T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PENTADİAGONAL BİR MATRİSİN POZİTİF TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

İrem GÜRSES

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2010

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PENTADİAGONAL BİR MATRİSİN POZİTİF TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

İrem GÜRSES
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2010, 77 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Aşır GENÇ
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışmada bazı simetrik pentadiagonal matrislerin $l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere l-inci kuvvetleri hesaplanmıştır. Matrislerin karakteristik denklemlerinin $D_n(-\lambda)'$ya eşit olduğunu göstermek için Jonas Rimas tarafından $D_n(\alpha)$ ve $\Delta_n(\alpha)$ determinantları tanımlanmıştır. Bizde bu çalışmadan hareketle $D_n(-\lambda)'$yı yani matrislerin karakteristik denklemlerini köklerini bildiğimiz Chebyshev polinomları cinsinden ifade ederek matrislerin öz değer ve öz vektörlerini formülüze ettik. Böylece matrislerin Jordan formu J'yi, T dönüşüm matrisini ve bunun tersi T^{-1} matrisini elde ettik. Son olarak $C^l = TJ^lT^{-1}$ benzerlik dönüşümünü kullanarak matrislerin kuvvetini hesapladık.

ANAHTAR KELİMELER: Pentadiagonal matrisler, Chebyshev polinomları, Jordan formu, Öz değer, Öz vektör.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON COMPUTING POSITIVE INTEGER POWERS FOR ONE TYPE PENTADIAGONAL MATRIX

İrem GÜRSES

Selçuk University

Graduate School of Natural andAppliedScience

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2010, 77 Page

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Dr. Aşır GENÇ
Asist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this study, the lth $(l \in \square)$ power of some symmetric pentadiagonal matrices are calculated. In order to show characteristic equations of these matrices equal to $D_n(-\lambda)$, $D_n(\alpha)$ and $\Delta_n(\alpha)$ determinants which is defined by Jonas Rimas. In the light of this study, we have formulated the $D_n(-\lambda)$. Namely, characteristic equations of these matrices, eigenvalues and eigenvectors as expressed in terms of Chebyshev polynomial. In this way, we obtained Jordan form of these matrices J, transformation matrix T and inverse of matrix T: T^{-1}. Finally, we calculated the power of matrices by using the $C^l = TJ^lT^{-1}$ similarity transformation.

KEY WORDS: Pentadiagonal matrices, Chebyshev polynomial, Jordan form, Eigenvalues, Eigenvectors.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Durmuş BOZKURT danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma matris teoride önemli bir yer oluşturan pentadiagonal matrislerin kuvvetlerinin hesaplanması üzerine hazırlanmıştır. Birinci bölümde pentadiagonal matrislerin kuvvetlerinin ve genel olarak matris kuvvetlerinin matris teorideki öneminden söz edildi. İkinci bölümde bu alanda yapılan kaynak araştırmasına yer verildi. Üçüncü bölümde tridiagonal matrisler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Dördüncü bölümde benzer matrisler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Beşinci bölümde Chebyshevpolinomlarından bahsedildi. Altıncı bölümde fark denklemleri ile ilgili tanımlar verildi. Son bölümde ise bazı simetrik pentadiagonal matrislerin kuvvetleri ile ilgili elde edilen sonuçlar teorem olarak verildi.

Çalışma konusunu bana vererek yol gösteren, yardım ve desteklerini eksik etmeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a çok teşekkür ederim.

İrem GÜRSES

Konya,2010

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ…… 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI……. 2

3. TEMEL KAVRAMLAR……. 5

3.1. Üçlübant Matrisler……. 5

3.2. Benzer Matrisler…… 7

3.3. Jordan Kanonik Formu……. 9

3.4. ChebyshevPolinomları…….. 11

3.4.1. Trigonometrik Tanım ve Rekürans Bağıntıları……... 11

3.4.2. Birinci Tür ChebyshevPolinomu…….. 11

3.4.3. İkinci Tür ChebyshevPolinomu……... 13

3.4.4. ChebyshevPolinomları Arasındaki İlişkiler……. 14

3.5. . Fark Denklemleri……... 15

3.6. . Bir Fark Denkleminde Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi ……... 16

3.7. . Homojen Fark Denklemlerinin Çözümü…….. 18

4. . PENTADİAGONAL MATRİSLER…….. 20

4.1. Pentadiagonal Matrislerin Kuvvetlerinin Hesaplanması……... 20

4.2. Kuvvet Formülüzasyonu İçin Maple Prosedürü……... 57

4.3. C Matrisinin Negatif Kuvvetleri ve Determinantı……. 58

4.4. Nümerik Örnekler…… 59

5. SONUÇ VE ÖNERİLER…… 69

6. KAYNAKLAR…… 70

1. GİRİŞ

Matematik disiplinleri içerisinde en zengin branşlardan biri olan matris teori; uygulamalı matematik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, mühendislik ve istatistik gibi bilim dallarında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Matris teorisinde bazı özel matrislerin kuvvetlerinin hesaplanması eskiden beri üzerinde çalışılan konulardan biridir. Tridiagonal, antitridiagonal, pentadiagonal ve antipentadiagonal matrislerin kuvvetlerinin hesaplanması matris teorisinin uygulandığı birçok konuda bize kolaylık sağlamaktadır. Zira bazı simetrik pentadiagonal matrislerin özdeğer ve özvektörleri köklerini bildiğimiz Chebyshevpolinomları cinsinden ifade edilebilmektedir. Bu sayede $C^l = TJ^lT^{-1}$ dönüşüm formülü yardımıyla matrisin herhangi bir pozitif tamsayı kuvveti hesaplanmaktadır.

Diferansiyel, kısmi diferansiyel, fark denklemleri ve gecikmeli fark denklemlerinin çözümünde simetrik pentadiagonal matrislerin kuvvetlerine ihtiyaç duyulmaktadır. JonasRimas bu alanda önemli akademik çalışmalar gerçekleştirmiştir.

Bizde bu çalışmada özel olarak seçtiğimiz bazı simetrik pentadiagonal matrislerin kuvvetlerinin hesaplanması üzerine formülüzasyonlar geliştirdik. BununlailgiliMaple prosedürü oluşturduk.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

AhmedDrissAiatHadj ve MohamedElouafi (2008), Maple, Mathematica, Matlap ve Macsyma programlarını kullanarak pentadiagonal matrislerin karakteristik polinomlarınıözvektörlerini ve determinantlarını en genel ifade ile vermişlerdir.

MohamedElouafi ve AhmedDrissAiatHadj (2008), tridiagonal matrislerin özayrışımlarını vererek tridiagonal matrislerin kuvvetlerini ve terslerini türetmişlerdir. Sonuç olarak da tridiagonal matrislerin tersleri ve kuvvetleri üzerine rekürans bağıntıları vermişlerdir.

TomohiroSogabe (2008), periodikpentadiagonal matris sistemlerinin çözümünde LU ayrışımına dayalı yeni bir algoritma geliştirmiştir.

WenchangChu ve XiaoyuanWang (2008), Sylvester tipindeki tridiagonal matrislerin özvektörleri tanımlamıştır ve bu matrislerin Krawtchoukpolinomları, dualHahnpolinomları, Racahpolinomları ve q-Racahpolinomları ile arasındaki rekürans bağıntılarını vermiştir.

C.M. da Fonseca (2007), bazı simetrik tridiagonal matrislerin özdeğerlerini genelleştirmiştir.

Ilse C.F. Ipsent (1997), Kompleks elemanlı karesel bir matrisin özvektörlerini ters iterasyon metoduyla hesaplayarak vermiştir.

A. Melman (2000), reel simetrik Toeplitz matrisinin özdeğerlerinin hesaplanmasında yeni sonuçlar vermiştir.

TomohiroSogabe (2008), DETGTRI algoritması ile pentadiagonal matrislerin determinantlarının hesaplanmasında yeni bir algoritma vermiştir.

DevadattaKulkarni, DarrellSchmidt ve Sze-KaiTsui (1999), bazı tridiagonal matrislerinözdeğerlerini vermişlerdir.

C.M. da Fonseca (2006), ortogonalpolinomları kullanarak bazı tridiagonal matrislerin özdeğerleri ile ilgili sonuçlar vermiştir.

JonasRimas (2006), $n = 2p\ (p \in N)$ mertebeli ters simetrik sirkülant matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir.

JesusGutierrez-Gutierrez (2008), $n \times n, n \in N, tridiag_n(a_1, a_0, \overline{a_1})$ olmak üzere hermityentridiagonal matrisin, pozitif tamsayı kuvvetlerini vermiştir.

JonasRimas (2008), $n=2p\,(p\in N)$ mertebeli simetrikpentadiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir.

JonasRimas (2008), $n=2p+1\,(p\in N)$ mertebeli simetrikpentadiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir.

JonasRimas (2007), özel olarakseçilmişbir tridiagonal matrisin tamsayı kuvvetlerini

$$\beta_k=\begin{cases}1, & k=n\\ 2, & k\neq n\end{cases}$$

olmak üzere

$$q_{ij}(l)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\lambda_k^l T_{\frac{2i-1}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)T_{\frac{2j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right),\ i,j=\overline{1,n}$$

olarak vermiştir. Burada λ_k seçilen matrisin özdeğerleri ve $T_k(x)$ birinci tür Chebyshevpolinomudur.

QingxiangYin (2008), özel olarak seçilmiş anti-tridiagonal matrisin kuvvetlerini vermiştir.

Moawwad E.A. El-Mikkawy (2008), n-inci mertebeden bir pentadiagonal matrisin determinantlarını vermiştir.

Mohammed H. Koulaei ve FaezehToutounian (2007), blok tridiagonal ve blok pentadiagonal matrislerin tersleri ile ilgili yaklaşım metodları vermiştir.

Emrah Kılıç ve Moawwad E.A. El-Mikkawy (2008), n mertebelipentadiagonalToeplitz determinantını vermiştir.

C.P. Katti ve Rama Kumari (2005), $Ax=d$ formundaki pentadiagonal lineer sistemler ile ilgili algoritma vermiştir.

JonasRimas (2005), $n=2p\,(p\in N)$ mertebelitridiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir. Matrisin özdeğerlerini, özvektörlerini, Jordan formunu, dönüşüm matrisini ve onun tersini vermiştir.

JonasRimas (2005), $n=2p\,(p\in N)$ mertebeli simetrik tridiagonal matrisin $l\in N, l\geq 2$ olmak üzere l-inci kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir.

JonasRimas (2007), esas köşegen elemanları ve komşu köşegen elemanları $1,1,1,\ldots,1$ olan tridiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerini hesaplamıştır.

JonasRimas (2005), $n=2p\ (p\in N,\ p\geq 2)$ mertebeli bir tridiagonal matrisin $l\in N, l\geq 2$ olmak üzere l-inci kuvvetlerini

$$\alpha_j=\begin{cases}0, & j\neq 1\\ 1, & j=1\end{cases}\Big| \quad \text{ve} \quad p_{ij}=\begin{cases}0, & i=1\\ \dfrac{1}{2}, & i\neq 1 ve\ j=n\\ 1, & i\neq 1\ ve\ j\neq n\end{cases}$$

olmak üzere

$$q_{ij}(l)=\left[1+(-1)^{l+i+j}\right]p_{ij}\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\lambda_{2k-1}^{l-\alpha_j}\lambda_{n-2k}^{2}U_{i-2}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right)U_{j-2+\alpha_j}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right),\ i,j=\overline{1,n}$$

olarak vermiştir. Burada λ_k seçilen matrisin özdeğerleri ve $U_k(x)$ ikinci tür Chebyshevpolinomudur.

JonasRimas (2007), esas köşegen elemanları $1,0,0,\ldots,0,1$ ve komşu köşegen elemanları $1,1,1,\ldots,1$ olan tridiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerini hesaplamıştır.

JonasRimas (2005), $n=2p\ (p\in N,\ p\geq 2)$ mertebeli simetriksirkülant matrisin pozitif tamsayı kuvvetlerinin en genel ifadesini vermiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1.Üçlübant Matrisler

Tanım 3.1.1.(Zhang1961) A_n, n-kare matris olsun. $|i-j|>1$ iken $a_{ij}=0$ olan A_n matrisine *tridiagonal matris* denir. Tridiagonal matrisi

$$A_n=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{(n-1)} & a_{(n-1)} & b_{(n-1)} \\ 0 & & & & c_n & a_n \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

şeklinde açık olarak yazabiliriz.

Teorem 3.1. Şimdi **Zhang'ın (1961)** ileride kullanacağımız aşağıdaki teoremini ispatı ile birlikte verelim:

A_n (3.1) deki gibi bir tridiagonal matris olsun.

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2} \; ve \; \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

olmak üzere;

$$\det A_n=\begin{cases} a^n, & bc=0 \; ise, \\ (n+1)(a/2)^n, & a^2=4bc \; ise, \\ \left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)/(\alpha-\beta), & a^2\neq 4bc \; ise, \end{cases}$$

dir.

İspat. $|A_n|$'i ilk satıra göre açarsak ;

$$\det A_n = a\det A_{n-1}-bc\det A_{n-2} \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz**(Zhang 1961).** Açıkça görülmektedirki; $bc=0$ ise ya $b=0$ ya da $c=0$ olur. Dolayısıyla da (3.1) gereği $\det A_n = a^n$ dir. Şayet $bc \neq 0$ ise α ve β, $x^2 - ax + b = 0$ denkleminin köküdür. Bu durumda:

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = bc$$

olur. Buradan;

$$a^2 - 4bc = (\alpha - \beta)^2$$

elde ederiz. (3.2) eşitliğinden;

$$\det A_n - \alpha \det A_{n-1} = \beta\left(\det A_{n-1} - \alpha \det A_{n-2}\right)$$

ve

$$\det A_n - \beta \det A_{n-1} = \alpha\left(\det A_{n-1} - \beta \det A_{n-2}\right)$$

elde edilir.

$$f_n = \det A_n - \alpha \det A_{n-1} \text{ ve } \quad g_n = \det A_n - \beta \det A_{n-1}$$

olarak tanımlayalım. Böylece;

$$f_n = \beta f_{n-1}, \quad g_n = \alpha g_{n-1}$$

olur.

$n=2$ için basit bir hesaplama yaparsak;

$$f_2 = \beta^2, \quad g_2 = \alpha^2$$

olur. Dolayısıyla;

$$f_n = \beta^n, \quad g_n = \alpha^n$$

dir. Yani;

$$\det A_n - \alpha \det A_{n-1} = \beta^n, \quad \det A_n - \beta \det A_{n-1} = \alpha^n$$

dir. Yukarıdaki ikieşitlikde A_{n+1}'i elde etmek için n yerine $n+1$ yazarsak;

$$\det A_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \quad eğer \quad \alpha \neq \beta \; ise$$

olur ve tümevarım hipotezi gereği son olarak $\alpha = \beta$ ise;

$$\det A_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

dir. Bu da, ispatı tamamlar.

3.2. Benzer Matrisler

Tanım 3.2.1. (Bozkurt, Türen veSolak 2005) $A = S^{-1}BS$ olacak şekilde terslenebilir bir S matrisi var ise A matrisi B matrisine benzerdir denir.

Eğer A, B'ye benzerse, bu takdirde B'de A'ya benzer ve her iki matris kare ve aynı mertebede olmalıdır.

Benzer matrislerin karakteristik denklemleri aynıdır ve dolayısıyla özdeğerleri ve izleri de aynıdır.

Eğer X , A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ise ve

$$A = S^{-1}BS$$

sağlanıyorsa, o zaman $Y = SX$, B nin aynı özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür.

Şimdi sırasıyla bu tanımları teorem olarak ifade edip ispatlarını verelim:

Teorem 3.2.1.(Bozkurt, Türen ve Solak 2005)*A*herhangi bir *n-kare* matris olsun. A matrisi λ_i $(1 \le i \le n)$ özdeğerlerine karşılık

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0,\ x_i \neq 0$$

denklemini sağlayan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ şeklinde *n* tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun.

$$S = [x_1 x_2 x_3 \ldots x_n],\ \Lambda = köş(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$S^{-1}AS = \Lambda \text{ veya } A = S\Lambda S^{-1}$$

dir.

İspat. $1 \le i \le n$ için

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

olduğundan, A matrisi ile S matrisi çarpılırsa;

$$\begin{aligned} AS &= A[x_1 x_2 x_3 \dots x_n] \\ &= [Ax_1 Ax_2 Ax_3 \dots Ax_n] \\ &= [\lambda_1 x_1 \lambda_2 x_2 \lambda_3 x_3 \dots \lambda_n x_n] \\ &= S\Lambda \end{aligned}$$

elde edilir. S matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$\det S \neq 0$$

olup, S^{-1} vardır. Bu durumda elde edilen

$$AS = S\Lambda$$

eşitliği soldan S^{-1} ile çarpılırsa

$$S^{-1}AS = \Lambda;$$

sağdan S^{-1} ile çarpılırsa da

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2.(Bozkurt, Türen ve Solak 2005) A köşegenleştirilebilen bir kare matris ise herhangi bir pozitif k tamsayısı için

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

dir.

İspat. A köşegenleştirilebilir olduğundan

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

olacak şekilde S düzgün matrisi vardır. k tane $S\Lambda S^{-1}$ matrisini çarpım şeklinde yazarsak;

$$A^k = \underbrace{(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\dots(S\Lambda S^{-1})}_{k \text{ tane}}$$

olur. Matrislerde çarpma işlemi birleşme özelliğine sahip olduğundan;

$$A^k = S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\ldots(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$S^{-1}S = I$$

olduğundan sonuç olarak

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3.(Bozkurt, Türen ve Solak 2005) An tane lineer bağımsız özvektörüolmayan bir*n*-kare matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$; A matrisinin özdeğerleri olsun. Bu takdirde U köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olan bir üst üçgen matris olmak üzere

$$S^{-1}AS = U$$

olacak şekilde düzgün bir S matrisi vardır.

Sonuç 3.2.1.(Bozkurt, Türen ve Solak 2005) Herhangi bir *n*-kare matrisin benzerlik dönüşümü ile köşegenleştirilmesi için gerek ve yeter şart matrisin *n* tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır.

3.3. Jordan Kanonik Formu

Tanım 3.3.1(Bozkurt, Türen ve Solak 2005) Esas köşegen elemanlarının hepsi birbirine eşit, ilk üst köşegen elemanlarının hepsi 1'e eşit ve diğer bütün elemanları sıfır olan bir kare matrise *Jordan Blok matrisi* (veya *Jordan bloğu*) denir.

Yani,

$$J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

şeklindeki matris bir *Jordan* bloğudur.

Teorem 3.3.1. (Bozkurt, Türen ve Solak 2005) A matrisi (3.5) ifadesi ile tanımlanan bir matris olsun. J matrislerinin hepsinin esas köşegen elemanlarının tümü λ olacak şekilde *Jordan blokları* olmak üzere

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{bmatrix}$$

olacak şekilde düzgün bir P matrisi vardır. r, A'nın lineer bağımsız özvektörlerinin sayısı ve J_i alt matrislerinin en büyük boyutlusunun mertebesi, $\lambda I - A$ nilpotent matrisinin nilpotentlik indeksine eşittir.

Teorem 3.3.2.(Serre 2001) $(X-a)^r$, M'ninelemanter bir böleni ise, M'nin ikinci kanonik formunda, M'nin matris elemanı $J(a;r)$ Jordan bloğu ile değiştirilebilir.

Sonuç 3.3.1.(Serre 2001) Eğer M'ninkarakterisitikpolinomu k üzerinden açılırsa; M, blok- köşegen matrise benzer ve bu matris j-inci köşegen bloğudur yani $J(a_j;r_j)$ jordan bloğudur. Bu form tektir ve bloğun derecesine kadardır.

Sonuç 3.3.2. (Serre 2001) Eğer k matematiksel olarak kapalı ise örneğin $k=c$ ise karesel M matrisi blok- köşegen matrise benzer. Bu matris j-inci $J(a_j;r_j)$ blok- köşegen matrisidir. Bu form tektir ve derecesi blokların derecesi kadardır.

3.4.ChebyshevPolinomları

Chebyshevpolinomları özellikle nümerik analizde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Polinom yaklaşımları, ortogonalpolinomlar, nümerik integrasyon ve kısmi diferansiyel denklemler için spektral metodların elde edilmesi gibi pekçok konuda kolay çözüm yolu sunmaktadır.

3.4.1. Trigonometrik tanım ve reküransbağıntıları

Dört türlü Chebyshevpolinomu vardır. Birinci tür Chebyshevpolinomu olan $T_n(x)$ en çok kullanılan ve tercih edilendir. Sırasıyla ikinci tür Chebyshevpolinomu $U_n(x)$, 3. ve 4. tür Chebyshevpolinomları da (Jacobipolinomu olarak da bilinen) $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ dir.

3.4.2. Birinci tür Chebyshevpolinomları

Tanım 3.4.1. (Mason veHandscomb 2003)

$$T_n(x) = \cos n\theta,\ x = \cos\theta \quad (3.6)$$

rekürans bağıntısıyla verilen $T_n(x)$ polinomuna birinci tür Chebyshevpolinomu denir. Moivre's Teoreminin bir sonucu olarak;

$$\cos 0\theta = 1,\ \cos 1\theta = \cos\theta,\ \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\ \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,\ldots$$

basit formülüzasyonunu elde edilir ve (3.6) gereği birinci tür Chebyshevpolinomunu:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ldots$$

şeklinde elde edilir. Yine (3.6) tanımı gereği

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x$$

başlangıç şartları ve $n\geq 2$ olmak üzere;

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. n-inci mertebeden birinci tür Chebyshevpolinomunun kökleri $[-1,1]$ aralığında olup;

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=\overline{1,n}$$

şeklindedir. Aynı zamanda $T_n(x)$ polinomunu

$$\begin{bmatrix} x & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & \\ & 1 & 2x & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklindeki n-kare üçlübant matrisinin determinantı olarak ifade edilir. Ayrıca, birinci tür Chebyshevpolinomu

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right\}$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}$$

$$T_n(x)=1+n^2(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x-1}{2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$$

rekürans bağıntılarını da sağlamaktadır.

3.4.3. İkinci tür Chebyshevpolinomu

Tanım 3.4.2.(Mason veHandscomb 2003) $x=\cos\theta$ olmak üzere;

$$U_n(x)=\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}=\frac{\sin\left((n+1)\arccos x\right)}{\sin\left(\arccos x\right)}$$

biçiminde tanımlanan n-inci dereceden polinoma*ikinci tür Chebyshevpolinomu* denir. $T_n(x)$ polinomunda olduğu gibi Moivre's Teoreminin bir sonucu olarak;

$$\sin 1\theta=\sin\theta,\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\ \sin 3\theta=\sin\theta\left(4\cos^2\theta-1\right),$$
$$\sin 4\theta=\sin\theta(8\cos^3\theta-4\cos\theta),\ldots$$

trigonometrik ilişkisi yazılabilir ve bunun bir sonucu olarak da $U_n(x)$ polinomununterimleri arasındaki ilişkiyi elde edilir. Şimdi ilk 5 polinomu:

$$U_0(x)=1, U_1(x)=2x, U_2(x)=4x^2-1,$$
$$U_3(x)=8x^3-4x, U_4(x)=16x^4-12x^2+1,$$
$$U_5(x)=32x^5-80x^4+24x^2-1$$

şeklinde verebiliriz. n-inci mertebeden ikinci tür Chebyshevpolinomunun kökleri $[-1,1]$ aralığında yer almaktadır ve

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{(n+1)},\ k=\overline{1,n}$$

şeklindedir. Başlangıç değer şartları

$$U_0(x)=1$$
$$U_1(x)=2x$$

ve $n\geq 2$ olmak üzere;

$$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısını sağlayan ikinci tür Chebyshevpolinomu

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & & \\ & 1 & 2x & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklindeki n-kare üçlü bant matrisinin determinantı olarak da verilir.

$x = \cos\theta$ olmak üzere;

$$U_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n+1}{2k+1} \left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}$$

dir.

3.4.4.ChebyshevPolinomları Arasındaki İlişkiler

$T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomları arasındaki geçişi pekçokformülüzasyonla sağlayabiliriz. Bunlar;

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1},$$

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2-1},$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(U_n(x) - U_{n-2}(x)\right),$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \left(1-x^2\right)U_{n-1}(x),$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

olarak verilebilir.

3.5.Fark Denklemleri

3.5.1. Tanım (Agarwal 1992) $f:\square \to \square$ fonksiyonu yardımıyla *birinci mertebeden bir fark denklemi*

$$f\left(n, y_n, y_{n+1}\right)=0$$

ifadesiyle tanımlanır. Benzer şekilde *m -inci mertebeden fark denklemi*

$$f\left(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}\right)=0 \tag{3.7}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Bir fark denkleminin mertebesi; y'nin en büyük indisi ile en küçük indisi arasındaki farka eşittir. Fark denkleminin mertebesi ile homojen fark denkleminin çözümünden gelecek olan sabitlerin sayısı aynıdır. Dolayısıyla (3.7) ifadesiyle tanımlanan fark denkleminin mertebesi

$$(n+m)-n=m$$

olarak elde edilir.

$a \in \square$ olmak üzere;

$$y_{n+1}+a y_n=f\left(n\right) \tag{3.8}$$

şeklindeki birinci mertebeden fark denklemini göz önüne alalım. Bu fark denkleminde $f\left(n\right)$ fonksiyonu lineer (doğrusal) ise fark denklemine "*lineer fark denklemi*"denir. $f\left(n\right)$fonksiyonu lineer değil ise ya da (3.8) eşitliğinin sol tarafı lineerliği bozulacak katsayılarla çarpılıyorsa bu şekildeki fark denklemine "*lineer olmayan fark denklemi*" denir. Yukarıda verilen birinci mertebeden fark denkleminde $f\left(n\right)=0$ ise fark denklemine "*homojen fark denklemi*", eğer $f\left(n\right)\neq 0$ ise "*homojen olmayan fark denklemi*" denir.

Homojen lineer fark denklemi

$$x(n+1)=a(n)x(n) \quad x(n_0)=x_0 \quad n\geq n_0\geq 0$$

olarak ifade edilir. Basit iterasyon metoduyla

$$\begin{aligned}
&x(n_0+1)=a(n_0)x(n_0)=a(n_0)x_0\\
&x(n_0+2)=a(n_0+1)x(n_0+1)=a(n_0+1)x_0a(n_0)x_0\\
&x(n_0+3)=a(n_0+2)x(n_0+2)=a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
x(n)&=x(n_0+n-n_0)\\
&=a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0)x_0\\
&=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]x_0
\end{aligned}$$

dir. Bir fark denkleminin çözülebilmesi için mertebesi kadar başlangıç şartına ihtiyaç vardır.

3.6. Bir Fark Denkleminde Keyfi Sabitlerin Yok Edilmesi

Çözümü verilen bir fark denklemini bulma işlemine bir fark denkleminde keyfi sabitlerin yok edilmesi adı verilir. Çözümü verilen bir ifadede sabitlerin yok edilebilmesi için sabit sayısı kadar denkleme ihtiyaç vardır.

Örnek 3.6.1. $y_n=cn^2 4^n$ çözümüne ait fark denklemini bulunuz.

$$y_{n+1}=c(n+1)^2 4^{n+1}$$

$$c=\frac{y_{n+1}}{(n+1)^2 4^{n+1}}$$

bulunan sabit değeri fark denkleminde yerine yazılırsa;

$$y_n = \frac{y_{n+1}}{(n+1)^2 4^{n+1}}$$
$$n^2 y_{n+1} = 4(n+1)^2 y_n$$

elde edilir.

Örnek 3.6.2. $y_n = c_1 2^n + c_2 3^n$ çözümüne ait fark denklemini bulunuz.

$$y_{n+1} = c_1 2^{n+1} + c_2 3^{n+1} = 2c_1 2^n + 3c_2 3^n$$
$$y_{n+2} = c_1 2^{n+2} + c_2 3^{n+2} = 4c_1 2^n + 9c_2 3^n$$

buradan sırasıyla

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} = 3c_2 3^n$$
$$c_2 3^n = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1}}{3}$$

ve

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} = -2c_1 2^n$$
$$c_1 2^n = \frac{3y_{n+1} - y_{n+2}}{2}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeleri fark denkleminde yerine yazılırsa;

$$y_n = \frac{3y_{n+1} - y_{n+2}}{2} + \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1}}{3}$$
$$= \frac{5y_{n+1} - y_{n+2}}{6}$$
$$6y_n = 5y_{n+1} - y_{n+2}$$

son olarak

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$$

fark denklemini elde ederiz.

3.7. Homojen Fark Denklemlerinin Çözümü

k -ıncı mertebeden

$$a_1 y_{n+k} + a_2 y_{n+k-1} + \cdots + a_{k+1} y_n = 0, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in \mathrm{R}) \tag{3.9}$$

homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha^0, \\ y_{n+1} &= \alpha^1, \\ y_{n+2} &= \alpha^2, \\ &\vdots \\ y_{n+k} &= \alpha^k, \end{aligned}$$

alınarak α ' ya bağlı bir denklem elde edilir. Daha sonra bu denklemin kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ olarak bulunur. Bulunan kökler eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_k$ ise (6.1) fark denkleminin çözümü $(c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabit olmak üzere$)$;

$$y_n = c_1 (\alpha_1)^n + c_2 (\alpha_2)^n + \cdots + c_k (\alpha_k)^n$$

şeklindedir.

Eğer bu köklerin bazılar birbirine eşitse; örneğin $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$, $\alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9, \ldots$ olması halinde fark denkleminin çözümü;

$$y_n = (c_1 n + c_2)(\alpha_1)^n + (c_3 n^2 + c_4 n + c_5)(\alpha_3)^n + (c_6 n^3 + c_7 n^2 + c_8 n + c_9)(\alpha_6)^n + \cdots$$

şeklindedir. Verilen iki durumun bir arada olması halinde ise örneğin α_1 tek katlı, $\alpha_2 = \alpha_3, \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$, α_7 tek katlı, ise fark denkleminin çözümü;

$$y_n = c_1 (\alpha_1)^n + (c_2 n + c_3)(\alpha_2)^n + (c_4 n^2 + c_5 n + c_6)(\alpha_4)^n + c_7 (\alpha_7)^n + \cdots$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.7.1. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ fark denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

denkleminin kökleri;

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2$$

olup buradan fark denkleminin çözümü ;

$$y_n = (c_1 n + c_2)(1)^n + c_3 (-2)^n$$

dir.

4. PENTADİAGONAL MATRİSLER

Tanım 4.1.(El-Mikkawy ve Rahmo 2009) Her $|i-j|>2$ iken $p_{ij}=0$ olan;

$$P=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & \ddots & & \vdots \\ a_1 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{n-2} & e_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n \end{pmatrix}$$

şeklindeki $P=(p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matrisine*pentadiagonal matris* denir.

4.1.Pentadiagonal Matrislerin Kuvvetlerinin Hesaplanması

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü, sınır değer problemleri, interpolasyon problemi gibi pekçok alanda pentadiagonal matrislere ve bu matrislerin kuvvetlerinin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi bu konu ile ilgili bizim elde ettiğimiz sonuçları teorem olarak verelim.

Teorem 4.1.1. $n=2p+1$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

simetrik pentadiagonal matrisin l ($l\in\mathbb{N}$)-inci kuvveti $l=2s$ ($s\in\mathbb{N}$) ise;

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-2, & (-1)^{i+j}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}=-1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-3, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}=-1\\ -1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}=-1\\ 2, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}=1\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$t_k=\begin{cases}\dfrac{4-\lambda_k^2}{n+3}, & k=1,3,5,\ldots,n\\ \dfrac{4-\lambda_k^2}{n+1}, & k=2,4,6,\ldots,n-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$C^l=TJ^lT^{-1}=Q(l)=q_{ij}(l)$$

$$q_{ij}(l)=\begin{cases}\left[1+(-1)^{l+\frac{i+j}{2}-\alpha_{ij}}\right]\times & (-1)^{i+j}=1\ ise\\ \times\sum_{k=1}^{\frac{n-\alpha_{ij}-\beta_{ij}-1}{4}}\lambda_{2k-\alpha_{ij}}^{l}t_{2k-\alpha_{ij}}U_{\frac{i+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right)U_{\frac{j+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right), & \\ 0, & (-1)^{i+j}=-1\ \ (i,j=\overline{1,n})\ ise\end{cases}$$

şeklindedir. Şayet $l=2s+1\quad(s\in\mathbb{N})$ ise;

$$r=\begin{cases}-1, & i+j=4p,\ p\in\mathbb{N}\\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olmak üzere

$$C^l=TJ^lT^{-1}=Q(l)=r\left(q_{ij}(l)\right)$$

$$q_{ij}(l)=\begin{cases}\left[1+(-1)^{l+\frac{i+j}{2}-\alpha_{ij}}\right]\times & (-1)^{i+j}=1\ ise\\ \times\sum_{k=1}^{\frac{n-\alpha_{ij}-\beta_{ij}-1}{4}}\lambda_{2k-\alpha_{ij}}^{l}t_{2k-\alpha_{ij}}U_{\frac{i+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right)U_{\frac{j+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right), & \\ 0, & (-1)^{i+j}=-1\quad \left(i,j=\overline{1,n}\right)ise\end{cases}$$

dir.

İspat. n-inci mertebeden C matrisinin karakteristik denklemi

$$\left|C-\lambda E\right|=0 \tag{4.2}$$

biçimindedir. Burada E, n-inci mertebeden birim matristir. JonasRimas'ınpentadiagonal matrisler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda tanımladığı gibi **(Rimas 2008)** $\alpha\in\square$ olmak üzere;

$$D_n(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & & & & 0 & \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & -1 & & & & \\ & 1 & 0 & \alpha & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & \alpha & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 & \alpha & 0 & -1\\ & 0 & & & & 1 & 0 & \alpha & 0\\ & & & & & & -1 & 0 & \alpha\end{vmatrix} \tag{4.3}$$

ve

$$\Delta_n(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1\\ & & & & 1 & \alpha\end{vmatrix}$$

determinantlarını kullanalım. Açıkça görülmektedir ki;

$$\left|C-\lambda E\right|=D_n(-\lambda)$$

dir.

$$\Delta_1 = \alpha$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \alpha$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}_{\Delta_3} - \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}}_{\Delta_2}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad \left(\Delta_2 = \alpha^2 - 2, \Delta_1 = \alpha, \Delta_0 = 1\right) \tag{4.4}$$

elde ederiz. Benzer metotla $D_n(\alpha)$'yı ilk satıra göre açarsak;

$$D_n(\alpha) = \Delta_{\frac{n-1}{2}}(\alpha)\Delta_{\frac{n+1}{2}}(\alpha) \tag{4.5}$$

olur. (4.4) ile verilen fark denklemini çözelim, $\Delta_0(\alpha) = 1,\ \Delta_1(\alpha) = \alpha,\ \Delta_2(\alpha) = \alpha^2 - 2$ olmak üzere;

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha)$$

fark denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse;

$$r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}, r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$$

elde edilir. Başlangıç değerleri $(\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \alpha)$ yukarıda yerine yazıldığında $c_1 = \frac{\alpha - r_2}{r_1 - r_2},\ c_2 = \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - r_2}$ olur. Daha sonra Δ_n 'de $c_1,\ c_2, r_1, r_2$ yerlerine yazılırsa;

$$\Delta_n = \left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2\sqrt{\alpha^2-4}}\right)\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2\sqrt{\alpha^2-4}}\right)\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}\right)^{n+1} - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\alpha^2-4}\right)}$$

elde edilir. İkinci tür Chebyshevpolinomu tanım gereği,

$$U_n(z) = \frac{1}{2} \frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1} - \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{z^2-1}\right)}$$

olduğunu biliyoruz **(Mason ve Handscomb 2003).** Şimdi bu eşitlikte z yerine $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ yazılırsa:

$$U_n(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}\right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left\{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1} - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1}\right\}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{\alpha^2+4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1} - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\alpha^2+4}\right)}$$

$$= \frac{(1)^n}{2^{n+1}} \frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1} - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\alpha^2+4}\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} \frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1} - \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+4}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\alpha^2+4}\right)}}_{\Delta_n}$$

$$U_n(\frac{\alpha}{2}) = \Delta_n(\alpha)$$

olup fark denkleminin çözümü

$$\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.6}$$

şeklinde ikinci tür Chebyshevpolinomuna bağlı olarak elde edilir. Böylece (4.5) ve (4.6)'dan

$$D_n(\alpha) = U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) U_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.7}$$

eşitliğini elde ederiz. İkinci tür Chebyshevpolinomunun tanımından;

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x}, \quad -1 \le x \le 1$$

olup, bu polinomun köklerinin hepsi $[-1,1]$ aralığında olduğundan;

$$x_{nk} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{4.8}$$

biçimindedir. (4.2), (4.7) ve (4.8)' den C ninözdeğerlerini;

$$\lambda_k = \begin{cases} -2\cos\left(\dfrac{(k+1)\pi}{n+3}\right), & k = 1,3,5,\ldots,n \\ -2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), & k = 2,4,6,\ldots,n-1 \end{cases}$$

olarak elde ederiz. Görüldüğü gibi özdeğerlerin katlılığı birdir ve dolayısıyla da matrisin Jordan formunda herbiröz değer bir tek Jordan hücresine karşılık gelir. Yani, C'nin Jordan formu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Jordan kanonik formu tanımı gereği;

$$J = T^{-1}CT$$

dir. J'yikendisiyle $l$kere çarparsak;

$$\underbrace{JJJ\ldots J}_{l \text{ kere}} = \underbrace{T^{-1}CTT^{-1}CTT^{-1}CT\ldots T^{-1}CT}_{l \text{ kere}}$$

$$J^l = T^{-1}C^lT$$

elde edilir. Son ifadeyi sırasıyla sağdan T^{-1} ve soldan T ile çarparsak;

$$C^l = TJ^lT^{-1}$$

benzerlik dönüşümünü elde ederiz. Son olarak özvektörlerin oluşturduğu T ve T^{-1} matrislerini oluşturalım. Bunun için $D_n(-\lambda)$ determinantı olarak tanımladığımız matrisin eşolon formunu elde etmemiz yeterli olacaktır. Bunun sonucunda;

$$\begin{gathered} CT = TJ \\ \left(CT_1, CT_2, CT_3, \ldots CT_n\right) = \left(T\lambda_1, T\lambda_2, T\lambda_3, \ldots, T\lambda_n\right) \\ CT_j = T_j\lambda_j \ (j = \overline{1,n}) \end{gathered} \tag{4.9}$$

olup (4.9) lineer sistemini çözersek $n = 4p+1$ için T_j, T'nin $j.$ sütunu olmak üzere

$$T_j = \begin{cases} \left[e_j U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \quad e_j U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \quad e_j U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad e_j U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \right]^T, & \left(j = 1,3,5,\ldots,n\right) \\ \left[0 \quad U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \quad U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \quad U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad \ldots \quad U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \quad 0 \right]^T, & \left(j = 2,4,6,\ldots,n-1\right) \end{cases}$$

elde ederiz. Burada e_j, $U_k(x)$ Chebyshevpolinomunun alt indisi k'ye göre belirlenir.

$$e_j = \begin{cases} 1, & k \equiv 0,2 \ veya \ 3 \pmod 4 \\ -1, & k \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

Buna göre;

$$T=\begin{bmatrix}
-U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & -U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \dots & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \dots & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
-U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \dots & U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \dots & U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \dots & U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
-U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Eğer $n=4p+3$ ise;

$$T_j=\begin{cases}
\left[U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \ U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \ U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \ U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \dots\ 0\ \ U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right]^T, & j=(1,3,5,\dots,n)\\
\left[0\ \ a_jU_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \ a_jU_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \ a_jU_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\ \dots\ 0\ \ a_jU_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ \ 0\right]^T, & j=(2,4,6,\dots,n-1)
\end{cases}$$

sütun vektörlerini elde ederiz. Burada herbir a_j katsayısı satır indisine göre belirlenir. Eğer satır indisi $j\equiv 0(\bmod 4)$ ise $a_j=-1$, diğer durumlarda ise $a_j=1$ dir. Benzer şekilde T dönüşüm matrisi:

$$T=\begin{bmatrix}
U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \dots & 0 & U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \dots & 0 & U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & -U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & -U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \dots & 0 & U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & -U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & -U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \dots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\\
0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & U_0\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0\\
U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \dots & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)
\end{bmatrix}$$

olur. $T^{-1}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\dots,\varphi_n)$ olsun. $n=4p+1,\ p\in\mathbb{N}$ için T^{-1}'in sütun vektörlerini;

$$\varphi_j=\begin{cases}
\left[c_j t_1 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_1}{2}) \quad 0 \quad c_j t_3 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_3}{2}) \quad 0 \quad c_j t_5 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_5}{2}) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad c_j t_n U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_n}{2})\right], & j=1,5,9,\dots,n\\
\left[0 \quad t_2 U_{\frac{j-2}{2}}(\frac{\lambda_2}{2}) \quad 0 \quad t_4 U_{\frac{j-4}{2}}(\frac{\lambda_4}{2}) \quad 0 \quad t_6 U_{\frac{j-6}{2}}(\frac{\lambda_6}{2}) \quad \dots \quad t_{n-1} U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_{n-1}}{2}) \quad 0\right], & j=2,4,6,\dots,n-1\\
\left[t_1 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_1}{2}) \quad 0 \quad t_3 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_3}{2}) \quad 0 \quad t_5 U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_5}{2}) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad t_n U_{\frac{j-1}{2}}(\frac{\lambda_n}{2})\right], & j=3,7,11\dots n-2
\end{cases}$$

şeklinde elde ederiz. Her φ_j sütun elemanlarında yer alan c_j katsayısı sütun indisine göre belirlenir. Buna göre;

$$c_j=\begin{cases}-1, & j\equiv 1(\bmod 4)\\ 1 & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$t_k = \begin{cases} \dfrac{4-\lambda_k^2}{n+3}, & k = 1,3,\ldots,n \\ \dfrac{4-\lambda_k^2}{n+1}, & k = 2,4,\ldots,n-1 \end{cases}$$

olur. Buradan T^{-1};

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -t_1 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \ldots & 0 & -t_1 U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ 0 & t_2 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \ldots & t_2 U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\ t_3 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \ldots & 0 & t_3 U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\ 0 & t_4 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \ldots & t_4 U_1\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & 0 \\ -t_5 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) & 0 & \ldots & 0 & -t_5 U_0\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) \\ 0 & t_6 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) & \ldots & t_6 U_1\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & t_{n-3} U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-3}}{2}\right) & \ldots & t_{n-3} U_1\left(\frac{\lambda_{n-3}}{2}\right) & 0 \\ t_{n-2} U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) & 0 & \ldots & 0 & t_{n-2} U_0\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \\ 0 & t_{n-1} U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & \ldots & t_{n-1} U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0 \\ -t_n U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & 0 & \ldots & 0 & -t_n U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $n = 4p+3, \quad (p \in \square)$ için φ_j'yi oluşturup T^{-1}' i oluşturalım.

$$\varphi_j = \begin{cases} \left[t_1 U_{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \quad 0 \quad t_3 U_{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \quad 0 \quad t_5 U_{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) \quad 0 \quad \ldots \quad t_{n-2} U_{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \quad 0 \quad t_n U_{\frac{j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \right], & (j = 1,3,5,\ldots,n) \\ \left[0 \quad t_2 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad 0 \quad t_4 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) \quad 0 \quad t_6 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) \quad \ldots \quad 0 \quad t_{n-1} U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \quad 0 \right], & (j = 2,6,\ldots,n-1) \\ \left[0 \quad d_j t_2 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \quad 0 \quad d_j t_4 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) \quad 0 \quad d_j t_6 U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) \quad \ldots \quad d_j t_{n-1} U_{\frac{j-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) \quad 0 \right], & (j = 4,8,12,\ldots,n-3) \end{cases}$$

olur. Burada d_j sütun vektör indisine göre belirlenir.

$$d_j = \begin{cases} -1, & j \equiv 0 \pmod 4 \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $n = 4p+3 \; (p \in \mathbb{N})$ için T^{-1} matrisi;

$$T^{-1} = \begin{bmatrix}
t_1 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1 U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 & t_1 U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
0 & t_2 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -t_2 U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & t_2 U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\
t_3 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3 U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 & t_3 U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\
0 & t_4 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & 0 & -t_4 U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & \cdots & t_4 U_1\left(\frac{\lambda_4}{2}\right) & 0 \\
t_5 U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) & 0 & t_5 U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 & t_5 U_0\left(\frac{\lambda_5}{2}\right) \\
0 & t_6 U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) & 0 & -t_6 U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) & \cdots & t_6 U_1\left(\frac{\lambda_6}{2}\right) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & t_{n-3} U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-3}}{2}\right) & 0 & -t_{n-3} U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-3}}{2}\right) & \cdots & t_{n-3} U_1\left(\frac{\lambda_{n-3}}{2}\right) & 0 \\
t_{n-2} U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) & 0 & t_{n-2} U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 & t_{n-2} U_0\left(\frac{\lambda_{n-2}}{2}\right) \\
0 & t_{n-1} U_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0 & -t_{n-1} U_{\frac{n-7}{2}}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & \cdots & t_{n-1} U_1\left(\frac{\lambda_{n-1}}{2}\right) & 0 \\
t_n U_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & 0 & t_n U_{\frac{n-5}{2}}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 & t_n U_0\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$C^l = TJ^lT^{-1} = Q(l) = r(q_{ij}(l))$$

dönüşüm formülünde bulduğumuz değerleri yazarak, kuvveti formülüze edebiliriz. Eğer $l = 2s \quad (s \in \mathbb{N})$ ise;

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -2, & (-1)^{i+j} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1 \\ 1, & (-1)^i = (-1)^j = -1 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -3, & (-1)^i = (-1)^j = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = -1 \\ -1, & (-1)^i = (-1)^j = (-1)^{\frac{n+1}{2}} = -1 \\ 2, & (-1)^i = (-1)^j = (-1)^{\frac{n+1}{2}} = 1 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$t_k = \begin{cases} \dfrac{4-\lambda_k^2}{n+3}, & k = 1,3,5,\ldots,n \\ \dfrac{4-\lambda_k^2}{n+1}, & k = 2,4,6,\ldots,n-1 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$C^l = TJ^lT^{-1} = Q(l) = q_{ij}(l)$$

$$q_{ij}(l) = \begin{cases} \left[1+(-1)^{l+\frac{i+j}{2}-\alpha_{ij}}\right] \sum_{k=1}^{\frac{n-\alpha_{ij}-\beta_{ij}-1}{4}} \lambda_{2k-\alpha_{ij}}^l t_{2k-\alpha_{ij}} U_{\frac{i+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right) U_{\frac{j+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right), & (-1)^{i+j} = 1 \; ise \\ 0, & (-1)^{i+j} = -1 \left(i, j = \overline{1,n}\right) ise \end{cases}$$

biçimindedir. $l = 2s+1 \quad (s \in \mathbb{N})$ için;

$$r = \begin{cases} -1, & i+j = 4p,\ p \in \mathbb{N} \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olmak üzere;

$$C^l = TJ^lT^{-1} = Q(l) = r\left(q_{ij}(l)\right)$$

$$q_{ij}(l) = \begin{cases} \left[1+(-1)^{l+\frac{i+j}{2}-\alpha_{ij}}\right] \sum_{k=1}^{\frac{n-\alpha_{ij}-\beta_{ij}-1}{4}} \lambda_{2k-\alpha_{ij}}^l t_{2k-\alpha_{ij}} U_{\frac{i+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right) U_{\frac{j+\alpha_{ij}-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{2k-\alpha_{ij}}}{2}\right), & (-1)^{i+j} = 1 \; ise \\ 0, & (-1)^{i+j} = -1 \left(i, j = \overline{1,n}\right) ise \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.2. $n = 4p \; (p \in \mathbb{N})$ olmak üzere;

$$C=\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

biçiminde $n\times n$ tipinde simetrik pentadiagonal bir matrisin pozitif tamsayı kuvvetleri

$C^l = TJ^lT^{-1} = \dfrac{1}{n+2}Q(l) = \dfrac{1}{n+2}\left(q_{ij}(l)\right)$ şeklindeki $l=2s$ $(s\in\mathbb{N})$ ve $i,j=\overline{1,n}$ için;

$$m_{ij}=\begin{cases}-1, & |i-j|=4\\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & (-1)^{i+j}=-1\\ 1, & (-1)^{i+j}=1\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-n, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=m_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{n/4}\lambda_k^l\left(4-\lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

şeklindedir.

$l=2s+1$ $(s\in\mathbb{N})$ ve $i,j=\overline{1,n}$ için;

$$r_{ij}=\begin{cases}-1, & i+j=8p+4 \; ve \; i+j=8p+6,\; p\in \square \\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & (-1)^{i+j}=-1 \\ 1, & (-1)^{i+j}=1\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & (-1)^{i}=(-1)^{\;j}=1 \\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-n, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1 \\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=r_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{n/4}\lambda_k^{l}\left(4-\lambda_k^{2}\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

şeklindedir.

İspat. İspat için $C^{l}=TJ^{l}T^{-1}$ dönüşüm formülünü kullanacağız. İlk olarak C matrisinin karakteristik polinomunun köklerini yani özdeğerleriChebyshevpolinomları cinsinden ifade edeceğiz. Bu sayede özvektörleri de Chebyshevpolinomları cinsinden ifade edeceğiz. Sırasıyla matrisin *Jordan* formunu ve özvektörlerden oluşturduğumuz T dönüşüm matrisini elde edeceğiz. Son olarak da bulduğumuz değerleri dönüşüm formülünde yerine yazarak matrisin kuvvetini hesaplamış olacağız. Yaptığımız bu işlemler boyunca matrisin özdeğerleriniChebyshevpolinomları cinsinden ifade etmek bize işlem kolaylığı sağlamaktadır. Nitekim yüksek mertebeden matrislerde özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması zor bir işlemdir. Fakat Chebyshevpolinomlarının köklerini bildiğimiz için matrisin özdeğerleriniChebyshevpolinomları cinsinden ifade etmek bize büyük bir kolaylık sağlamaktadır.

*C*matrisinin karakteristik polinomu;

$$\left|C-\lambda E\right|=0 \quad (4.10)$$

dir. Burada E $n=4p$-inci mertebeden birim matristir. JonasRimas'ınpentadiagonal matrisler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda tanımladığı gibi $\alpha\in$ için;

$$D_n(\alpha)=\begin{vmatrix}
\alpha & 0 & -1 & & & & & & \\
0 & \alpha & 0 & -1 & & & & 0 & \\
-1 & 0 & \alpha & 0 & 1 & & & & \\
 & -1 & 0 & \alpha & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & \alpha & 0 & -1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & 0 & \alpha & 0 & -1 \\
 & 0 & & & & -1 & 0 & \alpha & 0 \\
 & & & & & & -1 & 0 & \alpha
\end{vmatrix}$$

$$\Delta_n(\alpha)=\begin{vmatrix}
\alpha & 1 & & & & \\
1 & \alpha & 1 & & 0 & \\
 & 1 & \alpha & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\
 & & & & 1 & \alpha
\end{vmatrix}$$

olmak üzere $D_n(\alpha)$ ve $\Delta_n(\alpha)$ determinantlarını kullanalım **(Rimas 2008):**

$$|C-\lambda E|=\begin{vmatrix}
0 & 0 & -1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 0
\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & \lambda & 0 & 0 & & & & & & 0 & \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
 & 0 & & & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & \lambda
\end{vmatrix}$$

$$=D_n(-\lambda)$$

olur. Eğer $\Delta_n(\alpha)$ determinantını sırasıyla n'in değerlerine göre hesaplarsak;

$$\Delta_n=\alpha\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}\ \left(\Delta_2=\alpha^2-2,\Delta_1=\alpha,\Delta_0=1\right)(4.11)$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. Aynı zamanda $D_n(\alpha)$ ve $\Delta_n(\alpha)$ determinantlarını hesaplarsak

$$D_n(\alpha)=\left(\Delta_{\frac{n}{2}}(\alpha)\right)^2 \tag{4.12}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.11) fark denklemi çözüldüğünde;

$$\Delta_n(\alpha)=U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$D_n(\alpha)=\left(U_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

olur. İkinci tür Chebyshevpolinomunun tanımından;

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x},\quad -1\le x\le 1 \tag{4.13}$$

olup bu polinomun köklerinin hepsi $[-1,1]$ aralığında olduğundan;

$$x_{nk}=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\quad k=1,2,\ldots,n$$

şeklindedir. (4.10), (4.12) ve (4.13)'den C'ninözdeğerlerini

$$\lambda_k=-2\cos\frac{2k\pi}{n+2},\ k=\overline{1,\frac{n}{2}}$$

olarak elde ederiz. Bütün özdeğerlerin katlılığı 2'dir. Dolayısıyla matrisin Jordan formunda herbiröz değer, çift Jordan hücresine karşılık gelir. Şimdi matrisin Jordan formunu teşkil edelim:

$$J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_{\frac{n-2}{2}} & & \\ & & & & & & \lambda_{\frac{n-2}{2}} & \\ & 0 & & & & & & \lambda_n \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Son olarak T dönüşüm matrisini ve T^{-1} matrisini hesaplayalım:

Jordankanonik bazının tanımı gereği;

$$J=T^{-1}CT$$

dir. J'yikendisiyle l kere çarparsak;

$$\underbrace{JJJ\ldots J}_{l \text{ kere}}=\underbrace{T^{-1}CTT^{-1}CTT^{-1}CT\ldots T^{-1}CT}_{l \text{ kere}}$$

$$J^l=T^{-1}C^lT$$

elde edilir. Son eşitliği sırasıyla sağdan T^{-1} ve soldan T ile çarparsak;

$$C^l=TJ^lT^{-1}$$

benzerlik dönüşümünü elde ederiz. Son olarak özvektörlerin oluşturduğu T ve T^{-1} matrislerini oluşturalım. Bunun için $D_n(-\lambda)$ determinantı olarak tanımladığımız matrisin eşelon formunu elde etmemiz yeterli olacaktır. Bunun sonucunda;

$$CT=TJ$$

$$(CT_1,CT_2,CT_3,CT_4,\ldots,CT_n,CT_n)=(T_1\lambda_1,T_2\lambda_1,T_3\lambda_2,T_4\lambda_2,\ldots,T_{n-1}\lambda_n,T_n\lambda_n)$$

$$CT_j=T_j\lambda_j\ (j=\overline{1,n})$$

$$
\begin{aligned}
CT_1 &= T_1\lambda_1 \\
CT_2 &= T_2\lambda_1 \\
CT_3 &= T_3\lambda_2 \\
CT_4 &= T_4\lambda_2 \\
&\vdots \\
CT_{n-3} &= T_{n-3}\lambda_{\frac{n-2}{2}} \\
CT_{n-2} &= T_{n-2}\lambda_{\frac{n-2}{2}} \\
CT_{n-1} &= T_{n-1}\lambda_{\frac{n}{2}} \\
CT_n &= T_n\lambda_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

(4.14) lineer sistemini çözersek $n = 4p, p \in \mathbb{Z}$, $p = 1,3,5,7,\ldots$ için;

$$
T_j = \begin{cases}
\left[0, e_j U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, \ldots, 0, e_j U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right]^T, & j = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\
\left[e_j U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, \ldots, e_j U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0\right]^T, & j = 2k, k \in \mathbb{Z}
\end{cases}
$$

olur dolayısıyla T dönüşüm matrisi:

$$T=\begin{bmatrix}
0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

olur. Şayet $n=4p\ (p\in\mathbb{N})\ p=2,4,6,8,\ldots$ için $n\times n$ tipindeki matrisler için sütun vektörleri:

$$T_j=\begin{cases}\left[0,e_jU_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),\ldots,0,e_jU_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right]^T, & j=2k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ \left[e_jU_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\ldots,0,e_jU_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0\right]^T, & j=2k,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

biçiminde olur. Şimdi bu doğrultuda dönüşüm matrisini ve tersini teşkil edelim:

$$T=\begin{bmatrix}
0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

olup burada $U_k(x)$ ikinci dereceden Chebyshevpolinomu ve

$$e_j=\begin{cases}-1, & k\equiv 0 \text{ } ya\ da\ k\equiv 3\pmod 4 \\ 1, & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

dir. $n=4p, p\in\square$, $p=1,3,5,7,\ldots$ için $T^{-1}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots,\varphi_n)$;

$j=1,3,5,\ldots,n-1$ için;

$$\varphi_j = \left[0, \quad a_j t_1 U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), \quad 0, \quad a_j t_2 U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad a_j t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \right]^T$$

$j = 2,4,6,\ldots,n$ için;

$$\varphi_j = \left[a_j t_1 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), \quad 0, \quad a_j t_2 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), \quad 0, \quad a_j t_3 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right), \quad \ldots, \quad a_j t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right), \quad 0 \right]^T$$

olup burada;

$$a_j = \begin{cases} -1, & k \equiv 0 \ ya \ da \ k \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & diğer \ durumlarda \end{cases}$$

ve

$$t_k = \frac{4 - \lambda_k^2}{n+2}, \ k = \overline{1, \frac{n}{2}}$$

olur ve T^{-1} matrisi

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}
0 & t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 \\
0 & t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\
t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\
0 & t_3U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & -t_3U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_3U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) \\
t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 \\
0 & t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) \\
t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

biçimindedir. $n=4p\ (p\in\mathbb{N})\ p=2,4,6,8,\ldots$ için $n\times n$ tipindeki T^{-1} matrisini için sütun vektörleri:

$j=1,3,5,\ldots,n-1$ için

$$\varphi_j=\left[0,a_jt_1U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right),0,a_jt_2U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right),0,\ldots,0,a_jt_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right)\right]^T$$

ve $j=2,4,6,\ldots,n$ için

$$\varphi_j = \left[a_j t_1 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), 0, a_j t_2 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), 0, \ldots, 0, a_j t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right), 0 \right]^T$$

olup burada;

$$a_j = \begin{cases} -1, & k \equiv 0 \text{ } ya\ da\ k \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ve

$$t_k = \frac{4-\lambda_k^2}{n+2},\ k = \overline{1, \frac{n}{2}}$$

olurki; T^{-1} matrisi

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}
0 & -t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
-t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\
-t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_3U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_3U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) \\
-t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) \\
-t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & -t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi

$$C=\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

şeklindeki 4×4 bir C matrisinin l-inci $(l\in N)$ kuvvetlerini hesaplayalım. C 'ninözdeğerlerinin ikinci tür Chebyshevpolinomu cinsinden ifadeleri;

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ t_1 = t_2 = \frac{1}{2},\ U_0\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) = 1,$$
$$U_1\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) = \lambda_k \ (k = 1,2)$$

şeklinde olup T ve T^{-1} matrisleri sırasıyla;

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Son olarak dönüşüm formülünde bulduğumuz değerleri yerine yazarsak;

$$C^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n+2}Q(l) = \frac{1}{n+2}\left(q_{ij}(l)\right)$$

olur. $l = 2s$ $(s \in \square)$ ve $i, j = \overline{1,n}$ için;

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & |i-j| = 4 \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & (-1)^{i+j} = -1 \\ 1, & (-1)^{i+j} = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -1, & (-1)^i = (-1)^{\ j} = 1 \\ 1, & (-1)^i = (-1)^j = -1 \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -n, & (-1)^i = (-1)^j = 1 \\ 1, & (-1)^i = (-1)^j = -1 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l) = m_{ij}\gamma_{ij}\left(1 + (-1)^{l + \frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j) - \beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}} \lambda_k^l\left(4 - \lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij} - \beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir. $l=2s+1 \quad (s\in\mathbb{N})$ ve $i,j=\overline{1,n}$ için;

$$r_{ij}=\begin{cases}-1, & i+j=8p+4 \text{ ve } i+j=8p+6,\ p\in\mathbb{N}\\ 1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & (-1)^{i+j}=-1\\ 1, & (-1)^{i+j}=1\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-n, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=r_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{n/4}\lambda_k^{l}\left(4-\lambda_k^{2}\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir.

Teorem 4.1.3. $n=4p+2 \quad (p\in\mathbb{N})$ olmak üzere

$$C=\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

biçiminde için $n\times n$ tipinde simetrik pentadiagonal matrisin pozitif tamsayı kuvvetleri,

$$C^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n+2}Q(l) = \frac{1}{n+2}\left(q_{ij}(l)\right)$$

şeklindedir. $l = 2s \quad (s \in \mathbb{N})$ ve $i, j = \overline{1,n}$ için $q_{ij}(l)$;

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & |i-j| = 4 \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & (-1)^{i+j} = -1 \\ 1, & (-1)^{i+j} = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = 1 \\ 1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = -1 \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -n, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = 1 \\ 1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = -1 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l) = m_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{4}}\lambda_k^l\left(4-\lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir. $l = 2s+1 \quad (s \in \mathbb{N})$ ve $i, j = \overline{1,n}$ için $q_{ij}(l)$;

$$r_{ij} = \begin{cases} -1, & i+j = 8p+4 \; ve \; i+j = 8p+6, \; p \in \mathbb{N} \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & (-1)^{i+j} = -1 \\ 1, & (-1)^{i+j} = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = 1 \\ 1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = -1 \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -n, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = 1 \\ 1, & (-1)^{i} = (-1)^{j} = -1 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=r_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{4}}\lambda_k^l\left(4-\lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir.

İspat. C matrisinin karakteristik polinomu;

$$\left|C-\lambda E\right|=0 \qquad (4.15)$$

dir. Burada E $n=4p+2$ -inci mertebeden birim matristir. JonasRimas'ın**(Rimas 2008)**pentadiagonal matrisler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda tanımladığı gibi $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$D_n(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & \alpha & 0 & -1 & & & & 0 & \\ -1 & 0 & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & \alpha & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & \alpha & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & \alpha\end{vmatrix}\quad \Delta_n(\alpha)=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 1 & \alpha\end{vmatrix}$$

determinantlarını kullanalım**(Rimas 2008)**. Açıkça görülmektedir ki;

$$\left|C-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ & 0 & & & & & & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=D_n(-\lambda)$$

dir. Eğer $\Delta_n(\alpha)$ determinantını sırasıyla n'in değerlerine göre hesaplarsak;

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \left(\Delta_2 = \alpha^2 - 2, \Delta_1 = \alpha, \Delta_0 = 1\right) \tag{4.16}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. $D_n(\alpha)$ ve $\Delta_n(\alpha)$ determinantlarını kullanarak $D_n(\alpha)$ ile $\Delta_n(\alpha)$ arasındaki bağıntıyı oluşturalım:

$$D_n(\alpha) = \left(\Delta_{\frac{n}{2}}(\alpha)\right)^2 \tag{4.17}$$

dir. Eğer (4.16) fark denklemini çözersek;

$$\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ilişkisini elde ederiz. Dolayısıyla;

$$D_n(\alpha) = \left(U_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

olur. İkinci tür Chebyshevpolinomunun tanımından;

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x}, \quad -1 \le x \le 1 \tag{4.18}$$

olup bu polinomun köklerinin hepsi $[-1,1]$ aralığında olduğundan;

$$x_{nk} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n$$

biçimindedir. (4.15), (4.17) ve (4.18)'den C'ninözdeğerlerini

$$\lambda_k = -2\cos\frac{2k\pi}{n+2}, k = \overline{1,\frac{n}{2}}$$

olarak elde ederiz. Bütün özdeğerlerin katlılığı 2'dir. Dolayısıyla matrisin Jordanformunda herbirözdeğer çift Jordan hücresine karşılık gelir. Şimdi matrisin Jordanformunu teşkil edelim.

$$J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_{\frac{n-2}{2}} & & \\ & & & & & & \lambda_{\frac{n-2}{2}} & \\ & 0 & & & & & & \lambda_n \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olur. Jordankanonik bazının tanımı gereği;

$$J=T^{-1}CT$$

dir. J 'yikendisiyle l kere çarparsak;

$$\underbrace{JJJ\ldots J}_{l \text{ kere}}=\underbrace{T^{-1}CTT^{-1}CTT^{-1}CT\ldots T^{-1}CT}_{l \text{ kere}}$$

$$J^l=T^{-1}C^lT$$

elde edilir. Son eşitliği sırasıyla sağdan T^{-1} ve soldan T ile çarparsak;

$$C^l=TJ^lT^{-1}$$

benzerlik dönüşümünü elde ederiz. Son olarak özvektörlerin oluşturduğu T ve T^{-1} matrislerini oluşturalım. Bunun için $D_n(-\lambda)$ determinantı olarak tanımladığımız matrisin eşelon formunu elde etmemiz yeterli olacaktır. (7.14) lineer sistemini çözersek $n=4p+2, p\in\square$, $p=1,3,5,7,\ldots$ için;

$$T_j=\begin{cases}\left[e_jU_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,\ldots,0,e_jU_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0\right]^T, & j=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ \left[0,e_jU_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,e_jU_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right),0,\ldots,0,e_jU_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right]^T, & j=2k,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

olur.Dolayısıyla T dönüşüm matrisi:

$$T=\begin{bmatrix}
0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\\
-U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0\\
0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\\
U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0\\
0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0\\
0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\\
U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

olur. Şayet $n=4p+2\ (p\in\mathbb{N})\ p=2,4,6,8,\ldots$ için $n\times n$ tipindeki matrisler için sütun vektörleri:

$$T_j = \begin{cases} \left[e_j U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), \ldots, 0, e_j U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0 \right]^T, & j = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \left[0, e_j U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right), 0, e_j U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \ldots, 0, e_j U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \right]^T, & j = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

biçiminde olur. Ohalde $U_k(x)$ ikinci tür Chebyshevpolinomu olmak üzere ve

$$e_j = \begin{cases} -1, & k \equiv 2 \text{ } ya\ da\ k \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

için;

$$T=\begin{bmatrix}
0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & -U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & -U_{\frac{n-6}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

dir. $n=4p+2, p\in\square$, $p=1,3,5,7,\ldots,n-1$ için $T^{-1}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots,\varphi_n)$ ise;

$$a_j=\begin{cases}-1, & k\equiv 2 \text{ ya da } k\equiv 3\pmod 4 \\ 1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$t_k=\frac{4-\lambda_k^2}{n+2},\ k=\overline{1,\frac{n}{2}}$$

olmak üzere

$$\varphi_j = \left[a_j t_1 U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), 0, a_j t_2 U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), 0, \ldots, 0, a_j t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right), 0 \right]^T,\ j = 1,3,5,\ldots,n-1$$

$$\varphi_j = \left[0, a_j t_1 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), 0, a_j t_1 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), 0, a_j t_5 U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right), \ldots, 0, a_j t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \right]^T,\ j = 2,4,6,\ldots,n$$

biçimindedir. O halde T^{-1} matrisi

$$T^{-1} = \begin{bmatrix}
0 & -t_1 U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1 U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & 0 & t_1 U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
-t_1 U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1 U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \cdots & t_1 U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_2 U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2 U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & t_2 U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\
-t_2 U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2 U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & t_2 U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_3 U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3 U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \cdots & 0 & t_3 U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & -t_{\frac{n-2}{2}} U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n-2}{2}} U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) & \cdots & 0 & t_{\frac{n-2}{2}} U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) \\
-t_{\frac{n-2}{2}} U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n-2}{2}} U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) & 0 & \cdots & t_{\frac{n-2}{2}} U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n-2}{2}}}{2}\right) & 0 \\
0 & -t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & \cdots & 0 & t_{\frac{n}{2}} U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) \\
-t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 & t_{\frac{n}{2}} U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0 & \cdots & t_{\frac{n}{2}} U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

şeklindedir. $n=4p+2\ (p\in\square)\ p=2,4,6,8,\ldots,n$ olmak üzere $n\times n$ tipindeki matrisler için T^{-1} matrisinin sütun vektörleri:

$$a_j=\begin{cases}-1, & k\equiv 2 \text{ ya da } k\equiv 3\pmod 4\\ 1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$t_k=\frac{4-\lambda_k^2}{n+2},\ k=\overline{1,\frac{n}{2}}$$

olmak üzere:

$$\varphi_j=\left[a_jt_1U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right),0,a_jt_2U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right),0,\ldots,0,a_jt_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-j-1}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right),0\right]^T,\ j=1,3,5,\ldots,n-1$$

$$\varphi_j=\left[0,a_jt_1U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right),0,a_jt_2U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right),0,\ldots,0,a_jt_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{2}}}{2}\right)\right]^T,\ j=2,4,6,\ldots,n$$

biçimindedir. O halde T^{-1} matrisi:

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}
0 & t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & \cdots & 0 & t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\
t_1U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -t_1U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & \cdots & t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 \\
0 & t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \cdots & 0 & t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\
t_2U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -t_2U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \cdots & t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\
0 & t_3U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & -t_3U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & \cdots & 0 & t_3U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) \\
t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n-2}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & t_{\frac{n-2}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_{n-2}}{2}}{2}\right) & 0 \\
0 & t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & \cdots & 0 & t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) \\
t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & -t_{\frac{n}{2}}U_{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0 & \cdots & t_{\frac{n}{2}}U_0\left(\frac{\frac{\lambda_n}{2}}{2}\right) & 0
\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Son olarak dönüşüm formülünde bulduğumuz değerleri yerine yazarsak;

$$C^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n+2}Q(l) = \frac{1}{n+2}\left(q_{ij}(l)\right)$$

olur. Dolayısıyla $l = 2s \quad (s \in \square)$ ve $i, j = \overline{1,n}$ için;

$$m_{ij}=\begin{cases}-1, & |i-j|=4\\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & (-1)^{i+j}=-1\\ 1, & (-1)^{i+j}=1\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-n, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=m_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{4}}\lambda_k^l\left(4-\lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir. $l=2s+1\quad(s\in\mathbb{N})$ ve $i,j=\overline{1,n}$ için;

$$r_{ij}=\begin{cases}-1, & i+j=8p+4\ ve\ i+j=8p+6,\ p\in\mathbb{N}\\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}0, & (-1)^{i+j}=-1\\ 1, & (-1)^{i+j}=1\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}-1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}-n, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=1\\ 1, & (-1)^{i}=(-1)^{j}=-1\end{cases}$$

olmak üzere;

$$q_{ij}(l)=r_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{l+\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{4}}\lambda_k^l\left(4-\lambda_k^2\right)U_{\frac{i\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{j\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)$$

biçimindedir.

4.2. Kuvvet Formülüzasyonu İçin Maple Prosedürü

$n=2p+1$ mertebeli simetrik pentadiagonal C matrisi için elde ettiğimiz formülüzasyonaMaple programından faydalanarak bir prosedür oluşturalım. Prosedür oluşumu için komut akışı aşağıdaki gibidir:

```
>Cmatrix:= proc(n::integer,l::integer)
locali,j,alpha,beta,c,C,lambda,q,v,r,t;
with(linalg):Digits:=15:
c:=(i,j) ->piecewise(i=j+2,(-1)^j,j=i+2,(-1)^i);C:=Matrix(n,c);
alpha:=(i,j)->piecewise((-1)^(i+j)=-1 and (-1)^((n-1)/2)=-1,-2,(-1)^i=-1 and (-1)^j=-
1,1); #a(i,j)
Matrix(alpha,n);
beta:=(i,j)->piecewise((-1)^i=-1 and (-1)^j=-1 and (-1)^((n-1)/2)=-1,-3,(-1)^i=-1 and
(-1)^j=-1 and (-1)^((n+1)/2)=-1,-1,(-1)^i=1 and (-1)^j=1 and (-1)^((n+1)/2)=1,2);
#b(i,j)
Matrix(beta,n);
lambda:=k->piecewise(type(k,odd),evalf(-
2*cos((k+1)*Pi/(n+3))),type(k,even),evalf(-2*cos(k*Pi/(n+1))));#
Vector(lambda,n);
t:=k->piecewise(type(k,odd),evalf((4-lambda(k)^2)/(n+3)),type(k,even),evalf((4-
lambda(k)^2)/(n+1))); #
Vector(t,n);
r:=(i,j)->piecewise((i+j) mod 4=0,-1, (i+j) mod 4=1,1,(i+j) mod 4=2,1,(i+j) mod
4=3,1);
```

```
q:=(i,j)->piecewise((-1)^(i+j)=1,      (1+(-1)^(l+i/2+j/2-alpha(i,j)))*add(lambda(2*k-
alpha(i,j))^l*t(2*k-alpha(i,j))*evalf(ChebyshevU((i+alpha(i,j)-2)/2,lambda(2*k-
alpha(i,j))/2))*evalf(ChebyshevU((j+alpha(i,j)-2)/2,lambda(2*k-alpha(i,j))/2)),
k=1..(n-alpha(i,j)-beta(i,j)-1)/4),(-1)^(i+j)=-1,0);
v:=Matrix(n,r*q);
eval(v);
end.
```

4.3. C Matrisinin Negatif Kuvvetleri ve Determinantı

$n = 4p\ (p \in \mathbb{Z})$ olmak üzere;

$$C = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 & 0 & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

şeklinde pentadiagonal bir matris olsun. C matrisinin özdeğerleri sıfırdan farklı olduğu için determinantı sıfırdan farklıdır.Dolayısıyla matrissingüler değildir.Bu sebeple negatif kuvvetlerini hesaplayabiliriz.

$$C^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n+2}Q(l) = \frac{1}{n+2}\left(q_{ij}(l)\right)$$

formülünde $l = -1$ alır ve matrisin elemanlarını hesaplarsak;

$$\{C\}_{ij}^{-1} = r_{ij}\gamma_{ij}\left(1+(-1)^{\frac{\alpha_{ij}}{2}(i+j)-\beta_{ij}-1}\right)\sum_{k=1}^{\frac{n}{4}}\frac{\left(4-\lambda_k^2\right)}{\lambda_k}U_{\frac{\alpha_{ij}i-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)U_{\frac{\alpha_{ij}j-\beta_{ij}}{2}}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right),\ i,j=\overline{1,n}$$

elde ederiz. $|C| = |TJT^{-1}| = |J| = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\lambda_k^2$ olduğunu matris teoriden biliyoruz. Özdeğerler aşağıdaki biçimde formülüze edilmişti;

$$\lambda_k = -2\cos\frac{2k\pi}{n+2},\ k=\overline{1,\frac{n}{2}}$$

Bu özdeğerleri yerine yazarsak; $n=4p,\ p\in\mathbb{N}$ için

$$|C| = (-2)^n\prod_{k=1}^{n/2}\cos^2\frac{2k\pi}{n+2} = 2^n\prod_{k=1}^{n/2}\cos^2\frac{2k\pi}{n+2} = 1$$

olur.

4.4. Nümerik Örnekler

Örnek 4.4.1 $C=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{bmatrix}$ matrisinin l-inci ($l\in\mathbb{N}$) kuvvetlerini hesaplayalım.Matrisin Jordan formu:

$J = köş(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) = köş(-a,-1,0,1,a)$ biçimindedir. Burada $a = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

dir. $l = 2s\ (s\in\mathbb{N})$ için;

$$C^l = \left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_1 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ a_2 & 0 & a_5 & 0 & a_2 \\ 0 & a_4 & 0 & a_3 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

olur. Burada her bir a_j elemanı

$$\begin{aligned} a_1(l) &= a^l\left(1+(-1)^l\right), \\ a_2(l) &= a^{l+1}\left(1-(-1)^l\right), \\ a_3(l) &= 2\left(1+(-1)^l\right), \\ a_4(l) &= 2\left(1-(-1)^l\right), \\ a_5(l) &= a^{l+2}\left(1+(-1)^l\right). \end{aligned}$$

şeklindedir. $l = 2s+1 \quad (s \in \mathbb{N})$ ve

$$r = \begin{cases} -1, & i+j = 4p,\ p \in \mathbb{N} \\ 1, & diğer \quad durumlarda \end{cases}$$

için;

$$C^l = r q_{ij}(l)$$

olmak üzere;

$$C^l = r\left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_1 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ a_2 & 0 & a_5 & 0 & a_2 \\ 0 & a_4 & 0 & a_3 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla,

$$a_1(l)=a^l\left(1+(-1)^l\right),$$
$$a_2(l)=-a^{l+1}\left(1-(-1)^l\right),$$
$$a_3(l)=-2\left(1+(-1)^l\right),$$
$$a_4(l)=2\left(1-(-1)^l\right),$$
$$a_5(l)=a^{l+2}\left(1+(-1)^l\right).$$

elde edilir.

Örnek 4.4.2 $C=\begin{bmatrix}0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0\end{bmatrix}$ matrisinin kuvvetlerini hesaplayalım. Matrisin Jordan formu

$$J=köş\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6,\lambda_7\right)=köş\left(-a,-b,-c,0,c,b,a\right)$$
$$a=2\cos\frac{\pi}{5},\ b=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},\ c=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

olmak üzere $l=2s\quad(s\in\mathbb{Z})$ için;

$$C^l=\left(q_{ij}(l)\right)=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}a_1&0&a_2&0&a_3&0&a_4\\0&a_5&0&a_6&0&a_5&0\\a_2&0&a_7&0&a_8&0&a_3\\0&a_6&0&a_9&0&a_6&0\\a_3&0&a_8&0&a_7&0&a_2\\0&a_5&0&a_6&0&a_5&0\\a_4&0&a_3&0&a_2&0&a_1\end{bmatrix}$$

dir. Burada;

$$a_1(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^l+\left(4-c^2\right)c^l\right),$$
$$a_2(l)=2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+1}+\left(4-c^2\right)c^{l+1}\right),$$
$$a_3(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+1}-\left(4-c^2\right)c^{l+1}\right),$$
$$a_4(l)=2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^l-\left(4-c^2\right)c^l\right),$$
$$a_5(l)=5\left(1+(-1)^l\right)b^l,$$
$$a_6(l)=5\left(1-(-1)^l\right)b^{l+1},$$
$$a_7(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+2}+\left(4-c^2\right)c^{l+2}\right),$$
$$a_8(l)=2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+2}-\left(4-c^2\right)c^{l+2}\right),$$
$$a_9(l)=5\left(1+(-1)^l\right)b^{l+2}.$$

dir. $l=2s+1 \quad (s\in\square)$ ve

$$r=\begin{cases}-1, & i+j=4p,\ p\in\square\\ 1, & diğer \quad durumlarda\end{cases}$$

için;

$$C^l=rq_{ij}(l)$$

olmak üzere;

$$C^l=r\left(q_{ij}(l)\right)=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}a_1&0&a_2&0&a_3&0&a_4\\0&a_5&0&a_6&0&a_5&0\\a_2&0&a_7&0&a_8&0&a_3\\0&a_6&0&a_9&0&a_6&0\\a_3&0&a_8&0&a_7&0&a_2\\0&a_5&0&a_6&0&a_5&0\\a_4&0&a_3&0&a_2&0&a_1\end{bmatrix}$$

olup

$$a_1(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^l+\left(4-c^2\right)c^l\right),$$
$$a_2(l)=-2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+1}+\left(4-c^2\right)c^{l+1}\right),$$
$$a_3(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+1}-\left(4-c^2\right)c^{l+1}\right),$$
$$a_4(l)=-2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^l-\left(4-c^2\right)c^l\right),$$
$$a_5(l)=-5\left(1+(-1)^l\right)b^l,$$
$$a_6(l)=5\left(1-(-1)^l\right)b^{l+1},$$
$$a_7(l)=2\left(1+(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+2}+\left(4-c^2\right)c^{l+2}\right),$$
$$a_8(l)=-2\left(1-(-1)^l\right)\left(\left(4-a^2\right)a^{l+2}-\left(4-c^2\right)c^{l+2}\right),$$
$$a_9(l)=-5\left(1+(-1)^l\right)b^{l+2}.$$

dir.

Örnek 4.4.3 $C=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$ matrisinin $l\in\mathbb{N}$ için l-inci kuvvetlerini hesaplayalım.Matrisin Jordan formu:

$J=köş\left(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2\lambda_2\right)=köş\left(-1,-1,1,1\right)$ biçimindedir. $l=2s\ (s\in\mathbb{N})$ ve

$$m_{ij}=\begin{cases}-1, & |i-j|=4\\ 1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

için

$$C^l=m_{ij}\left(q_{ij}(l)\right)=\frac{1}{6}\left(q_{ij}(l)\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1&0&c_2&0\\0&c_1&0&c_2\\c_2&0&c_1&0\\0&c_2&0&c_1\end{bmatrix}$$
$$c_1(l)=2,\quad c_2(l)=0,$$

elde edilir. Her bir $\lambda_k \neq 0$ olduğundan determinantı sıfırdan farklıdır ve matris singüler değildir, dolayısıyla tersi vardır.

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$l = 2s+1, (s \in \mathbb{Z})$ ve

$$r_{ij} = \begin{cases} -1, & i+j = 8p+4 \; ve \; i+j = 8p+6, \; p \in \mathbb{Z} \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için

$$C^l = r_{ij} q_{ij}(l)$$

olup

$$C^l = r_{ij}\left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{6}\left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 \\ c_2 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$c_1(l) = 0, \quad c_2(l) = 2,$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.4.4 $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin $l \in \mathbb{Z}$ için l-inci kuvvetlerini hesaplayalım.Matrisin *Jordan* formu:

$$J = köş\left(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3\right) = köş\left(-c, -c, 0, 0, c, c\right)$$
$$c = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

biçimindedir. $l = 2s\ (s \in \square)$ ve

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & |i-j| = 4 \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için;

$$C^l = \frac{1}{8}\left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{4} m_{ij} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 \\ c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$
$$c_1(l) = 2m_{ij}c^l,$$
$$c_2(l) = 0,$$
$$c_3(l) = 2m_{ij}c^{l+2}, \left(l \in \square\right)$$

elde edilir. $l = 2s+1\ (s \in \square)$ ve;

$$r_{ij} = \begin{cases} -1, & i+j = 8p+4 \textit{ ve } i+j = 8p+6,\ p \in \square \\ 1, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için;

$$C^l = r_{ij} q_{ij}(l)$$

$$C^l = \frac{1}{8} r_{ij}\left(q_{ij}(l)\right) = \frac{1}{4} r_{ij} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 \\ c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$c_1(l) = 0,$$
$$c_2(l) = 2r_{ij}c^{l+1},$$
$$c_3(l) = 0, (l \in \square),$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.4.5. 6×6

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*C*matrisinin T dönüşüm matrisini ve tersini hesaplayalım. C'ninözdeğerleri ve ikinci tür Chebyshevpolinomu cinsinden ifadeleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$
$$U_0\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) = 1, U_1\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) = \lambda_k \ (k = 1,2,3)$$
$$U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = -U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) = U_2\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) = 1$$

olup ve sırasıyla T ve T^{-1} matrisleri;

$$T = \begin{bmatrix} -U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -U_2\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & -U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & -U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & -U_2\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\ U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \\ U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$t_1 = t_3 = \frac{1}{4}$ ve $t_2 = \frac{1}{2}$ olmak üzere;

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} -t_1U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 \\ 0 & -t_1U_2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & t_1U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ -t_2U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 \\ 0 & -t_2U_2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_1\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & t_2U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ -t_3U_2\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & -t_3U_2\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3U_1\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) & 0 & t_3U_0\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı simetrik pentadiagonal matrislerin pozitif tamsayı kuvvetleri genelleştirilerek matris teoriye yeni formülüzasyonlar kazandırılmıştır. Bu sayede simetrik pentadiagonal bir matrisin kuvvetlerinin, özdeğer ve özvektörlerinin kökleri bilinen Chebyshevpolinomları ile ifade edilerek hesaplanılabildiği görülmüştür. Böylece tridiagonal, antitridiagonal, pentadiagonal ve antipentadiagonal gibi bazı özel tipteki matrislerin seçimi ile Chebyshevpolinomları yardımıyla formülüzasyonun kolaylaştığı anlaşılmaktadır.

Bazı simetrik pentadiagonal matrisler için Maple programı yardımıyla prosedür oluşturulabileceği ortaya çıkmıştır. Böylece formülüzasyondaki girdilerin elle hesabı ortadan kalkarak elde edilen Maple prosedürüyle vakitten kazanç sağlanmıştır.

Beklentimiz, bizim özel olarak seçtiğimiz simetrik pentadiagonal matrislerin pozitif tamsayı kuvvetlerini hesaplayıp genelleştirdiğimiz gibi en genel ifadesiyle simetrik pentadiagonal bir matrisinde kuvvetlerinin genelleştirilmesidir. Böylece en genel ifadesiyle bir Mapleprosedürüde oluşturulabilir ve prosedürde genelleştirilmiş olur.

6. KAYNAKLAR

Bai, Y. Gansterer, W. N. Ward, R.C2004 Blok Tridiagonalization of “effectively” Sparse Symmetric Matrices. ACM Trans. Math. Softw. 30 326-352.

Stewart, G. W. 1993 Updating A Rank-Realing ULV Decomposition. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14494-499.

Park, H. Eldan, L. 1995 Downdating the Rank–Revealing ULV Decomposition, SIAM J. Matrix Anal. 16 138-155.

Andrews, G.E. Askey, R. Ray, R. 2000 Special Function Cambridge University Press.

Askey, R. 2005 Evaluation of Sylvester Type Determinants Using Orthogonal Polynomials. In Begehr, HGW, Advances in Analysis Hackensack, NJ, World Scientific.

Bailey, W.N. 1935 Generalized Hypergeometric Series Cambridge University Press.

Faddev, D.K. Sominski, I.S. 1965 Problem in Higher Algebra, San Francisco, Freeman

Agarwal, R.P. 1992 Difference Equations and Inequalities Marcel Dekker.

Gray, R.M.1972 On The Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices, IEEE Transactrons on Information Theory 18, 725-730.

Gray, R.M. 2006 Toeplitz and Circulant Matrices, ARevrew, Foundation and Trends in Communications and Information Theory 2(3) 155-239 (Original Version Tech. Rep. 6502-1, Stanfard Electronic Laboratory, Stanford. C.A, June 1971).

Rimas, J.1977 Investigation of Dynamics of Mutually Synchronized Systems, Telecommunications and Radio Eigineering 32 68-79.

Rimas, J.2008 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for one Type of SymmeticPentadiagonal Matrices of Even Order, Applied Mathematics and Computation 103(2) 582-591.

Rimas, J. 2005 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for one Type of Odd Order SymmeticCirculant Matrices -1, Applied Mathematics and Computation 165 137-141.

Horn, R. Johnson, C. 1985 Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Davis, P.J. 1979 Circulant Matrices, John Wiley and Sons, New York.

Horn, P. Johnson, C. 1986 Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Fox, L. Parke, J.B.1968 Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London.

Mason, J.C. veHandscomb, D.C. 2003 Chebyshev Polynomials, CRC Press, Washington.

Elaydi, S.N. 1995 An Introduction to Difference Equations, Trinity University, New York.

Zhang, F. 1961 Matrix Theory, Springer, USA.

Bozkurt, D. Türen, B. Solak, **S. 2005** LineerCebir, DizgiOfsetMatbaaclk, Konya.

Zhao, Xi-Le, Huang, Ting-Zhu 2008 On The Inverse of A General Pentadiagonal Matrix, Applied Mathematics and Computation, 202 639-646.

Rimas, J. 2008 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for One Type of Symmetric Pentadiagonal Matrices of Even Order, Applied Mathematics and Computation 203 582-591.

Rimas, J. 2008 On Computing of Arbitrary Positive Integer Powers for One Type of Symmetric Pentadiagonal Matrices of Odd Order, Applied Mathematics and Computation, 204 120-129.

Bozkurt, D. Gürses, İ. Kıyak, H. Yılmaz, F. 2010 On Arbitrary Positive Integer Powers for One Type of Symmetric Pentadiagonal Matrices of Even Order, The First International Conference on Mathematics and Statistic.

Kıyak, H. Gürses, İ. Bozkurt, D. A Formula For Computing Integer Powers Of One Type of Even Order Tridiagonal Matrices, Hacettepe of Journal Mathematics and Statistic (Yayınlanacak).

Akbulak, M. Yılmaz, F. Bozkurt, D. 2009 Complex Factorization of Fibonacci

Numbers by Anti-Tridiagonal Matrix Method, The 3rd Int. Workshop on Matrix Analysis and Appl. Zhejiang Forestry University, Hangzhou/Lin'An, China (July 9-13).

Marcus, M. Mine, H. 1992 A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Dover Publication, Inc. New York.

El-Mikkawy ve Rahmo 2009 A New RecursiveAlgorithmForInverting General PeriodicPentadiagonalAnd Anti-PentadiagonalMatrices, AppliedMathematicesandComputation207 164–17.

Hans, G. Barker, P. 1968 Matrices and Linear Algebra.

Serre, D. 2001 Graduate Texts in Mathematics/Matrices Theory and Applications.

Ayres, F. 1962 Theory and Problems of Matrices, Schaum's Outline Series.