T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MATRİS METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Mustafa Gökhan ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA , 2010

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MATRİS METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Mustafa Gökhan ÇETİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

2010 , 52 Sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Yrd. Doç. Dr. Aynur YALÇINER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, genel tanımlar ele alınmıştır.

İkinci bölümde, lineer diferansiyel denklemlerin Chebyshev kollokasyon noktaları yardımıyla çözüm metodu ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, lineer diferansiyel denklemlerin Taylor serisi yardımı ile çözüm metodu ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise uygulamalara yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Lineer Diferansiyel Denklemler, Chebyshev Polinomları, Taylor Serileri,

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATION SOLUTIONS

WITH MATRIX METHOD OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mustafa Gökhan ÇETİN

Selçuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

2010 , 52 Pages

Jury: Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Yrd. Doç. Dr. Aynur YALÇINER

This study consists of four parts. In the first section, general definitions have been addressed.

In the second section, linear differential equation solution with the help of the Chebyshev method of ranking points have been addressed.

In the third section, linear differential equations with the help of Taylor series method of solution is discussed.

In the fourth section where tehe applications are given

Key words: Linear Differential Equations, Chebyshev Polynomials, Taylor Series,

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, genel tanımlar ele alınmıştır. İkinci bölümde, lineer diferansiyel denklemlerin Chebyshev sıralama noktaları yardımıyla çözüm metodu ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, lineer diferansiyel denklemlerin Taylor serisi yardımı ile çözüm metodu ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise uygulamalara yer verilmiştir.

Yüksek lisans çalışmam süresince her türlü desteğini esiregemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI ve Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ'a, hazırlık çalışmalarımda bana yön veren sevgili abim Yrd. Doç. Dr. Mehmet Çağrı ÇETİN'e ve daima bana her konuda destek olan aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mustafa Gökhan ÇETİN

Konya , 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR 1

2.BÖLÜM

II.MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN CHEBYSHEV-KOLLOKASYON YÖNTEMİ 12

3.BÖLÜM

II.MERTEBEDENLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ 19

4.BÖLÜM

III.MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN CHEBYSHEV-KOLLOKASYON YÖNTEMİ 25

5.BÖLÜM

III.MERTEBEDENLİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ 31

6.BÖLÜM

UYGULAMALAR 34

SONUÇ VE ÖNERİLER 50

KAYNAKLAR 51

1.TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Literatür Özeti

Kaynak 1994, Bu çalışmasında ikinci mertebeden değişken katsayılı

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)]=\mu \qquad -1 \le c \le 1$$

başlangıç koşulları altında,

$x_0=1$ ve $x_N=-1$ olarak alındığı zaman

$$x_j=\cos\frac{j\pi}{N} \qquad j=0,1,...,N$$

veya $x_0=-1,$ $x_N=1$ olarak alındığı zaman

$$x_j=\cos\frac{(N-j)\pi}{N} \qquad j=0,1,...,N;$$

şeklindeki kollokasyon noktaları esas alınarak, Chebyshev serileri yardımı ile

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

yaklaşık çözümülerini elde etmiştir.

Ayrıca çalışmasında Cauchy-Euler diferansiyel denklemlerin çözümlerini de incelemiştir.

Günhan 2001, Bu çalışmasında**,**

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y+S(x)y^2=f(x)$$

formunda ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin verilen koşullar altında

$$y(x)=\frac{1}{2}a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+\ ...=\sum_{r=0}^{\infty}{}'a_rT_r(x)$$

formunda bir Chebyshev seri çözümünü bulmaktadır.

Öte yandan

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^1 K_F{}^*(x,t)\left[y(t)\right]^p dt + \lambda_2 \int_0^x K_V{}^*(x,t)\left[y(t)\right]^q dt$$

ikinci tür lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denkleminde

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r^*(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

formunda bir Chebyshev seri çözümü incelenmiştir.

Ayrıca bu çalışmada iki değişkenli Chebyshev polinomları ele alınmıştır. Lineer olmayan denklemlerin Chebyshev matris metodu ele alınmıştır.

Keşan 2002, Bu çalışmasında ikinci mertebeden değişken katsayılı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1) + b_i y^{(i)}(1) + c_i y^{(i)}(c)] = \lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1) + \beta_i y^{(i)}(1) + \gamma_i y^{(i)}(c)] = \mu \qquad -1 \le c \le 1$$

$a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda, \mu$ reel katsayılar , $a \le c \le b$ olmak üzere başlangıç değerleri yardımı ile Taylor serisi kullanılarak

$$y(x) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c) \qquad a \le c \le b$$

$n = 0,1,2,.....N$ olmak üzere yukarıdaki şekilde yaklaşık çözümü bulmuştur.

Ayrıca Taylor katsayılarının matris formuna dönüştürülmesi, lineer diferansiyel denklemlerin matris formuna dönüştürülerek çözümü, konuları ele alınmıştır.

Dolapcı 1996, Bu çalışmasında ikinci mertebeden değişken katsayılı

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)]=\mu \qquad -1\le c\le 1$$

başlangıç koşulları altında,

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \qquad -1\le x\le 1$$

yaklaşık çözümünü elde etmiştir.

Albayrak 2007, Bu çalışmasında ise, birinci tip $T_n(x)$ Chebyshev polinomları, ikinci tip $U_n(x)$ Chebyshev polinomları, Chebyshev polinomlarının matris özellikleri ve yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemin Chebyshev sıralama yöntemi ile yaklaşık çözümleri, gibi konuları ele almıştır.

Biz de bu tezde, literatür özetinde verilen kaynaklardan elde edilen bilgilerin doğrultusunda üçüncü mertebedeki

$$L(x)y'''+P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1\le x\le 1$$

lineer diferansiyel denklemlerin Chebyshev ve Taylor serileri yardımı ile yaklaşık çözümlerini ele aldık ve Örnek 3'te bir uygulamasını verdik.

1.2. Problemin Tanıtımı

İkinci mertebeden değişken katsayılı

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1\le x\le 1 \qquad (1.1)$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)]=\mu \qquad -1\le c\le 1 \qquad (1.2)$$

koşulları altında tam (analitik) çözümlerini bulmak genelde zordur; hatta imkansızdır. Bu nedenle analitik çözüme

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (1.3)$$

($\sum'$ gösterimi ilk terimin yarısı alınacağı anlamındadır) formunda bir sonlu Chebyshev serisi ile yaklaşabiliriz.

Burada, *P(x), Q(x), R(x)* ve *f(x)* fonksiyonları $-1 \le x \le 1$ aralığında sürekli fonksiyonlar; a_i, b_i, c_i, α_i, β_i, γ ve μ sabitleri uygun verilmiş reel değerler; $T_r(x)$ r. dereceden bir değişkenli Chebyshev polinomu; a_r katsayıları belirlenmesi gereken Chebyshev katsayılarıdır.

Bu çalışmadaki amacımız, (1.1) diferansiyel denkleminin (1.2) koşullarına göre (1.3) sonlu Chebyshev serisi formunda çözümünü bulmaktır.

Şimdi bu çalışmada kullanacağımız Chebyshev polinomları ve serileriyle ilgili bazı temel kavramları vereceğiz.

1.3.Lineer Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \quad \ldots \quad + b_2(x)y^{(2)} + b_1(x)y^{(1)} + b_0(x)y = f(x)$$

veya

$$\sum_{i=0}^{n} b_i(x)y^{(i)} = f(x) \qquad i = 0,1,2, \ldots \ n$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferansiyel denkleme LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM denir. Burada $b_i(x)$ ve $f(x)$ bilinen ve yalnız x değişkenine bağlı fonksiyonlardır. (Yaşar 1999)

1.4. Tek Değişkenli Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

Tek değişkenli birinci tür Chebyshev polinomları

$$T_r(x) = \cos r\theta \qquad x = \cos\theta \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (1.4)$$

ve

$$T_r^*(x) = \cos r\theta, \qquad 2x-1 = \cos\theta \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır.

$0 \le x \le 1$ ve $-1 \le x \le 1$ aralıklarında aşağıdaki özellikleri verebiliriz.

a) $T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \qquad -1 \le x \le 1$

$$T^*_{r+1}(x) = 2(2x-1)T^*_r(x) - T^*_{r-1}(x) \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (1.6)$$

burada $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$ *ve* $T_0^*(x)=1, T_1^*(x)=2x-1$ dir. $r \ge 1$ için genel bağıntıları;

$$T_r(x) = \frac{1}{2}\left\{(2x)^r - \left[\left\{2\binom{r-1}{1} - \binom{r-2}{1}\right\}(2x)^{r-2}\right] + \ldots\right\} \qquad (1.7)$$

ve

$$T_r^*(x) = \frac{1}{2}\left\{2^{2r}x^r - \left[\left\{2\binom{2r-1}{1} - \binom{2r-2}{1}\right\}2^{2r-2}x^{r-1}\right] + \ldots\right\} \qquad (1.8)$$

$T_r(x)$ in x in kuvvetleri cinsinden yazılımı;

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\vdots$$

Benzer şekilde, $T_r^*(x)$ in x in kuvvetleri cinsinden yazılımı;

$$T_0^*(x) = 1$$

$$T_1^*(x) = 2x - 1$$

$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$T_4^*(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$$

$$T_5^*(x) = 512^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$$

$$\vdots$$

b) x^r nin $T_r(x)$ ve $T_r^*(x)$ cinsinden yazılımı için genel bağıntıları

$$x^r = \frac{1}{2^r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} T_{2i-r}(x) \tag{1.9}$$

ve

$$x^r = \frac{1}{2^{2r}}\sum_{i=0}^{2r}\binom{2r}{i} T_{i-r}^*(x) \tag{1.10}$$

olacak şekilde ifade edilir.

Daha açık olarak,

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$2x^2 = T_0(x) + T_2(x)$$

$$4x^3 = 3T_1(x) + T_3(x)$$

$$8x^4 = 3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)$$

$$16x^5 = 10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)$$

$$\vdots$$

ve

$$1 = T_0^*(x)$$

$$2x = T_0^*(x) + T_1^*(x)$$

$$8x^2 = 3T_1^*(x) + 4T_1^*(x) + T_2^*(x)$$

$$32x^3 = 10T_0^*(x) + 15T_1^*(x) + 6T_2^*(x) + T_3^*(x)$$

$$128x^4 = 35T_0^*(x) + 56T_1^*(x) + 28T_2^*(x) + 8T_3^*(x) + T_4^*(x)$$

$$512x^5 = 126T_0^*(x) + 210T_1^*(x) + 120T_2^*(x) + 45T_3^*(x) + 10T_4^*(x) + T_5^*(x)$$

$$\vdots$$

c) $T_r(x)$ ve $T_r^*(x)$ polinomlarının belirsiz integralleri

$$\int T_r(x)dx = \begin{cases} T_r(x) & (r=0) \\ \frac{1}{4}T_r(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}(x)}{2(r+1)} - \frac{T_{r-1}(x)}{2(r-1)} & (r>1) \end{cases} \qquad (1.11)$$

$$\int T_r(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}T_r^*(x) & (r=0) \\ \frac{1}{4}T_r^*(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}{}^*(x)}{4(r+1)} - \frac{T_{r-1}{}^*(x)}{4(r-1)} & (r>1) \end{cases}$$

bağıntılarını elde ederiz**.** (Fox 1969 ; Kaynak 1994)

1.5. Tek Değişekenli Chebyshev Serileri

Eğer bir f(x) fonksiyonu $-1 \le x \le 1$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta sınırlı değişimli ise; o zaman aralığın tamamında düzgün yakınsayan

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty}{}' a_rT_r(x) \qquad (1.12)$$

formunda bir seri açılımı vardır. $T_r(x)$ (1.4) ile tanımlanan Chebyshev polinomudur. Bu seriye bir değişkenli Chebyshev serisi denir. a_r katsayıları

$$a_r = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad r = 0,1,2,\ldots \qquad (1.13)$$

formu ile verilir. (Elliot 1969)

Diğer yandan $0 \le x \le 1$ aralığından f(x) sınırlı ve tanımlı ise o zaman, bu fonksiyon

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}{}'a_r T_r^*(x) \qquad (1.14)$$

formunda düzgün yakınsak Chebyshev serisine açılabilir. Benzer teorem (1.13) Chebyshev serileri için de geçerlidir. (Mason 1967 ; Basu1970 ; Elliot 1969 ; Kaynak 1994)

1.6. Chebyshev Kollokasyon Noktaları

Chebyshev polinomlarının tanım aralığı olan $-1 \le x \le 1$ aralığını $x_0, x_1, \ldots, x_N$ noktaları ile N parçaya bölelim. Bu noktalara sıralama noktaları denir.

x sıralama noktaları, $x_0=1$ ve $x_N=-1$ olarak alırsak, o zaman

$$x_j=\cos\frac{j\pi}{N} \qquad j=0,1,\ldots,N$$

veya $x_0=-1,\ x_N=1$ olarak alırsak, o zaman

$$x_j=\cos\frac{(N-j)\pi}{N} \qquad j=0,1,\ldots,N;$$

formülleriyle belirlenir.

Eğer $0 \le x \le 1$ aralığında çözüm alınırsa, Chebyshev kollokasyon noktaları,

$$2x_j-1=\cos\frac{(N-j)\pi}{N} \quad veya \quad x_j=\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{(N-j)\pi}{N}\right] \qquad j=0,1,\ldots,N$$

ve

$$2x_j-1=\cos\frac{j\pi}{N} \ veya \ x_j=\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{J\pi}{N}\right], \qquad j=0,1,\ldots,N$$

olur. (Çelik and Gokmen 2005)

1.7. Chebyshev Katsayılarının Hesabı

y(x), $-1 \le x \le 1$ aralığında tanımlı ve x e göre n. türevinden bir fonksiyon olmak üzere , y(x) in n. türevinin Chebyshev seri açılımları

$$y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}{}'a_r T_r(x) \qquad (1.15)$$

ve

$$y^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' a_r^{(n)} T_r(x) \tag{1.16}$$

olarak yazılabilir.

Burada $a_r^{(n)}$ ve a_r Chebyshev katsayılarıdır. Ayrıca $a_r^{(0)}=a_r$ ve $y^{(0)}=y$ olduğu açıktır. (1.11) bağıntısı kullanılarak, $y^{(n+1)}(x)$ ve $y^{(n)}(x)$ ın katsayıları arasında

$$2ra_r^{(n)} = a_{r-1}^{(n+1)} - a_{r+1}^{(n+1)} \qquad r \geq 1 \tag{1.17}$$

rekürans bağıntısı elde edilebilir.

Şimdi (1.16) denkleminden,

$$2(r+1)a_{r+1}^{(n)} = a_r^{(n+1)} - a_{r+2}^{(n+1)}$$

$$2(r+3)a_{r+3}^{(n)} = a_{r+2}^{(n+1)} - a_{r+4}^{(n+1)}$$

$$2(r+5)a_{r+5}^{(n)} = a_{r+4}^{(n+1)} - a_{r+6}^{(n+1)}$$

$$\vdots$$

dir. Bunlar taraf tarafa toplanarak

$$a_r^{(n+1)} = 2\left\{(r+1)a_{r+1}^{(n)} + (r+3)a_{r+3}^{(n)} + (r+5)a_{r+5}^{(n)} + \ldots\right\}$$

ya da

$$a_r^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(n)} \tag{1.18}$$

elde edilir. (1.17) bağıntısı kullanılarak $a_r^{(1)}$ ve $a_r^{(2)}$ katsayıları a_r ler cinsinden

$$a_r^{(1)} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}$$

$$a_r^{(2)} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(1)} \tag{1.19}$$

ve

$$a_r^{(2)} = 4\sum_{i=0}^{\infty}(r+2i+1)a_{r+2i+1} \tag{1.20}$$

olarak elde edilir. Burada $r = 0,1,...,N$ alırız ve r>N için $a_r = a_r^{(1)} = a_r^{(2)} = ... = 0$ kabul ederek (1.17) bağıntısını

$$A^{(n+1)} = 2MA^{(n)} \qquad n = 0,1,2... \tag{1.21}$$

matris formuna dönüştürürüz. Burada A^n ve M matrisleri aşağıda tanımlanmıştır;

$$A^{(n)} = \left[\frac{1}{2}a_0^{(n)}\ a_1^{(n)}.\ .\ .a_N^{(n)}\right]^T$$

N tek için ;

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 5/2 & . & . & . & N/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & . & . & . & N \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

N çift için ;

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 5/2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

dir.

N=0,1,… için (1.20) den

$$A^{(1)} = 2MA$$
$$A^{(2)} = 2MA^{(1)} = 2^2 M^2 A$$

$$A^{(3)} = 2MA^{(2)} = 2^3 M^3 A$$

$$\vdots$$

$$A^{(n)} = 2MA^{(n-1)} = 2^n M^n A \Rightarrow A^{(n)} = 2^n M^n A \qquad (1.22)$$

elde edilir. Burada $A^{(0)} = A$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak, (1.21) deki matris bağıntısı *y(x)* Chebyshev katsayıları matrisi A ile y(x) in n.ci türevinin $A^{(n)}$ Chebyshev katsayıları matrisi arasındaki bir temel bağıntıdır.

Eğer y(x) fonksiyonu $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlanmışsa, (1.21) matris bağıntısı,

$$A^{(n)} = 4^n M^n A \qquad (1.23)$$

şeklinde olur. (Clenshaw 1989 ; Fox 1969 ; Günhan 2001)

2. II. MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DEKNKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN CHEBYSHEV- KOLLOKASYON YÖNTEMİ

2.1. Diferansiyel Denklemin Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada *P(x), Q(x), R(x)* ve *f(x)* fonksiyonlarının $-1\le x\le 1$ veya $0\le x\le 1$ aralığında tanımlandığını varsayıyoruz. Amacımız Chebyshev sıralama noktalarına kullanarak, bu denklemin çözümünü

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(x) \tag{2.2}$$

kesilmiş (sonlu) Chebyshev serisi veya

$$[y(x)]=T_x A \tag{2.3}$$

matris formunda bulmaktır. Burada, $T_r(x)$, (1.4) de tanımlanan Chebyshev polinomlarıdır. a_r ise tayin edilecek Chebyshev katsayılardır. Sırasıyla T_x ve A matrisleri

$$T_x=[T_0(x),T_1(x),\ldots,T_N(x)]$$

$$A=\left[\frac{1}{2}a_0\ a_1\ldots a_N\right]^T$$

şeklinde tanımlanır.

x_j *(j=0,1,...,N)* Chebyshev sıralama noktalarını (2.1) denkleminde yerine koyarsak,

$$P(x_j)y''(x_j)+Q(x_j)y'(x_j)+R(x_j)y(x_j)=f(x_j)$$

şeklinde elde edilir. Daha açık olarak yazarsak,

$$P(x_0)y''(x_0)+Q(x_0)y'(x_0)+R(x_0)y(x_0)=f(x_0)$$

$$P(x_1)y''(x_1)+Q(x_1)y'(x_1)+R(x_1)y(x_1)=f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$P(x_N)y''(x_N)+Q(x_N)y'(x_N)+R(x_N)y(x_N)=f(x_N) \tag{2.4}$$

Bu sistemi, matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} P(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & P(x_1) & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & P(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' & (x_0) \\ y'' & (x_1) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ y'' & (x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ . & Q(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & Q(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' & (x_0) \\ y' & (x_1) \\ . & \\ . & \\ . & \\ y' & (x_N) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} R(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & R(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & R(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & (x_0) \\ y & (x_1) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ y & (x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & (x_0) \\ f & (x_1) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ f & (x_N) \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$PY'' + QY' + RY = F \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir. Burada matrisler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$P = \begin{bmatrix} P(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & P(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & P(x_N) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & Q(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & Q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} R(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & R(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & R(x_N) \end{bmatrix}$$

$$F=[f(x_0)f(x_1)...f(x_N)]^T$$

$$y''=[y''(x_0)y''(x_1)...y''(x_N)]^T$$

$$y'=[y'(x_0)y'(x_1)...y'(x_N)]^T$$

$$Y=[y(x_0)y(x_1)...y(x_N)]^T$$

Diğer yandan, $x=x_j$ Chebyshev kollokasyon noktalarından çözüm ve türevleri,

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(x) \tag{2.6}$$

$$y'(x)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r^{(1)} T_r(x) \tag{2.7}$$

$$y''(x)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r^{(2)} T_r(x) \tag{2.8}$$

dir.

J=0,1,…,N olduğuna göre, (2.6) sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ y(x_N) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_0(x_0)\,T_1(x_0) & . & . & . & T_N(x_0) \\ T_0(x_1)\,T_1(x_1) & . & . & . & T_N(x_1) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ T_0(x_N)\,T_1(x_1) & . & . & . & T_N(x_N) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_{1.} \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

veya

$$Y=TA \tag{2.9}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (2.7) ve (2.8) sistemlerinin matris formları

$$Y' = TA^{(1)} \; ve \; Y'' = TA^{(2)} \tag{2.10}$$

dır. Burada T matrisi

$$T = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & . & . & . & T_N(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & . & . & . & T_N(x_1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ T_0(x_N) & T_1(x_N) & . & . & . & T_N(x_N) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır.

(2.9) ve (2.10) de elde edilen matrisleri (2.5) denkleminde yerine yazarsak

$$PTA^{(2)}+QTA^{(1)}+RTA=F$$

elde ederiz. (1.21) bağıntısından

$$A^{(2)}=4M^2A,\; A^{(1)}=2MA$$

olduğu için, bu matris denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$PT4M^2A+\; QT2MA+RTA=F$$

$$(4PTM^2+2QTM+RT)A=F \tag{2.11}$$

Sonuç olarak, (2.1) diferansiyel denklemi cebirsel katsayılı (2.11) matris denklemine dönüştürülmüş olur. Bu matris denkleminin veya lineer denklem sisteminin genişletilmiş matris formu,

$$W=[W_{ij}]=4PTM^2+2QTM+RT, \qquad j=0,1,\ldots, N$$

$$WA=F$$

olmak üzere,

$$[W;F]=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & . & . & . & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & . & . & . & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-1}) \\ w_{N,0} & w_{N,1} & . & . & . & w_{N,N} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Koşulların Matris Formu

Şimdi, (1.2) de tanımlanan

$$\sum_{i=0}^{1}\left[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)\right]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)\right]=\mu$$

karışık koşullarını ele alalım. x=-1, x=1 ve x=c noktalarında $y^{(0)}(x)$ ve $y^{(1)}(x)$ fonksiyonlarının değerleri veya matris formları

$$y^{(0)}(-1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(-1)\Rightarrow[y^{(0)}(-1)]=T_x(-1)A$$

$$y^{(0)}(1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(1)\Rightarrow[y^{(0)}(1)]=T_x(1)A$$

$$y^{(0)}(c)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r T_r(c)\Rightarrow[y^{(0)}(c)]=T_x(c)A$$

$$y^{(1)}(-1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(1)}T_r(-1)\Rightarrow[y^{(1)}(-1)]=2T_x(-1)MA$$

$$y^{(1)}(1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(1)}T_r(1)\Rightarrow[y^{(1)}(1)]=2T_x(1)MA$$

$$y^{(1)}(c)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(1)}T_r(c)\Rightarrow[y^{(1)}(c)]=2T_x(c)MA$$

elde edilir. Burada

$$T_x(-1) = [T_0(-1)T_1(-1)...T_N(-1)]$$

$$T_x(1) = [T_0(1)T_1(1)...T_N(1)]$$

$$T_x(c) = [T_0(c)T_1(c)...T_N(c)]$$

dir.

$y^{(i)}(-1)$, $y^{(i)}(1)$, $y^{(i)}(c)$ ifadeleri (1.2) koşullarında yerine konulursa ve düzenlenirse, kısaca

$$[u_0\, u_1 ... u_N]A = [\lambda] \quad veya \quad UA = [\lambda]$$

$$[v_0\, v_1 ... v_N]A = [\mu] \quad veya \quad VA = [\mu]$$

satır matrisleri elde edilir.

Bunların genişletilmiş matris formları;

$$[U;\lambda] \;\; ; \;\; [V;\mu] \tag{2.13}$$

dir. Daha açık

$$[u_0 u_1 ... u_N;\lambda] \quad ve \quad [v_0 v_1 ... v_N;\mu]$$

olarak yazılabilir.

2.3. Matris Denkleminin Çözümü

(2.1) diferansiyel denkleminin verilen koşullara göre (2.3) matris formunda çözümünü bulabilmek için anahtarları ile aşağıdaki yolu takip etmeliyiz.

Önce verilen diferansiyel denklemin (2.11) matris denklemi formu (2.12) genişletilmiş matris formuna dönüştürülür. Bu genişletilmiş matrisin son iki satırı silinerek ve bunların yerine koşullarla ilgili (2.13) satır matrisleri yazılarak, yeni genişletilmiş matris

$$[\widetilde{W};\widetilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,N} & ; & f_{(x_0)} \\ . & . & \dots & . & ; & . \\ . & . & \dots & . & ; & . \\ . & . & \dots & . & ; & . \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & \dots & w_{N-2,N} & ; & f(x_{N-2}) \\ u_0 & u_1 & \dots & u_N & ; & \lambda \\ v_0 & v_1 & \dots & v_N & ; & \mu \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.14) genişletilmiş matrisi kısaca

$$\widetilde{W}\, A = \widetilde{F} \tag{2.15}$$

formunda matris denklemine dönüştürülür. Burada $\tilde{W},\ \tilde{F},\ A$ matrisleri

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & . & . & . & w_{N-2,N} \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = [f(x_0), f(x_1).....f(x_{N-2}), \lambda, \mu]^T$$

$$A = [\frac{1}{2}a_0\ a_1\ .....\ a_N]^T$$

olarak tanımlanır.

Eğer rank $\tilde{W} = rank[\tilde{W};\tilde{F}] = N+1$ ise yani $\det\tilde{W} \neq 0$ ise, (2.15) matris denklemini

$$A = \tilde{W}^{-1}\tilde{F} \qquad (2.16)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (2.16) denkleminden $\frac{1}{2}a_0\ a_1,...a_N$ katsayılarını tek olarak tayin edebiliriz. Dolayısıyla (1.2) koşullarına göre (2.1) diferansiyel denklemi tek çözümü sahip olur.

Bu çözüm

$$[y(x)] = T_x A$$

veya

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \qquad (2.17)$$

olur. (Dolapçı 1996)

3. III. MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DEKNKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN CHEBYSHEV- KOLLOKASYON YÖNTEMİ

3.1. Diferansiyel Denklemin Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bu bölümde üçüncü mertebeden lineer

$$L(x)y'''+P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad (3.1)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L(x), P(x), Q(x), R(x) ve f(x) fonksiyonlarının $-1 \le x \le 1$ veya $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlandığını varsayıyoruz. Amacımız Chebyshev sıralama noktalarına kullanarak, bu denklemin çözümünü

$$y(x)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \qquad (3.2)$$

kesilmiş (sonlu) Chebyshev serisi veya

$$[y(x)]=T_x A \qquad (3.3)$$

matris formunda bulmaktır. Burada, $T_r(x)$, (1.4) de tanımlanan Chebyshev polinomlarıdır. a_r ise tayin edilecek Chebyshev katsayılardır. Sırasıyla T_x ve A matrisleri

$$T_x=[T_0(x),T_1(x),\ldots,T_N(x)]$$

$$A=\left[\frac{1}{2}a_0 \;\; a_1 \ldots a_N\right]^T$$

şeklinde tanımlanır.

x_j $(j=0,1,\ldots,N)$ Chebyshev sıralama noktalarını (3.1) denkleminde yerine koyarsak,

$$L(x_j)y'''+P(x_j)y''(x_j)+Q(x_j)y'(x_j)+R(x_j)y(x_j)=f(x_j)$$

şeklinde elde edilir. Daha açık olarak yazarsak,

$$L(x_0)y'''(x_0)+P(x_0)y''(x_0)+Q(x_0)y'(x_0)+R(x_0)y(x_0)=f(x_0)$$

$$L(x_1)y'''(x_1)+P(x_1)y''(x_1)+Q(x_1)y'(x_1)+R(x_1)y(x_1)=f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$L(x_N)y'''(x_N)+P(x_N)y''(x_N)+Q(x_N)y'(x_N)+R(x_N)y(x_N)=f(x_N) \qquad (3.4)$$

Bu sistemi, matris formunda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} L(x_0) & 0 & & 0 \\ 0 & L(x_1) & & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & L(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''' & (x_0) \\ y''' & (x_1) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ y''' & (x_N) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} P(x_0) & 0 & & 0 \\ 0 & P(x_1) & & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & P(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' & (x_0) \\ y'' & (x_1) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ y'' & (x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q(x_0) & 0 & & 0 \\ . & Q(x_1) & & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & Q(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' & (x_0) \\ y' & (x_1) \\ . & \\ . & \\ . & \\ y' & (x_N) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} R(x_0) & 0 & & 0 \\ 0 & R(x_1) & & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & R(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & (x_0) \\ y & (x_1) \\ . & \\ . & \\ . & \\ y & (x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & (x_0) \\ f & (x_1) \\ . & \\ . & \\ . & \\ f & (x_N) \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$LY''' + PY'' + QY' + RY = F \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir.

Diğer yandan, $x=x_j$ Chebyshev kollokasyon noktalarından çözüm ve türevleri,

$$y(x_j) = \sum_{r=0}^{N}{}'' a_r T_r(x_j) \tag{3.6}$$

$$y'(x_j) = \sum_{r=0}^{N}{}'' a_r^{(1)} T_r(x_j) \tag{3.7}$$

$$y''(x_j) = \sum_{r=0}^{N}{}'' a_r^{(2)} T_r(x_j) \tag{3.8}$$

$$y'''(x_j) = \sum_{r=0}^{N}{}'' a_r^{(3)} T_r(x_j)$$

dir.

J=0,1,…,N olduğuna göre, (3.6) sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ . \\ . \\ . \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(x_0)\, T_1(x_0) . & . & . T_N(x_0) \\ T_0(x_1)\, T_1(x_1) . & . & . T_N(x_1) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ T_0(x_N)\, T_1(x_1) . & . & . T_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_N \end{bmatrix}$$

veya

$$Y=TA \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.7) ve (3.8) sistemlerinin matris formları

$$Y' = TA^{(1)},\ Y'' = TA^{(2)}\ ve\ Y''' = TA^{(3)} \tag{3.10}$$

dır

(3.9) ve (3.10) de elde edilen matrisleri (3.5) denkleminde yerine yazarsak

$$LTA^{(3)} + PTA^{(2)} + QTA^{(1)} + RTA = F$$

elde ederiz. (1.21) bağıntısından

$$A^{(3)} = 8M^3A\ ,\ A^{(2)} = 4M^2A\ ,\ A^{(1)} = 2MA$$

olduğu için, bu matris denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$LT8M^3A + PT4M^2A + QT2MA + RTA = F$$

$$(8LTM^3 + 4PTM^2 + 2QTM + RT)A = F \tag{3.11}$$

Sonuç olarak, (3.1) diferansiyel denklemi cebirsel katsayılı (3.11) matris denklemine dönüştürülmüş olur. Bu matris denkleminin veya lineer denklem sisteminin genişletilmiş matris formu,

$$W=[W_{ij}] = 8LTM^3 + 4PTM^2 + 2QTM + RT, \qquad j=0,1,\ldots, N$$

$$WA = F$$

olmak üzere,

$$[W;F]=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-1}) \\ w_{N,0} & w_{N,1} & & w_{N,N} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2. Koşulların Matris Formu

Şimdi, (1.2) de tanımlanan

$$\sum_{i=0}^{1}\left[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)\right]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)\right]=\mu$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[t_i y^{(i)}(-1)+k_i y^{(i)}(1)+z_i y^{(i)}(c)\right]=\eta$$

karışık koşullarını ele alalım. II.mertebedeki denklemlerde olduğu gibi $y^{(i)}(-1)$, $y^{(i)}(1)$, $y^{(i)}(c)$ ifadeleri (1.2) koşullarında yerine konulursa ve düzenlenirse

$$y^{(0)}(-1)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(-1) \Rightarrow [y^{(0)}(-1)] = T_x(-1)A$$

$$y^{(0)}(1)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(1) \Rightarrow [y^{(0)}(1)] = T_x(1)A$$

$$y^{(0)}(c)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(c) \Rightarrow [y^{(0)}(c)] = T_x(c)A$$

$$y^{(1)}(-1)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r{}^{(1)} T_r(-1) \Rightarrow [y^{(1)}(-1)] = 2T_x(-1)MA$$

$$y^{(1)}(1)=\sum_{r=0}^{N}{}' a_r{}^{(1)} T_r(1) \Rightarrow [y^{(1)}(1)] = 2T_x(1)MA$$

$$y^{(1)}(c)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(1)}T_r(c)\Rightarrow[y^{(1)}(c)]=2T_x(c)MA$$

$$y^{(2)}(-1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(2)}T_r(-1)\Rightarrow[y^{(2)}(-1)]=2^2T_x(-1)M^2A$$

$$y^{(2)}(1)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(2)}T_r(1)\Rightarrow[y^{(2)}(1)]=2^2T_x(1)M^2A$$

$$y^{(2)}(c)=\sum_{r=0}^{N}{}'a_r{}^{(2)}T_r(c)\Rightarrow[y^{(2)}(c)]=2^2T_x(c)M^2A$$

, kısaca

$$[u_0\,u_1...u_N]A=[\lambda]\quad veya\quad UA=[\lambda]$$
$$[v_0\,v_1...v_N]A=[\mu]\quad veya\quad VA=[\mu]$$
$$[d_0\,d_1\,...\,d_N]A=[\eta]\quad veya\quad DA=[\eta]$$

satır matrisleri elde edilir.

Bunların genişletilmiş matris formları;

$$[U;\lambda]\ ;\ [V;\mu]\ ;\ [D;\eta] \tag{3.13}$$

dir. Daha açık

$$[u_0u_1...u_N;\lambda]\ ;\ [v_0v_1...v_N;\mu]\ ve\ [d_0d_1...d_N;\eta]$$

olarak yazılabilir.

3.3. Matris Denkleminin Çözümü

Matris denkleminin çözümü aşağıdaki gibi olur. Başlangıç koşullarını matris formunda yerine koyarsak

$$[\tilde{W};\tilde{F}]=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,N} & ; & f_{(x_0)} \\ . & . & \dots & . & ; & . \\ . & . & \dots & . & ; & . \\ w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & \dots & w_{N-3,N} & ; & f(x_{N-3}) \\ u_0 & u_1 & \dots & u_N & ; & \lambda \\ v_0 & v_1 & \dots & v_N & ; & \mu \\ d_0 & d_1 & \dots & d_N & ; & \eta \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

şeklinde ifade edilir.

(3.14) genişletilmiş matrisi kısaca

$$\tilde{W}\,A = \tilde{F} \tag{3.15}$$

formunda matris denklemine dönüştürülür. Burada $\tilde{W},\ \tilde{F},\ A$ matrisleri

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & . & . & . & w_{N-3,N} \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N \\ d_0 & d_1 & . & . & . & d_N \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = [f(x_0), f(x_1)\ \ldots\ f(x_{N-3}), \lambda, \mu, \eta]^T$$

$$A = [\frac{1}{2}a_0\ a_1\ \ldots\ a_N]^T$$

olarak tanımlanır.

Eğer rank $\tilde{W} = rank[\tilde{W};\tilde{F}] = N+1$ ise yani $\det\tilde{W} \neq 0$ ise, (3.15) matris denklemini

$$A = \tilde{W}^{-1}\,\tilde{F} \tag{3.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (3.16) denkleminden $\frac{1}{2}a_0\ a_1,\ldots a_N$ katsayılarını tek olarak tayin edebiliriz. Dolayısıyla (1.2) koşullarına göre (3.1) diferansiyel denklemi tek çözümü sahip olur.

Bu çözüm

$$[y(x)] = T_x A$$

veya

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' a_r T_r(x) \tag{3.17}$$

olur.

4. II. MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

4.1. II.Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Taylor Serisi İle Çözümü

İkinci mertebeden *P (x), Q (x), R (x), f (x)* değişken katsayılı

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1\le x\le 1 \qquad (4.1)$$

lineer diferansiyel denklemini

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)]=\mu \qquad -1\le c\le 1 \qquad (4.2)$$

$a_i,b_i,c_i,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\lambda,\mu$ reel katsayılar , $a\le c\le b$ olmak üzere başlangıç değerleri yardımı ile Taylor serisi kullanılarak

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^n \qquad a\le c\le b \qquad (4.3)$$

$n=0,1,2,.....N$ olmak üzere yukarıdaki şekilde yaklaşık çözümü bulunur.

4.2. Taylor Katsayılarının Matris Formuna Dönüştürülmesi

Her x değeri için *y (x)* in Taylor seri açılımı

$$y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(x-c)^r$$

şeklindedir. *y (x)* in n. dereceden türevi için ise Taylor seri açılımı

$$y^{(n)}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^{(n)}(x-c)^r$$

şeklinde olur. Bu $y^{(n)}(x)$ ve $y^{(n+1)}(x)$ açılımlarından faydalanarak serilerin katsayıları olan $a_r^{(n)}$ ve $a_r^{(n+1)}$ ifadeleri arasında

$$a_r^{(n+1)}=(r+1)a_{r+1}^{(n)} \qquad (4.4)$$

bağıntısı bulunur. Burada $r=0,1,2,.....N$ degerleri eşitlikte tek tek yerine koyulursa

$$A^{(n+1)} = MA^{(n)} \tag{4.5}$$

şeklinde bir matris formu elde edilir. (4.5) deki $A^{(n)}$ ve M aşağıdaki gibidir.

$$A^{(n)} = [a_0{}^{(n)}, a_1{}^{(n)} \ldots a_N{}^{(n)}]^T$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . . \\ . & . & . & . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \lfloor & & & & & & & & & \rfloor \end{bmatrix}$$

$n = 0,1,2,.....$ için bu matrisin n. mertebesi

$$A^{(1)} = MA$$

$$A^{(2)} = MA^{(1)} = M^2 A$$

$$\vdots$$

$$A^{(n)} = MA^{(n-1)} = M^n A \tag{4.6}$$

şeklinde bulunur.

4.3. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Matris Formuna Çevrilerek Çözümü

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

Lineer diferansiyel denklemindeki katsayıları (4.6) daki Taylor serisi şeklinde ifade edecek olursak

$$P(x) = \sum_{i=0}^{I} p_i (x-c)^i \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{I} q_i (x-c)^i \qquad R(x) = \sum_{i=0}^{I} r_i (x-c)^i \tag{4.7}$$

eşitliklerini elde ederiz.

(4.7) de elde ettiğimiz bu I.dereceden Taylor polinomlarını (4.1) de yerine koyarsak

$$\sum_{i=0}^{I}\left\{p_i(x-c)^i y''+q_i(x-c)^i y'+r_i(x-c)^i y\right\}=f(x) \qquad (4.8)$$

elde edilir.

Taylor serisinin genel ifadesinden

$$\left[(x-c)^p y^{(s)}(x)\right]=XC_p A^{(s)} \qquad (4.9)$$

matris formu kabul edilirse (4.6) dan $A^{(s)} = M^{(s)}A$ olur. Bu ifadeyi yerine koyarsak

$$\left[(x-c)^p y^{(s)}(x)\right] = XC_p M^s A$$

elde edilir. Buradan

$$X = [1,(x-c),(x-c)^2 \ldots\ldots (x-c)^N]$$

P=0 için,

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

P=1 için,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P \rangle 1$ ise ,

$$C_p=\left[C_{ij}\right]=\begin{cases}1, & i-j=p \\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

dir.

f (x) fonksiyonu ise,

$$f(x)=\sum_{r=0}^{N} f_r (x-c)^r$$

$$\left[f(x)\right]=XF \tag{4.10}$$

matris formu şeklindedir.Burada

$$F = [\, f_0 \,,\, f_{1,} f_{2,} \cdots f_N \,]^T$$

dir.

(4.9) ifadesini (4.8) ifadesinde yerine koyarsak

$$\sum_{i=0}^{I} \left\{ p_i C_i M^2 + q_i C_i M + r_i C_i \right\} A = F \tag{4.11}$$

matris eşitliği elde ederiz.

$$W = \left[W_{mn}\right] = \sum_{i=0}^{I} \left\{ p_i C_i M^2 + q_i C_i M + r_i C_i \right\}$$

kabul edilirse

$$WA = F \tag{4.12}$$

elde edilir.

$m, n = 0,1,2,...N$ ve $I = 0,1,2,...$ noktaları için

$$[W;F] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & . & . & . & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & . & . & . & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-1}) \\ w_{N,0} & w_{N,1} & . & . & . & w_{N,N} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

matrisi bulunur.

$$y^{(n)}(x)=\sum_{r=1}^{\infty} a_r^{(n)} (x-c)^r$$

serisinde $n=1$ için

$$y^{(0)}(x)=\left[1,(x-c),(x-c)^2,\ \ldots\ ,(x-c)^N\right]A$$

ve

$$y^{(1)}(x)=\left[0,1,(x-c),(x-c)^2,\ \ldots\ ,(x-c)^{N-1}\right]A$$

eşitliklerinden

$$A=[a_0\ ,a_1\ \ldots\ldots\ldots a_N\ ]^T$$

olmak üzere,

$y^{(i)}(a), y^{(i)}(b)$ ve $y^{(i)}(c)$, $i=0,1$ için başlangıç değer ifadelerinin açılımı , $h=a-c$, $k=b-c$ kabul edilirse

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(c)&=\left[1,0,0,0\ldots\ldots\ldots\ldots,0\right]A\\
y^{(0)}(a)&=\left[1,h,h^2,\ldots\ldots\ldots\ldots,h^N\right]A\\
y^{(0)}(b)&=\left[1,k,k^2,\ldots\ldots\ldots\ldots,k^N\right]A\\
y^{(1)}(c)&=\left[0,1,0,0\ldots\ldots\ldots\ldots,0\right]A\\
y^{(1)}(a)&=\left[0,1,h,h^2\ldots\ldots\ldots\ldots,h^{N-1}\right]A\\
y^{(1)}(b)&=\left[0,1,k,k^2\ldots\ldots\ldots\ldots,k^{N-1}\right]A
\end{aligned}\qquad (4.15)$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda bulunan değerleri (4.2) deki başlangıç değerlerinde yerlerine koyarsak

$$UA=[\lambda]\quad \text{ve}\quad VA=[\mu]$$

şeklinde matris eşitliklerini buluruz.

Buradan ise

$$\begin{aligned}
\bar{U}&=\left[u_0\ \ u_1\ \ u_2\ \ u_3\ \ u_4\,;\,\lambda\right]\\
\bar{V}&=\left[v_0\ \ v_1\ \ v_2\ \ v_3\ \ v_4\,;\,\mu\right]
\end{aligned}\qquad (4.16)$$

şeklinde matris formu bulunur.

Bulmuş olduğumuz bu başlangıç değer matrislerini (4.14) deki $[W;F]$ matris formunun son iki satıra yerleştirirsek

$$[\overline{W}:\overline{F}]=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & . & . & . & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & . & . & . & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-2}) \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N & ; & \lambda \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N & ; & \mu \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

matris formu elde edilir. Burada W ve F matrisleri

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & . & . & . & w_{N-2,N} \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N \end{bmatrix}$$

$$\overline{F}=[f(x_0), f(x_1).....f(x_{N-2}), \lambda, \mu]^T$$

şeklindedir.

Eğer $\det \overline{W} \neq 0$ ise A matrisi

$$A=\overline{W}^{-1}\overline{F} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Bu matriside (4.3) de yerine koyarsak çözüm olan $y(x)$ i buluruz.

(Keşan 2002)

5. III. MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

5.1. III.Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Taylor Serisi İle Çözümü

Üçüncü mertebeden *L (x), P (x), Q (x), R (x), f (x)* değişken katsayılı

$$L(x)y'''+P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1\le x\le 1 \qquad (5.1)$$

lineer diferansiyel denklemini

$$\sum_{i=0}^{1}[a_i y^{(i)}(-1)+b_i y^{(i)}(1)+c_i y^{(i)}(c)]=\lambda$$

$$\sum_{i=0}^{1}[\alpha_i y^{(i)}(-1)+\beta_i y^{(i)}(1)+\gamma_i y^{(i)}(c)]=\mu$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[t_i y^{(i)}(-1)+k_i y^{(i)}(1)+z_i y^{(i)}(c)\right]=\eta \qquad -1\le c\le 1 \qquad (5.2)$$

$a_i,b_i,c_i,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,t_i,k_i,z_i,\lambda,\mu,\eta$ reel katsayılar , $a\le c\le b$ olmak üzere başlangıç değerleri yardımı ile Taylor serisi kullanılarak

$$y(x)=\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{n!}\,y^{(n)}(c)(x-c)^n \qquad a\le c\le b \qquad (5.3)$$

$n=0,1,2,.....N$ olmak üzere yukarıdaki şekilde yaklaşık çözümü bulunur.

5.2. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Matris Formuna Çevrilerek Çözümü

$$L(x)y'''+P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x) \qquad -1\le x\le 1$$

Lineer diferansiyel denklemindeki katsayıları Taylor serisi şeklinde ifade edecek olursak

$$L(x)=\sum_{i=0}^{I}l_i(x-c)^i \quad P(x)=\sum_{i=0}^{I}p_i(x-c)^i \quad Q(x)=\sum_{i=0}^{I}q_i(x-c)^i \quad R(x)=\sum_{i=0}^{I}r_i(x-c)^i \qquad (5.4)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Elde ettiğimiz bu Taylor polinomlarını (5.1) de yerine koyarsak

$$\sum_{i=0}^{I}\left\{l_i(x-c)^i y'''+p_i(x-c)^i y''+q_i(x-c)^i y'+r_i(x-c)^i y\right\}=f(x) \qquad (5.5)$$

elde edilir.

$$\left[(x-c)^p y^{(s)}(x)\right] = XC_p M^s A$$

eşitliğini (5.5) ifadesinde yerine koyarsak

$$\sum_{i=0}^{I}\left\{l_i C_i M^3 + p_i C_i M^2 + q_i C_i M^1 + r_i C_i\right\} A = F \tag{5.6}$$

matris eşitliğini elde ederiz.

$$W = \left[W_{mn}\right] = \sum_{i=0}^{I}\left\{l_i C_i M^3 + p_i C_i M^2 + q_i C_i M^1 + r_i C_i\right\}$$

kabul edilirse

$$WA = F \tag{5.7}$$

elde edilir.

$m, n = 0,1,2,...N$ ve $I = 0,1,2,...$ noktaları için

$$[W;F] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & . & . & . & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & . & . & . & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-1}) \\ w_{N,0} & w_{N,1} & . & . & . & w_{N,N} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

matrisi bulunur. Başlangıç koşullarından ise

$$y^{(0)}(c) = \left[1,0,0,0.....,0\right] A$$

$$y^{(0)}(a) = \left[1,h,h^2,.....,h^N\right] A$$

$$y^{(0)}(b) = \left[1,k,k^2,.....,k^N\right] A \tag{4.15}$$

$$y^{(1)}(c) = \left[0,1,0,0.....,0\right] A$$

$$y^{(1)}(a) = \left[0,1,h,h^2.....,h^{N-1}\right] A$$

$$y^{(1)}(b) = \left[0,1,k,k^2.....,k^{N-1}\right] A$$

$$y^{(2)}(c) = \left[0,0,1,0.....,0\right] A$$

$$y^{(2)}(a) = \left[0,0,1,h,h^2.....,h^{N-2}\right] A$$

$$y^{(2)}(b) = \left[0,0,1,k,k^2..... ,k^{N-2}\right] A$$

ifadelerinden faydalanarak

$$[U;\lambda] \;;\; [V;\mu] \;;\; [D;\eta]$$

şeklinde matris eşitliklerini buluruz. Buradan ise

$$\overline{U} = \left[u_0 \;\; u_1 \;\; ... \;\; u_N \,;\, \lambda\right]$$

$$\overline{V} = \left[v_0 \;\; v_1 \;\; ... \;\; v_N \,;\, \mu\right]$$

$$\overline{D} = \left[d_0 \;\; d_1 \;\; ... \;\; d_N \,;\, \eta\right] \qquad (5.10)$$

matris formu bulunur.

Bulmuş olduğumuz bu başlangıç değer matrislerini (5.8) deki $[W;F]$ matris formunun son üç satıra yerleştirirsek

$$[\overline{W} : \overline{F}] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & ... & w_{0,N} & ; & f_{(x_0)} \\ . & . & ... & . & ; & . \\ . & . & ... & . & ; & . \\ w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & ... & w_{N-3,N} & ; & f(x_{N-3}) \\ u_0 & u_1 & ... & u_N & ; & \lambda \\ v_0 & v_1 & ... & v_N & ; & \mu \\ d_0 & d_1 & ... & d_N & ; & \eta \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

matris formu elde edilir. Burada W ve F matrisleri

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & . & . & . & w_{N-3,N} \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N \\ d_0 & d_1 & . & . & . & d_N \end{bmatrix}$$

$$\overline{F} = [f(x_0), f(x_1).....f(x_{N-3}), \lambda, \mu, \eta]^T$$

şeklindedir.

Eğer $\det \overline{W} \neq 0$ ise A matrisi

$$A = \overline{W}^{-1}\overline{F} \tag{5.12}$$

şeklindedir. Bu matriside (5.3) de yerine koyarsak çözüm olan $y(x)'$ i buluruz.

6. UYGULAMALAR

Bu çalışmada, verilen Chebyshev-kollokasyon yöntemi, verilen koşullara göre lineer diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü bulmada yararlıdır. Bunu aşağıdaki örneklerle açıklayabiliriz.

ÖRNEK 1:

$$y''+xy'+xy=1+x+x^2 \qquad -1\le x\le 1$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$$

denklemindeki çözüm olan y(x) i bulalım.

Çözüm 1:

$$y''+xy'+xy=1+x+x^2 \qquad -1\le x\le 1$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1 \qquad (6.1)$$

problemini göz önüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x)=\sum_{r=0}^{4}{}'a_r T_r(x) \qquad -1\le x\le 1$$

Chebyshev serisiyle (N=4 dördüncü dereceli Chebyshev polinomları cinsinden) yaklaşalım. Chebyshev-sıralama noktalarını, N=4 için, Kısım (1.4) den,

$$x_0=-1,\quad x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=0,\quad x_3=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_4=1$$

olarak alalım.

$$P(x)=1,\ Q(x)=x,\quad R(x)=x \quad ve\ F(x)=1+x+x^2$$

olduğu için, bu fonksiyonların matris formunda gösterimini (2.5) bağıntısından

$$P=\begin{bmatrix} p(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & P(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & P(x_N) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} Q(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & Q(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & Q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} R(x_0) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & R(x_1) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & R(x_N) \end{bmatrix}$$

değerler yerlerine koyulursa,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} & 1 & \\ \frac{3}{2} & - & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & \\ \frac{3}{2} & + & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & 3 & \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

olarak bulunur.

N=4 için; (2.11) matris denklemi

$$(4PTM^2+2QTM+RT)A=F \qquad (6.3)$$

olur.

$$T=\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & . & . & . & T_N(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & . & . & . & T_N(x_1) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ T_0(x_N) & T_1(x_N) & . & . & . & T_N(x_N) \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

N=4 olduğu için ;

$$M=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıda tanımlanan P, Q, R, F, M, T matrisleri (4.3) denkleminde yerine koyulursa (2.12) bağıntısından genişletilmiş matrisi

$$W=[W_{ij}]=4PTM^2+2QTM+RT, \qquad j=0,1,\ldots, N$$

$$WA=F$$

$$[W;F]=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} & ; & f(x_0) \\ w_{1,0} & w_{1,1} & . & . & . & w_{1,N} & ; & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ . & . & . & . & . & . & ; & . \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & . & . & . & w_{N-1,N} & ; & f(x_{N-1}) \\ w_{N,0} & w_{N,1} & . & . & . & w_{N,N} & ; & f(x_N) \end{bmatrix}$$

$$[W;F]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & -32 & 95 & ; & 1 \\ -0.7071 & -0.2071 & 6 & -19.7071 & 32.7071 & ; & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -16 & ; & 1 \\ 0.7071 & 1.2071 & 6 & 18.5918 & 31.2928 & ; & \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 2 & 9 & 34 & 97 & ; & 3 \end{bmatrix} \qquad (6.4)$$

olarak buluruz.

Koşullarla ilgili genişletilmiş matris,

$$[U;\lambda]\ ;\ [V;\mu]$$

$$[1\ 0\ -1\ 0\ 1\ ;1\ ]\ ve\ [1\ 4\ 1\ 0\ 1\ ;\ -1] \qquad (6.5)$$

şeklinde olur. (4.4) matrisinin son iki satırının yerine (4.5) satır matrislerini koyarak, (2.14) den, genişletilmiş matrisi

$$\tilde{W}=\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & . & . & . & w_{0,N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & . & . & . & w_{N-2,N} \\ u_0 & u_1 & . & . & . & u_N \\ v_0 & v_1 & . & . & . & v_N \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{W};\tilde{F}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & -32 & 95 & ; & 1 \\ -0.7071 & -0.2071 & 6 & -19.7071 & 32.7071 & ; & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -16 & ; & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & ; & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

Bunun çözümü ise,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & -32 & 95 \\ -0.7071 & -0.2071 & 6 & -19.5918 & 32.7071 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} - \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.29203481 \\ -0.65302322 \\ 0.30604642 \\ 0.03691853 \\ 0.0140116 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, bu katsayıları (2.17) de yerine koyarak, (4.1) probleminin çözümünü

$y(x)=1.292\ T_0(x) -0.65302\ T_1(x) + 0.306\ T_2(x) +0.03691\ T_3(x)+ 0.01401\ T_4(x)$

şekline getiririz ve burada $T_r(x)$ lerin x cinsinden değerlerini yerlerine koyarsak

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$y(x)=1-0.76377881\ x + 0.50000004\ x^2 + 0.14767412\ x^3 + 0.1120928\ x^4$$

çözümünü elde ederiz. (Fox 1969 ; Sezer,M and Kaynak 1996 ; Dolapçı 1996) Örnek 1 i Taylor serisi yardımı ile de çözelim.

<u>Çözüm 2:</u>

$$y'' + xy' + xy = 1 + x + x^2 \qquad -1 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) + 2y(1) - y(-1) = -1$$

Yukarıdaki lineer diferansiyel denklem Taylor serisi yardımı ile

$$y(x)=\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)x^n$$

şeklinde bulunur. Burada $N=4$, $a=-1$, $c=o$, $b=1$ dir. Ayrıca

$P(x)=1$, $Q(x)=x$, $R(x)=x$ ve $f(x)=1+x+x^2$ ifadeleri x'e bağlı fonksiyonlardır. (3.8) deki p_i , q_i , r_i katsayıları

$$p_0=1\ ,\quad p_1=p_2=...=0$$

$$q_0=0\ ,\quad q_1=1\ ,\quad q_2=q_3=...=0$$

$$r_0=0\ ,\quad r_1=1\ ,\quad r_2=r_3=...=0$$

şeklindedir.

Çözüm için gerekli adımları gerçekleştirelim. $N=4$ için (3.11) den

$$\left\{C_0M^2+C_1M^1+C_1\right\}A=F$$

matris eşitliği elde edilir.

Burada C_0 , C_1, M (5x5), A ve F (5x1) matrisleri

$$C_0=\begin{bmatrix}1&0&0&.&.&0\\0&1&0&.&.&0\\0&0&1&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&.&.&1\end{bmatrix}\qquad C_1=\begin{bmatrix}0&0&0&.&.&0\\1&0&0&.&.&0\\0&1&0&.&.&0\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&.&1&0\end{bmatrix}$$

$$F=[1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\ ]^T\qquad A=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]^T$$

şeklindedir.

$$WA=F$$

ifadesi

$$[W;F]=\begin{bmatrix}0&0&2&0&0&;&1\\1&1&0&6&0&;&1\\0&1&2&0&12&;&1\\0&0&1&3&0&;&0\\0&0&0&1&4&;&0\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi başlangıç koşullarını değerlendirecek olursak

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$$

koşullardan $a=-1$, $c=o$, $b=1$ olduğu görülür. Buradan da (3.15) deki eşitliklerden faydalanarak

$$\overline{U}=[1\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ;1\ \ ] \quad ve \quad \overline{V}=[1\ 4\ 1\ 3\ 1\ ;-1\ ]$$

matrisleri elde edilir. Bulmuş olduğumuz $[W:F]$ ifadesinin W matrisinin son iki satırına $\overline{U}$ ve $\overline{V}$ matrislerini koyarsak

$$[\overline{W}:\overline{F}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

matrislerine ulaşırız.

Buradan

$$A=\overline{W}^{-1}\overline{F}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-30}{41} & \frac{1}{2} & \frac{5}{41} & \frac{5}{82} \end{bmatrix}^T$$

matrisi elde edilir. A matrisinde son olarak $y(x)$ de yerine koyarsak

$$y(x)\cong 1-\frac{30}{41}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{41}x^3+\frac{5}{82}x^4$$

Taylor serisi yardımı ile yaklaşık çözüm elde edilir ki buda Chebyshev polinomları ile elde edilen çözümün aynısıdır. (Keşan 2002)

ÖRNEK 2:

$$y''+y'x+y=e^x \qquad -1\le x\le 1 \qquad (6.6)$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=0$$

denklemindeki çözüm olan y(x) bulalım.

Çözüm 1:

$$y'' + y'x + y = e^x \quad -1 \le x \le 1 \tag{6.7}$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=0$$

problemini gözönüne alalım ve y(x) çözümüne

$$y(x) = \sum_{r=0}^{i}{}' a_r T_r(x), \qquad -1 \le x \le 1$$

sonlu Chebyshev serisiyle (N=4 dördüncü dereceli Chebyshev polinomları cinsinden) yaklaşalım, Chebyshev-Sıralama noktalarını, N=4 için, Kısım (1.4) den,

$$x_0 = -1, \qquad x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_4 = 1$$

olarak alalım.

P (x)=1, Q(x)=x, R(x)=1 ve f(x)=e^x olduğu için, bu fonksiyonların matris formunda gösterimlerini (2.5) bağıntısından

$$P = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0.3678 \\ 0,493 \\ 1 \\ 2.0281 \\ 2.7182 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

şeklinde elde ederiz.

N=4 için; (2.9) matris denklemi

$$(4PTM^2+2QTM+RT)A=F \tag{6.9}$$

olur.

Burada P, Q, R ve F matrisleri yukarıda tanımlandı ve M ile T matrisleride (1.20) ve (2.10) bağıntılarında verildi. (4.13) denkleminde bu matrisler yerine konulup düzenlenerek (2.12) bağıntısından genişletilmiş matris

$$[W;F]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -34 & 97 & ; & 0,4678 \\ 1 & -1,4142 & 6 & -18,3847 & 31 & ; & 0,403 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -15 & ; & 0 \\ 1 & 1,4142 & 6 & 18,3847 & 31 & ; & 2,0381 \\ 1 & 2 & 9 & 34 & 97 & ; & 2,2182 \end{bmatrix} \qquad (6.10)$$

olarak buluruz. Koşullarla ilgili genişletilmiş matris, (2.13) den,

[1 0 -1 0 1 ; 0] ve [1 1 1 1 1 ; 0] (6.11) olur.

(4.14) matrisinin son iki satırının yerine (4.15) satır matrisini koyarak, (2.14) den genişletilmiş matrisi

$$[W;F]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -34 & 97 & ; & 0,4678 \\ 1 & -1,4142 & 6 & -18,3847 & 31 & ; & 0,403 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -15 & ; & 0 \\ 1 & 1,4142 & 6 & 18,3847 & 31 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 34 & 97 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

Bunun çözümü ise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -34 & 97 \\ 1 & -1,4142 & 6 & -18,3847 & 31 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,4678 \\ 0,403 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,33046243 \\ -0,93984409 \\ 0,35728323 \\ 0,12527761 \\ 0,02682081 \end{bmatrix}$$

olur.

Böylece, bu katsayıları (2.17) de yerine koyarak, problemin çözümünü

$y(x)=0.3304T_0(x)-0,9398T_1(x)+0,3572T_2(x)+0,2252T_3(x)+0,0268T_4(x)$

ya da

$y(x)=1.10^{-8}-1,61567692x+0,49999998x^2+0,90111044x^3+0,21456648x^4$

olarak buluruz.(Sezer,M and Kaynak 1996)

Örnek 2 yi Taylor serisi yardımı ile de çözelim.

Çözüm 2:

$$y''+xy'+y=e^x \qquad -1\le x\le 1$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(1)-y(-1)=-1$$

Yukarıdaki lineer diferansiyel denklem Taylor serisi yardımı ile

$$y(x)=\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)x^n$$

şeklinde bulunur. Burada $N=4$, $a=-1$, $c=o$, $b=1$ dir. Ayrıca

$P(x)=1$, $Q(x)=x$, $R(x)=1$ ve $f(x)=e^x$ ifadeleri x'e bağlı

fonksiyonlardır.

(3.8) deki p_i , q_i , r_i katsayıları

$$p_0=1 \ , \quad p_1=p_2=...=0$$

$$q_0=0 \ , \quad q_1=1 \ , \quad q_2=q_3=...=0$$

$$r_0=1 \ , \quad r_1=r_2=r_3=...=0$$

şeklindedir.

Çözüm için gerekli adımları gerçekleştirelim. $N=4$ için (3.11) den

$$\left\{C_0M^2+C_1M^1+C_0\right\}A=F$$

$$W\ A\ =\ F$$

matris eşitliği elde edilir. Buradaki F matrisi

$$f(x)=\sum_{r=0}^{4}f_re^{(x-c)^r}$$

Taylor serisinden

$$F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Bu matrisleri yerine koyduğumuzda

$$[W;F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 12 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formu elde edilir.

Şimdi başlangıç koşullarını değerlendirecek olursak

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = 0$$

koşullardan $a = -1$, $c = o$, $b = 1$ olduğu görülür. Buradan da (3.15) deki eşitliklerden faydalanarak

$$\overline{U} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ;0\ ] \quad ve \quad \overline{V} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ;0\ ]$$

matrisleri elde edilir. Bulmuş olduğumuz $[W : F]$ ifadesinin W matrisinin son iki satırına $\overline{U}$ ve $\overline{V}$ matrislerini koyarsak

$$[W;F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 12 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerine ulaşırız.

Buradan

$$A = \overline{W}^{-1}\overline{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^T$$

matrisi elde edilir. A matrisinde son olarak $y(x)$ de yerine koyarsak

$$y(x) \cong 1 - \frac{8}{5}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^3 + \frac{1}{5}x^4$$

Taylor serisi yardımı ile yaklaşık çözüm elde edilir ki buda Chebyshev polinomları ile elde edilen çözümün aynısıdır.

ÖRNEK 3:

$$y'''+2xy''+6xy'-24y=-24-x+6x^2+x^3$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(0)=2 \qquad y''(1)+y(1)=0$$

denklemindeki çözüm olan $y(x)$ i bulalım.

Çözüm 1:

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n} a_r{}' T_r(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

Soruya yukardaki Chebyshev serisiyle (N=4 dördüncü dereceden Chebyshev polinomları cinsinden) yaklaşalım. Chebyshev-Kollokasyon noktalarını N=4 için

$$x_0=-1, \quad x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2=0, \quad x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_4=1$$

olarak alalım.

$L(x)=1,\ P(x)=2x,\ Q(x)=6x,\ R(x)=-24,\ f(x)=-24-x+6x^2+x^3$ olduğu için, bu fonksiyonların matris formunda gösterimlerini

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} -18 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}-21 \\ -24 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}-21 \\ -18 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde ederiz.

N=4 için; matris denklemi

$$(8LTM^3+4PTM^2+2QTM+RT)A=F$$

olur.

Burada L, P, Q, R ve F matrisleri yukarıda tanımlandı ve M ile T matrisleride biliniyor. Denkleminde bu matrisler yerine konulup düzenlenerek genişletilmiş matrisini

$$[W;F]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 24 & -75 & ; & -18 \\ -0,82 & -0,31 & 5 & -15,706 & 30,24 & ; & \frac{\sqrt{2}}{4}-21 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -8 & ; & -24 \\ 0,54 & 1,14 & 7 & 12,24 & 30,84 & ; & -\frac{\sqrt{2}}{4}-21 \\ -4 & 3 & 6 & 25 & 42 & ; & -18 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Koşullarla ilgili genişletilmiş matris, (2.13) den,

[1 0 -1 0 1 ; 1] , [2 1 -2 -3 2 ; 2] ve [1 1 5 25 81 ; 0] (6.11) olur.

W matrisinin son üç satırının yerine başlangıç koşullarının matrislerini koyarsak

$$[\square;\square]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 24 & -75 & ; & -18 \\ -0,82 & -0,31 & 5 & -15,706 & 30,24 & ; & \frac{\sqrt{2}}{4}-21 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & ; & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 2 & ; & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 25 & 81 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matris formunu buluruz.

Bunun çözümü ise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 24 & -75 \\ -0,82 & -0,31 & 5 & -15,706 & 30,24 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 25 & 81 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -18 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - 21 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,65 \\ 0,48 \\ -0,25 \\ 1,04 \\ -0,16 \end{bmatrix}$$

olur.

Böylece, bu katsayıları (2.17) de yerine koyarak, problemin çözümünü

$$y(x)=1,65T_0(x)+0,48T_1(x)-0,25T_2(x)+1,04T_3(x)-0,16T_4(x)$$

ya da

$$y(x)=1.08 + 0,04x - 0,48\,x^2 - 0,006x^3+0,038x^4$$

olarak buluruz

<u>Çözüm 2:</u>

$$y'''+2xy''+6xy'-24y=-24-x+6x^2+x^3$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)+2y(0)=2 \qquad y''(1)+y(1)=0$$

Yukarıdaki lineer diferansiyel denklem Taylor serisi yardımı ile

$$y(x)=\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)x^n$$

şeklinde bulunur. Burada $N=4$, $a=-1$, $c=0$, $b=1$ dir. Ayrıca

$L(x)=1$, $P(x)=2x$, $Q(x)=6x$, $R(x)=-24$ ve $f(x)=-24-x+6x^2+x^3$ ifadeleri x'e bağlı fonksiyonlardır.(3.8) deki p_i , q_i , r_i katsayıları

$$l_0=1 \ , \quad l_1=l_2=...=0$$

$$p_0 = 0 \ , \quad p_1 = 2 \quad p_2 = p_3 = ... = 0$$

$$q_0 = 0 \ , \quad q_1 = 6 \ , \ q_2 = q_3 = ... = 0$$

$$r_0 = -24 \ , \quad r_1 = r_2 = r_3 = ... = 0$$

şeklindedir.

Çözüm için gerekli adımları gerçekleştirelim. $N = 4$ için (3.11) den

$$\left\{C_0 M^3 + 2C_1 M^2 + 6C_1 M - 24C_0\right\} A = F$$

$$W \ A \ = \ F$$

matris eşitliği elde edilir. Buradaki F matrisi Taylor serisinden

$$F = \left[\ f_0 \ \ f_1 \ \ f_2 \ \ f_3 \ \ f_4 \ \right]$$

$$F = \left[\ -24 \ \ -1 \ \ 6 \ \ 1 \ \ 0 \ \right]$$

şeklinde bulunur.

Bu matrisleri yerine koyduğumuzda

$$\left[W; F\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & ; & -24 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 & ; & -1 \\ 12 & 1 & 0 & 3 & 1 & ; & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & ; & 1 \\ 24 & 0 & 1 & 0 & 10 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formu elde edilir.

Şimdi başlangıç koşullarını değerlendirecek olursak

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) + 2y(0) = 2 \qquad y''(1) + y(1) = 0$$

koşullardan $a = -1$, $c = o$, $b = 1$ olduğu görülür. Buradan da (3.15) deki eşitliklerden faydalanarak

$$\overline{U} = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ ; \ 1 \ ] \ , \ \overline{V} = [2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ ; \ 2 \ ] \ \ ve \ \ \overline{D} = [1 \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ ; \ 0 \ ]$$

matrisleri elde edilir. Bulmuş olduğumuz $\left[W : F\right]$ ifadesinin W matrisinin son üç satırına $\overline{U}$ ve $\overline{V}$ matrislerini koyarsak

$$\left[\overline{W};\overline{F}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -2 & 0 & ; & -24\\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 & ; & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & ; & 0\end{bmatrix}$$

matrislerine ulaşırız.

Buradan

$$A=\overline{W}^{-1}\overline{F}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{32} & \frac{-49}{96} & \frac{1}{64} & \frac{5}{132}\end{bmatrix}^{T}$$

matrisi elde edilir. A matrisinde son olarak $y(x)$ de yerine koyarsak

$$y(x)\cong 1+\frac{1}{32}x-\frac{49}{96}x^{2}+\frac{1}{64}x^{3}+\frac{5}{132}x^{4}$$

$$y(x)=1+0{,}031x-0{,}51x^{2}-0{,}015x^{3}+0{,}038x^{4}$$

Taylor serisi yardımı ile yaklaşık çözüm elde edilir ki buda Chebyshev polinomları ile elde edilen çözümle uyumludur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada analitik çözümü bulunamayan veya kolayca bulunamayan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Chebshev matris metodu ve Taylor matris metodu kullanılmıştır. Bu metotlar kullanılırken aynı zamanda uygulamaya yardımcı olan temel kavramlardan da bahsedilmiştir. Bu iki metotla da lineer diferansiyel denklemler çözülmüştür. Sonuçlar karşılaştırıldığında aşağı yukarı aynı sonuçların elde edildiği tespit edilmiştir. Sonuç olarak kesin çözümü olmayan lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşmak için Chebyshev veya Taylor matris metotları kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Albayrak, (2007), *Chebyshev Polinomlarının Matris Özellikleri ve Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulaması ,* Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla.

Basu, N. K. (1970), *A Chebyshev Series Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations Associated with Eigenvalue Problem,* SIAM J. Anal., Vol 10, No.1, 57-68.

Clenshaw, C. W. (1956), *The Numerical Solution of Linear Diferantial Equations in Chebyshev Series* Proc. Camb. Phil. Soc. 53, pp. 134-149.

Çelik, İ and Gokmen, G. (2005), *Approximate Solution of Periodic Sturm Liouville Problems with Chebyshev Collocation Method,* Applied Mathematics and Computation 170 (2005) 285–295.

Dolapçı, İ. T. (1996), *Lineer Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Chebyshev-Sıralama Yöntemi,* Yüksek Lisans Tezi, D.P.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

Elliot, D. (1964), *A Chebyshev Series Method for the Numarical Solition of Fredholm Integral Equations,* Computer Journal, v.6, pp. 102-110.

Fox, L. (1969), *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford University Press.

Günhan, B. C. (2001), *Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri,* Yüksek Lisans Tezi, D.E.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Kanwell, R. P. (1989), *A Taylor Expansion Approach For Solving Integral Equations* Int. J. Math. Educ. Sci. Techno., Vol. 20, No. 3, 411-414.

Kaynak, M. (1994), *Chebyshev Polynomial Solution of Linear Differential and Integral Equations,* Yüksek Lisans Tezi, D.E.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Keşan, C. (2003), *Taylor Polynomial Solutions of Linear Differential Equations* Applied Mathematics and Computation 142, 155-165.

Mason, J. C. (1967), *Chebyshev Polynomial Approximations for the L-Membrane Eigenvalue Problem,* SIAM J. App. Math., Vol. 15, No. 1. pp. 172-186.

Sezer, M and Kaynak, M. (1996), *Chebyshev Polynomial Solution of Linear Differential and Integral Equations,* Int. Journal of Mathematical Equatıon in Science and Tecnology.

Sezer, M. (1996), *A Method for the Apporoximate Solution of the Second Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials* Int.Journal of Mathematical Education in Science and Tecnolology.

Sezer, M. and Akyüz, A. (2002), *Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of High-Order Linear Differential Equations with Variable Coefficients,* Applied Mathematics and Computation 142, 237-247.

Yaşar, İ B. (1999), *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamalar,* Siyasal Kitabevi, Ankara.