T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM HALL OLAYININ NANO ÖLÇEKLİ YAPILARDA İNCELENMESİ

Ahmet Emre KAVRUK

DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
KONYA, 2010

ÖZET

Doktora Tezi

KUANTUM HALL OLAYININ NANO ÖLÇEKLİ YAPILARDA İNCELENMESİ

Ahmet Emre KAVRUK

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
2010, 119 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
Prof. Dr. Ülfet ATAV
Prof. Dr. Ayhan ÖZMEN
Prof. Dr. Haluk ŞAFAK
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

Bu çalışmada kuantum Hall olayı ve bu olayla bağlantılı olarak nano ölçekli yapılarda elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyelde gözlenen kenar etkileri kuramsal olarak incelenmiştir. İncelemede üç boyutlu Poisson denklemi ve Thomas-Fermi denklemi öz-uyumlu olarak çözülmüştür. Poisson denkleminin çözümünde Green fonksiyonları ve Fourier dönüşümü kullanılan çalışmamızın ilk aşamalarında elektronik Mach-Zehnder interferometresi incelenmiştir. Çalışmamızın kalan kısmında üç boyutlu Poisson denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Kuantum Hall çubuğunda oluşan sıkıştırılamaz şeritlerin konum ve kalınlıklarının sıcaklığa, manyetik alana, yapıdaki ortalama elektron yoğunluğuna, kapıların geometrisine ve kapılar üzerindeki gerilime bağlılığı incelenmiştir. Ayrıca üç boyutlu Poisson denklemini sayısal olarak çözdüğümüz hesaplama yöntemiyle Mach-Zehnder interferometresini incelemiş ve girişimin gözlenebilirliğindeki değişiklikler tespit edilmiştir. Elde edilen sonuçlar şimdiye kadar yapılan deneylerle ve teorik çalışmalarla karşılaştırılmış ve nitel olarak uyum gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Hall olayı, üç boyutlu Poisson denklemi, Thomas-Fermi yaklaşımı, sıkıştırılamaz şeritler, sıkıştırılabilir şeritler, kuantum Hall çubuğu, elektronik Mach-Zehnder interferometresi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INVESTIGATION OF QUANTUM HALL EFFECT IN NANOSTRUCTURES

Ahmet Emre KAVRUK

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
2010, 119 pages

Jury: Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL
Prof. Dr. Ülfet ATAV
Prof. Dr. Ayhan ÖZMEN
Prof. Dr. Haluk ŞAFAK
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

In this study, quantum Hall effect and the related edge effects observed in the electron distiribution and the screening potential in nano scale structures are theoretically investigated. Three dimentional Poisson equaiton and the Thomas-Fermi equation are solved self-consistently in the investigation. First, we studied electronic Mach-Zehnder interferometer where we used the Green functions and the Fouirer transforms for the solution of Poisson equation. In the rest of our study three dimentional Poisson equaiton is solved numerically. The locations and the widths of incompressible strips which are formed on a quantum Hall bar were investigated depending on temperature, magnetic field, average electron density and geometry and the potential of the gates. Mach-Zehnder interferometer was also investigated with the numerical method which we used for solving three dimentional Poisson equation and determined the variation in the visibility of interference. Obtained results are qualitatively in agreement with experiments and theoretical studies in the literature.

Key Words: Quantum Hall effect, three dimensional Poisson equation, Thomas-Fermi approximation, incompressible strips, compressible strips, quantum Hall bar, electronic Mach-Zhender interferometer.

ÖNSÖZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada, düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında gözlenen kuantum Hall olayı teorik olarak incelenmiştir.

Kuantum Hall olayı keşfedildiği 1985 yılından bu yana hem elektrik ölçüm sistemleri için bir direnç standardı oluşturması açısından hem de bu olay sırasında gözlenen ilginç fiziksel özellikler nedeniyle büyük bir ilgi odağı olmuştur. Olayın daha iyi anlaşılması ve ilginç fiziksel olayların daha iyi açıklanabilmesi için günümüze kadar birçok teorik ve deneysel çalışma yapılmıştır. Son yıllarda bu konu ülkemizde de ilgi odağı olmaya başlamıştır. Bu tez çalışmasının kuantum Hall olayının daha iyi anlaşılması adına bundan sonra ülkemizde bu konuda yapılacak çalışmalara ışık tutması açısından kayda değer bir çalışma olacağına inanıyoruz.

Sadece bu tez çalışması sırasında değil, lisans, yüksek lisans ve doktora çalışmalarım boyunca bana desteğini esirgemeyen ve danışmanlıktan daha fazla yardımı dokunan danışmanım sayın Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmam esnasında, kuantum Hall olayını çalışmak üzere bir araya gelmiş araştırmacılardan oluşan grubumuzun yardımlarını gördüm. Bu grubun üyeleri Prof. Dr. Hüseyin YÜKSEL, Prof. Dr. Ülfet ATAV, Arş. Grv. Ahmet Emre KAVRUK, Arş. Grv. Teoman ÖZTÜRK, Abdullah ÖZTÜRK ve Alptekin YILDIZ dır. Bu tez çalışmam sırasında her türlü destek, öneri ve yardımlarıyla ilerleme yolumu aydınlatan sayın Prof. Dr. Ülfet ATAV'a çok teşekkür ederim. Çalışma grubundaki diğer araştırıcılar Arş. Grv. Teoman ÖZTÜRK, Abdullah ÖZTÜRK ve Alptekin YILDIZ'ın da çok büyük maddi ve manevi katkıları olmuştur. Çok sevdiğim, değer verdiğim ve ayrıca kendilerine borçlu hissettiğim bu arkadaşlara minnettarlığımı zikretmek istiyorum.

Çalışmanın özellikle Thomas-Fermi kısmında deneyimini ve bilgilerini bizden hiç esirgemeyen sayın Yrd. Doç. Dr. Berna GÜLVEREN'e çok teşekkür ederim. Yine çalışma boyunca dolaylı ya da dolaysız destek veren Selçuk

Üniversitesi Fizik Bölümünde görev yapan sayın hocalarıma ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Konuyla bizleri tanıştıran, bilgi ve deneyimlerini bizimle paylaşan Prof. Dr. R. Rolf GERHARDTS ve Yrd. Doç. Dr. Afif SIDDIKİ'ye çok teşekkür ederim. Bizleri Prof. Dr. R. Rolf GERHARDTS ve Yrd. Doç. Dr. Afif SIDDIKİ ile tanıştıran ve Turunç/ Marmaris'de Teorik ve Uygulamalı Fizik Enstitüsü'nde (Institute of Theoritical Applied Physics, ITAP) bize konaklama ve çalışma imkanı sunan Prof. Dr. Tuğrul HAKİOĞLU'na da çok teşekkür ederim.

Bu çalışmamda S. Ü. Bilimsel Araştırma Projesi Koordinatörlüğünce (BAP) desteklenen 07101003 nolu projeden alınan yazılımlar ve 07101037 nolu projeden alınan Sun Fire X2200 makineler kullanılmıştır. BAP ofise bu desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Bu doktora çalışmam boyunca TÜBİTAK'a bağlı Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı (BİDEB) tarafından yurt içi doktora burs programı ile desteklenmekte idim. Sağladıkları burs nedeniyle BİDEB'e teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak da tüm hayattım boyunca bana doğru yolu gösteren ve akademik ilerlememde maddi ve manevi desteğini gördüğüm aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ahmet Emre KAVRUK

Mart 2010 Konya

SEMBOL VE KISALTMALAR TABLOSU

e	Elektron yükü
h	Planck sabiti
ℓ	Manyetik uzunluk
m	Elektron kütlesi
α	İnce yapı sabiti
ϵ	Malzemenin dielektrik sabiti
μ	Elektronların kimyasal potansiyeli
σ	İletkenlik
τ	Durulma zamanı
ν	Doluluk çarpanı
$\vec{A}$	Vektör potansiyeli
$\vec{B}$	Manyetik alan
$\vec{E}$	Elektrik alan
I	Akım
$\vec{J}$	Akım yoğunluğu
$\vec{k}$	Dalga vektörü
$\vec{R}$	Üç boyutlu yer değiştirme vektörü
Ω	İki Landau seviyesi arasındaki enerji farkı
a_0	Etkin Bohr yarıçapı
g_s	Spin dejenereliği
k_b	Boltzman sabiti
m^*	Etkin kütle

n_d	Verici atomların yoğunluğu
$\bar{n}_e$	Ortalama elektron yoğunluğu
σ_0	B=0 da iletkenlik
ω_c	Siklotron frekansı
n_{el}	Yüzeysel elektron yoğunluğu
ρ_{xx}	Boyuna özdirenç
ρ_{xy}	Enine özdirenç
D_0	B=0 da durum yoğunluğu
E_F	Fermi enerjisi
E_n	n. Landau seviyesinin enerjisi
N_v	Atom başına valans elektron sayısı
R_H	Hall direnci
V_L	Sol kapı gerilimi
V_R	Sağ kapı gerilimi
V_x	Hall gerilimi
V_y	Boyuna gerilim
ϕ_0	Manyetik alan kuantumu
$V_{çv}$	Kapılar, verici atomlar ve kenar etkilerinden ileri gelen potansiyel
V_{Hr}	Hartree Potansiyeli
$\vec{\nabla}^2$	Laplace operatörü
AD	Ardışık Durulma (yöntemi)
DA	Durulma Altı (yöntemi)
DÇ	Doluluk Çarpanı
KG	Kapı Gerilimi

LB	Landauer- Büttiker
NR	Newton Raphson (yöntemi)
PP	Perdelenmiş Potansiyel
SŞ	Sıkıştırılabilir Şerit
D(E)	Durum yoğunluğu
$\epsilon(q)$	Thomas Fermi dielektrik fonksiyonu
w(E)	Birim alan başına girilebilir durum sayısı
W(E)	Girilebilir durum sayısı
AAD	Ardışık Aşırı Durulma (yöntemi)
KNK	Kuantum Nokta Kontak
KPG	Perdelenmemiş Potansiyel
MDE	Moleküler Demet Epitaksi
MZI	Mach-Zehnder Interferometre
PMP	Perdelenmemiş Potansiyel
SZŞ	Sıkıştırılamaz Şerit
$G(\vec{r},\vec{r}')$	Green fonksiyonu
$K(\vec{r},\vec{r}')$	Kernel fonksiyonu
2BEG	2 Boyutlu Elektron Gazı
2BES	2 Boyutlu Elektron Sistemi
KLHO	Klasik Hall Olayı
KUHO	Kuantum Hall Olayı
SZKD	Sıkıştırılamaz Kenar Durumu
$\rho(x,y,z)$	Hacimsel yük yoğunluğu
KKUHO	Kesirli Kuantum Hall Olayı

MOYAET	Metal Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistor
TKUHO	Tam Sayı Kuantum Hall Olayı
$f_n = f([E_n + V(r) - \mu]/k_b T)$	Fermi fonksiyonu

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii

ABSTRACT iv

ÖNSÖZ v

SEMBOL ve KISALTMALAR TABLOSU vii

İÇİNDEKİLER xi

1. GİRİŞ 1

2. KLASİK HALL OLAYI 6

2.1. Drude Metal Teorisi 6

2.2. Metallerde İletkenlik 8

2.3 Hall Olayı ve Manyetodirenç 12

3. KUANTUM HALL OLAYI 16

3.1. İki Boyutlu Elektron Gazının Oluşturulması 17

3.2. Landau Seviyeleri 21

3.3. Sıkıştırılabilir ve Sıkıştırılamaz Şeritlerin Oluşumu 28

4. ÜÇ BOYUTLU POİSSON DENKLEMİ VE SINIR ŞARTLARI 32

4.2. Üç Boyutlu Poisson Denkleminin Sayısal Çözümü 42

4.3. İncelenen Yapının Geometrisi ve Sınır Şartları 44

5. THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI 53

6. HESAPLAMALAR 60

6.1 Newton-Raphson Yöntemi 61

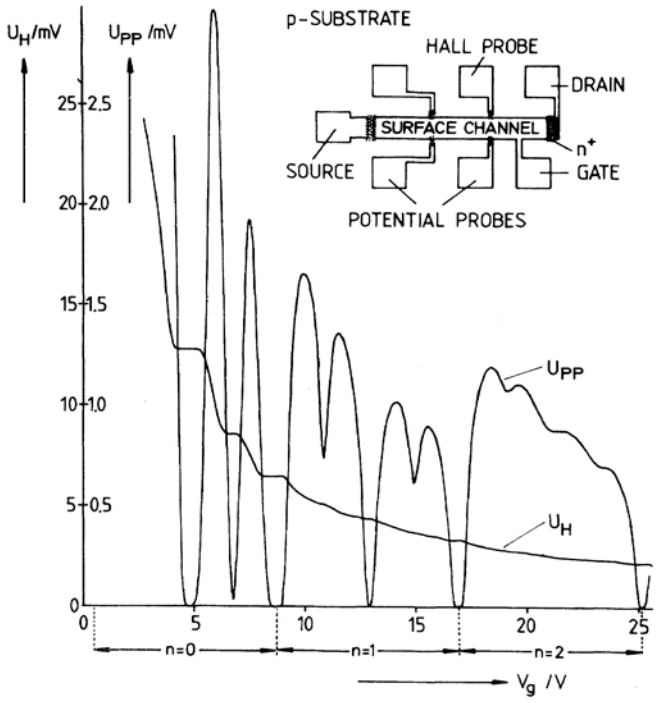
6.2 Kuantum Hall Olayı Temelli Mach-Zehnder İnterferometrelerinde Kenar Durumlarının Öz-Uyumlu Hesabı 64

7. SONUÇ VE TARTIŞMALAR 66

KAYNAKLAR 112

1. GİRİŞ

1879 yılında E. H. Hall tarafından günümüzde *Klasik Hall Olayı (KLHO)* olarak adlandırdığımız, akım yönüne dik bir manyetik alan içine konan içinden akım geçen bir iletkende hem akım yönüne hem de manyetik alan yönüne dik doğrultuda bir potansiyel farkı oluştuğu bulundu (Hall 1879). Bu buluştan yaklaşıkça bir asır sonra 1980 yılında K. von Klitzing Max-Planck Enstitüsünde Grenoble Yüksek Manyetik Alan Laboratuvarında düşük sıcaklıkta ve yüksek manyetik alanda, Hall gerilimi olarak ifade ettiğimiz gerilimin kuantumlu olduğunu buldu (Klitzing ve ark. 1980) ve bu buluşundan ötürü Klitzing'e 1985 yılında Nobel Fizik ödülü layık görüldü. Şekil 1.1 de Klitzing'in ilk çalışmasında elde ettiği ölçüm sonuçları orijinal haliyle görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi Hall gerilimi belli bölgelerde platolar gösterirken boyuna gerilim salınımlar göstermektedir. Bu olaya *Kuantum Hall Olayı, KUHO (Quantum Hall Effect, QHE)* denmektedir.



Şekil 1.1 Klitzing'in ilk yaptığı *KUHO* ölçüm sonuçları. Bu grafik Nobel fizik ödülüne layık görülen çalışmanın yayınlandığı makaleden alınmıştır. Burada U_H/mV milivolt olarak Hall gerilimi, U_{pp}/mV milivolt olarak boyuna gerilim ve V_g/V volt olarak kapı gerilimidir. Bu şekil Klitzing ve ark. 1980 makalesinden alınmıştır.

1960'ların ortalarından itibaren Si kullanılarak yapılmış metal oksit alan etkili transistörlerde (Si-Mosfet) *2 Boyutlu Elektron Gazı, 2BEG* (*2 Dimensional Electron Gas, 2DEG*) elde edilebilmekte idi. 1966 yılında Fowler düşük sıcaklık ve şiddetli manyetik alan altında Si-Mosfet yapıda oluşan *2BEG*'nın transport özelliklerini incelerken Şekil 1.1 deki platolara benzer platolarla karşılaşmıştı (Fowler ve ark. 1966). Teknolojinin gelişmesine paralel olarak ölçümler geliştirilerek devam ettirildi (Kawaji ve ark. 1975; Englert ve Klitzing 1978). Yeni ölçümlerin sonucu olarak Klitzing ilk kez bu platoların $R_H = h/\nu e^2$ ifadesine uyduklarını buldu (Klitzing 1980). Bu nedenle de yukarıda bahsettiğimiz gibi 1985 yılında Nobel fizik ödülüne layık görüldü. Nobel sunumu olarak açıklamalı biçimde yeniden literatüre girdi (Klitzing 1986).

Şekil 1.1 de görülen boyuna gerilimdeki değişimler aslında Ohm kanunundan sabit bir akım altında boyuna dirençteki değişimlere eşdeğerdir. Ayrıca ölçülen enine gerilim olan Hall gerilimi U_H ile *enine direnç* arasında doğrudan bir bağıntı vardır. İleride göreceğimiz gibi *enine direnç* ya da diğer adıyla Hall direnci basamak şeklinde değerler almaktadır ve iki boyutlu sistemlerde enine direnç enine özdirence eşittir. Şekil 1.1 de orijinal çalışmadaki sonuçlar aynen gösterilmektedir. Hall direnci yerine U_H Hall gerilimi görülmektedir ama daha sonraki çalışmalarda ağırlıklı olarak Hall direnci tercih edilmiştir. Ölçülen ***Hall direnci*** veya *özdirenci*

$$R_H = \rho_{xy} = -\sigma_{xy}^{-1} = \frac{h}{e^2\nu} \tag{1.1}$$

ifadesine uymaktadır. Burada ν *doluluk çarpanı* dediğimiz ileride ayrıntısı ile anlatacağımız bir katsayıdır. Bu katsayının tam değerlerinde direnç platoları görülmektedir. Bu esnada *boyuna direnç* dediğimiz, iletkenin *akım yönündeki* direnci ise minimum olmaktadır. İki boyutlu sistemlerde boyuna direnç ve boyuna özdirenç arasındaki bağıntı ise $\rho_{xx} = (w/L)R_{xx}$ dir. Burada *w* yarıiletkenin akım yönüne dik genişliği, *L* ise yarıiletkenin akım yönündeki uzunluğudur. Burada sözü edilen sembol ve tanımlar ileriki bölümlerde ayrıntılı bir şekilde ele alınıp açıklanmaktadır.

Daha sonraki yıllarda Tsui ve arkadaşları yaptıkları deneylerde kuantumluluğun doluluk çarpanının tam sayı değerlerinde ortaya çıkması yanında

belli basit kesirli sayılarda da ortaya çıktığını buldular (Tsui ve ark. 1982). Böylece *KUHO* ikiye ayrıldı. Doluluk çarpanın tam sayı olduğu değerlerle ilgilenen sisteme *Tam Sayı Kuantum Hall Olayı, TKUHO (Integer Quantum Hall Effect, IQHE)* kesirli sayılarda oluşana ise *Kesirli Kuantum Hall Olayı, KKUHO (Fractional Quantum Hall Effect, FQHE)* dendi. *TKUHO* helyum sıcaklığı dediğimiz 4 K'nin altındaki sıcaklıklarda ve yaklaşık 3 ile 15 T (Tesla) arasındaki manyetik alanlarda rahatlıkla gözlenmektedir. *KKUHO*'nın gözlenmesi için ise deney sıcaklığının 100 mK civarına veya daha aşağısına düşürülmesi, manyetik alanın ise 15 ile 30 T arasına yükseltilmesi gerekir (Du ve ark. 1993; Willett ve ark. 1987). *KKUHO* olayının kuramsal olarak açıklanmasında R. Laughlin'in büyük katkıları olmuştur (Laughlin 1983). H. Stormer, D. Tsui ve R. Laughlin bu çalışmalarından dolayı 1998 yılında Nobel fizik ödülü verilmiştir (Störmer 1999; Tsui 1999; Laughlin 1999). Bizim sunmakta olduğumuz bu tez çalışması *TKUHO* ile ilgilidir.

Klitzing'in keşfinden sonra kuantum Hall olayının ince yapı sabiti olan ve fizikte birçok yerde kullanılan α değerinin belirlenmesi için en iyi yöntemlerden biri olduğu kuantum Hall olayının bir direnç standardı oluşturduğu ortaya atıldı ve bu standart *von Klitzing direnç standardı* diye adlandırıldı (Hartland 1992; Witt 1998; Jeckelmann ve Jeanneret 2001; Bachmair ve ark. 2003). Böylece ölçüm sistemine yeni bir standart daha kazandırılmış oldu.

Şiddetli manyetik alan altında ve düşük sıcaklıkta gözlenen kuantum Hall olayının klasik Hall olayından farklı olması ve gözlenen deneysel sonuçların ilginçliği birçok teorik fizikçiyi Kuantum Hall Olayının gözlendiği tarihten günümüze kadar Kuantum Hall Olayının nedenlerini araştırmak için kendilerini bu konuya adamalarına neden olmuştur (Wel ve ark. 1989; Prange 1981; Laughlin 1981; Halperin 1982; MacDonald ve Streda 1984; Heinonen ve Taylor 1985; Niu ve Thouless 1987; Büttiker 1988; Streda ve ark. 1987; Jain ve Kivelson 1988; Beenakker 1990; Glazman ve Larkin 1991; Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004; Ihnatsenka ve Zozoulenko

2006[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[b]; Siddiki ve Marquardt 2007; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[b]).

Konuyu ilgilendiren önceki çalışmalarda *Landau Seviyelerinin* verici atomlar (donorlar) gibi safsızlıklar ve örgüdeki diğer bozukluklar nedeni ile genişlemesi ele alınmıştır (Landauer 1957; Landauer 1970). Bu çalışmalarda Landau seviyeleri *Lokalize Seviyeler* ve *Genişlemiş Landau* seviyeleri olarak ikiye ayrılmış. *KUHO* bu şekilde genişlemiş ve lokalize olmuş Landau seviyeleri ile anlaşılmaya çalışılmıştır (Prange 1981; Wel ve ark. 1989). Daha sonraları *KUHO*'nın gözlendiği malzemelerin sonsuz boyutlu malzemeler olmadığı göz önüne alınarak kenar etkileri fark edilmiştir. Kenar etkileri sayesinde oluştuğuna inanılan kenar durumları olarak adlandırılan durumlarla da elektronların akıma katkıda bulunduğuna inanılmıştır (Laughlin 1981; Halperin 1982; MacDonald ve Streda 1984; Heinonen 1985; Niu ve Thouless 1987). Bundan sonra kenar durumları Landau formülasyonu ile birleştirilerek *KUHO* durumunda yapıda akımın nasıl aktığı açıklanmaya çalışılmıştır (Büttiker 1988; Streda ve ark. 1987; Jain ve Kivelson 1988). Günümüze doğru ise söz konusu yapı içinde sıkıştırılabilir şeritlerin ve sıkıştırılamaz şeritlerin varlığı anlaşılmış ve bu şeritlerin konumlarının ve genişliklerinin hesaplanabildiği teorik çalışmalar yürütülmüştür (Beenakker 1990; Glazman ve Larkin 1991; Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[b]; Siddiki ve Marquardt 2007; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[b]).

Aslında yapılan bütün teorik çalışmalar, *KUHO* esnasında elektronların nasıl dağıldığı yani sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin nasıl ve nerelerde oluştukları bu oluşum içinde akımın nereden aktığı ve nasıl olup da enine direncin belli manyetik alan aralığında sabit olduğu, yani bir plato gösterdiği ve aynı aralıkta boyuna direncin sıfır olduğu, başka bir manyetik alan aralığında değişimin nasıl olduğunu açıklayabilmek için yapılmaktadır. Elektron dağılımında meydana gelen ve daha sonra ayrıntısı ile anlatacağımız sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin

nerelerde ve hangi kalınlıklarda olduğunu hesaplayabilen ilk araştırmacılar Glazman, Chklovskii ve arkadaşları olmuştur (Glazman ve Larkin 1991; Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993). Bu araştırıcıların yaptığı sadece elektrostatik hesaba dayanmakta idi. Bu hesapları geliştiren ve kullandıkları elektrostatik çözümle öz-uyumlu olarak Thomas-Fermi yaklaşımını birleştiren ilk çalışmalar ise Lier, Oh ve Gerhardts tarafından yapılmıştır (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997). Daha sonra değişik sınır koşulları da kullanılarak elektrostatik problemin çözümünün daha gerçekçi fiziksel şartlara dayandırılarak öz-uyumlu hesaplama teknikleri geliştirilmeye devam edilmiştir. Bu çalışmalarda sadece *Thomas-Fermi Yaklaşımı* değil, *Hartree, Yarı-Hartree* ve *Yoğunluk Fonksiyonelleri Teorisi* gibi daha karmaşık hesaplama teknikleri de kullanılmıştır (Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[b]; Siddiki ve Marquardt 2007; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2008[b]). Bu çalışmaların en büyük ortak özellikleri elektrostatik problemin çözümünde genel olarak *Green Fonksiyonları Yönteminin* kullanılmasıdır. Bu yöntemin en büyük avantajı belli sınır şartları altında problemin elektrostatik kısmı için analitik çözüm sunabilmesidir. Fakat bunun için kullanılan sınır şartları çoğu zaman gerçek deneysel sistemleri yansıtamamaktadır. Gerçek deneysel sistemlere yakın sınır şartları ise analitik çözülememektedir. Bu nedenle bizim bu çalışmamızda problemin elektrostatik kısmı gerçek deneysel sistemlerde kullanılan yapılara daha çok yaklaşabilmek için tamamen sayısal olarak çözümlemek amaçlanmıştır. Çalışmamızda deneysel sistemlerde kullanılan gerçek yapılarda ne olup bittiğini anlayıp kuantum Hall olayının çözümünde kullanılacak sınır şartları belirlemek ve *KUHO* nın daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmaya yönelmekteyiz.

2. KLASİK HALL OLAYI

Klasik Hall olayı 1879 yılında E. H. Hall tarafından keşfedilmiştir (Hall 1879). Hall, iletken bir metalden akım geçirirken, akım yönüne dik homojen bir manyetik alan uygulamıştır. Elde edilen ilginç sonuçlar uzun süre tartışılmıştır.

Klasik Hall olayını anlayabilmek için önce metal içersinde akımın nasıl iletildiğini anlamak çok önemlidir. Bunun için geliştirilen en basit klasik model Drude tarafından ortaya atılan teoridir (Drude 1900[a]; Drude 1900[b]). Bu teoriye *Drude Metal Teorisi* ya da *Drude Modeli* denir.

2.1. Drude Metal Teorisi

Metaller, yüksek elektrik ve ısı iletkenliklerine sahip olmaları, dövülerek şekil verilebilmeleri, ışık altında parlak yüzeyli olmaları gibi diğer katılarda olmayan ilginç ortak özelliklerden dolayı dikkat çekici katılardır. Metallerin bu özelliklerini açıklamak için başlayan çalışmalar günümüz modern Katıhal Fiziğinin başlangıcını oluşturmuştur.

1900 yılında Drude metallerdeki iletkenliği açıklamak için bir model ortaya atmıştır. Günümüzde bu modelin birçok açıdan eksiklikleri ve bazı yerlerde yanlışlıkları görülse de bazı açılardan günümüzde dahi metallerde gerçekleşen olaylara nicel olmasa da nitel açıdan oldukça iyi yaklaşımlar sağladığı görülmektedir. Bu model söz konusu olayları açıklamak için basit bir araç gibi görünse de bugün bile sıkça kullanıldığı anlaşılır.

J. J. Thomson 1897 yılında elektronu keşfettikten sonra, Drude gazların kinetik teorisini metal içindeki elektronlara başarılı bir şekilde uyguladı. Drude'ye göre metal atomlarının son yörüngelerindeki zayıf bağlı valans elektronları, diğer atom elektronlarının oluşturduğu alan sebebiyle bağlı oldukları atom yapısından koparak metal içinde serbestçe hareket edebilirler. Geriye metal atomlarında, atom çekirdeği ve valans elektronlarına göre atoma daha sıkı bağlı olan kor elektronları kalır. Daha önce nötr olan atom valans elektronlarının kopması ile pozitif yüklü bir iyon haline gelir. Sonuç olarak metal içersinde serbestçe hareket eden elektronlar ve

yer değiştirmeyen pozitif yüklü iyonlar görünümü ortaya çıkar. Sözü edilen serbest elektronların oluşturduğu görünüme *Elektron Gazı* denir. Drude, metal içinde oluşan bu serbest elektron gazına, gazların kinetik teorisini uyguladı.

Elektron gazı yoğunluğunu basit bir şekilde hesaplayabiliriz. Her bir mol'de Avogadro sayısı ($6{,}022 \text{ x } 10^{23}$) kadar atom ya da molekül vardır. Bir mol atom A gramdır, yani atom ağırlığı kadardır. Bir cm^3 metalde ρ_m gram olduğuna göre o metal türü için atom başına valans elektron sayısını N_v ile gösterirsek söz konusu metalde birim hacimdeki iletim elektronları sayısı olarak bilinen iletim elektronlarının yoğunluğu,

$$n = \frac{N}{V} = 6.022\ x\ 10^{23}\frac{\mathrm{N_v}\rho_\mathrm{m}}{A} \tag{2.1}$$

olarak hesaplanır.

Ayrıca elektron yoğunluğu kadar sık kullanılan başka bir nicelik de her bir elektron başına düşen boş hacmin yarıçapıdır. Bu kürenin yarıçapını r_s ile gösterirsek r_s için

$$\frac{V}{N} = \frac{1}{n} = \frac{4\pi r_s^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad r_s = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3} \tag{2.2}$$

elde ederiz.

Bu hesaptan anlaşılacağı üzere genel olarak metallerdeki serbest elektron yoğunluğu 10^{22} mertebesindedir. Bu değer gazların kinetik teorisinde ele alınan normal bir gazın parçacık yoğunluğunun yaklaşık bin katı kadardır (Ashcroft ve Mermin 1976). Gazların kinetik teorisinde gaz içersindeki moleküller birbirleriyle ve gazı taşıyan kabın kenarları ile yaptıkları esnek çarpışmalar hariç etkileşmeyen küresel simetrik parçacıklar şeklinde ele alınır. Çarpışma sırasında iki molekülün birbirlerine uyguladıkları anlık kuvvet haricinde hiçbir kuvvetin ya da etkileşmenin olmadığı varsayılır. Drude seyreltilmiş ve neredeyse hiç etkileşmeyen moleküllerden oluşan bu gaz yerine ondan yaklaşık bin kat daha yoğun ve içerisinde elektronlarla elektronlar arasında ve elektronlar ile iyonlar arasında kuvvetli elektromanyetik

etkileşmeler olan elektron gazına kinetik teoriyi uyguladı. Bunu yapabilmek için Drude bazı varsayımlar yapmak zorunda kaldı. Drude varsayımları olarak bilinen bu varsayımları maddeler halinde yazalım.

1. Çarpışmalar arasında yani iki çarpışma arasında geçen sürede elektronlar kendileri ile ve pozitif yüklü iyonlarla etkileşmez. Elekktrolar dış alan uygulandığında ikinci Newton hareket kanununa göre hareket ederler.
   Elektronlar ile elektronlar arasındaki etkileşmeyi yok sayan yaklaşıma *bağımsız elektron yaklaşımı,* elektronlar ile iyonlar arasındaki etkileşmeyi yok sayan yaklaşıma da *serbest elektron yaklaşımı* denir.
2. Çarpışmalar gazların kinetik teorisinde olduğu gibi anlık olaylar olarak ele alınır. Her çarpışmadan sonra elektron rastgele bir hız değişimine uğrar. Bir elektronun birim zamanda bir çarpışmaya uğrama olasılığı ise $1/\tau$ 'dur. τ zamanı elektronun konumundan ve hızından bağımsızdır. τ durulma (relaxation) zamanı, ortalama serbest zaman veya çarpışma zamanı olarak adlandırılır.
3. Çarpışmalarda yerel termodinamik denge sağlanır. Yani çarpışma sonucunda elektronlar, çarpışmanın olduğu yerin sıcaklığı ile doğru orantılı olan ve çarpışma öncesi hızdan bağımsız olan rastgele yönelimli bir hıza sahip olurlar.

2.2. Metallerde İletkenlik

Bir metalden geçen akım metalin iki ucu arasındaki potansiyel farkı ile doğru orantılıdır. Bir metalden geçen akım

$$V = IR \tag{2.3}$$

Ohm kanunu denklemine uyar. Burada direnç olarak adlandırılan *R*, metalden geçen akımdan ve metalin uçları arasına uygulanan potansiyel farkından bağımsız olan, metalin şekline ve metalin yapıldığı elementin cinsine bağlı bir katsayıdır. Bu katsayı, metalin iletime karşı direnci olarak tanımlanır ve Ohm direnci denir. Metalin şeklinden bağımsız olan sadece metalin yapıldığı elemente ya da bileşiğin cinsine

bağlı olan katsayıya ise özdirenç denir ve ρ ile gösterilir. Göz önüne alınan noktadaki özdirenç ρ , elektrik alan $\vec{E}$ ve akım yoğunluğu $\vec{j}$ arasında

$$\vec{E} = \rho\vec{j} \tag{2.4}$$

olarak bilinen yerel ilişki ile tanımlanır. İki ucu arasında V potansiyel farkı olan L uzunluğundaki bir iletkenin dik kesit alanı A ise bu iletken için $j = {}^{I}/_{A}$ ve $V = EL$ bağıntıları yazılabilir. Denklem (2.4) de bu ifadeleri skaler olarak kullanırsak

$$V = \frac{I\rho L}{A} \tag{2.5}$$

olduğunu görürüz. Ohm kanunun yazılışını hatırlayıp

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{2.6}$$

ifadesi elde ederiz.

Eğer birim hacimdeki n elektronun tümü $\vec{v}$ hızı ile aynı yönde hareket ediyorlarsa oluşturacakları akım yoğunluğu

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \tag{2.7}$$

olur. Elektronlar rastgele yönelimlerle hareket edeceklerinden Denk. (2.7) deki akım yoğunluğu ifadesindeki vektörel hız ortalama hız olmalıdır. Dış elektrik alan yokken elektronlar tamamen rastgele hareket edecekleri için ortalama hız sıfır olmalıdır. Çünkü dış elektrik alan yokken iletkenden akım geçmesi beklenemez. Bir dış elektrik alan olduğunda elektronlar elektrik alanın tersi yönünde net bir ortalama hıza sahip olur. Bu durumda çarpışmadan yeni çıkmış bir elektronu göz önüne alırsak bu elektron çarpışmadan hemen sonra çarpışmanın olduğu yerdeki termodinamik dengeye göre bir v_0 hızına sahip olacaktır. Çarpışmanın olduğu zamana $t = 0$ zamanı dersek *t* süre sonra elektronun v_0 hızına, ek elektrik alanın sürüklemesinden ileri gelen $\vec{v} = -e\vec{E}t/m$ hızı vektörel olarak ilave edilecektir. Elektronların hızlarının ortalaması alındığında yerel sıcaklık dengesinden ileri gelen $\vec{v}_0$ hızının

ortalamaya katkısı sıfır olacaktır. Elektronların diğer bir çarpışmaya kadar ortalama τ süresi boyunca sürüklendiklerini düşünürsek elektronların ortalama hızı yaklaşık $\overrightarrow{v}_{ort} = -e\vec{E}\tau/m$ olacaktır. Bu ortalama hız ifadesini Denk. (2.7) de kullanırsak akım yoğunluğu için

$$\vec{j} = (\frac{ne^2\tau}{m})\vec{E} \tag{2.8}$$

ifadesine ulaşırız. Şimdi özdirencin tersi olarak tanımlanan iletkenlik $\sigma = 1/\rho$ bağıntısını kullanarak Denk. (2.8) ve (2.4) ile birleştirerek, akım yoğunluğu ve iletkenlik için

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{2.9a}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{2.9b}$$

ifadelerine ulaşırız.

Elektronların konuma göre homojen, zamanla değişen herhangi bir $\vec{f}(t)$ kuvvetinin etkisinde olduğunu varsayalım. Bir elektronun hızı $\vec{v}(t) = \vec{p}(t)/m$ dir. Buna göre Denk. (2.7) yi yeniden yazarsak

$$\vec{j} = -\frac{ne\vec{p}(t)}{m} \tag{2.10}$$

olur. Herhangi bir t anında elektronların ortalama $\vec{p}(t)$ momentumlarını bildiğimizi varsayalım. Elektron bu *t* anından *dt* süre sonraki ortalama momentumlarının $\vec{p}(t+dt)$ ne olacağını hesaplamaya çalışalım. Bir elektronun birim zamanda çarpışmaya uğrama olasılığının $1/\tau$ olduğunu biliyoruz. O zaman elektronun *t* anı ile *t*+*dt* anı arasındaki sürede $(dt < \tau)$ bir çarpışmaya uğrama olasılığı dt/τ olur. Çarpışmaya uğramama olasılığı ise $(1 - dt/\tau)$ olacaktır. Bu süre içinde elektron hiçbir çarpışma yapmasa da $\vec{f}(t)$ kuvveti yüzünden momentumunda bir değişiklik olacaktır. Bu değişiklik yaklaşık olarak $\vec{f}(t)dt + O(dt)^2$ biçiminde olur. Burada $O(dt)^2$, momentumda $\vec{f}(t)$ kuvveti yüzünden oluşacak olan değişikliğin dt^2

mertebesindeki karesel ve daha üst artık (other, O) terimleri ifade eder. dt çok daha küçük kabul edilerek bu terimler ihmal edilebilir. Çarpışmaya uğramayan bir elektronun momentumu $\vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt + O(dt)^2$ olur. Çarpışmaya uğramayan elektronların toplam elektronlara oranı yaklaşık olarak $(1 - dt/\tau)$ kadardır. Çarpışmaya uğrayan elektronların katkısı ise ihmal edilecek terimler gibi sadece dt^2 mertebesinde olacaktır. Çünkü çarpışmaya uğrayan bir elektron eski momentumunu kaybedecek ve yerel sıcaklık dengesine uygun olarak rastgele yönelmiş bir momentuma sahip olacaktır. Bundan dolayı çarpışmadan sonra kazanılan momentumlar rastgele yönlere dağılmış olduklarından ortalama momentuma katkıları olmaz. Diğer yandan çarpışmadan sonra kuvvetin, elektronları *dt* süresi boyunca etkilediğini varsayarsak bir elektronun çarpışmadan sonra kuvvetten ötürü kazanabileceği maksimum momentum $\vec{f}(t)dt$ kadar olacaktır. Çarpışmaya uğrayan elektronların toplam elektron sayısına oranının yaklaşık olarak dt/τ olduğunu düşünürsek çarpışmaya uğrayan elektronların ortalama momentuma katkıları $\vec{f}(t)dt^2/\tau$ kadar olacaktır. Bu katkı miktarı görüldüğü gibi dt^2 mertebesinde olduğu için $O(dt)^2$ değeri içinde kalacaktır. Sonuç olarak ortalama momentuma yeterli katkı sadece bu süre içinde çarpışmaya uğramayan ve toplam elektronlar içinde $(1 - dt/\tau)$ kesre sahip elektronlardan gelecektir. Böylece *t* + *dt* anıdaki momentum

$$\vec{p}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)[\vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt + O(dt)^2] \tag{2.11}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılıp dt^2 li terimler $O(dt)^2$ içerisine alınırsa

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t) - \left(\frac{dt}{\tau}\right)\vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt + O(dt)^2 \tag{2.12}$$

ifadesine ulaşırız. Son ifadede $\vec{p}(t)$ ifadesini eşitliğin sol tarafına alarak ve eşitliğin her iki tarafını *dt* ye bölüp $dt \to 0$ limitine götürürsek ortalama momentum için

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} + \vec{f}(t) \tag{2.13}$$

denklemine ulaşırız. Burada dikkat çekici olan durum elektronların iyonlardan saçılmasıdır. Bu, ortalama momentum için yazdığımız Denk. (2.13) e sadece bir sürtünme terimi benzeri bir terim olarak girmiştir.

2.3 Hall Olayı ve Manyetodirenç

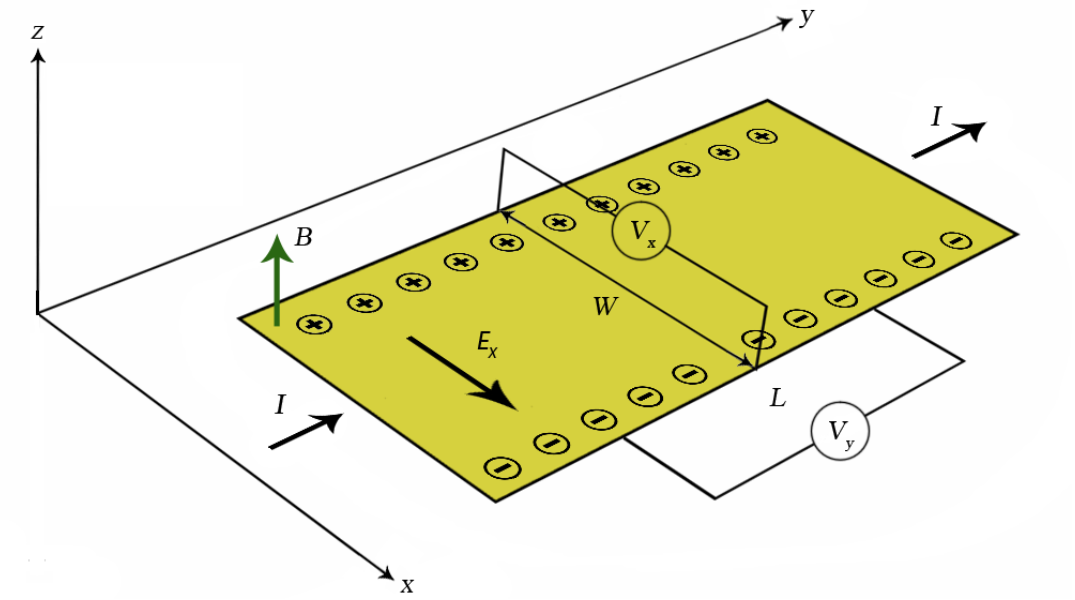
1879 yılında E. H. Hall, manyetik alan içinde bulunan akım taşıyan bir telin maruz kaldığı kuvvetin telin kendisine mi yoksa telin içinden akan elektrik akımına mı etkidiğini tespit etmeye çalıştı (Hall 1879). Aslında o yıllarda henüz elektron keşfedilmemişti. Elektronun keşfi 1897 yılında J. J. Thomson tarafından elektronun keşfedilmesinden üç yıl sonra 1900'de Drude metallerde iletkenlik konusundaki teorisini ortaya attı. Hall, bu deneyi yaparken ve yorumlarken bu bilgilerin tümünden yoksundu. Onun merak ettiği, manyetik alan içinde bulunan akım taşıyan bir tele etkiyen kuvvetin, doğrudan telin kendisine mi yoksa içinden geçen akıma mı etkidiği idi. Bunun için Hall bir deney tasarladı. Manyetik alan içinde akım taşıyan sabitlenmiş bir tel kullandı. Hall'a göre, tel sabitlendiği için manyetik alandaki telden akan akıma kuvvet etkiyorsa akım telin bir tarafına sıkışmalı ve tellin direncinde bir artışa neden olmalı idi. Telin direncindeki bu artış *Manyetodirenç* olarak bilinir. Deneyi tasarlayıp yapmış olmakla birlikte Hall bu ekstra direnci bulmakta başarısız oldu. Buna rağmen Hall, deneyin nihai sonucu olarak manyetik alandaki telin kendisine kuvvet etki etmediğini kabul etti ve manyetik alanın, akıma karşı gösterilen direnci bozmadan akımı telin bir kenarına sıkıştırabildiğini söyledi. Akım telin bir tarafında baskı altına alınıyorsa, bu telin akıma dik kesitinde bir gerilime neden olması gerektiğini düşündü. Hall bu akıma dik yöndeki ekstra gerilim farkını gözlemlemeyi başardı. Günümüzde bu gerilim farkı Hall gerilimi olarak bilinir.

Şekil 2.1 de Hall deneyinin genel bir şeması gösterilmektedir. Burada manyetik alan *z* yönünde elektrik akımı *y* yönünde alınmıştır. Elektronlar elektrik akımın tersi yönde hareket ederek akıma katkıda bulunurlar. Bu nedenle Şekil 2.1 de görüldüğü gibi metal levhaya dik *z* yönündeki manyetik alan yüzünden elektronlar *x* yönünde sürüklenirler. Elektronlar metal içinde serbest hareket edebilirler ama serbest hareketleri metalin duvarları ile sınırlıdır. Bundan dolayı sonsuza kadar sürüklenemezler metal levhanın kenarına birikmeye başlarlar. Elektronların bir

tarafta birikmesinden ötürü metal içerisinde akım doğrultusuna dik x yönünde $\vec{E}_x$ elektrik alanı oluşur. Oluşan bu alana Hall alanı denir. Bu elektrik alan manyetik alanın tam aksine elektronlara -x yönünde bir kuvvet uygular. Bir süre sonra manyetik alandan ve elektrik alandan ileri gelen iki kuvvet birbirlerini dengeler ve elektronlar sadece y yönünde akmaya devam ederler. Denge durumunda bir elektrona etkiyen toplam kuvvet

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m} \mathrm{x} \vec{B}) \tag{2.14}$$

olacaktır. Bu kuvveti Denk. (2.13) de yerine yazılırsa



Şekil 2.1 Klasik Hall Olayının geometrik gösterimi. Burada V_x (veya V_H) Hall gerilimi, V_y boyuna gerilimdir.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m} \mathrm{x} \vec{B}\right) - \frac{\vec{p}}{\tau} \tag{2.15}$$

eşitliği elde edilir. Denge durumunda akım zamanla değişmeyeceği için p_x ve p_y nin zamana göre türevi sıfır olmalıdır. Bu durumda Denk. (2.15) deki vektörel eşitlik x ve y yönlerinde ayrı ayrı skaler eşitlikler şeklinde yazılabilir.

$$0 = -eE_x - \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau} \tag{2.16a}$$

$$0 = -eE_y + \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau} \tag{2.16b}$$

Burada $\omega_c = eB/m$ siklotron frekansı olarak bilinen büyüklüktür. Bu eşitliğin her iki tarafını $-ne\tau/m$ ile çarparsak ve Denk. (2.9) da türettiğimiz manyetik alansız iletkenlik ifadesine σ_0 dersek ayrıca akım yoğunluğu için Denk. (2.10) ile verilen ifadeyi kullanırsak

$$\sigma_0 E_x = \omega_c \tau J_y + J_x \tag{2.17a}$$

$$\sigma_0 E_y = -\omega_c \tau J_x + J_y \tag{2.17b}$$

sonucunu elde ederiz. Bu denklemleri matris formunda

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu ifade de

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}$ biçiminde yazılmış olan matris bir tensördür ve özdirenç tensörü olarak bilinir. $\rho = \sigma^{-1}$ olduğundan özdirenç tensörünün tersi de $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ iletkenlik tensörü olarak adlandırılır. Sonuç olarak iletkenlik için

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{(1 + \omega_c^2 \tau^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

ifadesini elde ederiz.

Denge durumunda $J_x = 0$ olacaktır. Bu durumda Denk. (2.17) ye geri dönersek ve gerekli işlemleri yaparak boyuna ve enine elektrik alanlarını çekersek

$$E_x = \frac{B}{ne} J_y \tag{2.21}$$

$$E_y = \frac{m}{ne^2\tau} J_y \tag{2.22}$$

ifadelerine ulaşırız. Enine ve boyuna elektrik alanları

$$E_x = \rho_{xy} J_y \tag{2.23}$$

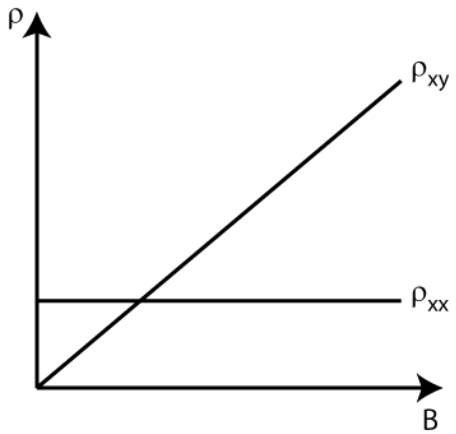
$$E_y = \rho_{xx} J_y \tag{2.24}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece enine direnç (***Hall Direnci***) ve boyuna direnç için

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne} \tag{2.25}$$

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{2.26}$$

ifadelerine ulaşırız. Şekil 2.1 de gösterilen enine gerilimin ölçülmesi ile metal için akım taşıyıcıların cinsine ve yoğunluğuna ulaşılabilir. Öte yandan Denk. (2.25) ve (2.26) dan görüldüğü üzere Şek. 2.2 de gösterildiği gibi enine öz direnç ρ_{xy} manyetik alan ile doğru orantılı olarak değiştiği halde boyuna öz direnç ρ_{xx} manyetik alanla değişmemekte, sabit kalmaktadır.



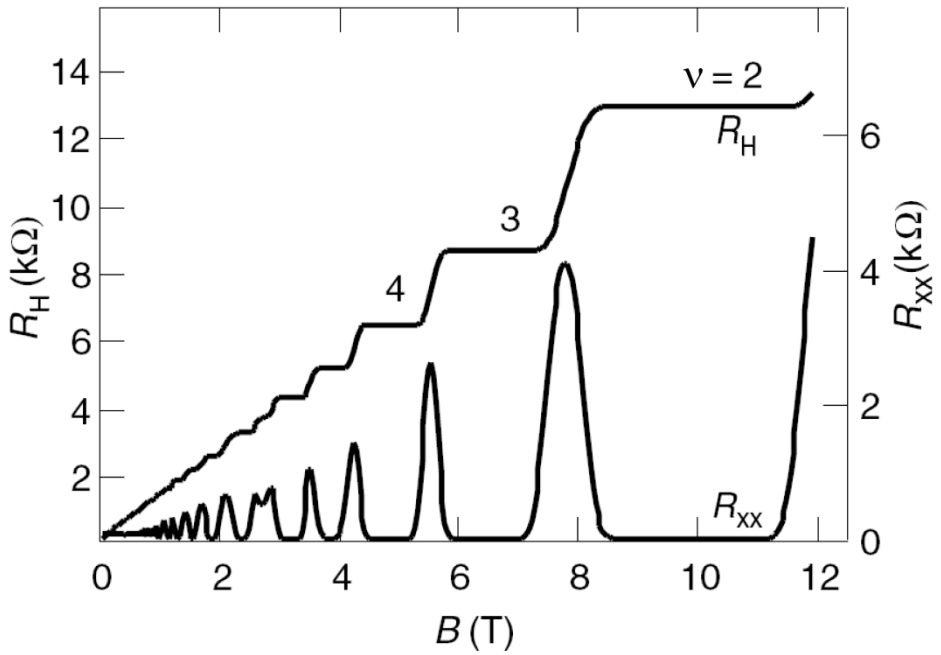
Şekil 2.2 Klasik Hall olayında boyuna ve enine dirençlerin manyetik alanla değişimi. ρ_{xy} enine öz direnç, ρ_{xx} boyuna öz dirençtir.

3. KUANTUM HALL OLAYI

1879 yılında Hall tarafından keşfedilen *klasik Hall olayından, KLHO (Classical Hall Effect, CHE)* yaklaşık bir asır sonra 1980 yılında K. von Klitzing kuantum Hall olayını keşfetti (Klitzing ve ark. 1980).

Klitzing, Hall gerilim ölçümlerini Silikondan yapılmış *Metal Oksit Yarıiletken Alan Etkili Transistör, MOYAET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor, MOSFET)* içerisinde terslenmiş katmanda oluşan 2 boyutlu elektron gazı (2BEG) üzerinde yaptı. Bu ölçümlerin normal ölçümlerden farkı çok yüksek manyetik alanda (yaklaşık 15 Tesla) ve Helyum sıcaklığı dediğimiz 4 K sıcaklığı altındaki sıcaklıklarda yapılmış olmasıydı. Elde edilen ölçüm sonuçları şimdilerde klasik Hall olayı diye adlandırdığımız beklenen Hall gerilimi ve boyuna gerilim değerlerinden çok farklı idi. Düşük sıcaklıkta, farklı yüksek manyetik alanlarda elde edilen gerilim ölçüm sonuçları Şekil 3.1 de görülmektedir. Şekilde manyetik alana bağlı olarak direnç platolarının nasıl oluşduğu açık bir şekilde görülmektedir. Böyle farklı bir sonucun elde edilmesi, düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alanda artık klasik kanunların geçerli olmadığını göstermiştir. Elde edilen bu ölçümleri açıklayabilmek için olaya kuantum mekaniksel açıdan bakılmalıdır. Bu açıdan şiddetli manyetik alan altında düşük sıcaklıktaki iki boyutlu elektron gazının dağılımının elde edilebilmesi için Poisson denklemi ve Schrödinger denkleminin öz-uyumlu olarak çözülmesi gerekir.

Önce iki boyutlu elektron gazının kabaca nasıl oluştuğuna bakalım. Daha sonra hareket doğrultusuna dik bir manyetik alan içersinde iki boyutta hareket eden bir elektronun hareketine kuantum mekaniği açısından bakalım. Göreceğimiz üzere elektronlar manyetik alan altında harmonik osilatöre benzer bir potansiyel etkisindeymiş gibi hareket ederler. Bu potansiyel içinde hapsedilmiş olan elektronlar Landau seviyeleri diye adlandırdığımız kesikli enerji seviyelerine yerleşirler. Elektronların Landau seviyelerine nasıl yerleştiklerine ve bu yerleşimlerin iletime ve Hall direncine etkisinin nasıl olduğuna bakacağız. Problemin önemli olan diğer kanadı ise Poisson denkleminin doğru sınır koşulları ile ele alınarak çözülmesidir. Bu incelemeyi ayrı bir bölümde yapacağız.



Şekil 3.1 Düşük sıcaklıkta $T = 0.3\ K$, şiddetli manyetik alan içinde ölçülen Hall direnci R_H ve boyuna direnç R_{xx}'in deneysel sonuçları. Burada ν doluluk çarpanıdır. Bu şekil Jeckelmann ve Jeanneret 2001 makalesinden alınıp düzenlenmiştir.

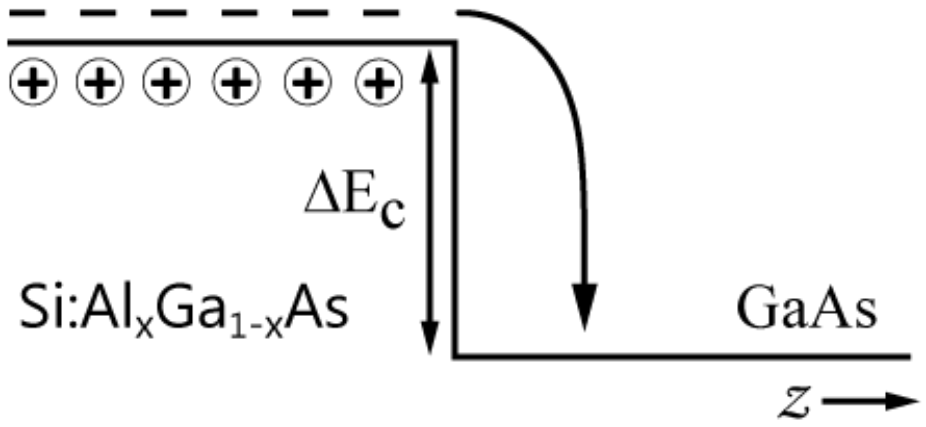
3.1. İki Boyutlu Elektron Gazının Oluşturulması

İki boyutlu elektron gazı *Metal Oksit Yarıiletken, MOY (Metal Oxide Semiconductor, MOS)* yapıların ve alan etkili metal oksit yarıiletken transistor gibi birçok önemli elektronik aygıtın temelini oluşturur.

Bu gazın yarıiletken bir eklemde nasıl oluşturulduğu önemlidir. Yarıiletken eklemler daha önceleri ağırlıklı olarak Si/SiO_2 malzeme kullanılarak oluşturulurken günümüzde ağırlıklı olarak $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ gibi malzemeler kullanılmaktadır. Verici safsızlıklarını oluşturmak için ise $Al_xGa_{1-x}As$ yapının içine Si katkılanmaktadır.

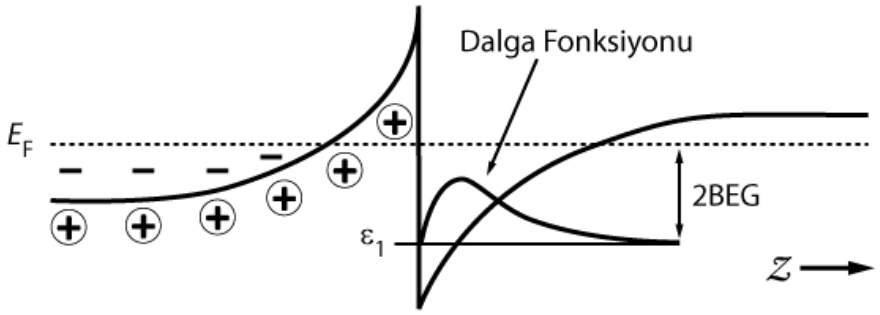
Son yıllarda *Moleküler Demet Epitaksi, MDE (Molecular Beam Epitaxy, MBE)* yönteminin gelişmesi ile çok düzgün ve kalınlıkları atom boyutlarına kadar indirgenebilen yarıiletken katmanlar oluşturulabilmektedir. Ayrıca katkılama mekanizması da oldukça iyi kontrol edilebilmektedir. Böylelikle çok temiz ve düzgün heteroeklemler oluşturulabilmektedir.

Günümüzde en çok kullanılan ve bizim de bu çalışmada ele aldığımız yapı $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ heteroeklemidir. Önce, verici safsızlık atomları (donorlar) olan Si atomlarının elektronlarını vermedikleri anı düşünelim, bu anda iletkenlik band yapısının biçimlendirilmesi Şekil 3.2 deki yapı görünümündedir. Burada Si atomlarının valans elektronlarından fazla olanlar henüz Silikon atomlarını terk etmedikleri için yarıiletkenin tümü nötr haldedir. Şekil 3.2 de sadece GaAs ile $Al_xGa_{1-x}As$ bileşiklerinin iletim bandları arasındaki fark gözükmektedir. Ayrıca şu an başka hiçbir etki olmadığından band yapısı düzgündür. Silikon atomlarından kurtulan elektronlar yarıiletken içinde serbest hareket edebilir hale gelirler. Fakat Şekil 3.2 de gördüğümüz gibi GaAs kısmında iletim bandı daha az enerjiye sahip olduğu için enerjilerini kaybederek bu banda yerleşirler. GaAs kısmında bu olurken $Al_xGa_{1-x}As$ kısmında Si ile katkılanmış kısım pozitif yüklenmeye başlar. Pozitif yüklü Si iyonları yarıiletken içinde hareket edemezler. Bulundukları yerden kaybettikleri elektronları geri çekmeye çalışırlar. Fakat GaAs içerisindeki elektronlar ise $Al_xGa_{1-x}As$ ile GaAs'ın iletkenlik bandları arasındaki fark nedeni ile $Al_xGa_{1-x}As$ kısmına geçemezler. Şekil 3.3 de görüldüğü gibi Si iyonlarının oluşturduğu Coulomb çekiminden dolayı bandlar bükülür. Sonuç olarak serbest elektronlar $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ ekleminin olduğu ara yüzeye sıkışırlar.



Şekil 3.2 Si katkılanmış $Al_xGa_{1-x}As$ ile GaAs eklemi iletim bandının şematik gösterimi. Burada ΔE_c $Al_xGa_{1-x}As$ ile GaAs yapılarının iletim bandları arasındaki enerji farkıdır.

Şekil 3.3 de görüldüğü gibi bu ara yüzeyde sıkışan elektronlar kabaca üçgen kuyuya benzer bir yapı içinde sıkıştırılmış elektronlar gibidir. Büyütme yönünü *z* yönü seçersek elektronların *z* yönündeki hareketleri kuantumlanır. Kuyunun genişliği yaklaşık 10 nm civarındadır. Kuyunun darlığı elbette ki kuyu içerisinde oluşan kesikli enerji düzeyleri arasındaki enerji farkını artıracaktır. Böylelikle düşük sıcaklıklarda elektronların bir üst seviyeye geçmeleri neredeyse imkansız hale gelecektir. Elektronlar kuyunun en düşük enerji seviyesi olan temel seviyeye yerleşecekler ve sonuç olarak elektronların *z* yönündeki hareketi tamamen dondurulmuş olacaktır. Akla gelen ilk soru; nasıl oluyor da fermiyon olan elektronların tümü temel seviyeye yerleşebiliyor olacaktır. Aslında bu sorunun cevabı çok basittir. Elektronların hareketi *z* doğrultusunda sınırlandırılmıştır, *x* ve *y* doğrultusunda ise hareketleri tamamen serbesttir. Bu da *z* doğrultusundaki temel seviyenin aslında tüm elektronların *x* ve *y* deki hareketlerine göre dejenere seviyeler topluluğu olduğunu gösterir.

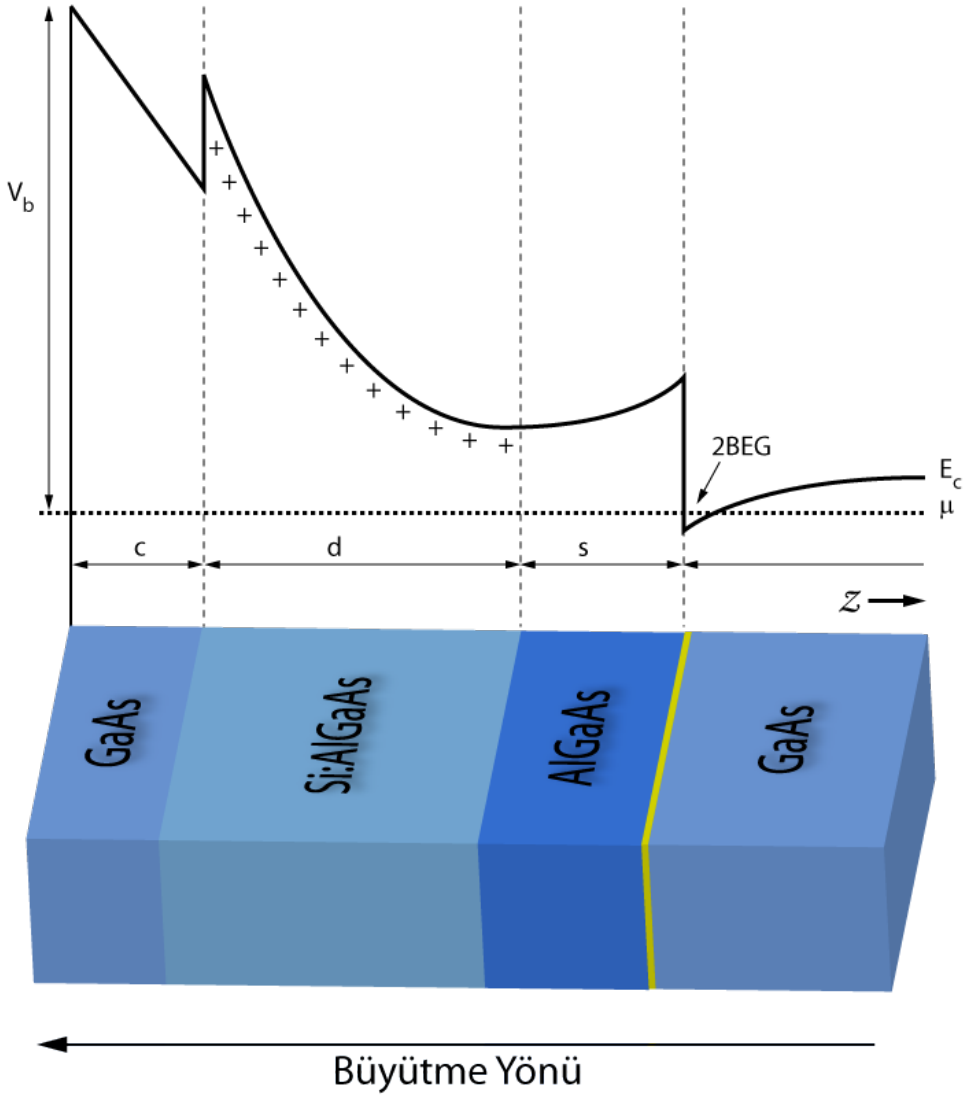


Şekil 3.3 Katkı atomları olan Si atomlarının iyonlaştıktan sonraki iletim bandının yapısı. Burada E_F elektronların Fermi Enerji seviyesini, ε_1 ise oluçan üçgen kuyunun temel enerji seviyesini göstermektedir.

z doğrultusunda hareketleri tamamen kısıtlanmış fakat *x* ve *y* doğrultularında serbest olan elektronların oluşturduğu bu yapıya *İki Boyutlu Elektron Gazı (2BEG)* denir.

Deneysel sistemlerde ise kullanılan genel yapı Şekil 3.4 de gösterilmektedir. Burada Si atomlarının konumları, katkılama oranı, aradaki katkılanmamış AlGaAs'ın kalınlığı ve kapıların 2BEG'dan olan uzaklıkları, 2BEG'nın yapısını ve hareketini doğrudan etkileyen unsurlardır. Bunlardan başka 2BEG'nın hareketi üzerine fazladan

sınırlamalar getirmek için kesme ve kapı kullanma gibi yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada kullanılan her şey gerçeğine uygun alınmaya çalışılmıştır.



Şekil 3.4 Deneysel sistemlerde kullanılan genel yapı. Burada E_c iletim bandının enerji yapısını, μ elektronların kimyasal potansiyelini ve V_b ise iletim bandının sonu ile elektronların bulunduğu kısım arasındaki enerji farkını göstermektedir.

Son yıllarda bu tip yapıların daha çok tercih ediliyor olmasının en büyük nedeni Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 den de görüldüğü gibi safsızlık atomları ve taşıyıcı elektronları arasında uzaysal bir fark oluşması ve bu uzaysal fark sayesinde taşıyıcı elektronların safsızlık atomlarından kaynaklanan saçılmaların önüne geçilebilmesidir. Bu da bize yüksek mobiliteli ve daha temiz olan yapılar

sağlamaktadır. Son zamanlarda en çok tercih edilen yapılar olması nedeniyle bu çalışmada da hesaplamalar Si katkılanmış $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ heteroeklem yapılar için yapılmıştır.

3.2. Landau Seviyeleri

Manyetik alanda hareket eden serbest bir elektronun momentumu iki kısımdan oluşur.

$$\vec{p} = \vec{p}_{kin} + \vec{p}_{alan} \tag{3.1}$$

Buradaki ilk terim olan $\vec{p}_{kin} = m\vec{v}$ serbest elektronun kinetik momentumudur. İkinci terim ise $\vec{p}_{alan} = -e\vec{A}$ şeklinde tanımlanan alan momentumudur. Buradaki $\vec{A}$ vektör potansiyelidir. Toplam momentum veya kanonik momentum

$$\vec{p} = \vec{p}_{kin} + \vec{p}_{alan} = m\vec{v} - e\vec{A} \tag{3.2}$$

olur. Buradan alışılmış momentum ifadesini çekersek

$$m\vec{v} = \vec{p} + e\vec{A} \tag{3.3}$$

buluruz. Kinetik enerji terimi ise

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 \tag{3.4}$$

şeklinde olur. Bu enerjiye karşılık gelen Hamiltoniyen ifadesi ise

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A}\right)^2 \tag{3.5}$$

şeklindedir. Bu Hamiltoniyene karşılık gelen Schrödinger denklemi ise

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A}\right)^2 \psi = E\psi \tag{3.6}$$

şeklinde olur. Son denklemde gerekli düzeltmeleri yaparsak

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi+\frac{\hbar e}{2im}\vec{A}\vec{\nabla}\psi+\frac{\hbar e}{2im}\psi\vec{\nabla}\vec{A}+\frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi=E\psi \tag{3.7}$$

ifadesine ulaşırız. Buradan itibaren bu denklem $\vec{A}$ nın seçimine göre sınıflandırılabilir.

Maxwell denkleminde $\vec{B}$ alanı $\vec{A}$ cinsinden $\vec{B}=\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{A}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre vektör potansiyeline keyfi bir skaler fonksiyonun gradyentini ekleyebiliriz. Yani $\vec{A}$ yerine $\vec{A}+\vec{\nabla}f$ yazabiliriz. Bu dönüşüm altında $\vec{B}$ değişmez. Bu tür dönüşümlere ayar (gauge) dönüşümü denir.

Biz burada sabit bir manyetik alan içindeki yüklü parçacıkların hareketi ile ilgilendiğimizden vektör potansiyelini

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\mathrm{x}\vec{r}+\vec{\nabla}f(r) \tag{3.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu sonuç her keyfi f fonksiyonu için bu ifadenin rotasyonelinde sabit bir $\vec{B}$ alanı verir. Burada manyetik alanı $\vec{B}=B\hat{k}$ şeklinde z yönünde düşünürsek en genel vektör potansiyeli

$$\vec{A}(r)=\left(-\frac{1}{2}yB+\frac{\partial f}{\partial x}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{1}{2}xB+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{3.9}$$

şeklinde yazılır. Burada *f* sabit alınırsa bu ayara simetrik ayar denir ve

$$\vec{A}(r)=\frac{1}{2}B(-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}) \tag{3.10}$$

olur. Öte yandan $f=Bxy/2$ veya $-Bxy/2$ seçilirse sırasıyla vektör potansiyelleri

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{By}{2}\quad veya\quad -\frac{By}{2} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{Bx}{2}\quad veya\quad -\frac{Bx}{2} \tag{3.12}$$

olur. Bu durumda $\vec{A} = Bx\hat{\jmath}$ veya $\vec{A} = -By\hat{\imath}$ olur. Bunlardan ilkine 1. Landau ayarı ikincisine de 2. Landau ayarı denir. Burada $\vec{A}$ vektör potansiyeli için Landau ayarı kullanarak $\vec{A} = Bx\hat{\jmath}$ seçelim. Bu durumda

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Bx\hat{\jmath}) = 0 \tag{3.13}$$

olur. Bu ifadeyi Denk. (3.7) de kullanırsak Denk. (3.7)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar e}{2im}(Bx\hat{\jmath})\vec{\nabla}\psi + \frac{e^2}{2m}(Bx\hat{\jmath})^2\psi = E\psi \tag{3.14}$$

halini gelir. Bu noktada 2BEG ile uğraştığımızı hatırlarsak $\vec{\nabla}^2$ operatörü iki boyut için

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.15}$$

şeklinde olacaktır. Gerekli ara işlemler yapılarak Denk. (3.14)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] + \frac{\hbar e}{im}Bx\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{e^2B^2x^2}{2m}\psi = E\psi \tag{3.16}$$

biçimine dönüşür. Akımın aktığı *y* yönünde elektronların dalga fonksiyonu ilerleyen düzlem dalga fonksiyonu ile ifade edilebilir. Çünkü denklemde *y* yönünde hiçbir sınırlayıcı potansiyel yoktur. Bu da elektronların *y* yönündeki dalga fonksiyonlarının serbest elektron dalga fonksiyonu olan düzlem dalga biçiminde olduklarını gösterir. Bu durumda iki boyutlu dalga fonksiyonumuz

$$\psi = \Phi(x)e^{-ik_y y} \tag{3.17}$$

şeklinde olur. Bu dalga fonksiyonu Denk. (3.16) da kullanıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}(eBx - \hbar k)^2\Phi = E\Phi \tag{3.18}$$

ifadesine ulaşılır. Bu son ifade ise gerekli düzenlemelerden sonra çok iyi bildiğimiz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega_c^2(x-x_0)^2\Phi = E\Phi \tag{3.19}$$

denklemine dönüşür. Burada $\omega_c = eB/m$ *siklotron frekansıdır* ve $x_0 = \hbar k_y/\omega_c m$ değerinde bir sabittir. Denklem (3.19) ise x_0 merkezli bir harmonik osilatör denklemidir. Bu denklemin çözümlerini çok iyi bilmekteyiz. Bunlar

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.20a}$$

$$\Phi = H_n\left(\frac{x-x_0}{\ell}\right)e^{-\left(\frac{x-X_0}{\ell}\right)^2}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.20b}$$

dir. Burada E_n lere Landau seviyeleri denmektedir. $H_n(x)$ ler hermite polinomlardır. ℓ ise

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanan *manyetik uzunluktur*.

Sonuç olarak olanları şöyle açıklayabiliriz. Manyetik alan içinde hareket eden elektronlar aslında manyetik alanın oluşturduğu harmonik osilatör potansiyeline hapsedilmektedir. Elektronlar bu potansiyel içinde oluşan kesikli enerji seviyelerine Pauli ilkesine göre yerleşmektedirler. Bu da 2BEG'nın özelliğini tamamen değiştiren bir olgudur.

Elektronların Landau seviyelerine yerleşmelerinde seviyelerin dejenereliği çok önemlidir. Eğer elektronlar sonsuz bir düzlemde hareket ediyorlarsa p_y momentumu her değeri alabilir. Bu da Landau seviyelerinin dejenereliği sonsuz olacağı anlamına gelir. Bu da birinci Landau seviyesine bütün elektronların yerleşebileceği manasına gelir. Fakat elektronlar Şekil 3.5 de görüldüğü gibi $L_x \times \mathrm{L_y}$ şeklindeki sınırlı bir düzlemde hareket ediyorlarsa Landau seviyelerinin dejenereliği de sınırlı olacaktır.

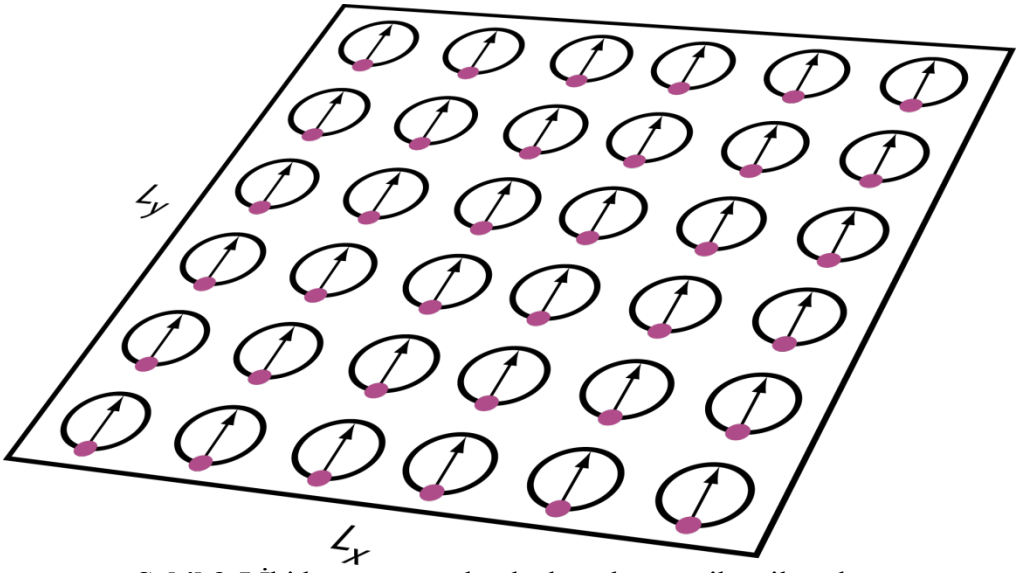
Harmonik osilatörün merkezi $x_0 = \hbar k_y/\omega_c m$ ise $\omega_c = eB/m$ kullanılarak

$$x_0 = \frac{\hbar}{eB} k_y \tag{3.22}$$

bulunur. İki merkez arasındaki fark ise

$$\Delta x_0 = \frac{\hbar}{eB} \Delta k_y \tag{3.23}$$

olacaktır.



Şekil 3.5 İki boyutta sınırlandırılmış harmonik osilatörler.

y yönündeki hareket L_y ile sınırlı olduğu için dalga fonksiyonları da $k_y = \frac{2\pi}{L_y} n$ ile kuantumludur. $\Delta k_y = 2\pi/L_y$ olacağından sonuç olarak Denk. (3.23)

$$\Delta x_0 = \frac{h}{eBL_y} \tag{3.24}$$

olur. Bu durumda L_x aralığına $N = L_x/\Delta x_0$ adet harmonik osilatör sığabilir. Bu da bize Landau seviyesinin dejenereliğini verir. İşlemleri biraz daha ilerletirsek

$$N = \frac{L_x L_y B}{h/e} \tag{3.25}$$

ifadesine ulaşırız. Burada $L_x L_y$ elektronların hapsedildikleri alan olduğu için $L_x L_y B = \Phi$ manyetik akıya eşit olacaktır. Ayrıca $\Phi_o = h/e$ manyetik alan kuantumu olarak tanımlanır. Sonuç olarak Landau seviyesinin dejenereliği

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{3.26}$$

ile verilir. Burada bizim için çok önemli olan diğer bir ifadeyi tanımlayalım. Toplam elektron sayısının (N_{el}) Landau seviyelerinin dejenereliği sayısına (N) oranına

$$\nu = \frac{N_{el}}{N} \tag{3.27}$$

doluluk çarpanı denir. Gerekli işlemleri yaparsak ve $n_{el} = N_{el}/L_x L_y$ ile birim alan başına düşen elektron sayısını tanımlarsak doluluk çarpanı için

$$\nu = \frac{N_{el} h}{L_x L_y B e} = \frac{n_{el} h}{Be} = \frac{n_{el} \Phi_0}{B} = 2\pi \ell^2 n_{el} \tag{3.28}$$

ifadesine ulaşırız.

Şekil 3.1 deki grafikten görüldüğü gibi enine direnç bir plato oluştururken boyuna direnç sıfır olmaktadır. Ayrıca enine direnç

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2 \nu} \tag{3.29}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada da açıkça görüldüğü gibi bu platolar ν doluluk çarpanının tam sayı değerler aldığı kısımlara karşılık gelmektedir.

İkinci bölümde elde ettiğimiz klasik yaklaşım ile enine direncin ölçümünde görülen platoların nedenini, platoların genişliğini, platolar arasındaki geçişi ve boyuna direncin salınmasını açıklamak mümkün değildir. Bunun için olayın kuantum mekaniksel açıdan ele alınması gerekir.

Şimdiye kadar kuantumsal olarak Landau seviyelerini elde ettik. Bu seviyelerin varlığı KUHO'nı kuramsal olarak açıklamak için çok önemli bir yapı

taşıdır. Fakat Landau seviyelerini elde ederken elektronların yarıiletken malzeme içinde tamamen serbest olduklarını göz önüne aldık. Bu yaklaşım aslında oldukça kaba ve yeterli olmayan bir yaklaşımdır. Yaklaşımın temeli, iletim bandındaki bir elektronun malzeme içerisinde serbest hareket ediyor varsayılmasıdır. Bu varsayım tamamen doğrudur ama tam serbestlik söz konusu olamaz. Elektronlar malzeme içinde olduğu için en azından malzeme içindeki yerleşik atomların oluşturduğu bir potansiyel etkisinde hareket ederler. Günümüzde bu etkiler *etkin kütle yaklaşımı* ile ve Coulomb etkileşmelerinde boşluğun dielektrik katsayısının kullanılması yerine malzemenin dielektrik katsayısının kullanılması ile aşılmaya çalışılmaktadır. Etkiler sadece bununla da sınırlı değildir. Yapının üstüne oturtulan kapıların, yapı içersindeki iyonlaşmış verici atomların ve yapının kenarlarından ve yapıdaki düzensizliklerden ileri gelen etkiler de vardır. Bunlara ek olarak elektronların kendi aralarında etkileşmesi de söz konusudur. Malzeme içindeki bir tek elektronun manyetik alan altındaki hareketini açıklayan Schrödinger denklemi Denk. (3.18) ile verilen serbest elektron denklemi yerine

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m^*\omega_c^2(x-x_0)^2\Phi+V_{çv}(x)\Phi+V_{Hr}(x)\Phi=E\Phi \qquad (3.30)$$

ifadesi olmalıdır. Burada m^* etkin kütle, x_0 manyetik alan yüzünden oluşan harmonik osilatör potansiyelinin merkezi ve $V_{çv}$ kapılar, verici atomlar ve kenar etkilerinden ileri gelen potansiyeldir. V_{Hr} ise Hartree potansiyeli diye adlandırdığımız elektronların kendi aralarındaki Coulomb etkileşmesinden ileri gelen potansiyeldir. Bu potansiyellerin açık ifadesini elde etmek için Poisson denkleminin çözülmesi gerekir. Bu konu oldukça önemlidir. Çünkü eğer malzeme içersinde elektronların düşük sıcaklıkta ve şiddetli manyetik alan altında nasıl davrandıklarını çözmek istiyorsak her şeyden önce bu hareketlerini ifade eden gerçek bir denklemi elde etmek gerekir. Denklem (3.30) un gerçek fiziksel şartları yansıtabilmesi için malzeme içinde ve dışında

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (3.31)$$

Poisson denkleminin çözülmesi gerekir.

3.3. Sıkıştırılabilir ve Sıkıştırılamaz Şeritlerin Oluşumu

Şiddetli manyetik alan altında hareket eden elektronların hareketini anlatan tek elektron Schrödinger denklemi olan Denk.(3.30) ile verilen ifadede elektronlar arası etkileşme hariç, malzemeden ve verici atomlarından kaynaklanan etkileri bir arada yazarsak, denklem

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m^*\omega_c^2(x-x_0)^2\Phi+V(x)\Phi=E\Phi \tag{3.32}$$

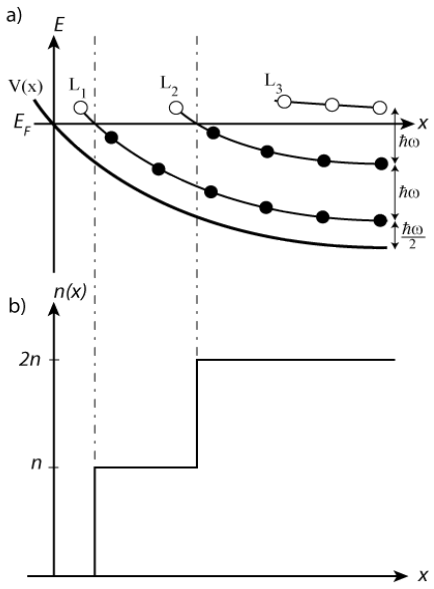
halini alır. Burada $V(x)$ manyetik alan hariç bütün dış etkilerden gelen sınırlandırıcı potansiyeli temsil etmektedir. Eğer $V(x)$ potansiyeli manyetik uzunluk olan ℓ boyunca çok yavaş değişirse o zaman Denk.(3.32) de $V(x)$ potansiyelinin etkisi bir pertürbasyon yaklaşımı kullanılarak elde edilebilir. Bu durumda Denk. (3.32) in enerji seviyeleri yaklaşık olarak

$$E_n(x)\cong\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)+V(x) \tag{3.34}$$

İfadesiyle verilir (Siddiki ve Gerhardts 2004). Sonuç itibari ile Şekil 3.6a da görüldüğü gibi sınırlayıcı potansiyel Landau seviyelerinin malzeme içersinde bükülmesine neden olmaktadır. Şekilde $L_1, L_2 \cdots$ ler Landau seviyelerini göstermektedir. Şekil 3.6a da görüldüğü gibi elektronların Fermi enerjisi Landau seviyelerden birine karşılık geldiğinde o Landau seviyesi dolmaya başlar. Fermi seviyesi iki Landau seviyesinin arasına karşılık geldiğinde ise alttaki Landau seviyesi tam olarak doldurulur fakat üsteki Landau seviyesine ise aşırı düşük sıcaklıktan dolayı hiç elektron yerleştirilemez. Elektronların perdeleme etkisini göz önüne almazsak yani elektronlar arası etkileşmeyi hesaba katmazsak Şekil 3.6b deki gibi bütün elektron dağılımı basamaklar halinde olacaktır.

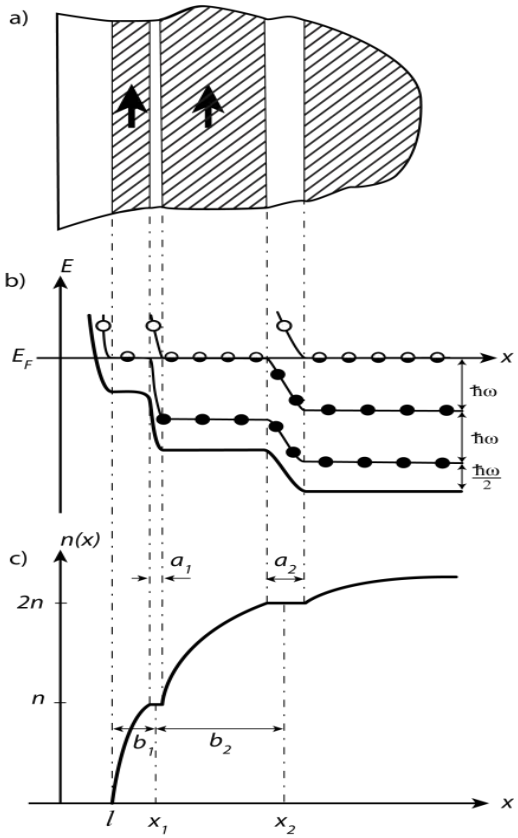
Elektronlar arası etkileşmeyi hesaba katmaya kalkarsak eğer Şekil 3.7 de görüldüğü gibi elektronların oluşturduğu bölge karakteristik olarak birbirine zıt iki bölgeye ayrılır. Bunlardan ilki Fermi enerjisinin Landau seviyelerinin arasına düştüğü bölgedir. Bu kısımda alttaki seviye tam doludur ve elektronlar yeterince düşük sıcaklıktan dolayı üst seviyeye hiçbir zaman yerleşemezler. Yalıtkanlarda

olduğu gibi eğer mevcut seviyelerin tamamı dolu ise ve üsteki boş seviyelere de yasak enerji aralığından ötürü elektronlar yerleşemiyorlarsa elektronların hareket edebileceği, yani durumlarını değiştirebilecekleri bir seviye olmadığı için tüm elektronlar bağlı elektronlar gibi davranır ve bu durumda o kısım yalıtkan özelliği gösterir. Malzeme içinde bu kısım yalıtkan gibi davranır ve bu kısma fazladan bir tek elektron bile konamaz. Bu özelliklerinden dolayı malzeme içerisinde böyle oluşan kısımlara *Sıkıştırılamaz Şerit, SZŞ (Incompressible Strip, ICS)* denir. Bunun aksine malzeme içerisinde Fermi seviyesi ile Landau seviyesinin çakıştığı kısımlarda Landau seviyeleri kısmen dolu olacaktır. Bu da iletim bandındaki elektronlar gibi elektronlara serbest hareket etme olanağı tanıyacaktır. Bu bölge, malzeme içerisinde bir iletken gibi özellik gösterir. Bu durumda bu seviyelere yeni elektronlar da yerleştirilebilecektir. Malzeme içerisinde bu özelliğe sahip oluşan kısımlara da *Sıkıştırılabilir Şerit, SŞ (Compressible Strip, CS)* denir.



Şekil 3.6 a) Sınırlayıcı potansiyelin Landau seviyelerini bükmesi. Burada elektronlar arası etkileşme hesaba katılmamıştır. $V(x)$ sınırlayıcı potansiyeli, L_1, L_2 ve L_3 ise ilk üç Landau seviyesini göstermektedir. E_F elektronların fermi enerjisini göstermektedir. ● işaretleri dolu Landau seviyelerini, **O** işaretleri ise boş Landau seviyelerini göstermektedir. **b)** Etkileşmeyen elektronlar yaklaşımı altında oluşan elektron dağılımı. Bu şekil Chklovskii ve ark. 1992 makalesinden alınıp düzenlenmiştir.

Elektronlar arası etkileşmeyi ilk hesaba katan konuyla ilgili çalışmalar Glazman, Chklovskii ve Shklovskii adlı bilim adamları tarafından yapılmıştır (Glazman ve Larkin 1991; Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993). Bu araştırıcılar yukarıda bahsettiğimiz gibi sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz bölgelerin perdeleme özelliklerini kullanarak sıkıştırılamaz bölgelerin konumlarını bulmak için yeni bir model ortaya atmışlardır. Bu model ağırlıklı olarak problemin elektrostatik çözümüne dayanmaktadır. Şekil 3.7 de bu modele göre sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz bölgelerin oluşumu ve elektron yoğunluğu görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi potansiyel basamaklı bir yapı sergilemektedir. Basamaklar arası ise ilk basamak hariç $\hbar\omega_c/e$ kadardır. Kenardan içeriye doğru giderken elektronların Fermi enerjisi ilk Landau seviyesinin altında kaldığından bu kısma hiçbir elektron yerleşemez. Çünkü o aralıkta elektronların yerleşebileceği herhangi bir izinli seviye mevcut değildir. Fermi enerjisi ilk Landau seviyesine eşdeğer olduğunda elektronlar ilk Landau seviyesine yerleşmeye başlarlar. Kısmen doldurulmaya başlanan Landau seviyesinde elektronların rahatlıkla hareket etmelerine olanak veren boş seviyeler olduğu için bu bölge tıpkı bir metal gibi davranıp potansiyelin değişmemesine yani sabit kalmasına sebep olacaktır. Böylece birinci Landau seviyesi yavaş yavaş elektronlar tarafından doldurulmaya devam eder. Dolma işlemi birinci Landau seviyesi tam doluncaya kadar devam eder. Birinci Landau seviyesi tam dolduğunda artık elektronlar hareket edebilecekleri başka boş seviyeler olmadığı için bağlı elektronlar gibi hareket özgürlüklerini kaybederler ve daha fazla potansiyeli perdeleyemezler. Artık bu bölge iletken değildir, yalıtkan özellik göstermeye başlar. Böylece daha fazla perdelenemediği için potansiyel düşmeye devam eder. Bu esnada Fermi enerjisi iki Landau seviyesinin arasında kaldığı için elektronlar üst seviyeye de yerleşemezler. Sıkıştırılamaz bölge dediğimiz bu kısımda birinci Landau seviyesi tam dolu olduğu için ve ikinci Landau seviyesine de bir tek elektron bile yerleşemediği için elektron dağılımı sabittir. Bu durum potansiyelin $\hbar\omega_c/e$ kadar düşmesine kadar böyle devam eder. Bu düşme gerçekleştiğinde Fermi enerjisi ikinci Landau seviyesi ile çakışacak ve elektronlar ikinci Landau seviyesine yerleşip doldurmaya başlayacaklardır. Böylelikle ikinci sıkıştırılabilir bölgeye girmiş oluruz. Bu bölgede de yine metalik özellikten dolayı potansiyel sabit olacaktır. Bu oluşumların tümüne *kenar etkisi* denmektedir.



Şekil 3.7 a) Kenar bölgesinde elektronların dağılımı. Taralı kısımlar *Sıkıştırılabilir Şeritleri* taralı olmayan kısımlar ise *Sıkıştırılamaz Şeritleri* göstermektedir. **b)** Elektronlar arası etkileşme hesaba katılınca oluşan basamaklı dış potansiyel yapısı. Burada ● dolu Landau seviyelerini, **O** boş Landau seviyelerini ve ◒ ise yarı dolu Landau seviyelerini göstermektedir. **c)** Oluşan elektron dağılımı yoğunluğu, sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz bölgelerin konumları. Burada l elektron dağılımının başladığı nokta, x_1 ve x_2 sıkıştırılamaz şeritlerin konumlarını, a_1 ve a_2 sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlıklarını ve en son olarak b_1 ve b_2 ise sıkıştırılamaz şeritler arasındaki uzaklığı göstermektedir. Bu şekil Chklovskii ve ark. 1992 makalesinden alınıp düzenlenmiştir.

Sonuç olarak sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz bölgeler böyle bir süreçle oluşmaktadır. Elbette ki bu bölgelerin konumları ve kalınlıkları Denk. (3.30) in ayrıntılı çözümünü gerektirmektedir. Her şeyden önce fiziksel olarak bir problemi doğru çözmek için o problemi ifade eden denklemin doğru yazılması gerekir. Bu nedenle problemin elektrostatik kısmı çok önemlidir. Bununla ilgili olarak gelecek bölümde üç boyutlu Poisson denklemini ve çözümünü tartışacağız.

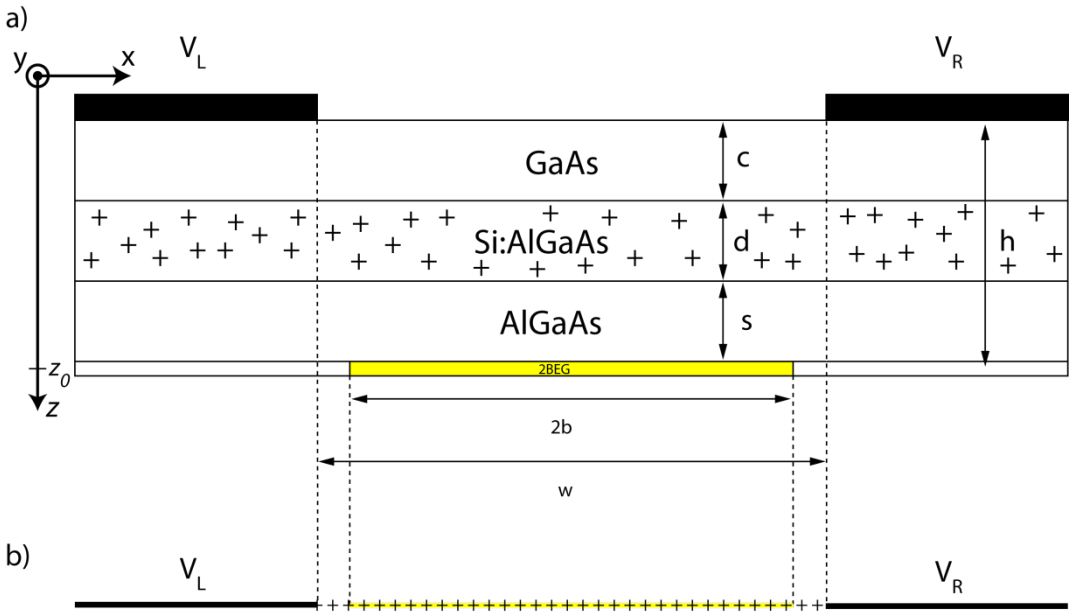
4. ÜÇ BOYUTLU POİSSON DENKLEMİ VE SINIR ŞARTLARI

Kuantum Hall olayı probleminin çözümünde karşılaşılan, elektrostatik problem, doğru bir şekilde ortaya konmalı ve çözülmelidir. *KUHO* probleminin, elektrostatik kısmı Poisson denklemi ve çözümünden ibarettir. Denklem (4.1) de gördüğümüz Poisson denklemi ikinci dereceden

$$\nabla^2 V(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon} \tag{4.1}$$

bir diferansiyel denklemdir. Bu tip denklemlerin çözümünde doğru sonuca ulaşmak sınır şartlarının doğru bir şekilde belirlenmesine bağlıdır. Farklı sınır şartları denklemin çözümünü tamamen değiştireceğinden problemin tanımı yapılırken doğru sınır şartlarının belirlenmesi gerekir. Sınır şartları ne kadar gerçeğe yakın verilirse problemin çözümü de o denli gerçek sistemi yansıtacaktır.

Son zamanlara kadar *KUHO* kurumsal araştırmalarında ağırlıklı olarak Green fonksiyonları yöntemi kullanılmıştır. İlk elektrostatik çalışmaları yürüten Glazman, Chklovskii ve arkadaşları problemi daha anlaşılır ve analitik çözülebilir bir hale getirmek için düzlem yaklaşımı yapmışlardır (Glazman ve Larkin 1991; Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993). Düzlem yaklaşımında, Şekil 4.1 de görülen kapılar ile *2BEG* arasındaki toplam h mesafesi *2BEG*'nın enine boyutu olan 2b mesafesi ile karşılaştırıldığında çok küçük kabul edilerek $(h \ll 2b)$ bu mesafe ihmal edilmiştir. Yani kapılar, verici atomlar ve *2BEG* aynı $z = z_0$ düzleminde kabul edilmiştir. Ayrıca akım yönü olan y yönünde yük dağılımı değişmez alınarak üç boyutlu Poisson denklemi iki boyuta indirgenmiştir. Elbette ki bütün bu varsayımlar problemi gerçek doğasından uzaklaştırmıştır. İlginç olan ise bu varsayımlara rağmen elde edilen analitik sonuçların o zamana göre çok iyi olmasıdır. Chklovskii ve arkadaşlarının geliştirdiği bu model *KUHO*'nın anlaşılmasında çok önemli bir kilometre taşı olmuştur. Daha sonraları bu model diğer araştırmacılar tarafından geliştirilerek kullanılmaya devam edilmiştir (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004).



Şekil 4.1 a) Nano yapının orijinal halinin akım doğrultusu olan y yönünden görünen hali. **b)** Chklovskii ve arkadaşlarının düzlem yaklaşımı. Verici atomlar, kapılar ve 2BEG hepsi $z = z_0$ düzleminde. Burada sarı çizgi *2BEG*, + işaretleri ise iyonlaşmış pozitif verici atomları ve üstte soldaki ve sağdaki siyah şeritler kapıları temsil etmektedir. V_L ve V_R sol ve sağ kapıya uygulanan gerilimlerdir.

Chklovskii ve arkadaşları ile aynı yıllarda Davies ve arkadaşları problemi ilk kez üç boyutlu olarak ele alan bilim adamları olmuşlardır (Davies 1988; Davies ve ark. 1995). Davies bu çalışmasında Şekil 4.1a da görüldüğü gibi z yönündeki derinliği hesaba katmıştır. Bu durumda Poisson denklemini çözerken sınır şartları önem kazanır. Davies z yönündeki sınır şartlarını $z = 0$ da yani malzemenin üst yüzeyinde kapıların olduğu yerde gerilimi kapı potansiyeline eşit almış, diğer yerlerde ise sıfır almıştır. $z \to \infty$ için ise z yönünde potansiyelin birinci türevini $\partial V(x,y,z)/\partial z = 0$ yani $z \to \infty$'da z doğrultusundaki elektrik alanını sıfır kabul etmiştir. Elektron gazının serbest olduğu x ve y doğrultularında ise peryodik sınır koşulları almıştır. Bu sınır şartları ile $z = 0$ daki kapıların aşağıda *2BEG*'nın bulunduğu bölgede oluşturduğu sınırlayıcı potansiyeli

$$V(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \int \frac{|z|}{2\pi(z^2 + |x - x'|^2 + |y - y'|^2)^{3/2}} V(x', y', 0)dx'dy' \qquad (4.2)$$

şeklinde bir integrale indirgemiştir. Burada $V(x', y', 0)$ yüzeydeki sınır şartından gelen kapı potansiyelleridir. Şekil 4.1 de görüldüğü gibi Denk. (4.2) de $z = h$ alındığı zaman kapıların *2BEG*'nın olduğu bölgede oluşturduğu potansiyel elde edilecektir. Davies'in bu çalışması, *KUHO* olayının nicel olarak anlaşılması adına literatüre bir mihenk taşı olmuştur. Günümüzde bile birçok bilim adamı bu problemle uğraşırken problemin elektrostatik bölümünde Davies'in çalışmalarını temel almaktadır (Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[a]; Ihnatsenka ve Zozoulenko 2006[b]; Siddiki ve Marquardt 2007). Biz de bu çalışmamız içinde Mach-Zehnder interferometresini incelerken Davies'in çalışmalarından yararlandık (Siddiki ve ark. 2008). Aslında Davies'in çalışmasında sadece yüzeydeki kapıların aşağıda *2BEG*'nın olduğu bölgede yapacakları sınırlayıcı potansiyel verilmektedir. *x* ve *y* doğrultularında sınır şartları periyodik olduğu için böyle bir çalışma ile düzgün dağılmış verici atomların yapacağı sınırlayıcı etkiyi görmek mümkün değildir. Ayrıca Davies 1995 deki çalışmasında birçok kapı tipi için Denk. (4.2) ile verilen ifadenin analitik çözümlerini vermiş olsa da periyodik sınır şartları altında Denk. (4.2)'nin geçerli olabilmesi için kapı yapısının da simetrik olmak zorunluluğu vardır. Davies'in çalışmasını kullanan araştırmacılar genelde birçok şekilde verici atomların etkisini elle simule etmektedirler. Davies'in çalışmaları, *2BEG*'nı ve elektrostatik problem çözümünü içermemektedir (Davies 1988; Davies ve ark. 1995). Bundan dolayı şimdiye kadar bu konu ile ilgilenen tüm araştırmacılar *2BEG*'nın elektrostatik çözümü için Green fonksiyonları teoremini ve Fourier açılımlarını kullanarak çözümler elde etmişlerdir (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Siddiki ve Gerharts 2003; Siddiki ve Gerharts 2004). Verici atomların ve kapıların oluşturduğu sınırlayıcı potansiyel bir kez elde edildikten sonra potansiyelin üst üste binmesi ilkesi kullanılarak bu potansiyel 2BEG için elde edilen potansiyel üzerine eklemektedirler. Fakat burada *2BEG*'ın Poisson Denklemi çözülürken Kesim 4.1'de anlatacağımız gibi z yönündeki sınır şartı $|z| \to \infty$ giderken $V(z) \to 0$ şeklinde alınmaktadır. Yani sınır şartında kapılar hiç hesaba katılmamaktadır.

Poisson denkleminin üç boyutlu çözümünü yapan, açık sınır şartları olarak adlandırılan yeni ve fiziksel olarak gerçeğe daha yakın sınır şartlarını kullanan araştırıcılar Weichselbaum ve Ulloa' dır (Weichselbaum ve Ulloa 2003). Bu

araştırmacılar çalışmalarında Poisson denklemini üç boyutta çözebilmek için kendilerinin geliştirdiği özel bir ağırlık ortalaması kullanmışlardır. Ayrıca üç boyutlu Poisson denklemini, *Ardışık Aşırı Durulma, AAD (Successive Over Relaxation, SOR)* diye adlandırılan sayısal yöntemi kullanarak çözmüşlerdir. Elbette ki üç boyutlu Poisson denklemi çözümleri ile ilgilenen başka araştırmacılar da olmuştur (Speyer ve ark. 2001; Lai ve ark. 2006). Fakat Weichselbaum ve Ulloa'nın çalışmasını öne çıkaran, içlerinde Weichselbaum'un da bulunduğu Aslan ve arkadaşlarının üç boyutlu sayısal Poisson çözümünü *KUHO*'na uygulamış olmalarıdır (Arslan ve ark. 2008). Fakat Davies'in çalışmalarını kullanan araştırmacılar gibi bunlar da üç boyutlu Poisson çözümünü sadece kapıların ve verici atomların oluşturduğu potansiyeli bulmakta kullanmışlardır. Daha sonra *2BEG* için yine Green fonksiyonlarını (Kernel fonksiyonunu) ve Fourier dönüşümlerini kullanmışlardır.

Biz bu çalışmamızda üç boyutlu Poisson denkleminin çözümü için Mach-Zehnder interferometresini incelediğimiz çalışmamızda Green fonksiyonları ve Fourier dönüşümü yöntemini kullandık. Çalışmanın geri kalan kısmında üç boyutlu Poisson denkleminin öz-uyumlu çözüm esnasında her adımda yeniden çözülmesi gerektiğini düşündüğümüz için üç boyutlu Poisson denkleminin sayısal çözümünü kullandık. Elbette ki analitik çözümler her zaman için sayısal çözümlerden daha üstün ve daha doğrudur. Fakat üç boyutlu poisson denkleminin analitik bir çözümünü elde edebilmek için yapılan varsayımlar problemin doğasını gerçek fiziksel şartlardan oldukça uzaklaştırmaktadır. Sonuç itibari ile Green fonksiyonları yöntemi ile elde edilen Kernel fonksiyonu da böyle yaklaşımlar sonucu gerçek fiziksel sistemden biraz uzaklaşmış bir fonksiyondur. Ayrıca Kernel fonksiyonu kullanılırken perdeleme gibi diğer etkileri de hesaba katmak için genelde araştırıcılar Fourier dönüşümlerine başvuruyorlar bu da bilgisayarın hesaplama süresinde ve bellek gereksiniminde oldukça fazla bir yer tutuyor. Yani analitik çözümün bilgisayarın hesaplamasına kazandırması gereken süre Fourier dönüşümleri ile harcanıyor. Bu çalışmamızda elden geldikçe gerçek fiziksel şartları yansıtan Poisson denkleminin üç boyutlu sayısal çözümlemesini yapıyoruz. Üç boyutlu Poisson denkleminin çözümü elektronlar arası etkileşmeyi de doğrudan hesaba kattığı için özellikle çift tabakalı (bilayer) sitemlerde çok büyük avantajlar sağlar. Ayrıca perdeleme etkilerini zaten

Poisson denkleminin çözümü doğrudan içermekte olduğu için bunun için de ayrı bir hesaba gerek olmuyor. Bütün bu söylediklerimiz için önce Green Fonksiyonu ve Fourier dönüşümü yöntemini inceleyelim daha sonra ise Poisson denklemini sayısal olarak çözebilmek için nasıl basit sayısal bir denkleme dönüştürdüğümüze bakalım.

4.1. Üç Boyutlu Poisson Denkleminin Green Fonksiyonları ve Fourier Dönüşümü ile Çözümü

Üç boyutlu Poisson Denklemi $\kappa = 4\pi\varepsilon$ şeklinde alınarak

$$-\kappa\nabla^2 V(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ε malzemenin dielektrik katsayısıdır. Poisson denklemi ikinci dereceden kısmi bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözmek için birçok yöntem vardır ama en bilindik olanı Green fonksiyonu yöntemidir (Jackson 1999; Morse ve Feshbach 1953). Bu yöntemde Denk.(4.3) 'deki diferansiyel denklem yerine

$$-\kappa\nabla^2 \mathrm{G}(\vec{\mathrm{r}}, \vec{\mathrm{r}}') = 4\pi\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}') \tag{4.4}$$

şeklindeki diferansiyel denklem Denk. (4.3) için geçerli sınır koşulları ile ele alınır. Denklem (4.4)'ün çözümü olan $G(\vec{r}, \vec{r}')$ ise Green fonksiyonu olarak ifade edilir. Potansiyellerin üst üste binmesi ilkesi gereği Denk. (4.3)'ün çözümü Denk. (4.4)'ün çözümü cinsinden

$$V(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \ \mathrm{G}(\vec{\mathrm{r}}, \vec{\mathrm{r}}')\rho(\vec{r}') \tag{4.5}$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada tekrar vurgulanması gereken en can alıcı nokta sınır şartlarıdır. Denklem (4.4) çözülürken muhakkak Denk. (4.3)'ün tanımlandığı sınır şartları ile çözülmesi gerekliliğidir. Aksi takdirde Denk. (4.4)'ün çözümünden elde edilecek Green fonksiyonu ile Denk. (4.3)'ün çözümü asla ifade edilemez. Zaten tek bir Poisson denklemi olmasına rağmen çözümlerin farklılaşması elektron dağılımının farklı olmasından ve bir de sınır koşullarından ileri gelir. Aynı elektron dağılımı altında farklı sınır koşulları farklı potansiyel dağılımlarını oluşturacaktır. Aslında

Denk. (4.4) ün bağımlılığı sadece sınır koşullarına indirgenmiştir. Çünkü Denk. (4.4) de kullanılan elektron dağılımı nokta bir yükün dağılımıdır. Burada potansiyel dağılımını değiştirebilecek tek olgu sınır şartlarıdır. Denklem (4.5) ile o sınır koşulları altında herhangi bir yük dağılımı için sonuç elde edilebilir. Örneğin $|\vec{r}| \to \infty$ da potansiyelin sıfır olduğu sınır koşulu altında Denk. (4.4) 'ün çözümü olan Green fonksiyonu

$$G(\vec{r},\vec{r}') = 1/[\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|] \tag{4.6}$$

şeklinde çok iyi bildiğimiz nokta yükün potansiyel dağılımı olacaktır. Bu sınır koşulu altında herhangi bir yük dağılımın oluşturacağı potansiyel dağılımı Denk. (4.5)'de Denk. (4.6) ile verdiğimiz Green fonksiyonu kullanılarak elde edilebilir.

Ayrıca bir çok differansiyel denklemi kolay çözmenin diğer bir yolu ise özellikle peryodik sınır şartları altında denklemi Fourier açılımı ya da peryodik olmayan koşullarda bile Fourier transformu kullanılarak denklemin daha rahat çözüldüğü bir açılıma ya da uzaya dönüştürüp diferansiyel denklemi orada çözüp, daha sonra çözümü gerçek uzaya geri taşıma yöntemidir.

Örnek olarak *x* ve *y* yönünde periyodik olan ve *z* yönünde bir katman şeklinde olan iki boyutlu bir yük dağılımını ele alalım. Bu yük dağılımı

$$\rho(\vec{R}) = \rho(\vec{r},z) \tag{4.7}$$

şeklinde olsun. Burada ρ elektron yoğunluğunu temsil etmektedir. $\vec{R}$ ise üç boyutlu yer değiştirme vektörü, $\vec{r}$ ise *xy* düzleminde iki boyutlu yer değiştirme vektörünü göstermektedir. Bu yük dağılımına karşılık uzayda bir de potansiyel oluşur, bu potansiyel sınır şartları periyodik ise bu potansiyelin periyodik bir potansiyel olması gerekir, bunu

$$\phi(\vec{R}) = \phi(\vec{r},z) \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edelim. Burada $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ düzlemindeki yer değiştirme vektörüdür ve *z* sabittir. *xy* düzleminde periyodikliğin doğrultularının sırasıyla *a* ve *b* şeklinde

olduğunu düşünürsek periyodikliği $\vec{q} = \frac{2\pi n_x}{a}\hat{\imath} + \frac{2\pi n_y}{b}\hat{\jmath}$ şeklinde bir vektör ile ifade edebiliriz. n_x ve n_y tamsayılardır. Potansiyeli ve yük dağılımını Forier serisine açarsak

$$\rho(\vec{r}, z) = \sum_{\vec{q}} \rho_{\vec{q}}(z) e^{i\vec{q}.\vec{r}} \tag{4.9a}$$

$$\phi(\vec{r}, z) = \sum_{\vec{q}} \phi_{\vec{q}}(z) e^{i\vec{q}.\vec{r}} \tag{4.9b}$$

ifadelerine ulaşırız. Burada $\rho_{\vec{q}}(z)$ ve $\phi_{\vec{q}}(z)$' nin açılımları ise

$$\rho_{\vec{q}}(z) = \frac{1}{ab} \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}.\vec{r}} \rho(\vec{r}, z) \tag{4.10a}$$

$$\phi_{\vec{q}}(z) = \frac{1}{ab} \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}.\vec{r}} \phi(\vec{r}, z) \tag{4.10b}$$

ifadeleri ile verilir. Denklem (4.9a) ve (4.9b)'yi Denk. (4.3) deki Poisson denkleminde yerine koyup gerekli düzenlemeleri yaparsak, Fourier dönüşümündeki her bir bileşen için aşağıdaki yeni denklemi

$$\left[|\vec{q}|^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_{\vec{q}}(z) = \frac{4\pi}{\kappa} \rho_{\vec{q}}(z) \tag{4.11}$$

elde ederiz. Bu diferansiyel denklemi de çözmek için Green fonksiyonları yöntemini kullanabiliriz. Denklem (4.11) deki sınır şartlarını koruyarak Denk.(4.11)'in çözümü ile ilgilenmektense aşağıdaki denklemin çözümü ile

$$\left[|\vec{q}|^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G_{\vec{q}}(z, z') = \frac{4\pi}{\kappa} \delta(z - z') \tag{4.12}$$

ilgileniriz. Diferansiyel denklemin lineer bir diferansiyel denklem olmasından dolayı üst üste binmesi ilkesini kullanarak Denk. (4.12)'in çözümü cinsinden Denk.(4.11)'in çözümü

$$\phi_{\vec{q}}(z) = \int dz' G_{\vec{q}}(z,z')\rho_{\vec{q}}(z') \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem(4.13) ile elde edilen Foruier bileşenleri kullanılarak ters dönüşümle gerçek uzaydaki çözüm elde edilmiş olunur. Böylelikle hem Foruier dönüşümleri ve hem de Green fonksiyonları yöntemleri kullanılarak Poisson denklemi çözülmüş olur.

Denklem (4.12)'in çözümleri yine tamamen sınır koşullarına bağlıdır. Örneğin $|z| \to \infty$ giderken $\phi_{\vec{q}}(z) \to 0$ sınır koşulu geçerli ise Denk. (4.12)'in çözümü

$$G_{\vec{q}}(z,z') \equiv G_{\vec{q}}(z-z') = \frac{2\pi}{\kappa|\vec{q}|} e^{(-|\vec{q}||z-z'|)} \tag{4.14}$$

şeklinde olacaktır. Bu çözümün doğruluğu Denk. (4.12)'de yerine konarak rahatlıkla görülebilir. Farklı sınır koşulları için Fourier bileşeninin Green fonksiyonu farklı olacaktır.

Örnek olarak iki boyutlu periyodiklikte *x* yönünde *a* periyodu ile *y* yönünde ise değişmez bir yük dağılımı ele alalım. Yani

$$\rho(\vec{r},z) = en_0(x)\delta(z-z_0) \tag{4.15}$$

şeklinde bir yük dağılımına sahip olalım. Burada *x* yönünde *a* periyodu varsa o yöndeki Fourier bileşenleri $q_m = 2\pi m/a$ olacaktır. Burada *m* tam sayılardır. Bu yük dağılımını Fourier serisine açarsak

$$\rho(\vec{r},z) = \sum_{m\neq 0} \rho_{q_m}(z)\, e^{iq_m x} \tag{4.16a}$$

$$\rho_{q_m}(z) = \frac{1}{a}\int_0^a dx e^{-iq_m x}\rho(\vec{r},z) \tag{4.16b}$$

olur. Periyodik sınır koşulları altında düzgün dağılmış bir yük dağılımı sonsuz düzlem yük dağılımı gibi davranır ve oluşturacağı potansiyel sabittir. Potansiyel ise sıfır noktası göreceli olduğu için ve sabit bir potansiyelin iki boyutlu elektronlara hiç

bir etkisi olmayacağı için Fourier açılımındaki sabit yük dağılımına karşılık gelen $m = 0$ durumunu çözüm dışında bıraktık. Periyodik sınır şartlarında periyodik yük dağılımına karşılık periyodik bir potansiyel dağılımı olacağı için potansiyeli de Fourier açılımı ile açarsak

$$\phi(\vec{r}, z) = \sum_{m \neq 0} \phi_{q_m}(x) e^{i q_m x} \tag{4.17a}$$

$$\phi_{q_m}(x) = \frac{1}{a} \int_0^a dx e^{-i q_m x}\, \phi(\vec{r}, z) \tag{4.17b}$$

şeklinde olur. Yeni Fourier açılımlarını kullanarak elde edeceğimiz her bir Fourier bileşeni için geçerli olacak olan denklem

$$\left[|q_m|^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_{q_m}(z) = \frac{4\pi}{\kappa} \rho_{q_m}(z) \tag{4.18}$$

şeklinde olur. Burada da Green fonksiyonları yöntemini kullanırsak Denk. (4.11) Green fonksiyonu için

$$\left[|q_m|^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G_{q_m}(z, z') = \frac{4\pi}{\kappa} \delta_{q_m}(z - z') \tag{4.19}$$

haline dönüşür.

Yük dağılımının iki boyutlu olduğunu ve uzayın herhangi bir yerinde kapı olmadığını düşünürsek z yönündeki sınır şartı $|z| \to \infty$ giderken $\phi_q(z) \to 0$ olacağı açıktır. Bu durumda Denk. (4.19)'un çözümü olan Green fonksiyonu

$$G_{q_m}(z, z') \equiv G_{q_m}(z - z') = \frac{2\pi}{\kappa |q_m|} e^{-(|q_m||z - z'|)} \tag{4.20}$$

olacaktır. O zaman $\phi_{q_m}(z)$ Fourier bileşenleri

$$\phi_{q_m}(z) = \int dz' G_{q_m}(z - z') \rho_{q_m}(z') \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (4.16b) ve (4.20), Denk. (4.21)'de yerine yazılarak $\phi_{q_m}(z)$ Fourier bileşenleri

$$\phi_{q_m}(z) = \int dz' \frac{2\pi}{\kappa|q_m|} e^{-(|q_m||z-z'|)} \int_0^a \frac{dx'}{a} e^{-iq_m x'} e n_0(x') \delta(z' - z_0) \quad (4.22)$$

elde edilmiş olunur. Bu denklem düzenlenir ve gerekli işlemler yapılırsa potansiyelin Fourier bileşenleri için

$$\phi_{q_m}(z) = \frac{2\pi}{\kappa|q_m|} e^{-(|q_m||z-z_0|)} \int_0^a \frac{dx'}{a} e^{-iq_m x'} e n_0(x') \quad (4.23)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi Denk. (4.17a)'da elde ettiğimiz Fourier bileşenlerini kullanarak potansiyel dağılımını

$$\phi(\vec{r}, z) = \sum_{m \neq 0} \frac{2\pi}{\kappa|q_m|} e^{-(|q_m||z-z_0|)} e^{iq_m x} \int_0^a \frac{dx'}{a} e^{-iq_m x'} e n_0(x') \quad (4.24)$$

olarak elde ederiz. Son denklemde gerekli işlemleri yaparak ifadeyi

$$\phi(\vec{r}, z) = \phi(x, z) = \frac{ea}{\kappa} \int_0^a \frac{dx'}{a} K(x, x'; z - z_0) n_0(x') \quad (4.25)$$

haline dönüştürebiliriz. İntegraldeki *K* Green fonksiyonunun farklı bir normalizasyon halidir ve

$$K(x, x'; z - z_0) = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|} e^{-2\pi|m||z-z_0|/a} e^{2\pi i m (x-x')/a} \quad (4.26)$$

Kernel fonksiyonu olarak bilinir. Biraz işlenerek $z = z_0$ için Kernel fonksiyonunun

$$K(x - x') = -2ln|2sin(\pi[x - x']/a)| \quad (4.27)$$

şeklinde olacağı gösterilebilir.

Böylece Denk. (4.25) ve (4.27) kullanılarak iki boyutlu *x* yönünde periyodik y yönünde değişmez herhangi bir yük dağılımı için potansiyel dağılımı rahatlıkla bulunabilir.

4.2. Üç Boyutlu Poisson Denkleminin Sayısal Çözümü

Numerov metodunda takip edilen sürece benzer olarak önce Taylor serisi açılımı kullanıp bir fonksiyonun ikinci dereceden türevini elde edelim. Herhangi bir *f(x)* fonksiyonunun x_0 noktası civarında Taylor serisine açılımı

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + O((x - x_0)^4) \tag{4.28}$$

biçiminde olur. Buna benzer olarak *f(x-h)* ve *f(x+h)* şeklinde verilen fonksiyonların *x* noktası civarında seriye açılımından iki seri elde edilir.

$$f(x + h) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)h + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)h^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x)h^3 + O(h^4) \tag{4.29}$$

$$f(x - h) = f(x) - \frac{df}{dx}(x)h + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)h^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(x)h^3 + O(h^4) \tag{4.30}$$

Bu denklemlerdeki $O(h^4)$ terimi dördüncü ve daha üst düzeydeki kalan terimlerin toplamını içeren bir artık terimdir. Şimdi bu iki seriyi taraf tarafa topladıktan sonra $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevini çekersek

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2) \tag{4.31}$$

sonucuna ulaşırız. Burada toplamda gelen $2O(h^2)$ yerine yine artık anlamında $O(h^2)$ Poisson denkleminin Kartezyen koordinatlardaki açık ifadesi

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \tag{4.32}$$

biçimindedir. Buradaki kısmi türevler için Denk. (4.31) de bulduğumuz ifadeyi kullanırsak

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{V(x+h_x,y,z) + V(x-h_x,y,z) - 2V(x,y,z)}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2} = \frac{V(x,y+h_y,z) + V(x,y-h_y,z) - 2V(x,y,z)}{h_y^2} + O(h_y^2) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2} = \frac{V(x,y,z+h_z) + V(x,y,z-h_z) - 2V(x,y,z)}{h_z^2} + O(h_z^2) \quad (4.35)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada h_x, h_y ve h_z uzunlukları *x*, *y* ve *z* yönündeki çok küçük farkları gösterir. Denklem (4.32) da Denk. (4.33), (4.34) ve (4.35)'de elde ettiğimiz ifadeleri kullanarak gerekli düzenlemeleri yaparsak uzaydaki herhangi bir (x,y,z) noktasındaki potansiyel için

$$\begin{aligned} V(x,y,z) = {} & \frac{h_y^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x+h_x,y,z) \\ & + V(x-h_x,y,z)\} \\ & + \frac{h_x^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x,y+h_y,z) \\ & + V(x,y-h_y,z)\} \\ & + \frac{h_x^2 h_y^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \{V(x,y,z+h_z) \\ & + V(x,y,z-h_z)\} + \frac{h_x^2 h_y^2 h_z^2}{2\{h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2 + h_x^2 h_y^2\}} \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \\ & + O(h^4) \end{aligned} \quad (4.36)$$

ifadesine elde ederiz. Bu ifadededen anlaşıldığı üzere bir noktadaki potansiyelin değerini bulmak için komşu altı noktadaki potansiyellerin değerini bilmek gerekiyor. Bu formül *h*'nin dördüncü dereceden ifadelerini içermediği için dördüncü dereceden bir yaklaşım olarak bilinir. Burada $O(h^4)$ h_x, h_y, h_z den gelen artık terimlerin tümünü içermektedir.

Denklem (4.36) formülü kullanabilmek için karşımıza çıkan uzay belli sayıda ağ gözüne bölünür. Böylece oluşan ağ üzerinde sınır şartları da kullanılarak her noktadaki potansiyel hesaplanır. Bu hesap öz-uyumlu olarak tekrarlanır. İki tekrar arasındaki fark istenildiği kadar küçük olunca da işleme son verilir. Her seferinde elde edilen değerler bir öncekinin yerine yazılır. Genel olarak bu yaklaşıma *Ardışık Durulma, AD* (*Successive Relaxation, SR)* denir. Fakat bu yaklaşım oldukça yavaş kalabilir. Yaklaşımı hızlandırmak için yeni elde edilen değer doğrudan eskisinin üzerine yazılmak yerine

$$V_i^{n+1} = \omega V_i^{yeni} + (1-\omega)V_i \tag{4.37}$$

ifadesi kullanılır. Burada ω, 1 ile 2 arasında değer alan bir katsayıdır ve yakınsamanın hızlanmasını sağlar. ω nın ideal değerini Weichselbaum ve Ulloa'nın kullandığı

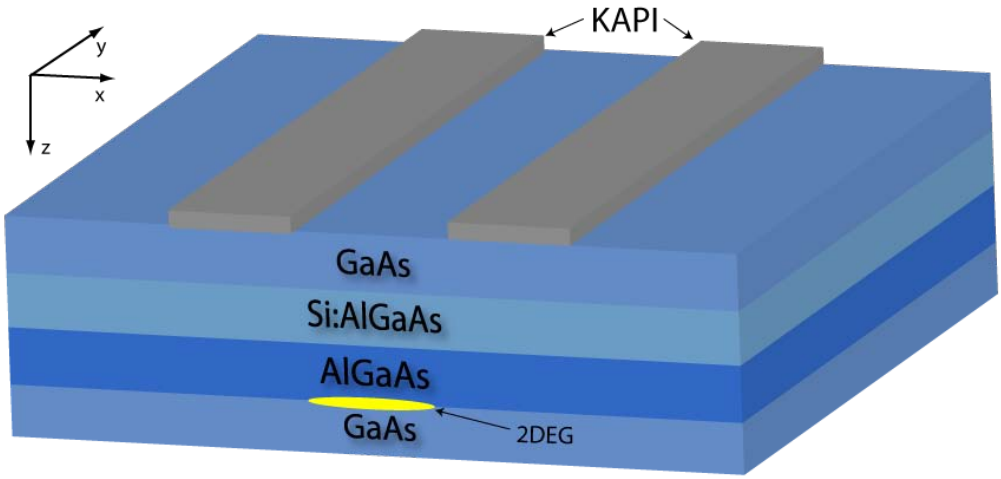
$$\omega = \frac{2}{1+\pi/\min(Meshx, Meshy, Meshz)} \tag{4.38}$$

ifadesinden bulduk (Weichselbaum ve Ulloa 2003). Burada *Meshx, Meshy* ve *Meshz* ifadeleri *x, y* ve *z* doğrultularındaki ağgözü sayılarını göstermektedir. Denklem (4.38) kullanılarak hızlandırılan bu yaklaşıma da *ardışık aşırı durulma* denir.

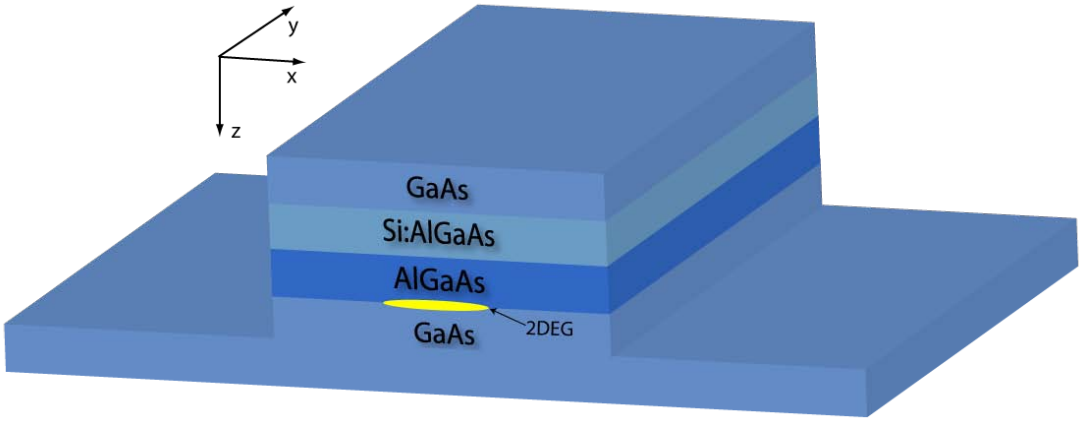
4.3. İncelenen Yapının Geometrisi ve Sınır Şartları

KUHO nın ilk gözlenmeye başlandığı ilk yapılar **kuantum Hall çubuk**'ları diye adlandırılan kuantum tellerdir. Bir kuantum telini oluşturmak için elektronlar bir boyutta serbest iken diğer iki boyutta sınırlandırılmalıdırlar. Zaten 2BEG'ı oluştururken elektronlar büyütme yönünde $Al_xGa_{1-x}As$ ile GaAs ara yüzeyinde sınırlandırılmaktadırlar. Şimdi iki boyutta serbest olan elektronları akım yönüne dik olan diğer yönde de sınırlandırmak gerekir. Bunun için birçok yöntem kullanılmaktadır (Davies 1988). Bu yöntemlerden en önemli olanı kapı kullanımı ile *kuantum Hall çubuğu* yapım yöntemidir (Zheng ve ark. 1986; Horas ve ark. 2008). Şekil 4.2'de böyle bir yapı resmedilmektedir. Diğer önemli bir yöntem de tabakalı yapının derin kesme yöntemi olarak adlandırılan, *2BEG*'nın olduğu kısmı da içine

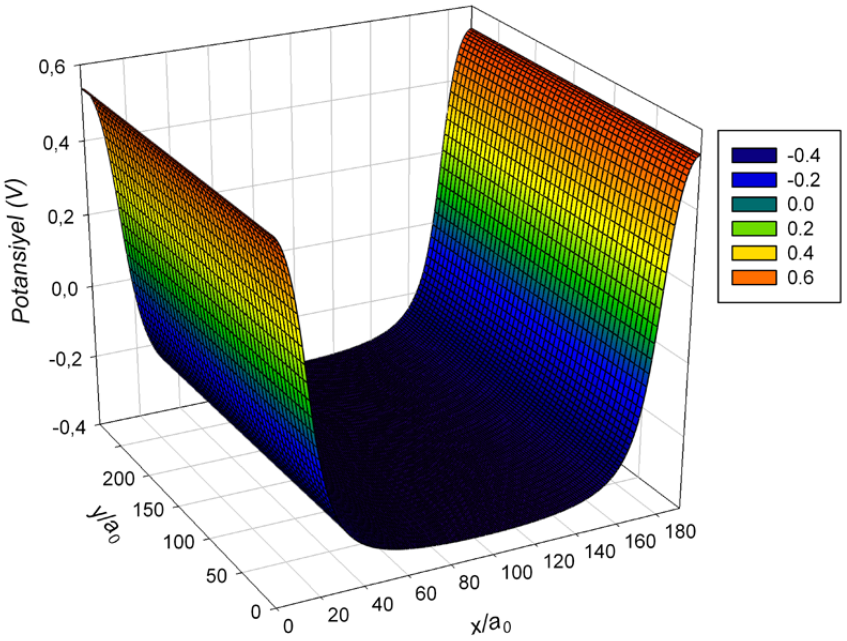
alacak şekilde değişik yöntemlerle kesilmesidir. Bu yolla oluşturulan yapılarla da birçok çalışma yapılmış ve yapılmaktadır (Weitz ve ark. 2000; Ahlswede ve ark. 2001). Şekil 4.3 de derin kesme yöntemi ile oluşturulmuş bir *kuantum Hall çubuğu* görülmektedir.



Şekil 4.2 Tabakalı yapı üzerine kapılar yerleştirilerek *2BEG x* doğrultusunda da sınırlandırılabilmekte ve *kuantum Hall çubuğu* elde edilmektedir.



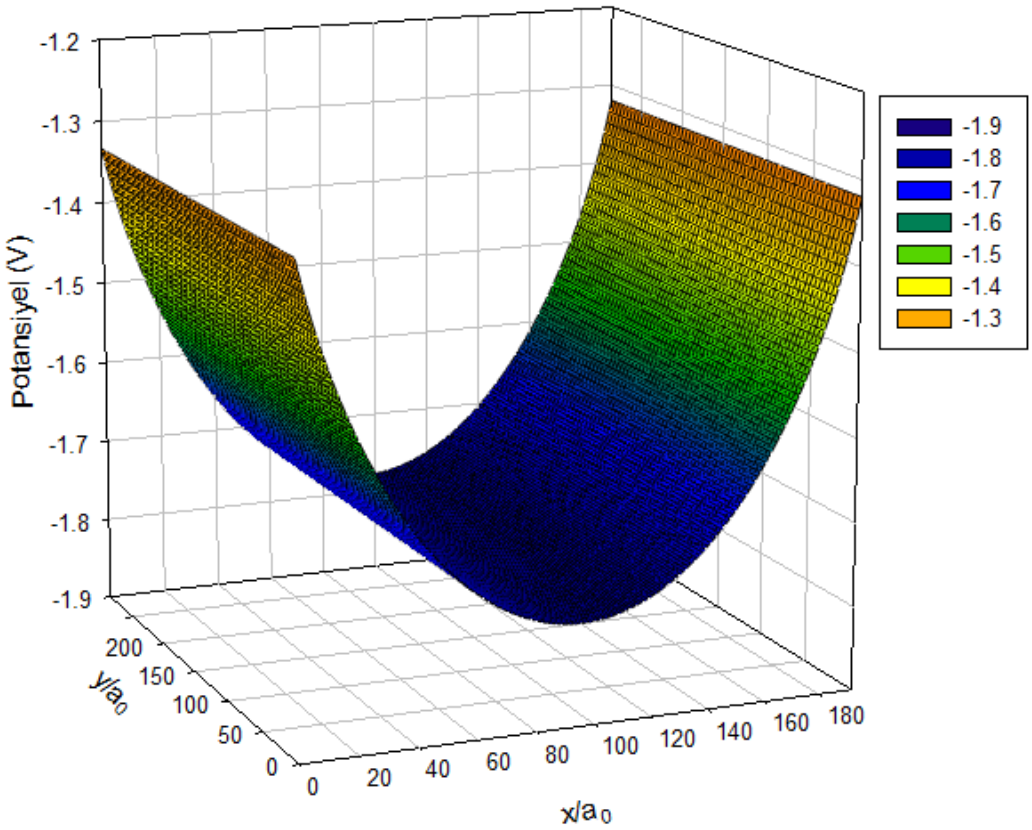
Şekil 4.3 Tabakalı yapı çeşitli yöntemler ile kesilerek *2BEG x* doğrultusunda sınırlandırılabilmekte ve kesme *2BEG*'nın olduğu bölgeyi de içine alacak şekilde yapılır. Bu yönteme *derin kesme yöntemi* denir.



Şekil 4.4 Kapılarla tanımlanmış kuantum Hall çubuğunda elektronların gördüğü arkafon (background) potansiyeli. Burada kapılar dahil kuantum Hall çubuğun eni 2000 nm, uzunluğu ise 3000 nm dir. Grafikte uzunluk birimi olarak a_0 kullanılıyor. GaAs'ta $a_0 \approx 10.41$ nm dir. Kapılara uygulanan gerilim -1.3 V dır. Burada kapılarla 2BEG arasındaki mesafe ise 85 nm dir.

Yapıdaki değişiklikler ve eklentiler sınır şartlarını doğrudan etkiler. Bu çalışmada kapıların kullanıldığı durumlarda z doğrultusundaki sınır şartlarında Davies'in kullandığı sınır şartlarına sadık kalındı (Davies 1988; Davies ve ark. 1995). y yönü akımın aktığı yön olduğu için ve fiziksel olarak bu yönde simetriyi bozacak herhangi bir yapı olmadığı için bu yönde sınır şartları diğer bir çok araştırmacının yaptığı gibi periyodik alınmıştır. Fakat x yönündeki sınır şartları sistemin bu yönde nasıl sınırlandırıldığına bağlıdır. Eğer sistem Şekil 4.2 de gösterildiği gibi kapılar ile sınırlandırılmış ise elektronları sınırlayan kapıların oluşturduğu potansiyelin kapıların tam altında bir maksimum yapmasını bekleriz. Matematik analizden bildiğimiz üzere sürekli bir fonksiyonun maksimum olduğu noktada birinci türev sıfırdır. Bu nedenle bu tip bir yapı için en doğru fiziksel sınır şartı kapıların tam altında $\partial V(x,y,z)/\partial x = 0$ ifadesini kullanmaktır. Bu sınır şartı altında düzgün dağılmış bir verici atom dağılımının potansiyele katkısı sadece bir sabit eklenti şeklinde olmaktadır. Bu da beklediğimiz bir sonuçtur. Çünkü elektronlar açısından bakıldığında düzgün dağılmış verici atom dağılımı tüm yığın madde

boyunca uzanmaktadır. Ayrıca elektronlarla verici atomlar arası uzaklık çok kısa olduğu için elektronlar bu verici atom dağılımını düzgün yük dağılımına sahip sonsuz bir düzlem gibi görürler. Yüklü sonsuz bir düzlemin oluşturduğu potansiyel, düzlemden belli bir mesafede düzleme paralel hareket edildiğinde sabit bir potansiyel olarak görülür. Şekil 4.4 de, Şekil 4.2 deki gibi tanımlanmış bir kuantum Hall çubuğunda elektronların gördüğü sınırlandırıcı potansiyel gösterilmektedir.



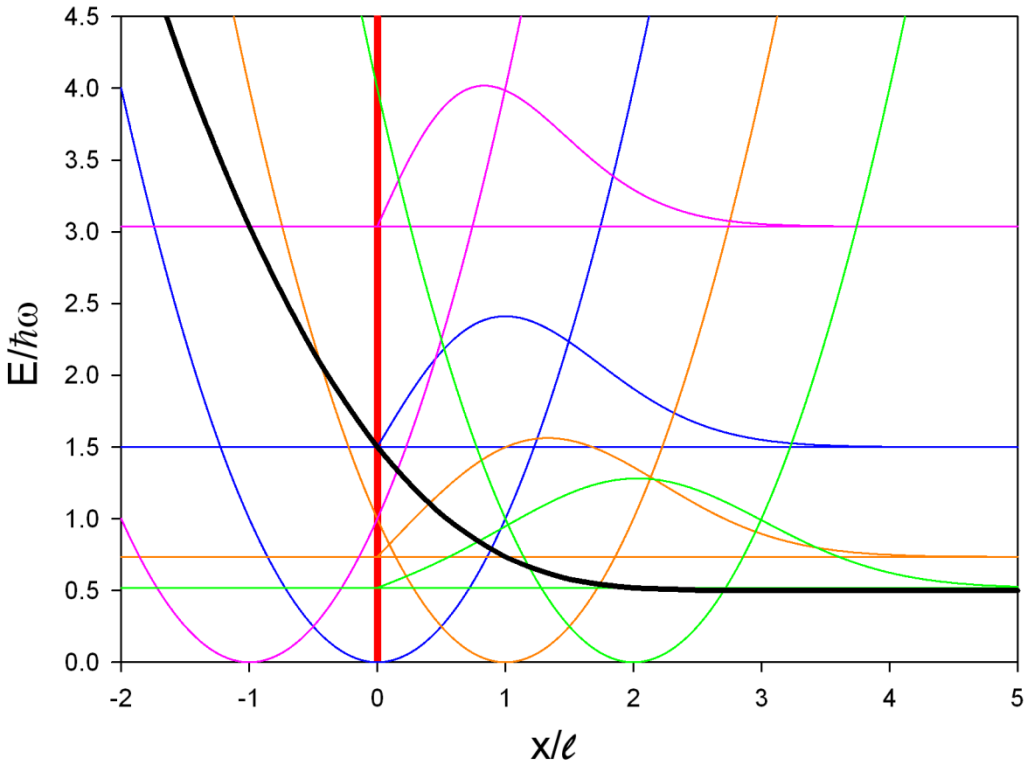
Şekil 4.5 Kesme yöntemi ile elde edilmiş kuantum Hall çubuğunda verici atomlarının oluşturduğu sınırlandırıcı potansiyel. Burada kuantum Hall çubuğun eni 2000 nm, uzunluğu ise 3000 nm dir. Grafikte uzunluk birimi olarak a_0 kullanılıyor. GaAs'ta $a_0 \approx 10.41$ nm dir. Burada *2BEG* malzemenin yüzeyden 85 nm aşağıdadır. Verici atomlar ise yüzeyden 55 nm aşağıdadır. Yani *2BEG* ile verici atomları arasındaki mesafe 30 nm dir. Verici atomların yoğunluğu $n_d = 3 \times 10^{23}\ m^{-3}$ alınmıştır. Bu yoğunluğa sahip verici atomlar z yönünde sadece 10 nm lik bir kalınlığa düzgün dağılmış yüzey yükü olarak ele alınmıştır.

Kapılar kullanılmak yerine Şekil 4.3 de gösterildiği gibi kesme yöntemi kullanılarak yapı sınırlandırılırsa, kullanılması gereken en gerçekçi sınır şartı

potansiyelin sonsuzda sıfır alınmasıdır. Fakat bu kadar büyük bir ağ kullanmak mümkün değildir. Bunun yerine değişik ve elden geldikçe gerçeğe yakın sınır şartları kullanılabilir. Bu tip bir sınır şartı Weichselbaum ve Ulloa'dan gelmiştir ve açık sınır şartı olarak adlandırılmıştır (Weichselbaum ve Ulloa 2003). Eğer malzeme kesme yöntemi kullanılarak sınırlandırılırsa Şekil 4.3 de görüldüğü gibi *x* yönünde malzeme bir noktada sona erer ve sistem hava ile temasa geçer. Hava ortamında hiç bir net yük olmaz. Bu halde bu kısımda çözülmesi gereken Poisson denklemi problemi yerine Laplace denkleminin çözüm problemi gelir. Bu denklemin çözümü süreci yine sınır şartlarından belirlenecektir. Sınır şartları olarak potansiyel sonsuzda sıfırdır ve malzeme kenarında belli bir değerdedir. Kesme yöntemi kullanılarak oluşturulan malzemede üç boyutlu Poisson denklemi çözülürken sınır şartı olarak potansiyelin sonsuzda sıfır olması kullanılmalıdır. Fakat daha önce bahsettiğimiz gibi böyle bir çözümde sonsuz bir ağ yapısı kullanmak mümkün değildir ve hesabın malzemeden belli bir uzaklıkta bitirilmesi gerekir. Biz bu çalışmada *x* yönünde malzemeden yeterince uzak bir noktada potansiyeli sıfır alarak hesabımızı sonlandırdık. Bu halde z yönünde kapılar olmadığı için bu yönde de malzemeden yeterince uzak bir noktada potansiyel sıfır alınarak verici atomların oluşturacağı sınırlayıcı potansiyel gerçeğe çok yakın bir şekilde elde ettik. Böylece kesme yöntemiyle oluştutulan Hall çubuğunda hesaplanan verici atomlarının oluşturduğu potansiyel Şekil 4.5 de gösterilmektedir. Bu potansiyeli gerçeğe yakın elde etme adına çok büyük bir ağ yapısı kullandık. Normalde malzememizin *x* yönündeki kalınlığı 2000 *nm* olmasına rağmen 10000 *nm* lik bir uzay kullandık. Yani *x* yönünde malzemeden 4000 *nm* uzakta potansiyeli sıfır aldık. Bunun için *x* yönünde Poisson denklemindeki hassasiyeti koruma adına 10 *nm* ağ noktaları arası mesafeyi koruyabilmek için 1000 adet ağ noktası kullandık. Malzemede hiç kapı olmadığından *z* yönündeki potansiyel de sonsuzda sıfır olacağı için aynı işlemi *z* yönüne de uyguladık. Yani *z* yönünde de 10000 *nm* lik bir genişliğe karşın 1000 adet ağ noktası kullandık. *y* yönünde ise potansiyeli değişmez kabul ettiğimiz için 3000 *nm* derinlikli malzememizde sadece 64 adet ağ noktası kullandık. Sonuç itibari ile böyle büyük bir ağ yapısında ardışık aşırı durulma yöntemi ile Poisson denkleminin çözümü 2 saatin üstünde bir bilgisayar zamanı almıştır. *KUHO*'nı incelerken Poisson denkleminin çözümünü binlerce kez yaptığımızı düşününce böyle bir hesabın içinden çıkmanın kolay

olmayacağı anlaşılıyor. Bütün bunlar başarılmış olsa bile, kesme yöntemi kullanıldığı zaman elektronları hapseden potansiyele katkı sadece verici atomlarının oluşturduğu Şekil 4.5 de gösterilen sınırlandırıcı potansiyelden ibaret değildir. Burada birçok başka etki de söz konusudur. Özellikle kesme işleminin türüne de bağlı olarak, kenar bölgede oluşan net olarak hesaplamasının çok güç olduğu birçok etkiden dolayı bu da iletim bandında ciddi bir bükülmeye neden olur. Elektronların malzeme içinde tutulmasının sebebi ise iletim bandındaki bu bükülme, hava ortamına geçişteki oluşan potansiyel duvarı ve verici atomların oluşturduğu sınırlayıcı etkilerin toplamından ileri gelir (Davies 2000; Lier ve Gerhardts 1994). Bu etkiler birçok araştırmacının yaptığı gibi kapılarla benzeştirilebilir (Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994). Fakat bu etkilerin hesaplanmasının zorluğu ve karmaşıkılığı nedeniyle kesme yönteminde oluşan sınırlandırıcı potansiyel ister sinüs, parobol ve benzeri fonksiyonlar ile elle simüle edilsin, isterse kenara yerleştirilen kapılarla simüle edilsin, bu tip çalışmalar sonucu elde edilen verilerin deneylerle doğrudan karşılaştırma olanağını zorlaştırmaktadır.

Bütün bunlara ek olarak Şekil 4.6 da gördüğünüz gibi hava ortamına geçilen kısımda iletim bandında hiç bir bükülme olmasa bile oradaki potansiyel duvarı yüzünden bu kenar bölgesindeki elektronlar manyetik alanın oluşturduğu harmonik osilatör potansiyelinin yanı sıra potansiyel duvarını da hissetmeye başlarlar. Elektronların gördükleri toplam potansiyel Şekil 4.6 da görüldüğü gibi artık tam harmonik osilatör yerine şekilde mavi renkte gösterilen yarım harmonik potansiyelde olduğu gibi bir tarafı yaklaşık sonsuz potansiyel duvarı olan diğer tarafı harmonik osilatör potansiyeli olan melez potansiyeller görürler. Bu nedenle Şekil 4.6 da görüldüğü gibi Landau seviyeleri kenara yaklaştıkça yükselir. Ne yazık ki bu etkiyi bu çalışmada kullandığımız Thomas-Fermi yaklaşımı hesaba katamaz. Bu yüzden Şekil 4.6 daki değerler ve dalga fonksiyonları ilgili Schrödinger denkleminin Numerov metodu ile doğrudan sayısal çözümlenmesi ile elde edilmiştir. Şekil 4.6 da görüldüğü gibi bu bükme etkisi yaklaşık olarak kenara iki manyetik uzunluk birimi kala başlamıştır. Bu da manyetik alan değeriyle değişmesine rağmen yaklaşık olarak $20 \sim 25\, nm$ lik bir bölgeye karşılık gelir.

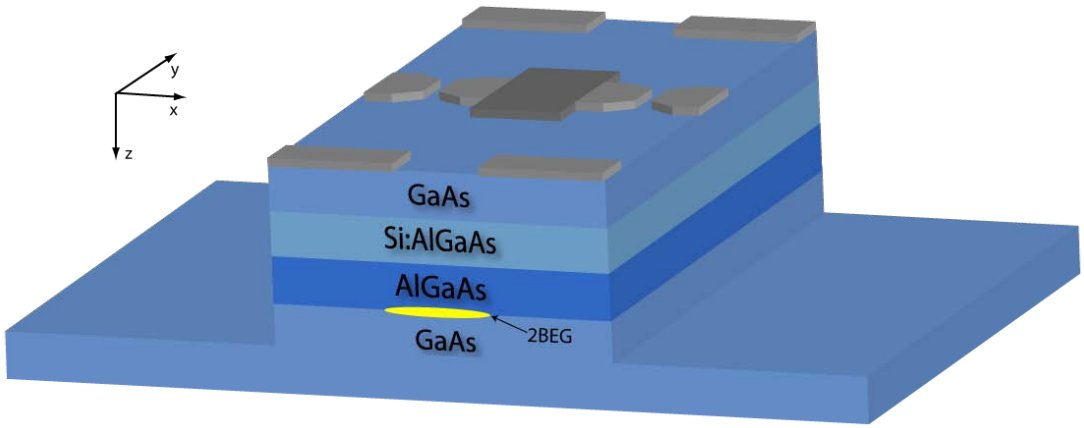


Şekil 4.6 Landau seviyelerinin yukarıya doğru kayması. Burada kalın kırmızı çizginin sağ tarafı malzeme içindeki iletim bandını göstermektedir. Sol tarafı ise hava ortamını göstermektedir. Kırmızı çizginin kendisi ise kesme işlemi sonucu malzeme kenarında oluşan bulk malzemenin hava ortamı ile buluştuğu bölgede gözlenen potansiyel duvarını göstermektedir. Bu şekilde elektronların bu duvarı aşamayacakları düşünülerek potansiyel duvarı sonsuz alınmıştır. Merkezleri farklı olan her bir harmonik osilatör farklı renklerle çizilmiş ayrıca sonsuz duvar yüzünden değişen ilk Landau seviyesi ve ona ait dalga fonksiyonları da aynı renkte şekilde gösterilmiştir. Kalın siyah çizgi ise harmonik osilatörlerin merkezleri kaydıkça birinci Landau seviyesinin enerjisinin hangi oranda yükseldiğini göstermektedir. Burada uzuluk birimi olarak ℓ manyetik uzunluk, enerji birimi olarak ise $\hbar\omega_c$ kullanılmıştır. Bu değerler ilgili Schrödinger denkleminin Numerov metodu kullanılarak çözülmesi ile elde edilmiştir.

Kapıların değişik geometrilerde kullanıldığı yapılar olduğu gibi kesme ve kapıların birlikte kullanıldığı birçok yapılar da oluşturulabilir (Davies ve ark. 1995; Siddiki ve ark. 2008; Siddiki ve Marquardt 2007). Özellikle bu tip yapılar, Mach-Zehnder interferometeresi ve Aharanov-Bohm interferometresi gibi yapıların incelenmesinde gereklilik taşır (Ji ve ark. 2003; Neder ve ark. 2006; Ihnatsenka ve

Zozoulenko 2008[a]). Bu tip yapılarda bazen kesme etkisi elle benzeştirilerek gösterilebilir (Siddiki ve Marquardt 2007; Siddiki ve ark. 2008).

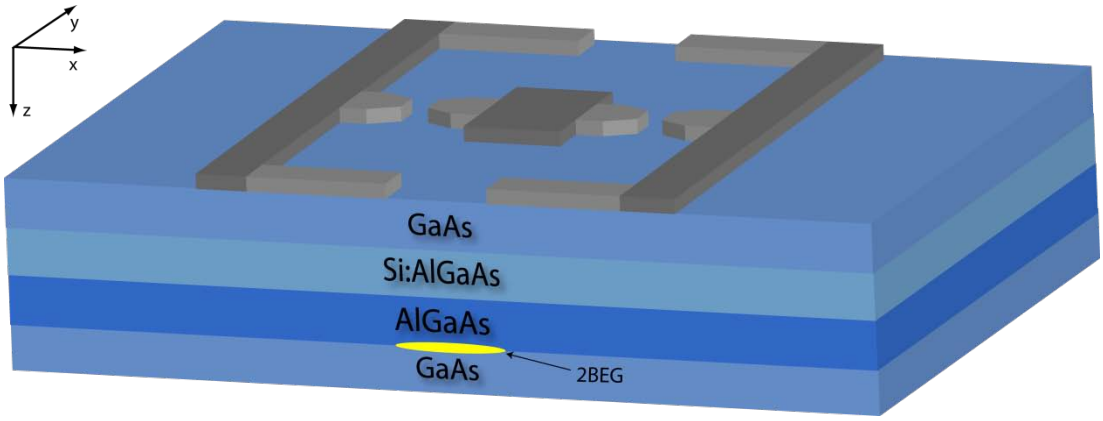
Şekil 4.7 de çalışmamızın bir bölümünde incelediğimiz elektronik Mach-Zehnder interferometresinin yapısı resmedilmektedir (Siddiki ve ark. 2008). Şekil 4.7 deki geometri gerçek elektronik Mach-Zehnder interferometre geometrilerinin topolojik eşdeğeridir. Burada kesme etkisi yarım sinüs fonksiyonu kullanılarak elle simüle edilmiştir. Bundan dolayı deneylerle doğrudan karşılaştırma yapmak mümkün olmamıştır. Fakat bu çalışma ile deneylerde karşılaşıldığı gibi girişimin net gözlenebilmesi için sistemin kuantum Hall platosunda olmasının yeterli olamayacağı ortaya konmuştur. Ayrıca bu çalışmada kapıların *2BEG* nın olduğu bölgede oluşturdukları potansiyeli hesaplamak için Denk. (4.2) ile verdiğimiz Davies'in elde ettiği ifadeyi kullandık (Davies ve ark. 1995). Elektronların kendi aralarındaki etkileşmeyi hesaba katmak için ise bir çok araştırmacının yaptığı gibi kapılar yokmuş gibi ayrıca bir Poisson denklemini Kesim 4.1 de anlattığımız Green fonksiyonları ve Fourier dönüşümlerini kullanarak çözdük (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Siddiki ve Gerharts 2003; Siddiki ve Gerharts 2004).



Şekil 4.7 Kesme yöntemi ve üzerine kapılar oturtularak yapılan elektronik Mach-Zehnder interferometresinin topolojik eşdeğer geometrisi.

Şekil 4.8 de ise kesme yerine kapılar kullanılarak oluşturulmuş bir elektronik Mach-Zehnder interferometresi resmedilmektedir. Bu yapıda 2008 de yaptığımız çalışmayı tekrarladık. Çünkü kesme etkisi olmadığı için herhangi bir şekilde elle bir simüslasyon yapma zorunluluğu yoktur. Ayrıca bu yapıda Kesim 4.2 de anlattığımız

üç boyutlu Poisson denklemini ardışık aşırı durulma yöntemini kullanarak çözdük. Burada sınır şartları içinde kapılarda kullanıldığı için kapıların etkisini hesaplamak için bir önceki çalışmada olduğu gibi Denk. (4.2) ile verilen ifadeye ihtiyaç yoktur. Bütün hesaplama boyunca üç boyutlu Poisson denklemi doğrudan çözdüğümüz için elektronlar arası etkileşmeye kapıların etkisi her adımda katıldığı için bu çalışmanın bir önceki çalışmaya göre daha gerçekçi fiziksel şartları sağladığını düşünüyoruz. Bu çalışmaya başka bir açıdan şöyle de bakılabilinir. Şekil 4.7 de kesme yöntemi kullanılarak yapılan elektronik Mach-Zehnder interferometresi ile ilgileniliyor olsak bile, kesme etkisini simüle etmek için elle girilen yarım bir sinüs fonksiyonu yerine, aynı etkiyi verebilecek Şekil 4.8 deki malzemenin *y* doğrultusu boyunca boydan boya kapılar kullanılarak simüle edildiğini varsayabiliriz.



Şekil 4.8 Elektronik Mach-Zehnder interferometersinin topolojik eşdeğeri. Burada elektronları Mach-Zehnder interferometresinin olduğu bölgede tutma işlemi Şekil 4.2 deki kuantum Hall çubuğunda olduğu gibi yapının üstünde sağda ve solda görülen koyu renkli uzun çubuk şeklindeki kapılar vasıtasıyla olmaktadır.

5. THOMAS-FERMİ YAKLAŞIMI

Thomas-Fermi yaklaşımı ilk olarak çok elektronlu atomlarda elektron yoğunluğunu elde edebilmek için Thomas ve Fermi tarafından ortaya atılan bir yöntemdir (Thomas 1927; Fermi 1928). Kullanım alanları çok elektronlu atomlarla başlamış, Katıhal Fiziğinde çok geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Thomas-Fermi yaklaşımı, özellikle elektron dalga fonksiyonunun çok gerekli olmadığı yüksek sayıda elektron içeren sistemlerde, doğrudan elektron yoğunluğunu veren hızlı işleyen bir yöntem olarak uzun yıllardan beri kullanılmaktadır. Örneğin hareketli elektronların dalga boyu, belirgin potansiyel değişiminin görüldüğü uzaklık yanında ihmal edilebilecek ölçüde küçük kaldığında çok iyi sonuçlar vermektedir. Bu nedenle Thomas-Fermi yaklaşımı *KUHO* da çokça kullanılır hale gelmiştir (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003).

Thomas Fermi yaklaşımında elektron yoğunluğu yani elektronların dağılımı

$$n_{el}(\vec{r}) = \int dE\ D(E)\ f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{5.1}$$

şeklinde verilir (Güven ve Gerhardts 2003, Siddiki ve Gerhardts 2003). Burada $D(E)$ durum yoğunluğunu, $V(\vec{r})$ üç boyutlu Poisson denkleminin çözümünden elde edilen kapıların ve verici atomların oluşturduğu potansiyeli ve aynı zamanda elektronların kendi aralarındaki etkileşmesinden oluşan potansiyeli de içeren potansiyel fonksiyonunu, μ kimyasal potansiyeli ve $\vec{r}$ iki boyutlu uzaysal değişkeni göstermektedir. $f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T)$ fonksiyonuna *Fermi Fonksiyonu* denir ve

$$f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}} \tag{5.2}$$

ifadesi ile verilir (Güven ve Gerhardts 2003, Siddiki ve Gerhardts 2003). Burada k_b *Boltzman* sabitidir.

Thomas-Fermi yaklaşımında elektronların dağılımını elde ederken en önemli parametrelerden birisi durum yoğunluğu diye adlandırdığımız $D(E)$ dir. Biz iki boyutlu elektron gazı ile ilgilendiğimiz için, kenarları L boyutunda olan sonsuz derin

bir kare kuyudaki etkileşmeyen elektronları düşünelim. Burada elektronların durumlarını ifade eden dalga fonksiyonu kuyunun kenarlarında sıfır olması gerektiği için dalga sayısı *k*, hem *x* hem de *y* yönünde

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L} \tag{5.3a}$$

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L} \tag{5.3b}$$

şeklinde kuantumlu olacaktır. Kuyunun içindeki elektronlar potansiyel etkisinde olmadıkları için serbest bir parçacıkta olduğu gibi toplam enerjileri sadece kinetik enerjilerinden ibaret olacaktır. Serbest hareket eden bir parçacığın momentumu *de Broglie* hipotezine göre bu parçacığa eşlik eden dalganın dalga boyuna $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ifadesiyle bağlıdır. Buna göre kuyu içersindeki elektronun enerjisi

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{5.4}$$

ile verilir. $\vec{k}$ dalga vektörünün büyüklüğü iki bileşenin karelerinin toplamının karekköküne eşittir. Yani

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \tag{5.5}$$

dir. Bulduğumuz k^2 ifadesini Denk. (5.4) de yerine yazarsak

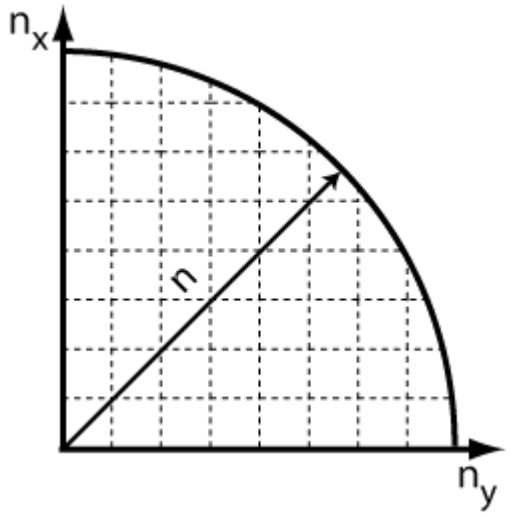
$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2\left(n_x^2 + n_y^2\right)}{L^2} \tag{5.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitlikten $n^2 = \left(n_x^2 + n_y^2\right)$ çekilerek

$$n^2 = \left(n_x^2 + n_y^2\right) = \frac{2mEL^2}{\hbar^2\pi^2} \tag{5.7}$$

elde edilir.

Burada her farklı (n_x, n_y) seti bir enerji seviyesini belirtir. Bu seviyeler girilebilir durumları gösterir. Şekil 5.1 de girilebilir durumlar gösterilmektedir. Burada elektronlar en düşük enerji seviyesinden başlayarak seviyeleri doldurmaya başlarlar bütün elektronlar yerleşene kadar doldurma devam eder. Şekil 5.1 de görüldüğü gibi n_x, n_y düzleminde girilebilir durumlar bir çeyrek daire şeklini almaktadır. Bu durumda toplam girilebilir durum sayısını $W(E)$ ile gösterirsek



Şekil 5.1 Girilebilir durumlar. Izgaradaki her kesişim noktası bir enerji seviyesine karşılık gelir.

$$W(E) = \frac{g_s \pi n^2}{4} = \frac{g_s \pi \left(n_x^2 + n_y^2\right)}{4} \tag{5.8}$$

olur. Burada g_s spin dejenereliğini göstermektedir. Yani her seviyeye bir yukarı bir aşağı spinli olmak üzere iki elektron yerleşebileceği için $g_s = 2$ dir. Bundan sonra Denk. (5.7) deki n^2 ifadesini Denk. (5.8) de kullanırsak girilebilir durum sayısı için

$$W(E) = \frac{g_s m E L^2}{2\hbar^2 \pi} \tag{5.9}$$

ifadesine ulaşırız. Burada birim alan başına girilebilir durum sayısı da

$$w(E) = \frac{W(E)}{L^2} = \frac{g_s m E}{2\hbar^2 \pi} \tag{5.10}$$

ile verilir. Birim alanda birim enerji başına düşen girilebilir durum sayısına ***Durum yoğunluğu*** denir ve

$$D(E) = D_0 = \frac{dw(E)}{dE} = \frac{g_s m}{2\hbar^2 \pi} \tag{5.11}$$

şeklinde verilir. Denklem (5.11) de görüldüğü gibi manyetik alan yokken iki boyuttaki durum yoğunluğu enerjiden bağımsız bir sabittir. Bu nedenle bundan sonra D_0 olarak adlandıracağız.

Şimdi $T = 0$ ve $B = 0$ da Thomas-Fermi yaklaşımına göre elektron dağılımının nasıl olacağına bakalım. Burada iki durum söz konusudur. Eğer $(E + V(\vec{r}) - \mu) > 0$ ise $T = 0$ için $e^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}$ ifadesi ∞ olur. Fermi fonksiyonu ise bu durumda sıfıra gider. Sonuç itibari ile Denk.(5.1) ile verilen $n(\vec{r})$ sıfır olur. Diğer taraftan eğer $(E + V(\vec{r}) - \mu) < 0$ ise $T = 0$ için $e^{([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}$ ifadesi sıfıra gider. Bu durumda Fermi fonksiyonu $f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) = 1$ olur ve Denklem (5.1) den durum yoğunluğu ifadesini de yazarsak

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \int_0^{\mu - V(\vec{r})} dE \tag{5.12}$$

halini alır. Bu integralin sonucu da

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \big(\mu - V(\vec{r})\big) \tag{5.13}$$

olur. Sonuç olarak $T = 0$ ve $B = 0$ da elektron dağılımı bir basamak fonksiyonuna

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \big(\mu - V(\vec{r})\big) \Theta\big(\mu - V(\vec{r})\big) \tag{5.14}$$

dönüşür. Burada $\Theta\big(\mu - V(\vec{r})\big)$ basamak fonksiyonudur.

Şimdi $T \neq 0$ ve $B = 0$ için elektron dağılımını Thomas-Fermi yöntemi ile türetelim. Denklem (5.10) dan görüldüğü gibi manyetik alan yokken $D(E) = D_0$

enerjiden bağımsız bir büyüklük olduğu için Denk. (5.1) ile verilen integralin dışına çıkar. Böylece ifade

$$n_{el}(\vec{r}) = D_0 \int dE f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{5.15}$$

halini alır. Burada $f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T)$ fermi fonksiyonunun açık ifadesi olan Denk. (5.2) yi yerine yazarsak, birkaç işlem sonucunda ifadeyi

$$n_{el}(\vec{r}) = -D_0 k_b T \int \frac{-\frac{1}{k_b T} \mathrm{e}^{-([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)}}{\mathrm{e}^{-([E+V(\vec{r})-\mu]/k_b T)} + 1} dE \tag{5.16}$$

şekline çevirириz. İntegraldeki kesrin paydası u ile gösterilirse pay du olur. Böylece integral

$$n_{el}(\vec{r}) = -D_0 k_b T \int \frac{du}{u} \tag{5.17}$$

halini alır. Buradaki integralin sonucu doğal logaritma $\ell n\, u$'dur. Gerekli bütün dönüşüm ve işlemlerden sonra

$$n_{el}(\vec{r}) = -D_0 k_b T\, ln\left[e^{([\mu - V(\vec{r})]/k_b T)} + 1\right] \tag{5.18}$$

sonucuna ulaşılır.

Manyetik alanın varlığında durum yoğunluğu değişmektedir. Artık enerji seviyeleri sürekli olmaktan çıkıp Landau seviyeleri olarak bildiğimiz kesikli enerji seviyeleri halini alır (Landau ve Lifshitz 1991). Bu durumda durum yoğunlukları da Şekil 5.2 de görüldüğü gibi kesikli hale gelir. Yani elektronlar sadece izinli olan Landau seviyelerine yerleşebilirler. İzinli olmayan seviyelere ise hiçbir elektron yerleşemez. Bölüm 3.2 de gördüğümüz gibi bir Landau seviyesi belli bir dejenereliğe sahiptir. Denk. (3.28) de doluluk çarpanını tanımladık ve doluluk çarpanının Landau seviyelerinin doluluğunu gösterdiğini belirttik. O ifadede görülen elektron elektron yoğunluğunu çekersek

$$n_{el} = \frac{\nu}{2\pi\ell^2} \tag{5.19}$$

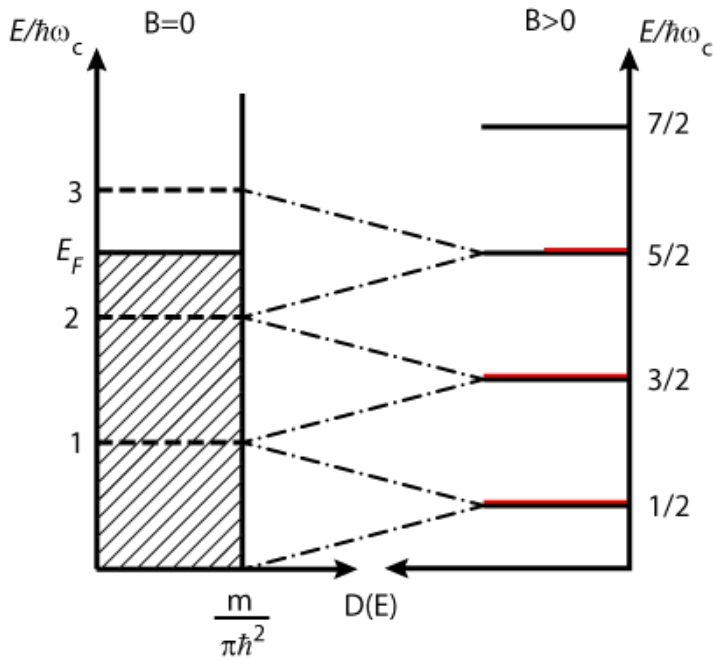
buluruz. Doluluk çarpanı 1 olduğunda bir Landau seviyesi tam dolu olur. Bu durumda bu sayı sözü edilen Landau seviyesinin dejenereliğini gösterir. Yalnız bu hesap yapılırken elektronların spinleri hesaba katılmamıştı. Bu durumda spin yukarı ve spin aşağı olmak üzere dejenerelik iki katına çıkar. Sonuç olarak bir Landau seviyesinin dejenereliği

$$\frac{g_s}{2\pi\ell^2} \tag{5.20}$$

şeklinde olur. Burada $g_s = 2$ spin dejenereliğidir. Bu halde durum yoğunluğu

$$D(E) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2}\sum_{n=0}^{\infty}\delta(E - E_n) \tag{5.21}$$

şeklinde olur.



Şekil 5.2 Manyetik alan yokken ve varken oluşan durum yoğunluğu.

Şimdi bu durum yoğunluğunu kullanarak $T \neq 0$ ve $B \neq 0$ için Thomas Fermi yaklaşımı ile elektron dağılımını elde edelim. Denk. (5.1) ve (5.21) den

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int dE \delta(E - E_n) f([E + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{5.22}$$

ifadesine ulaşırız. Burada Dirac delta fonksiyonunun integral özelliğini kullanılarak Denk. (5.22) in sonucunun

$$n_{el}(\vec{r}) = \frac{g_s}{2\pi\ell^2} \sum_{n=0}^{\infty} f([E_n + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{5.23}$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir.

6. HESAPLAMALAR

Manyetik alan altında elektron dağılımını elde edebilmek için Poisson denklemi ile Thomas-Fermi denklemlerinin öz uyumlu olarak çözdük. Fakat Thomas-Fermi yaklaşımı ile Poisson denkleminin öz uyumlu olarak çözülmesi genelde yakınsamayan bir problemdir. Bunun en büyük nedeni durum yoğunluğu ifadelerini türetirken de vurguladığımız gibi Thomas-Fermi yaklaşımının elektronlar arası etkileşmeyi hesaba katmayan bir yöntem olmasıdır. Elektronlar arası etkileşme sadece $V(\vec{r})$ potansiyeli ile hesaba katılmaktadır. Örneğin ilk başta arkafon (background) potansiyeli varken Thomas-Fermi ile belli bir kimyasal potansiyel, μ değeri için elektronları yerleştirmeye başladığınızda, Thomas-Fermi elektronlar arası etkileşmeyi doğrudan hesaplayamadığı için bir çok noktaya, alabileceğinden daha fazla elektron koymaktadır. Bu fazla elektron sayısı ile Poisson denklemi çözüldüğünde fazla elektron olan kısımlarda $V(\vec{r})$ potansiyeli gereğinden çok büyük olmaktadır. Bu potansiyel ile Thomas-Fermi'ye dönüldüğünde bir öncekinin aksine bu noktalara bu sefer Thomas-Femi yöntemi hiç elektron yerleştirememektedir. Bu yeni dağılım ile Poisson denklemine dönüldüğünde bu sefer aynı noktalarda potansiyel değeri çok düşük kalmaktadır. Sistem bu şekilde dalgalanarak genelde ıraksar ve sonuç vermez. Bu problemin yakınsatılması için birçok yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan birisi *Durulma Altı*, *DA (Under Relaxsation, UR)* dır. Bu yöntemde Thomas-Fermi yaklaşımı sonucu elde edilen yeni elektron dağılımını eskisinin yerine doğrudan yazmak yerine

$$n_{el}^{n+1}(\vec{r}) = \omega n_{el}^{yeni}(\vec{r}) + (1-\omega) n_{el}^{n}(\vec{r}) \tag{6.1}$$

şeklinde 0 ile 1 arasında değişen bir ω değeri kullanılarak yavaşlatılır. Böylece sistemin bir anda ıraksamasına engel olunur. Fakat bu yöntem çok kararlı değildir. Özellikle manyetik alan altında problemin yakınsaması çok daha ciddi bir problem halini alır. Her farklı sıcaklık ve manyetik alan değeri için yeni bir ω değeri atanması gerekebilir. Bu problemin yakınsatılabilmesi için kullanılan daha kararlı yöntem Newton-Raphson yöntemidir. Bu yöntem literatürdeki birçok çalışmada kullanılmıştır (Subramanian 1994; Trellakis ve ark. 1997; Oh ve Gerhardts 1997;

Fiori ve ark. 2002; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004; Kim ve Won 2005).

6.1 Newton-Raphson Yöntemi

Newton-Raphson (NR) yöntemi belli bir denklemin köklerini bulmak için çok yaygın kullanılan bir yöntemdir (Burden ve Faires 2001; Chapra ve Canale 2002).

$x = f(x)$ gibi skaler bir denklemin köklerini bulmak için kullanılan en basit tekrarlamalı yöntem sabit nokta yöntemi

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{6.2}$$

şeklindedir. Fakat çok yavaş yakınsar bu yakınsamayı hızlandırmak için genelde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1} \tag{6.3}$$

şeklindeki Newton-Raphson yöntemi kullanılır. Newton-Raphson yöntemi skaler denklemler yerine fonksiyonellere ait denklemlere de genişletilebilir. Elektron yoğunluğu aslında Denk. (5.23) den görüldüğü üzere potansiyelin

$$n_{el}(\vec{\mathrm{r}}) = n_{el}[V(\vec{r})] = \frac{g_s}{2\pi\ell^2}\sum_{n=0}^{\infty} f([E_n + V(\vec{r}) - \mu]/k_b T) \tag{6.4}$$

şeklinde bir fonksiyonelidir. Bu ifadede $\vec{r}$ iki boyutlu uzaysal değişkenimizdir. Burada doğru elektron dağılımını bulabilmek için doğru potansiyel ifadesini bilmek gerekir. Ne yazık ki potansiyel ifadesi de Poisson denklemi ile

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon} n_{el}(\vec{r}) \tag{6.5}$$

elektron dağılımına bağlıdır. Bu iç içe geçmiş denklemleri çözebilmek için şöyle bir varsayım yapalım. Elimizde gerçek potansiyele yakın olan başka bir potansiyel olsun. O zaman gerçek potansiyel

$$\tilde{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}) \tag{6.6}$$

şeklinde bir ifadeye sahip olacaktır. Burada $\tilde{V}(\vec{r})$ olması gereken gerçek potansiyeli, $V(\vec{r})$ ise elimizdeki yaklaşık potansiyeli temsil etmektedir. Denklem (6.4) ü göz önünde bulundurarak elektron dağılımı ifadesi $n_{el}[\tilde{V}(\vec{r})]$ yi $n_{el}[V(\vec{r})]$ etrafında Taylor serisine açarsak

$$n_{el}\left[\tilde{V}(\vec{r})\right] = n_{el}[V(\vec{r})] + \frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})}\delta V + O(\delta V^2) \tag{6.7}$$

olur. Denklem (6.7) daki Taylor açılımını Denk. (6.5) de kullanırsak

$$\frac{\mathrm{q}}{\epsilon}\nabla^2(V(\vec{r}) + \delta V) = -n_{el}[V(\vec{r})] - \frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})}\delta V \tag{6.8}$$

ifadesine ulaşırız. Denklem (6.4) den

$$\frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial V(\vec{r})} = -\frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial \mu} \tag{6.9}$$

eşitliği kolayca görülür. Burada $\partial n_{el}[V(\vec{r})]/\partial\mu$ ifadesine *termodinamik durum yoğunluğu* denir ve sabit sıcaklık ve manyetik alan için

$$\frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial \mu} = \frac{g_s}{2\pi\ell^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1-f_n)}{k_bT} \tag{6.10}$$

ile verilir. Burada $f_n = f([E_n + V(r) - \mu]/k_bT)$ Fermi fonksiyonudur. Denklem (6.8) gerekli işlemler yapılır ve Denklem (6.9) deki eşitlik kullanılırsa

$$\nabla^2\delta V - \frac{q}{\epsilon}\frac{\partial n_{el}[V(\vec{r})]}{\partial \mu}\delta V = -\nabla^2\left(V(\vec{r})\right) - \frac{q}{\epsilon}n_{el}[V(\vec{r})] \tag{6.11}$$

ifadesine ulaşırız. Artık her seferinde Denk. (6.5) ile verilen Poisson denklemini çözerek $V(\vec{r})$ potansiyelini bulmak yerine Denk. (6.11) de görülen δV'yi çözerek gerçek potansiyele

$$V^{n+1}(\vec{r}) = V^{n}(\vec{r}) + \delta V \tag{6.12}$$

ifadesi ile ulaşırız. Böylelikle yaklaşımı lineer hale getirmiş oluruz.

Sonuç itibari ile Denk. (6.4) ve (6.5) kullanarak ıraksayan çözümler yerine Denk.(6.4) , (6.11) ve (6.12)'i kullanarak çözümün yakınsaması garanti altına alınmış olur.

Şimdi daha önce Poisson denkleminin çözümünde yaptığımız gibi Denk. (6.11) in sayısal çözümüne bakalım. Fonksiyonun ikinci türevini elde etmek için Taylor açılımını kullanarak ve gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
&\delta V(x,y,z) \\
&= \frac{1}{2h_y^2h_z^2 + 2h_x^2h_z^2 + 2h_x^2h_y^2 + h_x^2h_y^2h_z^2\frac{q}{\epsilon}\frac{\partial n_{el}(x,y,z)}{\partial \mu}}\Big\{h_y^2h_z^2[\delta V(x+h_x,y,z) \\
&+ \delta V(x-h_x,y,z) + V(x+h_x,y,z) + V(x-h_x,y,z)] \\
&+ h_x^2h_z^2\big[\delta V\big(x,y+h_y,z\big) + \delta V\big(x,y-h_y,z\big) + V\big(x,y+h_y,z\big) \\
&+ V\big(x,y-h_y,z\big)\big] \\
&+ h_x^2h_y^2[\delta V(x,y,z+h_z) + \delta V(x,y,z-h_z) + V(x,y,z+h_z) \\
&+ V(x,y,z-h_z)] - 2V(x,y,z)\big[h_y^2h_z^2 + h_x^2h_z^2 + h_x^2h_y^2\big] \\
&+ h_x^2h_y^2h_z^2\frac{q}{\epsilon}n_{el}(x,y,z)\Big\}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

ifadesine ulaşılır. Bu tez çalışmamızda bilgisayar programında bu nihai denklem hesaplanmaktadır.

Newton-Raphson yönteminin tek dezavantajı yöntemin yakınsayabilmesi için sonuca çok yakın bir değerden başlanması gerekliliğidir. Bundan dolayı ilk önce $T = 0$ ve $B = 0$ da sistem *Durum Altı* ile çözülüyor. Sonra ilk dağılımından çok fazla uzaklaşmayacağı yeterince yüksek sıcaklıkta elektron dağılımı Newton-Raphson yöntemi ile hesaplanıyor. Bu yüksek sıcaklıkta manyetik alan açıldığında (uygulandığında) yüksek sıcaklıktan dolayı Landau seviyeleri arasındaki fark önemsiz olacağı için sistem ilk dağılımından çok fazla değişmeyeceği için Newton-Raphson yöntemiyle yeni dağılım elde ediliyor. Sonra hedeflenen sıcaklığa

ulaşılıncaya dek sıcaklık yavaş yavaş düşürülüyor. Bu adımlar her seferinde başlangıç elektron dağılımından çok fazla uzaklaşmayacak şekilde seçiliyor. Böylece her adımda yakınsama garanti altına alınarak istenen sıcaklıktaki elektron dağılımına ulaşılıyor.

6.2 Kuantum Hall Olayı Temelli Mach-Zehnder İnterferometrelerinde Kenar Durumlarının Öz-Uyumlu Hesabı

KUHO temelli elektronik *Mach-Zehnder İnterferometre(MZI)* (Ji ve ark. 2003, Neder ve ark. 2006) düzeneklerinde gözlenen şaşırtıcı girişim desenleri, pek çok teorikçiyi bu örneklerdeki "kenar durumlarının" yapısını incelemeye yöneltmiştir. Elektrostatik potansiyel ve elektronik yoğunluk dağılımlarının gerçek bir modellemesi için var olan kenar durumlarının yeniden düzenlemesinin vazgeçilmez olduğu anlaşıldı. Bu yüzden, elektron-elektron etkileşmesi bu deneylerdeki faz bozunumunun (dephasing) olası bir kaynağı olarak önerildi (Marquardt 2005, Neder ve Marquardt 2007). *KUHO*'nın kenar durum açıklaması olarak bilinen, *Landauer-Büttiker (LB)* formalizminin, deneysel bulgularla örtüşmediği beyan edildi. Diğer taraftan sıkıştırılamayan şeritlerin oluşumunu dikkate alarak *KUHO* fiziğinin ayrıntılı bir analizinin deneysel veriyle doğrudan bir karşılaştırmasına ihtiyaç vardır. Son zamanlarda Gaussiyen olmayan gürültü cinsinden gözlenen görünürlük osilasyonlarını açıklayabilen iki kanallı bir kenar durum modeli önerilmiştir (Neder ve Marquardt 2007). Temel parametreler, elektron hızı ve "girişim" ile "detektör" kanalları arasındaki etkileşim şiddetidir. Bu çalışmada tamsayı *KUHO*'daki *e-MZI* düzeneklerinin elektrostatiğini incelemek için daha önceki bir çalışmayı (Siddiki ve Marquardt 2007), deneysel yapıya (Samuelsson ve ark. 2004) topolojik olarak eşdeğer bir geometri varsayarak genişlettik. Sıkıştırılamayan kenar durumlarının uzaysal olarak yeni düzenlemesinin kesin hesaplanmasını sağlamayı amaçladık. Yaygın olarak kullanılan öz-uyumlu Thomas-Fermi-Poisson perdeleme teorisini (Siddiki ve Marquardt 2007) elektron yoğunluğu ve elektrostatik potansiyeli elde etmek için kullandık. Girişimin gözlenmesi için sıkıştırılamayan şeritlerin dağılımına başka bir deyişle manyetik alan şiddetine bağlı olan iki olası senaryo önerdik.

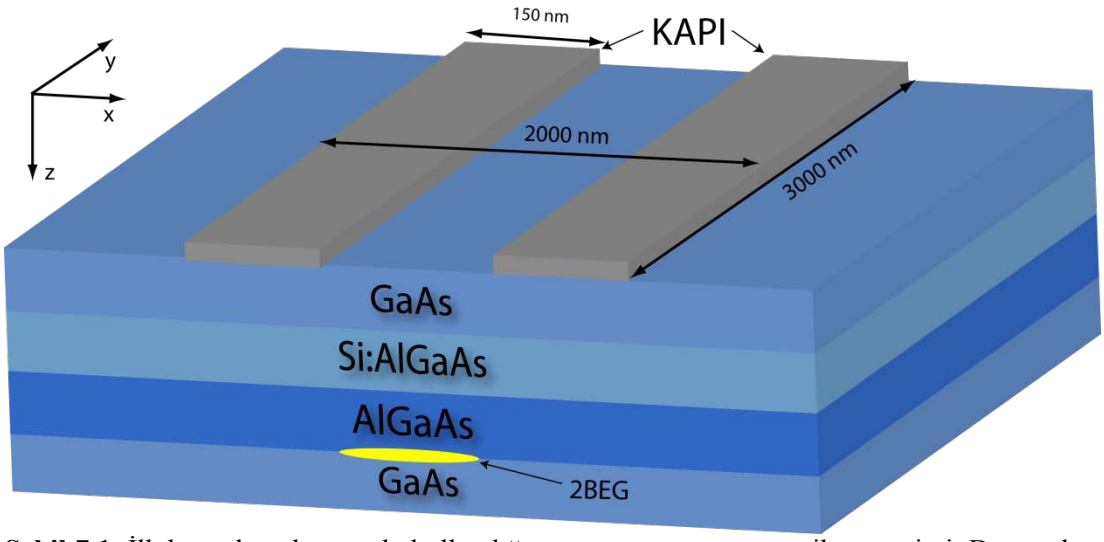
Sınırlayıcı potansiyeli elde etmek için, *iki Boyutlu Elektron Sisteminde (2BES)* kapıların toplam potansiyele katkısı Denk. (4.2) ile verilen Davies ve Larkin'in (1994) önerdiği süreci takip ettik. Bu modelde; çıplak potansiyel *2BES* seviyesinde, yani örneğin yüzeyinden içine doğru ölçülen $z = z_0$ düzleminde, yüzey kapı modelinin ve potansiyel dağılımının bilinmesi koşuluyla elde edilebilir. Dış potansiyele ikinci katkı verici atomlarından ileri gelir ve ayrıca kesme etkisi de potansiyelde bir bükülmeye neden olur, bütün bunları y yönündeki yarım periyotlu bir kosinüs fonksiyonu ile simüle ettik. 2BES düzlemindeki verilen dış potansiyel $V_{dış}(\vec{r}, z_0) = V_{kapı}(\vec{r}, z_0) + V_{va}(\vec{r}, z_0)$ şeklindedir, burada $(\vec{r}, z_0) = (x, y, z_0)$ dır ve V_{va} verici atom potansiyelidir. Gerçek uzayda perdelenmiş potansiyeli $T = 0$ ve $B = 0$'da, iki boyutlu ileri ve geri Fourier dönüşümleri yaparak ve perdelenmiş potansiyeli $V_{per}(q) = V_{dış}(q)/\varepsilon(\mathrm{q})$ kullanarak hesaplamak kolaydır, $\varepsilon(q)$, $\varepsilon(q) = 1 + 2/a_B^*|q|$ olarak tanımlanan momentuma bağlı Thomas-Fermi dielektrik fonksiyonudur ve a_B^* etkin Bohr yarıçapıdır (~10 nm). Bu perdelenmiş potansiyeli, Denk. (5.1) ve Denk. (6.1) den oluşan iki öz-uyumlu denklem kümesi için başlangıç girdisi olarak kullanırız. Denklem(5.1) de toplam $V(\vec{r})$ potansiyeli dış potansiyel ve elektronların kendi aralarında Coulomb etkileşmesi yüzünden oluşan potansiyelin toplamına eşittir $\left(V(\vec{r}) = V_{dış}(\vec{r}) + V_{ee}(\vec{r})\right)$. Elektronlar arasındaki etkileşme potansiyeli ise

$$V_{ee}(\vec{r}) = \frac{2e^2}{\bar{\kappa}} \int d\vec{r}' K(\vec{r}, \vec{r}') n_{el}(\vec{r}') \tag{3}$$

şeklindedir. İlgilendiğimiz durumda olduğu gibi Periyodik sınır koşulları durumunda, $K(r, \vec{r}')$ kerneli analitik olarak kapalı bir formda ifade edilebilir (Morse ve Feshbach 1953), aksi halde sayısal olarak elde edilmelidir. Toplam potansiyel enerji açık bir şekilde Hartree ve dış potansiyel enerjilerinin toplamından başka bir şey değildir.

7. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Bu çalışmada ilk hesaplamalar, Şekil 7.1 de şematik olarak gösterilen boyu $3000\,nm$ ve dıştan dışa enine ölçümü $2000\,nm$ olan iki kapı ile tanımlanmış bir ***kuantum Hall çubuğu*** için yapılmıştır. Kapıların her birinin eni 150 nm dir, boyu ise örneğin boyu ile aynıdır, $3000\,nm$ dir. Kapılara uygulanan gerilim ise $-1.3\,V$ alınmıştır. Verici atomların konumu yapının yüzeyinden aşağıya doğru $50\,nm$ derinliğinde, *2BEG*'ın konumu ise $90\,nm$ derinliğindedir. Verici atomların yoğunluğu $n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ alınmıştır.



Şekil 7.1 İlk hesaplamalarımızda kullandığımız nano yapının şematik gösterimi. Dıştan dışa enine ölçümü *2000 nm* olan ve boyu *3000 nm* olan, iki kapı ile tanımlanmış **kuantum Hall çubuğu**. Kapıların eni 150 *nm* dir. Kapılara *-1.3 Volt* gerilim uygulanmıştır.

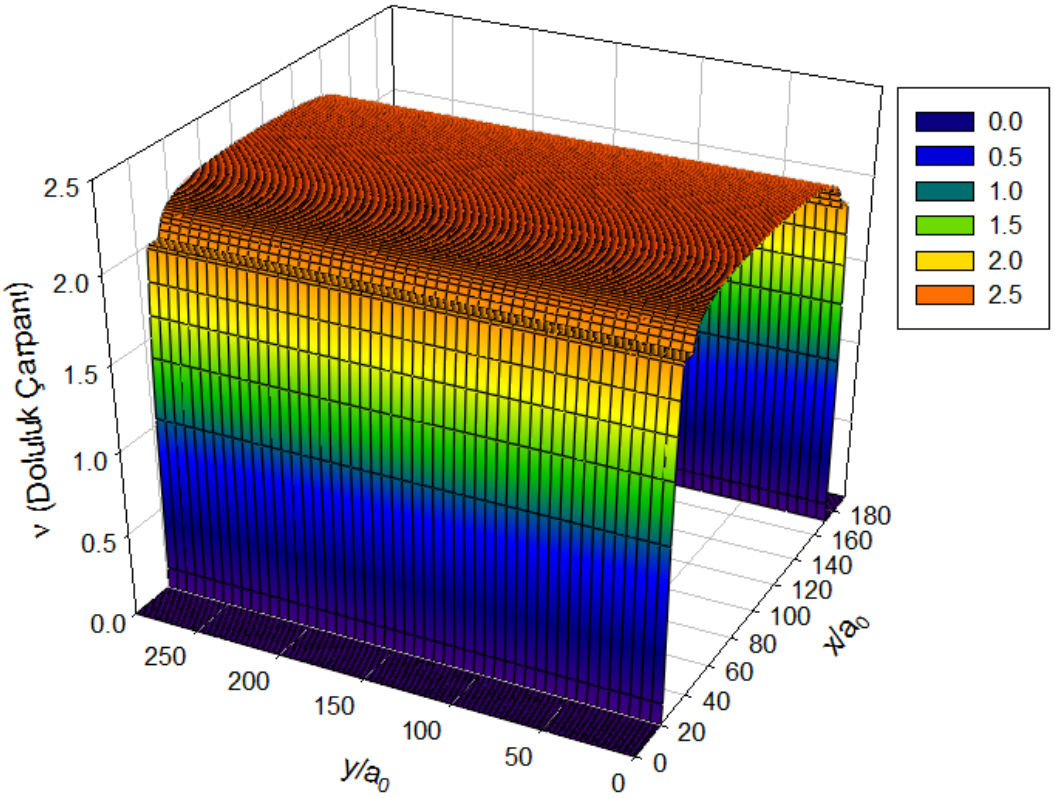
Bu çalışmada bütün verici atomların iyonlaştığı varsayımı yapılmıştır. Aslında diğer bir bakış açısıyla sistem Gerhardts ve arkadaşlarının yaptıkları birçok çalışmanın aksine kapılar hariç nötür halde olduğu farz edilmiştir (Oh ve Gerhardts 1997; Siddiki ve Gerhardts 2004). Yani iyonlaşan donor sayısı ile *2BEG* deki elektron sayısı eşit alınmıştır. Diğer bir deyişle ortalama elektron yoğunluğu ortalama donor yoğunluğuna eşit alınmıştır.

Tanımlanan yapı, hesaplamalar için ağ yapısına bölünmüştür. *x* yönünde 201 düğüm noktası alınmıştır ve iki düğüm noktası arası mesafe $10\,nm$ dir. İki düğüm

noktası arası mesafenin $10\,nm$ seçilmesinin nedeni, manyetik uzunluk dediğimiz ℓ uzunluğunun buna yakın bir büyüklük olması ve aynı zamanda birim uzunluk boyutu olarak kullandığımız a_0'ın da GaAs malzemesindeki değerinin ($a_0 \cong 10.41\,nm$) yani 10 *nm* ile aynı mertebede olmasıdır. *y* yönünde ise 51 düğüm noktası alınmıştır ve her düğüm noktası arası mesafe 60 nm dir. *y* yönünde bu kadar kaba bir ağ yapısı kullanılmasının nedeni kuantum Hall çubuğunda bu yönde fazla bir değişimin olmamasıdır. *z* yönünde aynı yapının derinliği $1000\,nm$ alınmıştır, fakat gerçekte alt tabaka olan GaAs oldukça derindir. Bizim hesaplamalarımızda 1000 nm'lik derinlik yeterli bir doğruluk sağladığı için bu kadar alınmıştır. *z* yönündeki ağdaki düğüm noktalarının sayısı ise 101 alınmıştır. İki düğüm noktası arası mesafe böylece $10\,nm$ olmuştur. Burada iki düğüm noktası arası mesafenin 10 *nm* seçilmesinin nedeni ise *2BEG*'nın *z* yönünde yaklaşık 10 *nm* lik bir alana sıkıştığı kabul edilmiş olmasıdır. Böylece *2BEG* dağılımı *z* yönünde sadece bir ağ noktasına yerleştirilmektedir. Aynı şekilde bu çalışmada donor dağılımı da *z* yönünde sadece bir ağ noktasına yerleştirilmiştir. Yani donor katkılamasının delta bir katkılama olduğu kabul edilmiştir.

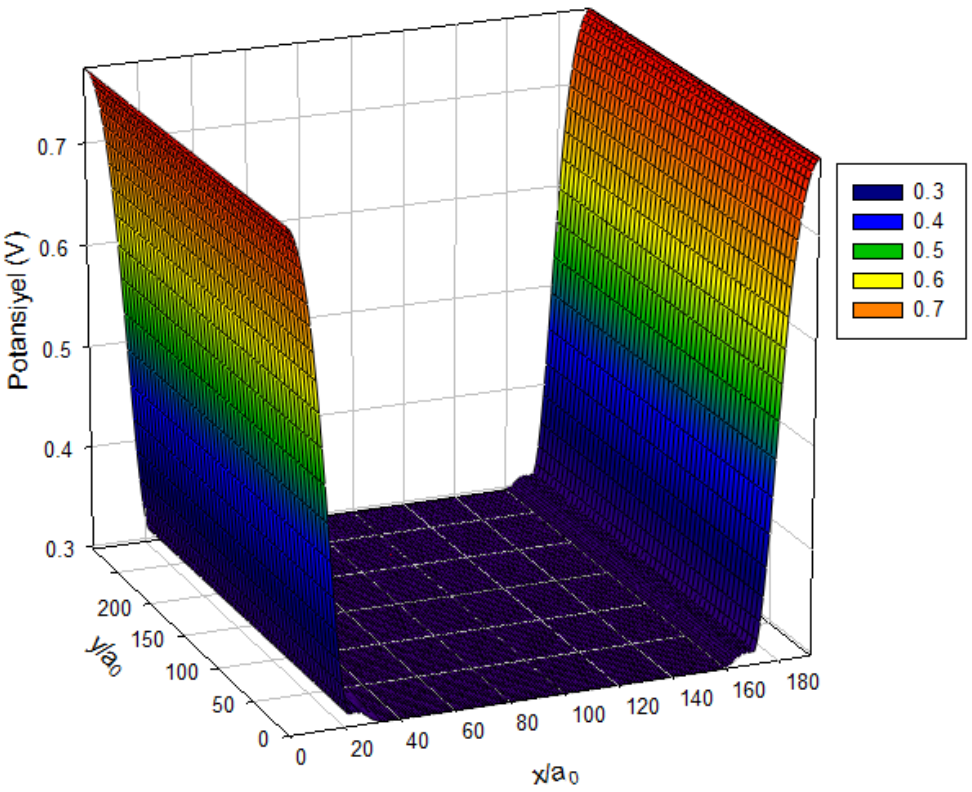
Hesaplamalar üç boyutlu Poisson denklemi ve Thomas-Fermi denkleminin öz-uyumlu olarak çözülmesiyle gerçekleştirilmiştir. Bunun sonucu olarak elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımı elde edilmiş ve sonuçlar Şekil 7.2 ve Şekil 7.3 de resmedilmiştir. Şekil 7.2 de görüldüğü gibi elektron dağılımında sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritler rahatlıkla görülmektedir. Ayrıca Şekil 7.3 de ise bu elektron dağılımı sonucu oluşan perdelenmiş potansiyel gösterilmektedir. Şekil 7.2 ve Şekil 7.3 de gösterilen sonuçlar $7.4\,T$ manyetik alanda ve $1.4\,K$ sıcaklıkta hesaplanmıştır.

Şekil 7.4 deki çizim elde edilen sonuçların daha iyi görülebilmesini sağlamak amacıyla (*y* doğrultusunda değişim olmadığından) Şekil 7.2 ve 7.3 de gösterilen sonuçların üç boyut yerine iki boyutta gösterilmesinden ibarettir. Ayrıca karşılaştırmanın daha rahat yapılabilmesi için Şekil 7.4 de elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımı aynı grafik üzerine alt alta çizilmiştir.



Şekil 7.2 Şekil 7.1 de gösterilen yapı için yapılan hesaplama sonucu elde edilen elektron dağılımı doluluk çarpanı cinsinden gösterilmektedir. Burada sıcaklık $1.4\,K$ manyetik alan ise $7.4\,T$ alınmıştır. Uzunluk birimi olarak $a_0 \cong 10.41\,nm$ kullanılmıştır. Verici atom yoğunluğu ise $n_d = 3.0 \times 10^{11}\,cm^{-2}$ dir. Doluluk çarpanı $\nu = 2.0$ değeri için iki sıkıştırılamaz şerit grafikte y ekseni boyunca belirgin olarak görülebilmektedir.

Şekil 7.4 perdelenmiş potansiyel dağılımında sıkıştırılabilir şeritlerin altında, potansiyelin elektronlar tarafından bir metalde olduğu gibi çok iyi perdelendiği, bu nedenle potansiyelin bu aralıkta sabit kaldığı, sıkıştırılamaz şeritlerin altında ise yalıtkanlarda olduğu gibi elektronların potansiyeli perdeleyemediği ve potansiyelin bu bölgede değiştiği görülmektedir. Şekil 7.4 deki ayrıntılı ufak grafiklerde bu durum daha açık bir şekilde görülmektedir. Şekil 7.4 de üstteki ayrıntılı grafik elektron dağılımını, alttaki ayrıntılı grafik ise aynı bölgedeki potansiyel değişimini göstermektedir. Ayrıntılı grafiklerde açıkça görüldüğü gibi sıkıştırılamaz şerit boyunca potansiyel, elektronlar tarafından perdelenememekte ve potansiyelde bir düşme gözlenmektedir.



Şekil 7.3 Şekil 7.1 de gösterilen yapı içersinde $1.4\,K$ sıcaklık ve $7.4\,T$ manyetik alan değerlerinde oluşan elektron dağılımının, kapıların ve verici atomların oluşturduğu perdelenmiş potansiyel.

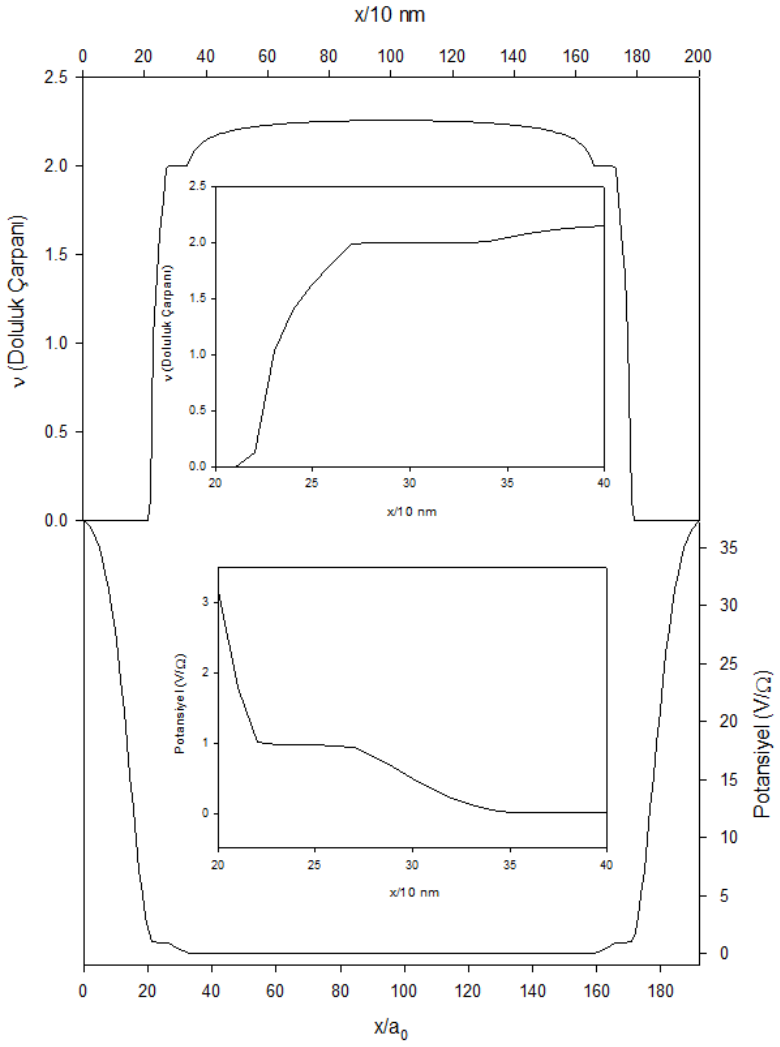
Ayrıntılı grafikler 200 *nm*'den başlamaktadır. Elektron dağılımı ise yaklaşık olarak $210\,nm$ civarından başlamaktadır. Kapı genişliklerinin $150\,nm$ olduğunu düşünürsek elektron dağılımı kapıların son bulduğu noktadan yaklaşık 60 *nm* sonra başlamaktadır. Gerhardts ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmalarda elektron dağılımının başladığı nokta *b* diye nitelendirilmiştir. Bu noktanın değerini kendileri hesaplarda elle girmişlerdir. Elle girdikleri bu değere göre de $T = 0\,K$ ve $B = 0\,T$ değeri için *2BEG*'da ne kadar elektron olduğunu bulmaktadırlar. Bu *b* değerini ve ortalama elektron yoğunluğunu koruyarak hesaplamalarına devam etmektedirler (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhartds 2004). Biz ise yapının kapılar hariç *nötr olduğu yaklaşımını* kullanıyoruz. Yani iyonlaşan bütün verici atomların hepsinin *2BEG*'na katkıda bulunduğunu kabul ediyoruz. Böylece hesaplamalara belli bir ortalama elektron yoğunluğu ile başlayarak bütün hesap boyunca da bu ortalama elektron yoğunluğunu koruyoruz. Gerhardts ve arkadaşlarının *b* diye tanımladıkları

ve fiziksel herhangi bir gerekçeye pek dayanmayan bir şekilde elle bir değer atadıkları elektron dağılımının başladığı nokta, bizim hesaplarımızda tamamen *öz-uyumlu* olarak *kendiliğinden* bulunmaktadır. Ayrıca bu özelliğinden dolayı hesabın herhangi bir adımında farklı manyetik alan ve sıcaklık değerlerine geçildiğinde b değeri kendiliğinden değişebilmektedir. Bu çalışmada iyonlaşan verici atom yoğunluğu $n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ alınmıştır. Kapılar hariç nötr yapı yaklaşımına göre ortalama elektron yoğunluğu her zaman ortalama iyonlaşmış verici atom yoğunluğuna eşittir. Buna göre bu hesaplamalarda kullandığımız ortalama elektron yoğunluğu $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ dir.

Şekil 7.4 deki ayrıntılı alt grafikte açıkça görüldüğü gibi iki sıkıştırılabilir şerit arasında kalan sıkıştırılamaz şerit bölgesinde potansiyelin değişimi iki Landau seviyesi arasındaki potansiyel farkına eşit olmaktadır. Bunun nedeni ise çok açıktır, çünkü sıkıştırılabilir şeritte iken elektronların enerjisi bir Landau seviyesi ile çakışmaktadır. Bu Landau seviyesi dolduğu zaman elektronlar fermionlar oldukları için artık elektronlar pauli dışarlama ilkesi gereği bu Landau seviyesine daha fazla yerleşemezler ve çok düşük sıcaklıklarda ve yüksek manyetik alan değerlerinde elektronların enerjisi bir üst Landau seviyesine yerleşmeye de yetmediği için bu bölgede elektron dağılımı sabit hale gelir. Bu durumda elektronlar, daha önceki bölümlerde açıkladığımız gibi potansiyeli daha fazla perdeleyemezler ve potansiyel değişmeye başlar. Potansiyeldeki değişme miktarı iki Landau seviyesi arasındaki farka eşit olduğunda artık elektronların enerjisi bir üst Landau seviyesine yerleşmeye yeterli gelir ve tekrar yeni bir sıkıştırılabilir bölgeye girilmiş olunur. Yani sıkıştırılamaz şerit boyunca potansiyeldeki değişme iki Landau seviyesi arasındaki farka eşittir.

Şekil 7.4 de üstteki ayrıntılı grafikte elektron dağılımının başladığı yaklaşık 210 *nm* civarındaki elektron dağılımında görülen üçgene benzer başlangıç kısmı sadece 10 *nm* lik düğüm noktaları aralığının, burada biraz kaba kalmasından kaynaklanmaktadır. Aslında elektron dağılımının başladığı nokta 210 *nm* ile 220 *nm* arasına düşmektedir. Fakat bu iki nokta arasında bir düğüm noktamız olmadığı için elektron dağılımı en yakın düğüm noktasından başladığından böyle üçgenimsi bir

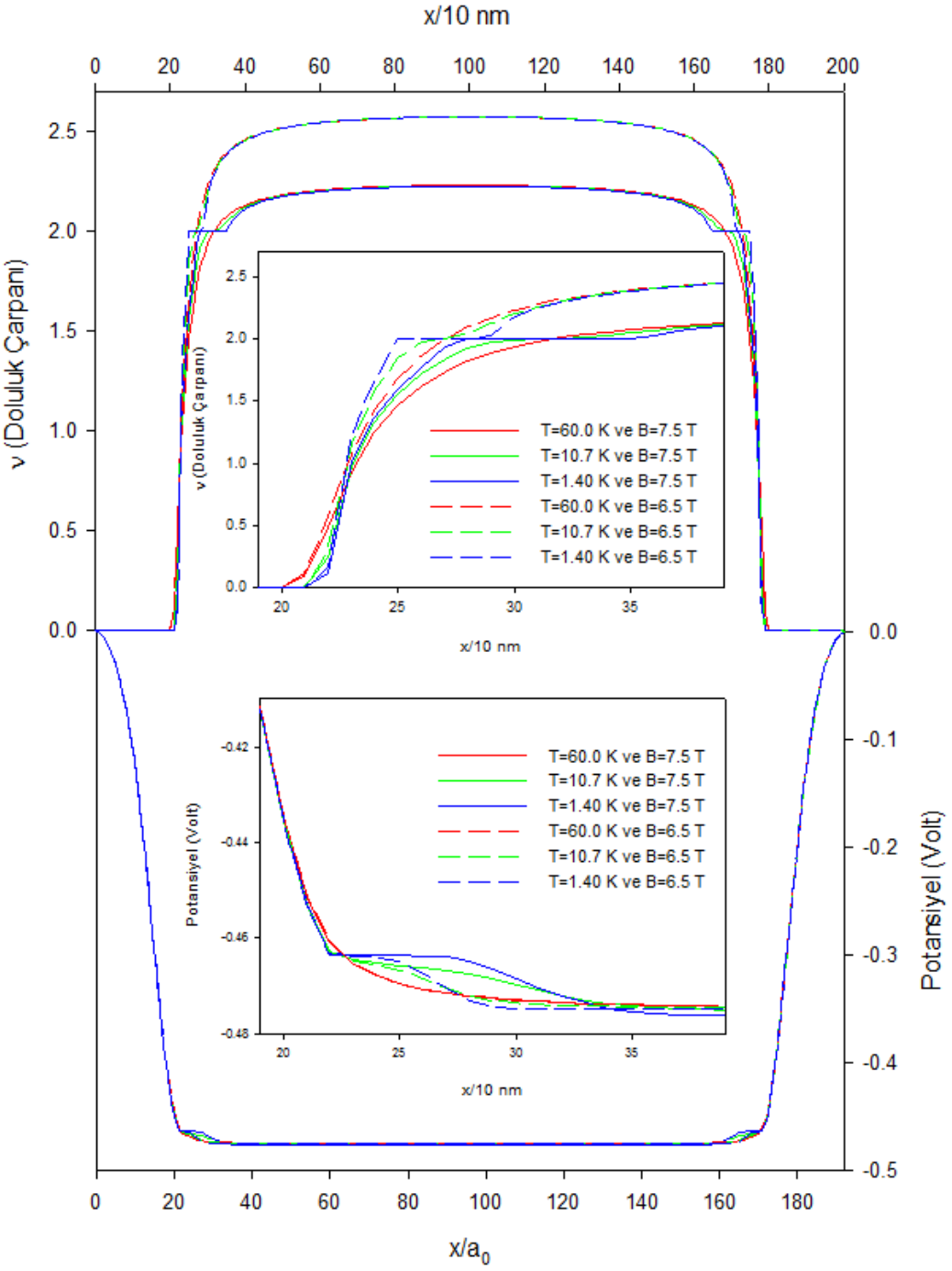
yapı sergilemektedir. Bu sergileme ne hesaplamadaki hatadan ne de elektron dağılımının o noktada öyle davranmasından kaynaklanır. 10 *nm* aslında sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritleri gözlemek için oldukça yeterli bir hassasiyet sağlar. Buradaki problem sadece elektron dağılımının başlangıç noktasının biraz daha hassas ağ yapısı istemesinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 7.4 Şekil 7.2 ve 7.3 deki elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımlarının iki boyutta gösterimi. Burada x doğrultusunda elektron dağılımı ve ona karşılık gelen potansiyel açıkça görülmektedir. x doğrultusu için iki farklı uzunluk birimi kullanılmıştır. Birisi GaAs için $a_0 \cong 10.41\, nm$ değeri, diğeri ise x doğrultusundaki düğüm noktaları arasındaki uzunluk olan $10\, nm$ lik uzunluk birimidir. Büyük grafiğin alt kısmında a_0 uzunluk birimi, üst kısmında ve ayrıntılı küçük grafiklerde ise $10\, nm$ lik uzunluk birimi kullanılmıştır. Burada $\Omega = \hbar\omega_c/e$ dir.

Önceki bölümlerde bahsettiğimiz gibi hesaplamalar 3 boyutlu Poisson denklemi ve Thomas-Fermi denklemlerinin öz-uyumlu olarak çözülüp sonuca gidilmesinden ibarettir. Fakat öz-uyumlu sürecin yakınsaması ciddi bir problemdir. Bu öz-uyumlu hesabın yakınsatılabilmesi için değişik yöntemler kullanılmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanı *Newton-Raphson (NR)* yöntemidir. Diğeri ise *durulma altı (DA)* yöntemidir. *NR* yönteminin tek dezavantajı yakınsamayı garanti altına alabilmek için sonuca yakın bir noktadan başlama gereksinimidir. Durulma altı yönteminin problemi ise yine hesaplamalar adlı bölümde bahsettiğimiz üzere etkin ve doğru *w* değerinin her sıcaklık ve manyetik alan için değişiyor olmasıdır. Bundan dolayı hesaplamalara ilk önce $T = 0\,K$ ve $B = 0\,T$ değerinde *DA* yöntemi kullanılarak elektron dağılımının ve perdelenmiş potansiyelin bulunması ile başladık. Daha sonra, önce sıcaklığı yeterince yüksek bir değere çıkartarak *NR* yöntemi ile yeni elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel elde ettik. Bundan sonra manyetik alan uygulanarak hedef sıcaklığa varıncaya kadar sıcaklık belli adımlarla düşürüldü ve her sıcaklık adımında yine *NR* yöntemi kullanarak yeni elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımları elde edildi.

Bu çalışmada ilk sıcaklık değeri $T = 60\,K$ alınmıştır. Bu sıcaklığın yeterince yüksek olup olmadığı $k_bT/\hbar\omega_c$ oranından anlaşılabilir. $T = 60\,K$ ve $B = 7.5\,T$ değerlerinde bu oran yaklaşık $k_bT/\hbar\omega_c \cong 0.399$ dur. Bu oranda elektronların kinetik enerjisi üst Landau seviyelerine rahatlıkla yerleşebilmelerine olanak sağlamaktadır. Böylelikle Şekil 7.5 de görüldüğü gibi elektronlar manyetik alanın etkisini çok fazla görmemektedir. *NR* yönteminin yakınsamasını garanti altında tutmak için bundan sonraki adımlarda hedef sıcaklığa varıncaya kadar sıcaklık değişen belli adımlarla düşürülmektedir. Bu çalışmada her sıcaklık önceki sıcaklığın *0.75* i olarak alınmıştır. Hesaplamalar sırasında her sıcaklık değerinde elde edilen elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımları kaydedilmiştir. Hedef sıcaklık yine $k_bT/\hbar\omega_c$ oranından belirlenmektedir. Bizim hedef sıcaklığımız $T = 1.4\,K$ dir. Bu sıcaklıkta ve $B = 7.5\,T$ değerlerindeki manyetik alan için bu oran yaklaşık $k_bT/\hbar\omega_c \cong 0.009$ dur. Bu oranda elektronların ısı enerjisi ile bir üst Landau seviyesine uyarılmaları mümkün değildir ve Şekil 7.5 de görüldüğü gibi manyetik alanın etkisi tam olarak belirginleşmektedir.



Şekil 7.5 Değişik manyetik alan ve sıcaklık değerleri için Şekil 7.1 de gösterilen kuantum Hall çubuğunda hesaplanan elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel değerleri. Üst grafik elektron dağılımını alt grafik ise perdelenmiş potansiyeli vermektedir. Kırmızı renk 60 K sıcaklığı, yeşil renk 10.7 K sıcaklığı ve mavi renk 1.4 K sıcaklığı göstermektedir. Sürekli çizgi 7.5 T ve kesikli çizgi ise 6.5 T manyetik alan değerlerini göstermektedir.

Şekil 7.5 de $B = 6.5\,T$ ve $B = 7.5\,T$ manyetik alan değerleri ve değişik sıcaklıklar için elektron dağılımı ve perdelenmiş potansiyel dağılımları verilmektedir. Şekil 7.4 de olduğu gibi *x* doğrultusu için iki farklı ölçeklendirme kullanılmıştır. Birisi GaAs için hesaplanmış olan $a_0 \cong 10.41\,nm$ ölçeklendirme değeri, diğeri ise düğüm noktaları arasındaki uzaklık olan $10\,nm$ ölçeklendirme değeridir. Burada verilen sonuçlar yine Şekil 7.1 de gösterilen kuantum Hall çubuğu için hesaplanan sonuçlardır. Şekil 7.5 de üsteki grafik doluluk çarpanı ν ye göre *x* doğrultusunda elektron dağılımını vermektedir. Yüksek sıcaklıklarda elektronlar üstte duran boş Landau seviyelerine rahatlıkla çıkabildikleri için elektron dağılımında herhangi bir sıkıştırılamaz seviye gözlenememektedir. Yani elektronlar yüksek sıcaklıklarda manyetik alanın etkisini hissedemezler. Şekil 7.5 de görüldüğü gibi sıcaklık düştükçe elektronlar Landau seviyeleri arasındaki enerji farkını daha çok hissettikleri için yavaş yavaş sıkıştırılamaz şeritler gözlenmeye başlar. Belli bir sıcaklıkta ise artık elektronların enerjisi üstte duran boş Landau seviyelerine yerleşmeye yeterli gelmeyeceği için manyetik alanın etkisi elektron dağılımında net olarak gözüken sıkıştırılamaz şeritler ile ortaya çıkar.

Büyük grafiğin içindeki üstteki küçük ayrıntılı grafikten anlaşıldığı gibi *b değeri* olarak tanımlanan elektronların dağılımının başladığı nokta *sabit değildir*. Elde ettiğimiz bu grafikte bu noktanın manyetik alan ile çok ciddi değişmediği fakat beklendiği gibi sıcaklıkla belli bir oranda değiştiği rahatlıkla gözlenmektedir. Bu sonuçlar Gerhardts ve arkadaşlarının kabul ettiği *b* değerinin çok fazla değişmez savlarının gerçeği pek yansıtmadığını göstermektedir (Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhartds 2004). Şekil 7.5'de alttaki grafik potansiyel dağılımını volt cinsinden vermektedir. Perdelenmiş potansiyelin sıkıştırılamaz şeritlerin oluşumu ile nasıl değiştiği grafik içindeki alttaki küçük ayrıntılı grafikte açıkça görülmektedir. Burada en önemli noktalardan birisi de sabit elektron sayısı, aynı kapı yapısı ve sabit kapı gerilimi altında manyetik alansız elekton dağılımı aynı kalacaktır. Fakat farklı manyetik alan değerlerinde Landau seviyelerinin dejenereliği

$$\frac{g_s eB}{2\pi\hbar} \tag{7.1}$$

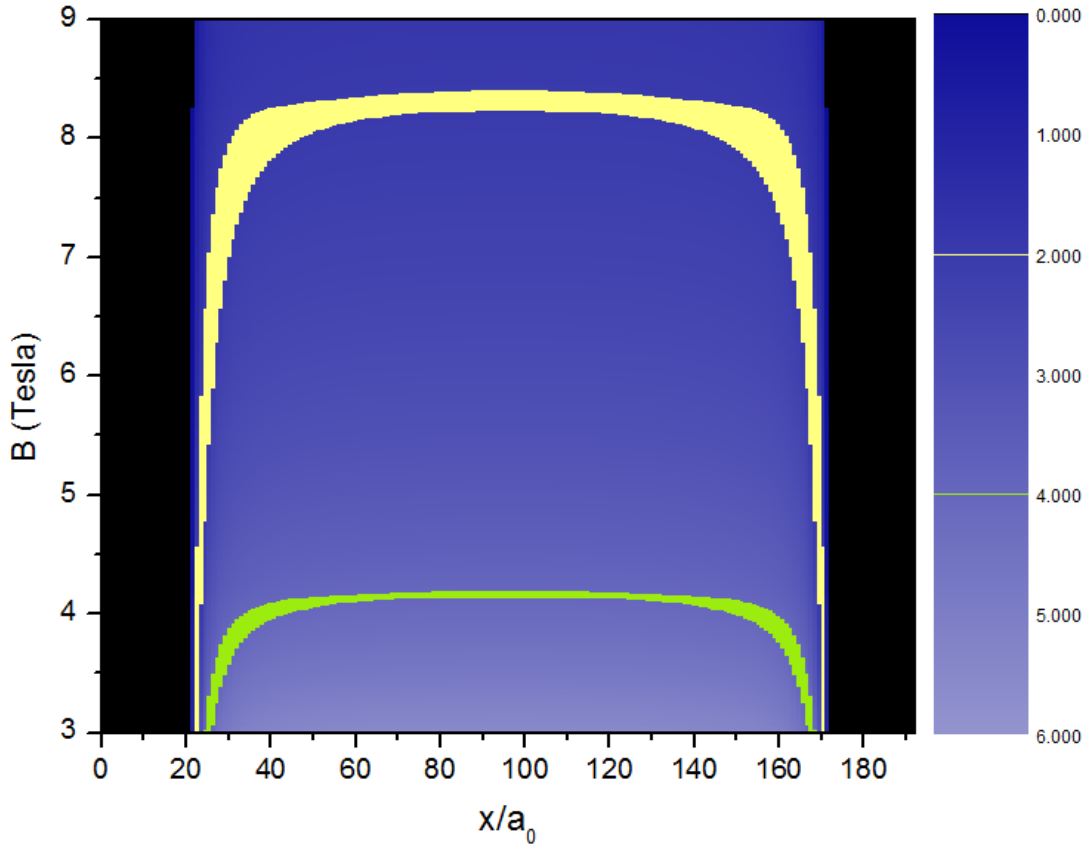
ile değişeceği için Landau seviyelerinin tam doldurulduğu yani doluluk faktörünün tam sayı olduğu yerler manyetik alanla birlikte değişecektir. Manyetik alan arttıkça Landau seviyelerinin dejenereliği doğru orantılı olarak arttığından doluluk çarpanının tam değerlerine ulaşmak için daha çok elektron yoğunluğuna ihtiyaç duyulacaktır. Bundan dolayı Şekil 7.5 de üstteki doluluk çarpanı grafiğinde görüldüğü gibi doluluk çarpanının tam sayı değerlerine denk gelen sıkıştırılamaz şeritlerin konumu manyetik alan arttıkça aynı yapı üzerinde sabit elektron sayısı altında yapının ortasına doğru kayacaktır. Çünkü böyle bir yapıda elektron dağılımı kenardan artarak yapının orta noktasında maksimum değerine ulaşacaktır. Bu kayma Şekil 7.5 de üstteki ayrıntılı (küçük) grafikte net bir şekilde görülmektedir. Daha önce ayrıntısı ile anlattığımız gibi bir sıkıştırılabilir şerit bitip sıkıştırılamaz bir şeride ilk girildiğinde elektronların potansiyeli bir Landau seviyesine tam denk gelmekte idi. Sıkıştırılamaz şerit boyunca ilerlendikçe elektronların potansiyeli artık bu bölgede bir perdeleme söz konusu olmadığı için Şekil 7.4 de alttaki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi ilk Landau seviyesinden ayrılıp potansiyel enerji ikinci bir Landau seviyesine ulaşıncaya kadar hangi kenara yakın olduğunuza bağlı olarak düşmeye ya da artmaya devam eder. Potansiyel enerji ikinci Landau seviyesine ulaşınca sıkıştırılamaz şerit sona erer ve yeni bir sıkıştırılabilir şeride girilir. Perdelenemeyen potansiyelin iki Landau seviyesi arasındaki bu enerji boşluğunu ne kadar mesafe içinde kat ettiği tamamen sıkıştırılamaz şeridin kalınlığını belirler. Sıkıştırılamayan şerit ortaya kaydıkça oluştuğu bölgedeki perdelenmemiş potansiyel değişimi Şekil 4.4 de görüldüğü gibi daha yavaş olacaktır. Bu durum Şekil 7.5 in altındaki ayrıntılı grafikte açıkça görülmektedir. Bu etkiye ek olarak burada manyetik alan artırıldığı için iki Landau seviyesi arasındaki enerji farkı da

$$\Delta E = \hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{m^*} \tag{7.2}$$

ile artmıştır. Böylece perdelenemeyen potansiyelin iki Landau seviyesi arasındaki potansiyel farkını kat etmesi daha uzun bir mesafede gerçekleşir. Bütün bunlardan dolayı Şekil 7.5 in üstündeki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi manyetik alan arttıkça

sıkıştırılamaz şerit ortaya doğru kayar ve kalınlaşır. Bütün bu etkileri Şekil 7.6 da daha rahat görmekteyiz. Hatta manyetik alan artıkça, Landau seviyelerinin dejenereliği artacağı için aynı yapı içinde sabit elektron sayısı olmasına rağmen Şekil 7.5 de görüldüğü gibi manyetik alan artışıyla ters orantılı olarak yapının merkezinde görülen en büyük doluluk çarpanının değeri düşecektir.

Yine Şekil 7.1 de gösterilen kuantum Hall çubuğu için $3\,T$ ile $9\,T$ manyetik alan aralığında hesapladığımız $\nu = 2$ ve $\nu = 4$ değerlerindeki sıkıştırılamaz şeritlerin konumları ve kalınlıklarını veren grafik Şekil 7.6 da görülmektedir. Şeklin sağ yanındaki renk skalası doluluk çarpanını göstermektedir, doluluk çarpanının $\nu = 2$ değeri sarı renk ile $\nu = 4$ deki değeri ise yeşil renk ile vurgulanmıştır.

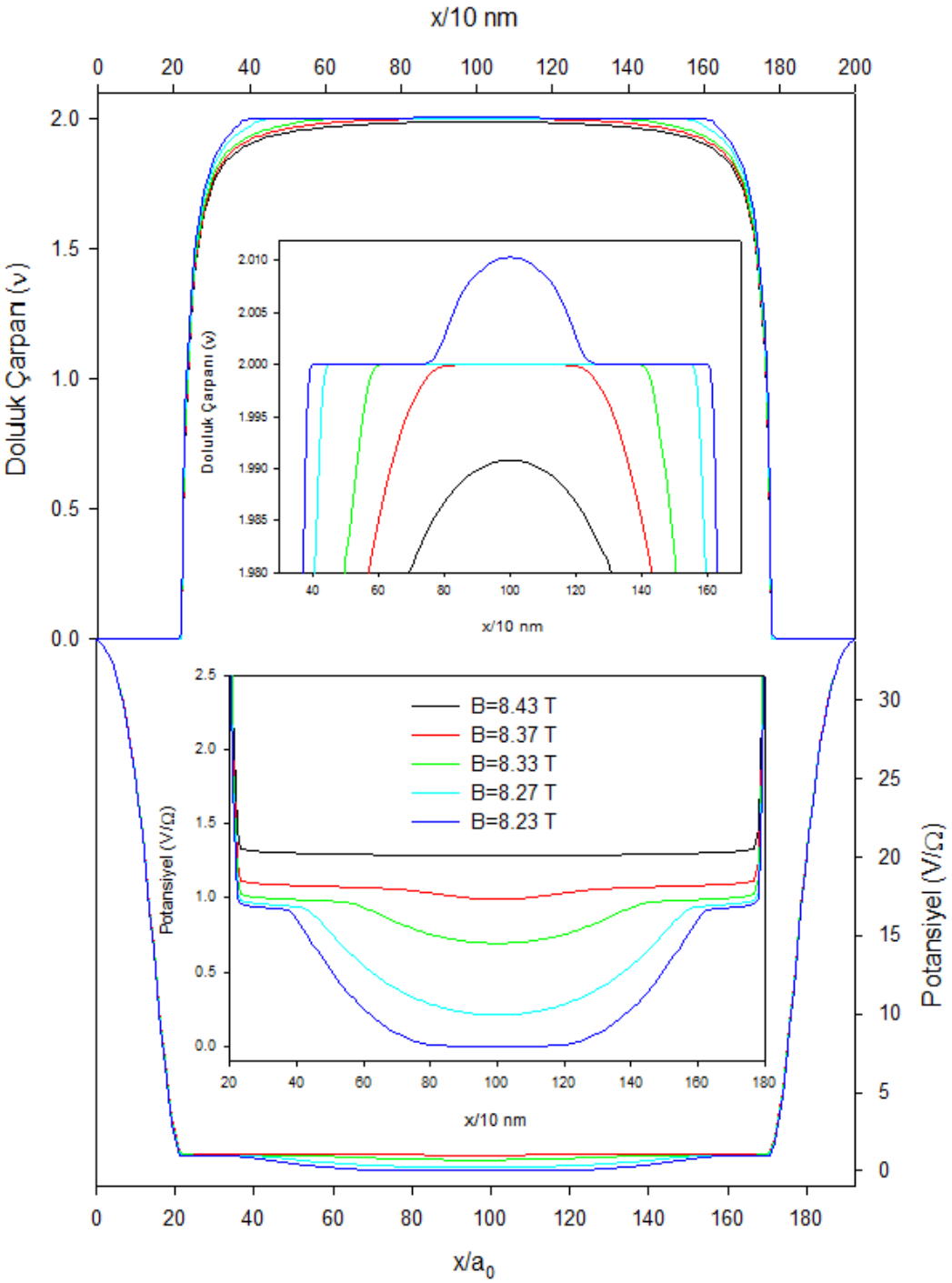


Şekil 7.6 Şekil 7.1 de gösterilen kuantum Hall çubuğu için $3\,T$ ile $9\,T$ manyetik alan bölgesinde doluluk çarpanın $\nu = 2$ ve $\nu = 4$ değerlerindeki sıkıştırılamaz şeritlerin konumları ve kalınlığını veren grafik. Şeklin sağ tarafındaki renk skalası doluluk çarpanını göstermektedir. Doluluk çarpanın $\nu = 2$ deki değeri sarı renk ile, $\nu = 4$ deki değeri ise yeşil renk ile vurgulanmıştır.

Şekil 7.6 daki grafikten görüldüğü gibi 9 T ile yaklaşık 8.4 T arasında hiçbir sıkıştırılamaz şerit gözlenmezken, 8.4 T'nın altında $\nu = 2$'ye karşılık gelen kağıt düzlemine dik olarak uzanan sıkıştırılamaz şerit orta kısımda oldukça geniş (yatay) olarak görülmektedir. Daha öncede vurguladığımız gibi manyetik alan arttıkça Landau seviyelerinin dejenereliği de artar yani bir Landau seviyesinin alabileceği elektron sayısı manyetik alan ile doğru orantılı olarak artar. 9 T lık manyetik alanda Landau seviyelerinin dejenereliği o kadar yüksektir ki yapıdaki mevcut elektron sayısı ilk Landau seviyesini bile hiç bir zaman tam dolduramamaktadır. Bu durum Şekil 7.6 da görüldüğü gibi manyetik alanın yaklaşık 8.43 T değerinin hemen altına kadar böyle devam etmektedir. Şekil 7.7 de üsteki ayrıntılı grafikte manyetik alanın 8.43 T değerinde elektron dağılımının hiç bir zaman doluluk çarpanının 2 tam değerine ulaşamadığı rahatlıkla görülmektedir. Bundan dolayı yaklaşık olarak 9 T ile 8.43 T *arasında* sistemde hiç bir zaman sıkıştırılamaz şerit gözlenmemekte bütün elektron dağılımı tek bir sıkıştırılabilir şeritten oluşmaktadır. Bu aralıkta Şekil 7.7 nin alt ayrıntılı grafiğinde 8.43 T değeri için görüldüğü gibi potansiyel ise elektron dağılımının sıfır olmadığı bütün bölgelerde tamamen perdelenmektedir. Manyetik alan küçüldükçe sıkıştırılamaz şeridin genişliği orta kısımda artarak, kenarlara doğru genişlemektedir. Bu da beklenen bir davranıştır. Çünkü manyetik alan azaldıkça Landau seviyelerinin dejenereliği azalacaktır. Bununla birlikte elektron dağılımının en yoğun olduğu bölge kuantum Hall çubuğunun yapısı gereği eldeki örneğin orta kısmıdır. Manyetik alan yüksekken hiç doldurulamayan ilk Landau seviyesi manyetik alan düşürülürken orta kısımda ilk kez tam dolmaya başlayacaktır. Orta kısımda oluşan tam dolu Landau seviyesi ise orada bir sıkıştırılamaz şerit oluşturur. Bu durum Şekil 7.7 de üstteki ayrıntılı grafikte açıkça görülmektedir. Manyetik alanın 8.37 T değerinde sıkıştırılamaz şerit yapının ortasında doluluk çarpanının 2 tam değerine denk gelen yerde rahatlıkla görülebilmektedir. Manyetik alan değeri düşerken yine Şekil 7.7 de üstteki ayrıntılı grafikte manyetik alanın 8.33 T değerinde sıkıştırılamaz şeridin kalınlığının arttığı ve 8.27 T değerinde ise neredeyse en geniş haline geldiği görülmektedir. Yapının ortasında oluşan bu sıkıştırılamaz şerit ise yine perdelenmeyen bir potansiyel oluşturur. Fakat bu potansiyel yapısı Şekil 7.5 de gördüklerimizden farklıdır. Çünkü burada potansiyel Şekil 7.7 de alttaki ayrıntılı grafikte manyetik alanın 8.37 T, 8.33 T ve 8.27 T değerleri için görüldüğü gibi

sıkıştırılamaz şeridin bir ucunda düşmeye başlar fakat düşme diğer bir Landau seviyesine kadar ulaşmadan orta kısımda tekrar yükselmeye başlayarak ilk Landau seviyesinin enerjisine eşit olan yüksekliğe çıkar. Yani ortada tek bir sıkıştırılamaz seviye mevcut iken Şekil 7.7 de alttaki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi potansiyel orta kısımda hafif bir çukura benzer görüntü sergiler. Bu durumun rahatlıkla görülebilmesi için Şekil 7.7 de kullanılan potansiyel birimi $\Omega = \hbar\omega_c/e$ şeklinde alınmıştır.

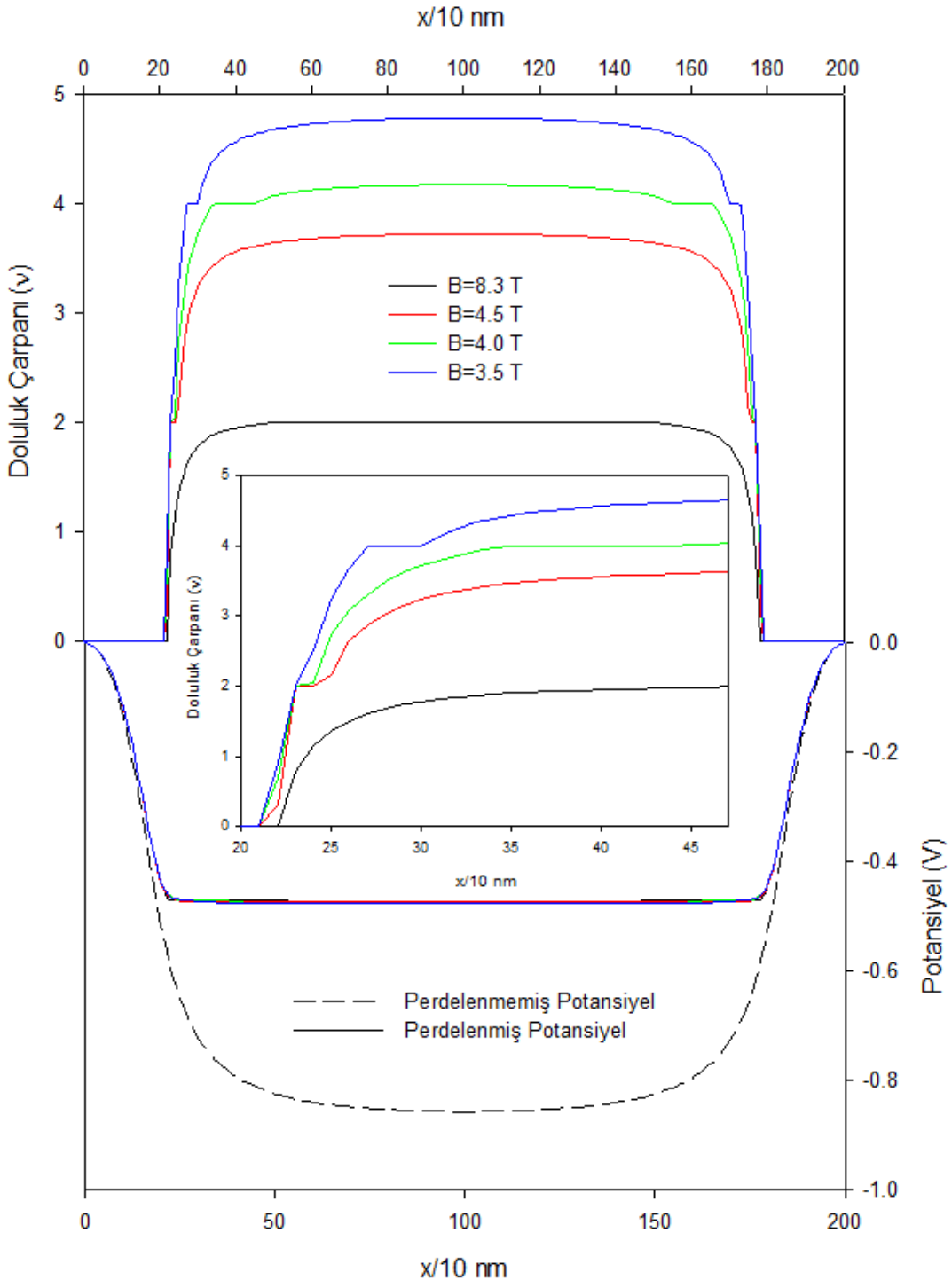
Şekil 7.7 de alttaki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi manyetik alanın 8.37 T 8.33 T ve 8.27 T değerinde potansiyel düşmesi iki Landau seviyesi arasındaki farka eşit olmuyor. Manyetik alan değeri küçültülmeye devam edilirse, Şekil 7.7 de manyetik alanın 8.23 T değeri için üstteki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi geniş ve tek olarak görülen sıkıştırlamaz şerit ikiye ayrılarak sağda ve solda geniş iki şerit olarak görülür. Bunun nedeni ise manyetik alan azaltıldıkça ortadaki sıkıştırılamaz şeridin genişliği artması sonucu perdelenemeyen potansiyel bölgesi büyür. Perdelenemeyen potansiyel bölgesinin genişlemesine bağlı olarak şeridin ortasına kadar olan kısımda potansiyeldeki düşmenin artmasının yanı sıra, manyetik alanın düşmesinin doğrudan etkisi olarak iki Landau seviyesinin arasındaki enerji farkıda azalır. Artık öyle bir manyetik alan değerine gelinir ki potansiyelin orta kısma kadar olan düşmesi, iki Landau seviyesi arasındaki enerji farkına eşit olur. Bu durum Şekil 7.7 de alttaki ayrıntılı grafikte manyetik alanın 8.23 T değeri için rahatlıkla görülmektedir. Bu noktada yapının tam ortasında bir üstteki Landau seviyesinin enerjisi, elektronların kimyasal potansiyel enerjisine denk gelir ve ikinci Landau seviyesi doldurulmaya başlanır. Böylelikle Şekil 7.7 de üstteki ayrıntılı grafikte 8.23 T değerinde görüldüğü gibi yapının tam orta noktasında yeni bir sıkıştırılabilir şerit oluşmaya başlar ve bu şerit ortada tek başına duran sıkıştırılamaz şeridi ikiye bölmüş olur. Bunun karşılığı olarak Şekil 7.7 de alttaki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi 8.23 T değeri için yapının ortasında yine perdelenmiş bir potansiyel ortaya çıkar. Manyetik alan daha da küçültülürse Şekil 7.5 de yaptığımız tartışmaya paralel olarak oluşan iki sıkıştırılamayan şerit konum olarak Şekil 7.6 da sarı renkle göründüğü gibi kenara kayarak kalınlıkları küçülür.



Şekil 7.7 Şekil 7.6 daki grafikte manyetik alanın 8.43 T, 8.37 T, 8.33 T, 8.27 T ve 8.23 T değerleri için 1.4 K sıcaklıkta oluşan doluluk çarpanına göre elektron yoğunluk dağılımı ve $\Omega = \hbar\omega_c/e$ birimlerinde perdelenmiş potansiyel dağılımı.

Yapının en kenar bölgelerinde potansiyel öyle şiddetli değişir ki bu noktaya denk gelen sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları çok küçülür. Sıkıştırılamaz şeridin kalınlığı bizim düğüm noktaları arasındaki mesafe olan 10 *nm*'nin altına düştüğünde

ise bu uzunluk yaklaşık olarak manyetik uzunluğa eşittir böyle bir sıkıştırılamaz şerit Şekil 7.8 de özellikle 3.5 *T* manyetik alan değerinde görüldüğü gibi tam olarak gözlenemez. KUHO içerisinde elektron dağılımını elde etmek için yapılan hesaplamalar Siddiki ve Gerhardts'ın 2004 de yaptıkları gibi Hartree ya da kendilerinin ortaya attığı Yarı-Hartree (Quasi-Hartree) yöntemi ile yapılırsa elektronların dalga fonksiyonlarının geniş alana yayılması yüzünden deneysel olarak gözlendiği gibi kalınlığı yaklaşık manyetik uzunluk mertebesinde olan sıkıştırılamaz şeritler tamamen ortadan kalkar (Weitz ve ark. 2000, Ahlswede ve ark. 2001). Sıkıştırılamaz şeridin hiç bir zaman kaybolmayacağını düşünmek sistemin plato bölgesinden hiç bir zaman çıkmayacağını kabullenmek demektir. Bu ise deneysel sonuçlarla tamamen çelişen bir durumdur. Gerçekte, manyetik alan uzunluğunun bir veya iki katına düşen sıkıştırılamaz şeritler, elektron dalga fonksiyonlarının yaklaşık bu genişlikte olması ve birbirleri üzerine örtüşmeleri sonucu, varlıklarını koruyamazlar. Halbuki Thomas-Fermi ile yaptığımız hesaplamalarda Şekil 7.8 de 4.5 *T* manyetik alan değerinde görüldüğü gibi sıkıştırılamaz şeridin kalınlığı 10 nm'den büyük olduğu her an görülebilmektedir. Bunun nedeni ise Thomas-Fermi yönteminde elektron dalga fonksiyonlarının dirac delta fonksiyonları şeklinde olduğu düşünülüp bir birleri ile örtüşememeleridir. Elbette ki bu sonuçlar Thomas-Fermi yönteminin Hartree yöntemine göre daha zayıf bir yöntem olduğunu kanıtlamaktadır. Fakat bu tür bir hesapta Hartree yönteminin kullanılmasının karmaşıklığı ve hesaplama zamanında meydana getirdiği çok büyük zaman kaybı göz önüne alınınca, Thomas-Fermi yönteminin basitliği ve hesaplama için gereken zamanda kazandırdığı süre ile Thomas-Fermi yöntemi Hartree yönteminden daha çok tercih edilir hale gelmiştir. Bu nedenle, Siddiki ve Gerhardts'ın 2004 yaptıkları çalışmada Hartree yönteminin karmaşıklığı ve zaman israfından kaçınarak onun verdiği sonuçları elde edebildikleri Yarı-Hartree (Quasi-Hartree) adını verdikleri yeni bir yöntem ortaya atmışlardır. Bu yöntemde temel olarak Thomas-Fermi hesabından çıkan sonuçlarda dar olan sıkıştırılamaz şeritlerin olduğu bölgelerde bir kaç manyetik uzunluk mertebesi boyunca elektron dağılımının ortalaması alınarak, şeridin hayatta kalıp kalamıyacağına karar verilmektedir. Biz de bu çalışmamız da seçtiğimiz düğüm noktaları arası mesafeyi manyetik uzunluk boyutunda seçerek tam olmasa da benzer bir etki elde etmekteyiz.



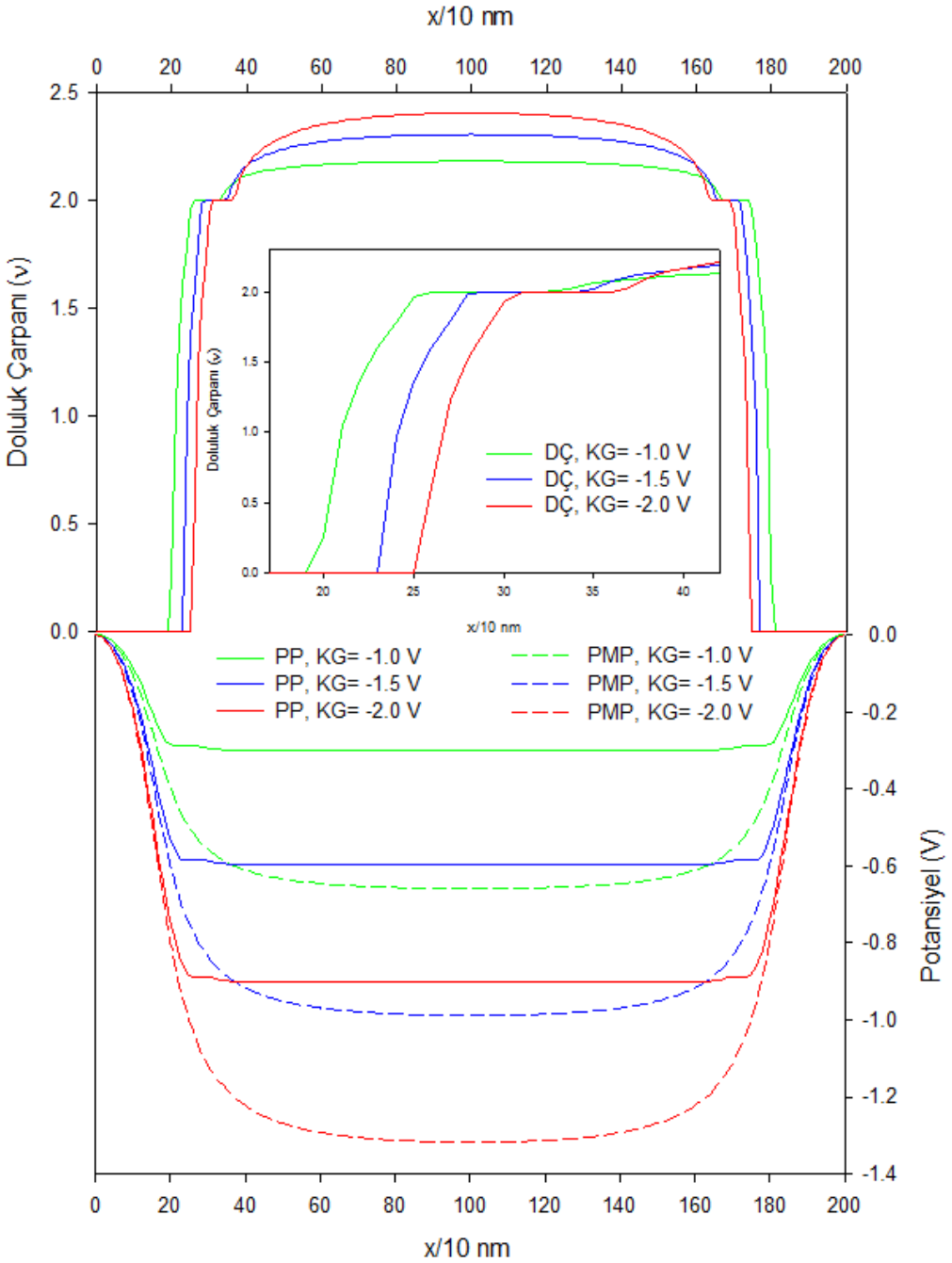
Şekil 7.8 Şekil 7.6 daki grafikte manyetik alanın 8.3 *T*, 4.5 *T*, 4.0 *T* ve 3.5 *T* değerleri için görülen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı, perdelenmiş ve perdelenmemiş potansiyel dağılımları.

Manyetik alan değeri $4\,T$'nın biraz üzerine kadar düşürüldüğünde $\nu = 4$ değerine karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit Şekil 7.6 da yeşil renkteki şerit ile

görüldüğü gibi yapının ortasından gözükmeye başlıyor. Manyetik alanı düşürmeye devam ettiğimizde bir önceki paragrafta yaptığımız tartışmalar nedeniyle bu şerit de yanlara doğru ikiye ayrılıyor ve manyetik alanın düşmeye devam etmesi ile birlikte kenarlara yaklaşarak sıkıştırılamaz şeritlerin genişlikleri daralmaya devam ediyor. Elde ettiğimiz bu sonuçlar Green fonksiyonları yöntemini kullanan Siddiki ve Gerhardts'ın elde ettikleri sonuçlarla nitel olarak uyum içerisindedir (Siddiki ve Gerhardts 2004). Ayrıca Şekil 7.6 da 8 T'nın hemen üstüne dikkatli bakınca elektron dağılımının sıfır olduğu bölgenin manyetik alan artıkça genişlediği görülmektedir. Şekil 7.6 da siyah renkli kısım hiç elektron olmayan bölgeyi göstermektedir. Daha önceki paragraflarda yaptığımız tartışmada Gerhardts ve arkadaşlarının b diye tanımladıkları ve elle sabit bir değer girdikleri, hesaplamalar boyunca sabit olarak kabul ettikleri elektron dağılımının başladığı noktanın manyetik alan ile az da olsa değiştiğini göstermektedir. Elbette ki bu da fiziksel olarak beklenen bir sonuçtur. Şekil 7.8 de alttaki grafikte görüldüğü gibi aynı yapıda sabit elektron sayısı altında sadece manyetik alan değiştiğinde perdelenmemiş potansiyel ya da diğer adıyla arkafon potansiyeli aynı olacaktır. Buna rağmen Şekil 7.8 de üstteki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi elektron dağılımının başladığı nokta manyetik alanın artmasıyla birlikte yapının içine doğru kaymıştır. Çünkü düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında elektron dağılımı, elektronların kendi enerjisi, o noktadaki yerel potansiyel enerji ve birinci Landau enerjisinin toplamına eşit olduğu an başlayabilmektedir. Landau seviyesinin enerjisi ise manyetik alan ile arttığına göre yüksek manyetik alanlarda kenar bölgelerde elektron dağılımının başlaması için gerekli olan enerji artacaktır. Bu da elektron dağılımının yerel potansiyeli daha düşük olan iç bölgelerden başlamasına neden olacaktır. Elbette ki bu durum Şekil 7.8 de üstteki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi b değerini doğrudan etkilemektedir. Şekil 7.6 daki b değeri sanki sadece 8 T'nın hemen üstünde bir basamak gibi değişmiş gözükmektedir. Bunun nedeni b değerinin manyetik alana çok zayıf bağlı olması ve bizim iki düğüm noktası arasının 10 nm olmasıdır. 10 nm'lik hassasiyet manyetik alana göre zayıf değişen b değerinde biraz kaba bir aralık olarak durmaktadır. Bundan dolayı fiziksel olarak b değeri her manyetik alanla her noktada değişmesine rağmen grafikte sadece bir noktada değişmiş gibi görülmektedir.

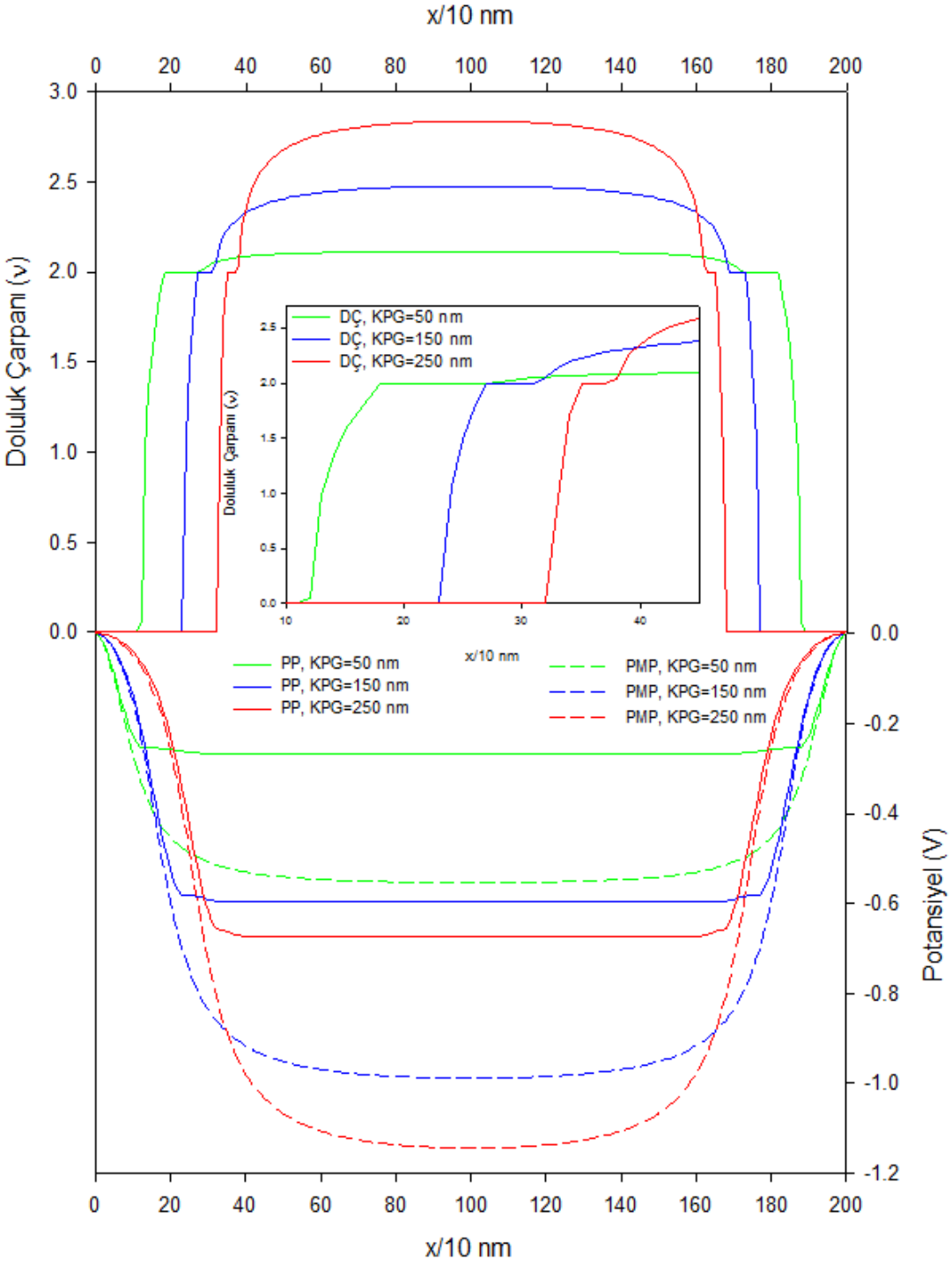
Şekil 7.1 deki yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerini -1.0 V, -1.5 V ve -2.0 V olarak değiştirirsek Şekil 7.9 da görülen elektron dağılımı, perdelenmiş ve perdelenmemiş potansiyel dağılımı grafiklerini elde ederiz. Ortalama elektron ve verici atom yoğunluğumuz kuantum Hall çubuğu boyunca $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ değerinde sabit tutulmuştur. Kapı gerilimlerini artırmak Şekil 7.9 da açıkça görüldüğü gibi perdelenmemiş potansiyel, diğer bir deyişle çıplak potansiyelin daha çok artmasına ve daha sert değişmesine neden olur. Perdelenmemiş potansiyeldeki bu değişime karşılık ilk tepki, Şekil 7.9 daki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi kapı gerilimi artıkça elektron dağılımının yapının daha içlerinden başlaması olmaktadır. Yani *b* değerinin artmasına neden olur. İkinci olarak ise potansiyelin daha sert değişiyor olması önceki paragraflarda yaptığımız tartışmalara paralel olarak sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıklarının azalmasına neden olacaktır. Şekil 7.9 da görüldüğü gibi kapı gerilimi arttıkça, yani $-1.0\ V$'luk kapı geriliminde yapının solundaki doluluk çarpanı 2' ye denk gelen sıkıştırılamaz şeridin merkezi yaklaşık olarak 280 *nm* civarına denk gelmektedir. Şeridin kalınlığı ise yaklaşık olarak 60 *nm* civarındadır. Kapı gerilimi arttıkça elektron dağılımının içeriye doğru kaymasıyla birlikte bu şeridin merkezi de -1.5 *V* için yaklaşık 305 *nm* ye ve -2.0 *V*'luk kapı gerilimi içinde 325 *nm* ye kaymıştır. Sıkıştırılamaz şeridin genişliği ise yaklaşık -1.5 *V* için 50 *nm*, -2.0 *V* için ise gene yaklaşık 50 *nm* dir. Burada göze çarpan durum ise kapı gerilimleri eşit aralıklar ile artırılmasına rağmen ilk sıkıştırılamaz şeridin genişliği ve merkezi aynı ölçüde değişmemektedir. Bunun en büyük nedeni ise sabit elektron sayısı altında daha dar bir bölgeye sıkışan elektronlar Şekil 7.9 daki üstteki doluluk çarpanı grafiğinde görüldüğü gibi merkezde daha yoğun bir dağılıma sahip olacağı gibi yoğunluk artışı da daha sert olacaktır. Bundan dolayı birinci Landau seviyesi beklenenden daha çabuk doldurulabilir. Bu da sıkıştırılamaz şeridin potansiyelin etkisiyle daha fazla kaymasını bir nebze olsa da engeller. İçeriye doğru olan kayma potansiyelde hafif değişim bölgesine doğru şeridi ittiği için de şeridin daralması da gerilim artarken bir nebzede olsa azalır. Fakat sonuç itibari ile kapı gerilimini artırmak aynı manyetik alan değerlerinde merkezi yapının içlerine doğru kaymış ve daralmış sıkıştırılamaz şeridin oluşmasına neden olacaktır. Kapı geriliminin artmasıyla birlikte merkezdeki elektron yoğunluğu da artacağı için daha önce yaptığımız tartışmalar ışığında daha yüksek manyetik

alanlarda da orta kısımda sıkıştırılamaz şerit gözlenmeye başlanacaktır. Sonuç olarak kapı gerilminin artırılması, oluşan platonun manyetik alan bölgesinin yukarı doğru kaymasına neden olacaktır.



Şekil 7.9 Şekil 7.1 deki yapıda 1.4 K sıcaklıkta ve 7.4 T manyetik alan altında kapı gerilimlerinin *(KG)* -1.0 V, -1.5 V ve -2.0 V olarak değiştiririlmesi sonucu oluşan *doluluk çarpanına (DÇ)* (elektron dağılımı), *perdelenmiş potansiyel (PP)* ve *perdelenmemiş potansiyel (PMP)* dağılımı grafikleri.

Şekil 7.1 de görülen yapıda 1.4 *K* sıcaklık ve 6.9 *T* manyetik alan değerlerinde kapı gerilimini -1.5 *V* da sabit tutarak kapı genişliklerini 50 *nm*, 150 *nm* ve 250 *nm* olarak değiştirdiğimizde Şekil 7.10 da alttaki grafikte görüldüğü gibi perdelenmemiş potansiyel, Şekil 7.9 da kapı gerilimlerinin değişimini gösteren altındaki grafikdeki perdelenmemiş potansiyelden biraz farklı olarak değişmektedir. Fakat sonuç itibari ile elektron dağılımı ve sıkıştırılamaz şeritler üzerindeki etkileri benzerdir. Yalnız önemli noktalardan birisi kapı genişlikleri artırılırken Şekil 7.1 de gösterilen yapıda iki kapı dahil yapının *x* yönündeki genişliği 2000 *nm* olarak korunmuştur. Yani kapı genişlikleri artırılırken iki kapı arasındaki mesafe bununla doğru orantılı olarak azalmaktadır. Kapı genişliği artması ile Şekil 7.10 altındaki grafikte görüldüğü gibi kapıların *2BEG*'nın olduğu bölgede oluşturdukları sınırlandırıcı potansiyelin diğer adıyla perdelenmemiş potansiyelin derinliği yaklaşık olarak doğru orantılı bir şekilde artmaktadır. Bunun sonucu olarak da elektron dağılımı yapı içine sıkışmaktadır. Bu durum, Şekil 7.10'un üstündeki ayrıntılı grafikte görüldüğü gibi doğrudan *b* değerini etkilemektedir. Aynı sayıdaki elektron daha az bir bölgeye hapsolunca doğal olarak elektron yoğunuluğu biraz daha hızlı değişmekte ve merkezde daha yüksek olmaktadır. Kapı genişliği 50 *nm* olan yapı içinde elektron dağılımı en geniş bir bölgeye yayıldığı için elektron yoğunluğunun maksimum değeri yaklaşık olarak 2 nin biraz üstündedir. Bu yapıda potansiyel de yavaş değiştiği için geniş iki adet sıkıştırılamaz şerit ile karşılaşılmaktadır. Kapı genişliği artıkça sınırlandırıcı potansiyelin etkisi yüzünden daha dar bir alana sıkışan elektronlar merkezde çok daha yüksek doluluk oranlarına ulaşabilmektedirler. Örneğin kapı genişliği 250 *nm* olan yapıda merkezde doluluk çarpanı 2.5'in üzerine çıkmaktadır. Daha önce yaptığımız tartışmalara paralel olarak böyle bir yapıda aynı manyetik alan değerinde bile Şekil 7.8 de görüldüğü gibi bariz bir biçimde sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlığı azalmaktadır. Hatta 250 *nm* lik kapı genişliğine sahip yapıda doluluk çarpanı 2'ye ait sıkıştırılamaz şerit kaybolmak üzeredir. Yani 6.9 T değerinde 50 *nm* lik kapı genişliğine sahip yapı plato bölgesinin yaklaşık ortasında sayılırken 250 *nm* lik kapı genişliğine sahip yapı ise aynı plato bölgesinden çıkmak üzeredir. Sonuç itibari ile kapı genişlikleri tıpkı kapı gerilimlerinin artmasının neden olduğu gibi plato bölgesinin yüksek manyetik alan değerlerine doğru kaymasına neden olmaktadır.

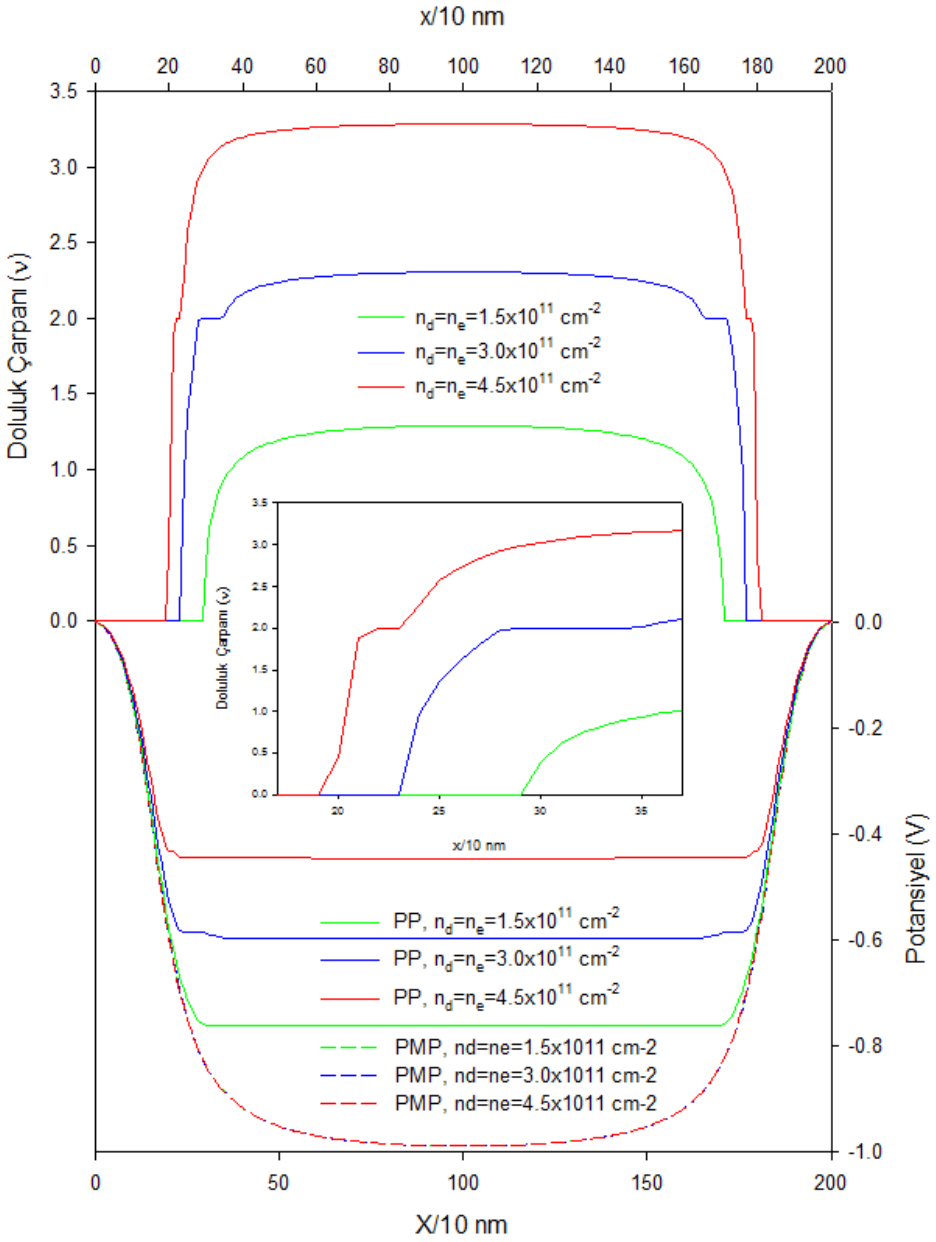


Şekil 7.10 Şekil 7.1 de görülen yapıda *50 nm, 150 nm* ve *250 nm* gibi kapı genişliklerine *(KPG)* karşın *1.4 K* sıcaklıkta *6.9 T* manyetik alan altında oluşan elektron dağılımları, perdelenmiş *(PP)* ve perdelenmemiş *(PMP)* potansiyel değişimleri.

Şekil 7.1 deki yapıda 150 *nm* kapı genişliği ve -1.5 *V* kapı gerilimi altında 1.4 *K* sıcaklıkta ve 7.4 *T* manyetik alan altında ortalama elektron ve verici atom

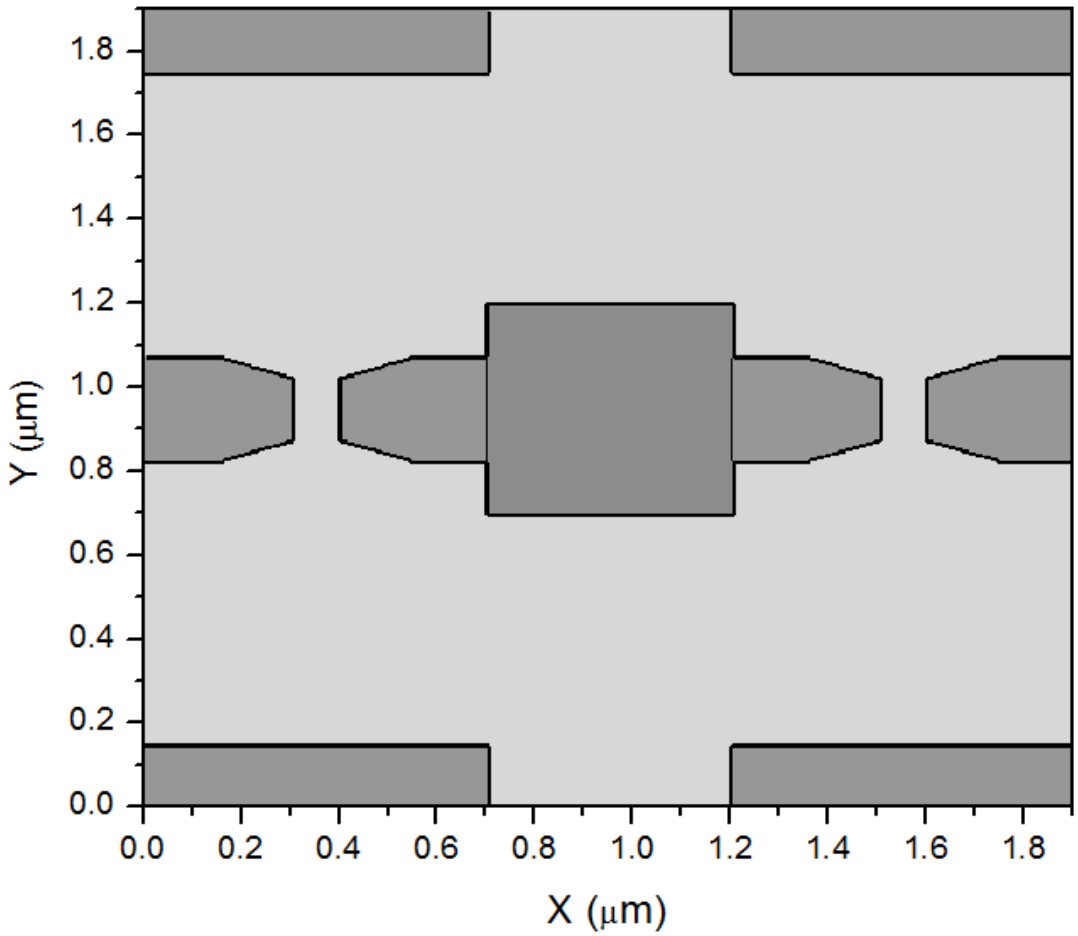
yoğunluklarının $\bar{n}_e = n_d = 1.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$, $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ ve $\bar{n}_e = n_d = 4.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ değerleri için hesaplamalar yapılmıştır. Şekil 7.11 de görüldüğü gibi yapıda değiştirilen sadece verici atom yoğunluğu ve buna bağlı olarak da ortalama elektron yoğunluğu olduğu için perdelenmemiş potansiyel değişmemektedir. Aslında yapıda daha fazla verici atom kullanılması yapıdaki pozitif yükleri artırmakta bu da periyodik sınır koşulu altında perdelenmemiş potansiyeli daha fazla ötelemektedir. Ama Şekil 7.11 de alttaki grafikte yaptığımız gibi belli bir noktanın potansiyelini hepsi için sıfır referans noktası aldığımızda elektronların gördüğü etkin perdelenmemiş potansiyelin hiç değişmediğini rahatlıkla görebiliyoruz. Elektron sayısının düşmesi elektronların Fermi enerji seviyesini ve kimyasal potansiyel enerjilerini direk düşürecektir. Bundan ötürü elektron dağılımı elektron sayısı azaldıkça aynı perdelenmemiş potansiyel altında daha dar bir bölgeye sıkışmak zorunda kalır. Bu da Şekil 7.11 de ortadaki ayrıntılı grafikte açıkça görüldüğü gibi b değerini doğrudan etkilemektedir. $\bar{n}_e = n_d = 1.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ değerin de ki elektron yoğunluğu, 7.4 T manyetik alan değeri için Şekil 7.11 de üstteki grafikte görüldüğü gibi hiç bir zaman birinci Landau seviyesini bile doldurmaya yeterli gelmemiştir. Açıkça görüldüğü gibi bu elektron yoğunluğunda sistem ilk plato bölgesinin bile dışındadır. Sistemin ilk plato bölgesine girebilmesi için manyetik alanın düşürülmesi gerekliliği açıktır. Elektron sayısı artıkça Şekil 7.11 de alttaki potansiyel grafiğinde görüldüğü gibi perdeleme etkisi de artmaktadır. Elektron sayısının daha çok olması elektron yoğunluğunun başlama noktası olan b değerini yapının kenarına doğru iterek elektronlar için daha geniş bir alan sağlamasına rağmen Şekil 7.11 de üstteki grafikte görüldüğü gibi bu etki yerel elektron yoğunluklarının artmasını engelleyebilecek kadar kuvvetli değildir. Bunun sonucu olarak elektron sayısı artıkça ilk Landau seviyesi daha hızlı doldurulmakta ve bu seviyeye ait sıkıştırılamaz şerit Şekil 7.11 de görüldüğü gibi kenara doğru kaymaktadır. Daha önceki tartışmalarımızda olduğu gibi kenar bölgelerindeki potansiyel değişimi çok sert olduğundan sıkıştırılamaz şerit kenara doğru gittikçe daralıp kaybolmaktadır. Sonuç itibari ile elektron yoğunluğu arttıkça plato bölgeleri yüksek manyetik alan değerlerine doğru kaymaktadır. Örneğin $\bar{n}_e = n_d = 4.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ yoğunluk değerinde 7.4 T manyetik alanında sistem ilk plato bölgesinden

çıkmak üzere iken, aynı manyetik alanda $\bar{n}_e = n_d = 1.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ yoğunluk değerinde sistem ilk plato bölgesine daha girememiştir.

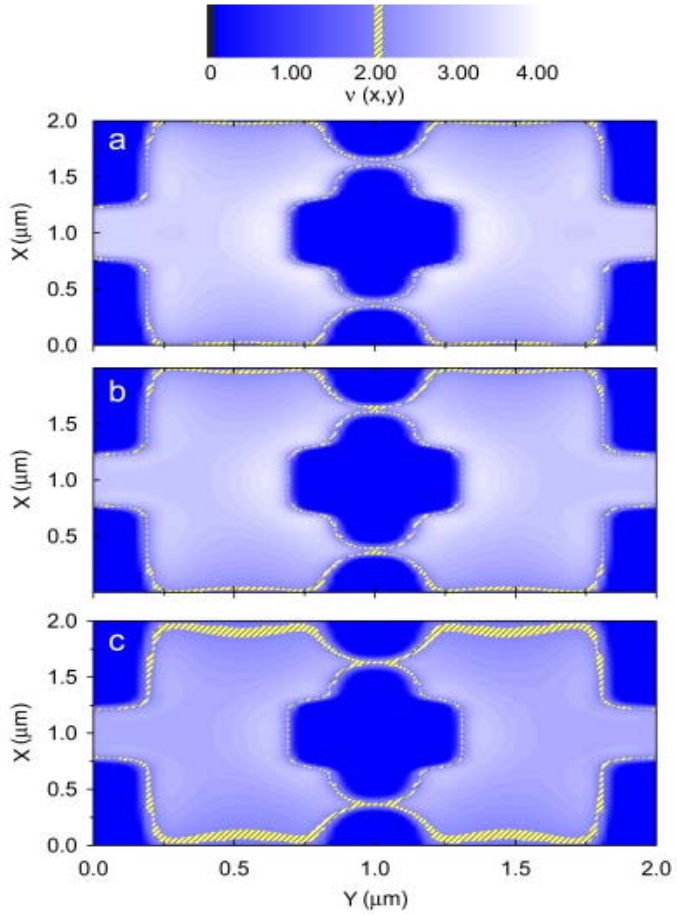


Şekil 7.11 Şekil 7.1 deki yapıda 150 *nm* kapı genişliği ve -1.5 *V* kapı gerilimi altında 1.4 *K* sıcaklıkta ve 7.4 *T* manyetik alan altında ortalama elektron ve verici atom yoğunluklarının $\bar{n}_e = n_d = 1.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$, $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ ve $\bar{n}_e = n_d = 4.5 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ değerleri için hesaplanan doluluk çarpanına göre elektron dağılımı, *perdelenmiş (PP)*, ve *perdelenmemiş (PMP) potansiyellerin* grafiği.

Şimdi Mach-Zehnder interferometresi ile ilgili yaptığımız hesaplamalara bakalım. Bu çalışmanın ilk kısmında Şekil 4.7 de gösterilen kesme ve kapıların kullanıldığı yapıyı ele aldık. Çalışmanın bu kısmında üç boyutlu Poisson denklemini çözmek için Green foksiyonları ve Fourier transformunu kullandık. Kapıların *2BEG*'nın olduğu bölgedeki etkilerini Denk. (4.2) ile verilen Davies'in ifadesiyle hesapladık (Davies ve ark. 1995). Kesmeden ileri gelen etkileri ise yarım bir sinüs fonksiyonu ile simüle ettik. Şekil 4.7 de gösterilen kapı yapısı Şekil 7.12 de ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Burada *kuantum nokta kapı, KNK* (Quantum Point Contact, *QPC*) arası mesafe 100 *nm* dir. Ortadaki büyük kare yapı hariç tüm kapılara -1.0 *V* uygulanmıştır. Ortadaki büyük kareye ise -1.5 *V* gerilim uygulanmıştır. Bu yapı için farklı manyetik alan değerleri için elde edilen sonuçlar Şekil 7.13 de gösterilmektedir.



Şekil 7.12 Şekil 4.7'de gösterilen Mach-Zehnder yapısının ayrıntılı kapı şekli. Ortdaki büyük kapı -1.5 *V*, diğer kapılara ise -1.0 *V* gerilim uygulanmaktadır.

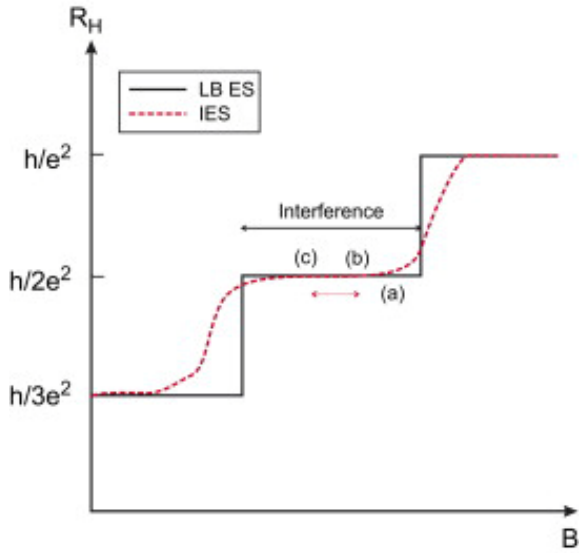


Şekil 7.13 a) $\Omega/E_F = 0.90$ b) $\Omega/E_F = 0.95$ c) $\Omega/E_F = 1.15$ değerleri için renk kodlanmış iki boyuta doluluk çarpanı $\nu(x,y)$. Burada $\Omega = \hbar\omega_c$ ve $E_F = 12.75\, meV$ dur. Hesaplamalar $\Omega/k_bT \approx 0.025$ de yapılmıştır. Geometriyi tanımlayan kapılar *2BES*'nin üstünde 85 nm alınmıştır.

Tamsayı *KUHO*'nın bilinen kenar durumları açıklamasında, temel olarak tamsayı doluluk çarpanı ile birlikte plato sayısını veren ***LB** (Landauer-Büttiker) **kenar durumları*** sayısına bakılır. Lokalizasyon veya düzensizliğin herhangi bir türü varsayılmaksızın, boyuna direnç *B* alanının bir fonksiyonu olarak geçişlerde delta pikleri sergilerken Hall direnci Şekil 7.14 de görüldüğü gibi bir merdivene benzer.

Bu durum, bir plato bölgesine girildiği zaman kaynaktan akıtıcıya doğru boydan boya geçen bir *LB* kenar durumuna sahip olunacağını ve böylelikle deneysel bulgularla çelişik olan girişim deseninin bütün plato boyunca gözlenebileceğini ima eder. Böyle bir zıtlık asimetrik Landau seviye genişlemesi ile büyük bir ölçüde kaldırılabilse de numunenin yüksek mobilitesi bu olasılığı bir kenara bırakır. Diğer

taraftan *KUHO*'nın perdeleme teorisinden bilinir ki bir platonun oluşması akım doğrultusunda en az bir *Sıkıştırılamaz Kenar Durumunun, SZKD (Incompresible Edge States, IES)* bulunması halinde oluşur. Lokalizasyonun serbest olduğu bu modelde, platoların genişliği *SZKD*'nin inceliği ile sınırlanır, bu da *B* alanına ve düzensizliğin uzun-mesafe kısmına bağlıdır (Siddiki ve ark. 2007). Şekil 7.13 de, üst kısımda anlattığımız şema ile öz-uyumlu olarak *1K*'de $E_F=12.75\ meV$'lik tipik bir Fermi enerjisi için hesaplanan elektron dağılımını uzaysal koordinatların bir fonksiyonu olarak çizdik. Renk yelpazesi sıfırdan (koyu renk) yüksek elektron konsantrasyonuna doğru çizilmiştir. Yüzeydeki yüksek potansiyel beslemesi kapılar altında hiç elektron bulunmadığını garanti eder, halbuki açık sarı şeritler lokal doluluk çarpanı 2'nin konumunu belirtir. Şekil 7.13'ün en üst kısmında, düşünülen koşullar altında sistem, plato bölgesine neredeyse girebileceği gözlenmektedir. Çünkü ele alınan geometrinin üstünde ve altında hemen hemen iki boydan boya *SZKD* bulunmaktadır.



Şekil 7.14 Hall direnci taslağı, burada dolu çizgi ***LB*** kenar durumu, kesikli çizgi ise sıkıştırılamayan kenar durumunu göstermektedir. Manyetik alanın beklenen girişim mesafeleri her iki ucunda ok olan çizgilerle belirtilmiştir.

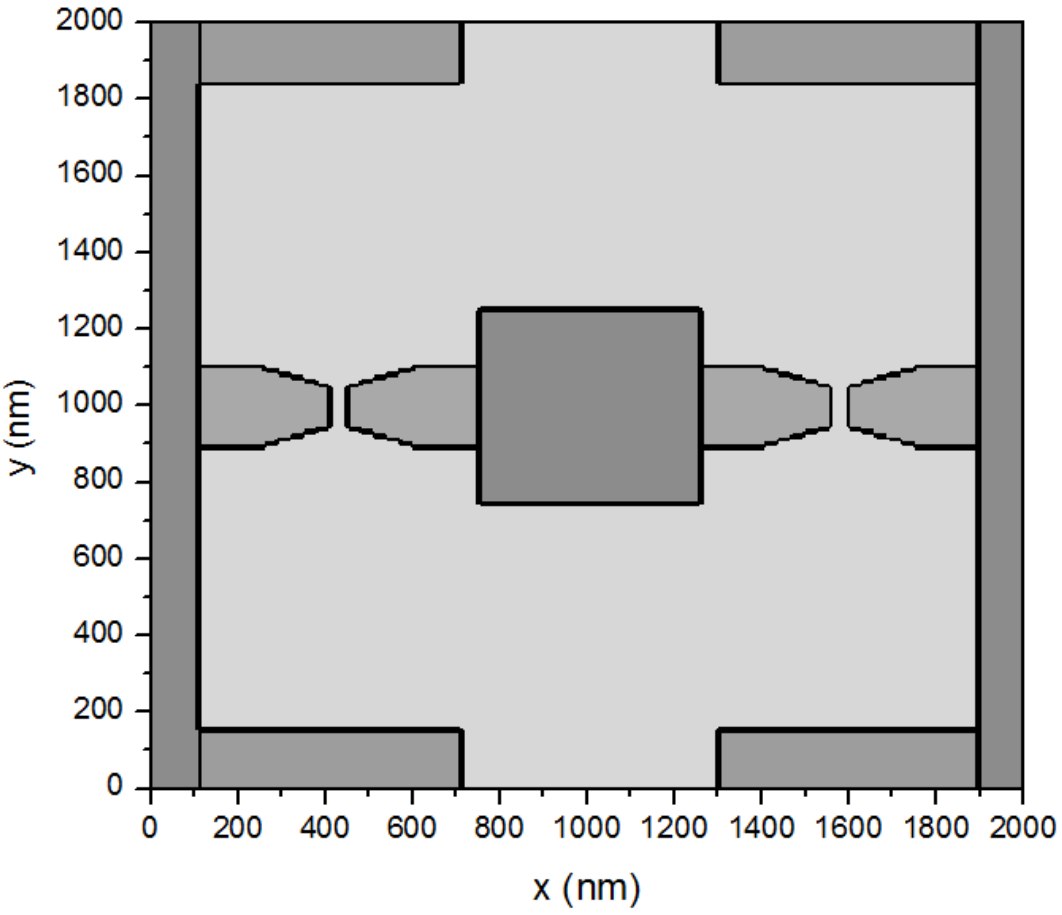
Orta panel öyle bir durumu gösterir ki boydan boya *SZKD* iyice belirir ve sistem plato üstündedir, görünürlükteki karşıtlık (kontrast) hala küçüktür, çünkü tünelleme ile saçılma sürecinin oluşmasıyla girişim olmaya devam edecektir. En büyük *B* alanı için, *SZKD* kuantum sıkışmasında birleşir ve eşevresizlik

(decoherence) minimize olur, böylece oldukça yüksek mobiliteli örneklerde görünürlüğün bazı deneylerde ölçülenlere benzer olarak en yüksek olacağı öngörülür (Ji ve ark. 2003, Neder ve ark. 2006, Neder ve Marquardt 2007). İnanıyoruz ki şayet kayıpsız akım *SZKD*'na sınırlanırsa, geri saçılmanın olmadığı yerde, deneylerde *B* alanının bir fonksiyonu olarak görünürlüğün gözlenen genlik değişimi basitçe kuantum nokta kontakda bir *SZKD*'nin ortaya çıkmasıyla açıklanabilir. Bu iddia ayrıca şu gerçeği destekler ki böyle hassas deneylerde kuantum nokta kontağın geometrik şekli, geçiş genliği değişmez kalmasına rağmen önemli bir rol oynayabilir (Siddiki ve Marquardt 2007, Siddiki ve Gerhardts 2007).

Özet olarak bir *MZI*'da (topolojik olarak eşdeğer bir geometride) geri saçılma olmayan *SZKD*'nin uzaysal dağılımı Thomas-Fermi yaklaşımında dış potansiyelin düzgün değişimi kullanılarak çalışılmıştır. *LB* kenar durum modeline zıt olarak kuantumlu Hall platosu aralığının her bir manyetik alan değerinde görünür osilasyonların gözlenemez olduğunu gösterdik. Yapının geometrisinin önemini belirterek ve kuantum nokta bağlantılarında *SZKD* birleşmesinin temelinde bu sonucu çıkarttık. Genliğin kendisi ve girişim aralığı açıkça numunenin mobilitesine bağlıdır, böylece (ayrıca spini de içererek) bu sunulan çalışmanın genişletilmesi, numunenin tasarımını ve gözlenen niceliklerin kalitesini geliştirmeye yardımcı olabilir.

Mach-Zehnder interferometresi ile ilgilendiğimiz çalışmamızın bu kısmında hesaplamaları üç boyutlu Poisson denklemini sayısal olarak her adımda çözdüğümüz ve kapıların etkisini direk olarak her adımda hesaba katabildiğimiz yeni yaklaşımımızla tekrar ele aldık. Üç boyutlu Poisson denklemini her adımda sayısal olarak çözdüğümüz için bu yeni yaklaşımda Green fonksiyonlarına, Fourier dönüşümlerine ve Denk. (4.2) ile verilen Davies'in formülüne gerek kalmamaktadır. Yeni hesaplamalar daha önce yaptığımız hesaplamalardan daha ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Daha önce yaptığımız hesaplamalarda girişimin sadece manyetik alanın şiddetine olan bağımlılığına bakılmıştı. Şimdi ise manyetik alan şiddetinin yanında kuantum nokta kontaklar arasındaki mesafe ve kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimin değiştirilmesi durumunda girişimin nasıl etkilendiğine bakılmıştır.

Şekil 7.15 de kuantum nokta kontaklar arası mesafe 50 *nm* olan ve kesme yerine bulk malzeme üzerine sadece kapılar kullanılarak oluşturulan Mach-Zehnder interferometeresinin kapı şeması gösterilmektedir. Şemanın sağında ve solundaki uzun diktörgen kapılar kesme yerine bulk malzemede elektronları o bölgeye hapsetmemizi sağlayan yapılardır. Ya da diğer bir bakış açısıyla kesme etkisini simüle eden yapılardır. Kuantum nokta kontakların gerilimi ise -0.3 , -0.5 ve -0.7 *V* olarak değiştirilerek girişime etkisine bakılmıştır.



Şekil 7.15 *MZI* kapı yapısının şeması. Şemanın sağında ve solunda *y* doğrultusu boyunca uzanan ve ortadaki kare şeklindeki kapılar -1.5 *V* ile beslenmiştir. Diğer dört adet diktörgen biçimli kapı ise -1.0 *V* ile beslenmiştir. Burada kuantum nokta kontaklar arasındaki boşluk 50 nm dir.

Şekil 7.15 de görülen yapıda kuantum nokta kontakların gerilimi -0.3 *V* alındığında değişik manyetik alanlara göre sıkıştırılamaz şeritlerin yerleri ve

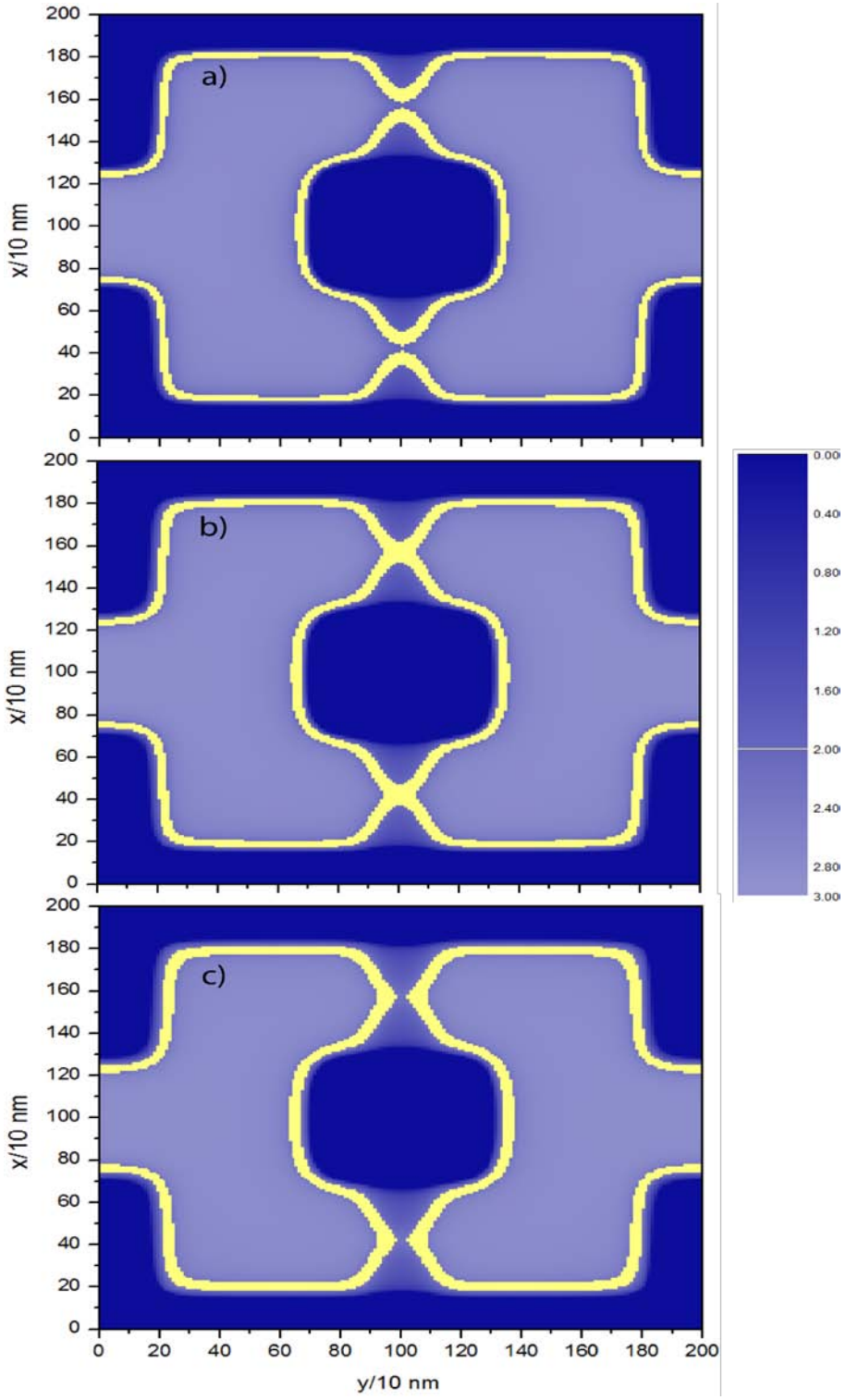
kalınlıkları Şekil 7.16 da görülmektedir. Burada manyetik alalnın 7.6 *T*, 8.1 *T* ve 8.7 *T* değerleri için doluluk çarpanı 2'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şeridin konumu ve kalınlığı kontur grafiği ile verilmektedir. Sarı renkli şerit tam olarak doluluk çarpanı 2' yi göstermektedir. Şekil 7.16a da görüldüğü gibi 7.6 *T* manyetik alan değerinde iki kenarda oluşan sıkıştırılamaz şeritler kuantum nokta kontak'ta birbirlerine temas etmemektedirler. Bunun en büyük nedeni kuantum nokta kontak kısmında iki sıkıştırılamaz şeridin arasına bir sıkıştırılabilir şeridin girmesidir. Yani kuantum nokta kontağın tam ortasında doluluk çarpanı 2' yi aşabilmektedir. Daha önce yaptığımız tartışmalarda olduğu gibi manyetik alan artıkça doluluk çarpanı 2' ye ulaşabilmek için daha çok elektron gerekir bu nedenle sıkıştırılamaz şerit daha çok elektronun olduğu orta kısımlara doğru kayar. Kuantum nokta kontakta da aynı durum görülür, manyetik alan yükselince kuantum nokta kontağın orta kısmında daha çok elektron olan bölüme doğru sıkıştırılamaz şerit kayar. Bu nedenlede Şekil 7.16b de görüldüğü gibi iki şerit birbiriyle temas eder. Genelde orta kısımlarda hem elektron yoğunluğu değişiminin hemde potansiyel değişiminin daha yavaş olması nedeniyle aynı zamanda sıkıştırılamaz şerit kalınlaşır. Fakat manyetik alanın daha fazla yükseltilmesiyle birlikte doluluk çarpanı 2'ye ulaşmak için gereken elektron sayısı o kadar artar ki kuantum nokta kontağın arasındaki elektron yoğunluğu hiç bir zaman birinci Landau seviyesini doldurmaya yetmez. Bu nedenle Şekil 7.16c de 8.7 *T* manyetik alana karşılık gelen elektron dağılım grafiğinde görüldüğü gibi doluluk çarpanı 2'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit kuantum nokta kontaktan geçemez. Şekil 7.16 da manyetik alan değeri 7.6 *T* değerine karşılık gelen grafikte görüldüğü gibi doluluk çarpanı 2'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit yapıyı akım yönü olan *y* doğrultusunda bir uçtan bir uca geçebildiğine göre sistem plato bölgesinde olmalıdır. Fakat kuantum nokta kontakta iki sıkıştırılamaz şerit birbirleriyle temas etmedikleri için girişim gözlenmesi mümkün değildir. Şekil 7.16b de 8.1 *T* manyetik alan değerine karşılık gelen elektron dağılımı grafiğinde sıkıştırılamaz şeritler yapıyı *y* doğrultusunda hem bir ucdan bir uca kat etmektedir hemde kuantum nokta kontaklar arasında birbirleriyle temas etmektedirler. Bundan ötürü böyle bir durumda girişimin rahat gözlenmesini bekleriz. Şekil 7.16c de manyetik alan 8.7 *T* değerine karşılık gelen grafikte ise sıkıştırılamaz şerit kuantum nokta kontaktan geçemediği için akım yönü olan *y* doğrultusunda boydan boya

katedebilen bir sıkıştırılamaz şerit mevcut değildir. Bu nedenle sistem artık plato bölgesinde olamaz. Zaten bu durumda akım sıkıştırılamaz şeritten sıkıştırılabilir şeride geçmek zorunda olacağı için saçılmalar çok artar ve girişim tamamıyla gözlenemez olur. Diğer bir husus ise girişimin rahat gözlenebildiği manyetik alan aralığın maksimum 1 *T* olmasıdır.

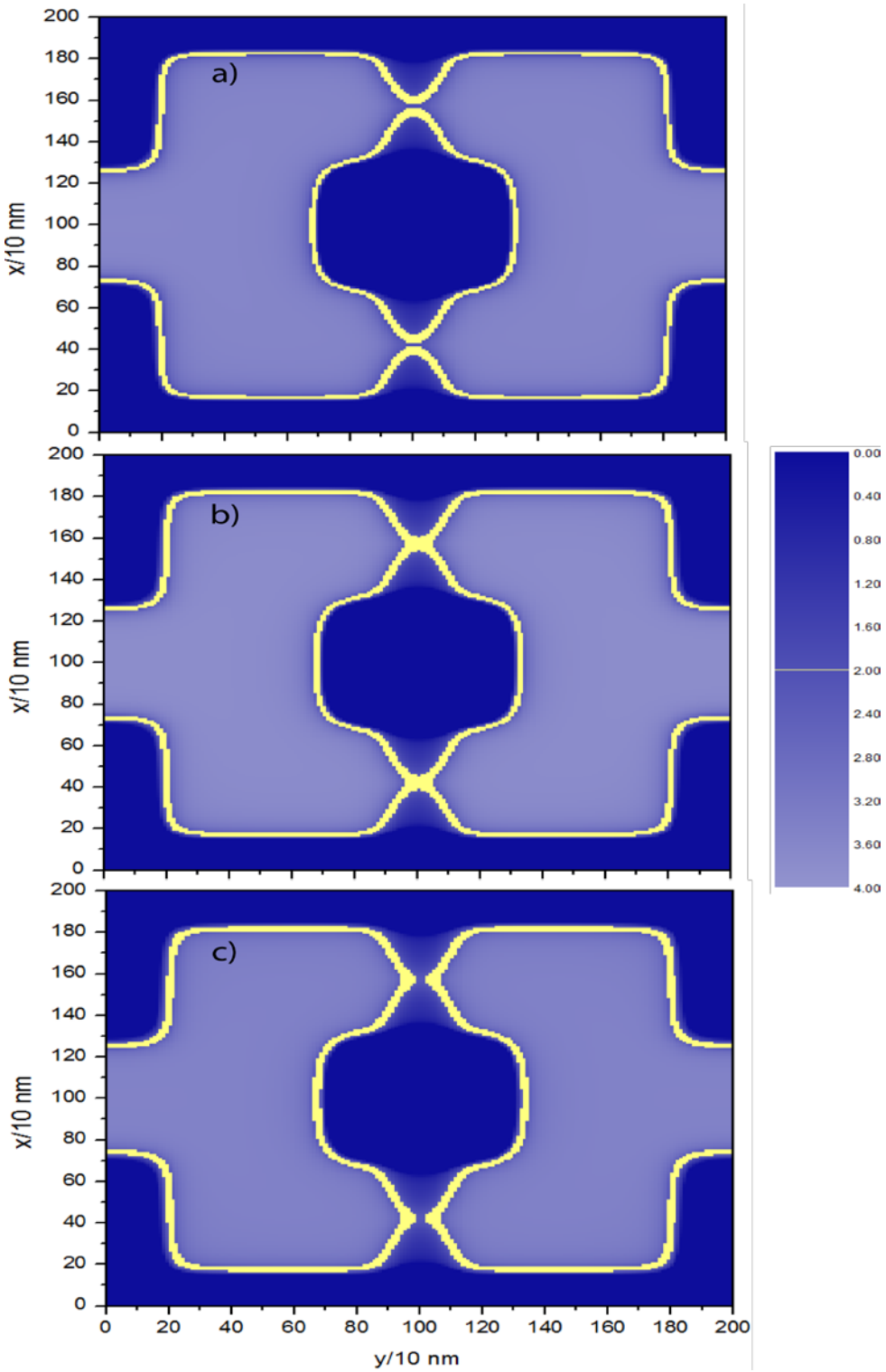
Şekil 7.17 de ise Şekil 7.15 de görülen kapı yapısında kuantum nokta kontaklara -0.5 *V* gerilim verilince oluşan elektron dağılımları görülmektedir. Şekil 7.17 de manyetik alan değerleri ise 6.1 *T*, 6.6 *T* ve 7.2 *T* dır. Şekil 7.17 de görülen sarı renkdeki şerit doluluk çarpanı 2 olan tam sayı değerinin olduğu yerleri göstermektedir. Şekil 7.17a daki grafikte görüldüğü gibi manyetik alan 6.1 *T* olduğunda bir önceki paragrafda yaptığımız tartışmaya paralel olarak doluluk çarpanı 2'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şeritler *y* doğrultusunda yapıyı boydan boya katetmelerine rağmen, kuantum nokta kontakta birbirleriyle aradaki yüksek elektron yoğunluğu yüzünden temas edememektedirler. Şekil 7.17b de görüldüğü gibi 6.6 *T* manyetik alan değerinde sıkıştırılamaz şeritler hem yapıyı *y* doğrultusunda boydan boya geçmekte hem de kuantum nokta kontaklarda birbirleriyle temas etmektedirler. Şekil 7.17c de elektron dağılımı grafiğinde ise manyetik alan değeri 7.2 *T* dır. Bu değerde ise kuantum nokta kontaklar arasındaki düşük elektron yoğunluğu yüzünden doluluk çarpanı 2'ye ait sıkıştırılamaz şerit kuantum nokta kontakları aşamamaktadır. Şekil 7.17 nin Şekil 7.16 dan en büyük farkı ise, aynı olayların daha düşük manyetik alanda gerçekleşiyor olmasıdır. Bunun nedeni ise kauntum nokta kontaklarda artırılan gerilimin, kuantum nokta kontağın arasındaki elektron yoğunluğunu düşürmesidir. Daha önceki tartışmalarımızda bahsettiğimiz gibi daha düşük elektron yoğunluğu yüzünden sıkıştırılamaz şeritlerin oluştuğu manyetik alan değeri de düşer. Böylelikle aynı manyetik alan değerinde elektron yoğunluğu düşünce o bölgedeki sıkıştırılamaz şerit kaybolur. Aynı bölgede tekrar sıkıştırılamaz şerit elde edebilmek için manyetik alan değerinin küçültülmesi gerekir. Burada da girişimin rahat gözlenebildiği manyetik alan bölgesinin genişliği yine yaklaşık 1 *T* civarındadır.

Şekil 7.18 de ise Şekil 7.15 de görülen kapı yapısında kuantum nokta kontaklara -0.7 *V* gerilim verilince oluşan elektron dağılımları görülmektedir. Şekilde

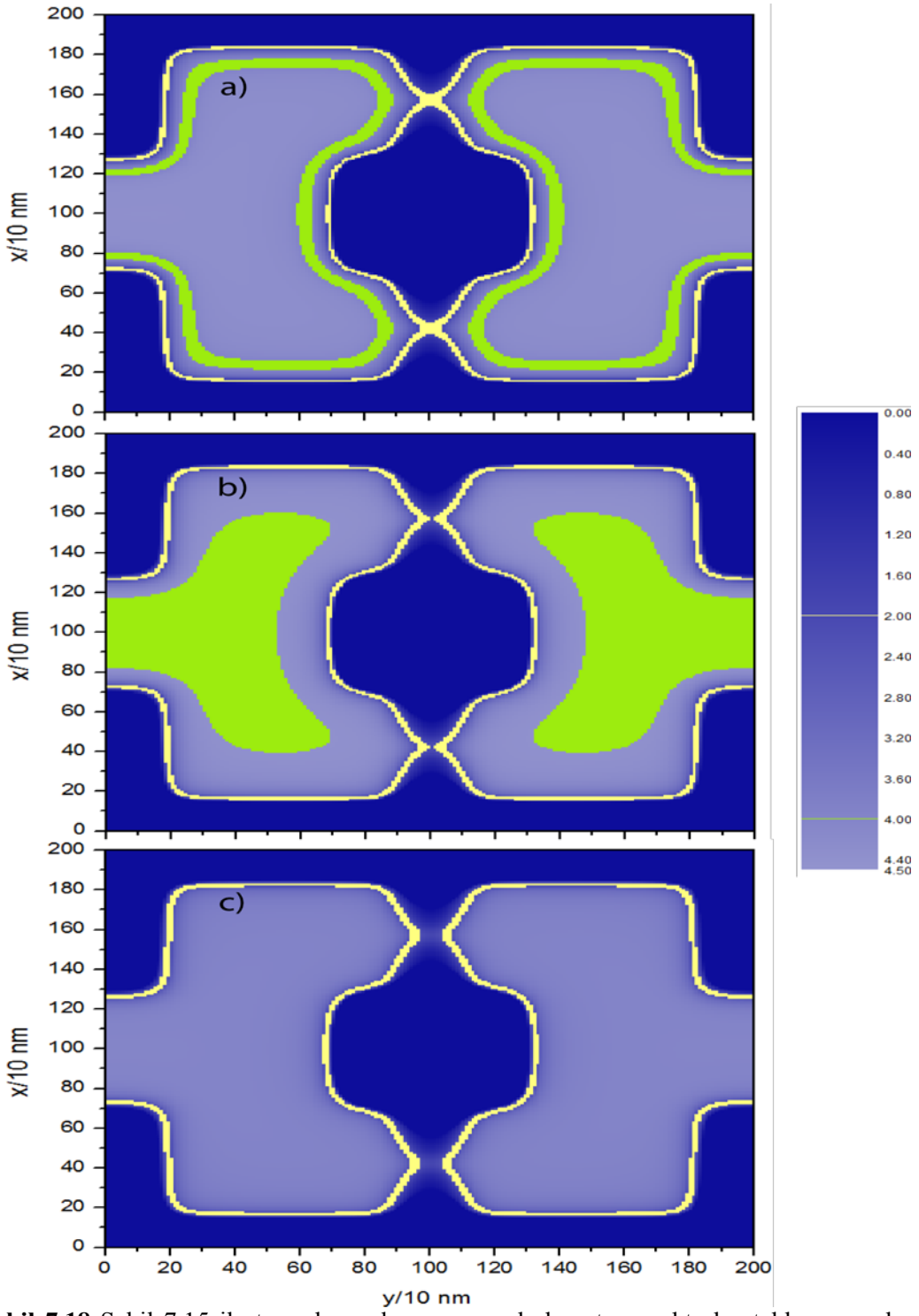
elektron dağılımlarının hesaplandığı manyetik alan değerleri ise 5.1 *T*, 5.5 *T* ve 6.3 *T* dır. Şekil 7.18 de doluluk çarpanının 2 tam sayı değerine karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit açık sarı renk ile 4 tam sayı değerine karşılık gelen sıkıştırılamaz şerit ise açık yeşil renk ile vurgulanmıştır. Bir önceki paragrafta tartıştığımız etkiler burada artarak devam etmektedir. Yalnız kapı geriliminin daha fazla artırılması yüzünden aradaki elektron yoğunluğu çok fazla düşmüştür. Bu durumda Şekil 7.18 de net bir biçimde gözlendiği gibi artık doluluk çarpanı 2'ye ait sıkıştırılamaz şeridin kuantum nokta kontaktan geçebilmesi için gerekli olan manyetik alan değerinde oluşan sıkıştırılamaz şeritler, gözlenebilmeleri için gerekli olan kalınlıkları en az yaklaşık 10 nm olması gerekliliğinin altına düşerek ortadan kalkarlar. Böylelikle sistem plato bölgesinden çıkmış olur. Böyle bir sistemde hiç bir manyetik alanda neredeyse girişimi gözlemek mümkün değildir. Şekil 7.18 de bu durum açıkça görülmektedir. Şekil 7.18c de manyetik alan değeri 6.3 *T* değerinde tam sayı 2 değerine ait sıkıştırılamaz şerit kuantum nokta kontaktan geçememektedir. Girişimin gözlenebilmesi adına Şekil 7.18b de görüldüğü gibi manyetik alan değeri 5.5 *T* değerine düşürülmesine rağmen doluluk çarpanı 2'ye ait şerit halen kuantum nokta kontaklardan geçememektedir. Üstelik yapının orta kısmında doluluk çarpanı 4'e ait sıkıştırılamaz şerit ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu da grafikte görülen 2'ye ait sıkıştılamaz şeridin varlığını tartışılır hale getirir. Daha önce bahsettiğimiz gibi Thomas-Fermi ile yapılan hesaplamalarda elektron dalga fonksiyonları dirac delta fonksiyonu şeklinde kabul edildiği için elektron dalga fonksiyonlarının üst üste binmesi göz önüne alınamamakta bu da ortadan kalkması gerekli olan daralmış sıkıştırılamaz şeritlerin halen hesaplamalarda ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu durum tamamen Thomas-Fermi yaklaşımının bir zayıf yönü olarak ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Şekil 7.18a da manyetik alan 5.1 *T* değerinde doluluk çarpanı 2'ye ait sıkıştırılamaz şeritlerin kuantum nokta kontak içerisinde temas ettikleri gözükse de doluluk çarpanı 4'e ait sıkıştırılamaz şeritlerin bile yeterince inceldiği böyle bir manyetik alan değerinde doluluk çarpanı 2'ye ait çok ince sıkıştırılamaz şeritlerin artık var olmadığı rahatlıkla söylenebilir. Bundan dolayı da kuantum nokta kontaklar arası mesafe 50 *nm* iken kontaklara -0.7 *V* ve üstü gerilim uygulandığında böyle bir yapıda asla girişimin gözlenemiyeceğini söylemenin pek hatalı olmayacağını düşünmekteyiz.



Şekil 7.16 Şekil 7.15 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.3 *V* iken (a) 7.6 *T*, (b) 8.1 *T* ve (c) 8.7 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.

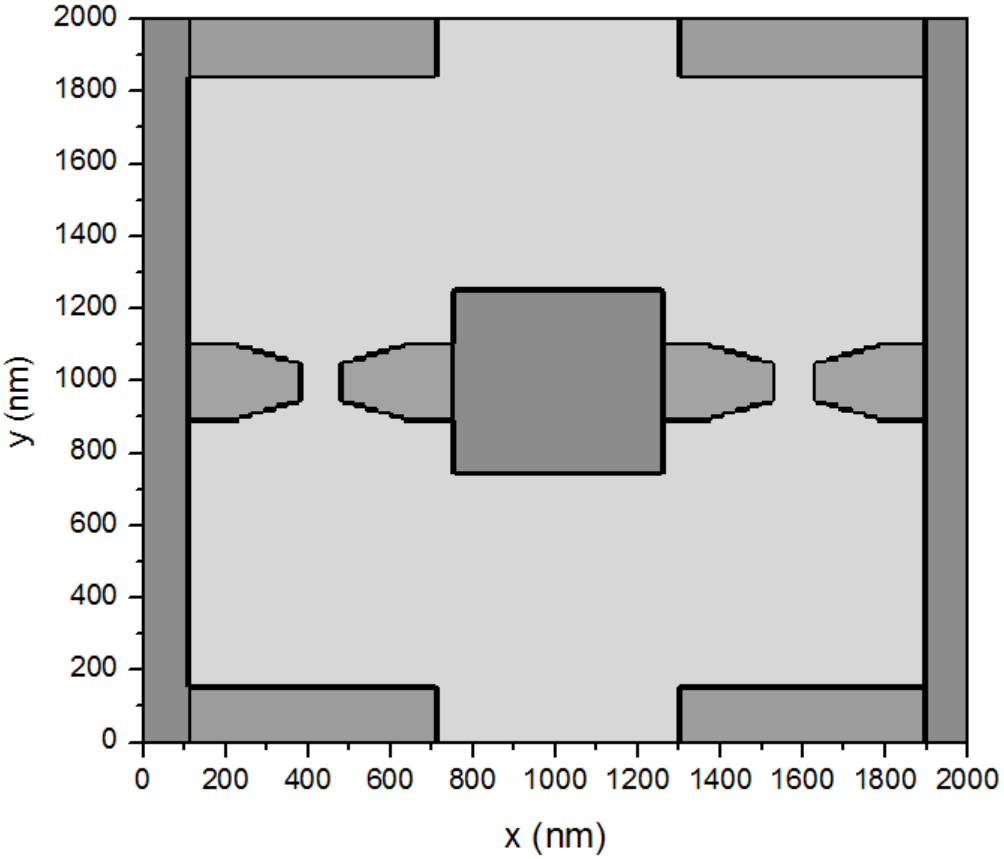


Şekil 7.17 Şekil 7.15 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.5 *V* iken (a) 6.1 *T*, (b) 6.6 *T* ve (c) 7.2 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.



Şekil 7.18 Şekil 7.15 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.7 *V* iken (a) 5.1 *T*, (b) 5.5 *T* ve (c) 6.3 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.

Şekil 7.19 da kuantum nokta kapıların arasındaki boşluğun 100 nm olduğu kapı şeması gösterilmektedir. Bu kapı yapısında da kuantum nokta kontakların gerilimleri ve farklı manyetik alan değerlerinde sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları ve konumları incelenmiştir.



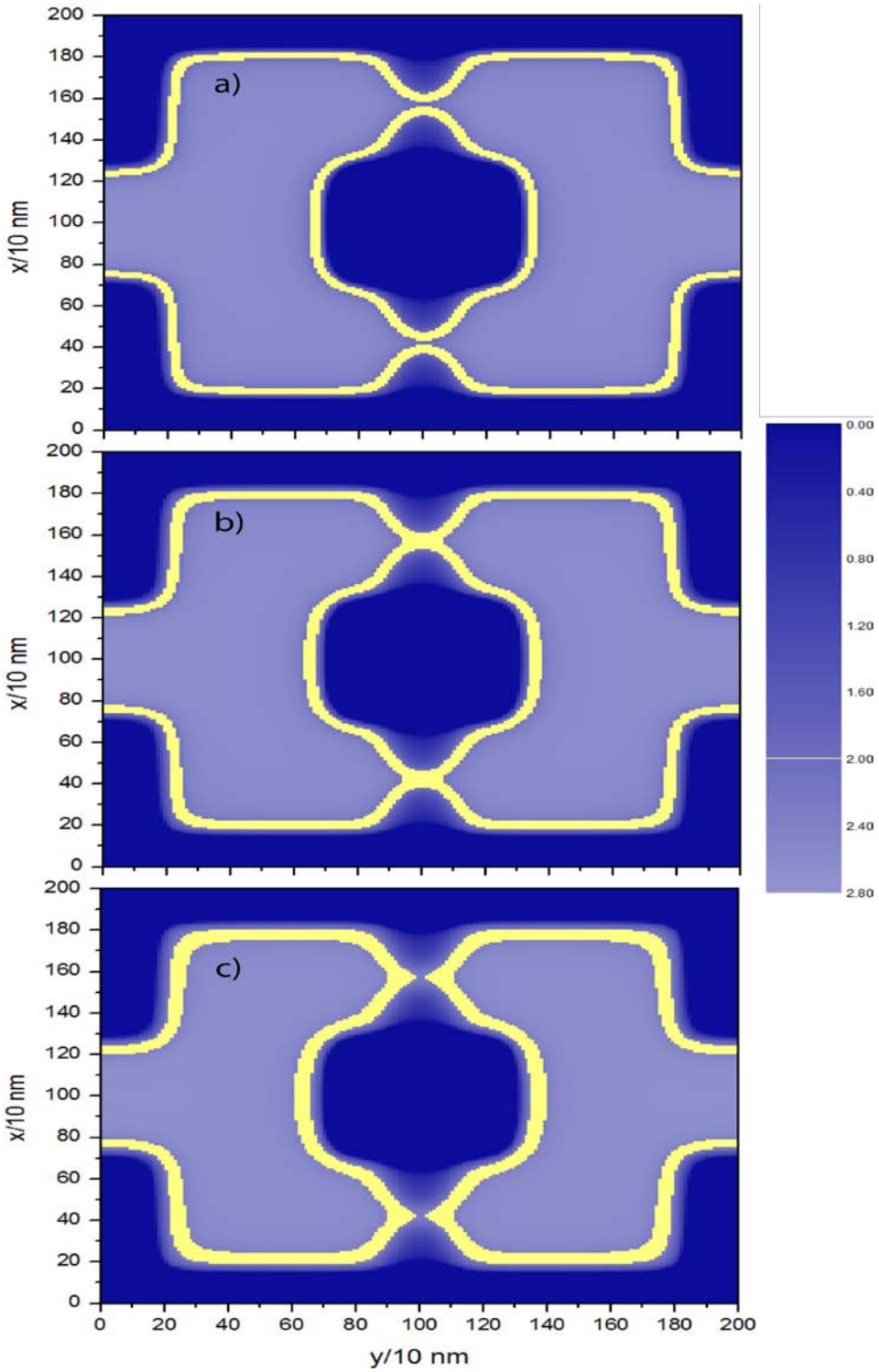
Şekil 7.19 *MZI* kapı yapısının şeması. Şemanın sağında ve solunda *y* doğrultusu boyunca uzanan ve ortadaki kare şeklindeki kapılar -1.5 *V* ile beslenmiştir. Diğer dört adet diktörgen biçimli kapı ise -1.0 *V* ile beslenmiştir. Burada kuantum nokta kontaklar arasındaki boşluk 100 nm dir.

Kuantum nokta kontakların kapı gerilimleri -0.5 volt olduğu durumda elde ettiğimiz elektron dağılımı Şekil 7.20 de gösterilmektedir. Bu şekilde manyetik alan değerleri 8.2 *T*, 8.8 *T* ve 9.4 *T* dır. İlk manyetik alan değerinde Şekil 7.20a da görüldüğü gibi yapının *y* doğrultusu boyunca uzanan sıkıştırılamaz şeritler kuantum nokta kontak içinde birbirleriyle temas edememektedirler. Şekil 7.20b de görüldüğü gibi 8.8 *T* değrinde ise boydan boya oluşan sıkıştırılamaz şeritler bir birleriyle temas etmektedirler. Bu durum ise girişimin gözlenebilirliği adına istenen bir durumdur.

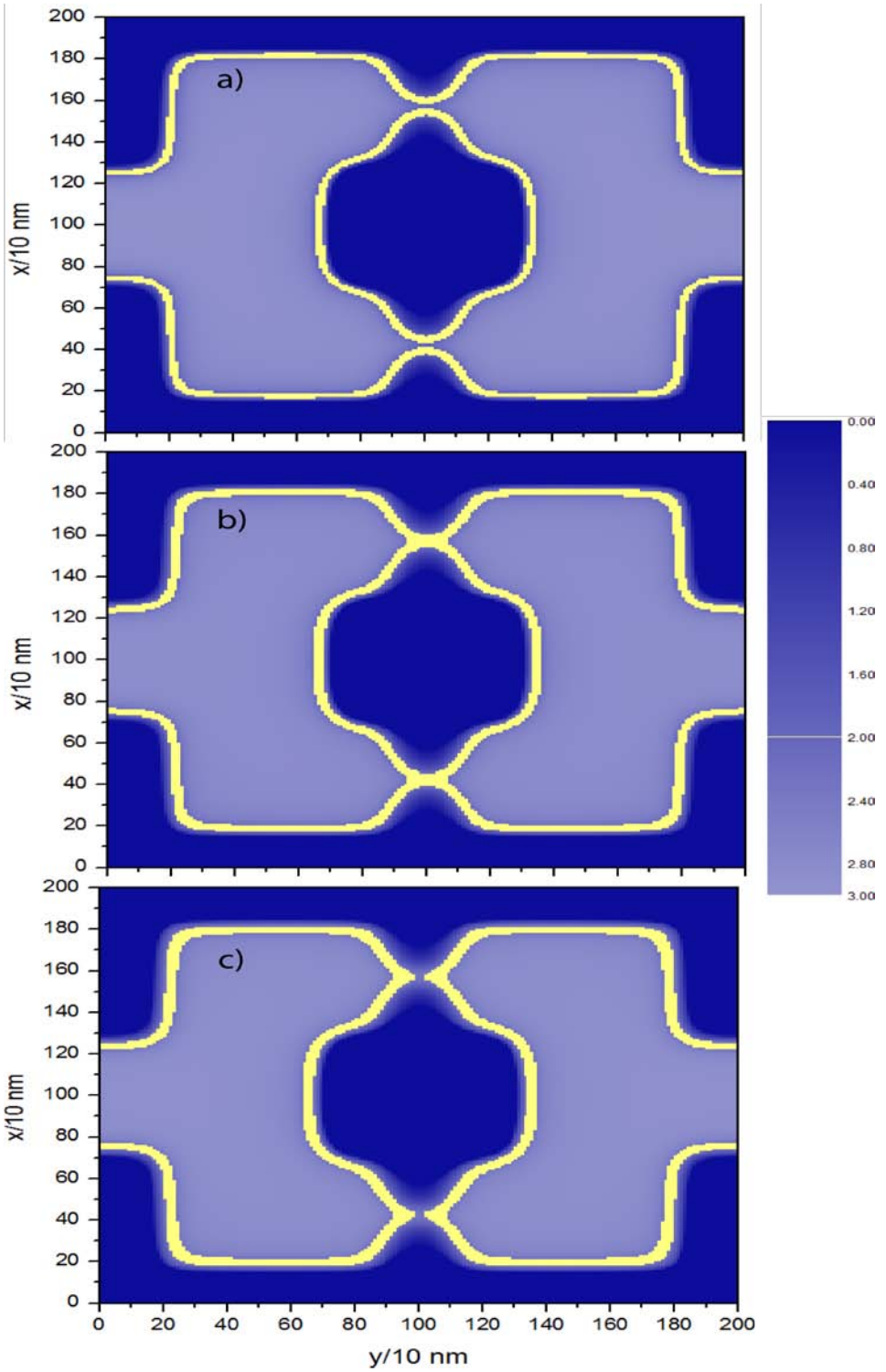
Şekil 7.20c de görüldüğü gibi 9.4 *T* değerinde ise sıkıştırılamaz şerit kuantum nokta kontağı geçememektedir. Kuantum nokta kontaklar arası mesafenin 50 nm olduğu ve kuantum nokta gerilimlerinin -0.5 *V* olduğu Şekil 7.17 ile Şekil 7.20 arasındaki fark ise aynı olayların daha yüksek manyetik alanlarda gerçekleşiyor olmasıdır. Bunun en büyük nedeni ise kuantum nokta kontaktalar arası mesafe açıldıkça aynı kapı gerilimi altında o bölgeye daha fazla elektron nüfuz ediyor. Bu nedenle o bölgede sıkıştırılamaz şeritlerin gözlenebilmesi için daha büyük bir manyetik alana ihtiyaç duyulur.

Şekil 7.19 ile verilen kapı şemasında kuantum nokta yapılara -0.7 *V* gerilim verdiğimizde ise manyetik alanın 7.6, 8.3 ve 8.8 *T* değerlerinde elde ettiğimiz elektron dağılımı Şekil 7.21 de gösterilmektedir. Şekil 7.21a da görüldüğü gibi 7.6 *T* manyetik alan değerinde sıkıştırılamaz şeritler kuantum nokta kontaklar içinde birbirleriyle temas etmemektedirler. Yani sistem plato bölgesinde olmasına rağmen girişimin gözlenebilirliğinin yüksek olmasını beklemek yanlış olur. 8.3 *T* manyetik alan değerinde (Şekil 7.21b) ise istenildiği gibi sıkıştırılamaz şeritler birbirleriyle temas etmektedirler. 8.8 *T* manyetik alan değerinde (Şekil 7.21c) ise sıkıştırılamaz şeritler kuantum nokta yapıların orta kısmından geçememektedir. Böyelce sistem plato bölgesini terketmiş olur. Yine beklendiği gibi kapı geriliminin artması kuantum nokta kontak arasındaki elektron yoğunluğunu düşürdüğü için aynı olaylar bir önceki duruma göre daha düşük manyetik alan değerlerinde gerçekleşmektedir.

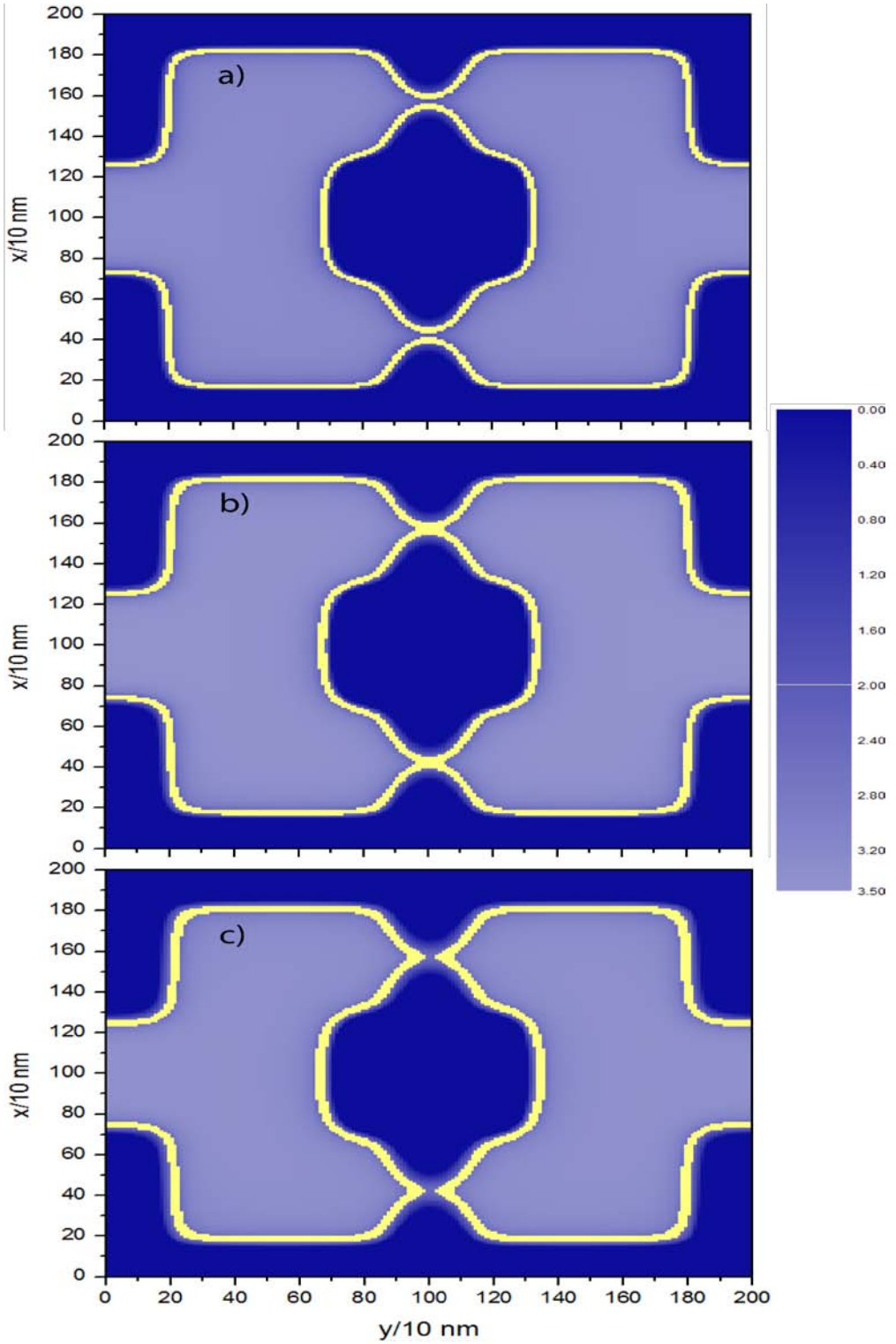
Şekil 7.19 da gösterilen kapı şemasında en son olarak kuantum nokta kontaklara verilen gerilim -0.9 *V* alınmıştır. Manyetik alan değerleri de buna bağlı olarak 6.8 *T*, 7.5 *T* ve 8.2 *T* alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 7.22 de gösterilmektedir. Şekil 7.22 de görüldüğü gibi girişimin gözlenebilirliğinin en yüksek olacağı manyetik alan değeri 7.5 *T* civarıdır. Manyetik alanın 6.8 *T* ve 8.2 *T* değerlerinde daha önce yaptığımız tartışmalar ışığında girişimin gözlenebilirliğinin yüksek olmasını beklemek hata olur. Bütün bu sonuçlardan görüldüğü üzere kuantum nokta kontak arasındaki mesafeyi artırmak girişimin gözlenebilirliğinin en yüksek olduğu manyetik alan değerini yukarı doğru çekerken kuantum nokta kontağa uygulanan kapı gerilimin artımak ise tam ters bir etki yapmaktadır.



Şekil 7.20 Şekil 7.19 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.5 *V* iken (a) 8.2 *T*, (b) 8.8 *T* ve (c) 9.4 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.

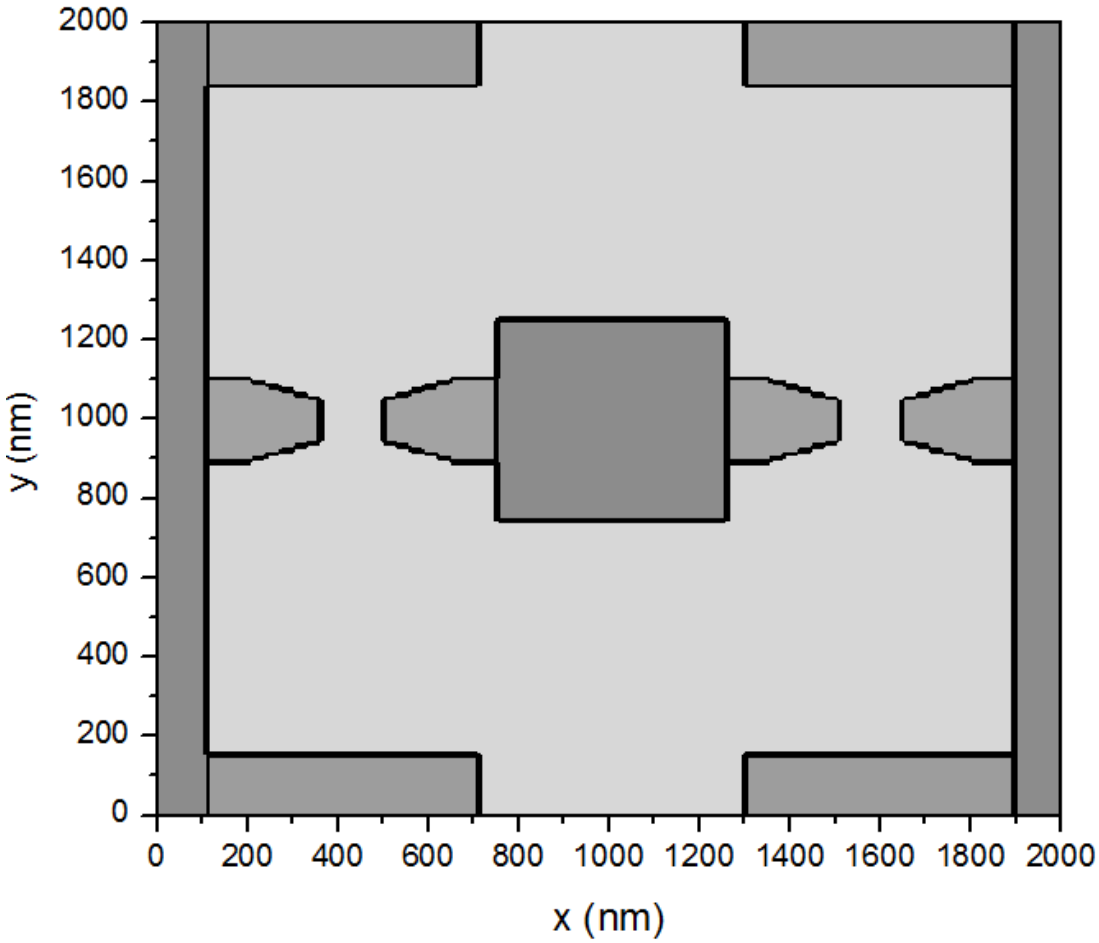


Şekil 7.21 Şekil 7.19 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.7 *V* iken (a) 7.6 *T*, (b) 8.3 *T* ve (c) 8.8 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.



Şekil 7.22 Şekil 7.19 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.9 *V* iken (a) 6.8 *T*, (b) 7.5 *T* ve (c) 8.2 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.

Şekil 7.23 de kuantum nokta kapıların arasındaki boşluğun 150 nm olduğu kapı şeması gösterilmektedir. Bu kapı yapısında da son kez kuantum nokta kontakların gerilimleri ve farklı manyetik alan değerlerinde sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları ve konumları incelenmiştir.



Şekil 7.23 MZI kapı yapısının şeması. Şemanın sağında ve solunda *y* doğrultusu boyunca uzanan ve ortadaki kare şeklindeki kapılar -1.5 *V* ile beslenmiştir. Diğer dört adet diktörgen biçimli kapı ise -1.0 *V* ile beslenmiştir. Burada kuantum nokta kontaklar arasındaki boşluk 150 nm dir.

Şekil 7.24 de, Şekil 7.23 de gösterilen kapı şemasında kuantum nokta kontaklar üzerine -0.5 *V* gerilim uygulandığında, elde edilen iki boyutlu elektron dağılımının sonuçları manyetik alanın 9.0 *T*, 9.5 *T* ve 10.1 *T* değerleri için verilmiştir. Kuantum nokta kontaklar arasındaki mesafe arttıkça ara bölgeye giren elektron sayısının artmasıyla orantılı olarak girişimin gözlenebildiği manyetik alan değerleri de artmaktadır. Burada ikinci kısımda Mach-Zehnder interferometresi için

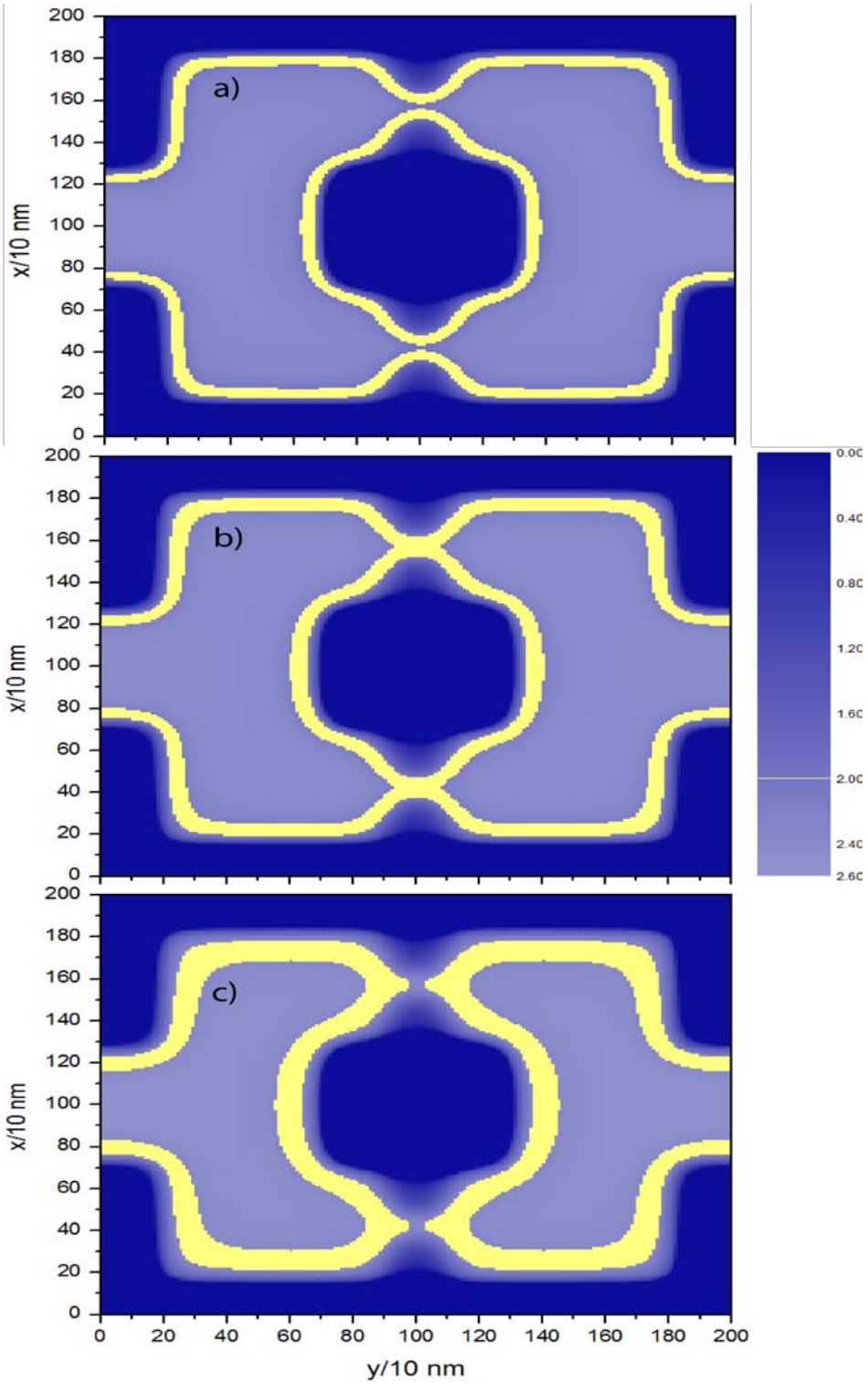
yaptığımız bütün hesaplamalarda ortalama elektron yoğunluğunu ve donor yoğunluğunu $\bar{n}_e = n_d = 3.0 \times 10^{11}\ cm^{-2}$ de sabit aldık. Daha önce kuantum Hall çubuğunda yaptığımız tartışmalarda sabit elektron sayısına karşın yüksek manyetik alan değerlerine gitmek sıkıştırılamaz şeritleri konum olarak yapının ortasına doğru itip kalınlıklarını da artırmaktaydı. Aynı etkiyi burada da rahatlıkla görebiliyoruz.

Şekil 7.25 de Şekil 7.23 de gösterilen kapı geometrisinde kuantum nokta kontaklara uygulanan gerilimi -0.7 V alınca değişik mayetik alanlara karşın elde edilen iki boyutlu elektron dağılımının kontur grafiği verilmektedir. Şekil 7.25 de ise manyetik alanın 8.7 *T*, 9.3 *T* ve 9.9 *T* değerleri için elektron dağılımı verilmektedir. Elde edilen sonuçlar girişimin gözlenebilirliğinin yüksek olabileceği manyetik alan aralığının yaklaşık 8.8 *T* ile 9.8 *T* arasında olabileceğini göstermektedir. Yine aynı kuantum nokta kontak gerilimi altında önceki grafiklerdeki 50 ve 100 nm kontak aralıklı numulelerdeki sonuçlarla karşılaştırma yaparsak, kontakların arasının açılmasının, girişimin görünürlüğünü daha yüksek manyetik alanlarda nasıl daha iyi hale getirdiği rahatlıkla görülebilir.

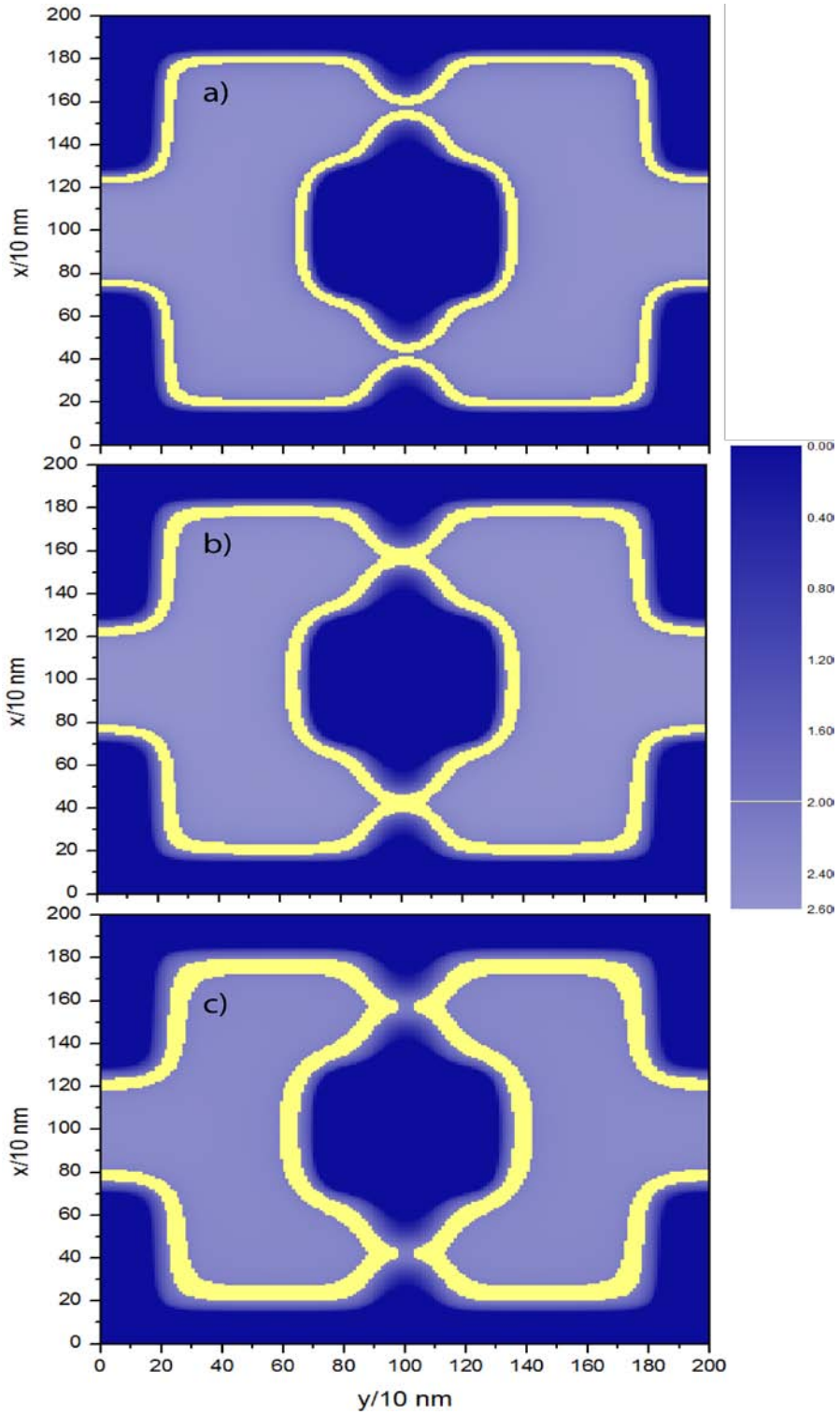
En son olarak ise Şekil 7.23 deki kuantum nokta kontakların gerilimi -0.9 *V* alındığında 8.3 *T*, 8.9 *T* ve 9.6 *T* manyetik alan değerleri için elektron dağılımının ve doluluk çarpanı 2'ye karşılık gelen sıkıştırılamaz şeritin konumu ve kalınlığının *2BEG*'nın olduğu düzlemde konuma göre nasıl değiştikleri Şekil 7.26 da verilmektedir. Şekik 7.26 ile Şekil 7.25'in bir karşılaştırılmasıyla daha önce yaptığımız bütün tartışmalar ışığında gerilimi artırmanın kuantum nokta kontak arasındaki elektron yoğunluğunu düşürmesi nedeniyle girişimin en iyi gözelenebileceği manyetik alan değerinin azaldığını rahatlıkla görebilmekteyiz. Ayrıca Şekil 7.22 de -0.9 *V* gerilimi altında 100 *nm* kapı aralığına karşılık Şekil 7.26 da aynı kapı gerliminde kapı aralığı 150 *nm* yapıldığında elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında kapı aralığının genişlemesinin kuantum nokta kontak arasındaki elektron yoğunluğunu artırdığını ve bu nedenle girişimin gözlenebilirliğinin en yüksek olmasını beklediğimiz manyetik alan değerinin buna bağlı olarak arttığını gözlemlemekteyiz. En son olarak ise Şekil 7.16 da -0.3 *V* kapı gerlimi ve 50 *nm* kapı aralığı için elde edilen sonuçlar ile Şekil 7.26 daki sonuçları karşılaştırdığımızda ise,

kapı gerilimi Şekil 7.26 da üç kat artırılmasına ve aynı ölçekte kapı aralığınında üç kat artırılmasına rağmen girişimin gözlenebilirliğinin maksimum olduğu manyetik alan değeri Şekil 7.16 da 8.1 *T* iken Şekil 7.26 da bu değerin 8.9 *T* olduğunu görmekteyiz. Yani kapı aralığını da üzerine etkiyen gerilimi de üç kat artırmamıza rağmen girişimin gözlenebilirliğinin maksimum olduğu manyetik alan değeri yukarı yönde kaymıştır. Bu bize kapı genişliğinin *2BEG*'na doğrudan etkisinin kapı geriliminden daha çok olduğunu göstermektedir. Bunun en büyük nedeni de kapı aralığını üç kat artırmak için daha küçük kapılar kullanılmak zorunda kaldığı için bu kapıların aşağıda *2BEG* nın olduğu bölgede oluşturacağı etkin sınırlandırıcı etkinin daha fazla düşmesine neden olmasıdır. Yani kapılar daha küçük olduklarından her iki kapı türünede aynı gerilim verilmiş olsa dahi kapı aralığı dar olan yapıda kapı aralığı geniş olan yapıya göre daha büyük bir yüzeyi kaplayan kapılar kullanılmak zorunda kalındığı için *2BEG* nın olduğu bölgedeki sınırlayıcı etkisi daha kuvvetli olacaktır. Aynı etki, malzemenin yüzeyindeki kapıların, *2BEG* nın olduğu bölgedeki sınırlandırıcı etkisini veren Davies'ın elde ettiği Denk. (4.2)'den de açıkça görülebilmektedir.

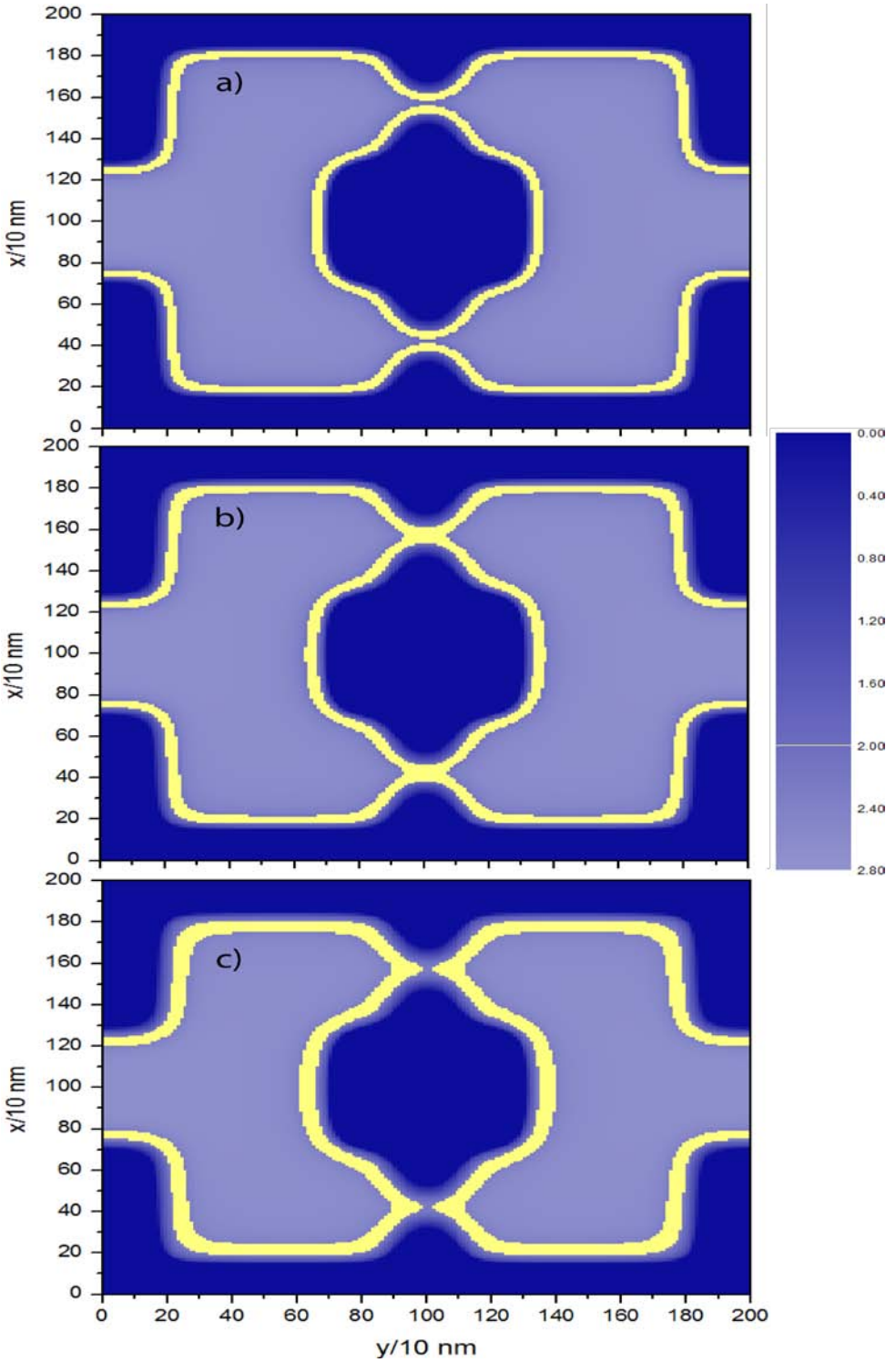
Biz bu çalışmada üç boyutlu Poisson denkleminin çözümünün *2BEG*'nın dağılımı elde edilirken problemin her aşamasında çözülmesi gerekliliğine inanıyoruz. Çünkü her sıcaklık ve manyetik alan değerinde değişen elektron dağılımına karşılık, kapı üzerindeki yüklerin konumları ve miktarı kapı gerilimini sabit tutabilmek adına değişecektir. Bu değişimin Davies'in 1994'de ortaya attığı *Donmuş Kapı (Frozen Gate) modeli* ile hesaba katmadığını biliyoruz. Çünkü Davies bu modelde kapıların *2BEG* nın olduğu bölgedeki etkisini bir kere hesaplayıp daha sonra kapılar üzerindeki yüklerin donmuş olarak kabul ederek, yani aşağıdaki *2BEG* nın olduğu bölgedeki elektron hareketlerine tepkisiz olarak kabul ederek, bu sınırlandırıcı potansiyeli bir daha değiştirmiyor. Biz ise bütün adımlarda üç boyutlu Poisson denklemini çözerek her adımda elektron gazındaki değişimler yüzünden, malzemenin yüzeyindeki kapıların değişen potansiyel etkisini hesaba katmaktayız. Şu ana kadar bu konuda yapılan çalışmalarda üç boyutlu Poisson denkleminin her adımda sayısal olarak çözüldüğü bir çalışma mevcut değildir. Bu açıdan bu çalışma literatür de bir ilk özelliği taşımaktadır.



Şekil 7.24 Şekil 7.23 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.5 *V* iken (a) 9.0 *T*, (b) 9.5 *T* ve (c) 10.1 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.



Şekil 7.25 Şekil 7.23 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.7 *V* iken (a) 8.7 *T*, (b) 9.3 *T* ve (c) 9.9 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.



Şekil 7.26 Şekil 7.23 ile tanımlanan kapı yapısında kauntum nokta kontaklara uygulanan gerilim -0.9 *V* iken (a) 8.3 *T*, (b) 8.9 *T* ve (c) 9.6 *T* manyetik alan değerlerinde renk ile kodlanmış iki boyutta elde edilen doluluk çarpanına göre elektron dağılımı. Şeklin sağında doluluk çarpanı için kullanılan renk skalası gösterilmiştir.

En son olarak bu çalışmayı özetlememiz gerekirse, çalışma boyunca düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan altında *2BEG*'nın elektron dağılımını ve buna karşılık gelen perdelenmiş potansiyelini, 3 boyutlu Poisson denklemi ve Thomas-Fermi denklemlerinin öz-uyumlu olarak çözülmesi ile elde edilmiştir. Çalışmanın sadece bir kısmında üç boyutlu Poisson denkleminin çözümü için Green fonksiyonları ve Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Kuantum hall çubuğunda sıkıştırılamaz şeritlerin oluşumunu ve oluşan şeritlerin konumunu ve kalınlığını incelemek için birçok hesap yapılmıştır. Bu hesaplamlarda sıkıştırılamaz şeritlerin özelliklerinin sıcaklığa, manyetik alana, ortalama elektron yoğunluğuna, kapı geometrisine ve kapılar üzerindeki gerilime olan bağımlılığına bakılmıştır. Ayrıca elektronik girişim olaylarının ve koherent (eş fazlı) süreçlerin incelendiği kuantum Hall olayı temelli Mach-Zehnder interferometresi hem Green fonksiyonları ve Fourier dönüşümleri yöntemiyle hem de üç boyutlu Poisson denklemini direk sayısal olarak her adımda çözdüğümüz yöntemimizle inceledik. Her iki incelemede de girişim olayının gözlenebilirliğinin manyetik alana olan bağımlılığına baktık. Ayrıca üç boyutlu Poisson denklemini direk sayısal olarak çözdüğümüz hesaplamalarla aynı girişim olayının kapı geometrisine ve kuantum nokta kontaklardaki gerilim etkilerine baktık. Elde ettiğimiz tüm bu sonuçlar genel itibari ile şimdiye kadar yapılan teorik ve deneysel çalışmalar ile uyum içerisindedir (Chklovskii ve ark. 1992; Chklovskii ve ark. 1993; Lier ve Gerhardts 1994; Oh ve Gerhardts 1997; Weitz ve ark. 2000; Ahlswede ve ark. 2001; Güven ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2003; Siddiki ve Gerhardts 2004).

Sonuç olarak yaptığımız bu çalışmanın gelecek dönemlerde yapılabilecek birçok teorik çalışmanın yanında deneysel çalışmalara da ışık tutabileceğine inanıyoruz.

KAYNAKLAR

Ahlswede, E., Weitz, P., Weis, J., Klitzing, K. v., ve Eberl, K., 2001. Hall potential profiles in the quantum Hall regime measured by a scanning force microscope. Physica B: Condensed Matter 298: 562.

Arslan, S., Cicek, E., Eksi, D., Aktas, S., Weichselbaum, A., ve Siddiki, A., 2008. Modeling of quantum point contacts in high magnetic fields and with current bias outside the linear response regime. Physical Review B 78: 125423.

Ashcroft, N. W. Ve Mermin, N. D. 1976. Solid State Physics. Harcourt College Publishers, Forth Worth.

Bachmair, H., Göbel, E. O., Hein, G., Melcher, J., Schumacher, B., Schurr, J., Schweitzer, L., ve Warnecke, P., 2003. The von Klitzingresistance Standard. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures 20: 14.

Beenakker, C. W. J. 1990. Edge channels for the fractional qantum Hall effect. Physical Review Letters 64**:** 216.

Burden R. L., ve Faires, J. D., 2001. Numerical Analysis. Brooks/Cole Thomson Learnng, California.

Büttiker, M. 1988. Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors. Physical Review B 38: 9375.

Chapra, S. C., Canale, R. P. 2002. Numerical Methods for Engineers : With Software and Programming Applications. McGraw-Hill, Boston.

Chklovskii, D. B., Matveev, K. A., ve Shklovskii, B. I., 1993. Ballistic conductance of interacting electrons in the quantum Hall regime. Physical Review B 47: 12605.

Chklovskii, D. B., Shklovskii, B. I., ve Glazman, L. I., 1992. Electrostatic of edge channels. Physical Review B 46: 4026.

Davies, J. H. 2000. The physics of low-dimensional semiconductors: An introduction. Cambridge University Press, New York.

Davies, J. H. ve Larkin I. A. 1994. Theory of potential modulation in lateral surface superlattices. Physical Review B 49: 4800.

Davies, J. H., 1988. Electronic states in narrow semiconducting wires near threshold. Semiconductor Science and Technology 3: 995.

Davies, J. H., Larkin I. A., ve Sukhoruvkov E. V., 1995. Modeling the patterned two-dimensional electron gas: Electrostatics. Journal of Applied Physics 77: 4504.

Drude, P. 1900[a]. Zur elektronentheorie der metalle. Annalen der Physik 306: 566.

Drude, P. 1900[b]. Zur elektronentheorie der metalle; II. Teil. Galvanomagnetische und thermomagnetische effecte. Annalen der Physik 308 : 369.

Du, R. R. Stormer, H. L., Tsui, Pfeiffer, L. N. ve West, K. W. 1993. Experimental evidence for new particles in the fractional quantum Hall effect. Physics Review Letters 70: 2944.

Englert, T. ve Klitzing K. v. 1978. Analysis of ρ_{xx} minima in surface quantum oscillations on (100) n-type silicon inversion layers. Surface Science 73: 70.

Fermi,E. 1927. Rend. Accad. Naz. Lincei 6: 602.

Fiori, G., Iannaccone G., ve Macucci, M., 2002. Modeling of shallow quantum point contacts defined on AlGaAs/GaAs heterostructures: The effect of surface states. Journal of Computational Electronics 1: 39.

Fowler, A. B., Fang, F. F., Howard, W. E. ve Stiles, P. J. 1966. Magneto-oscillatory conductance in silicon surfaces. Physical Review Letters 16: 901.

Glazman, L. I., ve Larkin, I. A., 1991. Lateral position control of an electron channel in a split-gate device. Semiconductor Science and Technology 6: 32.

Güven, K., ve Gerhardts, R. R., 2003. Self-consistent local equilibrium model for density profile and distribution of dissipative currents in a Hall bar under strong magnetic fields. Physical Review B 67: 115327.

Hall, E. H. 1879. On a new action of the magnet on a electric currents. American Journal of Mathematics 2: 287.

Halperin, B. I. 1982. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimenisonal disordered potential. Physical Review B 25**:** 2185.

Hartland A 1992. The quantum Hall effect and resistance standards. Metrologia 29**:** 175.

Heinonen, O. ve Taylor, P. L. 1985. Current distributions in the quantum Hall effect. Physical Review B 32**:** 633.

Horas, J., Siddiki, A., Moser, J., Wegscheider, W., ve Ludwig, S., 2008. Investigations on unconventional aspects in the quantum Hall regime of narrow gate defined channels. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures 40: 1130.

Ihnatsenka, S., ve Zozoulenko, I. V., 2006[a]. Spin polarization of edge states and the magnetosubband structure in quantum wires. Physical Review B 73: 075331.

Ihnatsenka, S., ve Zozoulenko, I. V., 2006[b]. Quenching of compressible edge states arounda antidots. Physical Review B 74: 201303.

Ihnatsenka, S., ve Zozoulenko, I. V., 2008[a]. Interacting electrons in the Aharonov-Bohm interferometer. Physical Review B 77: 235304.

Ihnatsenka, S., ve Zozoulenko, I. V., 2008[b]. Magnetoconductance of interacting electrons in quantum wires: Spin density functional theory study. Physical Review B 78: 035340.

Jackson, J. D. 1999. Classical Electrodynamics. John & Wiley Sons, Third Edition.

Jain, J. K. ve Kivelson, S. A. 1988. Quantum Hall effect in quasi one-dimensional systems: resistance fluctuations and breakdown. Physical Review Letters 60**:** 1542.

Jeckelmann B. ve Jeanneret B. 2001. The quantum Hall effect as an electrical resistance standard. Reports on Progress in Physics 64: 1603.

Ji, Y., Chung, Y., Sprinzak, D., Heiblum, M., Mahalu, D., ve Shtrikman, H., 2003. An electronic Mach–Zehnder interferometer. Nature 422: 415.

Kawaji, S., Igarashi, T. ve Wakabayashi, J. 1975. Quantum galvanometric effect in *n*-channel silicon inversion layers under strong magnetic fields. Progress of Theoretical Physics Supplement 57**:** 176.

Kim, K.-D., ve Won, T.-Y., 2005. 2D quantum mechanical device modeling and simulation: Centre-channel (CC) and double-gate (DG) mosfet. Molecular Simulation 31: 825.

Klitzing, K. v. 1986. The Quantized Hall Effect. Reviews of Modern Physics 58: 519.

Klitzing, K. v., Dorda, G., ve Pepper, M. 1980. New method for hih-accracy determination of he fine-structure constant based on quantized hall resistance. Physical Review Letters 45: 494.

Lai, M. C., Li, Z. Ve Lin, X., 2006. Fast solvers for 3D Poisson equations involving interfaces in a finite or the infinite domain. Journal of Computational and Applied Mathematics 191: 106.

Landau, L. D. ve Lifshitz, E. M. 1991. Course of Theoretical Physics Volume 3 Quantum Mechanics. Pergamon Press, Oxford.

Landauer, R. 1957. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metalliv condition. IBM Journal of Research and Development 1: 223.

Landauer, R. 1970. Electrical resistance of disordered one dimensional lattices. Philosophical Magazine 21: 863.

Laughlin, R. B. 1981. Quantized Hall conductivity in two dimensions. Physical Review B 23**:** 5632.

Laughlin, R. B. 1983. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. Physical Review Letters 50: 1395.

Laughlin, R. B. 1999. Nobel lecture: fractional quantization. Reviews of Modern Physics 71: 863.

Lier, K., ve Gerhardts, R. R., 1994. Self-consistent calculations of edge channels in laterally confined two-dimensional electron system. Physical Review B 50: 7757.

MacDonald, A. H. ve Streda, P. 1984. Quantized Hall effect and edge currents. Physical Review B 29**:** 1616.

Marquardt, F. 2005. Fermionic Mach-Zehnder interferometer subject to a quantum bath. Europhysics Letters 72: 788.

Morse, P. M. ve Feshbach, H. 1953. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York.

Neder, I., Heiblum, M., Levinson,Y., Mahalu, D., ve Umansky, V., 2006. Unexpected Behavior in a Two-Path Electron Interferometer. Physical Review Letters 96: 016804.

Neder, I., Marquardt, F. 2007. Coherence oscillations in dephasing by non-Gaussian shot noise. New Journal of Physics 9: 112.

Niu, Q. ve Thouless, D. J. 1987. Quantum Hall effect with realistic boundary conditions. Physical Review B 35**:** 2188.

Oh, J. H., ve Gerhardts R. R., 1997. Self-consistent Thomas-Fermi calculation of potential and current distributions in a two-dimensional Hall bar geometry. Physical Review B 56: 13519.

Prange, R. E. 1981. Quantized Hall resistance and the measurement of the fine structure constant. Physical Review B 23: 4802.

Samuelsson, P., Sukhorukov, E. ve Buttiker, M. 2004. Two-particle Aharonov-Bohm effect and entanglement in the electronic Hanbury Brown–Twiss setup. Physical Review Letters 92: 026805.

Siddiki, A., Kavruk, A. E., Öztürk, T., Atav, Ü., Şahin, M. ve Hakioğlu, T., 2008. The self-consistent calculation of the edge states at quantum Hall effect (QHE) based Mach-Zehnder interferometers (MZI). Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures 40: 1398.

Siddiki, A., ve Gerhardts, R. R., 2003. Thomas-Fermi-Poisson theory of screening for laterally confined two dimensional electron systems in strong magnetic fields. Physical Review B 68: 125315.

Siddiki, A., ve Gerhardts, R. R., 2004. Incompressible strips in dissipative Hall bars as origin of quantized Hall plateaus. Physical Review B 70: 195335.

Siddiki, A., ve Gerhardts, R. R., 2007. Range-dependent disorder effects on the plateau-widths calculated within the screening theory of the IQHE. International Journal of Modern Physics B 21: 1362.

Siddiki, A., ve Marquardt, F., 2007. Self-consistent of the electron distribution near a quantum point contact in the integer quantum Hall effect. Physical Review B 75: 045325.

Speyer, G., Vasileska, D., ve Goodnick, S., M., 2001. Efficient Poisson equation solvers for large scale 3D simulations. Nanotech 2001 Vol 1 (Technical Proceedings of the 2001 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems) 1: 23. (www.cr.org)

Störmer, H. L. 1999. Nobel lecture: the fractional quantum Hall effect. Reviews of Modern Physics 71: 875.

Streda, P., Kucera, J. ve MacDonald, A. H. 1987. Edge states, transmission matrices and the Hall resistances. Physical Review Letters 59: 1973.

Subramanian, S., 1994. A self-consistent solution of one-dimensional schrodinger-poisson equations by newton-raphson iteration technique. in Proc. 3rd Int. Workshop on Computational Electronics : 211.

Thomas, L. H. 1927. The calculation of atomic fields. Proc. Cambridge Philos. Soc. 23:542.

Trellakis, A., Galick, A., T., Pacelli, A., ve Ravaioli, U., 1997. Iteration scheme fort he solution of the two-dimensional Schrödinger-Poisson equations in quantum structures. Journal of Applied Physics 81: 7880.

Tsui, D. C. 1999. Nobel lecture: interplay of disorder and interaction in two-dimensional electron gas in intense magnetic fields. Reviews of Modern Physics 71: 891.

Tsui, D. C., Stormer, H. L., ve Gossard, A. C. 1982. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. Physical Review Letters 48: 1559.

Weichselbaum, A., ve Ulloa, S. E., 2003. Potential landscapes and induced charges near metallic islands in three dimensions. Physical Review E 68: 056707.

Weitz, P., Ahlswede, E., Weis, J., Klitzing, K. v., ve Eberl, K., 2000. Hall-potential investigations under quantum Hall conditions using scanning force microscopy. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures 6: 247.

Wel, W. v. d., Haanappel, E. G, Mooij, J. E., Harmans, C. J. P. M., Andr´e, J. P., Weimann, G., Ploog, K., Foxon, C. T. ve Harris J. J. 1989. Selection criteria

for AlGaAs–GaAs heterostructures in view of their use as a quantum Hall resistance standard. J. Appl. Phys. 65**:** 3487.

Willett, R., Eisenstein, J. P., Störmer, H. L., Tsui, D. C., Gossard, A. C., ve English, C. H. 1987. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. Physics Review Letters 59: 1776.

Witt, T. J. 1998. Electrical resistance standards and the quantum Hall effect. Review of Scientific Instruments 69: 2823.

Zheng, H. Z., Wei, H. P., Tsui, D. C., ve Weimann G. 1986. Gate-controlled transport in narrow GaAs/$Al_xGa_{1-x}As$ heterostructures. Physical Review B 34: 5635.