T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN MODİFİYE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Ümmügülsüm CANSU

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos-2010
KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ümmügülsüm CANSU

Tarih: Ağustos-2010

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN MODİFİYE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Ümmügülsüm CANSU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

2010, 74 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

Bu tez çalışmasında adi ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) çözümlerine yer verilmiştir. Kullanılan yeni yöntemin; klasik Diferensiyel Dönüşüm (DT) metodundaki eksiklikleri ve metodun dezavantajlarını ortadan kaldırdığı örnekler ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegro Diferensiyel Denklemler, Modifiye Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Diferensiyel Dönüşüm Metodu, Padé Yaklaşımı, Laplace Dönüşümü

ABSTRACT

MS THESIS

SOLUTIONS OF INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MODIFIED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

Ümmügülsüm CANSU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN DEPARTMENT of MATHEMATİCS

Advisor: Assist.Prof. Dr.Ozan ÖZKAN

2010, 74 Pages

Jury
Associate Prof. Dr. Cengiz ÇINAR
Assist. Prof. Dr. Kemal USLU
Advisor : Assist. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN

The purpose of this study is to deal with Modified Differential Transform solutions of ordinary and partial integro diferential equations. Used this new method is showed that removes the lack of Differential Transform Method and its disadvantages and this feature of the new method is illustrated with examples.

Keywords: Integro Differential Equations, Modified Differential Transform, Differential Transform Method, Padé Approximation, Laplace Transform.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tez çalışması olarak sunulmuştur.

Yapılan bu çalışmada; Diferensiyel Dönüşüm metodu geliştirilerek Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) metodu tanımlanmıştır. Yeni metot ile adi ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin çözümüne yer verilmiştir. Ayrıca kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin DT ile çözülebilmesi için gerekli olan bazı yeni teoremler ispatlanmıştır. Elde edilen bu veriler grafikler ve tablolarla desteklenmiştir. Grafiklerde ve hesaplamalarda Maple 13, Mathematica 7, Matlab gibi popüler programlar kullanılmıştır.

Bu tez konusunun seçimi ve yürütülmesi esnasında yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN'a ve desteğini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ümmügülsüm CANSU

KONYA, 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Literatür Özeti 3

2. TEMEL KAVRAMLAR **8**

2.1. Padé Yaklaşımları 11
2.1.1 Bir Değişkenli Fonksiyonlar İçin Padé Yaklaşımları 12
2.2. Laplace Dönüşümü 15
2.2.1 Ters Laplace Dönüşümü 16

3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (DT) VE ÖZELLİKLERİ **17**

3.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm 17
3.2 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodunun Özellikleri 20
3.3 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodu 23
3.4. İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodunun Özellikleri 23

4. MODİFİYE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU **31**

4.1.Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (Mdt) Metodu 31
4.2.Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) Metodunun İntegro Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı 32

5. UYGULAMALAR **36**

ÖZGEÇMİŞ **64**

ŞEKİLLER TABLOSU

Şekil 5. 1 (a,b,c,d): N=10 için (5.11)-(5.13) probleminin $y(x)_{[1/1]}, y(x)_{[2/2]}, y(x)_{[3/3]} y(x)_{[4/4]}$ MDT çözümleri ve gerçek çözüm 41

Şekil 5. 2 (a,b,c,d) Hata$_{[L/M]}$=Analitik çözüm-y(x)$_{[L/M]}$ 43

Şekil 5. 3 y(x)$_{[L/M]}$ ve DT ile elde edilen çözümlerin hata grafikleri (N=10) 43

Şekil 5. 4:MDT [L/M] ile elde edilen çözümler ve gerçek çözüm (N=20). 46

Şekil 5. 5 MDT $_{[L/M]}$ çözümü= Gerçek Çözüm ve DT ile bulunan çözüm grafiği. 51

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo2. 1: Padé [L/M] yaklaşım tablosu. 14

Tablo2. 2: e^x in Padé yaklaşımı tablosu..... 15

Tablo 5. 1: Hata$_{[L/M]}$ =Analitik Çözüm-MDT$_{[L/M]}$ (N=10 için)..... 42

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümü için, hatta bir değişkenli integro diferensiyel denklemlerin nümerik çözümü için etkin bir yöntem olduğu bilinen (Zhou,1986) *Diferensiyel Dönüşüm* (DT) metodunun; kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere genişletilmesi ile çözüm yönteminden kaynaklanan kesme hatasının azaltılabilmesi için çözümün yakınsaklık aralığının nasıl genişletilebileceğini gösteren ve *Modifiye Diferensiyel Dönüşüm Metodu (*MDT) olarak adlandırdığımız metodun adi ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere uygulanması ele alınmıştır.

Bilindiği gibi; birçok fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik probleminin matematiksel modellemeleri karşımıza diferensiyel denklemleri çıkartmaktadır. Bu diferensiyel denklemlerin çözümleri; ortaya konulan problemi çözmekle beraber aynı zamanda insanoğlunun yaşamını kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle diferensiyel denklemler ve çözümleri her zaman insanlık için önemli olmuştur. Diferensiyel denklemlerin çözümü ve çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi sürecinde en önemli adımlardan biri diferensiyel denklemlerin sınıflandırılmasıdır. Bu sınıflandırma yöntemleri sonrasında karşımıza çıkan gruplardan biri de *integro diferensiyel denklemler* dir (Miller, 1967; Thieme, 1977; Golberg, 1979). İntegro diferensiyel denklemlere ısı iletimi, popülasyon genetiği, difüzyon denklemleri gibi birçok problemin matemaiksel modellemelerinin kullanıldığı fizik, kimya, biyoloji ve birçok mühendislik biliminde karşılaşılmaktadır.

İntegro diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok yöntem olduğu bilinmektedir. Bu yöntemlerden herhangi biri kullanılarak problemlerin teorik olarak çözümlerinin varlığı, tekliği, çözümlerin davranışları ve buna benzer soruların cevapları kolaylıkla bulunabilir(Morchalo, 1975; Agarwal, 1986). Lineer denklemlerin analitik çözümleri her zaman kolaylıkla bulunurken lineer olmayan integro difrensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunabilmesi her zaman mümkün değildir. Böyle durumlarda diferensiyel denklemlerde olduğu gibi integro diferensiyel denklemlerde de nümerik çözümler önem kazanmaktadır. Bununla birlikte, teknolojik gelişmeler ve artan ihtiyaçlar sonucunda diferensiyel denklemlerin sadece nümerik çözümlerinin bulunmuş olmasının problemin çözümü için yeterli olmadığı görülmüştür. Gelişen ihtiyaca göre uygulanan nümerik yöntemin; bilgisayar ortamında kodlanmaya uygun olması veya problemin çözüm hızına katkısı, çeşitli nümerik yöntemlerin ortaya çıkmasını

gerektirmiştir. Tabii ki ortaya konulan çözüm yöntemlerinin güvenilirliğini etkileyen en önemli husus her zaman yöntemin hata miktarı olmuştur.

Adomian Decomposition, Homotopi Pertürbasyon, B-Spline gibi metodların yukarıda bahsedilen ihtiyaçları karşılamak için bu tür problemlere uygulandığı bilinmektedir (Çağlar ve ark., 1999; Wazwaz 2001; Baguhuna ve ark., 2009; Sweilam ve Khader, 2009). Bu yöntemlerin ele alınan problemin doğasına uygun olarak bazı açılardan birbirlerine üstün oldukları da bilinmektedir. Bu çalışmada ele alınacak olan DT metodunun da yukarıda bahsedilen metodlarda olduğu gibi; adi türevli ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümü hatta bir değişkenli integro diferensiyel denklemlerin çözümü için etkin bir yöntem olduğu bilinmektedir (Chen ve Ho, 1999; Jang ve ark., 2000; Arikoğlu, 2005; Özkan, 2010).

Diferensiyel Dönüşüm metodu; hem lineer hem de nonlineer diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanılan ve uygulandığı problemlerde daha etkili sonuç veren metotlardan biridir. Metodun en önemli özelliği diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmesi ve cebirsel denklemlerin çözümlerinin ise ele alınan problemin nümerik çözümünü vermesidir. Aynı zamanda metot Adomian Decomposition, Homotopi Pertürbasyon, B-Spline metotlarının verdiği sonuçlara göre daha iyi sonuç vermektedir (Ayaz,2004; Baguhuna ve ark., 2009;).

Bu yüksek lisans tez çalışmasının orijinal kısmı; Diferensiyel Dönüşüm metodunun kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere genişletilmesi ile çözüm yönteminden kaynaklanan kesme hatasının azaltılabilmesi için çözümün yakınsaklık aralığının nasıl genişletilebileceğini gösteren Modifiye Diferensiyel Dönüşüm Metodu ve metodun adi ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere uygulanmasını içermektedir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde; ele alınacak yöntemi ve çalışmanın orijinal kısmının daha iyi anlaşılabilmesine yarayacak bazı global tanımlar ve yöntemlere yer verilmektedir. Üçüncü bölümde; DT metodu ve metodun bilinen bazı özellikleri ile tez çalışmasının orijinal kısımlarından biri olan kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin DT ile çözümüne imkân veren yeni teoremler ve ispatları yer almaktadır. Dördüncü bölümde; Modifiye Diferensiyel Dönüşüm metodu olarak adlandırdığımız ve DT metodu, Padé yaklaşımı ile Laplace Dönüşümünün diferensiyel denkleme üçünün beraber uygulanmasından elde edilen yeni yöntem ile

yöntemin integro diferensiyel denklemler ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere uygulanışı ele alınmıştır. Beşinci bölümde; ele alınan örnekler Modifiye Diferensiyel Dönüşüm metodu ile çözülmüşler. Elde edilen sonuçlar ile sonuçlara etki eden faktörler tablo ve grafikler yardımı ile analiz edilmiştir. Altıncı ve son bölümde ise; bu tez çalışmasında ele alınan yeni yöntemin sağladığı bazı avantajlar ile metodon bundan sonra yapılabilecekler çalışmalara sağlayabileceği katkılardan bahsedilmiştir.

1.1. Literatür Özeti

Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile ilgili ilk yapılan çalışmanın Zhou (1986) tarafından yapılan makale olduğu bilinmektedir. Zhou bu çalışmada DT metodunu, elektrik akım analizinin lineer ve lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümünde kullanmıştır.

Chen ve Ho (1996) ise DT yi kullanarak; özdeğer problemlerinin çözümü için yeni bir yöntem vermişlerdir. Chen ve Ho; DT metodunu kullanarak, herhangi i-inci özdeğeri ve özdeğer fonksiyonunu kolaylıkla bulabilmişlerdir. Jang ve Chen (1997) ise; güçlü lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinin analizi probleminin çözümünde DT yöntemini kullanmıştır. Aynı zamanda yapılan bu çalışmada; DT yönteminin Runge-Kutta yönteminden daha iyi sonuç verdiğini gösterilmiştir. Chen C-L ve Liu (1998) çalışmalarında; DT yi lineer olmayan ısı kondüksiyon problemlerinin çözümü için kullanmışlardır. Chen ve Ho (1999); dönerek bükülmüş Timoshenko kirişinin serbest vibrasyon problemini çözmek için DT konseptini kullanmıştır. Burada elde edilen çözümler analitik formdadır. Chen C-K ve Ho (1999); kısmi türevli diferensiyel denklemlerin DT ile çözülebilmeleri için gerekli olan iki boyutlu DT kuramını ilk kez bu çalışmalarında vermişlerdir. Bu makaleye kadar ele alınan tüm problemler adi türevli diferensiyel denklemlerin DT ile çözümü üzerine olmasına karşın bu makale ile kısmi türevli diferensiyel denklemlerin DT ile çözülmelerine başlanmıştır. İki boyutlu DT ile diferensiyel denklemlerin çözümünde; adi türevli diferensiyel denklemlerde olduğu gibi üç önemli adım bulunmaktadır. İlk adımda; kısmi türevli diferensiyel denklem cebirsel denkleme dönüştürülür, ikinci adımda elde edilen cebirsel denklem çözümlenir ve son adımda ters diferensiyel dönüşüm yardımıyla diferensiyel denklemin DT çözümüne ulaşılır böylece yaklaşık çözüm elde edilir.

Jang, Chen ve Liy (2000) tarafından yapılan çalışmada ise; lineer ve lineer olmayan adi türevli diferensiyel denklemler ile kurulan başlangıç değer problemlerinin

çözümünü; önceden seçilen grid sayısına bağlı olarak her bir grid de ayrı ayrı bulmuşlardır. DT metodu yardımı ile yapılan çalışmalar arasında ilk kez bu çalışmada bu tür bir yöntem izlenmiştir. Diğer nümerik metotlarda çok sık kullanıldığı gibi; problemin çözümünün gridler yardımıyla bulunması; hem daha iyi sonuçların alınmasına hem de çözümün global hatasının kontrol edilebilmesine imkan tanımıştır.

Jang, Chen ve Liu (2001)' nun çalışmaları ise aslında Chen C-K. ve Ho (1999)' nun yapmış oldukları çalışmadan pek farklı değildir. Farklı kişilerce aynı zamanlarda yapılan bu ikinci çalışmada da iki boyutlu DT konsepti üzerinde durulmuş ve sırasıyla parabolik, hiperbolik, eliptik ve lineer olmayan tipteki kısmi türevli diferensiyel denklemler DT metodu ile çözülmüşlerdir.

Abdel ve Hassan (2002); Sturm-Liouville özdeğer problemi için, özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonunun bulunmasını DT yardımıyla vermişlerdir. Bu makalede üç farklı problem için özdeğerlerin yakınsaklığı gösterilmiş, elde edilen sonuçlar aynı zamanda bilinen analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Abdel ve Hassan (2002)' nın diğer bir makalelerinde ise; bir boyutlu DT metodu, ikinci ve dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin; özdeğer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonların bulunması için kullanmışlardır

Jang., Wang ve Liu (2003); parametre tanımlama probleminde maksimum ihtimal değerlerinin bulunması için direkt arama yöntemini DT yardımıyla vermiştir. Bu parametrelerin tanıtım kriterleri fonksiyonunu DT yardımıyla kurmuşlardır. Ayaz F. (2003) de DT ile yapmış olduğu ilk çalışmasında; kısmi türevli diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin iki boyutlu DT yardımı ile çözümlerini bulmuştur. Lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri; bu çalışmada ilave edilen teoremler ışığında çözülmüşlerdir.

Ayaz F. (2004) yaptığı diğer çalışmasında ise; üç boyutlu DT kuramı ve kuramla ilgili temel teoremler verilmiştir. Bu çalışmada verilen yeni teoremler yardımıyla bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri çözülmüş ve elde edilen sonuçlar; bir diğer nümerik çözüm metodu olan Adomian metodundan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Ayaz F. (2004) son olarak lineer cebirsel-diferensiyel denklemin nümerik çözümlerini DT metodu yardımıyla yapmıştır. Bu çalışmasında; iki farklı örneği metot yardımı ile çözüp, elde ettiği sonuçların analitik sonuçlara çok yakın sonuçlar olduğunu göstermiştir. Süreksiz Adjective-dispersive taşınım denklemi, Chen

C-K. ve Ju (2004) tarafından DT metodu yardımı ile çözülmüştür. Bu çalışmayı önceki çalışmalardan ayıran en önemli farkın çözüm esnasında hem sonlu fark metodunun hem de DT nin aynı anda kullanılmış olmasıdır.

İntegro diferensiyel denklemlerin DT ile çözümü ilk olarak Arikoğlu ve Özkol (2005) tarafından yapılmıştır. Yapılan bu çalışmada diferensiyel dönüşüm metodunun kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere uygulanabilmesine imkân veren bazı yeni teoremler ile DT ile elde edilen integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerinin nasıl iyileştirilebileceği araştırılmıştır. Ele alınan problemlerin aynı zamanda literatürde Wawelet-Galerkin ve Adomian Decomposition metodu ile çözülmüş olmaları; DT ile bulunan sonuçların daha iyi olduğunu gösteren somut deliller olarak sunulmuştur. Abdel ve Hassan (2004) ise yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin çözümlerini DT yardımıyla vermişlerdir. Yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için verilen ve diferensiyel denklemi; diferensiyel denklem sistemine çeviren klasik yöntem kullanılmış, ardından da elde edilen sistem; çözümün arandığı aralıktaki gridlerde DT yardımıyla çözümlenmiştir. Çözüm ise; herhangi bir grid aralığında Taylor serisi biçiminde verilmiştir. Aynı zamanda elde edilen sonuçlar dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. DT nin lineer olmayan serbest bir conservative sisteminde kullanımını, Chen C-K. ve Chen S-S. (2004) vermişlerdir. Burada da elde edilen sonuçlar; Runge-Kutta da elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermiştir.

2005 yılı içerisinde ise, ilk önce Kuo (2005) DT yi serbest convection problemleri ile ilgili hız ve ısı dağılımlarını incelediği çalışma ile Kurnaz ve Oturanç (2005) in yapmış oldukları ve diferensiyel denklem sistemlerinin DT yardımıyla yaklaşık çözümünü veren çalışmalar göze çarpmaktadır. Bu çalışmada problemin DT yardımıyla çözümünün yanı sıra; çözümün arandığı aralıktaki çözüm fonksiyonu gridlere bölünen her bir alt aralıkta bulunmuştur. Hatta bununla da yetinilmemiş aynı zamanda hata kontrolü de yapılmıştır. Burada yapılan hata kontrolü; hata için sisteme girilen üst sınıra bağlı olarak alınması gereken minimum grid sayısını bulmaya yardım etmektedir. Kurnaz, Oturanç ve Kiriş (2005) ise kısmi türevli diferensiyel denklemlerin DT metodu yardımı ile çözülebilmesi için *n*-boyutlu DT metodunu tanımlamışlardır. Yapılan genelleştirme yardımıyla lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılmıştır. Yang, Liu ve Bai (2005) nin çalışmalarında; ikinci mertebeden kısmi türevli lineer diferensiyel denklemlerin DT ile çözümüne yer

verilmiştir. Özkan ve Keskin (2005) çalışmalarında; gridli DT metodunu İntegro diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü için kullanmışlardır.

2006 yılınsa ise; Arikoğlu ve Özkol çalışmalarında diferensiyel-fark denklemlerini ele alarak; bu denklemleri DT metodu yardımıyla çözmüşlerdir. Diğer çalışmalarına benzer olarak bu çalışmalarında da yeni teoremler geliştirmişler ve lineer, lineer olmayan, sabit katsayılı, değişken katsayılı diferensiyel –fark denklemlerinin DT ile çözümüne imkan veren yeni teoremler geliştirmişlerdir. Yine bu yıl içerisinde Bildik, Konuralp, Bek ve Küçükarslan (2006) grubu tarafında yapılan çalışmada farklı tiplerdeki kısmi türevli diferensiyel denklemler hem DT ile hem de Adomian Decomposition metodu yardımıyla çözümlenmiş, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2007 yılında ise Arikoğlu ve Özkol DT metodunu kesirli diferensiyel denklemleri çözümünde kullanmışlar ve yeni teoremler geliştirmişlerdir. Aralarında Bagley–Torvik, Ricatti gibi denklemlerinde bulunduğu denklemleri çözerek daha iyi sonuç elde edildiğini göstermişlerdir. Yine 2007 yılında; Ertürk ve Momani DT metodunu dördüncü mertebeden sınır değer problemlerin çözümünde kullanmışlardır. Odibat, Momani ve Ertürk (2007) uzay ve zaman kesirli difüzyon dalga denklemini genelleştirilmiş DT metodu ile çözmüşler ve çalışmalarında iki boyutlu DT metodunu kullanarak uzay ve zaman kesirli difüzyon dalga denkleminin zaman ve uzay türevlerini çözmüşler ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünü kolaylaştıran yeni teoremler geliştirmişlerdir. Çatal (2007) Beam denklemlerini serbest vibrasyonunu DT metodunu kullanarak çözmüştür.

2008 yılınsa ise; Ertürk ve Momani lineer olmayan oskülatörlerin çözümünde DT metodunu kullanmışlardır. Böylece çözümün periyodik davranışını elde etmedeki zorluğu DT metodu ile kolayca çözebilmişlerdir. Kanth ve Aruna (2008) singüler iki noktalı sınır değer problemlerini DT metodu ile çözmüşlerdir. Odibat (2008) ayrılabilir çekirdekli Volterra integral denklemlerinin çözümünde DT metodunu kullanmıştır.

Kangalgil ve Ayaz (2009) KdV ve mKdV için Solitary dalga denklemlerini çözümünde DT metodunu kullanmışlardır. Çalışmayı yaparken iki boyutlu DT metodundan faydalanmışlar ve metodun işlerliğini nümerik örneklerle göstermişlerdir. Islam, Haq ve Ali (2009) 12. mertebeden sınır değer problemlerinden özel örnekler alarak bu örnekleri DT metodu ile çözmüşlerdir. Yine aynı yıl Karakoç ve Bereketoğlu(2009) DT metodu için yeni teoremler geliştirerek DT metodunu

karşılaştırmalı olarak gecikme denklemlerine uygulamışlardır. DT metodunda gridlerin kullanılması ile elde edilen yaklaşık çözümlerdeki hatalar azaltılmıştır.

Cansu ve Özkan (2010) karışık lineer olmayan sınır koşulları olan dalga denklemlerinin çözümünü DT metodu ile bulmuşlardır. Böylece lineer olmayan sınır koşullarının problemin çözümünde kullanılmasındaki zorluk ortadan kalkmıştır Alawneh, Khaled and Al-Towaiq (2010) DT metodunu lineer olmayan integro diferensiyel denklemlere uygulamışlar ve elde ettikleri sonuçları diğer nümerik metotlarla karşılaştırarak DT metodunun daha iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. Odibat (2010) ve arkadaşları tarafından kaotik ve kaotik olmayan sistemlere DT metodu uygulanarak çözümler seri formu halinde elde edilmiştir. Lotka Volterra, Chen and Lorenz sistemleri çözülmüş elde edilen çözümler Runge-Kutta metodu ile elde edilen çözümer ile karşılaştırılmıştır. Özkan (2010), integro diferensiyel denklemlerin çözümünü grid kullanarak DT metodu ile çözmüştür. Jang (2010) ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise başlangıç ve sınır değer problemleri DT metodu ile ele alınmıştır. Nazari ve Shahmorad (2010) yerel olmayan sınır koşullarına sahip kesirli integro-diferensiyel denklemlere kesirli DT metodunu uygulamışlardır. Özkan ve Cansu (2010) varyasyon problemlerine DT metodunu başarı ile uygulamışlardır. Kurulay ve Bayram (2010) kesirli KdV denklemlerinin çözümlerini iki boyutlu DT metodunun kullanarak elde etmişlerdir. Cansu ve Özkan (2010) sınırsız uzamsal bölgelerde tanımlanan parabilik Volterra integro diferensiyel denklemlere DT uygulayarak çözmüşler böylece sınırsız bölgelerde yapay sınır koşulları tanımlanılarak problemin çözülmesi zorluğunu ortadan kaldırmışlardır. Son olarak; Al-Rabtah, Ertürk ve Momani (2010) çalışmalarında metodu kullanmışlar ve mertebesi tam sayı olan diferensiyel denklemler için olan DT metodunu kesirli salınımlı denklemlere uygulayarak yeni teoremler elde etmişlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; diğer bölümlerde ele alınacak olan yöntemlerin ve çalışmanın orijinal kısmının daha iyi anlaşılabilmesine yarayacak olan, lisans düzeyinde matematik bilgisi olanların bildiği ve sık sık kullandığı bazı global tanımlar ve yöntemlere yer verilmiştir. Burada ele alınacak teoremlerin ispatları literatürde ayrıntılı olarak mevcut olduğu için; teoremlerin ispatlarına yer verilmeyip sadece ifadeleri yer alacaktır.

Tanım 2.1. Bilinmeyeni fonksiyon olan ve fonksiyonun en az bir türevini içeren denkleme *diferensiyel denklem* denir. Aranan fonksiyon yalnız bir değişkene bağlı ise, denkleme *adi diferensiyel denklem* denir.

Tanım 2.3. $a_0(x)$ değeri sıfırdan farklı, x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

denklemine $n-$*ninci mertebeden lineer diferensiyel denklem* denir.

Tanım 2.2. Bilinmeyeni en az iki değişkenli fonksiyon olan diferensiyel denkleme *kısmi türevli diferensiyel denklem* denir.

A, B, C, D, E, F ve *G, x* ve *y* bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x,y) \tag{2.2}$$

şeklindedir. $G(x,y) = 0$ ise (2.2) denklemi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \tag{2.3}$$

şekline indirgenir ve (2.3)'e *ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen kısmi türevli lineer diferensiyel denklem* denir. (2.3) kısmi türevli diferansiyel denklemi parabolik eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi vardır.

A, B, C, D, E ve *F* katsayıları gerçel sabitler olmak üzere *x* ve *y* değişkenlerine göre

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \tag{2.4}$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin diskriminantına (Δ'na) bakılarak tipi belirlenebilir.

Bu durumda $\Delta = B^2 - 4AC$ olmak üzere;

eğer $\Delta < 0$ ise (2.4) diferensiyel denklemine eliptik tip kısmi türevli diferensiyel denklem,

eğer $\Delta = 0$ ise (2.4) diferensiyel denklemine parabolik tip kısmi türevli diferensiyel denklem,

eğer $\Delta > 0$ ise (2.4) diferensiyel denklemine hiperbolik tip kısmi türevli diferensiyel denklem denir (Ross, 1984).

Tanım 2.4. F fonksiyonu;

$$F : R^{n^m} \times R^{n^{m-1}} \times \cdots \times R^n \times R \times U \to R$$

biçiminde verilen (R^n olarak n-boyutlu reel Euclid uzayı anlatılmaktadır.) ve $u : U \to R$ bilinmeyen fonksiyonu olmak üzere;

$$F\left(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \cdots, Du(x), u(x), x\right) = 0 \quad (x \in U) \tag{2.5}$$

biçimindeki ifadeye, *m – ninci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklem* denir.

∂U ' nun Γ kısmında belirli sınır şartları sağlayan fonksiyonlar arasından (2.2) i sağlayan tüm u ' ları bulduğumuzda, kısmi türevli diferensiyel denklemi çözmüş oluruz (Evans, 1998). (Burada ve aşağıdaki diğer tanım ve teoremlerde $m \geq 1$ biçiminde belirli bir tam sayı ve U da R^n ' de açık alt küme olarak alınacaktır. ∂U ile de; U ' nun sınırı anlatılmaktadır.)

Tanım 2.5. Eğer (2.1) diferensiyel denklemi; lineer olmayan bir biçimde yüksek mertebeden türevlere bağlı olarak verilmiş ise; *tamamen lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem* denir.

Teorem 2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisi bir S kümesi üzerinde tanımlı $u(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve her $u_n(x)$, $[a,b] \subseteq S$ de integrallenebiliryorsa, bu durumda $u(x)$ de $[a,b]$ de integrallenebilir ve

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \tag{2.6}$$

olur (Brabenec, 1990).

Tanım 2.6. Kısmi türevli diferensiyel denklemlerle birlikte, t bağımsız değişkenin, $t=0$ değeri için $u=u_0$ çözümü verilirse bu koşula başlangıç koşulu, bu koşul altındaki denklemi çözmeye *Başlangıç Değer Problemi* denir.

Tanım 2.7. Diferensiyel denklemlerle birlikte, çözüm bölgesi sınırlarında, fizik problemi belirleyecek şekilde çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri verilmişse, bu koşullara *"Sınır Koşulları"*, bu koşullar altındaki denklemi çözmeye *"Sınır Değer Problemi"* denir.

Tanım 2.8. *m*.inci dereceden bir

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m \tag{2.7}$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşit kılınmasıyla yazılan

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m=0 \tag{2.8}$$

şeklinde ki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif *m* sayısına $f(x)=0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i)=0$ denklemini sağlayan x_i değerlerine, (2.8) denkleminin kökü denir.

Tanım 2.9. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ de her mertebeden türevi varsa ,

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+...+\frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n+... \tag{2.9}$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$' deki *Taylor serisi* denir. Eğer $c=0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun *Maclauren serisi* adı verilir.

Tanım 2.10. x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+...+a_n(x-c)^n+... \tag{2.10}$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Yukarıdaki tanımda $c=0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \tag{2.11}$$

elde edilir.

Tanım 2.11. Eğer x_0 noktası civarında ,

$$f(x)=\sum_k f_k(x-x_0)^k \quad \left(|x-x_0|<r\right) \tag{2.12}$$

olacak biçimde $r>0$ ve $\{f_k\}$ sabitleri var ise $f:R^n\to R$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna x_0 noktası civarında *(reel) analitik fonksiyon* denir (Evans,1998).

Tanım 2.12. Aranan fonksiyonun türevlerini ve integralini aynı anda içeren denklemlere *integro diferensiyel denklemler* denir (Volterra,1930). Bir lineer integro diferensiyel denklem,

$$a_0(x)\varphi^n(x)+a_1(x)\varphi^{n-1}+...+a_n(x)\varphi(x)+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)dt=f(x) \qquad (2.13)$$

formunda bir denklemdir. $a_0(x),...,a_n(x),f(x),K(x,t)$ $(m=0,1,...,s)$ bilinen fonksiyonlardır; $\varphi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur.

(2.13) formunda bir integro diferensiyel denklemi çözerken bilinmeyen fonksiyon üzerine, integral denklemlerden farklı olarak

$$\varphi(0)=\varphi_0,\varphi'(0)=\varphi'_0,...,\varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)} \qquad (2.14)$$

gibi başlangıç koşulları yüklenebilir.

Tanım 2.13.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int_0^t k(x,t-s)u(x,s)ds=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad x\in(0,\infty),\ t\in J=[0,T], \qquad (2.15)$$

$$u(x,0)=0,\qquad x\in(0,\infty) \qquad (2.16)$$

$$u(0,t)=t,\qquad t\in[0,T] \qquad (2.17)$$

biçiminde tanımlanan (2.15)-(2.17) sınır değer problemine; parabolik tip *kısmi türevli integro diferensiyel denklem* denir. (Han ve ark., 2006).

2.1. Padé Yaklaşımları

Mühendislik uygulamalarında; adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, akışkan dinamiğin uygulamalarında Padé yaklaşımı metodunun kullanılmakta olduğu bilinmektedir (Çelik, 2003). Padé yaklaşımı; sürekli kesirler teorisi ile ilişkilidir. Herhangi bir fonksiyonun istenilen şekilde bir rasyonel fonksiyon haline getirilmesine fonksiyonun Padé yaklaşımı denmektedir. Padé yaklaşımı; yakınsak olmayan Taylor serilerindeki kısmi toplamlar serisine göre daha iyi sonuç vermekte ve yakınsaklık aralığını genişleterek daha geniş aralıklarda çözümlerin daha az hatayla elde edilmesini sağlamaktadır (Pozzi, 1994). Genel olarak; bilgisayar hesaplamalarında kullanılan yaklaşım hakkında fikir edinilmesi açısından bu bölümde genel olarak bir değişkenli Padé yaklaşımına değinilecektir.

2.1.1 Bir Değişkenli Fonksiyonlar İçin Padé Yaklaşımları

f fonksiyonu;

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \qquad (c_0 \neq 0) \tag{2.1.1}$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı

$$\left[L/M\right]=\frac{a_0+a_1 z+\ldots+a_L z^L}{b_0+b_1 z+\ldots+b_M z^M} \tag{2.1.2}$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranıdır). Payın derecesi *L,* paydanın derecesi *M* dir. (2.1.2) de *L*+1 tane payın katsayısı ve *M*+1 tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (2.1.2)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0=1$ alınmalıdır. Bu seçimle (2.1.2)'nin payının *L*+1 tane bağımsız katsayısı ve paydasının *M* tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $L+M+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $\left[L/M\right]$, (2.1.1)'deki kuvvet serisinin ilk $L+M+1$ terimine karşılık gelir (Baker ve Grave-Morris, 1996).

(2.1.1)'deki *L*+*M* dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımı

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i=\frac{a_0+a_1 z+\ldots+a_L z^L}{b_0+b_1 z+\ldots+b_M z^M}+O(z^{L+M+1}) \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.3) eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapılırsa;

$$(b_0+b_1 z+\ldots+b_M z^M)(c_0+c_1 z+\ldots)=(a_0+a_1 z+\ldots+a_L z^L)+O(z^{L+M+1}) \tag{2.1.4}$$

elde edilir. (2.1.4) eşitliğindeki $z^{L+1}, z^{L+2}, \ldots, z^{L+M}$ lerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} &b_M c_{L-M+1}+b_{M-1}c_{L-M+2}+\ldots+b_0 c_{L+1}=0\\ &b_M c_{L-M+2}+b_{M-1}c_{L-M+3}+\ldots+b_0 c_{L+2}=0\\ &\vdots\\ &b_M c_L+b_M c_{L+1}+\ldots+b_0 c_{M+L}=0 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

sistemi elde edilir. $b_0=1$ olduğu için, (2.1.5) denklemi *n* tane lineer denklemden oluşur. Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

olur. Buradan bilinen lineer denklem sistemi çözümü yöntemlerden biri ile b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (2.1.3) denkleminden payın katsayıları olan $a_0, a_1, ..., a_L$ katsayıları $1, z, z^2, ..., z^L$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ &\vdots \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

olur. Böylece (2.1.6) ve (2.1.7) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir. Padé yaklaşımının hesaplanmasında görülecektir ki, Padé denklemleri katsayılar hesaplanmadan (2.1.8) de ki

$$p(z) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{L} c_i z^i & z\sum_{i=0}^{L-1} c_i z^i & \cdots & z^n \sum_{i=0}^{L-M} c_i z^i \\ c_{L+1} & c_L & \cdots & c_{L+1-M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{L+M} & c_{L+M-1} & \cdots & c_M \end{vmatrix}, \quad q(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^M \\ c_{L+1} & c_L & \cdots & c_{L+1-M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{L+M} & c_{L+M-1} & \cdots & c_L \end{vmatrix} \tag{2.1.8}$$

denklemleriyle de elde edilebilir. Bu denklemler yardımıyla x^{L+M} yinci dereceden $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ kuvvet serisine karşılık gelen $\left[L/M \right]$ Padé yaklaşımı oluşturulur. Yani verilen $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürerek, bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur. Yani bir $f(x)$ fonksiyonu için Padé

yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomlar olan $p(z)=\sum_{i=0}^{L} a_i z^i$ ve $q(z)=\sum_{i=0}^{L} b_i z^i$ polinomlarını bulmayı içerir. Kısaca,

$$\left[L/M \right]_f (z) = \frac{p(z)=\sum_{i=0}^{L} a_i z^i}{q(z)=\sum_{i=0}^{L} b_i z^i}$$

olur.

Teorem 4.1.1: Eğer bir *f* fonksiyonu için (*L,M*) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{L,M}(z)=\frac{p_0(z)}{q_0(z)} \quad \text{ve} \quad D_{L,M}=\begin{pmatrix} c_L & \cdots & c_{L+1-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{L+M-1} & \cdots & c_L \end{pmatrix}$$

olarak ifade ediliyor ve $D=\det D_{m,n} \neq 0$ ise;

$$p_0(z)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F_L(x) & zF_{L-1}(z) & \ldots & z^n F_{L-M}(z) \\ c_{L+1} & & & \\ . & & & \\ . & & D_{L,M} & \\ . & & & \\ c_{L+M} & & & \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad q_0(z)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & z & \ldots & z^M \\ c_{L+1} & & & \\ . & & & \\ . & & D_{L,M} & \\ . & & & \\ c_{L+M} & & & \end{vmatrix}$$

olur. Determinant algoritmasında birçok işlemi bir arada bulunduğundan *L* ve *M'* nin küçük değerlerini hesaplamada daha kullanılışlıdır. Bu algoritma yalnızca kapalı formdaki formüllerin açılmasına ve bulunmasında yardımcı olmaktadırlar.

Genel anlamda bir $f(z)$ şeklinde değişik formlarda ifade edilmektedir.

fonksiyonunun Padé yaklaşımı

$$\left[L/M \right] = \left[L/M \right]_f = \left[L/M \right](z) = \left[L/M \right]_f (z) = r_{L,M}$$

Yaklaşımlara ait tablo sistematik olarak Henri Eugène Padé tarafından verildiği için O'nun anısına hem yaklaşıma, hem de tabloya Padé'nin ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir.

M \ L	0	1	2	…
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	…
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	…
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

Tablo2. 1: Padé [L/M] yaklaşım tablosu.

Yukarıda ki Tablo 4.1 formatına uygun e^x'in Padé yaklaşımlarına ait Padé tabloları aşağıdaki gibidir.

M \ L	0	1	2	…
0	1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	…
1	$1+x$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	…
2	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	…
3	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	⋮	…
4	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$	⋮	⋮	…

Tablo2. 2: e^x in Padé yaklaşımı tablosu**.**

2.2. Laplace Dönüşümü

Matematikte; integral dönüşümlerde sıkça kullanılan Laplace dönüşümü; fizikte, mühendislikte ve olasılık teorisinde geniş uygulama alanına sahiptir.

Laplace dönüşümü Fourier dönüşümü ile ilişkili olup farkı; Fourier dönüşümleri fonksiyon ya da sinyalleri titreşim modlarına ayırırken, Laplace dönüşümü fonksiyonu momentlerine ayırmaktadır. Fourier dönüşümlerinde olduğu gibi Laplace dönüşümü de diferensiyel ve integral denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Laplace dönüşümünün en önemli özelliği fonksiyonu cebirsel hale getirmesi ve elde edilen fonksiyonun davranışı hakkında bilgi edinilmesini sağlamasıdır (Davies, 2002).

Tanım 2.2.1. *x'* in pozitif değerleri için tanımlanmış bir $f(x)$ fonksiyonu olsun. Buna göre;

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx \qquad (2.2.1)$$

integrali yakınsak ise $F(p)$ veya $T\{f(x)\}$ şeklinde gösterilen

$$F(p) = L\{f(x)\} = T\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \qquad (2.2.2)$$

fonksiyona *f(x)'*in Laplace dönüşümü denir (Manzhirov, 1998).

2.2.1 Ters Laplace Dönüşümü

Verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün *s* parametresine bağlı bir *F(s)* fonksiyonu tanımladığı ve (2.2.2) şeklinde verildiği binmektedir. Buna göre; $F(s)$ dönüşüm fonksiyonu şeklinde verilen bir fonksiyonun orijinal $f(x)$ fonksiyonunun bulunması işlemine ters Laplace dönüşümü adı verilir ve sembolik olarak $f(x) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathrm{T}^{-1}(F(s))$ ile gösterilir. Buradaki L^{-1} sembolüne Ters Laplace Dönüşüm Operatörü adı verilir (Manzhirov, 1998).

3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (DT) VE ÖZELLİKLERİ

İlk olarak 1986 yılında Zhou tarafından tanımlanan ve lineer, lineer olmayan adi diferensiyel denklemler ile kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bu metot; integro diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede de başarılı sonuçlar vermektedir (Chen ve Ho, 1996; Chen ve Ho 1999; Arikoğlu 2005). Bu yöntemde; diferensiyel denklemler; yöntem tanımı ve kurallarına göre cebirsel denklemlere dönüştürmekte, elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla çözülebilmektedir. Elde edilen cebirsel denklemin çözümü ise diferensiyel denklemin yaklaşık çözümünü vermektedir.

Diferensiyel dönüşüm metodunun en önemli özelliği diğer nümerik çözüm yöntemleriyle karşılaştırıldığında daha basit ve kolay bir prosedüre sahip olmasıdır. Bu özelliği yöntemin bilgisayar ortamında daha kolay kodlanabilmesine ve problemin DT çözümünün daha hızlı bulunabilmesine imkan tanımaktadır. Yöntemin hem lineer, hem de lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesinde etkili bir yöntem olması ise en önemli özelliklerinden biridir.

Bu bölümde, *Diferensiyel Dönüşüm* metodunun *(Differential Transform, DT)* tanımı Zhou (1986) ve metodun bilinen bazı özellikleri ispatsız olarak verilecektir **(**Chen ve Ho, 1996; Chen ve Ho,1999). Daha kolay anlaşılabilmesi bakımından önce bir boyutlu ardından da iki boyutlu DT' nin tanımı ve özellikleri ispatsız olarak sunulacaktır. Bu bölümün son kısmını oluşturan kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin DT ile çözülebilmesine imkân tanıyan ve tarafımızdan geliştirilen bazı yeni teoremler ise ispatları ile beraber verilmiştir.

3.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

Reel eksen üzerinde herhangi bir sonlu $I=(a,b)\subset R$ aralığını ve bu aralıkta tanımlanan herhangi bir $u:I\to R$ analitik fonksiyonunu ele alınsın (Douglass, 1996).

Tanım 2.11' deki analitik fonksiyon tanımından herhangi bir keyfi $x_0\in I$ noktası için $u(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası civarında kuvvet serisi gösterimi;

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(x-x_0)^k \tag{3.1.1}$$

biçiminde verilir. Bu serinin x_0 noktası civarında düzgün yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Analitik fonksiyon sonsuz diferensiyellenebilir fonksiyon olmasından ve Taylor serisinin diferensiyellenebilme teoreminden de C_k katsayıları,

$$C_k = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}$$

biçiminde yazılabilirler. Bu C_k değerleri (3.1.1) analitik fonksiyon tanımında kullanırsa,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{3.1.2}$$

olur. Elde edilen (3.1.2) eşitliğinde,

$$U(x_0, k) = u^{(k)}(x_0) = \left[u^{(k)}(x)\right]\Big|_{x=x_0}, \forall k \in K \tag{3.1.3}$$

biçiminde seçilir ve (3.1.2) serisi, bu yeni eşitliğe göre tekrar yazılırsa;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(x_0, k)\frac{(x - x_0)^k}{k!} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Buradaki *k,* negatif olmayan tam sayıların *K* kümesinin elmanıdır. Bu şekildeki gösterimden ve analitik fonksiyonların yalnız bir şekilde seri formunda yazılabileceği gerçeğinden, herhangi bir $u(x)$ analitik fonksiyonu için x_0 noktası civarında

$$u(x) \leftrightarrow \{U(x_0, k)\}_{k=0}^{\infty}$$

biçimde bir 1-1 eşleme kurulabilir.

Genelde; $M(k)$ sayısal ve ($q(x) \neq 0$ olacak şekilde) $q(x)$, I 'da tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$U(x_0, k) = M(k)\left[q(x)u(x)\right]^k\Big|_{x=x_0} \quad , \quad k = 0,1,2,...$$

biçiminde kabul edilirse analitik fonksiyon,

$$u(x) = \frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U(x_0, k)}{M(k)}\frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

olur. Bu son eşitlikte $q(x) = 1$ ve $M(k) = \frac{1}{k!}$ alındığında ise,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(x_0,k)(x-x_0)^k \tag{3.1.5}$$

olur (Özkan, 2010).

Bütün bu söylenenler ışığında aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.1. $u(x)$ fonksiyonu I ' da analitik fonksiyon olmak üzere $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ kümesine, $u(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ *noktasındaki spektrumu* denir.

Not: Burada kullanılan spektrum kelimesi fonksiyonel analizde kullanılan manada olmayıp, bu kelime ile; herhangi bir $u(x)$ analitik fonksiyona; bu fonksiyonun seri açılımında (3.1.3) deki gibi tanımlanan değerlere karşılık gelen $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ katsayılarına $u(x)$ fonksiyonunun *spektrumu* denir. $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ ailesinin her bir elemanına da *spektra* denir. Bir değişkenli fonksiyonlar için verilen bu tanım; bu tez çalışmasında ele alınan tüm çok değişkenli fonksiyonlar için de geçerli olacaktır.

Tanım 3.1.2 I ' da analitik olan herhangi bir $u(x)$ fonksiyonunun; $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ spektrum ayrışımına *Diferensiyel Dönüşüm (DT)* denir. $u(x)$ fonksiyonu orijinal fonksiyon, $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ ise dönüşmüş fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3. $\{U(x_0,k)\}_{k=0}^{\infty}$ ' nın ters Diferensiyel Dönüşümü;

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(x_0,k)(x-x_0)^k$$

biçiminde tanımlanır.

Diferensiyel Dönüşüm tanımından görülür ki, herhangi bir $u(x)$ analitik fonksiyonu sonlu Taylor serisi ve kalan terimleri ile yazılımı,

$$u(x)=\frac{1}{q(x)}\sum_{k=0}^{N}\frac{U(x_0,k)}{M(k)}\frac{(x-x_0)^k}{k!}+R_N(x)$$

dır. Burada

$$R_N(x)=\frac{1}{q(x)}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{U(x_0,k)}{M(k)}\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

olarak tanımlanmıştır. Bütün bu tanımların ışığında DT konseptinin Taylor seri açılımından türetildiği söylenebilir.

Bu tez çalışmasında aksi söylenmedikçe; orijinal fonksiyonlar küçük harflerle, bunların spektrumları olan fonksiyonlar ise büyük harflerle gösterileceklerdir.

3.2 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodunun Özellikleri

Teorem 3.2.1. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları bir boyutlu uzayda tanımlanmış olsun. Bu taktirde $y(x) = u(x) \mp v(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$Y(x_0, k) = U(x_0, k) \mp V(x_0, k)$$

(Chen ve Ho, 1996) dır.

Teorem 3.2.2. $u(x)$ fonksiyonunu bir boyutlu uzayda tanımlanmış olsun. Bu taktirde $y(x) = \alpha\, u(x)$ nin diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \alpha\, U(x_0, k)\ ; \qquad \alpha = sabit$$

(Chen ve Ho, 1996) dır.

Teorem 3.2.3. $u(x)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n = 1$ olsun. $y(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$ biçiminde verilen $y(x)$' in diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = (k+1)U(x_0, k+1)$$

(Chen ve Ho, 1996) dır.

Teorem 3.2.4. Eğer $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n = 1$ olarak alınacak olursa, $y(x) = u(x)v(x)$ biçiminde verilen fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = U(x_0, k) \otimes V(x_0, k) = \sum_{\ell=0}^{k} U(x_0, \ell) V(x_0, k-\ell)$$

dır (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 3.2.5. $u(x)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n = 1$ olsun. $y(x) = u^m(x)$ nin diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0, k) = \sum_{\ell=0}^{k} U^{m-1}(x_0, \ell) U(x_0, k-\ell)$$

dır. Burada *m*, herhangi bir pozitif tam sayı olarak verilmiştir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 3.2.6. $y(x) = 1$ fonksiyonunu $n = 1$ boyutlu uzayda tanımlanmış olsun. Bu taktirde,

$$Y(x_0,k)=\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

dir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 3.2.7. Fonksiyonun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=1$ ve fonksiyon $y(x)=x^m$ biçiminde verilmiş olsun. $y(x)$' in diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0,k)=\delta(k-m) \quad , \quad \delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

dir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 3.2.8. $u(x)$ fonksiyonun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=1$ olsun. Bu taktirde $y(x)=\dfrac{d^m u(x)}{dx^m}$, $m\in N$ biçiminde tanımlanmış bir değişkenli fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0,k)=\prod_{j=1}^{m}(k+j)U(x_0,k+m)$$

dir (Jang ve Chen, 1997). Örneğin: *n*=1 ve *m*=2 için; $y(x)=\dfrac{d^2u(x)}{dx^2}$ ise

$$Y(x_0,k)=(k+1)(k+2)U(x_0,k+2)$$

dir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 3.2.9. $y(x)$ fonksiyonun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=1$ olsun. Bu taktirde $y(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)dt$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\frac{U(k-1)}{k}$$

dır (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 3.2.10. $u(x)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=1$ ve fonksiyon

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_{n-1}}\cdots\int_{x_0}^{x_2}\int_{x_0}^{x_1}u(t)dtdx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\frac{(k-n)!}{k!}U(k-n),\quad k\geq n$$

dir (Arıkoğlu ve Özkol 2005).

Teorem 3.2.11. $u(x),v(x)$ fonksiyonlarının tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=1$ olsun. Bu taktirde $y(x)=v(x)\int_{x_0}^{x}u(t)dt$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{\ell=1}^{k}\frac{V(k-\ell)U(\ell-1)}{\ell},\quad k\geq 1$$

dır (Arıkoğlu ve Özkol, 2005).

Teorem 3.2.12. $D=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)\subset R^n$, $(n\geq 1)$ n-boyutlu dikdörtgen ve $u(x)$ fonksiyonu da D de analitik bir fonksiyon olsun. D bölgesinde tanımlanan herhangi bir $u(x)$ analitik fonksiyonu için

$$y(x)=\int_{x_1^0}^{x_1}u(t_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)dt_1$$

olsun. Bu taktirde $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0,k)=\frac{U\left(x_0,(k_1-1,k_2,\cdots,k_n)\right)}{k_1},\quad k_1\geq 1$$

dir (Arıkoğlu ve Özkol, 2005).

Sonuç 3.2.1. $D=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)\subset R^n$, $(n\geq 1)$ n-boyutlu dikdörtgen ve $u(x)$ fonksiyonu da D de analitik bir fonksiyon olsun. D bölgesinde tanımlanan herhangi bir $u(x)$ analitik fonksiyonu için

$$y(x)=\int_{x_i^0}^{x_i}u(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)dt_i\quad,\quad i=\overline{1,n}$$

olsun. Bu taktirde $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0,k)=\frac{U\left(x_0,(k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\cdots,k_n)\right)}{k_i},\ i=\overline{1,n},\ k_i\geq 1$$

dir.

Sonuç 3.2.2.

$$y(x)=\int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_2^0}^{x_2}\cdots\int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}}\int_{x_n^0}^{x_n}u(t_1,t_2,t_3,\cdots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}dt_n$$

fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(x_0,k)=\frac{U(x_0,(k_1-1,k_2-1,\cdots,k_{n-1}-1,k_n-1)}{\prod_{i=1}^{n}k_i},\quad k_i\geq 1\ ,\ i=\overline{1,n}$$

dir.

3.3 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodu

Tanım 3.3.1. İki bileşenli $w(x,y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k,h)$ olmak üzere, $w(x,y)$ ' nin iki boyutlu diferensiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=o}} \tag{3.3.1}$$

olarak tanımlanır (Chen ve ark., 1999; Ayaz, 2004).

Tanım 3.3.2. $W(k,h)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferensiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \tag{3.3.2}$$

biçiminde tanımlanır. (3.3.1) ve (3.3.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.3.3) eşitliği elde edilir (Chen ve ark., 1999; Ayaz, 2004).

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=o}}x^k y^h \tag{3.3.3}$$

(3.3.1) ve (3.3.3) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferensiyel dönüşüm için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

3.4. İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm (DT) Metodunun Özellikleri

Bu bölümde iki boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Metodunun özellikleri ispatsız olarak verilecektir.Ancak; tezin orijinal kısımlarından birini oluşturan kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin DT metodu ile çözümünde kullanılacak olan ve bizim tarafımızdan tanımlanmış olan Teorem 3.4.10 ve sonraki yeni teoremler ispatları ile beraber verilecektir**.**

Teorem 3.4.1. $u(x,y)$, $v(x,y)$ fonksiyonlarının tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. Bu durumda $w(x,y)=u(x,y)\mp v(x,y)$' nin diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h))=U((x_0,y_0),(k,h))\mp V((x_0,y_0),(k,h))$$

(Chen ve Ho, 1999) dır.

Teorem 3.4.2. $u(x,y)$ fonksiyonu iki boyutlu bir uzayda tanımlanmış ise $w(x,y)=\alpha\ u(x,y)$ nin diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h))=\alpha\ U((x_0,y_0),(k,h))\ ;\qquad \alpha=sabit$$

(Chen, Ho 1999) dır.

Teorem 3.4.3. $u(x,y)$ fonksiyonu iki boyutlu uzayda tanımlanmış olsun. $w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ biçiminde verilen iki değişkenli fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h))=(k+1)U((x_0,y_0),(k+1,h))$$

(Chen ve Ho, 1999) dır.

Teorem 3.4.4. $u(x,y)$ fonksiyonu iki boyutlu uzayda tanımlanmış olsun. $w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ biçiminde verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h))=(h+1)U((x_0,y_0),(k,h+1))$$

(Chen ve Ho, 1999) dır.

Sonuç 3.4.1 $u=u(x,y)$ biçiminde yani; fonksiyonun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. Bu taktirde $w(x,y)=\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial x^m}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h))=\prod_{j=1}^{m}(k+j)U((x_0,y_0),(k+m,h))$$

dır.

Sonuç 3.4.2 $u(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ ve $w(x,y)=\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial y^m}$ biçiminde verilmiş ise,

$$W((x_0,y_0),(k,h)) = \prod_{j=1}^{m}(h+j)U((x_0,y_0),(k,h+m))$$

dır.

Teorem 3.4.5. $u(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h)) = (k+1)(h+1)U((x_0,y_0),(k+1,h+1))$$

dır (Chen ve Ho, 1999).

Teorem 3.4.6. $u(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\dfrac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$ $r,s=0,1,2,\cdots$ biçiminde tanımlanan $w(x,y)$' nin diferensiyel dönüşümü,

$$W((x_0,y_0),(k,h)) = \prod_{j=1}^{r}(k+j)\prod_{\ell=1}^{s}(h+\ell)U((x_0,y_0),(k+r,h+s))$$

(Chen ve Ho, 1999) dır.

Teorem 3.4.7. $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarının tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$ biçiminde verilen fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$W(x_0,y_0,k) = U(x_0,y_0,(k,h))\otimes V(x_0,y_0,(k,h))$$

dır. Buradaki $\otimes$ işlemi Teorem 3.2.4' deki anlamda verilmiştir (Chen ve Ho, 1999).

Teorem 3.4.8. $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarının tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$W(x_0,y_0,k) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

dir (Ayaz, 2003).

Teorem 3.4.9. $u(x,y)$ fonksiyonun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ ve aynı zamanda $u(x,y)=x^m y^n$ biçiminde verilmiş olsun. Bu taktirde,

$$U((x_0,y_0),(k,h)) = \delta(k-m,h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$$

dir. Burada $\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m\end{cases}$, $\delta(h-n)=\begin{cases}1, & h=n,\\ 0, & h\neq n\end{cases}$ olarak tanımlanmışlardır (Chen ve Ho, 1999).

Teorem 3.4.10. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\int_{x_0}^{x} u(s,y)ds$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$W(k,h)=\frac{U(k-1,h)}{k}, \qquad k\geq 1.$$

dir.

İspat: İki değişkenli fonksiyonlar için DT tanımından;

$$\begin{aligned} w(x,y)=\int_{x_0}^{x} u(s,y)ds &= \int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)(s-x_0)^k(y-y_0)^h ds\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}U(k,h)(s-x_0)^k(y-y_0)^h ds\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{U(k,h)}{k+1}(x-x_0)^{k+1}(y-y_0)^h. \end{aligned}$$

yazılabilir. Birinci toplamdaki k indisi $k=1$ olacak şekilde toplam yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{U(k-1,h)}{k}(x-x_0)^k(y-y_0)^h.$$

olur. Elde edilen bu son eşitlikte DT tanımı hatırlanırsa;

$$W(k,h)=\frac{U(k-1,h)}{k}, \qquad k\geq 1.$$

bulunur.

Teorem 3.4.11. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\int_{y_0}^{y} u(x,t)dt$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$W(k,h)=\frac{U(k,h-1)}{h}, \qquad h\geq 1.$$

biçimindedir.

İspat: İki değişkenli fonksiyonlar için DT tanımından;

$$w(x,y)=\int_{y_0}^{y}u(x,t)dt=\int_{y_0}^{y}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)(x-x_0)^k(t-y_0)^h\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\int_{y_0}^{y}U(k,h)(x-x_0)^k(t-y_0)^h dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{U(k,h)}{h+1}(x-x_0)^k(y-y_0)^{h+1}.$$

yazılabilir. İkinci toplamdaki h indisi $h=1$ olacak şekilde toplam yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{U(k,h-1)}{h}(x-x_0)^k(y-y_0)^h.$$

olur. DT tanımı kullanıldığında;

$$W(k,h)=\frac{U(k,h-1)}{h},\qquad h\geq 1.$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.4.12. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}u(s,t)dtds$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$W(k,h)=\frac{1}{kh}U(k-1,h-1),\qquad k,h\geq 1.$$

biçimindedir.

İspat : DT metodunun tanımı kullanılırsa;

$$w(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}u(s,t)dtds=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)(s-x_0)^k(t-y_0)^h\,dtds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}U(k,h)(s-x_0)^k(t-y_0)^h\,dtds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\frac{U(k,h)}{h+1}(s-x_0)^k(t-y_0)^{h+1}\Big|_{y_0}^{y}ds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{U(k,h)}{(h+1)(k+1)}(s-x_0)^{k+1}\Big|_{x_0}^{x}(y-y_0)^{h+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{U(k,h)}{(h+1)(k+1)}(x-x_0)^{k+1}(y-y_0)^{h+1}.$$

elde edilir. Yukarıdaki her iki toplamdaki h *ve* k indisi $k=1$ ve $h=1$ olacak şekilde toplamlar yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{U(k-1,h-1)}{hk}(x-x_0)^k(y-y_0)^h.$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu son eşitlik için DT tanımı kullanılırsa;

$$W(k,h)=\frac{1}{kh}U(k-1,h-1) \qquad k,h\geq 1.$$

bulunur.

Teorem 3.4.13. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. Bu durumda $w(x,y)=\int_{x_0}^{x}u(s,y)v(s,y)ds$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$W(k,h)=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m-1,n), \qquad k\geq 1.$$

dir.

İspat: DT tanımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=\int_{x_0}^{x}u(s,y)v(s,y)ds\\
&=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](s-x_0)^k(y-y_0)^h ds\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\int_{x_0}^{x}(s-x_0)^k(y-y_0)^h ds\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\frac{(s-x_0)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{x_0}^{x}(y-y_0)^h\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](x-x_0)^{k+1}(y-y_0)^h
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki birinci toplamdaki k indisi $k=1$ olacak şekilde toplamlar yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m-1,n)\right](x-x_0)^k(y-y_0)^h$$

elde edilir. Son eşitlikte DT tanımı kullanılırsa;

$$W(k,h)=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m-1,n),\qquad k\geq 1$$

bulunur.

Teorem 3.4.14. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\int_{y_0}^{y}u(x,t)v(x,t)dt$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$W(k,h)=\frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m,n)\,,\qquad h\geq 1.$$

şeklindedir.

İspat: DT tanımından;

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=\int_{y_0}^{y}u(x,t)v(x,t)dt\\
&=\int_{y_0}^{y}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](x-x_0)^k(t-y_0)^h\,dt\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\int_{y_0}^{y}(x-x_0)^k(t-y_0)^h\,dt\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\frac{(t-y_0)^{h+1}}{h+1}\Bigg|_{y_0}^{y}(x-x_0)^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{1}{h+1}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](x-x_0)^k(y-y_0)^{h+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ikinci toplamdaki h indisi $h=1$ olacak şekilde toplamlar yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m,n)\right](x-x_0)^k(y-y_0)^h$$

elde edilir. Bu son eşitlikte DT tanımı kullanılırsa;

$$W(k,h)=\frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m,n),\qquad h\geq 1$$

elde edilir.

Teorem 3.4.15. $w(x,y)$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu uzayın boyutu $n=2$ olsun. $w(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}u(s,t)v(s,t)dtds$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü;

$$W(k,h)=\frac{1}{kh}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m-1,n),\qquad k\geq 1,\ h\geq 1.$$

biçimindedir.

İspat: DT tanımından;

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}u(s,t)v(s,t)dtds\\
&=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](s-x_0)^k(t-y_0)^h\,dtds\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(s-x_0)^k(t-y_0)^h\,dtds\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right]\int_{x_0}^{x}(s-x_0)^k\frac{(t-y_0)^{h+1}}{h+1}\Bigg|_{y_0}^{y}ds\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+1)(h+1)}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h}U(m,h-n)V(k-m,n)\right](x-x_0)^{k+1}(y-y_0)^{h+1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Son eşitlikteki toplamlardaki h *ve* k indeksleri $h=1$ *ve* $k=1$ olacak biçimde her iki toplam yeniden düzenlenirse;

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{kh}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m-1,n)\right](x-x_0)^k(y-y_0)^h$$

elde edilir. Bu son eşitlikte de DT tanımı kullanılırsa;

$$W(k,h)=\frac{1}{kh}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{h-1}U(m,h-n-1)V(k-m-1,n),\qquad k,h\geq 1$$

elde edilir.

4. MODİFİYE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Bu bölümde; bir önceki bölümde bahsedilen, adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde etkin bir yöntem olan DT metodu, Padé yaklaşım metodu ve Laplace Dönüşüm metodunun her üçünün birlikte uygulanması sürecini içeren ve diferensiyel denklemlerin yakınsaklık aralığın genişletilmesine imkan tanıyan yeni bir yöntem ile bu yöntemin adi türevli integro diferensiyel denklemlere ve kısmi türevli integro diferensiyel denklemlere uygulanması sırasındaki izlenecek olan prosedür bir algoritma biçiminde sunulacaktır.

4.1.Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (Mdt) Metodu

Bilindiği gibi diferensiyel denklemlerin DT ile elde edilen nümerik çözümleri; fonksiyonların Taylor seri açılımında karşılaştığımız kesme hatalarına benzer hatalar içermektedirler. Elde edilen çözümlerin yakınsaklık aralığının sınırlı olması ise yöntemin en çok eleştirilen kısmıdır. Başka bir değişle bulunan nümerik çözümler; Euler Metodunda olduğu gibi çözümün arandığı noktanın civarından uzaklaşıldığında gittikçe artan hatalar vermektedir. Modifiye Diferensiyel Dönüşüm metodu ise yukarıdaki eksiklikleri ortadan kaldırmaktadır. Diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunmasında kullanılan benzer birçok yöntem; yukarıda bahsettiğimiz eksiklikleri barındırmaktadır. Örneğin; Homotopi Pertürbasyon metodu diye adlandırılan metot da benzer sorunları barındırmaktadır (Sweilam ve Khader, 2009). Sweilam ve Khader (2009) tarafından yapılan çalışmada kısmi türevli diferensiyel denklemler; Homotopi Pertürbasyon metodu yardımı ile çözülmektedir. Elde edilen çözüm fonksiyonlarına önce Laplace dönüşüm uygulanmakta, Laplace dönüşümü uygulanmış olan fonksiyonların Padé yaklaşımı bulunmakta, elde edilen yaklaşıma ise tekrar ters Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Böylelikle Homotopi Pertürbasyon metodu ile elde edilen çözümün yakınsaklık aralığı genişletilmiş olmaktadır hatta bazı problemlerde direkt analitik çözüme ulaşılmaktadır. Sweliam, Khader (2009) bu şekilde buldukları çözüm fonksiyonuna da Modifiye Homotopi Pertürbasyon çözümü demektedirler.

Bu tez çalışmasının bundan sonraki bölümlerinde ***Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) Metodu*** denildiğinde; verilen bir diferensiyel denklemin (adi veya kısmi türevli) DT metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonuna önce Laplace dönüşümü uygulanması, ardından elde edilen fonksiyona Padé yaklaşımının uygulanması son

olarak da Padé yaklaşımı sonrası elde edilen fonksiyona ters Laplace dönüşümü uygulanması ile ulaşılan çözüm fonksiyonun elde ediliş prosedürünü içeren yöntem anlaşılacaktır. Bu üçlü algoritma ile elde edilen çözümler ile klasik DT ile elde edilen çözümler karşılaştırıldığında ise; yeni metotla bulunan çözümlerin bazen problemlerin analitik çözümleri ile aynı, bazen ise analitik çözüme klasik DT den daha iyi yaklaştıkları gösterilecektir.

4.2.Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) Metodunun İntegro Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı

Bu bölümde; İntegro Diferensiyel denklemler için MDT çözümünün nasıl bulunacağına ilişkin bir algoritma sunulacaktır. Aşağıdaki 1. Adım; $m-$ninci mertebeden integro-diferensiyel denklemler için verilen sınır değer problemleri için verilen klasik DT metodunun uygulanması sürecini anlatmaktadır. Bu adımda ele alınacak olan problem bir başlangıç değer problemi olması durumunda ise; daha sonra verilecek olan örneklerde de görüldüğü gibi aşağıdaki (4.2.8) den sonraki işlemlere gerek kalmayacaktır. Verilen problemin aşağıdaki dört adım izlenilerek elde edilen yeni çözümüne ise problemin MDT çözümü adı verilecektir.

Adım 1.

$$\frac{d^{(m)}y(x)}{dx^{(m)}} = f(x) + \int_0^x K(x,t)H(y(t))dt, \quad 0 < x < a \tag{4.2.1}$$

$$y^{(j)}(0) = \alpha_j, \quad j = 0,1,2,\cdots,r-1 \tag{4.2.2}$$

$$y^{(j)}(a) = \beta_j, \quad j = r,(r+1),\cdots,m-1. \tag{4.2.3}$$

biçiminde tanımlanan (4.2.1)-(4.2.3) $m-$ninci mertebeden integro-diferensiyel sınır değer problemini ele alalım (Wazwaz, 2001). Burada; $y^{(m)}(x)$ ile $y(x)$ nin m-ninci mertebeden türevi, $H(y(x))$ ise; yine $y(x)$ nin bir lineer olmayan fonksiyonudur. $K(x,t)$ çekirdek ve $f(x)$ de herhangi bir fonksiyon olarak tanımlanmışlardır.

$\alpha_j, 0 \le j \le (r-1)$ ve $\beta_j, r \le j \le m-1$ ler ise reel sonlu sabitler olarak kabul edilmişlerdir. (4.2.1)' e DT uygulandığında;

$$Y(k+m) = \frac{k!}{(k+m)!}\left[F(k) + \frac{1}{k}G(k-1)\right] \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.2) başlangıç koşulunun DT sonrasındaki almış olduğu değerler ise,

$$Y(j)=\frac{\alpha_j}{j!},\ j=0,1,...,r-1 \tag{4.2.5}$$

olur. (4.2.4)'teki $F(\cdot)\ ,G(\cdot)$ fonksiyonları ile sırasıyla $f(x)\ ve\ \left[K(x,t)H(y(x))\right]$ in DT metoduyla elde edilmiş olan dönüşüm fonksiyonlarıdır. (4.2.4) rekürans bağıntısının çalışabilmesi için;

$$Y(j)=\frac{\alpha_j}{j!}\quad ,\ j=r,...,m-1 \tag{4.2.6}$$

katsayılarının bilinmesi gerekmektedir.(4.2.6) da bahsedilen α_j , j=*1...m*-1 katsayıları aşağıdaki eşitliği sağlayan katsayılardır.

$$\alpha_r=y^{(r)}(0),\ \alpha_{r+1}=y^{(r+1)}(0),\cdots,\alpha_{m-1}=y^{(m-1)}(0)\,. \tag{4.2.7}$$

(4.2.5) ve (4.2.6) kabulündeki değerler, (4.2.4) te kullanılırsa; $k=\overline{0,n-m}$ için $Y(j),\ j=\overline{m,n}$ spektrumları elde edilir. Bulunan spektrumlar ve DT tanımından aranan çözüm fonksiyonu

$$y\ (x)=Y(0)+Y(1)x+Y(2)x^2+....+Y(n)x^n \tag{4.2.8}$$

biçiminde bulunur. Yukarıdaki kabulümüzden dolayı (4.2.8) çözüm fonksiyonu bilinmeyen $\alpha_j,\ j=r,r+1,...,m-1$'lere bağlı olacaktır. Bu katsayılar (4.2.3)'te verilen $x=a$'daki sınır koşulları yardımıyla elde edilecek olan lineer denklem sisteminde kolaylıkla bulunabilir. Bulunan bu katsayılar; (4.2.8) deki yerlerine yazıldığında verilen *n* değerine bağlı olarak (4.2.1)-(4.2.3) integro diferensiyel denklemin DT çözümüne ulaşılır (Arikoğlu ve Özkol, 2005),

Adım 2. Adım 1' de DT ile bulunan çözüm fonksiyonuna Laplace dönüşümün uygulanır.

Adım 3. Adım2' elde edilen Laplace dönüşümü uygulanmış fonksiyona Padé yaklaşımı uygulanır.

Adım 4. Adım3' de Padé yaklaşımı uygulanmış olan fonksiyona Ters Laplace dönüşümü uygulanır.

Adım 4'ten elde edilen fonksiyona (4.2.1)-(4.2.3) probleminin MDT çözümü denir. Yukarıda da görüldüğü gibi 1.Adımda elde edilen çözüm problemin DT çözümüdür. MDT çözümü için 1.Adımda elde edilen fonksiyona 2., 3. ve 4.

Adımlardaki işlemlerin uygulanması gerekmektedir. Bu iyileştirme sonucunda; diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri genellikle kapalı formda elde edilir.

4.3.Modifiye Diferensiyel Dönüşüm (MDT) Metodunun Kısmi Türevli İntegro Diferensiyel Denklemlere Uygulanışı

Bu bölümde; kısmi türevli parabolik tip integro diferensiyel denklemler için Modifiye Diferensiyel Dönüşüm çözümünün nasıl bulunacağına ilişkin bir algoritma sunulacaktır. Aşağıdaki; 1. Adım kısmi türevli parabolik tip integro diferensiyel denklemler için verilen klasik DT metodunun uygulanması sürecini anlatmaktadır. Verilen problemin aşağıdaki dört adım izlenilerek elde edilen yeni çözümüne ise problemin MDT çözümü adı verilecektir.

Adım 1. Bu bölümde parabolik tip kısmi türevli integro diferensiyel denklemlerin klasik DT metodu ile çözüm algoritması yer alacaktır. Parabolik tip kısmi türevli integro diferensiyel denklemler için sınır değer problemleri;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds + \Delta u + f(x,t) \quad x(t_0) = x_0, t_0 \geq 0 \tag{4.3.1}$$

$$u(x,t) = u_0(x), \qquad x \in R, \tag{4.3.2}$$

$$u(0,t) = u_0(t), \qquad t \in [0,T] \tag{4.3.3}$$

biçiminde tanımlanırlar (Han ve ark., 2005). Burada $u(x,t)$ aranan fonksiyon, $f(x,t)$ bilinen fonksiyon $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $K(t,s)$ çekirdek fonksiyonudur. DT ile kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde olduğu gibi Bölüm 3.3 ve Bölüm 3.4'te verilen DT'nin tanımı ve ilgili teoremler (4.3.1) de kullanılırsa;

$$(h+1)U(k,h+1) = G(k,h) + (k+2)(k+1)U(k+2,h) + F(k,h) \tag{4.3.4}$$

eşitliği elde edilir. Buradaki $G(k,h)$ ve $F(k,h)$ fonksiyonları sırasıyla $\int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds$ ve $f(x,t)$ fonksiyonlarının DT ile elde edilen dönüşüm fonksiyonlarıdır.(4.3.2)-(4.3.3) sınır koşullarına DT uygulandığında ise ;

$$\begin{aligned} U(k,0) &= U_0(k) \\ U(0,h) &= U_0(h) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

olur. (4.3.5)'teki değerler (4.3.4)'te yerine yazıldığında elde edilecek olan spektrumlar iki değişkenli fonksiyonlar için verilen DT tanımında(Chen ve ark., 1999; Ayaz, 2004) kullanılırsa, yani; $u(x,t)$ de yerine yazılırsa aranan yaklaşık çözüm;

$$u(x,y) \approx \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h \qquad (4.3.6)$$

formunda elde edilir. (4.3.6) çözüm fonksiyonuna (4.3.1)-(4.3.3) probleminin DT çözümü adı verilir (Cansu ve Özkan, 2010).

Adım 2. DT ile bulunan Adım 1' deki çözüm fonsiyonuna Laplace dönüşümün uygulanır. *(Dönüşüm değişkeni olarak değişkenlerden herhangi biri seçilir. Diğer değişken sabit olarak düşünülür. Gerek görüldüğünde; Adım 4'te elde edilen çözüm fonksiyonu için Adım 2' den sonraki işlemler tekrarlanır. Bu kez ise dönüşüm değişkeni olarak daha önce sabit gibi düşünülen değişken alınır.)*

Adım 3. Adım 2' elde edilen Laplace dönüşümü uygulanmış fonksiyona Padé yaklaşımı uygulanır. (Seçilen dönüşüm değişkenine göre)

Adım 4. Adım3' de Padé yaklaşımı uygulanmış olan fonksiyona Ters Laplace dönüşümü uygulanır. Böylelikle problemin MDT metodu ile çözümü elde edilmiş olur. Bu iyileştirme sonucunda; diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri genellikle kapalı formda elde edilir.

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde daha önceki bölümlerde anlatılmış olan MDT metodu ile ilgili teorik bilgilerin uygulamasına yönelik örnekler verilecektir. Ele alınacak olan örnekler hem DT hemde MDT metodu ile çözülüp, elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırma bir değişkenli ve iki değişkenli integro diferensiyel denklemler için yapılacaktır.

Ele alınan aşağıdaki Örnek 5.1, Örnek 5.2 ve Örnek 5.3'te adi türevli integro diferensiyel denklemlerin MDT çözümlerine yer verilmiştir. MDT metodundaki birinci adım sonrasında elde edilen çözüm aynı zamanda problemin DT çözümünü verdiğinden; her bir örnekte aynı zamanda DT çözümü ile MDT çözümü karşılaştırılmıştır. Ele alınan örneklerde N terim sayısı ile MDT'de kullanılan Padé yaklaşımındaki [L/M] değerleri için farklı değerler alınarak, N ve [L/M]'nin MDT çözümüne olan katkısı incelenmiş, elde edilen sonuçlar grafik ve tablolar yardımıyla sunulmuştur. Diğer örnekler ise; kısmi türevli parabolik tip integro diferensiyel denklemlerin MDT çözümünü içermektedir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda grafiklerle resmedilmiştir.

Örnek 5.1.

$$y'(x) = \int_0^x e^{x+t} y(t)dt + y(x) + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \tag{5.1}$$

$$y(0) = 1 \tag{5.2}$$

şeklinde (5.1)-(5.2) başlangıç koşulu ile verilen integro diferensiyel denklemini ele alalım (Zarebnia, 2010). Bu integro diferensiyel denklemin analitik çözümünün $y(x) = e^x$ olduğu bilinmektedir.

Adım 1. DT'nin tanımı ve ilgili teoremler kullanılarak; (5.1) eşitliğine DT uygulanırsa;

$$Y(k+1) = \frac{k!}{(k+1)!}\left(\sum_{k2=1}^{k} \sum_{k1=1}^{k2} \frac{Y(k2-k1)}{k2(k1-1)!(k-k2)!} + Y(k) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k!} - \frac{3^k}{k!} \right) \right) \tag{5.3}$$

şeklinde rekürans bağıntısı elde edilir. (5.2) başlangıç koşuluna DT uygulanırsa;

$$Y(0) = 1 \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) ifadesi (5.3)'te yerine yazılır ve $k = \overline{0,5}$ için $Y(i)$, $i = \overline{1,6}$ spektrumları hesaplanırsa *N=6* için aranan çözüm fonksiyonu;

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + O(x^7) \tag{5.5}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan (5.5) çözümüne (5.1)- (5.2)' nin DT çözümü denir.

Adım2. Yukarıdaki (5.5) fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(s) = \frac{s^6 + s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}{s^7} \tag{5.6}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $t = \frac{1}{s}$ alınıp (5.6) eşitliği tekrar düzenlenirse;

$$Y(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 \tag{5.7}$$

fonksiyonuna ulaşılır.

Adım 3. (5.7) fonksiyonuna Padé$\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](t) = \frac{t}{1 - t} \tag{5.8}$$

elde edilir.(5.8)'de $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa;

$$Y(s)_{[1/1]} = \frac{1}{s\left(1 - \frac{1}{s}\right)} \tag{5.9}$$

bulunur.

Adım 4. (5.9) denklemine Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L^{-1}(Y(s)_{[1/1]}) = y(x) = e^x \tag{5.10}$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda (Zarebnia, 2010) tarafından verilen analitik çözümdür.(5.1)-(5.2) probleminin yukarıda anlatılan adımlar yardımı ile bulunan (5.10) çözümüne problemin MDT çözümü denir.

Örnek 5.2.

Wazwaz (2001) tarafından Adomian Decomposition metoduyla ve daha sonra Arikoğlu ve Özkol (2005) tarafından DT ile çözülen aşağıdaki (5.11)-(5.13) integro diferensiyel denklemini ele alalım.

$$y^{(iv)}(x) = x\left(1 + e^x\right) + 3e^x + y(x) - \int_0^x y(t)dt \,, 0 < x < 1 \tag{5.11}$$

$$y(0)=1\ ,\quad y'(0)=1 \tag{5.12}$$

$$y(1)=1+e\ ,\quad y'(1)=2e \tag{5.13}$$

(5.11)- (5.13) problemindeki (5.11) eşitliğinde $x=0$ alınırsa;

$$y^{(iv)}(0)=4 \tag{5.14}$$

biçiminde yeni bir başlangıç koşuluna ulaşılır. Verilen diferensiyel denklemin analitik çözümü; $y(x)=xe^{x}+1$ olarak bilinmektedir (Arikoğlu ve Özkol, 2005).

Adım 1. DT'nin tanımı ve ilgili teoremler kullanılarak; (5.11) denklemine DT uygulanırsa;

$$Y(k+4)=\frac{k!}{(k+4)!}\left[\delta(k-1)+\sum_{\ell=0}^{k}\delta(\ell-1)\frac{1}{(k-\ell)!}+\frac{3}{k!}+Y(k)-\frac{1}{k}Y(k-1)\right]\ ,\ k\geq 1 \tag{5.15}$$

şeklinde rekürans bağıntısı elde edilir. (5.12)-(5.14) sınır koşullarına DT uygulanırsa;

$$Y(0)=1\ ,\ Y(1)=1\ ,Y(2)=a\ \ ,Y(3)=b\ ,Y(4)=\frac{4}{4!} \tag{5.16}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.16) daki a ve b değerleri; $a=y''(0)/2!$ ve $b=y'''(0)/3!$ eşitliklerini gerçekleyen sabitler olarak kabul edilmiştir.(5.15) te k yerine $k=\overline{1,6}$ alınarak $Y(i), i=\overline{5,10}$ spektrumları (5.16) yardımıyla kolaylıkla bulunur. Bulunan spektrumlar ve DT tanımı kullanılarak problemin *N=10* için çözümü;

$$\begin{aligned} y(x)=1+x+ax^{2}+bx^{3}+\frac{x^{4}}{6}+\frac{x^{5}}{24}+\left(\frac{1}{180}+\frac{a}{360}\right)x^{6}+\left(\frac{1}{840}-\frac{a}{2520}+\frac{b}{840}\right)x^{7} \\ +\left(\frac{11}{40320}-\frac{b}{6720}\right)x^{8}+\frac{x^{9}}{40320}+\left(\frac{1}{453600}+\frac{a}{1814400}\right)x^{10}+O(x^{11}). \end{aligned} \tag{5.17}$$

biçimindedir. (5.17) de görüldüğü gibi bulunan çözüm fonksiyonu a ve b katsayılarına bağlıdır. Buradaki bilinmeyen a ve b katsayılarını hesaplayabilmek için (5.17) fonksiyonu, (5.13)'deki $x=1$ deki sınır koşullarını sağlayacak şekilde kullanılır ve elde edilen lineer denklem sistemi çözülür. Yani; Bölüm 4.2 de anlatılan prosedüre uygun olarak a ve b katsayıları aranırsa;

$$a=0.999998, \qquad b=0.500003. \tag{5.18}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu değerler (5.17) denkleminde yerlerine konulursa

$$y(x) = 1 + x + 0.999998x^2 + 0.500003x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + 0.008333327778x^6 + 0.001388893254x^7 + 0.0001984122520x^8 + \frac{1}{40320}x^9 + 0.275573082010^{-5}x^{10} + O(x^{11}) \quad (5.19)$$

şeklinde yaklaşık çözüm elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlar Arikoğlu ve Özkol'un (2005) DT ile bulmuş olduğu sonuçlardır. (5.19) çözümüne (5.11)- (5.13) probleminin DT çözümü denmektedir. Problemin MDT çözümü Bölüm 4.2'deki prosedüre göre yapılır, yani; birinci adımda DT ile elde edilen çözüme aşağıdaki adımlar uygulanır.

Adım 2. Yukarıdaki (5.19) fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1.999996000}{s^3} + \frac{3.000018000}{s^4} + \frac{4}{s^5} + \frac{5}{s^6} + \frac{5.999996000}{s^7} + \frac{7.000022000}{s^8} + \frac{7.999982001}{s^9} + \frac{9}{s^{10}} + \frac{9.999996000}{s^{11}} \quad (5.20)$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $t = \frac{1}{s}$ alınıp, (5.20) tekrar düzenlendiğinde;

$$Y(t) = 1 + t + t^2 + 1.999996000t^3 + 3.000018000t^4 + 4t^5 + 5t^6 + 5.999996000t^7 + 7.000022000t^8 + 7.999982001t^9 + 9t^{10} + 9.999996000t^{11} \quad (5.21)$$

elde edilir.

Adım 3: (5.21) fonksiyonuna sırasıyla Padé $\left[\frac{1}{1}\right], \left[\frac{2}{2}\right], \left[\frac{3}{3}\right], \left[\frac{4}{4}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](t) = \frac{t}{1 - t} \quad (5.22)$$

$$\left[\frac{2}{2}\right](t) = \frac{1.000000000t - 0.00002600010400t^2}{1.000000000 - 1.000026000t - 0.9999699999t^2} \quad (5.23)$$

$$\left[\frac{3}{3}\right](t) = \frac{t - .9999679999t^2 + 1.000062000t^3}{1 - 1.999968000t + 1.000034000t^2 - 0.0001240005280t^3} \quad (5.24)$$

$$\left[\frac{4}{4}\right](t) = \frac{0.9999999998t - .2999562525t^2 + .2999926516t^3 + .7000551485t^4}{0.9999999998 - 1.299956252t - 0.4000470958t^2 + 0.6999915496t^3 - 0.6800797744.10^{-5}t^4} \quad (5.25)$$

elde edilir. (5.23)-(5.25)'de $t = \frac{1}{s}$ dönüşümü yapılıp her bir eşitlik sırasıyla tekrar düzenlenirse;

$$Y(s)_{[1/1]} = \frac{1}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.26}$$

$$Y(s)_{[2/2]} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{0.00002600010400}{s^2}}{1 - \frac{1.000026000}{s} - \frac{0.9999699999}{s^2}} \tag{5.27}$$

$$Y(s)_{[3/3]} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{.9999679999}{s^2} + \frac{1.000062000}{s^3}}{1 - \frac{1.999968000}{s} + \frac{1.000034000}{s^2} - \frac{0.0001240005280}{s^3}} \tag{5.28}$$

$$Y(s)_{[4/4]} = \frac{\frac{0.9999999998}{s} - \frac{0.2999562525}{s^2} + \frac{0.2999926516}{s^3} + \frac{0.7000551485}{s^4}}{0.9999999998 - \frac{1.299956252}{s} - \frac{0.4000470958}{s^2} + \frac{0.6999915496}{s^3} - \frac{0.680079774410^{-5}}{s^4}} \tag{5.29}$$

bulunur.

Adım 4. (5.26)-(5.29)'deki her bir fonksiyona sırasıyla Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

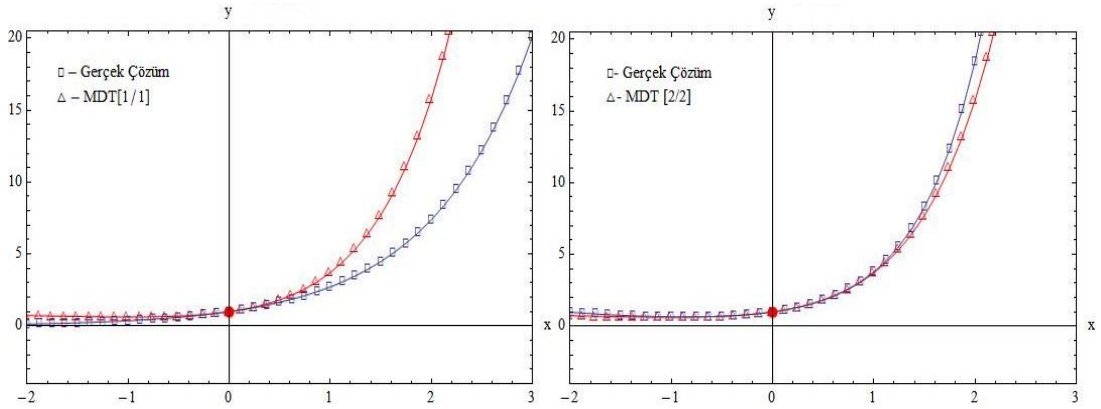
$$L^{-1}(Y(s))_{[1/1]} = y(x)_{[1/1]} = e^{x} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}(Y(s))_{[2/2]} = y(x)_{[2/2]} &= 0.6400087041710^{-17} e^{0.5000130000x} \\ &(0.15624787510^{18}\cosh(1.118026386x) \\ &+ 0.6987483232\ 10^{17}\sinh(1.118026386x)) \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}(Y(s))_{[3/3]} = y(x)_{[3/3]} &= 1.000400231e^{0.0001240270741x} - 65.66372882e^{0.9923053068x} \\ &+ 65.66332858e^{1.007538666x} \end{aligned} \tag{5.32}$$

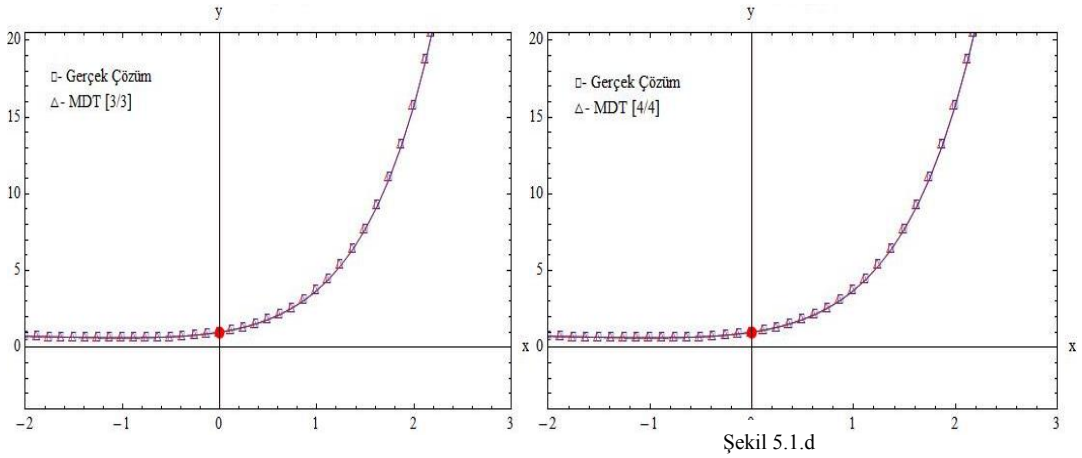
$$\begin{aligned} L^{-1}(Y(s))_{[3/3]} = y(x)_{[4/4]} &= -0.00001954594831e^{-.7000192627x} \\ &+ 1.000106127e^{0.9715596582\ 10^{-5}x} \\ &- 151.1713419e^{0.9966751846x} + 151.1712553e^{1.003290615x} \end{aligned} \tag{5.33}$$

elde edilir. Yukarda $y(x)$ biçiminde verilen fonksiyon (5.11)-(5.13) probleminin DT çözümünü, $y(x)_{[L/M]}$ biçiminde verilen fonksiyonlar ise; seçilen $[L/M]$ ye göre verilen problemin MDT çözümünü göstermektedir. Aşağıdaki şekiller sırasıyla; (5.11)- (5.13) probleminin $y(x)_{[1/1]}, y(x)_{[2/2]}, y(x)_{[3/3]}\, y(x)_{[4/4]}$ MDT çözümleri ile problemin analitik çözümünü göstermektedir.



Şekil 5.1.a

Şekil 5.1.b



Şekil 5.1.c

Şekil 5.1.d

Şekil 5. 1 (a,b,c,d). N=10 için (5.11)-(5.13) probleminin $y(x)_{[1/1]}, y(x)_{[2/2]}, y(x)_{[3/3]} y(x)_{[4/4]}$ MDT çözümleri ve analitik çözüm

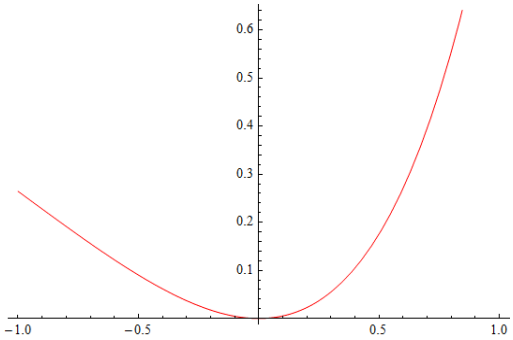
Sonuç 5.2.1.

Yukarıdaki Şekil 5.1.a, Şekil 5.1.b, Şekil 5.1.c ve Şekil 5.1.d incelendiğinde MDT metodunda kullanılan Padé yaklaşımının değeri büyütüldüğünde elde edilen çözümlerin gittikçe gerçek çözüme yaklaştığı görülmektedir. Gerçekten; Pade [1/1] yaklaşımı kullanılarak bulunan $y(x)_{[1/1]}$ MDT çözümü; analitik çözüm ile karşılaştırıldığında grafiklerin belli bir noktadan sonra örtüşmediği görülmektedir. Özellikle $x = 1$'den sonraki fark Şekil 5.1.a' da açıkça görülmektedir. Şekil 5.1.d' de Padé [4/4] yaklaşımı kullanılarak elde edilen $y(x)_{[4/4]}$ MDT çözümü ile analitik çözümün grafiği; Şekil 5.1.a ile karşılaştırıldığında $y(x)_{[4/4]}$ çözümünün $y(x)_{[1/1]}$ çözümünden daha iyi bir çözüm olduğu, $y(x)_{[4/4]}$ grafiğinin problemin analitik çözümünün grafiği ile örtüştüğü aralığın genişlemesinden görülür. Problemin tanımlanmış olduğu aralıkta elde edilen MDT çözümleri ile problemin analitik çözümü arasındaki hata farkı aşağıdaki Tablo 5.1 de verilmiştir.

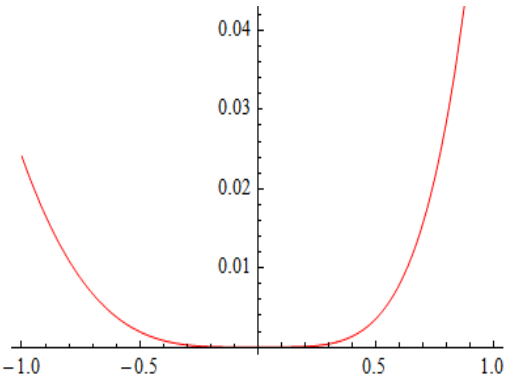
Tablo 5. 1. Hata $_{[L/M]}$=$\left|\text{Analitik Çözüm-y(x)}_{[L/M]}\right|$,(N=10 için)

Aralık	Gerçek çözüm	Hata$_{[1/1]}$	Hata$_{[2/2]}$	Hata $_{[3/3]}$	Hata $_{[4/4]}$
0	1	0.175639365	0.003561804	0.110^{-7}	$0.236\ 10^{-6}$
0.1	1.110517092	0.005346174	0.000004410	$0.8\ 10^{-8}$	$0.8\ 10^{-8}$
0.2	1.244280552	0.022877794	0.000075272	$0.048\ 10^{-6}$	$0.48\ 10^{-7}$
0.3	1.404957642	0.055098834	0.000405904	$0.52\ 10^{-7}$	$0.42\ 10^{-7}$
0.4	1.596729879	0.104905181	0.001367413	$0.389\ 10^{-6}$	$0.279\ 10^{-7}$
0.5	1.824360636	0.175639365	0.003561804	$0.136\ 10^{-6}$	$0.236\ 10^{-6}$
0.6	2.093271280	0.271152480	0.007887788	$0.84\ 10^{-6}$	$0.280\ 10^{-6}$
0.7	2.409626895	0.395874188	0.015621997	$0.105\ 10^{-6}$	$0.105\ 10^{-6}$
0.8	2.780432742	0.554891814	0.028518823	$0.0258\ 10^{-7}$	$0.158\ 10^{-6}$
0.9	3.213642800	0.754039689	0.048932678	$0.600\ 10^{-6}$	$0.600\ 10^{-6}$
1	3.718281828	1.000000000	0.079967328	$0.1172\ 10^{-5}$	$0.1072\ 10^{-5}$

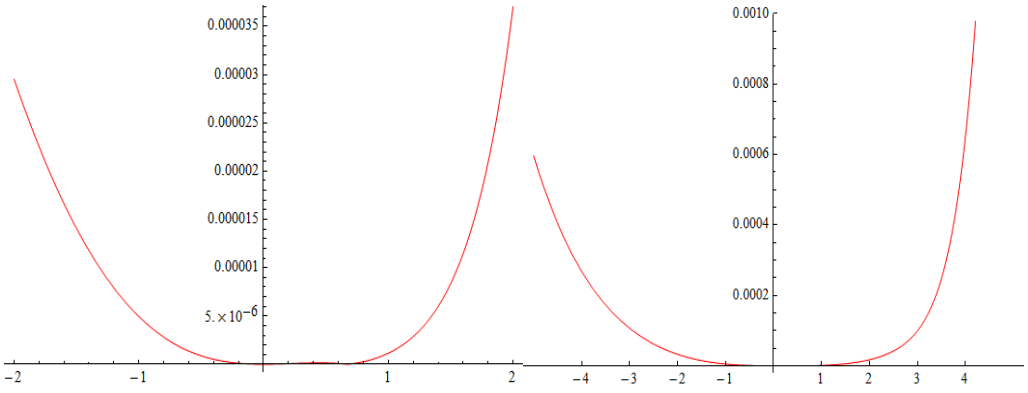
Yukarıda tablo incelendiğinde de açıkça görülmektedir ki; Örnek 5.2 deki MDT metodunda kullanılan Padé yaklaşımındaki L ve M değerleri büyüdükçe elde edilen çözüm için hata miktarı da azalmaktadır. Elde edilen bu veriler ışığında bulunan MDT yaklaşık çözümlerinin hata grafikleri aşağıdaki gibi elde edilir. (Aşağıdaki grafiklerdeki hata fonksiyonu; Hata $_{[L/M]}$(x)=$\left|\text{Analitik Çözüm-y(x)}_{[L/M]}\right|$ biçiminde tanımlanmıştır.)



Şekil 5.2.a. Hata$_{[1/1]}$ (x)



Şekil 5.2.b. Hata$_{[2/2]}$ (x)

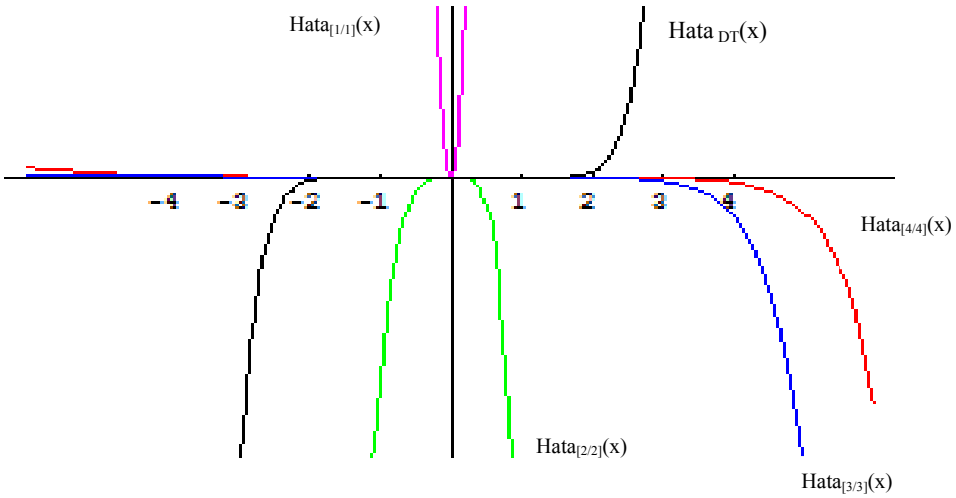


Şekil 5.2.c. Hata$_{[3/3]}$ (x)

Şekil 5.2.d Hata$_{[4/4]}$ (x)

Şekil 5. 2 (a,b,c,d).Örnek 5.2. için Hata$_{[L/M]}$(x)=Analitik çözüm-y(x)$_{[L/M]}$ fonksiyonları

Yukarıdaki grafiklerden de görüldüğü gibi MDT metodunda kullanılan Padé yaklaşımında pay ve paydanın değerleri büyüdükçe, hata gittikçe azalmakta ve yakınsaklık aralığı genişlemektedir. Yukarıda elde edilen veriler tek bir grafikte gösterilirse;



Şekil 5. 3 Örnek 5.2. için Hata$_{[1/1]}$ (x), Hata$_{[2/2]}$ (x), Hata$_{[3/3]}$ (x), Hata$_{[4/4]}$ (x) ve Hata$_{[DT]}$ (x)fonksiyonları (N=10 için).

hata miktarının azaldığı, yakınsaklık aralığının ise arttığı daha iyi karşılaştırılabilmektedir.

Buraya kadar elde edilen sonuçlar MDT' de birinci adımdaki N=10 seçimine karşılık gelen sonuçlardır. DT ile yapılan birçok çalışmada terim sayısının arttırılmasının çözüme katkısı araştırıldığı bilinmektedir. Benzer düşünceyle; MDT' de de N terim sayısının arttırılmasının çözüme katkısını gözlemleyebilmek için yukarıda Örnek 5.2'de N=10 için yapılan işlemleri N=20 için tekrarlayalım.

Adım 1. Yukarıdaki (5.16) nolu eşitlikten sonraki prosedür *N=20* için tekrarlandığında, bilinmeyen *a* ve *b* katsayıları;

$$a = 1.0000000000000001, \qquad b = 0.49999999999999991. \tag{5.34}$$

şeklinde bulunur.

Elde edilen bu *a* ve *b* değerleri N=20 için ilk on terim alınarak yerlerine konulduğunda çözüm;

$$\begin{aligned} y(x) = 1 + x + 1.000000000000001x^2 + .4999999999999991x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 \\ + 0.008333333334x^6 + 0.001388888888x^7 + 0.0001984126984x^8 \\ + \frac{1}{40320}x^9 + 0.275573192210^{-5}x^{10} + O(x^{11}) \end{aligned} \tag{5.35}$$

biçiminde elde edilir (Arikoğlu ve Özkol, 2005).

Problemin bundan sonraki kısmı Bölüm 4.2 de anlatılan prosedüre uygun bir biçimde ilk kısımda yapıldığı gibi incelenecektir. (5.35) çözümüne (5.11)- (5.13) probleminin N=20 için DT çözümü denmektedir.

Adım 2. (5.35) fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \frac{4}{s^5} + \frac{5}{s^6} + \frac{6}{s^7} + \frac{6.999999996}{s^8} + \frac{7.999999999}{s^9} + \frac{9}{s^{10}} + \frac{9.999999999}{s^{11}} \tag{5.36}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $t = \frac{1}{s}$ alınır ve (5.36) tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned} Y(t) = t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5 + 5t^6 + 6t^7 + 6.999999996t^8 \\ + 7.999999999t^9 + 9t^{10} + 9.999999999t^{11} \end{aligned} \tag{5.37}$$

elde edilir.

Adım 3. (5.37) fonksiyonuna sırasıyla Padé $\left[\frac{1}{1}\right], \left[\frac{2}{2}\right], \left[\frac{3}{3}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](t) = \frac{t}{1-t} \tag{5.38}$$

$$\left[\frac{2}{2}\right](t) = \frac{t}{1-t-t^2} \tag{5.39}$$

$$\left[\frac{3}{3}\right](t) = \frac{t-t^2+t^3}{1-2t+t^2} \tag{5.40}$$

elde edilir.(5.38)-(5.40)'da $t = \frac{1}{s}$ alınıp her bir fonksiyon sırasıyla tekrar yazılırsa;

$$Y(s)_{[1/1]} = \frac{1}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.41}$$

$$Y(s)_{[2/2]} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{0.00002600010400}{s^2}}{1 - \frac{1.000026000}{s} - \frac{0.9999699999}{s^2}} \tag{5.42}$$

$$Y(s)_{[3/3]} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{0.9999679999}{s^2} + \frac{1.000062000}{s^3}}{1 - \frac{1.999968000}{s} + \frac{1.000034000}{s^2} - \frac{0.0001240005280}{s^3}} \tag{5.43}$$

biçiminde bulunur.

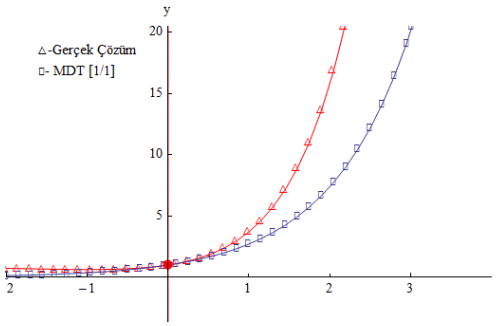
Adım 4. (5.41)-(5.43) deki her bir fonksiyona Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$y(x)_{[1/1]} = e^x \tag{5.44}$$

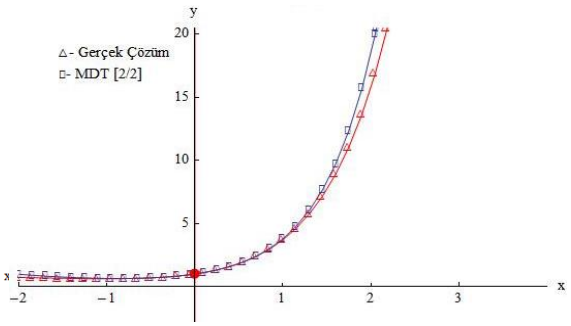
$$y(x)_{[2/2]} = 0.2e^{0.5x}(5\cosh(1.118033988x) + 2.236067977\sinh(1.118033988x)) \tag{5.45}$$

$$y(x)_{[3/3]} = xe^x + 1 \tag{5.46}$$

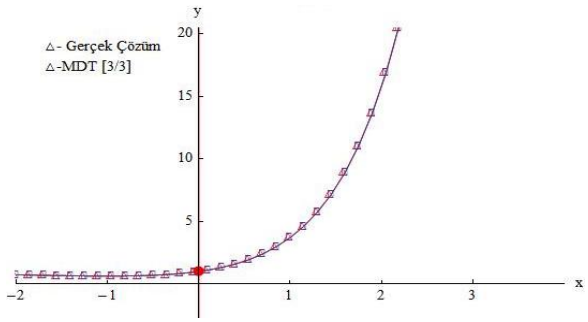
çözüm fonksiyonları bulunur.



Şekil 5.4.a. $y(x)_{[1/1]}$ ve analitik çözüm fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 5.4.b. $y(x)_{[2/2]}$ ve analitik çözüm fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 5.4.c. . $y(x)_{[1/1]}$ ve analitik çözüm fonksiyonlarının grafikleri

Şekil 5. 4 (a,b,c). $y(x)_{[L/M]}$ ve analitik çözüm fonksiyonlarının grafikleri (N=20).

Yukarıdaki Şekil 5.4. ile Şekil 5.1.'deki grafikler karşılaştırıldığında çözüm metodundaki N değeri büyüdükçe elde edilen MDT yaklaşık çözümlerinin; problemin analitik çözümüne daha da yaklaştığı görülmektedir. N=20 alındığında Padé [1/1] yaklaşımı kullanılarak bulunan MDT çözümü ile problemin analitik çözümü arasındaki fark, Padé [3/3] yaklaşımı kullanılarak bulunan MDT çözümünün analitik çözüm arasındaki farktan daha büyüktür. Bu sonuçlardan aşağıdakiler söylenebilir.

Sonuç 5.2.2.

Seri açılımı şeklinde elde edilen çözüm fonksiyonlarındaki terim sayısı (N değeri) çözüme etki etmektedir. Çözümdeki hata miktarının azaltılması isteniyorsa terim sayısı arttırılmalıdır. Bu sonuç aynı zamanda klasik DT içinde söylenmiştir (Arikoğlu, 2005; Cansu ve Özkan, 2010).

Sonuç 5.2.3.

Hata miktarına etki eden diğer bir unsur MDT metodunda kullanılan Padé yaklaşımlarında ele alınan [L/M] değerlerinin büyüklüğüdür. L ve M değerleri ne kadar büyük alınırsa hata miktarı azalmakta ve analitik çözüme o kadar yaklaşılmaktadır. Bu sonuç Padé üzerine yapılan çalışmalarla uyuşmaktadır.

Örnek 5.3.

$$y^{(iv)}(x) = 1 + \int_0^x e^{-t} y^2(t)dt \qquad , 0 < x < 1 \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} &y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \\ &y(1) = e, \quad y'(1) = e. \end{aligned} \tag{5.48}$$

biçiminde lineer olmayan başlangıç değer problemini ele alalım (Arıkoğlu ve Özkol, 2005). (5.47)' de $x = 0$ yazılırsa başka bir başlangıç değeri;

$$y^{(iv)}(0) = 1. \tag{5.49}$$

biçiminde hesaplanabilir.

Adım 1. DT'nin tanımı ve ilgili teoremler kullanılarak; (5.47) denklemine DT uygulanırsa;

$$Y(k+4)=\frac{(k-1)!}{(k+4)!}\sum_{k_2=0}^{k-1}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!}Y(k_2-k_1)Y(k-k_2-1).\ \ k\geq 1 \tag{5.50}$$

şeklinde rekürans bağıntısı elde edilir. (5.48)-(5.49) koşullarına DT uygulanırsa;

$$Y(0)=1,\quad Y(1)=1,\quad Y(2)=a,\quad Y(3)=b,\quad Y(4)=1/4!, \tag{5.51}$$

olur. Burada $a=y''(0)/2!$ ve $b=y'''(0)/3!$ olarak kabul edilmişlerdir. Örnek 5.2 de olduğu gibi; (5.51)'de elde edilmiş olan değerler (5.50)'de yazıldığında elde edilen spektrumlar için bulunan çözüm fonksiyonu (*N=10* için);

$$\begin{aligned} y(x)=1+x+ax^2+bx^3+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\left(\frac{a}{1260}-\frac{1}{5040}\right)x^7 \\ +\left(\frac{b}{3360}-\frac{1}{40320}\right)x^8+\left(\frac{a^2}{15120}-\frac{a}{15120}+\frac{1}{51840}\right)x^9 \\ +\left(-\frac{a^2}{30240}+\frac{ab}{15120}+\frac{a}{45360}-\frac{b}{30240}-\frac{1}{403200}\right)x^{10}+O(x^{11}). \end{aligned} \tag{5.52}$$

olur. Buradaki bilinmeyen *a* ve *b* katsayılarını hesaplayabilmek için (5.52)' deki fonksiyon ve türevine $x=1$ konularak elde edilen lineer denklem sistemi çözülmelidir. Yani; Bölüm 4.2 ve Örnek 5.2'de anlatılan prosedür işletildiğinde;

$$\begin{aligned} a&=0.4999997 \\ b&=0.1666669 \end{aligned} \tag{5.53}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu değerler (5.52) deki yerlerine konulursa;

$$\begin{aligned} y(x)=1+x+0.4999997x^2+0.1666669x^3+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+0.0001984124603x^7 \\ +0.00002480165675x^8+0.275573192\,10^{-5}x^9+0.275573196\,10^{-6}x^{10}+O(x^{11}) \end{aligned} \tag{5.54}$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Buraya kadar olan sonuçlar Arikoğlu ve Özkol'un (2005) DT ile bulmuş olduğu sonuçlardır. (5.54) çözümüne (5.47)- (5.48) probleminin DT çözümü denmektedir. Problemin MDT çözümü Bölüm 4.2'deki prosedüre göre yapılırsa; ilk basamakta klasik DT ile elde edilen (5.54.) çözümüne aşağıdaki basamaklar uygulanır.

Adım 2. Yukarıdaki (5.54) fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{0.9999994000}{s^3}+\frac{1.000001400}{s^4}+\frac{1}{s^5}+\frac{1}{s^6}+\frac{1}{s^7}+\frac{0.9999987999}{s^8}+\frac{1.000002800}{s^9}+\frac{0.9999999991}{s^{10}}+\frac{1.000000014}{s^{11}} \tag{5.55}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $t=\frac{1}{s}$ alınır; (5.55) tekrar düzenlenirse;

$$Y(t)=t+t^2+0.9999994000t^3+1.000001400t^4+t^5+t^6+t^7+0.9999987999t^8+1.000002800t^9+0.9999999991t^{10}+1.000000014t^{11} \tag{5.56}$$

biçiminde elde edilir.

Adım 3. (5.56) fonksiyonuna Padé$\left[\frac{1}{1}\right]$uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](t)=\frac{t}{1-t} \tag{5.57}$$

olur.(5.57)'de $t=\frac{1}{s}$ alınıp denklem tekrar düzenlenirse;

$$Y(s)_{[1/1]}=\frac{1}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.58}$$

bulunur.

Adım 4. (5.58)'e Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(x)_{[1/1]}=e^x \tag{5.59}$$

bulunur. (5.59) çözümü (5.47)-(5.48) probleminin *N=10* için MDT çözümüdür. Bu çözüm aynı zamanda problemin analitik çözümüdür.

Örnek 5.2 deki olduğu gibi *N'*in çözüme katkısın görebilmek için; (5.52) nolu eşitlikten sonraki prosedürü *N=20* için tekrarlayalım.

Adım 1. (5.52) fonksiyonu *N=20* için hesaplandığında elde edilen fonksiyondaki bilinmeyen *a* ve *b* değerleri;

$$a=0.4999999999999993$$
$$b=0.1666666666666672 \tag{5.60}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu *a* ve *b* değerleri *N=20* için ilk on terim alınarak yerlerine konulduğunda aranan çözüm;

$$y(x) = 1 + x + 0.499999999999993x^2 + 0.1666666666666672x^3 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + 0.00019841246984x^7 + 0.00002480158731x^8 + 0.275573192\,10^{-5}x^9 + 0.275573193\,10^{-6}x^{10} + O(x^{11}) \tag{5.61}$$

biçiminde elde edilir.

Adım 2 . (5.61) fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınırsa;

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^6} + \frac{1}{s^7} + \frac{0.9999999999}{s^8} + \frac{1}{s^9} + \frac{0.9999999991}{s^{10}} + \frac{1.000000003}{s^{11}} \tag{5.62}$$

elde edilir

Adım 3. (5.62) deki fonksiyona Padé $\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](t) = \frac{t}{1 - t} \tag{5.63}$$

elde edilir.(5.63)'de $t = \frac{1}{s}$ alınır fonksiyon tekrar düzenlenirse;

$$Y(s)_{[1/1]} = \frac{1}{s\left(1 - \frac{1}{s}\right)} \tag{5.64}$$

bulunur.

Adım 4. (5.64)'e Ters Laplace dönüşümü uygulandığında ise;

$$y(x)_{[1/1]} = e^x$$

olur. Bu çözüm ile (5.59)'da bulunan çözümün her ikisi de problemin gerçek çözümüdür.

Örnek 5.4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_0^t k(x, t-s)u(x,s)ds = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (0, +\infty), t \in [0, T], \tag{5.65}$$

ve

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 0, \quad x \in (0,\infty), \\ &u(0,t) = t, \quad t \in [0,T] \\ &u \to 0, \quad x \to \infty \end{aligned} \tag{5.66}$$

biçiminde verilen (5.65)-(5.66) başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $k(t)=e^{-t}$ ve $f(x,t)=e^{-\beta x}(2-e^{-t}-te^{-t}-\beta^2 t),(\beta>0)$ biçiminde tanımlanmışlardır. Ele alınan problemin gerçek çözümü $u(x,t)=e^{-\beta x}t$ dir (Han ve ark., 2005).

Adım 1. DT tanımı yardımıyla (5.65)'nın DT si alınırsa;

$$(h+1)U(k,h+1)+G(k,h)=(k+1)(k+2)U(k+2,h)+F(k,h) \tag{5.67}$$

eşitliği elde edilir. Buradaki $G(k,h)$ ve $F(k,h)$ fonksiyonları sırasıyla $\int_0^t k(t-s)u(x,s)ds$ ve $f(x,t)$ fonksiyonlarının dönüşüm fonksiyonları olarak tanımlanmışlardır. (5.67) koşullarına DT uygulandığında ise

$$U(k,0)=0,\quad U(0,h)=\delta(0,h-1) \tag{5.68}$$

elde edilir. (5.68)'deki değerler (5.67)'de yazıldığında *N=7* için yaklaşık çözüm

$$u(x,t)=t-\beta xt+\frac{1}{2}\beta^2x^2t-\frac{1}{6}\beta^3x^3t+\frac{1}{24}\beta^4x^4t-\frac{1}{120}\beta^5x^5t+\frac{1}{720}\beta^6x^6t \tag{5.69}$$

şeklinde elde edilir.(5.69) çözümüne (5.66)-(5.67) probleminin DT çözümü denir (Cansu ve Özkan, 2010).

Adım 2. Yukarıdaki (5.69) fonksiyonunun *x* değişkeni dönüşüm değişkeni olarak alınıp (*t*; sabit gibi düşünülür); (5.69) fonksiyonuna Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$U(s,t)=\frac{t(s^6-\beta s^5+\beta^2s^4-\beta^3s^3+\beta^4s^2-\beta^5s^s+\beta^6)}{s^7} \tag{5.70}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $l=\frac{1}{s}$ alınıp (5.70) tekrar düzenlenirse;

$$U(l,s)=t(l-bl^2+b^2l^3-b^3l^4+b^4l^5-b^5l^6+b^6l^7) \tag{5.71}$$

elde edilir.

Adım 3. (5.71) fonksiyonuna Padé $\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](l)=\frac{tl}{1+bl} \tag{5.72}$$

olur.(5.72)'de $l=\frac{1}{s}$ alınır ve (5.72) tekrar düzenlenirse;

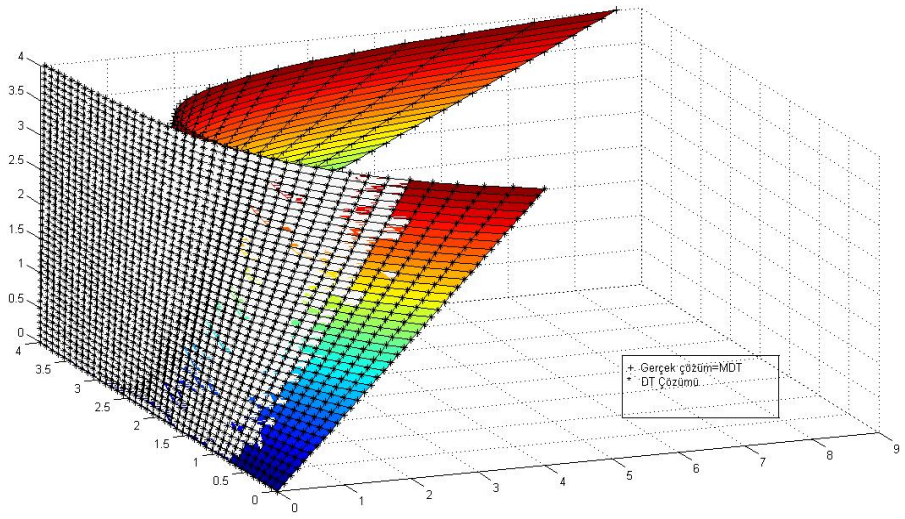
$$U(s,t)_{[1/1]} = \frac{t}{s\left(1+\frac{\beta}{s}\right)} \tag{5.73}$$

bulunur.

Adım 4. (5.73)'e Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x,t) = e^{-\beta x}t \tag{5.74}$$

biçiminde (5.66)-(5.67) probleminin MDT çözümü elde edilmiş olur. Aşağıda MDT ve DT ile elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.



Şekil 5. 5 Örnek 5.4'ün (MDT çözümü= Analitik Çözümü) ve DT çözümünün grafikleri

Yukarıdaki Şekil 5.5'ten görüldüğü gibi; problemin MDT çözümü aynı zamanda analitik çözümüdür. MDT çözümü ve DT çözümünün grafiklerine bakıldığında ise; DT'nin belli bir aralıktan sonra iyi çözüm olduğu söylenemez. Sonuç olarak; MDT'nin DT ye göre daha üstün olduğu söylenebilir.

Örnek 5.5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - x^2 t + \int_0^t e^{-t} u dt, \quad x \in (0,\infty),\ t > 0 \tag{5.75}$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2 \\ u(0,t) &= 0 \end{aligned} \tag{5.76}$$

başlangıç koşullarına sahip integro diferensiyel denklemini ele alalım. *t=0* için (5.75) eşitliğinden;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2 \tag{5.77}$$

biçiminde yeni bir başlangıç koşulu elde edilir. Problemin analitik çözümü x^2e^t dir.

Adım 1. (5.75)'e DT uygulanırsa;

$$(h+1)U(k,\ h+1)\ =\ U(k,\ h)\ -\ \delta(k-2,\ h-1)+\frac{1}{h}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{h-1}\frac{(-1)^{h-n-1}}{(h-n-1)!}U(k-m,n),\ h\geq 1 \tag{5.78}$$

eşitliği, (5.76)-(5.77) koşullarına DT uygulandığında ise;

$$\begin{aligned} &U(k,0)=\delta(k-2,0), && k=0,1,2,....,N\\ &U(0,h)=0\ , && h=0,1,2,....,N\\ &U(k,1)=\delta(k-2,0), && k=0,1,2,....,N \end{aligned} \tag{5.79}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.79)'daki değerler (5.78)'de yazıldığında $N=7$ için yaklaşık çözüm;

$$u(x,t)=x^2+x^2t+\frac{1}{2}t^2x^2+\frac{1}{6}x^2t^3+\frac{1}{24}x^2t^4+\frac{1}{120}x^2t^5 \tag{5.80}$$

şeklinde elde edilir.(5.80)'e; (5.75)-(5.76) probleminin DT çözümü denir.

Adım 2. Yukarıdaki (5.80) fonksiyonunun t değişkeni dönüşüm değişkeni olarak alınıp (x; sabit gibi düşünülür) ve (5.80)'e Laplace dönüşümü uygulandığında;

$$U(x,s)=\frac{x^2(s^5+s^4+s^3+s^2+s+1)}{s^6} \tag{5.81}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $l=\frac{1}{s}$ alınıp (5.81) tekrar düzenlendiğinde;

$$U(x,l)=x^2(l+l^2+l^3+l^4+l^5+l^6) \tag{5.82}$$

olur.

Adım 3. (5.82) fonksiyonuna Padé$\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında ise;

$$\left[\frac{1}{1}\right](l)=\frac{x^2l}{1-l} \tag{5.83}$$

elde edilir.(5.83)'de $l=\frac{1}{s}$ alınır (5.83) tekrar düzenlenirse;

$$U(x,s)=\frac{x^2}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.84}$$

olur.

Adım 4. (5.84)'ün Ters Laplace dönüşümü alındığında ise;

$$L^{-1}(U(x,s)) = u(x,t) = x^2 e^t \tag{5.85}$$

elde edilir. Elde edilen (5.85) çözümüne; (5.75)-(5.76) probleminin MDT çözümü denir. Bu çözüm aynı zamanda problemin analitik çözümüdür.

Örnek 5.6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_0^t u(x,s)ds = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^x, \qquad 0 \le x \le 1, t \ge 0 \tag{5.86}$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= e^x \quad , \\ u_t(x,0) &= e^x \quad , \\ u(0,t) &= e^t \quad , \\ u(1,t) &= e^{1+t}, \end{aligned} \tag{5.87}$$

biçiminde verilen integro sınır değer problemini ele alalım.

Adım 1. DT'nin tanımı ve ilgili teoremler kullanılarak; (5.86) nin DT si alınırsa;

$$2(k+1)(k+2)U(k+2,h) = (h+1)U(k,h+1) + \frac{1}{k!} + \frac{U(k,h-1)}{h}, \qquad h \ge 1 \tag{5.88}$$

olur. (5.87) koşullarına DT uygulanırsa;

$$\begin{aligned} U(k,0) &= \frac{1}{k!}, \qquad k = 0,1,2,....,N \\ U(k,1) &= \frac{1}{k!}, \qquad k = 0,1,2,....,N \\ U(0,h) &= \frac{1}{h!}, \qquad h = 0,1,2,....,N \end{aligned} \tag{5.89}$$

olur. (5.89)'da elde edilmiş olan spektrumlar denklem (5.88)'de yerine yazıldığında *N=3* için;

$$u(x,t) = 1 + x + t + \frac{1}{2}x^2 + tx + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2 x + \frac{1}{6}t^3 \tag{5.90}$$

elde edilir.(5.90)'na (5.86)-(5.87) probleminin DT çözümü denir.

Adım 2. Yukarıdaki (5.90) fonksiyonunun *x* değişkeni dönüşüm değişkeni olarak alınıp; (5.90)'nın Laplace dönüşümü alınırsa;

$$U(s,t)=\frac{6s^3+6s^2+6ts^3+6s+6ts^2+3t^2s^3+6+6ts+3t^2s^2+t^3s^3}{6s^4} \tag{5.91}$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık olması amacıyla $m=\frac{1}{s}$ alınıp (5.91) tekrar düzenlenirse;

$$U(m,t)=m+m^2+tm+m^3+tm^2\frac{1}{2}t^2m+m^4+tm^3+\frac{1}{2}t^2m^2+\frac{1}{6}t^3m^3 \tag{5.92}$$

elde edilir.

Adım 3. (5.92)'ye Padé$\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](m)=\frac{\left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)m}{1-m} \tag{5.93}$$

elde edilir.(5.93)'te $m=\frac{1}{s}$ alınıp (5.93) tekrar düzenlenirse;

$$U(s,t)=\frac{\left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.94}$$

fonksiyonuna ulaşılır.

Adım 4. (5.94)'e Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^x \tag{5.95}$$

elde edilir.

Adım 5. (5.95) fonksiyonun da bu kez dönüşüm değişkeni olarak *t*' yi alıp yakarıdaki Adım2, Adım3 ve Adım 4' teki işlemleri tekrarlayalım. (5.95)'e Laplace dönüşümü uygulandığında;

$$U(x,s)=\frac{e^x(1+s+s^2)}{s^3} \tag{5.96}$$

elde edilir. $l=\frac{1}{s}$ alınıp (5.96) tekrar düzenlendiğinde;

$$U(x,l)=e^x(l^3+l^2+l) \tag{5.97}$$

elde edilir.

Adım 6. (5.97) fonksiyonuna Padé $\left[\frac{1}{1}\right]$ uygulandığında;

$$\left[\frac{1}{1}\right](l) = \frac{e^x l}{1-l} \tag{5.98}$$

elde edilir.(5.98)'de $l = \frac{1}{s}$ alınıp (5.98) tekrar düzenlenirse;

$$U(x,s) = \frac{e^x}{s\left(1-\frac{1}{s}\right)} \tag{5.99}$$

bulunur.

Adım 7. (5.99)'a Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x,t) = e^{x+t} \tag{5.100}$$

biçiminde problemin MDT çözümü elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda problemin gerçek çözümüdür.

KAYNAKLAR

Abdel I. H., Hassan H., 2002, Different applications for the differential transformation in the differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* 129 (2-3), 183—201.

Abdel I. H., Hassan H., 2002, On solving some eigenvalue problems by using a differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation,*127 (1),1-22.

Abdel I. H., Hassan H., 2004, Differential transformation technique for solving higher- order initial value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 54, 299—311.

Agarwal, R.P., 1986, Boundary Value problems for High Ordinary Differential Equations, *World Scientific*, Singapore.

Alawneh, A., Khaled, K., Towaiq, M., 2010, Reliable algorithms for solving integro-differential equations with applications, *International Journal of Computer Mathematics,* 87 (7), 1538-1554.

Arıkoglu A. and Özkol İ., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation,* 168,1145-1158.

Arıkoglu A., Özkol İ., 2006, Solution of difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 1216-1228.

Arıkoglu A., Özkol İ., 2007, Solution of fractional differential equations by using differential transform method, *Chaos, Solitons and Fractals,*34, 1473-1481.

Ayaz F., 2003, On the two-dimensional differential transform method*, Applied Mathematics and Computation,*143(2-3), 361-374.

Ayaz F., 2004, Solutions of the system of differential equations by differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (2) , 547-567 .

Ayaz F., 2004, Applications of differential transform method to differential-algebraic Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 152 (3), 649-657.

Bahuguna, D., Ujlayan, A., Pandey,D.N., 2009, A comparative study of numerical methods for solving an integro-differential equation,*Comput. and Maths with Appl.* 57, 1485 1493.

Baker, G. A. ve Graves-Morris, P., 1996, Padé Approximants, Cambridge University Press,Cambridge.

Bereketoğlu, H., Karakoç, F.,2009, Solutions of delay differential equations by using differential transform method, *International Journal of Computer Mathematics,*86 (5), 914-923.

Bildik N., Konuralp A., Bek F. O. ve Küçükarslan S., 2006, Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 172 (1), 551-567.

Brabenec R.L., 1990, Introduction to Real Analysis , P-Kent Publishing Company, Boston.

Caglar H.N., Caglar S.H., Twizell E.H.,1999, The numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth-degree B-Spline functions, *App. Math. Lett.* 12, 25—30.

Cansu,Ü., Özkan, O., 2010,Differential Transform Solution of Some Linear Wave Equations with Mixed Nonlinear Boundary Conditions and its Blow up,*Appl.Math.Sci.,* 467 - 475.

Cansu,Ü., Özkan, O.,2010, Applıcatıon of dıfferentıal transform method to parabolıc volterra ıntegro-dıfferentıal equatıons on unbounded spatıal domaıns, *The First International Conference on Mathematics and Statistics AUS-ICMS'10,*UAE.

Chen C-K. and Ju S-P.,2004, Application of differential transformation to transient advective–dispersive transport equation, *Applied Mathematics and Computation*, 155 (1), 25-38.

Chen C-K. and Chen S-S., 2004, Application of the differential transformation method to a non-linear conservative system, *Applied Mathematics and Computation*, 154, 431—441.

Chen C-K., Ho S.H., 1996, Application of differential transformation to Eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation, Volume* 79, 173-188.

Chen C-K., Ho S.H., 1999, Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 106 (2-3) 171-179.

Chen C-K., Ho S.H., 1999, Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform*, International Journal of Mechanical Sciences*, 41 (11), 1339-1356.

Chen C-L., Liu Y-C., 1998, Differential Transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation,* 95,154-164.

Çatal, S., 2008, Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method, *Applied Mathematical Modelling,* 32, 1744-1757.

Çelik,E., Bayram, M., 2003, Arbitrary Order Numerical Mmethod for Solving Differential Algebraic Equation by Pade Series *,Appl .Math Comp*.,137, 57-65.

Davies, B. J., 2002, Integral transforms and their applications (3rd ed.), Berlin, New York,

Douglass S.A., 1996, Mathematical analysis, Addinson-Wesley Publish. Comp. 737p.

Ertürk V.S., Monami, S.,2007, Comparing numerical methods for solving fourth-order boundary value problems, *Apple. Math.Comput* 188 (2), 1963-1968.

Ertürk, V., Momani, S., 2008, Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method*, Comp.Math with Appl.,*55 (4), 833-842.

Ertürk, V.S., Momani, S., Odibat, Z., 2008, Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation ,* 13, 1642-1654.

Evans L.C., 1998 ,Partial Differential Equations, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 19, 1-2.

Golberg, A.M., 1979, Solution Methods for Integral Equations: Theory and Applications, Plenum Press, New York.

Han, H., Zhu, L., Herman, B., 2005, The numerical solution of parabolic Volterra integro-differential equations on unbounded spatial domains, *Appl.Num. Math,*55, 83-99.

Islam,S., Haq, S., Ali,J., 2009, Numerical solution of special 12th-order boundaryvalue problems using differential transform method, *Commun Nonlinear Sci Numer* Simulat, 14, 1132-1138.

Jang M-J., Chen C-L. and Liu Y-C., 2001, Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* 12 (2-3), 261-270.

Jang M-J., Chen C-L. and Liy Y-C.,2000, On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 115 (2-3),145-160.

Jang M-J., Chen C-L., 1997, Analysis of the Response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, *Applied Mathematics and computation*, Volume 88, 137-151.

Jang M-J., Wang J-S. and Liu Y-C.,2003, Applying differential transformation method to parameter identification problems, *Applied Mathematics and Computation,* 139 (2-3), 491-502.

Jang, M., Chen, C., Liy, Y., 2010**,** On solving the initial-value problems using the differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation,*115 (2-3), 145-160.

Kangalgil, F., Ayaz, F., 2009, Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by differential transform method, *Chaos, Solitons and Fractals,*41, 464-472.

Kanth R., Aruna, K., 2008, Solution of singular two-point boundary value problems using differential transformation method, *Physics Letters,*372, 6896-6898.

Krasnov,M., Çev,Cerit,C., 1976, İntegral Denklemler, İstanbul,Beta.

Kuo B-L., 2005, Application of the differential transformation method to the solutions of the free convection problem, *Applied Mathematics and Computation*, 165, 63-79.

Kurnaz A., Oturanç G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations*, International J. of Comp. Mathematics*, 82, 709-719.

Kurnaz A., Oturanç G., Kiriş M.E., 2005, n-Dimensional differential transform method for solving PDEs, *International J. of Comp. Mathematics,* 82 (3), 369-380.

Kurulay, M., Bayram, M., 2010, Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method, *Comm.Nonliear Sci.Num.Sim.*15 (7), 1777-1782.

Manzhirov, A. V.; Polyanin, Andrei D., 1998, Handbook of integral equations, London.

Miller, R.K., 1967, Nonlinear Volterra Integral Equations, W.A Benjamin, Menlo Park, CA.

Momani, S., Odibat, Z. and Erturk, V. S., 2007, Generalized differential transform method for solving a space and time-fractional diffusion-wave equation, *Physics Letters A,* 370(5-6), 379-387.

Morchalo, J., 1975, On two point boundary value problem for integro-differential equation of second order, *Fasc. Math.,* 9, 51-56.

Nazari, D., Shahmorad, S.,2010, Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, *J. Comp and Appl. Math.*, 234 (3), 883-891.

O. Özkan,2009, Numerical implementation of differential transformations for integro-differential equations, International Journal of Computer Mathematics,in press.

Odibat, Z., Bertelle, C., Alaoui, M., 2010**,** A multi-step differential transform method and application to non-chaotic or chaotic systems, *Computers & Mathematics with Applications,* 59 (4), 1462-1472.

Odibat,M.Z., 2008, Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels, 48 (7-8), 1144-1149.

Özkan O., Keskin Y., 2005, An Application of the differential transformation method to the boundary value problems of the system of integro Differential equations, *Selçuk Journal of Applied Mathematics,* 6, 43-53.

Özkan, O., Cansu, Ü., 2010, Application of Differential Transform method for solving the variational problems",*The First International Conference on Mathematics and Statistics AUS-ICMS'10,*UAE.

Özkan,O., 2010, Numerical implementation of differential transformations for integro-differential equations*, International Journal of Computer Mathematics*, in press.

Pozzi, A., 1994, Applıcatıons Of Padé Approxımatıon Theory In Fluıd Dynamıcs,Napoli Univ.,Napoli.

Rabtah, A., Ertürk, V., Momani, S.,2010, Solutions of a fractional oscillator by using differential transform method, *Comp.Math with Appl.,*59 (3), 1356-1362.

Ross, ,L,1984, Differential Equations, , Hamilton Printing Company, USA.

Sweilam, N.H.,Khader, M.M.,2009, Exact solutions of some coupled nonlinear partial differential equations using the homotopy perturbation method, *Comput. and Maths with Appl,* 58, 2134-2141.

Thieme, H.R.,1977, A model for the spatio spread of an epidemic, *J. Math. Biol*. 4, 337 351.

Volterra, V., 1930, The Theory Of Functional and of Integral Equations and Integro Differential equations, London.

Wazwaz A-M., 2001, A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations", *Appl. Math. Comput.* 118, 327—342.

Yang X., Liu Y. and Bai S., 2005, A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform, *Applied*

Mathematics and Computation, In Press, Corrected Proof, Available online 20 June 2005

Zhou, J.K.,1986, Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China (in Chinese).

EK-8

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ümmügülsüm CANSU
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Aksaray/1983
Telefon :
Faks : -
e-mail : ummugulsumcansu@yahoo.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :	Hazım Kulak Anadolu Lisesi,Aksaray	2001
Üniversite :	Cumhuriyet Üniversitesi,Sivas	2007
Yüksek Lisans :	Selçuk Üniversitesi, Konya	2010
Doktora :		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-	Rize Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI: Diferensiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER:

ULUSAL KONFERANSLARDAKİ BİLDİRİLER:

1. Ü.Cansu, O. Özkan, "*Karışık Nonlineer Sınır Koşulları Olan Dalga Denkleminin Çözümü Ve Çözümün Sıçramaları*" 21.Ulusal Matematik Sempozyumu, Koç Universitesi, İstanbul, Turkiye,2008.

ULUSLARARASI KONFERANSLARDAKİ BİLDİRİLER:

1. Ü.Cansu, O. Özkan, "*Differential Transform method for Volterra's population model",* International Biomathematics and Ecology Research and Education (BERE2009) Symposium, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir, Turkiye, 2009.

2. Ü.Cansu, O. Özkan, "*Application Of Differential Transform Method To Parabolic Volterra Integro-Differential Equations On Unbounded Spatial Domains",* First International Conference on Mathematics and Statistics (AUS-ICMS'10), American University of Sharjah, Sharjah, UAE, 2010.
3. O. Özkan, Ü. Cansu, *"The Use Of Differential Transform Method For Solving The Variational Problems",* First International Conference on Mathematics and Statistics (AUS-ICMS'10), American University of Sharjah, Sharjah, UAE, 2010.

ÇALIŞTAY BİLDİRİ:

1. Ü.Cansu, O. Özkan, "*Titreşimli Sönümlü Yay Denkleminin Diferensiyel Transform Metodu İle Çözümü*" I.Ulusal Tebliğ Günleri, Selçuk Universtesiy, Konya, Turkiye,2009.

SEMPOZYUM:

1. V.Ulusal Geometri Sempozyumu, Sakarya Üniversitesi, 4-7 Temmuz 2007, Sakarya.

ÖDÜL:

TÜBİTAK, Yurtdışı Bilimsel Etkinlikler Katılma Desteği, 2010.

PROGRAMLAMA DENEYİMİ:

İyi bir programlama backgrounduna sahibim. Maple, Matlab, Mathematicca programlarını biliyorum.

YAYINLAR*

1. Ü. Cansu, O. Özkan, "Differential Transform Solution of Some Linear Wave Equations with Mixed Nonlinear Boundary Conditions and its Blow up", Appl. Math. Sci., Vol. 4, 2010, p 467 - 475.