T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOEPLITZ VE HANKEL MATRİSLERİN EN KÜÇÜK SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN ALT SINIRLAR

Mesut KIRICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 2010

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ……..…….....1

2. TOEPLITZ VE HANKEL MATRİSLERİ…… 6

3. MATRİS ÇARPIMLARININ SİNGÜLER DEĞERİ……..... 8

4. MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN TAHMİNLER……. 15

5. MATRİSLERİN EN KÜÇÜK SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN ALT SINIRLAR

5.1. Gersgorin Tipi Alt Sınırlar…….25

5.2. Ostrowski Tipi Alt Sınırlar……....26

5.3. Brauer Tipi Alt Sınırlar……....27

5.4. Gudkov Tipi Alt Sınırlar……...31

6. UYGULAMALAR……....33

7. SONUÇ VE ÖNERİLER…………..41

8. KAYNAKLAR……..42

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOEPLITZ VE HANKEL MATRİSLERİN EN KÜÇÜK SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN ALT SINIRLAR

Mesut KIRICI

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2010, 43 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

: Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

: Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Bu çalışmamızda, matris ve matris çarpımlarının Singüler değerleri, matrislerin Singüler değerleri için tahminler ve matrislerin Singüler değerleri için alt sınır belirlemeyi amaç edinen Gersgorin, Ostrowski, Brauer ve Gudkov tipi özel yöntemlerin Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel tipi matrislerde E. E. Tryteskinov $g = 1/2$ ve $h = 1$ özel durumu için en küçük singüler değerlerlerinde alt sınır bulma yöntemleri uygulanmıştır. Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel tipi matrislerde $g = 1/2$, $h = 1$ ve $n = 3$ özel durumu için en yaklaşık sonucu veren yöntem tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cauchy-Hankel Matris, Cauchy-Toeplitz Matris, Singüler Değer, En Küçük Singüler Değer İçin Alt Sınır

ABSTRACT

THE POST GRADUATE THESIS

THE LOWER BOUND FOR SMALLEST SINGULAR VALUES OF TOEPLITZ AND HANKEL MATRICES

Mesut KIRICI

Selçuk Üniversity Graduate School of Natural and Aplied Science

Department of Mathematics

Adviser: Assistant Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2010, 43 Page

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

: Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

: Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

In this study, matrix and matrices multiplication's Singular values, the guesses for the Singular values of matrices and the special methods of Gersgorin, Ostrowski,Brauer and Gudkow which aimed to determine the lower bounds for singular values of matrices are applied on Couchy-Toeplitz and Couchy-Hankel matrices in the E. E. Tryteskinov's $g = 1/2$ and $h = 1$ special condition. the method which gave the closest result for $g = 1/2$, $h = 1$ and $n = 3$ special condition on Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel matrices was determined.

Key words: Cauchy-Hankel Matrix, Cauchy-Toeplitz Matrix, Singular Value, Lower Bound For the Smallest Singular Value.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur. Bu çalışmamızda matrislerin Singüler değerleri için alt sınır belirlemeyi amaç edinen Gersgorin, Ostrowski, Brauer ve Gudkov tipi özel yöntemlerin Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrisleri üzerinde uygulamaların çalışması yapılmıştır.

Bu amaçla öncelikli olarak, Singüler değerin tanımı, Toeplitz, Hankel, Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerin tanımı ve özellikleri, matrislerin en küçük singüler değerleri için alt sınır bulma yöntemleri olan Gersgorin, Ostrowski, Brauer ve Gudkov özel metodların çıkarımları verilmiştir.

Son olarak ise Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel tipi özel E. E. Trytyshnikov $g = 1/2$ ve $h = 1$ özel durumu için n=3 şartında Gersgorin, Ostrowski, Brauer ve Gudkov en küçük singüler alt değer bulma özel metodlarının uygulaması yapılmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN' e teşekkürü borç bilirim.

Mesut KIRICI
KONYA, 2010

1. GİRİŞ

Günümüzde elemanter matris cebiri, matematik biliminin yanında elektrik ve bilgisayar mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde kullanılan matematiksel bilginin ayrılmaz parçası haline gelmiştir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında matris kavramını kullanmıştır. Yine, İngiliz matematikçi Cayley, 1858 yılında Matris Cebirinin modern esaslarını kurmuştur. Daha sonraları ise Alman matematikçi Frobenius, matrislerle ilgili yepyeni kavramlar ve teoremler üzerinde durmuşlardır.

Tanım 1. 1. $m,n \in Z^+$ ve $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ olmak üzere (i,j) ikililerin cümlesi M olsun. F herhangi bir cisim ve

$$f : M \to F$$
$$(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$$

$a_{ij} \in F$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde düzenlenen tabloya *matris* adı verilir.

Bir matrisi oluşturan değerlere matrisin elemanları denir. Burada m matrisin satır (yatay) sayısını n de matrisin sütun (dikey) sayısını belirtmektedir. Genel olarak bir matrisin gösterimi $A=\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şekliyle ifade edilir. i ve j indisleri matris elemanının konumunu gösterir. Örneğin; $a_{ij} = a_{23}$ elemanı matrisin 2. satır ve 3. sütunundaki elemanını göstermektedir.

Eğer matrisin satır sayısı sütun sayısına eşitse, yani $m = n$ ise bu matrise kare matris adı verilir.

A matrisinin kare matris olması durumunda $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elemanları esas köşegen üzerinde bulunurlar.

Tanım 1. 2

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ 0 & . & \lambda_3 & 0 \\ 0 & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tipindeki $n \times n$ matrisine *köşegen matris* denir ve $A = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ile gösterilir.

Tanım 1. 3. Esas köşegeni üzerinde elemanları 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan köşegen matrise *birim matris* denir ve I_n veya I şekliyle gösterilir.

Tanım 1.4. $A = \left[a_{ij} \right]_{nxn}$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $A.B = B.A = I$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde B matrisi var ise, B' ye A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1. 5. $A = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesiyle oluşan ve A^T ile gösterilen matrise A matrisinin *transpozesi* denir. $A^T = \left[a_{ji} \right]_{nxm}$ şekliyle gösterilir.

Tanım 1.6. *A, n*-kare reel matris olmak üzere $A^T = A$ ise A matrisine *simetrik matris* (her *i, j* için $a_{ij} = a_{ji}$), eğer $A^T = -A$ ise A matrisine *ters simetrik matris* denir. (her *i, j* için $a_{ij} = -a_{ji}$)

Tanım 1.7. . *A, n*-kare kompleks matris olsun. $\bar{A}$, A matrisinin elemanlarının kompleks eşleniğini göstermek üzere $A^H = (\bar{A})^T = A$ ise A matrisine *hermityen matris* denir.

Tanım 1. 8. T : V → V lineer dönüşümü verilsin. x ∈ V , olan sıfırdan farklı bir x vektörü için T(x) = λ.x eşitliğini sağlayan bir λ sayısı varsa, λ sayısına T dönüşümünün *özdeğeri***,** x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir.

Tanım 1.9. $m \times n$ tipindeki herhangi bir A matrisinin kendisi ile eşlenik transpozunun çarpımının öz değerinin kare köküne A matrisinin *singüler değeri* denir.

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin singüler değerlerini bulmaya çalışalım.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

olur ki buradan;

$$A.A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 9 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$$

o halde son elde edilen matrisin öz değerini bulmaya çalışalım,

$$\det(\lambda I - A.A^T) = \begin{bmatrix} \lambda - 35 & -9 \\ -9 & \lambda - 21 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 35).(\lambda - 21) - 81$$

$$= \lambda^2 - 56\lambda + 654$$

buradan devam edecek olursak,

$$\lambda^2 - 56\lambda + 654 = 0$$

denkleminin köklerini,

$$\lambda_1 = 28 + \sqrt{130} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 28 - \sqrt{130}$$

olarak buluruz.

O halde A matrisinin singüler değerlerini;

$s_1 = \sqrt{28 + \sqrt{130}}$ ve $s_2 = \sqrt{28 - \sqrt{130}}$ olarak elde etmiş oluruz.

Tanım 1. 10. V **,** F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Buna göre; $I : V \times V \to F$ fonksiyonu;

i) $\forall x \in V$ için $(x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\forall a \in F, \forall x, y \in V$ için $(ax, y) = a(x, y)$,

$iii) \forall a \in F, \forall x, y \in V \ (x, y) = (y, x), (x, ay) = \bar{a}(x, y),$ ($\bar{a}$, a ' nın eşleniği)

$iiii) \forall x, y, z \in V$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım fonksiyonu* denir.

Tanım 1. 11. Bir vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlanmışsa bu uzaya *iç çarpım uzayı* denir. Ayrıca herhangi bir v vektörü için uzunluk (veya norm) $\|v\|$ olarak gösterilir.

Eğer $x, y \in \mathbb{R}^n$ ise bu halde $(1 \le i \le n)$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olarak alabiliriz. Bu durumda x ve y vektörlerinin iç çarpımı

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır.

VEKTÖR VE MATRİS NORMLARI

1. 2.1 Normlar

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu ile sayıların büyüklükleri dizilerin yakınsaklığı, fonksiyonların sürekliliği, limitleri ve verilen bir reel sayı için bu sayıya en yakın asal ve tamsayıyı bulma gibi yaklaşım problemleri çözülebilir. Aynı şeyler bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan norm için de geçerlidir. V reel vektör uzayı olmak üzere bu uzayda tanımlanan bir norm ile vektör normlarını karşılaştırabiliriz. Vektör dizilerinin yakınsaklığı irdelenebilir, dönüşümlerin sürekliliği ve limitleri çalışılabilir. Ayrıca, normlar singüler değer ayrışımında $Ax = b$ probleminin analizinde önemli rol oynar. Bu bölümde öncelikle vektör normları üzerinde daha sonra da matris normları üzerinde duracağız.

Genel olarak norm, $\|.\|$ sembolü ile gösterilmektedir.

Tanım 1. 12. F reel ya da kompleks sayılar cismi ve V, F cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere;

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad v \to \|v\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) Her $v \in V$ için,

a) $v \neq 0$ ise $\|v\| > 0$ dır

b) v=0 olması için gerek ve şart $\|v\| = 0$ olmasıdır,

ii) $a \in F$ ve $v \in V$ için, $\|av\| = |a|\|v\|$ dir,

iii) $u, v \in V$ için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ dir

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne, *vektör normu* denir.

Herhangi bir x vektörünün pozitif bir sayıya dönüştürülmesi işlemine *norm* denir.

1.2. 2 Matris Normları

Tanım 1.13. F reel yada kompleks sayılar cismi ve $M_n(F)$; bileşenleri F cisminin elemanları olan n-kare matrisler kümesi olmak üzere;

$$\|.\| : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$A \to \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A \in M_n(F)$ için,

a) $A \neq 0$ ise $\|A\|$>0 dır.

b) $\|A\|$=0 olması için gerek ve yeter şart A=0 olmasıdır,

ii) $a \in F$ ve $A \in M_n(F) için, \|aA\| = |a|\|A\|$ dır,

iii) $A, B \in M_n(F)$ için, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dir,

iv) $A, B \in M_n(F)$ için, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ dir,

aksiyonlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşüme, *matris normu* denir.

2. TOEPLITZ VE HANKEL MATRİSLERİ

Tanım 2. 1. $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

kuadratik formuna *Hankel formu* denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve

$$H_{n-1} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$$

olarak gösterilir.

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & . & . & . & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & . & . & . & h_{n-1} & h_{n+1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ h_n & h_{n-1} & . & . & . & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & h_{n+1} & . & . & . & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan görüldüğü gibi Hankel matrisleri simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Hankel matrisi de

$$H_{\infty} = (h_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2. 2. $n \geq 1$ ve $t_{i,j}$ ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j}\, x_i \overline{x}_j$$

kuadratik formuna *Toeplitz formu* denir. Bu forma tekabül eden

$$T_{n-1} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$$

biçimindeki matrise *Toeplitz matrisi* denir.

Bir Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & . & . & . & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & . & . & . & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ t_n & t_{n+1} & . & . & . & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & . & . & . & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan görüldüğü üzere bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Dolayısıyla bir Toeplitz matrisini, matrisin ilk satır vektörü ile ilk sütun vektörü temsil eder diyebiliriz.

Tanım 2. 3. *g, h* herhangi sayılar ve g/h $\notin Z^+$ olmak üzere;

$$T_n = \left[\frac{1}{g + ih - jh} \right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisine *Cauchy-Toeplitz matrisi* denir.

Bu matris hem Cauchy hem Toeplitz matrisidir.

Tanım 2. 4. g, h herhangi sayılar ve g/h$\notin Z^+$

$$H_n = \left[\frac{1}{g - ih - jh} \right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisine *Cauchy-Hankel matrisi* denir. Burada H_n matrisi, hem Cauchy hem de Hankel matrisidir.

3. MATRİS ÇARPIMLARININ SİNGÜLER DEĞERLERİ

$\mathbb{C}^{n\times m}$, kompleks matrislerin uzayı olsun. $H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ hermityen matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(H)\geq\ldots\geq\lambda_n(H)$ ve $C\in\mathbb{C}^{n\times m}$ nin singüler değerleri $\sigma_1(C)\geq\sigma_2(C)\geq\ldots\geq\sigma_n(C)$ olmak üzere $\sigma_i(C)=\lambda_i^{1/2}(CC^*)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ dir. $C\in\mathbb{C}^{p\times m}$ ve $q=\max\{p,m\}<n$ olmak üzere, $\sigma_{q+1}(C)=\ldots=\sigma_n(C)=0'$ dır. $1\leq i_1<\ldots<i_2\leq n$ olacak şekilde $i_1,\ldots,i_n$ tamsayılarını alalım ve aşağıdaki Lemmaları verelim.

Lemma 3.1: $W_1,\ldots,W_k$, $V_1,\ldots,V_k$ kümeleri $boyV_t\geq n-i_t+1$, $boyW_{i_t}\geq i_t$, $1\leq i_1<\ldots i_k\leq n$ ve $V_1\supset\ldots\supset V_k$ olmak üzere $\mathbb{C}^n$ ' nin alt uzayı olsun. Bu takdirde $\{x_1,\ldots,x_k\}$ bir ortonormal baza sahip $W\subset\mathbb{C}^n$ bir alt uzay ve $x_t\in W_t$ ve $z_t\in V_t$, $t=1,\ldots,k$ olmak üzere diğer ortonormal bazı $\{z_1,\ldots,z_k\}$ dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

Lemma 3.2: $G,H\in\mathbb{C}^{n\times n}$, pozitif yarı tanımlı hermityen matrisler ve $1\leq i_1<\ldots i_k\leq n$ olsun. Buradan

$$\prod_{t=1}^{k}\lambda_i(GH)\leq\prod_{t=1}^{k}\lambda_i(G)\lambda_i(H)$$

ve

$$\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(GH)\geq\prod_{i=1}^{k}\lambda_{i_t}(G)\lambda_{n-t+1}(H)$$

olup $k=n$ için eşitlik vardır.

$A\in\mathbb{C}^{p\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times m}$ olsun. Bu takdirde

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(AB)=\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}^{1/2}(ABB^*A^*)$$

$$= \left(\prod_{t=1}^{k} \lambda_{i_t}(A^* ABB^*) \right)^{1/2}$$

$$\geq \left(\prod_{t=1}^{k} \left(\lambda_{i_t}(AA^*) \lambda_{n-t+1}(BB^*) \right) \right)^{1/2}$$

$$= \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A) \sigma_{n-t+1}(B)$$

dir. Buradan,

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(AB) \geq \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A).\sigma_{n-t+1}(B)$$

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A) \sigma_{n-t+1}(B) \tag{3.1}$$

elde edilir. **[Wang ve Xi, 1997]**

Lemma 3.3: $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ **ve** $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ olsun. Bu takdirde,

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_t(AB) \geq \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A) \sigma_{n-i_t+1}(B) \tag{3.2}$$

ve

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_t(AB) \geq \sum_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}(A) \sigma_{n-i_t+1}(B) \tag{3.3}$$

dir.

Sonuç 3.1: $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ ve $0 < r \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}{}^r(AB) \geq \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}^r(A) \sigma^r{}_{n-t+1}(B)$$

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}{}^r(AB) \geq \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}^r(A) \sigma^r{}_{n-i_t+1}(B)$$

$$\prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}{}^r(AB) \geq \prod_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}^r(A) \sigma_{\ n-i_t+1}(B) \tag{3.4}$$

dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat:. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere A matrisinin özdeğerleri, $\lambda_1(AA^*),...,\lambda_n(AA^*)$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleri $u_1,u_2,...,u_n$ olsun. Yani,

$$AA^*u_i = \lambda_i(AA^*)u_i = \sigma_i{}^2(A)u_i \ , \ i = 1,2,...,n$$

dir. $R_t \in \mathbb{C}^n$ ile R_t $\{u_1,u_2,...u_{i_t}\}$ vektörleri tarafından gerilen bir alt uzay ve S_t de

$$\{u_{i_t},u_{i_t+1},...,u_n\},\ t = 1,2,...,k$$

vektörleri tarafından gerilen alt uzayı verilsin. $x_1,x_2,...x_k \in \mathbb{C}^n$ için

$$X_k = (x_1,x_2,...,x_k) \in C^{n\times k},\ I_k = diag(1,1,...,1) \in C^{k\times k}$$

olur.

Lemma 3.4: $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ olsun ve $y_t \in R_t, z_t \in S_t, t = 1,2,...,k$ olmak üzere; $Y_k = (y_1,y_2,...,y_k)$, $Z_k = (z_1,z_2,...,z_k) \in \mathbb{C}^{n\times k}$ olsun. $y_t \in R_t, z_t \in S_t, t = 1,2,...,k$ olmak üzere;

i) Eğer $Y_k^*Y_k = I_k$ ise buradan $\sigma_t(Y_k^*A) \geq \sigma_{i_t}(A)$, $t = 1,2,...,k$ ' dır,

ii) Eğer $Z_k^*Z_k = I_k$ ise buradan $\sigma_t(Z_k^*A) \geq \sigma_{i_t}(A)$, $t = 1,2,...,k$ ' dır. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: Sabit bir t $(1 \leq t \leq k)$ için R_t yi geren $\{y_1,y_2,...y_t,v_{t+1},...,v_{i_t}\}^*A$ ve $(u_1,u_2,...,u_{i_t})^*A$' nın aynı singüler değere sahip olduğunu görmek kolaydır. $\{y_1,y_2,...y_t,v_{t+1},...,v_{i_t}\}$ R_t yi geren ortonormal bir baz olacak şekilde $v_{t+1},...,v_{i_t} \in R_t$ seçelim. Bu takdirde $BB^* \in \mathbb{C}^{q\times q}$ hermityen matrisinin özdeğerleri ve $CC^* \in \mathbb{C}^{p\times p}$ alt matrisinden

$\sigma_i(B) \geq \sigma_i(C)$ ve $\sigma_{q-i+1}(B) \leq \sigma_{p-i+1}(C)$ $(i = 1,2,...,p)$ olup

$$\begin{aligned}\sigma_t(Y_k^*A) &\geq \sigma_t\left((y_1,y_2,...,y_t)^*A\right)\\ &\geq \sigma_{i_t}\left((y_1,y_2,...y_t,v_{t+1},...,v_{i_t})^*A\right)\\ &= \sigma_{i_t}\left((u_1,u_2,...u_t)^*A\right)\\ &= \sigma_{i_t}(A)\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\sigma_t(Z_k^*A) \leq \sigma_1\left((z_t,...,y_k)^*A\right)$$

$$\leq \sigma_1\left((u_{i_t},...u_n)^* A\right)$$

$$= \sigma_{i_t}(A)$$

dir.

Teorem 3.1: $A \in C^{n\times m}$, ve $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ ve her bir değişken $[0,\infty]$ aralığında artan olacak şekilde $\omega(\alpha_1,...,\alpha_k)$, k değişkenin herhangi bir fonksiyonu olsun.

Bu taktirde

$$\omega\left(\sigma_{i_1}(A),...\sigma_{i_k}\right) = \max_{\substack{\dim W_t = i_t \\ t=1,...,k}} \min_{\substack{x_t \in W_t \\ X_k^* X_k = I_k}} \omega\left(\sigma_1(X_k^* A),...,,...,\sigma_k(X_k^*)\right) \tag{3.5}$$

dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: $t = 1,2,...,k$ boy $W_t = i_t$ ile C^n in herhangi bir alt uzayı W_t olsun.

boy $S_t = n - i_t + 1, t = 1,2,...,k$ ve $S_1 \supset S_2 \supset ... \supset S_k$' dır. C^n' de $x_t \in W_t$ ve $z_t \in S_t$, $t = 1,2,...,k$ olmak üzere $\{x_1, x_2,..., x_k\}$ ve $\{z_1, z_2,..., z_k\}$ ortonormal tabanlara sahip bir C^n alt uzayı vardır. Lemma 3.4 (ii) ve ω artan bir fonksiyon olmadığından

$$\omega\left(\sigma_1(X_k^* A),...,,...,\sigma_k(X_k^*)\right) = \omega\left(\sigma_1(Z_k^* A),...,,...,\sigma_k(Z_k^*)\right)$$

$$\leq \omega(\sigma_{i_1}(A),...,\sigma_{i_k}(A))$$

olur. Dolayısıyla (3.5)' in sol tarafının sağ taraftan daha küçük olmadığı görülür. Diğer taraftan $W_t = R_t$ $(t = 1,2,...,k)$ ve $\{y_1, y_2,..., y_k\}$, $y_t \in R_t$ olacak şekilde herhangi bir ortonormal bir küme olsun. Lemma 3.4 (i)' den

$$\omega\left(\sigma_1(Y_k^* A),...,\sigma_k(Y_k^* A)\right) \geq \omega\left(\sigma_{i_1}(A),...,\sigma_{i_k}(A)\right)$$

olur. Buradan (3.5)' in sol tarafının sağ taraftan daha büyük olmadığı görülür.

Teorem 3. 2. $A, B \in C^{nxn}$, $1 \leq i, < .... < i_k \leq n$ ve $0 < r \in R$ olmak üzere

$$\sum_{t=1}^{k} \sigma_{i_t}^r(AB) \geq \sum_{t=1}^{k} \sigma_{n-t+1}^r(A)\sigma_{n-t+1}^r(B) \tag{3. 6}$$

dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: $\omega(\alpha_1,....,\alpha_k)=\sum_{t=1}^{k}\alpha_t^r$ ve $W_t=R_t$' yi alalım. Teorem 3. 1, Özellik 3. 1 ve Lemma 3. 4 (i)' yi kullanırsak

$$\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(AB)\geq \min_{\substack{y_t\in R\\ Y_k^*Y_k=I_k}}\sum_{t=1}^{k}\sigma_t^r(Y_k*AB)$$

$$\geq \min_{\substack{y_t\in R\\ Y_k^*Y_k=I_k}}\sum_{t=1}^{k}\sigma_t^r(Y_k*A)\sigma_{n-t+1}^r(B)$$

$$\geq \sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A)\sigma_{n-t+1}^r(B)$$

elde edilir .

Sonuç 3.2. $G,H\in C^{nxn}$, pozitif yarı tanımlı hermityen matrisler ve $1\leq i_1<.....<i_k\leq n$ ve $0<r\in\mathbb{R}$ ise

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}^r(GH)\geq\sum_{t=1}^{r}\lambda_{i_t}^r(G)\lambda_{n-t+1}^r(H) \qquad (3.\ 7)$$

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}^r(GH)\geq\sum_{t=1}^{r}\lambda_{i_t}^r(G)\lambda_{n-t_t+1}^r(H)$$

dır. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: A,B' nin yer değiştirmesi ve r üzerinde aşağıdaki sonuçlar $G^{1/2},H^{1/2}$ ve $2r$ ile (3. 4) ve (3. 6)' da verildi. (3. 7)' den, $A,B\in C^{nxn}$ için Teorem 3. 2 sağlanır.

Teorem 3. 3. $m\geq 3,\ 1\leq i_1<....<i_k\leq n$ ve $A_1,...,A_m\in C^{nxn}$ olsun. Bu takdirde,

i) $\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1...A_m)\leq\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1)\sigma_t^r(A_2)...\sigma_t^r(A_m)$,

ii) $\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1...A_m)\leq\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1)\sigma_t^r(A_2)....\sigma_t^r(A_m)$,

iii) $\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1...A_m)\geq\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1)\sigma_{n-t+1}^r(A_2)...\sigma_{n-t+1}^r(A_m)$,

iv) $\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1...A_m)\geq\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^r(A_1)\sigma_{n-t_t+1}^r(A_2)..\sigma_{n-t+1}^r(A_m)$,

dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: (i) ve (ii) aşikârdır. (iii) ve (iv), Sonuç 3. 1' den m üzerinden tümevarımla,

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\le\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_{m-1})\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

$$=\left(\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\right)\prod_{t=1}^{k}\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

$$\ge\left(\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1)\sigma_{n-t+1}^{r}(A_2)...\sigma_{n-t+1}^{r}(A_{m-1})\right).\prod_{t=1}^{k}\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

$$=\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1)\sigma_{n-t+1}^{r}(A_2)...\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m),$$

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\ge\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1A_2)\sigma_{n-t_t+1}^{r}(A_3)..\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\ge\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1)\sigma_{n-t_t+1}^{r}(A_2)..\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

dir.

Not: (3. 6) ve (3. 7)' den $m\ge 3$ için (iii) ve (iv) doğal konjektürü sağlanır.

Örnek 3. 1.

$$A_1=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad A_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad A_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

ve $k=n$, $r=1$ alalım. Buradan

$$\sum_{t=1}^{k}\sigma_t(A_1A_2A_3)\not\ge\sum_{t=1}^{k}\sigma_t(A_1)\sigma_{n-t+1}(A_2)\sigma_{n-t+1}(A_3),$$

$$(9\not\ge 13)$$

dır.

Sonuç 3. 3. $A_1A_2....A_m\in C^{nxn}, m\ge 3, 1\le i_t<....<i_k\le n$, $0<r\in\mathbb{R}$ olsun.

Buradan;

i) $$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\ge\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1)\sigma_{n-t_t+1}^{r}(A_2)\sigma_{n}^{r}...\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m),$$

ii) $$\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}^{r}(A_1...A_m)\ge\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_kt}^{r}(A_1)\sigma_{n-ti_t+1}^{r}(A_2)\sigma_{n}^{r}..\sigma_{n-t+1}^{r}(A_m)$$

dir. **[Wang ve Xi, 1997]**

İspat: (3. 6) ve (3. 4)' ü kullanarak herhangi $A, B \in C^{nxn}$ için

$$\sigma_i^r(AB) \geq \sigma_n^r(A)\sigma_n^r(B)$$

dir.

4. MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN TAHMİNLER

Teorem 4. 1. $A=(a_{ij})$, n. mertebeden bir kompleks matris olsun. $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{nxn}$ matrisi, A ' dan büyük olsun. Yani, $\forall i,j$ için $b_{ij}\geq\lfloor a_{ij}\rfloor$ olsun. Buradan A ' nın bütün öz değerleri;

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in C:|z-a_{ii}|\leq\rho(B)-b_{ii}\} \qquad (4.\ 1)$$

nin içindedir.

Singüler değerlerin tahmini, pratikte önemlidir. A' nın singüler değerleri için tahminler elde etmek maksadıyla $A^{*}A$ matrisi yukardaki teoremde kullanılır. Bu yaklaşım bizi aşağıdaki teoreme götürür. **[Li, 1999]**

Teorem 4. 2. $A=(a_{ij})\in C^{nxn}$ olsun.

$$r_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, c_i=\sum\nolimits_{j\neq i}|a_{ji}|$$

$$u_{+}=\max(0,u), s_i=\max(r_i,c_i) \text{ ve } a_i=|a_{ii}|, i=1,2.....n \qquad (4.\ 2)$$

olmak üzere A' nın bütün singüler değerleri,

$$\bigcup B_i, B_i=[(a_i-s_i)_{+},a_i+s_i]\subseteq\mathbb{R} \qquad (4.\ 3)$$

içindedir. **[Li, 1999]**

Teorem 4. 3. $A=(a_{ij})\in C^{nxn}$ ve $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{nxn}\geq 0$ olacak şekilde negatif olmayan matris olsun.

$$b_{ij}\geq\max\{|a_{ij}|,|a_{ji}|\},(\forall i\neq j)$$

ise

A' nın bütün singüler değerleri;

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z:|z-a_i|\le \rho(B)-b_{ii}\}\cap \mathbb{R}^{+} \qquad (4.\ 4)$$

birleşimi içindedir. Burada; B' nin spektral yarıçapı ve $(i=1,2....,n)$ için $a_i=|a_{ii}|$ ve $\mathbb{R}^{+}$, pozitif reel sayılardır. **[Li, 1999]**

İspat: σ, A' nın bir Singüler değeri olmak üzere

$$\sigma x = A^{*} y, \sigma y = Ax \qquad (4.\ 5)$$

olacak şekilde $x=(x_1,x_2,.....,x_n)^T$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ vektörleri vardır.

Farz edelim ki; $B=(b_{ij})\ge 0$ ve Teorem 4. 3' ü sağlasın. İlk olarak $B>0$ ' ı alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Lemma 4. 1. $c,\eta\in\mathbb{C},|\eta|\le 1$ ve $\sigma\in\mathbb{R}^{+}$ olsun. Buradan;

$$\big|\sigma-|c|\big|\le \max\{|\sigma-\eta c|,|\eta\sigma-c|\} \qquad (4.\ 6)$$

dır. **[Li, 1999]**

İspat: i) $\sigma\ge|c|$ ise;

$$\big|\sigma-|c|\big|\le\big|\eta\big|\sigma-|c|\big|\le|\eta\sigma-c|$$

ii) $\sigma\le|c|$ ise;

$$\big|\sigma-|c|\big|\le\big|\sigma-|\eta|c|\big|\le|\eta\sigma-c|$$

olup ispat tamamdır.

Teorem 4. 4. $A=(a_{ij})\in C^{nxn}$ olsun. A' nın bütün Singüler değerleri,

$$\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n}\{z:|z-a_i|.|z-a_j|\le s_i,s_j\}\cap R^+ \qquad (4.\ 7)$$

içerisindedir. **[Li, 1999]**

İspat: $u=(u_1,u_2,.....,u_n)^T, u>0$ olmak üzere

$$u_1>0,(\forall i) \text{ ve } Bu=\sigma(B)u$$

şartını sağlayan bir *u* vektörü vardır.

$$\hat{x}=\frac{x_i}{u_i},\hat{y}=\frac{y_i}{u_i}$$

olsun. (4. 5)' den;

$$\sigma\hat{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}\hat{y}_j\frac{u_j}{u_i},\sigma\hat{y}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j\frac{u_j}{u_i},i=1,2...n$$

olup

$$\left|\sigma\hat{x}_i-\bar{a}_{ji}\hat{y}_j\right|\le\sum_{j\neq 1}\left|\bar{a}_{ji}\right|\left|\hat{y}_i\right|\frac{u_j}{u_i} \qquad (4.\ 8)$$

$$\left|\sigma\hat{y}_i-\bar{a}_{ii}\hat{x}_i\right|\le\sum_{j\neq 1}\left|\bar{a}_{ij}\right|\left|\hat{x}_j\right|\frac{u_j}{u_i} \qquad (4.\ 9)$$

dır. $z_i=\max\{|\hat{x}_i|,|\hat{y}_i|\}$ dır. $z_p=\max\{z_j:1\le j\le n\}$ ise $z_p\ge 0$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $z_p=|\hat{y}_p|\ge|\hat{x}_p|$ olsun. ($z_p=|\hat{y}_p|\le|\hat{x}_p|$ olduğu zaman benzer argümanlar kullanılır.) $\eta=\frac{\hat{x}_p}{\hat{y}_p}$ alalım. (4.8) ve (4.9)` da eşitsizlikler;

$$\left|\sigma\eta-\bar{a}_{pp}\right|z_p\le\sum_{j\neq p}\left|\bar{a}_{jp}\right|\left|\hat{y}_j\right|\frac{u_j}{u_p}$$

$$\left|\sigma-\bar{a}_{pp}\eta\right|z_p\le\sum_{j\neq p}\left|\bar{a}_{pj}\right|\left|\hat{x}_j\right|\frac{u_j}{u_p}$$

olur. Buradan;

$$\left|\sigma\eta - \overline{a}_{pp}\right| z_p \le \sum_{j\neq p}\left|\overline{a}_{jp}\right|\frac{u_j}{u_p} \tag{4. 10}$$

$$\left|\sigma - \overline{a}_{pp}\eta\right| z_p \le \sum_{j\neq p}\left|\overline{a}_{pj}\right|\frac{u_j}{u_p} \tag{4. 11}$$

olur. $\left|a_{jp}\right| = b_{pj}$ olsun. $Bu = \sigma(B)u$ ' nın $p.$ bileşeni;

$$\sum_{j\neq p}\left|a_{jp}\right| u_j \le \sum_{j\neq p} b_{pj}u_j = \rho(B)u_p - b_{pp}u_p \tag{4. 12}$$

dir. (4. 10) ve (4. 12) eşitsizlikleri gereği;

$$\left|\sigma\eta - \hat{a}_{pp}\right| \le \rho(B) - b_{pp} \tag{4. 13}$$

elde edilir. Benzer şekilde; $\left|a_{pj}\right| \le b_{pj}$ ve (4. 11)' den

$$\left|\sigma - a_{pp}\eta\right| \le \rho(B) - b_{pp} \tag{4. 14}$$

elde edilir. $\left|\eta\right| \le 1$ idi. (4. 6), (4. 13) ve (4. 14) ile

$$\left|\sigma - a_p\right| \le \rho(B) - b_{pp} \tag{4. 15}$$

olur. Buradan σ ' nın (4. 4)' te olduğu görülür.

Son olarak $B \geq 0$ ve benzer durumları sağlasın. $\varepsilon \geq 0$ keyfi sayısı için $B(\varepsilon) = (b_{ij} + \varepsilon)$ pozitif ve diğer kabulleri sağlasın. $B(\varepsilon)$' a yukardaki durumları uygularsak;

$$\rho(B(\varepsilon)) - (b_{ii} + \varepsilon) \to \rho(B) - b_{ii} (\varepsilon \to 0)$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 5. Teorem 4. 3' teki kabulleri alalım. $d_+ = \max\{0, d\}$, $d \in R$ olmak üzere

$$l_i(B) = \rho(B) - b_{ii}$$

ve

$$V_i = [(a_i - l_i(B))_+, a_i + l_i(B)] \qquad (4.\ 16)$$

olsun. buradan,

a) Bütün Singüler değerler $V_i : \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ dedir.

b) Eğer, V aralığının n bileşeni varsa ve *n-k* intervallerinden bağımsız ise, V_i' de A' nın Singüler değeri vardır. **[Li, 1999]**

İspat: (a)' nın ispatı, Teorem 4. 3' ten görülür. (b)' nin ispatı aşağıdaki gözleme dayanır.

(b. 1) $\varepsilon \in [0,1]$, $D = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, $A(\varepsilon) = D + \varepsilon C$ ve $C=A-D$ olmak üzere $G = diag(b_{11}, b_{22}, ..., b_{nn})$, $B(\varepsilon) = G + \varepsilon F$ olsun, $F=B-G$ olmak üzere;

$$A(0) = D, B(0) = G, A(1) = A, B(1) = B$$

dir. $B(\varepsilon), A(\varepsilon)$' a göre daha geniş bir spektral yarıçapa sahiptir. (a) dan $A(\varepsilon)$' nun bütün Singüler değerleri,

$$V_i(\varepsilon) = [(a_i - l_i(B(\varepsilon)))_+ a_i + l_i(B(\varepsilon))] : \bigcup_{i=1}^{n} V_i(\varepsilon)$$

aralığındadır. $s,t \in [0,1]$, $s \le t$ için;

$$\rho(B(s)) \le \rho(B(t))$$

dır. $B(t), B(s)$ ' ye göre daha geniş bir spektral yarıçapa sahip olduğundan

$$l_i(B(s)) \le l_i(B(t)) \text{ ve } V_i(s) \subseteq V_i(t) \subseteq V_i(1) \equiv V_i$$

dır.

(b. 2) A' nın Singüler değerleri sürekli fonksiyonlardır. $A(0)$' ın Singüler değerleri, örneğin

$$a_i (i = 1,2,...,n), a_i \in V_i (i = 1,2,...,n)$$

sağlanır.

(b. 3) ε, 0 ' dan 1 ' e değiştiği zaman, sürekli olarak, $A(\varepsilon)$ ' un $\sigma_i(\varepsilon)$ Singüler değeri, a_{ji} den $\sigma(1)$' e değişir.

Teorem 4.4. ün farklı bir ispatı: σ, A' nın bir Singüler değeri ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, (4. 7)' yi sağlasın. $\omega_i = \max\{|x_i|, |y_i|\}$ ve $\omega_p = \max_{1 \le i \le n} \omega_i$ ise $\omega_p \ne 0$ olduğu açıktır $\omega_q = \max_{i \ne p} \omega_i$ olsun. (4.5)' de p . denklem;

$$\left|\sigma x_p - \overline{a}_{pp} y_p\right| \le \sum_{j \ne p} \left|\overline{a}_{jp}\right| \left|y_j\right| \tag{4.17}$$

$$\left|\sigma y_p - a_{pp} x_p\right| \le \sum_{j \ne p} \left|a_{jp}\right| \left|x_j\right| \tag{4.18}$$

olur. Genelliği bozmadan, $\omega_p = |y_p| \ge |x_p|$ olsun . Buradan; $y_p \ne 0$ dır.

$\eta = \dfrac{x_p}{y_p}$ yazalım. (4.17) ve (4.18) eşitsizliklerinden;

$$\left|\sigma\eta - \overline{a}_{pp}\right| \omega_p \le \omega_q \sum_{j \ne p} \left|\overline{a}_{jp}\right| \le \omega_q s_p$$

$$\left|\sigma - a_{pp}\eta\right|\omega_p \le \omega_q \sum_{j\neq p}\left|a_{pj}\right| \le \omega_q s_p$$

olur. Lemma 4.1' i uygularsak;

$$\left|\sigma - a_p\right| \le s_p \frac{\omega_q}{\omega_p} \tag{4.19}$$

elde edilir. Eğer $\omega_q = 0$ ise $\sigma = a_p$ ve σ, (4.6)' de verilen küme içindedir. $\omega_q \neq 0$ olsun. Benzer argümanlarla (4.19)' da

$$\left|\sigma - a_q\right| \le s_p \frac{\omega_p}{\omega_q} \tag{4.20}$$

olur. Sonuçta:

$$\left|\sigma - a_p\right|\left|\sigma - a_q\right| \le s_p s_q$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.4 ispat edilmiş olur.

Örnek 4.1.

$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise $\sigma_1(A) = 6.1231$, $\sigma_2 = 2.1231$ olur. $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ negatif olmayan matris ve $\rho(B) = 6.2361$, A matrisinden daha geniş bir spektral yarıçapa sahiptir. Teorem 4.2 uygulanırsa; A' nın bütün singüler değerleri $[0, 6.2361]$ aralığında olur. Diğer taraftan

$$\sigma_{\max}(A) \le 6.2361$$

dir. Bu ise

$$\sigma_{\max}(A) \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty} = 7$$

tahmininden daha iyidir.

Teorem 4.2' yi uygulayarak $B_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ise, bütün singüler değerlerin $[1,3] \cup [5,7]$' de olduğunu biliyoruz. Buradan; $\sigma_{\min} \geq 1$' dir. Bu ise; $\sigma_{\min}(A) \geq \min\left\{a_i - \frac{r_i + c_i}{2}\right\}$ ile aynıdır. Buradan $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $c_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ dir. Şart sayısı için bir üst sınır

$$K = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \leq \frac{\left(\|A\|_1 \|A\|_\infty\right)^{1/2}}{\min\{a_i - (r_i + c_i)/2\}} \tag{4.21}$$

olarak verilir.

Sonuç olarak; A' nın şart sayısı için üst sınır $K(A) \leq 6.2361$ olarak bulunur.

Bu ise; (4.21) ile verilen sınırdan daha iyidir.

Örnek 4.2.

$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise**,** A' nın singüler değerleri 10.2137, 5.9588 ve 2.8590' dır.

$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ negatif olmayan matris ve $p(B) = 10.3649$ olup A' ya göre daha geniş bir spektral yarıçapa sahiptir. Teorem 4.3' ten biliyoruz ki; A' nın bütün singüler değerleri $[0, 10.3649]$ aralığındadır. Buradan Teorem 4.3' ü uygulayarak

$B_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$ matrisi daha geniş bir spektral yarıçapa sahip bir matris ise; $p(B_1) = 12.4605$ (Perron köktür) tir.

Bu durumda A' nın bütün singüler değerleri; $[2.5395, 12.4605]$ aralığındadır. Son olarak 4.5' i

$B_2 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ negatif olmayan matrisine uygularsak $p(B_2) = 11{,}4142$ (Perron kök) olur. Bu durumda bütün singüler değerler

$$[1.5858, 4.4142] \cup [4.5858, 7.4142] \cup [8.5858, 11.4142]$$

aralığındadır. Bu üç aralığın her biri A' nın bir singüler değerini içerir. (4.3)' ü uygulayarak

$$\sigma_{\max}(A) \le 11.4891$$

ve

$$\sigma_{\min}(A) \ge 2$$

elde edilir. Teorem 4.3 ve Teorem 4.5' den $\sigma_{\max}(A) \le 10.3649$ ve $\sigma_{\min}(A) \ge 2.5395$ olur. A' nın şart sayısı için bir üst sınır $K(A) \le 4.0815$ olup, (4.21)' den $K(A) \le 5.7446$ sağlanır. Teorem 4.4' ü uygulayalım. (4.5)' ten;

$$[2.6972, 3.3820] \cup [5.5505, 6.5858] \cup [9.4142, 10.4495]$$

ve

$$K(A) \le 3.8742$$

dir. A' nın şart sayısının daha dar bir alt sınırı elde edilir. Bizim nümerik deneylerimizden; Teorem 4.4' ün Teorem 4.3' ten daha iyi bir sınır verdiği görülür. Fakat bu durumda Kuadratik eşitsizlikleri çözmek için çaba sarf etmek gerekir.

Örnek 4.3.

$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. A' nın en küçük singüler değeri;

$$\sigma_2(A) = \left(\sqrt{5} - 1\right) / 2 \cong 0.6180$$

dir. (4.3) veya (4.4)' ten

$$\sigma_2(A) \ge \min\{a_i - (r_i + c_i)\} / 2 = 0.5$$

elde edilir. Ancak Teorem 4.4' ten $\sigma_2(A)$ için 0' ın alt sınır olduğu açıktır.

Teorem 4.3 ve daha geniş spektral yarıçaplı negatif olmayan matristen;

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

alarak.

$$p(B) = \left[x + y + \sqrt{(x-y)^2 + 4} \right] / 2$$

elde edilir.

$\sigma_2(A)$' nın keyfi bir alt sınırını elde etmek için;

$$a_{11} > p(B) - x \ , \ a_{22} > p(B) - y \tag{4.23}$$

elde edilmelidir. Fakat bu (4.23) ile çelişir; $x > y$ ve $y > x$ olur.

Teorem 4.6. $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$**,** indirgenemez ve $C(A)$, açık olmayan $\Gamma(A)$ çemberinin kümesi γ olsun. Buradan A' nın bütün özdeğerleri,

$$\cup \left\{ z \in C : \prod_{pi} |z - a_{ii}| \le \prod_{pi} r_i \right\}_{\gamma \in C(A)} \tag{4.24}$$

bölgesi içindedir. **[Li, 1999]**

Örnek 4.4.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ indirgenemez bir matris olsun. Teorem 4.2, Teorem 4.3 ve Teorem 4.5' i alalım. A' nın bütün singüler değerleri

$$\left\{ z \ge 0 : |z - 0|^3 \le s_1 s_2 s_3 \right\} = [0, 0.4642] \tag{4.25}$$

kümesi içindedir. Ancak A' nın singüler değerleri, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$' dir ve (4.25), σ_1' i içermez.

5. MATRİSLERİN EN KÜÇÜK SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN ALT SINIRLAR

$A = (a_{ij})$ biçiminde $n \times n$ tipinde kompleks bir matris olsun, $k = 1,...,n$ için

$$P_k(A) = \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

ve

$$Q_k(A) = \sum_{j \neq k} |a_{jk}|$$

şeklinde tanımlayalım.

A ' nın en küçük singüler değerini $\sigma_n(A)$ ile göstereceğiz.

Gersgorin Teoremi kullanılarak ;

$$\sigma_n(A) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\} \qquad (5.1)$$

olduğu gösterilmiştir. [4]

Burada, Gersgorin Teoreminin yerine Ostrowski ([2] , Teorem 6.4.1), Brauer ([2] , Teorem 6.4.7) ve Gudkov ([1]) metotları kullanılarak $\sigma_n(A)$ için yeni sınırlar elde edilmiştir.

Yeni sınırlar daha karmaşık ifadeler içerebilir, ancak genellikle daha büyük, daha iyi sınırlar vermektedir ve karşılıklı olarak karşılaştırılamazlar. Gersgorin Teoremi' nin Singüler olmama göstergesinin optimumluğuna rağmen bunun gibi benzer durumlarda değişimlerin olmasının hiçbir önemi yoktur.

Bu sonuçlar kare matrislerin elemanları için gösterilmiştir, fakat [3]` ün 3. 7 bölümündeki metot ise dikdörtgen matrisler içinde genelleştirilebilir.

Burada Ostrowski ve Brauer Teoremi kadar bilindik olmayan Gudkov` un Singülerlik testini inceleyeceğiz.

Teorem 5. 1. $R_1(A) = P_1(A)$ olsun ve $i = 2,...,n$ için

$$R_i(A) = \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \frac{R_k(A)}{|a_{kk}|} + \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}|$$

tanımlansın. Eğer; $i = 1,...,n$ için $|a_{ii}| > R_i(A)$ ise A Singüler değildir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

5. 2. $\sigma_n(A)$ İçin Ostrowski Tipi Alt Sınırlar

Teorem 5. 2 : A ' nın en küçük Singüler değeri, $\sigma_n(A)$ ise;

$$\sigma_n(A) \geq \min_{1\leq k\leq n}\{\frac{1}{2}(\{4|a_{kk}|^2 + [P_k(A) - Q_k(A)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_k(A) + Q_k(A)])\} \qquad (5.2)$$

şeklinde bir alt sınır elde edilmiştir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat : Öncelikli olarak, [2] deki Teorem 7. 3. 7 kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -\sigma_n(A)I & A \\ A^* & -\sigma_n(A)I \end{bmatrix}$$

singüler olduğu görülür ve buradan;

$$\begin{bmatrix} -\sigma_n(A)I & A \\ A^* & -\sigma_n(A)I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\sigma_n(A)I \\ -\sigma_n(A)I & A^* \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

matrisi de singülerdir.

Ostrowski Teoremi ile matrisin singülerliliğini birleştirerek en az bir i için $(1 \leq i \leq n)$;

$$|a_{ii}|^2 \leq [P_i(A) + \sigma_n(A)][Q_i(A) + \sigma_n(A)] \qquad (5.4)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.2) yardımıyla (5.4) düzenlenirse ;

$$0 \leq \sigma_n{}^2(A) + [P_i(A) + Q_i(A)]\sigma_n(A) + P_i(A).Q_i(A) - |a_{ii}|^2$$

olduğu görülür. (5.2) ile (5.1) sınırları arasında ilişki aşağıdaki gibi doğrudan görülür.

Sonuç 5. 1 : (5.2) sınırı her zaman (5.1) sınırından büyüktür.

Üstelik $P_r(A) \neq Q_r(A)$ olmak üzere A için ;

$$0 \leq \min_{1\leq k\leq n}\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\} = |a_{rr}| - \frac{1}{2}[P_r(A) + Q_r(A)]$$

dır. Bu sınır önceki sınırdan daha iyidir.

5. 3. $\sigma_n(A)$ İçin Brauer Tipi Alt Sınırlar

Önceki bölümde, [2] deki Teorem 6. 4. 7 (Brauer Teoremi) ile Ostrowski Teoremini değiştirirsek ;

$$\sigma_n(A) \geq \min_{\substack{1\leq i,j\leq 2n \\ i\neq j}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\{4|\widetilde{a}_{ii}||\widetilde{a}_{jj}| + [P_i(\widetilde{A}) - P_j(\widetilde{A})]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_i(\widetilde{A}) + P_j(\widetilde{A})] \right) \right\} \qquad (5.5)$$

olmak üzere (5.5) sınırı elde edilebilir.

$$\widetilde{A} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{vmatrix}$$

(5.5) ve (5.2) karşılaştırıldığında, önceki sınırın sağ tarafı en fazla yeni sınırın sağ tarafı kadar büyük olabilir.

Bu nedenle biz, (5.1)' in uygun sınırları arasına (5.5)' yi ilave etmeyeceğiz. Bununla birlikte [3]' deki 3. 7 bölümü ve Ostrowski ve Brauer öz değer bölgesi arasındaki ilişki, en azından (5.1)' den daha büyük ve (5.2) ile kıyaslanamayan "Brauer-Tipi" türü bir sınır belirtir.

Bu fikri doğrulamak için;

$$\alpha_n(A) = \min_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ k\neq j}} \left\{ \frac{1}{2} [\mathrm{Re}\, a_{kk} + \mathrm{Re}\, a_{jj} - \sqrt{(\mathrm{Re}\, a_{kk} - \mathrm{Re}\, a_{jj})^2 + P_k(A + A^*) P_j(A + A^*)}] \right\}$$

ile tanımlı $\sigma_n(A)$ değeri ile A ' yı ilişkilendirmek uygun olacaktır.

Bir lemma ile başlayalım.

Lemma 5. 1 $C = (c_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir hermityen matris olsun. O halde $C - \alpha_n(C)I$ ` nın bütün öz değerleri negatif değildir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat : $C-\alpha_n(C)I$ hermityen olduğunu biliyoruz. Bu yüzden bütün öz değerler reeldir. Öz değerlerin negatif olmadığını göstermek için Brauer teoremini uygulayalım.([2] , 6. 4. 11)

Bunu takiben $C-\alpha_n(C)I$ için yukarda bahsedilen spektral özelik olan bir yeter koşul

$$c_{qq}-\alpha_n(C)\geq 0 \qquad (q=1,...,n) \tag{5.6}$$

ve

$$[c_{ss}-\alpha_n(C)][c_{rr}-\alpha_n(C)]\geq P_s(C)P_r(C) \qquad (s,r=1,...,n;s\neq r) \tag{5.7}$$

elde edilecektir.

$1\leq q\leq n$ olmak üzere $C-\alpha_n(C)I$ ' nın $q.$ köşegen elemanını düşünerek

$$c_{qq}-\alpha_n(C)=\frac{1}{2}[c_{qq}+c_{rr}-\sqrt{(c_{qq}-c_{rr})^2+4P_q(C)P_r(C)}]-\min_{\substack{1\leq k,j\leq n\\ k\neq j}}\left\{\frac{1}{2}\left[c_{kk}+c_{ij}-\sqrt{(c_{kk}-c_{jj})^2+4P_k(C)P_j(C)}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{c_{qq}-c_{rr}+\sqrt{(c_{qq}-c_{rr})^2+4P_q(C)P_r(C)}\right\}\geq\frac{1}{2}(c_{qq}-c_{rr})+\frac{1}{2}\left|c_{qq}-c_{rr}\right|\geq 0$$

elde edilir. (5.7)' yi elde ederken, $a^2-4b\geq 0$ için $f(\lambda)$ reel fonksiyonunun $(-\infty,\frac{a}{2})$ aralığında kesin azalan ve $f(\lambda)=\lambda^2-a\lambda+b$ olduğuna dikkat edelim.

Böylece herhangi bir $\lambda\leq\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b})$ değeri için $f(\lambda)\geq 0$ olur. Bu ifadeye dayanarak (5.7) elde edilir.

Artık, lemma yardımıyla önerilen sınırları elde edebiliriz.

Teorem 5. 3. A ` nın en küçük singüler değeri için

$$\sigma_n(A)\geq\alpha_n(A)$$

sağlanır. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat: [4]' de Teorem (1)' in ispatındaki yol izlenerek sadece $B\equiv A-\alpha_n(A)I$ için $B+B^*$ öz değerlerinin negatif olmadığını göstereceğiz.

$$\alpha_n(A)+\alpha_n(A^*)=\alpha_n(A+A^*)$$

dikkate alınarak;

$$B + B^* = A + A^* - \left[\alpha_n(A) + \alpha_n(A^*)\right]I = A + A^* - \alpha_n(A + A^*)I$$

elde edilir. Kabul edilen spektral özelik Lemma 2. 1' den görülür.

Teorem 2. 2' nin gelecek sonucu $\sigma_n(A)$ için (1) ve (2) dekilerin karışımı olan bir sınırı verir.

Sonuç 5. 2. A ' nın en küçük Singüler değeri

$$\sigma_n(A) \geq \min_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ k\neq j}} \left[\frac{1}{2}\left\{|a_{kk}| + |a_{jj}| - \sqrt{(|a_{kk}| - |a_{jj}|)^2 + [P_k(A) + Q_k(A)][P_j(A) + Q_j(A)}\right\}\right] \quad (5.8)$$

dır. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat : [3], 3. 7. 17 ' nın Sonuç 2. 1 İspatı, bu ispatla benzerdir ve bu sebepten dahil edilmemiştir.

(5.8) sınırı ve (5.1) sınırı arasındaki ilişkiyi açıklayarak bu bölümü kapatalım.

Sonuç 5. 3. (5.8) sınırı her zaman (en azından) , (5.1) sınırı kadar büyüktür. Üstelik A için;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min_{1\leq k\leq n}\left\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}\left[P_k(A) + Q_k(A)\right]\right\} \\ &= |a_{rr}| - \frac{1}{2}[P_r(A) + Q_r(A)] \\ &< |a_{jj}| - \frac{1}{2}[P_j(A) + Q_j(A)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitsizliği herhangi bir $j \in \{1,...,n\} \setminus \{r\}$ için sağlanır. Önceki sınır açık değildir ve bir sonrakinden daha iyidir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat :

$$\min_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ k\neq j}} \left[\frac{1}{2}\left\{|a_{kk}| + |a_{jj}| - \sqrt{(|a_{kk}| - |a_{jj}|)^2 + [P_k(A) + Q_k(A)][P_j(A) + Q_j(A)]}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{|a_{ss}| + |a_{tt}| - \sqrt{(|a_{ss}| - |a_{tt}|)^2 + [P_s(A) + Q_s(A)][P_t(A) + Q_t(A)]}\right\}$$

olduğunu varsayalım.

Buradan Sonuç 2. 2 yardımı ile

$$\sigma_n(A) \geq \frac{1}{2}\left\{|a_{ss}| + |a_{tt}| - \sqrt{(|a_{ss}| - |a_{tt}|)^2 + [P_s(A) + Q_s(A)][P_t(A) + Q_t(A)]}\right\} \quad (5.10)$$

elde edilir. Hiç bir sınırlama olmadığını varsayarak

$$|a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)] \le |a_{ss}| - \frac{1}{2}[P_s(A) + Q_s(A)]$$

ifadesi;

$$\frac{1}{2}[P_s(A) + Q_s(A)] \le |a_{ss}| - |a_{tt}| + \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)] \qquad (5.11)$$

gibi de yazılabilir. (5.11)' den gerekli işlemler yapılarak;

$$\sigma_n(A) \ge \frac{1}{2}\left\{|a_{ss}| + |a_{tt}| - \sqrt{(|a_{ss}| - |a_{tt}|)^2 + 2(|a_{ss}| - |a_{tt}|)[P_t(A) + Q_t(A)] + [P_t(A) + Q_t(A)]^2}\right\} \qquad (5.12)$$

elde edilir. (5.11) vasıtasıyla

$$|a_{ss}| - |a_{tt}| + [P_t(A) + Q_t(A)] \ge 0$$

dır. Bu yüzden (5.12);

$$\sigma_n(A) \ge |a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)]$$

$$\ge \min_{1 \le k \le n}\left\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\right\} \qquad (5.13)$$

haline gelir.

İspatı tamamlamak için iki durum göz önüne alalım.

1. Durum:

$$|a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)] < |a_{ss}| - \frac{1}{2}[P_s(A) + Q_s(A)]$$

ise (5.11) doğrudur ve

$$\sigma_n(A) > |a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)]$$

$$\ge \min_{1 \le k \le n}\left\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\right\} \ge 0$$

olduğunu gösterir.

2. Durum:

$$|a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)] = |a_{ss}| - \frac{1}{2}[P_s(A) + Q_s(A)]$$

ise, (5.9) 'dan

$$0 \le \min_{1 \le k \le n}\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\} < |a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)]$$

elde edilir ve (5.13) 'den

$$\sigma_n(A) \geq |a_{tt}| - \frac{1}{2}[P_t(A) + Q_t(A)]$$

$$> \min_{1\leq k\leq n}\left\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)]\right\} \geq 0$$

elde edilmiş olur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. 4. $\sigma_n(A)$ İçin Gudkov Tipi Alt Sınırlar

Son sınırı türetmek için Gudkov Teoreminin bir sonucunu kullanacağız.

[1] ' de gösterildiği gibi, eğer $n\times n$ bir $B=(b_{ij})$ kompleks matrisi $1\leq i\leq n$ için bazı i` lere sahipse tüm $j\neq i$ ' ler için $|b_{ii}-b_{jj}| > P_i(B)+P_j(B)$ olacak izole edilmiş Gersgorin diski $G_i(B)$ için B ' nin öz değerleri,

$$\left(z\in|z-b_{ii}|\leq\sum_{j\neq i}|b_{ij}|\frac{P_j(B)}{|b_{ii}-b_{jj}|-P_i(B)}\right) \tag{5.14}$$

diskinde kapsanan $G_i(B)$ ' de kapsanır.

$P_i(B)=0$ olmadıkça (5.14)` deki diskin yarıçapının $G_i(B)$ ' nin yarıçapından kesinlikle daha küçük olduğunu görmek kolaydır.

Bu durum aşağıdaki yolla (5.1) ile verilen sınırı geliştirmek için bir araçtır.

Teorem 3. 4. A ' nın en küçük singüler değeri

$$\alpha_J = \min_{k\in\{1,\ldots,n\}-N_I(A)}\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A)+Q_k(A)]\}$$

ile

$$\alpha_G = \min_{k\in N_I(A)}\left\{|a_{kk}| - \frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\frac{P_j(A)+Q_j(A)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\|-P_k(A)-Q_k(A)} + \sum_{j\neq k}|a_{jk}|\frac{P_j(A)+Q_j(A)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\|-P_k(A)-Q_k(A)}\right)\right\}$$

ve

$N_I(A) = \{i \in \{1,...,n\} : \|a_{ii}| - |a_{jj}\| > \frac{1}{2}[P_i(A) + Q_i(A)] + \frac{1}{2}[P_j(A) + Q_j(A)] \forall_j \in \{1,...,n\} - \{i\}\}$

değerleri için,

$$\sigma_n(A) \geq \min\{\alpha_J, \alpha_G\} \tag{5.15}$$

dir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

İspat : $1 \leq k \leq n$ için θ_k **,**

$$e^{i\theta_k} = \begin{cases} |a_{kk}| / a_{kk}, & eğer\ a_{kk} \neq 0 \\ 1, & eğer\ a_{kk} = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde $D = diag(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})$ olsun.

D üniter olduğundan DA ` nın Singüler değerleri A ' nın Singüler değeri ile aynıdır.

[3] , 3. 7 ' deki işlemler yapılırsa

$$\sigma_n(A) = \sigma_n(DA)$$

$$\geq \min\left\{ \min_{k \in \{1,...,n\} - N_I(DA]} \{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)\}, \min_{k \in N_I(DA)} \{\lambda_k(H(DA))\} \right\}$$

elde edilir.

$H(DA) = \frac{1}{2}[DA + (DA)^*]$, DA ' nın hermityen kısmı ve $k \in N_I(DA)$ için $\lambda_k(H(DA))$ ' ler ayrıştırılmış $G_k(H(DA))$ diskinde kapsanan $H(DA)$ ' ın tek özdeğerleridir. $N_I(A)$ ' nın da tanımını dikkate alırsak, son eşitsizlik

$$\sigma_n(A) \geq \min\{\alpha_j, \min_{k \in N_I(A)} \{\lambda_k(H(DA))\}\}$$

haline gelir. İddiamız yukarıdaki Gudkov ve üçgen eşitsizliklerinin yardımıyla görülür.

(5. 2) ve (5. 3)' e benzer olarak (5.15) sınırının gösterilmesi (5.1) sınırı ile nasıl ilişkilendirilebileceği görülür. İspat açıktır.

Sonuç 5. 3. (5.15) sınırı her zaman en azından (5.1) kadar büyüktür. Üstelik A için; $s \in N_I(A)$ ve $P_s(A) + Q_s(A) > 0$ olmak üzere

$$0 \leq \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ |a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(A) + Q_k(A)] \right\} = |a_{ss}| - \frac{1}{2}[P_s(A) + Q_s(A)]$$

olup, önceki sınır açık değildir ve sonrakinden iyidir. **[Horn ve Johnson, 1985]**

6. UYGULAMALAR

6. 1. Cauchy-Toeplitz Uygulaması

Cauchy- Toeplitz matris tanımından $g = \frac{1}{2}$ ve h=1 durumu için;

$$T_n = \left[\frac{2}{1+2(i-j)} \right]_{i,j=1}^{n}$$

olur. $n = 3$ için;

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

özel Cauchy-Teoplitz matrisi elde edilir.

Şimdide T_3 matrisinin Singüler değerleri

$$1.601,\ 3.004,\ 3.142$$

olarak bulunmuş olup bu özel T_3 matrisinin en küçük singüler değeri $\sigma_3 = 1.601$ olarak tespit etmiş oluruz.

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

özel Cauchy-Toeplitz matrisi için, $P_k(T_3) = \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ ve $Q_k(T_3) = \sum_{j \neq k} |a_{jk}|$

değerleri yerine yazıldığında,

$$P_1(T_3) = |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \qquad Q_1(T_3) = |a_{21}| + |a_{31}| = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

$$P_2(T_3) = |a_{21}| + |a_{23}| = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \qquad Q_2(T_3) = |a_{12}| + |a_{32}| = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$P_3(T_3) = |a_{31}| + |a_{32}| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} \qquad Q_2(T_3) = |a_{13}| + |a_{23}| = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

değerleri elde edilir.

6. 1. 1. Gersgorin Teoreminin Özel T_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(T_3) \geq \min_{1\leq k\leq 3}\{|a_{11}| - \frac{1}{2}[P_1(T_3) + Q_1(T_3)], |a_{22}| - \frac{1}{2}[P_2(T_3) + Q_2(T_3)], |a_{33}| - \frac{1}{2}[P_3(T_3) + Q_3(T_3)]\}$$

değerleri yerine yazıldığında;

$$\sigma_3(T_3) \geq \min\{0.133,\ -0.66,\ 0.133\}$$

$$\geq -0.66$$

olarak bulunur.

6. 1. 2. Ostrowski Teoreminin Özel T_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(T_3) \geq \min_{1\leq k\leq 3}\{\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{11}|^2 + [P_1(T_3) - Q_1(T_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_1(T_3) + Q_1(T_3)]\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{22}|^2 + [P_2(T_3) - Q_2(T_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_2(T_3) + Q_2(T_3)] \right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{33}|^2 + [P_3(T_3) - Q_3(T_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_3(T_3) + Q_3(T_3)] \right)\}$$

değerler yerine yazıldığında,

$$\sigma_3(T_3) \geq \min\{0.4,\ -0.66,\ 0.4\}$$

$$\geq -0.66$$

olarak bulunur.

6. 1. 3. Brauer Teoreminin Özel T_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(T_3) \geq \min_{\substack{1\leq k,j\leq 3 \\ k\neq j}} [\frac{1}{2}\{|a_{11}| + |a_{22}| - \sqrt{(|a_{11}| - |a_{22}|)^2 + [P_1(T_3) + Q_1(T_3)].[P_2(T_3) + Q_2(T_3)]}\},$$

$$\frac{1}{2}\{|a_{11}| + |a_{33}| - \sqrt{(|a_{11}| - |a_{33}|)^2 + [P_1(T_3) + Q_1(T_3)].[P_3(T_3) + Q_3(T_3)]}\},$$

$$\frac{1}{2}\{|a_{22}| + |a_{33}| - \sqrt{(|a_{22}| - |a_{33}|)^2 + [P_2(T_3) + Q_{21}(T_3)].[P_3(T_3) + Q_3(T_3)]}\}]$$

da değerler yerine yazıldığında,

$\sigma_3(T_3) \geq \min\{-0.13, 0.30, -0.13\} \cong -0.13$

olarak bulunur.

6. 1. 4. Gudkov Teoreminin Özel T_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

T_3 ` nın en küçük singüler değeri

$$\alpha_J = \min_{k\in\{1,\dots,n\}-N_I(T_3)} \{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(T_3) + Q_k(T_3)]\}$$

ile

$$\alpha_G = \min_{k\in N_I(T_3)} \left\{ |a_{kk}| - \frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq k} |a_{kj}| \frac{P_j(T_3)+Q_j(T_3)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\| - P_k(T_3) - Q_k(T_3)} + \sum_{j\neq k} |a_{jk}| \frac{P_j(T_3)+Q_j(T_3)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\| - P_k(T_3) - Q_k(T_3)} \right) \right\}$$

$$N_I(T_3) = \{i \in \{1,\dots,n\} : \|a_{ii}| - |a_{jj}\| > \frac{1}{2}[P_i(T_3)+Q_i(T_3)] + \frac{1}{2}[P_j(T_3)+Q_j(T_3)] \forall_j \in \{1,\dots,n\} - \{i\}\}$$

$$\sigma_n(T_3) \geq \min\{\alpha_J, \alpha_G\}$$

dan $N_I(T_3)$ ' de i' yi belirlenirken,

$i = 1$ için $j = 2, j = 3$

$i = 2$ için $j = 1, j = 3$

$i = 3$ için $j = 1, j = 2$

değerleri yerine yazıldığında $|a_{11}| = |a_{22}| = |a_{33}|$ olduğundan $N_I(T_3)$ eşitsizliğinin sol kısmı 0 olup sağ tarafı da devamlı pozitif olduğundan herhangi bir i değeri için eşitsizlik sağlanamadığından dolayı özel Cauchy-Toeplitz T_3 matrisi için Gudkov yöntemi uygulanamamaktadır.

6.1. Sonuç: Sonuçlar karşılaştırıldığında özel Cauchy-Toeplitz T_3 matrisinin en küçük singüler değerini en yaklaşık olarak Brauer teoremi vermektedir.

6. 2. Cauchy-Hankel Uygulaması

Cauchy- Hankel matris tanımından $g = \frac{1}{2}$ ve h=1 durumu için;

$$H_n = \left[\frac{1}{1/2 - i - j}\right]_{i,j=1}^{n} \quad \Rightarrow \quad H_n = \left[\frac{2}{1 - 2(i+j)}\right]_{i,j=1}^{n}$$

haline gelir. $n = 3$ için;

$$H_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

özel H_3 Cauchy-Hankel matrisi elde edilmiş olur.

Bu durumda H_3 matrisinin singüler değerleri

0.002, 0.065, 1.05

olarak bulunmuş olup özel H_3 Cauchy-Hankel matrisinin en küçük singüler değeri 0.002 olarak tespit edilmiş olur.

$$H_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

özel H_3 Cauchy-Toeplitz matrisi için;

$$P_k(\mathrm{H}_3) = \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \qquad \text{ve} \qquad Q_k(\mathrm{H}_3) = \sum_{j \neq k} |a_{jk}|$$

$$P_1(\mathrm{H}_3) = |a_{12}| + |a_{13}| = \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{24}{35} \qquad Q_1(\mathrm{H}_3) = |a_{21}| + |a_{31}| = \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{24}{35}$$

$$P_2(\mathrm{H}_3) = |a_{21}| + |a_{23}| = \frac{2}{5} + \frac{2}{9} = \frac{28}{45} \qquad Q_2(\mathrm{H}_3) = |a_{12}| + |a_{32}| = \frac{2}{5} + \frac{2}{9} = \frac{28}{45}$$

$$P_3(\mathrm{H}_3) = |a_{31}| + |a_{32}| = \frac{2}{7} + \frac{2}{9} = \frac{32}{63} \qquad Q_3(\mathrm{H}_3) = |a_{13}| + |a_{23}| = \frac{2}{7} + \frac{2}{9} = \frac{32}{63}$$

değerleri elde edilir.

6. 2. 1. Gersgorin Teoreminin Özel H_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(H_3) \geq \min_{1\leq k\leq 3}\{|a_{11}| - \frac{1}{2}[P_1(H_3) + Q_1(H_3)], |a_{22}| - \frac{1}{2}[P_2(H_3) + Q_2(H_3)], |a_{33}| - \frac{1}{2}[P_3(H_3) + Q_3(H_3)]\}$$

değerler yerine yazıldığında,

$$\sigma_3(H_3) \geq \min\{-0.02, -0.33, -0.31\}$$

$$\sigma_3(H_3) \geq -0.33$$

olarak bulunur.

6. 2. 2. Ostrowski Teoreminin Özel H_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(H_3) \geq \min_{1\leq k\leq 3}\{\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{11}|^2 + [P_1(H_3) - Q_1(H_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_1(H_3) + Q_1(H_3)]\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{22}|^2 + [P_2(H_3) - Q_2(H_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_2(H_3) + Q_2(H_3)]\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\{4.|a_{33}|^2 + [P_3(H_3) - Q_3(H_3)]^2\}^{\frac{1}{2}} - [P_3(H_3) + Q_3(H_3)]\right)\}$$

değerler yerine yazıldığında,

$$\sigma_3(H_3) \geq \min\{-0.02,-0.34,-0.32\}$$

$$\sigma_3(H_3) \geq -0.34$$

olarak bulunur.

6. 2. 3. Brauer Teoreminin Özel H_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

$$\sigma_3(H_3) \geq \min_{\substack{1\leq k,j\leq 3 \\ k\neq j}}[\frac{1}{2}\{|a_{11}|+|a_{22}|-\sqrt{(|a_{11}|-|a_{22}|)^2+[P_1(H_3)+Q_1(H_3)].[P_2(H_3)+Q_2(H_3)]}\},$$

$$\frac{1}{2}\{|a_{11}|+|a_{33}|-\sqrt{(|a_{11}|-|a_{33}|)^2+[P_1(H_3)+Q_1(H_3)].[P_3(H_3)+Q_3(H_3)]}\},$$

$$\frac{1}{2}\{|a_{22}|+|a_{33}|-\sqrt{(|a_{22}|-|a_{33}|)^2+[P_2(H_3)+Q_{21}(H_3)].[P_3(H_3)+Q_3(H_3)]}\}]$$

değerler yerine yazıldığında;

$$\sigma_3(H_3) \geq \min\{-0.2,-0.21,-0.34\}$$

$$\geq -0.34$$

olarak bulunur.

6. 2. 4. Gudkov Teoreminin Özel H_3 Matrisi Üzerinde Uygulanması

H_3 ' nın en küçük singüler değeri

$$\alpha_J = \min_{k\in\{1,\ldots,n\}-N_I(H_3)} \{|a_{kk}| - \frac{1}{2}[P_k(H_3) + Q_k(H_3)]\}$$

$$\alpha_G = \min_{k\in N_I(H_3)} \left\{ |a_{kk}| - \frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq k} |a_{kj}| \frac{P_j(H_3)+Q_j(H_3)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\| - P_k(H_3) - Q_k(H_3)} + \sum_{j\neq k} |a_{jk}| \frac{P_j(H_3)+Q_j(H_3)}{2\|a_{kk}|-|a_{jj}\| - P_k(H_3) - Q_k(H_3)} \right) \right\}$$

$$N_I(H_3) = \{i \in \{1,\ldots,n\} : \|a_{ii}| - |a_{jj}\| > \frac{1}{2}[P_i(H_3)+Q_i(H_2)] + \frac{1}{2}[P_j(H_3)+Q_j(H_3)] \forall_j \in \{1,\ldots,n\} - \{i\}\}$$

$$\sigma_n(H_3) \geq \min\{\alpha_J, \alpha_G\}$$

i=1 için j=2 , $j = 3$

i=2 için $j = 1, j = 3$

$i = 3$ için $j = 1, j = 2$

$N_I(H_3)$ eşitsizliğinde yerine yazıldığında;

herhangibir i değeri için eşitsizlik sağlanamadığından bu özel H_3 Cauchy-Hankel matrisi için Gudkov teoremi uygulanamamaktadır.

6.2. Sonuç: Sonuçlar karşılaştırıldığında özel H_3 Cauchy-Hankel matrisinin en küçük singüler değer alt sınırını yaklaşık olarak Gersgorin Teoremi vermektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

$$A_1=\begin{bmatrix}224 & 21 & 55\\ 61 & 137 & 66\\ -83 & -26 & 175\end{bmatrix}\quad,\quad A_2=\begin{bmatrix}259 & -9 & 44\\ -18 & 94 & -2\\ -43 & 8 & 243\end{bmatrix}\quad \text{ve} \quad A_3=\begin{bmatrix}10 & 1 & 1\\ 1 & 20 & 1\\ 1 & 1 & 30\end{bmatrix}$$

matrisleri için (5.2), (5.8) ve (5.15)' deki sınır değerleri bulunmuş ve aşağıdaki tablo düzenlenmiştir.

	(5.2)	(5.8)	(5.15)	σ_3	(5.1)
A_1	55,72	54,19	50	117,83	50
A_2	75,51	87,84	86,89	92,88	75,5
A_3	8	9,62	9,64	9,86	8

Yukarda bazı matrislerin en küçük singüler değeri(σ_3), Gersgoin(5. 1), Ostrowski(5. 2), Brauer(5. 8), Gudkov(5. 15) en küçük singüler değerler için alt sınır bulma yöntemlerinin uygulanışı sonucu elde edilen değerler tabloda yazılmıştır. Gerek tabloda gerekse de Özel Cauchy-Toeplitz ve Özel Cauchy-Hankel matrislerde bu metotların uygulanışı sonucu bu yöntemlerden hangisinin daha iyi yaklaşık sonuç bulduğunu kestirmek söz konusu değildir.

İlerleyen çalışmalarda bu özel yöntemler üzerinde çalışılarak Toeplitz ve Hankel matrisler için daha keskin Singüler değerler için alt sınır bulma yöntemleri oluşturulabilir.

7. KAYNAKLAR

[**1]** Li Luoluo, 2001, Lower Bounds for the Smallest Singular Value, Computer and Mathematics with Applications, pp 483- 487

[2] Wang Bo- Ying and Xi Bo- Yan, 1997, Some Inequalities for singular Values of Mtrix Products, Linear Algebra and Its Applications 246, pp 109- 115

[3] R. Horn and C.R Johnson, 1985 Topics in Matrix Analysis, Cambridge U.P.

[4] C.R Johnson, Linear Algebra Appl. 112:1-7. 1989, A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value.

[5] Belitskii, G.R. , Lyubich, Y. I. 1988, Matrix Norms and Their Applications, Birkha user Verlag, Basel.

[6] Ben, A., Shalon, T. 1986, On Inversion of Teoplitz and Hankel Matrices, Jour. Inst. Math. Comp. Sci., Vol:7, No:1, pp:1-9

[7] Bini, D. Capovani, M. 1983, Spektral and Computational Properties of Band Symetric Toeplitz Matrices.Linear Algebra and Its Applications. 52/53: 99-126.

[8] Bozkurt, D. 1994, On the Inverses of Toeplitz and Close to Toeplitz Matrices.

[9] Bozkurt, D. 1995, Cauchy-Toeplitz Matrislerinin Normları Üzerine , 8. Ulusal Matematik Sempozyumu, Çukurova Üniversitesi, Adana.

[10] Bozkurt, D.ve Çelik, H.A. 1996, On the Distributions of the Eigenvalues of a Non-Symmetric Matrix. The Journal of Interdisciplinary Studies 9: 87-90

[11] Bozkurt, D. 1996, On the Bounds of Cauchy-Teoplitz Matrices. *Siberian J. of Diff. Equations*2: B 125-131.

[12] Fuhrmann, P. A. 1986, Remarks on the Inversion of Hankel Matrices.Linear Algebra and Its Applications.

[13] V.V. Gudgov, On certain test for nonsingularity of matrices, in Latv. Mat. 1965, Zinatne , Riga, 1966, pp. 365-390 (MR 33, 1967, No.1323)

[14] Golub, G.H., Loan, C.F.V. 1983, Matrix Computations, North Oxford Academic Publishing.