1+2(i-j)\right]_{i,j=1}^{n}$ Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere bu matrislerin Hadamard çarpımlarının ℓ_p normu için sınırlar tayin etmiştir.

Güngör ve Türkmen (2006), Cauchy-Toeplitz, Cauchy-Hankel ve Hilbert matrislerin singüler değerleri için bazı sınırlar elde etmişlerdir.

Tyrtyshnikov (1994), Hankel matrislerin spektral şart sayısı üzerinde çalışmıştır.

Luk ve Qiao (2000), kompleks Hankel matrislerin özdeğerlerinin bulunması ile ilgili bir algoritma üzerinde çalışmışlardır.

Peart ve Woan (2000), Hankel matrislerin ve Stieltjes matrislerin üreteç fonksiyonları arasındaki bağıntıları incelemişlerdir.

Solak ve Bozkurt (2003), $k = 0,1,2,...,n-1$ ve $i + j \equiv k(\mathrm{mod}\, n)$ olmak üzere, $H_n = \left[1/\left(g + h(i+j)\right)\right]_{i,j=1}^{n} \equiv \left[1/\left(g + kh\right)\right]_{i,j=1}^{n}$ şeklinde tanımlanan Cauchy – Hankel matrislerinin spektral ve ℓ_p normları için sınırlar elde etmişlerdir.

Varah (2003), 5×5 ve 7×7 mertebeli 0 (sıfır) alterneli persymmetric Hankel matrislerin özdeğerlerini elde etmiştir.

Zielke (1988) matris normları ve bu normlar arasındaki ilişkileri (denklik bakımından) bir tablo halinde sunmuştur.

1.3. Tezin Yapısı

Diziler ve bazı özel matrislerin özellikleri adlı bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; amaç belirlendi, problem tanıtıldı ve bu problemle ilgili literatür kısa kısa özetlendi.

İkinci bölümde; Toeplitz, Hankel ve circulant matrisler ile bazı temel kavramlar tanıtıldı.

Üçüncü bölümde; elemanları bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacak şekilde tanımlanan, Toeplitz, Hankel ve circulant matrislerin özdeğerleri, singüler değerleri, normları ve determinantları gibi bazı özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde elde edilen bulgularla ilgili nümerik örnekler verildi.

Beşinci bölüm ise; sonuç ve önerilere ayrıldı.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Diziler

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi pozitif doğal sayılar kümesi ve görüntü kümesi reel sayılar kümesi olan

$$(a_n):\mathbb{N}^+\to\ \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan her fonksiyona bir *reel sayı dizisi* denir. Bir reel sayı dizisi,

$$(a_n)=(a_1,a_2,...,a_n,...)$$

şeklinde gösterilir. Burada a_1 dizinin *ilk terimi* olarak, a_n ise dizinin *genel terimi* olarak adlandırılır.

Çalışmamız boyunca reel sayı dizisi yerine kısaca dizi ifadesini kullanacağız.

Tanım 2.1.2. Ardışık terimleri arasındaki farkları eşit olan dizilere aritmetik dizi denir. Yani, bir (a_n) dizisi, $\forall n\in\ \mathbb{N}^+$ için

$$a_{n+1}-a_n=r$$

olacak biçimde bir r reel sayısına sahipse bu (a_n) dizisine bir *aritmetik dizi* ve r sayısına da bu dizinin *ortak farkı* denir. Bir aritmetik dizinin genel terimi, ilk terime ve ortak farka bağlı olarak,

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.3. Ardışık terimleri arasındaki oranları eşit olan dizilere geometrik diziler denir. Yani, bir (a_n) dizisi, $\forall n\in\ \mathbb{N}^+$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$$

olacak biçimde bir r reel sayısına sahipse, bu (a_n) dizisine bir *geometrik dizi* ve r sayısına da dizinin *ortak katı* denir. Bir geometrik dizinin genel terimi, ilk terime ve ortak kata bağlı olarak,

$$a_n=a_1r^{n-1}$$

şeklinde yazılır.

2.2. Toeplitz, Hankel ve Circulant Matrisler

Tanım 2.2.1. $T=(t_{ij})$ $n\times n$ matrisinin elemanları, $i,j=0,1,2,\ldots,n-1$ için $t_{ij}=t_{j-i}$ biçiminde tanımlanıyorsa, bu $T=(t_{ij})$ matrisine *Toeplitz matrisi* denir (Iohvidov 1982). Bu şekilde tanımlanan bir Toeplitz matris açık olarak;

$$T=\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_o & t_1 & \cdots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ t_{2-n} & t_{3-n} & t_{4-n} & \cdots & t_0 & t_1 \\ t_{1-n} & t_{2-n} & t_{3-n} & \cdots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Buradan görüldüğü üzere bir Toeplitz matrisinin elemanları, esas köşegene paralel köşegenler boyunca sabittir. Dolayısıyla bir Toeplitz matrisini, matrisin ilk satır vektörü ile ilk sütun vektörü temsil eder diyebiliriz. Eğer $t_{j-i}=t_m$, $m=0,\mp1,\mp2,...,\mp n-1$ olmak üzere $t_{-m}=\bar{t}_m$ ise T Toeplitz matrisi hermityen olur. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matris de

$$T=(t_{j-i})_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $H=(h_{ij})$ $n\times n$ matrisinin elemanları, $i,j=0,1,2,\ldots,n-1$ için $h_{ij}=h_{i+j}$ biçiminde tanımlanıyorsa, bu $H=(h_{ij})$ matrisine *Hankel matris* denir (Gantmacher 1960, Iohvidov 1982). Bu şekilde tanımlanan bir Hankel matris açık olarak;

$$H=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n-1} & h_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-1} & h_n & \cdots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Buradan hemen görüleceği üzere Hankel matrisleri simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Hankel matris de

$$H=(h_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi,

$$P=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & \iddots & & \\ & 1 & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Herhangi bir T Toeplitz matrisi için PT matrisi bir Hankel matrisidir. Ayrıca herhangi bir H Hankel matrisi için de PH matrisi bir Toeplitz matrisidir. Yani, herhangi bir Toeplitz matrisi P ve H gibi simetrik iki matrisin çarpımı olarak yazılabilir (Horn ve Johnson 1985).

Tanım 2.2.3. $C=\left(c_{ij}\right)$ matrisinin elemanları, $\forall i,j=1,2,\ldots,n$ için $j-i=k\left(\operatorname{mod} n\right)$ olmak üzere $c_{ij}=c_k$ biçiminde tanımlanıyorsa, bu $C=\left(c_{ij}\right)$ matrisine *circulant matris* denir (Dal ve ark. 1996, Solak 2005). Bu şekilde tanımlanan bir circulant matris açık olarak;

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır. Bir circulant matris ilk satır (veya ilk sütun) vektörü ile temsil edilir. Yani, (2.3) deki C matrisi, $C=cir(c_0,c_1,c_2,..,c_{n-1})$ şeklinde de gösterilir.

Circulant matrisler, Toeplitz matrisleri ile yakın benzerlik gösterirler. Toeplitz matrislerinde olduğu gibi circulant matrislerde de esas köşegene paralel köşegenler boyunca elamanlar eşittir. Dolayısıyla her circulant matris bir Toeplitz matris olup, fakat tersi doğru değildir. Örneğin $T_3=(j-i)_{i,j=1}^{3}$ ve $j-i\equiv k(\operatorname{mod}3)$ olacak şekilde $C_3=(k)_{3\times3}$ matrislerini alırsak C_3 circulant matrisi bir Toeplitz matris olduğu halde, T_3 Toeplitz matrisi bir circulant matris değildir.

Tanım 2.2.4. $P=cir(0,1,0,..,0)_{n\times n}$ şeklindeki matrise *temel (esas) permütasyon matris* denir (Davis 1979, Zhang 1999). Bu şekildeki matris açık olarak;

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi, C ve P sırasıyla (2.3) ve (2.4) deki matrisler, w birimin n. ilkel kökü ve $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k$ polinomu katsayıları C matrisinin ilk satır elemanlarından oluşan bir polinom olmak üzere, circulant matrislerle ilgili olarak aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Davis 1979, Zhang 1999).

1. $C = f(P)$ dir.

2 . C matrisi normal matristir. Yani, $CC^* = C^*C$ dir.

3. C matrisinin özdeğerleri $m = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $f(w^m)$ şeklindedir.

4. det $\mathrm{C}=\prod_{m=0}^{n-1} f(w^m)$ dir.

5. C matrisinin adjoint (ek) matrisi, transpozu, pozitif kuvvetleri ve varsa tersi circulanttır.

6. Çarpılabilen A ve B circulant matrisleri için AB circulanttır.

Ayrıca bir circulant matrisin özdeğerleri $m = 0,1,2,...,n-1$ için,

$$\psi_m=\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{-2\pi imk}{n}} \tag{2.5}$$

şeklinde de karakterize edilebilir.

Polinomlarla circulant matrisler arasında bir ilişki vardır. 4 ve daha az dereceli polinomların köklerini bulmada circulant matrislerden yararlanılabilir.

Örnek 2.2.1. $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$ polinomunun köklerini circulant matrisleri kullanarak bulalım.

Çözüm: Önce karakteristik polinomu $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$ olan 2×2 mertebeli C circulant matrisini bulalım.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

olsun.

$$|\lambda I - C| = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2$$

olup,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = |\lambda I - C| = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2$$

eşitliğinden,

$$a = 1 \text{ ve } b = \pm 2$$

elde edilir. $a = 1$ ve $b = 2$ için,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, katsayıları C matrisinin ilk satır elemanlarından oluşan

$$q(t) = 1 + 2t$$

polinomunu tanımlayalım. $w^2 = 1$ denkleminin ilkel kökü -1 olduğundan,

$$q(-1) = 1 - 2.1 = -1$$

$$q((-1)^2) = 1 + 2.1 = 3$$

elde edilir ki, $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ polinomunun kökleri -1 ve 3 olarak bulunur.

2.3. Matris Normları

Tanım 2.3.1. $M_{mn}(F)$, elemanları F cisminden alınan $m \times n$ matrislerin kümesi ve $A, B \in M_{mn}(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere,

N1) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

N2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

N3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

N4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

aksiyomlarını sağlayan

$$\|.\| : M_{mn}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

dönüşümüne *matris normu* denir (Horn ve Johnson 1985). Bir A matrisinin normu genel anlamda $\|A\|$ ile gösterilir.

Eğer bu aksiyomlardan N1, N2 ve N3 sağlanıyorsa norma *genelleştirilmiş matris normu* denir. O halde her matris normu, genelleştirilmiş matris normudur diyebiliriz. Aynı zamanda matris normları, vektör normlarının geliştirilmişidir.

Şimdi yukarıdaki norm aksiyomlarını sağlayan bazı matris normlarını şu şekilde verebiliriz (Horn ve Johnson 1985, Zielke 1988):

A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ , \qquad \text{sütun normu,}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad \text{satır normu,}$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)} \ , \quad \text{Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu,}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} = \sigma_{\max}(A) \ , \qquad \text{spektral norm (veya 2 norm).}$$

Burada $\lambda_{\max}(A^* A)$, $A^* A$ (veya AA^*) nın maksimum özdeğeri ve $\sigma_{\max}(A)$ da A matrisinin maksimum singüler değeridir.

Şimdi de bir A matrisinin ℓ_p normu, ℓ_{pq} karma (veya Hölder) normu ile ℓ_{op} operatör normlarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.3.2. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin ℓ_p normu,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

şeklinde tanımlanır. Şayet $p=\infty$ ise

$$\|A\|_\infty = \lim_{n \to \infty} \|A\|_p = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

dir.

Tanım 2.3.3. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin ℓ_{pq} karma normu,

$$\|A\|_{pq} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \quad (1 \le p, q < \infty)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p=q$ alınırsa ℓ_{pq} normu, ℓ_p normuna dönüşür.

Tanım 2.3.4. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisi ve $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektörü için ℓ_{op} operatör normu, $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$\|A\|_{op}=\max\{\|Ax\|_p : \|x\|_p=1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5. Herhangi bir A matrisi ile x vektörü için,

$$\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$$

eşitsizliği mevcut ise bu durumda $\|A\|$ matris normu $\|x\|$ vektör normu ile uyumludur denir.

3. DİZİLER VE MATRİSLER

Bu bölümde, Toeplitz, Hankel ve circulant matrislerin elemanlarını bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde seçip, elde edilen matrislerin bazı özelliklerinin inceleyeceğiz. Çalışmamız;

1. Reel sayılar cismi üzerinde,
2. Dizilerin ilk terimi 0 (sıfır) dan farklı $(a \neq 0)$,
3. Geometrik dizilerde ortak kat mutlak değerce 1 (bir) den farklı $(|r| \neq 1)$,
4. Aritmetik dizilerde ortak fark 0 (sıfır) dan farklı $(r \neq 0)$

şartları altında yürütüleceğinden, bu şartlar her defasında dile getirilmeyecektir. Dolayısıyla çalışmamız boyunca, teoremlerimiz bu şartların varlığı altında ifade ve ispat edileceklerdir.

3.1. Diziler ve Circulant Matrisler

Bu bölümde (2.3) ile verilen C circulant matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacak şekilde seçip, elde edilen matrislerin özdeğerlerini, bazı normlarını, tersini ve tersinin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Şimdi, (2.3) ile verilen C circulant matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 1,2,\ldots,n$ için $j - i = k \pmod n$ olmak üzere $c_{ij} = a + \big((j-i) \pmod n\big) r = a + kr$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrise $C_{a.d.}$ diyelim. O halde $C_{a.d.}$ matrisi açık olarak;

$$C_{a.d.} = \begin{bmatrix} a & a+r & \cdots & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ a+(n-1)r & a & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+2r & a+3r & \cdots & a & a+r \\ a+r & a+2r & \cdots & a+(n-1)r & a \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de, yine (2.3) ile verilen C circulant matrisinin elemanlarını bir geometrik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 1,2,\ldots,n$ için $j - i = k \pmod n$ olmak üzere $c_{ij} = ar^{((j-i) \pmod n)} = ar^k$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrise $C_{g.d.}$ diyelim. O halde $C_{g.d.}$ matrisi açık olarak;

$$C_{g.d.} = \begin{bmatrix} a & ar & \cdots & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\ ar^{n-1} & a & \cdots & ar^{n-3} & ar^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^2 & ar^3 & \cdots & a & ar \\ ar & ar^2 & \cdots & ar^{n-1} & a \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır.

Buradan itibaren $C_{a.d.}$ notasyonu (3.1) deki matrisi, $C_{g.d.}$ notasyonu da (3.2) deki matrisi temsil edecektir.

Lemma 3.1.1. $x \in R$ ve $x \neq 1$ olmak üzere,

$i)$ $\sum_{s=0}^{n-1} x^s = \dfrac{1-x^n}{1-x}$

$ii)$ $\sum_{s=1}^{n-1} x^s = \dfrac{x-x^n}{1-x}$

$iii)$ $\sum_{s=1}^{n-1} sx^s = \dfrac{x - nx^n + nx^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2}$

ifadeleri geçerlidir.

Teorem 3.1.1. $C_{a.d.}$ $n \times n$ circulant matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_0 = na + \frac{n(n-1)}{2} r \,,$$

$$\lambda_m = \left(\frac{n}{e^{\frac{-2\pi i m}{n}} - 1} \right) r \,, \quad m = 1,2,\ldots,n-1$$

şeklindedir.

İspat: (2.5) ifadesinden $C_{a.d.}$ matrisinin özdeğerleri, $m = 0,1,\ldots,n-1$ için,

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kr) e^{\frac{-2\pi i mk}{n}} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. $m = 0$ için,

$$\lambda_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(a+kr) = a + a + r + a + 2r + \cdots + a + (n-1)r = na + \frac{n(n-1)}{2}r \qquad (3.4)$$

elde edilir. Yani; λ_0, $C_{a.d.}$ matrisinin ilk satır elemanları toplamına eşittir.

$m = 1,2,...,n-1$ için, (3.3) ifadesinden,

$$\lambda_m = a + (a+r)e^{\frac{-2\pi i m}{n}} + (a+2r)e^{\frac{-2\pi i m 2}{n}} + \cdots + [a+(n-1)r]e^{\frac{-2\pi i m(n-1)}{n}}$$

yazılır. Buradan,

$$\lambda_m = a + a\left(e^{\frac{-2\pi i m}{n}} + e^{\frac{-2\pi i m 2}{n}} + \cdots + e^{\frac{-2\pi i m(n-1)}{n}}\right) + r\left(e^{\frac{-2\pi i m}{n}} + 2e^{\frac{-2\pi i m 2}{n}} + \cdots + (n-1)e^{\frac{-2\pi i m(n-1)}{n}}\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte $x = e^{\frac{-2\pi i m}{n}}$ alınırsa $x \neq 1$ olur ve son eşitlik,

$$\lambda_m = a + a\left(x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) + r\left(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1}\right) \qquad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Lemma 3.1.1. (*ii-iii*) ve (3.5) ten

$$\lambda_m = a + a\left(\frac{x - x^n}{1-x}\right) + r\left(\frac{x - nx^n + nx^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2}\right) \qquad (3.6)$$

elde edilir. $x^n = \left(e^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^n = e^{-2\pi i m} = 1$ olduğundan ve (3.6) ifadesinden,

$$\lambda_m = a + a\left(\frac{x-1}{1-x}\right) + r\left[\frac{x - n + nx - x}{(1-x)^2}\right]$$

yazılır. Buradan,

$$\lambda_m = a - a + r\left[\frac{n(x-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$= r\frac{n}{x-1} \qquad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) ifadesinde x yerine $e^{\frac{-2\pi i m}{n}}$ yazılırsa,

$$\lambda_m = \frac{nr}{e^{\frac{-2\pi i m}{n}} - 1} \qquad (3.8)$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Teorem 3.1.2. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin spektral normu için,

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_2 = \max\left(\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|, \frac{|nr|}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Circulant matrisler aynı zamanda normal matrisler olduğundan, λ_m ler $C_{a.d.}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_2 = \max_{0\le m\le n-1}\left|\lambda_m\right| = \max\left(\left|\lambda_0\right|, \max_{1\le m\le n-1}\left|\lambda_m\right|\right) \tag{3.9}$$

yazılır. $m=1,2,...,n-1$ için (3.8) den,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_m\right| &= \left|\frac{nr}{\cos\frac{2\pi m}{n} - i\sin\frac{2\pi m}{n} - 1}\right| \\
&= \frac{|nr|}{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi m}{n}\right)}} \\
&= \frac{|nr|}{\sqrt{2\left(1-\left(1-2\left(\sin\frac{\pi m}{n}\right)^2\right)\right)}} \\
&= \frac{|nr|}{2\sin\frac{\pi m}{n}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left|\lambda_m\right|$ değerinin maksimum olması için $2\sin\frac{\pi m}{n}$ değerinin en küçük olması gerekir. Bu durum, $m=1$ veya $m=n-1$ olması ile sağlanır. O halde,

$$\max_{1\le m\le n-1}\left|\lambda_m\right| = \frac{|nr|}{2\sin\frac{\pi}{n}} \tag{3.10}$$

olur. (3.4), (3.9) ve (3.10) ifadelerinden,

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_2 = \max\left(\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|, \frac{|nr|}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Teorem 3.1.3. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin Euclidean normu için,

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_E = n\sqrt{a^2+(n-1)ar+\frac{(n-1)(2n-1)}{6}r^2}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Euclidean norm tanımından,

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_E^2 = n\sum_{s=0}^{n-1}(a+sr)^2$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left\|C_{a.d.}\right\|_E^2 &= n\sum_{s=0}^{n-1}\left(a^2+2asr+s^2r^2\right)\\ &= n\left(\sum_{s=0}^{n-1}a^2+2ar\sum_{s=0}^{n-1}s+r^2\sum_{s=0}^{n-1}s^2\right)\\ &= n\left(na^2+n(n-1)ar+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}r^2\right)\\ &= n^2\left(a^2+(n-1)ar+\frac{(n-1)(2n-1)}{6}r^2\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\left\|C_{a.d.}\right\|_E = n\sqrt{a^2+(n-1)ar+\frac{(n-1)(2n-1)}{6}r^2}$$

yazılır.

Teorem 3.1.4. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin determinantı,

$$\left|C_{a.d.}\right| = (-nr)^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)$$

şeklindedir.

İspat:

$$\left|C_{a.d.}\right| = \begin{vmatrix} a & a+r & a+2r & \cdots & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ a+(n-1)r & a & a+r & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+2r & a+3r & a+4r & \cdots & a & a+r \\ a+r & a+2r & a+3r & \cdots & a+(n-1)r & a \end{vmatrix}$$

olup, bu determinanta satır ve sütun işlemleri uygulayalım. İlk olarak 2. satırdan itibaren her satırdan ilk satır çıkarılırsa,

$$|C_{a.d.}| = \begin{vmatrix} a & a+r & a+2r & a+3r & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ (n-1)r & -r & -r & -r & \cdots & -r & -r & -r \\ (n-2)r & (n-2)r & -2r & -2r & \cdots & -2r & -2r & -2r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2r & 2r & 2r & 2r & \cdots & 2r & (2-n)r & (2-n)r \\ r & r & r & r & \cdots & r & r & (1-n)r \end{vmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu determinantta 2. sütundan itibaren her sütundan ilk sütun çıkarılırsa,

$$|C_{a.d.}| = \begin{vmatrix} a & r & 2r & 3r & \cdots & (n-2)r & (n-1)r \\ (n-1)r & -nr & -nr & -nr & \cdots & -nr & -nr \\ (n-2)r & 0 & -nr & -nr & \cdots & -nr & -nr \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2r & 0 & 0 & 0 & \cdots & -nr & -nr \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nr \end{vmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu yeni determinantta 2. satırdan itibaren her satırdan, bir sonraki satır çıkarılırsa,

$$|C_{a.d.}| = \begin{vmatrix} a & r & 2r & 3r & \cdots & (n-2)r & (n-1)r \\ r & -nr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r & 0 & -nr & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & -nr & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nr \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

olup, (3.11) determinantı da, 1. sütuna göre açılırsa,

$$|C_{a.d.}| = a(-nr)^{n-1} - r^2(-nr)^{n-2} - 2r^2(-nr)^{n-2} - \cdots - (n-1)r^2(-nr)^{n-2}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned} |C_{a.d.}| &= (-nr)^{n-2}\left[-\left(anr + r^2 + 2r^2 + 3r^2 + \cdots + (n-1)r^2\right)\right] \\ &= (-1)^{n-1}(nr)^{n-2}\left[anr + \frac{n(n-1)}{2}r^2\right] \\ &= (-nr)^{n-1}\left(a + \frac{n-1}{2}r\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1. $C_{a.d.}$ $n \times n$ circulant matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart

$$a \neq -\frac{n-1}{2}r$$

olmasıdır.

Buradan itibaren, $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersi ile ilgili teoremlerimiz, $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersinin varlığı yani $a\neq -\frac{n-1}{2}r$ şartı altında ifade ve ispat edileceklerdir.

Teorem 3.1.5. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin adjoint matrisi,

$$Adj\left(C_{a.d.}\right)=\left(-1\right)^{n}n^{n-3}r^{n-2}cir\left(na+\frac{n^2-n-2}{2}r,-na-\frac{n^2-n+2}{2}r,-r,-r,...,-r\right)$$

şeklindedir.

İspat: $C_{a.d.}$ matrisinin a_{11} konumundaki elemanının işaretli minörü A_{11} olsun.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a & a+r & a+2r & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r \\ a+(n-1)r & a & a+r & \cdots & a+(n-4)r & a+(n-3)r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+3r & a+4r & a+5r & \cdots & a & a+r \\ a+2r & a+3r & a+4r & \cdots & a+(n-1)r & a \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

olup, (3.12) determinantına satır ve sütun işlemleri uygulanırsa,

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a & r & 2r & 3r & \cdots & (n-3)r & (n-2)r \\ r & -nr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r & 0 & -nr & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & -nr & 0 \\ 2r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nr \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) determinantı da 1. sütuna göre açılırsa,

$$A_{11}=a(-nr)^{n-2}-r^2(-nr)^{n-3}-2r^2(-nr)^{n-3}-\cdots-2(n-2)r^2(-nr)^{n-3}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-nr)^{n-3}\left[-\left(anr+r^2+2r^2+3r^2+\cdots+(n-2)r^2+(n-2)r^2\right)\right] \\ &= (-1)^{n-2}(nr)^{n-3}\left[anr+\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-2)\right)r^2\right] \\ &= (-1)^{n}\left[n^{n-2}r^{n-2}a+n^{n-3}r^{n-1}\frac{n^2-n-2}{2}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle, a_{21} konumundaki elemanın işaretli minörünün

$$(-1)^{n}\left[-n^{n-2}r^{n-2}a-n^{n-3}r^{n-1}\frac{n^2-n+2}{2}\right]$$

şeklinde, ilk sütundaki diğer elemanların işaretli minörlerinin ise eşit ve

$$(-1)^n\left[-n^{n-3}r^{n-1}\right]$$

şeklinde olduğu görülür. $C_{a.d.}$ matrisinin ilk sütun elemanlarının işaretli minörleri, adjointinin ilk satırını oluşturacağından ve circulant matrisin adjointi de circulant matris olacağından, $C_{a.d.}$ matrisinin adjoint matrisi;

$$Adj(C_{a.d.})=(-1)^n n^{n-3}r^{n-2}cir\left(na+\frac{n^2-n-2}{2}r,-na-\frac{n^2-n+2}{2}r,-r,-r,...,-r\right)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1.2. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersi,

$$C_{a.d.}^{-1}=\frac{1}{n^2\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)}cir\left(-\frac{na+\frac{n^2-n-2}{2}r}{r},\frac{na+\frac{n^2-n+2}{2}r}{r},1,1,\ldots,1\right) \qquad (3.14)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.6. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersinin spektral normu için,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_2=\begin{cases}\max\left(\dfrac{1}{\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|},\dfrac{2}{|nr|}\right), & n \text{ çift ise}\\ \max\left(\dfrac{1}{\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|},\dfrac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{|nr|}\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

yazılır.

İspat: Bir circulant matrisin tersi de circulant matris olup, aynı zamanda normal matris olduğundan, λ_m ler $C_{a.d.}^{-1}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_2=\max_{0\le m\le n-1}|\lambda_m|=\max\left(|\lambda_0|,\max_{1\le m\le n-1}|\lambda_m|\right) \qquad (3.15)$$

yazılır. $C_{a.d.}$ circulant matrisinin tersinin özdeğerleri,

$$\lambda_0=\frac{1}{na+\frac{n(n-1)}{2}r} \qquad (3.16)$$

ve $m=1,2,...,n-1$ için,

$$\lambda_m = \frac{e^{\frac{-2\pi i m}{n}} - 1}{nr} \tag{3.17}$$

olacağından, $m = 1,2,...,n-1$ için (3.17) den,

$$\left|\lambda_m\right| = \left|\frac{\cos\frac{2\pi m}{n} - i\sin\frac{2\pi m}{n} - 1}{nr}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi m}{n}\right)}}{\left|nr\right|}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi m}{n}}{\left|nr\right|}$$

elde edilir. $\left|\lambda_m\right|$ değerinin maksimum olması için $2\sin\frac{\pi m}{n}$ değerinin en büyük olması gerekir. Bu durum,

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olması ile sağlanır. O halde,

$$\max_{1\le m\le n-1}\left|\lambda_m\right| = \begin{cases} \frac{2}{\left|nr\right|}, & n \text{ çift ise} \\ \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\left|nr\right|}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.18}$$

olur. (3.15), (3.16) ve (3.18) ifadelerinden,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_2 = \begin{cases} \max\left(\frac{1}{\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|}, \frac{2}{\left|nr\right|}\right), & n \text{ çift ise} \\ \max\left(\frac{1}{\left|na+\frac{n(n-1)}{2}r\right|}, \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{\left|nr\right|}\right), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Teorem 3.1.7. $C_{a.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersinin Euclidean normu için,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_E = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{r^2}+\frac{1}{n\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)^2}}$$

yazılır.

İspat: Euclidean norm tanımından,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_E^2 = n\frac{1}{n^4\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)^2}\left[\frac{\left[na+\frac{n^2-n-2}{2}r\right]^2+\left[na+\frac{n^2-n+2}{2}r\right]^2}{r^2}+n-2\right]$$

yazılır. Buradan,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_E^2 = \frac{\frac{2n^2}{r^2}\left(a^2+\frac{n^2-2n+1}{4}r^2+nar-ar\right)+n}{n^3\left(a^2+\frac{n^2-2n+1}{4}r^2+anr-ar\right)}$$

$$= \left[\frac{2n^2}{n^3r^2}+\frac{n}{n^3\left(a^2+\frac{n^2-2n+1}{4}r^2+anr-ar\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{2}{r^2}+\frac{1}{n\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)^2}\right]$$

elde edilir ki, buradan da,

$$\left\|C_{a.d.}^{-1}\right\|_E = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{r^2}+\frac{1}{n\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)^2}}$$

yazılır.

Teorem 3.1.8. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_0 = a\frac{1-r^n}{1-r},$$

$$\lambda_m = a\frac{1-r^n}{1-re^{\frac{-2\pi i m}{n}}}\ ,\ \ m=1,2,...,n-1$$

şeklindedir.

İspat: (2.5) ifadesinden $C_{g.d.}$ matrisinin özdeğerleri, $m=0,1,...,n-1$ için,

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1}\left(ar^k\right)e^{\frac{-2\pi i mk}{n}} \tag{3.19}$$

şeklinde yazılır. $m=0$ için,

$$\lambda_0 = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}\right)= a\frac{1-r^n}{1-r} \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilir. Yani; λ_0, $C_{g.d.}$ matrisinin ilk satır elemanları toplamına eşittir.

$m=1,2,...,n-1$ için (3.19) ifadesinden,

$$\lambda_m = a + are^{\frac{-2\pi i m}{n}} + ar^2e^{\frac{-2\pi i m2}{n}} + \cdots + ar^{n-1}e^{\frac{-2\pi i m(n-1)}{n}}$$

yazılır. Buradan,

$$\lambda_m = a\left(1+re^{\frac{-2\pi i m}{n}} + \left(re^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^2 + \left(re^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(re^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

elde edilir. $r\neq -1$ ve $re^{\frac{-2\pi i m}{n}} \neq 1$ olacağından Lemma 3.1.1. (*i*)' den,

$$\lambda_m = a\frac{1-\left(re^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^n}{1-re^{\frac{-2\pi i m}{n}}}$$

yazılır. $\left(e^{\frac{-2\pi i m}{n}}\right)^n = 1$ olduğundan,

$$\lambda_m = a\frac{1-r^n}{1-re^{\frac{-2\pi i m}{n}}} \tag{3.21}$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Teorem 3.1.9. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin spektral normu için,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_2=\begin{cases}|a|\left|\dfrac{1-r^n}{1-r}\right|, & r>0 \text{ ise}\\ |a|\left|\dfrac{1-r^n}{1+r}\right|, & r<0 \text{ ve } n \text{ çift ise}\\ |a|\dfrac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1+2r\cos\dfrac{\pi}{n}+r^2}}, & r<0 \text{ ve } n \text{ tek ise}\end{cases}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Circulant matrisler aynı zamanda normal matrisler olduğundan, λ_m ler $C_{g.d.}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_2=\max_{0\le m\le n-1}|\lambda_m|=\max\left(|\lambda_0|,\max_{1\le m\le n-1}|\lambda_m|\right) \tag{3.22}$$

yazılır. $m=1,2,...,n-1$ için (3.21) den,

$$|\lambda_m|=|a|\frac{\left|1-r^n\right|}{\left|1-r\cos\dfrac{2\pi m}{n}+ir\sin\dfrac{2\pi m}{n}\right|}$$

$$=|a|\frac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1-2r\cos\dfrac{2\pi m}{n}+r^2}} \tag{3.23}$$

elde edilir. Buradan $r>0$ ise;

$$|a|\frac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1-2r\cos\dfrac{2\pi m}{n}+r^2}}\le\max_{1\le m\le n-1}|\lambda_m|<|a|\left|\frac{1-r^n}{1-r}\right|=|\lambda_0|, \tag{3.24}$$

$r<0$ ise;

$$|\lambda_0| = |a|\left|\frac{1-r^n}{1-r}\right| < |a|\frac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1-2r\cos\frac{2\pi m}{n}+r^2}}$$

$$\leq \max_{1\leq m\leq n-1}|\lambda_m| = \begin{cases} |a|\left|\dfrac{1-r^n}{1+r}\right|, & n \text{ çift ise} \\ |a|\dfrac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1+2r\cos\frac{\pi}{n}+r^2}}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.22), (3.24) ve (3.25) ifadelerinden,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_2 = \begin{cases} |a|\left|\dfrac{1-r^n}{1-r}\right|, & r>0 \text{ ise} \\ |a|\left|\dfrac{1-r^n}{1+r}\right|, & r<0 \text{ ve } n \text{ çift ise} \\ |a|\dfrac{\left|1-r^n\right|}{\sqrt{1+2r\cos\frac{\pi}{n}+r^2}}, & r<0 \text{ ve } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin ℓ_p $\left(1<p<\infty\right)$ normu için,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_p^p = \begin{cases} n|a|^p\dfrac{1+r^{pn}}{1+r^p}, & p \text{ tek ve } n \text{ tek ve } r<0 \text{ ise} \\ n|a|^p\dfrac{1-r^{pn}}{1+r^p}, & p \text{ tek ve } n \text{ çift ve } r<0 \text{ ise} \\ n|a|^p\dfrac{1-r^{pn}}{1-r^p}, & r>0 \text{ veya } p \text{ çift ise} \end{cases}$$

yazılır.

İspat: ℓ_p normu tanımından,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_p^p = n\sum_{s=0}^{n-1}\left|ar^s\right|^p = n|a|^p\sum_{s=0}^{n-1}\left|r^p\right|^s$$

yazılır. Buradan ve Lemma 3.1.1. (*i*)' den,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_p^p = n|a|^p \frac{1-\left|r^p\right|^n}{1-\left|r^p\right|}$$

elde edilir ki, buradan da,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_p^p = \begin{cases} n|a|^p \dfrac{1+r^{pn}}{1+r^p}, & p \text{ tek ve } n \text{ tek ve } r<0 \text{ ise} \\ n|a|^p \dfrac{1-r^{pn}}{1+r^p}, & p \text{ tek ve } n \text{ çift ve } r<0 \text{ ise} \\ n|a|^p \dfrac{1-r^{pn}}{1-r^p}, & r>0 \text{ veya } p \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3. $p=2$ için ℓ_p normu Euclidean norm olacağından, Teorem 3.1.10.' da $p=2$ seçilirse, $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin Euclidean normu için,

$$\left\|C_{g.d.}\right\|_E = |a|\sqrt{n\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}}$$

yazılır.

Teorem 3.1.11. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin determinantı,

$$\left|C_{g.d.}\right| = a^n\left(1-r^n\right)^{n-1}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\left|C_{g.d.}\right| = \begin{vmatrix} a & ar & ar^2 & \cdots & ar^{n-3} & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\ ar^{n-1} & a & ar & \cdots & ar^{n-4} & ar^{n-3} & ar^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ar^2 & ar^3 & ar^4 & \cdots & ar^{n-1} & a & ar \\ ar & ar^2 & ar^3 & \cdots & ar^{n-2} & ar^{n-1} & a \end{vmatrix} \tag{3.26}$$

olup, (3.26) determinantında son sütundan başlayarak her sütuna bir önceki sütunun $-r$ katı eklenirse,

$$\left|C_{g.d.}\right| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ar^{n-1} & a-ar^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ar^{n-2} & 0 & a-ar^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^2 & 0 & 0 & \cdots & a-ar^n & 0 \\ ar & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-ar^n \end{vmatrix} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.27) determinantı ilk satıra göre açılırsa,

$$\left|C_{g.d.}\right| = a\left(a - ar^n\right)^{n-1} = a^n\left(1 - r^n\right)^{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.12. $C_{g.d.}$ $n \times n$ circulant matrisinin adjoint matrisi,

$$Adj\left(C_{g.d.}\right) = a^{n-1}\left(1 - r^n\right)^{n-2} cir(1, -r, 0, 0, ..., 0)$$

şeklindedir.

İspat: $C_{g.d.}$ matrisinin a_{11} konumundaki elemanının işaretli minörü A_{11} olsun.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a & ar & ar^2 & \cdots & ar^{n-3} & ar^{n-2} \\ ar^{n-1} & a & ar & \cdots & ar^{n-4} & ar^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^3 & ar^4 & ar^5 & \cdots & a & ar \\ ar^2 & ar^3 & ar^4 & \cdots & ar^{n-1} & a \end{vmatrix} \tag{3.28}$$

olup, (3.28) determinantında son sütundan başlayarak her sütuna bir önceki sütunun $-r$ katı eklenirse,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ar^{n-1} & a - ar^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ar^{n-2} & 0 & a - ar^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^3 & 0 & 0 & \cdots & a - ar^n & 0 \\ ar^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a - ar^n \end{vmatrix} \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29) determinantı ilk satıra göre açılırsa,

$$A_{11} = a^{n-1}\left(1 - r^n\right)^{n-2}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle, a_{21} konumundaki elemanın işaretli minörünün

$$-a^{n-1}r\left(1 - r^n\right)^{n-2}$$

şeklinde, ilk sütundaki diğer elemanların işaretli minörlerinin ise eşit ve 0 (sıfır) olduğu görülür. $C_{g.d.}$ matrisinin ilk sütun elemanlarının işaretli minörleri, adjointinin ilk satırını oluşturacağından ve Circulant matrisin adjointi de circulant olacağından, $C_{g.d.}$ $n \times n$ circulant matrisinin adjoint matrisi;

$$Adj\left(C_{g.d.}\right) = a^{n-1}\left(1 - r^n\right)^{n-2} cir(1, -r, 0, 0, ..., 0)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1.4. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersi,

$$C_{g.d.}^{-1}=\frac{1}{a\left(r^{n}-1\right)}cir\left(-1,r,0,0,\ldots,0\right)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.13. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersinin spektral normu için,

$$\left\|C_{g.d.}^{-1}\right\|_{2}=\begin{cases}\dfrac{1}{|a|}\left|\dfrac{1-r}{1-r^{n}}\right|, & r<0 \text{ ise}\\[2ex] \dfrac{1}{|a|}\left|\dfrac{1+r}{1-r^{n}}\right|, & r>0 \text{ ve } n \text{ çift ise}\\[2ex] \dfrac{1}{|a|}\dfrac{\sqrt{1+2r\cos\dfrac{\pi}{n}+r^{2}}}{\left|1-r^{n}\right|}, & r>0 \text{ ve } n \text{ tek ise}\end{cases}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Circulant matrisler aynı zamanda normal matrisler olduğundan, λ_{m} ler $C_{g.d.}$ matrisinin tersinin özdeğerleri olmak üzere;

$$\left\|C_{g.d.}^{-1}\right\|_{2}=\max_{0\le m\le n-1}\left|\lambda_{m}\right|=\max\left(\left|\lambda_{0}\right|,\max_{1\le m\le n-1}\left|\lambda_{m}\right|\right) \tag{3.30}$$

yazılır. $C_{g.d.}$ circulant matrisinin tersinin özdeğerleri,

$$\lambda_{0}=\frac{1-r}{a\left(1-r^{n}\right)} \tag{3.31}$$

ve $m=1,2,...,n-1$ için,

$$\lambda_{m}=\frac{1-re^{\frac{-2\pi i m}{n}}}{a\left(1-r^{n}\right)} \tag{3.32}$$

şeklinde olacağından, $m=1,2,...,n-1$ için (3.32) den,

$$\left|\lambda_{m}\right|=\frac{1}{|a|}\left|\frac{1-r\cos\dfrac{2\pi m}{n}+ir\sin\dfrac{2\pi m}{n}}{1-r^{n}}\right|$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{1-2r\cos\dfrac{2\pi m}{n}+r^{2}}}{\left|1-r^{n}\right|} \tag{3.33}$$

elde edilir. Buradan $r > 0$ ise;

$$|\lambda_0| = \frac{1}{|a|}\left|\frac{1-r}{1-r^n}\right| < \frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{1-2r\cos\frac{2\pi m}{n}+r^2}}{\left|1-r^n\right|}$$

$$\leq \max_{1\leq m\leq n-1}|\lambda_m| = \begin{cases} |a|\left|\dfrac{1+r}{1-r^n}\right|, & n \text{ çift ise} \\ |a|\dfrac{\sqrt{1+2r\cos\frac{\pi}{n}+r^2}}{\left|1-r^n\right|}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.34}$$

$r < 0$ ise;

$$\frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{1-2r\cos\frac{2\pi m}{n}+r^2}}{\left|1-r^n\right|} \leq \max_{1\leq m\leq n-1}|\lambda_m| < \frac{1}{|a|}\left|\frac{1-r}{1-r^n}\right| = |\lambda_0| \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.30), (3.34) ve (3.35) ifadelerinden,

$$\left\|C_{g.d.}^{-1}\right\|_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{|a|}\left|\dfrac{1-r}{1-r^n}\right|, & r < 0 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{|a|}\left|\dfrac{1+r}{1-r^n}\right|, & r > 0 \text{ ve } n \text{ çift ise} \\ \dfrac{1}{|a|}\dfrac{\sqrt{1+2r\cos\frac{\pi}{n}+r^2}}{\left|1-r^n\right|}, & r > 0 \text{ ve } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.14. $C_{g.d.}$ $n\times n$ circulant matrisinin tersinin ℓ_p $(1 < p < \infty)$ normu için,

$$\left\|C_{g.d.}^{-1}\right\|_p^p = n\frac{1+|r|^p}{|a|^p\left|r^n-1\right|^p}$$

yazılır.

İspat: ℓ_p normu tanımından açıktır.

Sonuç 3.1.5. $C_{g.d.}^{-1}$ $n\times n$ circulant matrisinin Euclidean normu için,

$$\left\|C_{g.d.}^{-1}\right\|_E = \frac{\sqrt{n\left(1+r^2\right)}}{|a|\left|\left(r^n-1\right)\right|}$$

yazılır.

3.2. Diziler ve Toeplitz Matrisleri

Bu bölümde (2.1) ile verilen T Toeplitz matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacak şekilde seçip, elde edilen matrislerin özdeğerlerini, bazı normlarını ve tersinin olup olmadığını inceleyeceğiz.

Şimdi, (2.1) ile verilen T Toeplitz matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $t_{ij} = a+(j-i)r$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrise $T_{a.d.}$ diyelim. O halde $T_{a.d.}$ matrisi açık olarak;

$$T_{a.d.} = \begin{bmatrix} a & a+r & \cdots & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ a-r & a & \cdots & a+(n-3)r & a+(n-2)r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(2-n)r & a+(3-n)r & \cdots & a & a+r \\ a+(1-n)r & a+(2-n)r & \cdots & a-r & a \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de, yine (2.1) ile verilen T Toeplitz matrisinin elemanlarını bir geometrik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $t_{ij} = ar^{j-i}$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrise $T_{g.d.}$ diyelim. O halde $T_{g.d.}$ matrisi açık olarak;

$$T_{g.d.} = \begin{bmatrix} a & ar & ar^2 & \cdots & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\ ar^{-1} & a & ar & \cdots & ar^{n-3} & ar^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^{2-n} & ar^{3-n} & ar^{4-n} & \cdots & a & ar \\ ar^{1-n} & ar^{2-n} & ar^{3-n} & \cdots & ar^{-1} & a \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

şeklinde yazılır.

Buradan itibaren $T_{a.d.}$ notasyonu (3.36) daki matrisi, $T_{g.d.}$ notasyonu da (3.37) deki matrisi temsil edecektir.

Teorem 3.2.1. $T_{a.d.}$ $n\times n$ Toeplitz matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = \frac{n}{2}a + \frac{n}{2}\sqrt{a^2 - \frac{n^2-1}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{2}a - \frac{n}{2}\sqrt{a^2 - \frac{n^2-1}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_m = 0\,, \qquad m = 3,4,...,n$$

şeklindedir.

İspat: $T_{a.d.}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}\right| = 0$$

denkleminin kökleridir.

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}\right| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -a-r & \cdots & -a-(n-2)r & -a-(n-1)r \\ -a+r & \lambda-a & \cdots & -a-(n-3)r & -a-(n-2)r \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a+(n-2)r & -a+(n-3)r & \cdots & \lambda-a & -a-r \\ -a+(n-1)r & -a+(n-2)r & \cdots & -a+r & \lambda-a \end{vmatrix} \tag{3.38}$$

olup, (3.38) determinantına satır ve sütun işlemleri uygulanırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}\right| = \lambda^{n-2}\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-2a-r & \cdots & (n-3)\lambda - \frac{n^2-5n+8}{2}a - (n-2)\frac{n^2-7n+18}{6}r & -2a-(2n-3)r \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda + \frac{n^2-5n+8}{2}r & nr \end{vmatrix}$$

elde edilir. Son determinant 1. sütuna göre açılır ve daha sonra gelecek determinantlar da 1. sütuna göre açılırsa en sonunda,

$$|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}| = \lambda^{n-2} \begin{vmatrix} \lambda - (n-2)a - \dfrac{(n-3)(n-2)}{2} r & (n-3)\lambda - \dfrac{n^2-5n+8}{2} a - (n-2)\dfrac{n^2-7n+18}{6} r & -2a-(2n-3)r \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda + \dfrac{n(n-1)}{2} r & nr \end{vmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu son determinant hesaplanırsa,

$$|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}| = \lambda^{n-2} \left[\lambda^2 - na\lambda - \frac{n^4 - n^2}{12} r^2 \right]$$

elde edilir ki,

$$|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.}| = \lambda^{n-2} \left[\lambda^2 - na\lambda - \frac{n^4 - n^2}{12} r^2 \right] = 0$$

denkleminin kökleri dolayısıyla $T_{a.d.}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = \frac{n}{2} a + \frac{n}{2} \sqrt{a^2 - \frac{n^2-1}{3} r^2} \ ,$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{2} a - \frac{n}{2} \sqrt{a^2 - \frac{n^2-1}{3} r^2} \ ,$$

$$\lambda_m = 0 \ , \quad m = 3, 4, ..., n$$

şeklinde elde edilir. Yani, $T_{a.d.}$ matrisinin özdeğerlerinden $n-2$ tanesi 0 (sıfır) dır.

Sonuç 3.2.1. $|T_{a.d.}| = 0$

Sonuç 3.2.2. $T_{a.d.}$ matrisinin tersi yoktur.

Teorem 3.2.2. $T_{a.d.}$ $n \times n$ toeplitz matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = \frac{n}{2} \sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3} r^2} + \frac{n}{2} a \ ,$$

$$\sigma_2 = \frac{n}{2} \sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3} r^2} - \frac{n}{2} a \ ,$$

$$\sigma_m = 0 \ , \quad m = 3, 4, ..., n$$

şeklindedir.

İspat: $T_{a.d.}^{*}$; $T_{a.d.}$ matrisinin transpozu olmak üzere, $T_{a.d.}$ matrisinin singüler değerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.} T_{a.d}^{*}\right| = 0$$

denkleminin köklerinin karekökleridir.

$$\left|\lambda I - T_{a.d.} T_{a.d.}^{*}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{s=0}^{n-1}(a+sr)^2 & -\sum_{s=0}^{n-1}(a+sr)(a+(s-1)r) & \cdots & -\sum_{s=0}^{n-1}(a+sr)(a+(s-(n-1))r) \\ -\sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-1)r)(a+sr) & \lambda - \sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-1)r)^2 & \cdots & -\sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-1)r)(a+(s-(n-1))r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-(n-1))r)(a+sr) & -\sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-(n-1))r)(a+(s-1)r) & \cdots & \lambda - \sum_{s=0}^{n-1}(a+(s-(n-1))r)^2 \end{vmatrix}$$

olur. $\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.} T_{a.d.}^{*}\right|$; satır ve sütun işlemleri uygulanarak hesaplanırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.} T_{a.d.}^{*}\right| = \lambda^{n-2}\left[\lambda^2 - \left(n^2 a^2 + \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{6} r^2\right)\lambda + \left(\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12} r^2\right)^2\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{a.d.} T_{a.d.}^{*}\right| = \lambda^{n-2}\left[\lambda^2 - \left(n^2 a^2 + \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{6} r^2\right)\lambda + \left(\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12} r^2\right)^2\right] = 0$$

denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = \left(\frac{n}{2}a + \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3}r^2}\right)^2,$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{n}{2}a - \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3}r^2}\right)^2,$$

$$\lambda_m = 0, \quad m = 3, 4, ..., n$$

olarak elde edilir ki, $T_{a.d.}$ Toeplitz matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3}r^2} + \frac{n}{2}a \ ,$$

$$\sigma_2 = \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + \frac{n^2-1}{3}r^2} - \frac{n}{2}a \ ,$$

$$\sigma_m = 0 \ , \ m = 3, 4, ..., n$$

olur.

Sonuç 3.2.3. $T_{a.d.}$ $n\times n$ Toeplitz matrisinin spektral normu,

$$\left\|T_{a.d.}\right\|_2=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\sqrt{a^2+\dfrac{n^2-1}{3}r^2}+\dfrac{n}{2}a, & a>0 \text{ ise}\\[2ex] \dfrac{n}{2}\sqrt{a^2+\dfrac{n^2-1}{3}r^2}-\dfrac{n}{2}a, & a<0 \text{ ise}\end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.3. $T_{a.d.}$ $n\times n$ Toeplitz matrisinin Euclidean normu,

$$\left\|T_{a.d.}\right\|_E=n\sqrt{a^2+\frac{n^2-1}{6}r^2}$$

şeklindedir.

İspat: Euclidean norm tanımından,

$$\left\|T_{a.d.}\right\|_E^2=na^2+(n-1)(a+r)^2+(n-2)(a+2r)^2+\cdots+[a+(n-1)r]^2$$
$$+(n-1)(a-r)^2+(n-2)(a-2r)^2+\cdots+[a-(n-1)r]^2$$

yazılır. Buradan,

$$\left\|T_{a.d.}\right\|_E^2=na^2+2a^2[1+2+3+\cdots+(n-1)]+2\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)(sr)^2$$

$$=na^2+2a^2\frac{(n-1)n}{2}+2\left(n\sum_{s=1}^{n-1}s^2-\sum_{s=1}^{n-1}s^3\right)r^2$$

$$=n^2a^2+2n^2\left(\frac{2n^2-3n+1}{6}-\frac{n^2-2n+1}{4}\right)r^2$$

$$=n^2\left(a^2+\frac{n^2-1}{6}r^2\right)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left\|T_{a.d.}\right\|_E=n\sqrt{a^2+\frac{n^2-1}{6}r^2} \tag{3.39}$$

yazılır.

Teorem 3.2.4. $T_{g.d.}$ $n\times n$ Toeplitz matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1=na,$$

$$\lambda_m=0,\ m=2,3,...,n$$

şeklindedir.

İspat: $T_{g.d.}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = 0$$

denkleminin kökleridir.

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -ar & -ar^2 & \cdots & -ar^{n-2} & -ar^{n-1} \\ -ar^{-1} & \lambda - a & -ar & \cdots & -ar^{n-3} & -ar^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -ar^{2-n} & -ar^{3-n} & -ar^{4-n} & \cdots & \lambda - a & -ar \\ -ar^{1-n} & -ar^{2-n} & -ar^{3-n} & \cdots & -ar^{-1} & \lambda - a \end{vmatrix} \tag{3.40}$$

olup, (3.40) determinantında 1. sütunun; $-r$ katı 2. sütuna, $-r^2$ katı 3. sütuna,…, $-r^{n-1}$ katı n. sütuna eklenirse,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -\lambda r & -\lambda r^2 & \cdots & -\lambda r^{n-2} & \lambda r^{n-1} \\ -ar^{-1} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -ar^{2-n} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ -ar^{1-n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.41) determinantı, ilk sütuna göre açılırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = (\lambda - a)\lambda^{n-1} + ar^{-1}(-\lambda r)\lambda^{n-2} - ar^{-2}(\lambda r^2)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n ar^{1-n}(-1)^{n-1}\lambda r^{n-1}\lambda^{n-2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \underbrace{a - a - a - \cdots - a}_{n \text{ tane}}\right)$$

elde edilir ki,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}\right| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \underbrace{a - a - a - \cdots - a}_{n \text{ tane}}\right) = 0$$

denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = na, \tag{3.42}$$

$$\lambda_m = 0,\ m = 2,3,...,n$$

şeklindedir. Buradan $T_{g.d.}$ matrisinin özdeğerlerinden n-1 tanesinin 0 (sıfır) olduğu görülür.

Sonuç 3.2.4. $\left|T_{g.d.}\right| = 0$

Sonuç 3.2.5. $T_{g.d.}$ matrisinin tersi yoktur.

Teorem 3.2.5. $T_{g.d.}$ $n\times n$ Toeplitz matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = |a|\left|\frac{r^{n+1}-r^{1-n}}{1-r^2}\right|,$$

$$\sigma_m = 0,\ m = 2,3,...,n$$

şeklindedir.

İspat: $T^*_{g.d.}$; $T_{g.d.}$ matrisinin transpozu olmak üzere, $T_{g.d.}$ matrisinin singüler değerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}T^*_{g.d.}\right| = 0$$

denkleminin köklerinin karekökleridir.

$$\left|\lambda I - T_{g.d.}T^*_{g.d.}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s} & -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-1} & \cdots & -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-(n-1)} \\ -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-1} & \lambda - \sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-2} & \cdots & -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-(n-1)} & -\sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-n} & \cdots & \lambda - \sum_{s=0}^{n-1} a^2 r^{2s-2(n-1)} \end{vmatrix}$$

olur. $\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}T^*_{g.d.}\right|$; satır ve sütun işlemleri uygulanarak hesaplanırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}T^*_{g.d.}\right| = \lambda^{n-1}\left[\lambda - na^2 - a^2\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\left(r^{2s}+r^{-2s}\right)\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - T_{g.d.}T^*_{g.d.}\right| = \lambda^{n-1}\left[\lambda - na^2 - a^2\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\left(r^{2s}+r^{-2s}\right)\right] = 0$$

denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = a^2\left(\frac{r^{n+1}-r^{1-n}}{1-r^2}\right)^2,$$

$$\lambda_m = 0,\ \ m = 2,3,...,n$$

olarak elde edilir ki, $T_{g.d.}$ Toeplitz matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = |a| \left| \frac{r^{n+1} - r^{1-n}}{1-r^2} \right| ,$$

$$\sigma_m = 0 , \ m = 2,3,...,n$$

olur.

Sonuç 3.2.6. $T_{g.d.}$ $n \times n$ Toeplitz matrisinin spektral normu,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_2 = |a| \left| \frac{r^{n+1} - r^{1-n}}{1-r^2} \right| \tag{3.43}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.6. $T_{g.d.}$ $n \times n$ Toeplitz matrisinin ℓ_p $\left(1 < p < \infty\right)$ normu için,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_p^p = \begin{cases} |a|^p \left(\dfrac{r^{\frac{pn+p}{2}} - r^{\frac{p-pn}{2}}}{1-r^p} \right)^2 , & p \text{ çift veya } r > 0 \text{ ise} \\ |a|^p \left(\dfrac{(-r)^{\frac{pn+p}{2}} - (-r)^{\frac{p-pn}{2}}}{1+r^p} \right)^2 , & p \text{ tek ve } r < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

yazılır.

İspat: ℓ_p normu tanımından,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_p^p = n|a|^p + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s) \left| ar^s \right|^p + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s) \left| ar^{-s} \right|^p$$

yazılır. Buradan,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_p^p = |a|^p \left(n + n \sum_{s=1}^{n-1} \left| r^p \right|^s - \sum_{s=1}^{n-1} s \left| r^p \right|^s + n \sum_{s=1}^{n-1} \left| r^{-p} \right|^s - \sum_{s=1}^{n-1} s \left| r^{-p} \right|^s \right) \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.44) ifadesinde $\left| r^p \right| = x$ alınırsa $x \neq 1$ ve (3.44) eşitliği,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_p^p = |a|^p \left(n + n \sum_{s=1}^{n-1} x^s - \sum_{s=1}^{n-1} s x^s + n \sum_{s=1}^{n-1} \left(x^{-1} \right)^s - \sum_{s=1}^{n-1} s \left(x^{-1} \right)^s \right) \tag{3.45}$$

şeklinde olur. Lemma 3.1.1. *(ii-iii)* ve (3.45) eşitliğinden,

$$\left\| T_{g.d.} \right\|_p^p = |a|^p \left(n + n \frac{x - x^n}{1-x} - \frac{x - nx^n + nx^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2} + n \frac{x^{-1} - x^{-n}}{1-x^{-1}} - \frac{x^{-1} - nx^{-n} + nx^{-n-1} - x^{-n-1}}{\left(1-x^{-1}\right)^2} \right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left\|T_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p \left(n + \frac{nx - nx^n}{1-x} - \frac{x - nx^n + nx^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2} + n\frac{1-x^{1-n}}{x-1} - \frac{x - nx^{-n+2} + nx^{-n+1} - x^{-n+1}}{(1-x)^2} \right)$$

$$= |a|^p \left(\frac{n - 2nx + nx^2 + 2nx - nx^2 - 2x + x^{n+1} - n + x^{-n+1}}{(1-x)^2} \right)$$

$$= |a|^p \left(\frac{-2x + x^{n+1} + x^{-n+1}}{(1-x)^2} \right)$$

$$= |a|^p \left(\frac{x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{1-n}{2}}}{1-x} \right)^2 \qquad (3.46)$$

olup, (3.46) eşitliğinde x yerine $|r^p|$ yazılırsa,

$$\left\|T_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p \left(\frac{|r^p|^{\frac{n+1}{2}} - |r^p|^{\frac{1-n}{2}}}{1-|r^p|} \right)^2$$

elde edilir ki,

$$\left\|T_{g.d.}\right\|_p^p = \begin{cases} |a|^p \left(\dfrac{r^{\frac{pn+p}{2}} - r^{\frac{p-pn}{2}}}{1-r^p} \right)^2, & p \text{ çift veya } r > 0 \text{ ise} \\ |a|^p \left(\dfrac{(-r)^{\frac{pn+p}{2}} - (-r)^{\frac{p-pn}{2}}}{1+r^p} \right)^2, & p \text{ tek ve } r < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

Sonuç 3.2.7. $p = 2$ için ℓ_p normu Euclidean norm olacağından, Teorem 3.2.6.' da $p = 2$ seçilirse, $T_{g.d.}$ $n \times n$ Toeplitz matrisinin Euclidean normu için,

$$\left\|T_{g.d.}\right\|_E = |a| \left| \frac{r^{n+1} - r^{1-n}}{1-r^2} \right|$$

yazılır.

Sonuç 3.2.8. $T_{g.d.}$ $n \times n$ Toeplitz matrisinin Euclidean normu ile spektral normu birbirine eşittir.

3.3. Diziler ve Hankel Matrisleri

Bu bölümde (2.2) ile verilen H Hankel matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin veya geometrik dizinin ardışık terimleri olacak şekilde seçip, elde edilen matrislerin özdeğerlerini, bazı normlarını ve tersinin olup olmadığını inceleyeceğiz.

Şimdi, (2.2) ile verilen H Hankel matrisinin elemanlarını bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $h_{ij} = a + (i+j)r$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrisi $H_{a.d.}$ ile gösterelim. O halde $H_{a.d.}$ matrisi açık olarak;

$$H_{a.d.} = \begin{bmatrix} a & a+r & \cdots & a+(n-2)r & a+(n-1)r \\ a+r & a+2r & \cdots & a+(n-1)r & a+nr \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-2)r & a+(n-1)r & \cdots & a+(2n-4)r & a+(2n-3)r \\ a+(n-1)r & a+nr & \cdots & a+(2n-3)r & a+(2n-2)r \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de, yine (2.2) ile verilen H Hankel matrisinin elemanlarını bir geometrik dizinin ardışık terimleri olacak biçimde, yani, $\forall i, j = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $h_{ij} = ar^{i+j}$ şeklinde tanımlayalım ve bu matrisi $H_{g.d.}$ ile gösterelim. O halde $H_{g.d.}$ matrisi açık olarak;

$$H_{g.d.} = \begin{bmatrix} a & ar & ar^2 & \cdots & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\ ar & ar^2 & ar^3 & \cdots & ar^{n-1} & ar^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ar^{n-2} & ar^{n-1} & ar^n & \cdots & ar^{2n-4} & ar^{2n-3} \\ ar^{n-1} & ar^n & ar^{n+1} & \cdots & ar^{2n-3} & ar^{2n-2} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

şeklinde yazılır.

Buradan itibaren $H_{a.d.}$ notasyonu (3.47) deki matrisi, $H_{g.d.}$ notasyonu da (3.48) deki matrisi temsil edecektir.

Teorem 3.3.1. $H_{a.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1=\frac{n}{2}a+\frac{n(n-1)}{2}r+\frac{n}{2}\sqrt{a^2+2(n-1)ar+\frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_2=\frac{n}{2}a+\frac{n(n-1)}{2}r-\frac{n}{2}\sqrt{a^2+2(n-1)ar+\frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_m=0\,,\quad m=3,4,...,n$$

şeklindedir.

İspat: $H_{a.d.}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{a.d.}\right|=0$$

denkleminin kökleridir.

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{a.d.}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a-r & \cdots & -a-(n-2)r & -a-(n-1)r \\ -a-r & \lambda-a-2r & \cdots & -a-(n-1)r & -a-nr \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a-(n-2)r & -a-(n-1)r & \cdots & \lambda-a-(2n-4)r & -a-(2n-3)r \\ -a-(n-1)r & -a-nr & \cdots & -a-(2n-3)r & \lambda-a-(2n-2)r \end{vmatrix} \tag{3.49}$$

olup, (3.49) determinantına satır ve sütun işlemleri uygulanırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{a.d.}\right|=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-2a-r & \cdots & (n-3)\lambda-\frac{n^2-5n+8}{2}a-(n-2)\frac{n^2-7n+18}{6}r & -2a-(2n-3)r \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda-\frac{n(n-1)}{2}r & -nr \end{vmatrix}$$

elde edilir. Son determinant 1. sütuna göre açılır ve daha sonra gelecek determinantlar da 1. sütuna göre açılırsa en sonunda,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{a.d.}\right|=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix} \lambda-(n-2)a-\frac{(n-3)(n-2)}{2}r & (n-3)\lambda-\frac{n^2-5n+8}{2}a-(n-2)\frac{n^2-7n+18}{6}r & -2a-(2n-3)r \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda-\frac{n(n-1)}{2}r & -nr \end{vmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen bu son determinant hesaplanırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{a.d.}\right|=\lambda^{n-2}\left[\lambda^2-(na+n(n-1)r)\lambda-\frac{n^4-n^2}{12}r^2\right]$$

olur ki,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - H_{a.d.}\right| = \lambda^{n-2}\left[\lambda^2 - \left(na + n(n-1)r\right)\lambda - \frac{n^4 - n^2}{12}r^2\right] = 0$$

denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = \frac{n}{2}a + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{2}a + \frac{n(n-1)}{2}r - \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\ ,$$

$$\lambda_m = 0\ ,\quad m = 3,4,...,n$$

şeklindedir. Buradan $H_{a.d.}$ matrisinin özdeğerlerinden $n-2$ tanesinin 0 (sıfır) olduğu görülür.

Sonuç 3.3.1. $\left|H_{a.d.}\right| = 0$

Sonuç 3.3.2. $H_{a.d.}$ matrisinin tersi yoktur.

Sonuç 3.3.3. $H_{a.d.}$ $n \times n$ Hankel matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = \left|\frac{n}{2}a + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\right|,$$

$$\sigma_2 = \left|\frac{n}{2}a + \frac{n(n-1)}{2}r - \frac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \frac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2}\right|\ ,$$

$$\sigma_m = 0\ ,\quad m = 3,4,...,n$$

şeklindedir.

Sonuç 3.3.4. $H_{a.d.}$ $n \times n$ Hankel matrisinin spektral normu,

$$\left\|H_{a.d.}\right\|_2 = \begin{cases} \dfrac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \dfrac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2} + \dfrac{n}{2}a + \dfrac{n(n-1)}{2}r\ , & a + (n-1)r > 0 \text{ ise} \\ \dfrac{n}{2}\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + \dfrac{2(n-1)(2n-1)}{3}r^2} - \dfrac{n}{2}a - \dfrac{n(n-1)}{2}r\ , & a + (n-1)r < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.2. $H_{a.d.}$ $n \times n$ Hankel matrisinin Euclidean normu,

$$\left\|H_{a.d.}\right\|_E = n\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + (n-1)\frac{7n-5}{6}r^2}$$

şeklindedir.

İspat: Euclidean norm tanımından,

$$\|H_{a.d.}\|_E^2 = a^2 + 2(a+r)^2 + 3(a+2r)^2 + \cdots + n[a+(n-1)r]^2 + (n-1)(a+nr)^2$$

$$+ \cdots + 2[a+(2n-3)r]^2 + [a+(2n-2)r]^2$$

yazılır. Buradan,

$$\|H_{ad.}\|_E^2 = a^2[2(1+2+3+\cdots+n-1)+n] + 2ar[2+3.2+\cdots+n(n-1)+\cdots+2(2n-3)+(2n-2)]$$

$$+ [2+3.4+\cdots+n(n-1)^2 + (n-1)n^2 + \cdots + 2(2n-3)^2 + (2n-2)^2]r^2$$

$$= a^2\left(2\frac{(n-1)n}{2} + n\right) + 2\left(\sum_{s=1}^{n-1}(n^2 - n + 2s)\right)ar + \left(\sum_{s=1}^{n-1}\left[(-n+3)s^2 + (n^2-1)s + n(n-1)^2\right]\right)r^2$$

$$= n^2a^2 + 2\left[n(n-1)^2 + n(n-1)\right]ar + \left((-n+3)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n^2-1)\frac{(n-1)n}{2} + n(n-1)^3\right)r^2$$

$$= n^2\left(a^2 + 2(n-1)ar + (n-1)\frac{7n-5}{6}r^2\right)$$

elde edilir. Böylece,

$$\|H_{a.d.}\|_E = n\sqrt{a^2 + 2(n-1)ar + (n-1)\frac{7n-5}{6}r^2} \tag{3.50}$$

yazılır.

Teorem 3.3.3. $H_{g.d.}$ $n \times n$ Hankel matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = a\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right),$$

$$\lambda_m = 0,\ m = 2,3,...,n$$

şeklindedir.

İspat: $H_{g.d.}$ matrisinin özdeğerleri,

$$\left|\lambda \mathrm{I} - H_{g.d.}\right| = 0$$

denkleminin kökleridir.

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{g.d.}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -ar & -ar^2 & \cdots & -ar^{n-2} & -ar^{n-1} \\ -ar & \lambda-ar^2 & -ar^3 & \cdots & -ar^{n-1} & -ar^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -ar^{n-2} & -ar^{n-1} & -ar^n & \cdots & \lambda-ar^{2n-4} & -ar^{2n-3} \\ -ar^{n-1} & -ar^n & -ar^{n+1} & \cdots & -ar^{2n-3} & \lambda-ar^{2n-2} \end{vmatrix} \tag{3.51}$$

olup, (3.51) determinantında 1. satırın; $-r$ katı 2. satıra, $-r^2$ katı 3. satıra,…,$-r^{n-1}$ katı $n.$satıra eklenirse,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{g.d.}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -ar & -ar^2 & \cdots & -ar^{n-2} & -ar^{n-1} \\ -\lambda r & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\lambda r^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ -\lambda r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} \tag{3.52}$$

elde edilir. (3.52) determinantı, ilk sütuna göre açılırsa,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{g.d.}\right|=(\lambda-a)\lambda^{n-1}+ar(-\lambda r)\lambda^{n-2}-ar^2\left(\lambda r^2\right)\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^n ar^{n-1}(-1)^{n-1}\lambda r^{n-1}\lambda^{n-2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{g.d.}\right|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-a-ar^2-ar^4-\cdots-ar^{2n-2}\right)$$

elde edilir ki,

$$\left|\lambda \mathrm{I}-H_{g.d.}\right|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-a-ar^2-ar^4-\cdots-ar^{2n-2}\right)=0$$

denkleminin kökleri,

$$\lambda_1=a\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right),$$

$$\lambda_m=0,\ m=2,3,...,n$$

şeklindedir. Buradan, $H_{g.d.}$ matrisinin özdeğerlerinden n-1 tanesinin 0 (sıfır) olduğu görülür.

Sonuç 3.3.5. $\left|H_{g.d.}\right|=0$

Sonuç 3.3.6. $H_{g.d.}$ matrisinin tersi yoktur.

Sonuç 3.3.7. $H_{g.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin singüler değerleri,

$$\sigma_1 = |a|\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right),$$
$$\sigma_m = 0,\ m = 2,3,...,n$$

şeklindedir.

Sonuç 3.3.8. $H_{g.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin spektral normu,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_2 = |a|\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.4. $H_{g.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin ℓ_p $\left(1<p<\infty\right)$ normu için,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = \begin{cases} |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}-1}{1-r^p}\right)^2, & p \text{ çift veya } r>0 \text{ ise} \\ |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}-1}{1+r^p}\right)^2, & p \text{ tek ve } r<0 \text{ ve } n \text{ çift ise} \\ |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}+1}{1+r^p}\right)^2, & p \text{ tek ve } r<0 \text{ ve } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

yazılır.

İspat: ℓ_p normu tanımından,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p + 2|ar|^p + \cdots + n\left|ar^{n-1}\right|^p + (n-1)\left|ar^n\right|^p + (n-2)\left|ar^{n+1}\right|^p + \cdots + \left|ar^{2n-2}\right|^p$$

yazılır. Buradan,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p\left(1+2|r|^p+3\left|r^2\right|^p+\cdots+n\left|r^{n-1}\right|^p+(n-1)\left|r^n\right|^p+(n-2)\left|r^{n+1}\right|^p+\cdots+\left|r^{2n-2}\right|^p\right)$$

$$= |a|^p\left(1+\left[n\left|r^p\right|^{n-1}+1\right]\sum_{s=1}^{n-1}\left|r^p\right|^s+\left[1-\left|r^p\right|^{n-1}\right]\sum_{s=1}^{n-1}s\left|r^p\right|^s\right) \tag{3.53}$$

olup, (3.53) ifadesinde $\left|r^p\right| = x$ alınırsa $x\neq 1$ olur ve (3.53) eşitliği,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p\left(1+\left[nx^{n-1}+1\right]\sum_{s=1}^{n-1}x^s+\left[1-x^{n-1}\right]\sum_{s=1}^{n-1}sx^s\right) \tag{3.54}$$

şeklinde yazılır. Bu son eşitlik, Lemma 3.1.1. *(ii-iii)* ve (3.54) ifadesinden,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p\left(1+\left[nx^{n-1}+1\right]\frac{x-x^n}{1-x}+\left[1-x^{n-1}\right]\frac{x-nx^n+nx^{n+1}-x^{n+1}}{(1-x)^2}\right)$$

şekline dönüşür ki, burada bazı düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p &= |a|^p\left(1+\frac{nx^n-nx^{2n-1}+x-x^n}{1-x}+\frac{x-nx^n+nx^{n+1}-x^{n+1}-x^n+nx^{2n-1}-nx^{2n}+x^{2n}}{(1-x)^2}\right)\\ &= |a|^p\left(\frac{-2x^n+x^{2n}+1}{(1-x)^2}\right)\\ &= |a|^p\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2 \qquad (3.55)\end{aligned}$$

olur. (3.55) eşitliğinde x yerine $\left|r^p\right|$ yazılırsa,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = |a|^p\left(\frac{\left|r^p\right|^n-1}{1-\left|r^p\right|}\right)^2$$

elde edilir ki, bu ifade p, n ve r nin değerlerine göre,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_p^p = \begin{cases} |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}-1}{1-r^p}\right)^2, & p \text{ çift veya } r>0 \text{ ise}\\ |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}-1}{1+r^p}\right)^2, & p \text{ tek ve } r<0 \text{ ve } n \text{ çift ise}\\ |a|^p\left(\dfrac{r^{pn}+1}{1+r^p}\right)^2, & p \text{ tek ve } r<0 \text{ ve } n \text{ tek ise}\end{cases}$$

şeklinde düzenlenir.

Sonuç 3.3.9. $H_{g.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin Eucledean normu,

$$\left\|H_{g.d.}\right\|_E = |a|\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)$$

şeklindedir.

Sonuç 3.3.10. $H_{g.d.}$ $n\times n$ Hankel matrisinin Eucledean normu ile spektral normu birbirine eşittir.

4. NÜMERİK SONUÇLAR

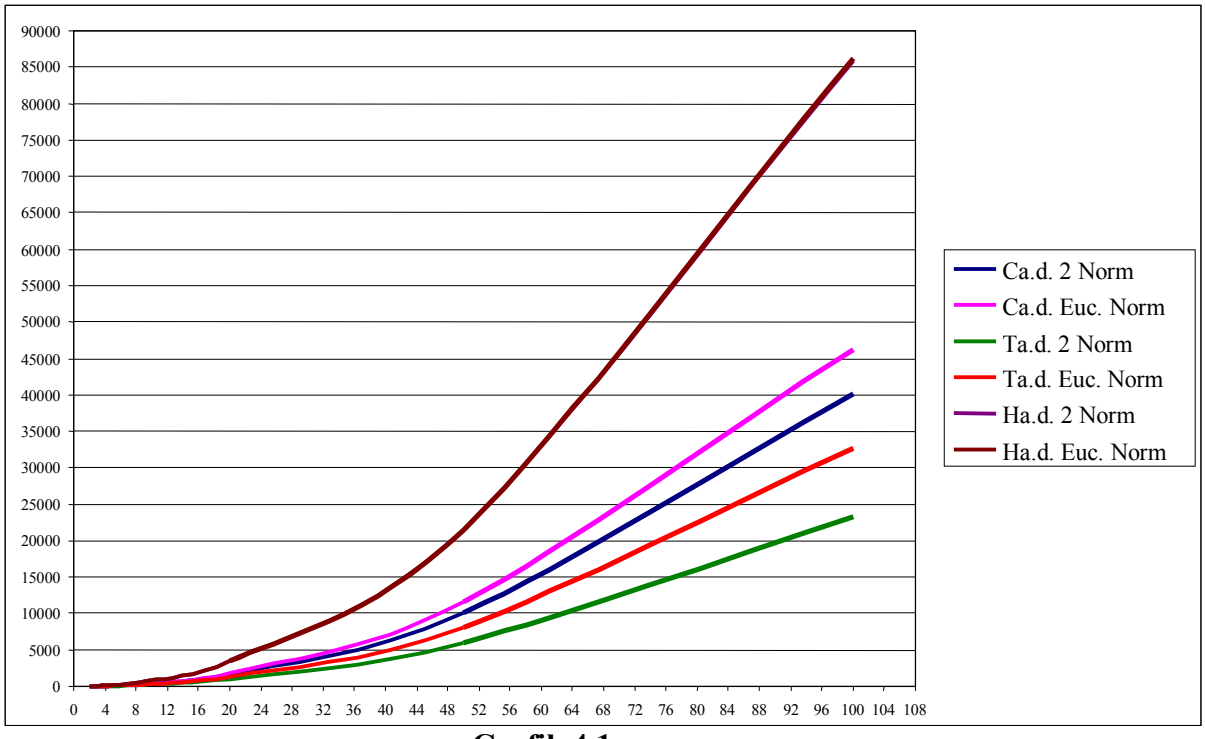
Bu bölümde, n, a ve r değerlerinin alacağı sayısal değerlere göre, önceki bölümde elde ettiğimiz bazı matris normlarının alacağı değerler tablolar halinde verildi. Ayrıca bu tabloların değerlerinden faydalanarak matrisin normu ile matrisin mertebesi arasındaki ilişkiyi gösteren grafikler elde edildi.

Örnek 4.1. $a=5$ ve $r=8$ iken n' nin artan değerlerine göre $C_{a.d.}$, $T_{a.d.}$ ve $H_{a.d.}$ $n\times n$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları aşağıdaki tablodaki gibi değerler alır.

n	a	r	$\|C_{a.d.}\|_2$	$\|C_{a.d.}\|_E$	$\|T_{a.d.}\|_2$	$\|T_{a.d.}\|_E$	$\|H_{a.d.}\|_2$	$\|H_{a.d.}\|_E$
2	5	8	18	19,6977156	14,43398113	15,09966887	28,26433752	28,35489376
3	5	8	39	43,6463057	28,48213526	31,51190252	68,59784361	68,82586724
4	5	8	68	76,83749084	47,14835124	54,40588204	126,1469002	126,5543362
5	5	8	105	119,2686044	70,43315112	83,81527305	200,9262422	201,5564437
10	5	8	410	470,00	256,1384866	328,7856445	833,3581158	835,7631243
20	5	8	1620	1864,296114	973,9588735	1308,587024	3391,0162	3400,294104
50	5	8	10050	11589,75841	5898,701152	8167,15985	21.406,53409	21.463,04964
100	5	8	40100	46274,07482	23344,20923	32662,0575	85.907,5998	86.131,58538

Tablo 4.1.

Yukarıdaki tablodan n, $\|C_{a.d.}\|_2$, $\|C_{a.d.}\|_E$, $\|T_{a.d.}\|_2$, $\|T_{a.d.}\|_E$, $\|H_{a.d.}\|_2$ ve $\|H_{a.d.}\|_E$ değerlerine karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir.



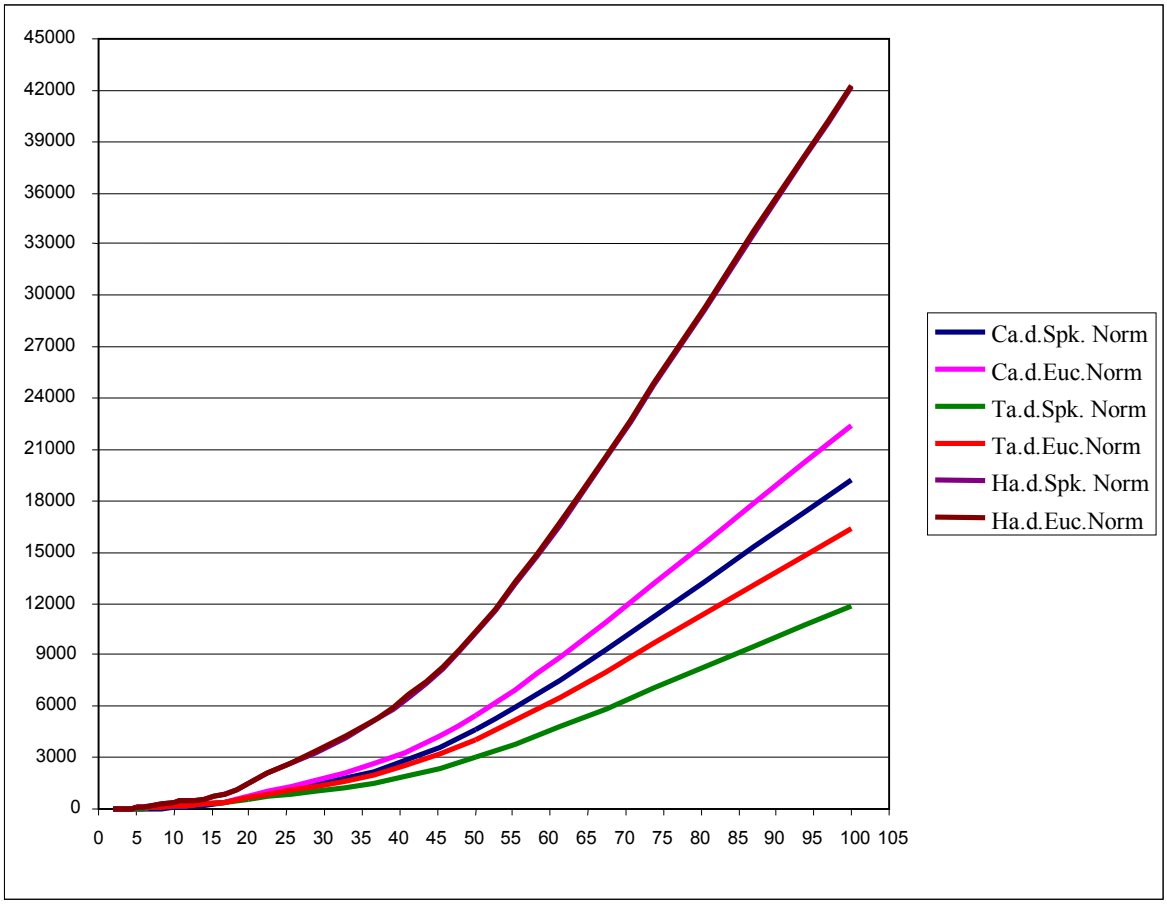
Grafik 4.1.

Örnek 4.2. $a=-6$ ve $r=4$ iken n' nin artan değerlerine göre $C_{a.d.}$, $T_{a.d.}$ ve $H_{a.d.}$ $n\times n$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları aşağıdaki tablodaki gibi değerler alır.

n	a	r	$\|C_{a.d.}\|_2$	$\|C_{a.d.}\|_E$	$\|T_{a.d.}\|_2$	$\|T_{a.d.}\|_E$	$\|H_{a.d.}\|_2$	$\|H_{a.d.}\|_E$
2	-6	4	8,00	8,94427191	13,21110255	13,26649916	6,472135955	6,92820323
3	-6	4	6,928203232	11,4891253	22,3041347	22,71563339	13,24695077	15,09966887
4	-6	4	11,3137085	17,88854382	33,54065922	34,87119155	33,54065922	34,87119155
5	-6	4	17,01301616	30,00	47,0156212	50,00	62,74917218	64,0312424
10	-6	4	120,00	166,1324773	148,7434208	173,2050808	338,9444363	341,1744422
20	-6	4	640,00	788,923317	525,188134	663,324958	1538,331677	1544,538766
50	-6	4	4600,00	5430,469595	3.040,069202	4.092,676386	10.308,1022	10.339,7292
100	-6	4	19200,00	22.404,46384	11.850,32467	16.340,13464	42.162,08287	42.280,49196

Tablo 4.2.

Yukarıdaki tablodan n, $\|C_{a.d.}\|_2$, $\|C_{a.d.}\|_E$, $\|T_{a.d.}\|_2$, $\|T_{a.d.}\|_E$, $\|H_{a.d.}\|_2$ ve $\|H_{a.d.}\|_E$ değerlerine karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir.



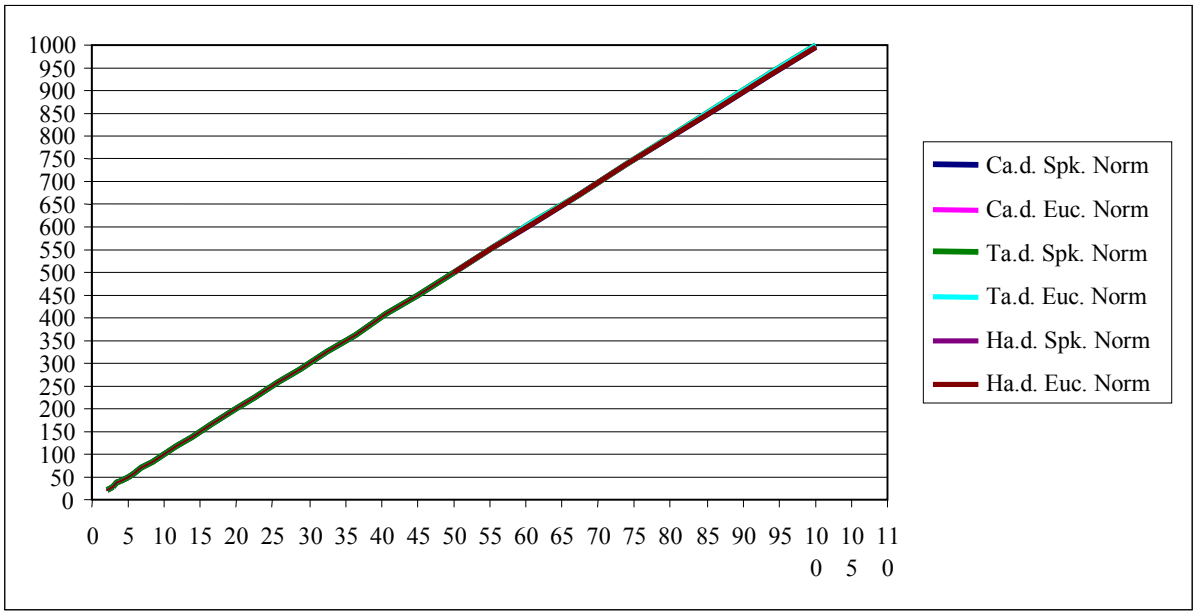
Grafik 4.2.

Örnek 4.3. $a=10$ ve $r=-0{,}0005$ iken n' nin artan değerlerine göre $C_{a.d.}$, $T_{a.d.}$ ve $H_{a.d.}$ $n\times n$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları aşağıdaki tablodaki gibi değerler alır.

n	a	r	$\|C_{a.d.}\|_2$	$\|C_{a.d.}\|_E$	$\|T_{a.d.}\|_2$	$\|T_{a.d.}\|_E$	$\|H_{a.d.}\|_2$	$\|H_{a.d.}\|_E$
2	10	-0,0005	19,9995	19,99950001	20,00000001	20,00	19,99900001	19,99900001
3	10	-0,0005	29,9985	29,99850002	30,00000006	30,00000006	29,99700005	29,99700005
4	10	-0,0005	39,997	39,99700006	40,00000012	40,00000012	39,99400012	39,99400013
5	10	-0,0005	49,995	49,99500012	50,00000025	50,00000025	49,99000025	49,99000025
10	10	-0,0005	99,9775	99,97750103	100,000002	100,000002	99,95500206	99,95500207
20	10	-0,0005	199,905	199,9050083	200,0000166	200,0000166	199,8100166	199,8100166
50	10	-0,0005	499,3875	499,3876303	500,0002602	500,00026	498,775261	498,775261
100	10	-0,0005	997,525	997,5260442	1000,0002083	1000,0002083	995,0520935	995,0520935

Tablo 4.3.

Yukarıdaki tablodan n, $\|C_{a.d.}\|_2$, $\|C_{a.d.}\|_E$, $\|T_{a.d.}\|_2$, $\|T_{a.d.}\|_E$, $\|H_{a.d.}\|_2$ ve $\|H_{a.d.}\|_E$ değerlerine karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir.



Grafik 4.3.

Örnek 4.4. $a=2$ ve $r=0{,}5$ iken n' nin artan değerlerine göre $C_{g.d.}$, $T_{g.d.}$ ve $H_{g.d.}$ $n\times n$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları aşağıdaki tablodaki gibi değerler alır.

n	a	r	$\|C_{g.d.}\|_2$	$\|C_{g.d.}\|_E$	$\|T_{g.d.}\|_2$	$\|T_{g.d.}\|_E$	$\|H_{g.d.}\|_2$	$\|H_{g.d.}\|_E$
2	2	0,5	3,00	3,16227766	5,00	5,00	2,50	2,50
3	2	0,5	3,50	3,96862697	10,50	10,50	2,625	2,625
4	2	0,5	3,75	4,60977223	21,25	21,25	2,65625	2,65625
5	2	0,5	3,875	5,16145571	42,625	42,625	2,66406	2,66406
10	2	0,5	3,99609375	7,30296395	1365,33203	1365,33203	2,66666	2,66666
20	2	0,5	3,99999618	10,32795559	1398101,33333	1398101,33333	2,66666	2,66666

Tablo 4.4.

Örnek 4.5. $a=1/3$ ve $r=-0{,}2$ iken n' nin artan değerlerine göre $C_{g.d.}$, $T_{g.d.}$ ve $H_{g.d.}$ $n\times n$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları aşağıdaki tablodaki gibi değerler alır.

n	a	r	$\|C_{g.d.}\|_2$	$\|C_{g.d.}\|_E$	$\|T_{g.d.}\|_2$	$\|T_{g.d.}\|_E$	$\|H_{g.d.}\|_2$	$\|H_{g.d.}\|_E$
2	$1/3$	-0,2	0,4	0,48074	1,73333	1,73333	0,34666	0,34666
3	$1/3$	-0,2	0,366606	0.58923	8,68	8,68	0,34720	0,34720
4	$1/3$	-0,2	0,416	0,68041	43,40266	43,40266	0,34722	0,34722
5	$1/3$	-0,2	0,393950783	0,76072	217,01386	217,01386	0,34722	0,34722
10	$1/3$	-0,2	0,416666624	1,07582	678168,4028	678168,40280	0,34722	0,34722
20	$1/3$	-0,2	0,416666667	1,52145	6622738308377	6622738308377	0,34722	0,34722

Tablo 4.5.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Biz bu çalışmada, elemanları bir aritmetik veya bir geometrik dizinin ardışık terimleri olarak seçilen Toeplitz, Hankel ve circulant matrislerin özdeğer, determinant, norm gibi bazı özelliklerini inceledik. Bu çalışma esnasında zaman zaman Mapple Paket Programını kullandık. Ayrıca seçtiğimiz matrislerin normu, özdeğerleri gibi kavramların, matrisin mertebesine göre bir aritmetik veya geometrik dizi oluşturup oluşturmayacağını da merak ettik. Ancak elde edilen bulgular gösterdi ki böyle bir durum söz konusu değildir. 4. Bölümde, normlar için elde ettiğimiz bulgularla ilgili nümerik örnekler ve grafikler verdik. Grafikler incelendiğinde, aynı a ve r reel sayıları için matrisin mertebesinin artışına, Toeplitz, Hankel ve circulant matrislerin normlarının aynı tepkiyi verdiğini görürüz. Benzer şekilde çalışılan bu matrislerin elemanları, kompleks diziler şeklinde tanımlanarak da incelenebilir.

Ayrıca A ve R matrisleri için $A+(n-1)R$ veya AR^{n-1} şeklinde matris dizileri tanımlanıp dikkate değer bulgular elde edilebileceği kanısındayız.

KAYNAKLAR

[1] Atkin, A.O.L. ve ark., 1997 , Powers of Circulants in Bottlenack Algebra, *Linear Algebra and Its Applications,* 258:137-148.

[2] Bozkurt, D., 1998 , On the ℓ_p norms of Cauchy-Toeplitz matrices, *Linear and Multilinear Algebra,* 44:341-346.

[3] Dal, R.V. ve ark., 1996 , Hamiltonian propeties of Toeplitz graphs, *Discrete Mathematics,* 159:69-81.

[4] Davis, P.J., 1979 , *Circulant Matrices*, Wiley, New York, Chichester, Brisbane.

[5] Gantmacher, F.R., 1960 , *The Theory of Matrices*, Volume One, Chelsea Publishing Company, New york.

[6] Güngör A.D., Türkmen, R., 2006 , Bounds for Extreme Singular Values of a Complex Matrix and Its Applications, *Mathematical Inequalities & Applications,* Vol. 9, Number 1, 23–31.

[7] Hladnik, M., 1999 , Schur Norms of Bicirculant Matrices, *Linear Algebra and Its Applications,* 286: 261-272.

[8] Horn, R.A., Johnson, C.R., 1985 , *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

[9] Iohvidov, I.S., 1982 , *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms*, Birkhäuser, Boston.

[10] Karner, H. ve ark., 2003 , Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices, *Linear Algebra and Its Applications,* 367: 301-311.

[11] Luk, F.T., Qiao, S., 2000 , A fast eigenvalue algorithm for Hankel matrices, *Linear Algebra and Its Applications,* 316:171–182.

[12] Parter, S.V., 1986 , On the distribution of the singular values of Toeplitz matrices, *Linear Algebra and Its Applications,* 80:115-130.

[13] Peart, P., Woan, W.J., 2000 , Generating Functions via Hankel and Stieltjes Matrices, *Journal of Integer Sequences,* Vol. 3 Article 00.2.1.

[14] Solak, S., Bozkurt, D., 2003 , A note on Bound for Norms of Cauchy- Hankel Matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications,* 10: 377-382.

[15] Solak, S., 2005 , On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers, *Applied Mathematics and Computations,* 160: 125-132.

[16] Tilli, P., 1998 , Locally Toeplitz sequences:spectral properties and applications, *Linear Algebra and Its Applications*, 278:91-120.

[17] Tyrtyhnikov, E.E., 1994 , Influence of matrix operations on the distribution of eigenvalues and singular values of Toeplitz matrices, *Linear Algebra and Its Applications,* 207:225-249.

[18] Tyrtyhnikov, E.E., 1994 , How bad are Hankel matrices?, *Numer. Math.,* 67:261–269.

[19] Tyrtyhnikov, E.E., 1996 , A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering, *Linear Algebra and Its Applications,* 232:1–43

[20] Varah, J.M., 2003 , Positive definite Hankel matrices of minimal Condition, *Linear Algebra and Its Applications,* 368:303–314.

[21] Zhang, F., 1999 , *Matrix Theory* (Basic Results and Tecniques).

[22] Zielke, G., 1988 , Some remarks on matrix norms, condition numbers and error estimates for linear equations, *Linear Algebra and Its Applications,* 110:29-41.