T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLMESİ

YILDIRAY KESKİN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2010

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLMESİ

YILDIRAY KESKİN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 09/ 03/ 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

(Danışman)

Prof. Dr. İdris DAĞ

(Üye)

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

(Üye)

Doç. Dr. Aşır GENÇ

(Üye)

Yard. Doç. Dr. Hasan KÖSE

(Üye)

ÖZET

Doktora Tezi

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLMESİ

YILDIRAY KESKİN
Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Konya, 2010
Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. İdris DAĞp
Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Doç. Dr. Aşır GENÇ
Yard. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Son zamanlarda diferansiyel dönüşüm yöntemi birçok kısmi türevli diferansiyel denklemin ve kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanıldı. Bu doktora tez çalışmasında diferansiyel dönüşüm yönteminin karmaşık hesaplamalarının üzerinden gelmek için alternatif olarak indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile isimlendirilen yöntem tanıtıldı. Bu yöntemin en önemli avantajı ise kulanıcılara terimleri hızlı ve kolay bir şekilde hesap edilebilen yakınsak analitik bir yaklaşım sağlamasıdır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi türevli diferansiyel denklemler, Diferansiyel dönüşüm yöntemi, İndirgenmiş Diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi

ABSTRACT

PhD Thesis

SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

YILDIRAY KESKİN

Selcuk University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisior: Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Konya, 2010

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. İdris DAĞ

Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Assoc. Prof. Dr. Aşır GENÇ

Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

Recently differential transform method has been used to solve various partial differential equations and fractional nonlinear partial differential equations. In this PhD thesis, an alternative approach called the reduced differential transform method is presented to overcome the demerit of complex calculation of differential transform method. The main advantage of this method is the fact that it provides its user with an analytical approximation, in many cases an exact solution, in a rapidly convergent sequence with elegantly computed terms.

Key Words: Partial Differential Equations, Differential Transfom Method, Reduced Differential Transfom Method, Adomian Decomposition Method, Varriational İteration Method

ÖNSÖZ

Bu doktora tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Galip OTURANÇ yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne sunulmuştur.

Doktora tezi içerik olarak dört bölümden oluşmuştur. İlk bölüm nümerik yöntemler hakkında literatür özeti ve ikinci bölümde ise çalışmamız için gerekli tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde ise kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini türev alarak elde edilmesini sağlayan "İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi" ilk kez tanıtıldı. Son bölümde ise tezde tanıtılan yöntemin farklı tipde denklemlere nasıl uygulanacağını göstermek amacı ile örnekler çözüldü.

Tez çalışmamın seçimi ve yürütülmesi sürecindeki yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı tez yöneticisi kıymetli hocam Doç. Dr. Galip Oturanç'a, çok değerli vakitlerini ve bilgilerini benden esirgemeyen değerli tez izleme komitesi hocalarım Prof. Dr. Durmuş Bozkurt ve Prof. Dr. İdris Dağ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, haklarını ödeyemeyeceğim sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Yıldıray Keskin

Konya, 2010

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ 1
1.1. Amaç ve Kapsam 1
1.2. Literatür Özeti 2
2. TEMEL KAVRAMLAR 9
2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 18
2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 26
2.3. N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 33
2.4. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 35
3. İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ 43
3.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 43
3.2. İndirgenmiş N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 53
3.3. İndirgenmiş Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 55
4. UYGULAMALAR 57
4.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması 61
4.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması 65
4.3. İndirgenmiş Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Zaman Kesirli Mertebeli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması 68
5. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER 73
KAYNAKLAR 74

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: İndirgenmiş dönüşüm yöntemiyle elde edilen $\tilde{u}_4(x,y)$ yaklaşık çözümü (a) $u(x,t)=-\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x-k^2t\right)\right)$ analitik çözüm ile kıyaslanması, (b) varyasyonel iterasyon yöntemi soliton dalga çözümünün kıyaslaması (k=1). 63

Şekil 2: İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen beşinci mertebe yaklaşık çözüm ile analitik çözümün kıyaslanması.....65

Şekil 3: İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile analitik çözümün kıyaslanması $a=-1.5$, $c=0.1$, $b=0.1$ and $k=0.1$ 68

Şekil 4: $\tilde{u}_8(x,y)$ yaklaşık çözüm ile (a) $u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\sin(x)t^{h\alpha}}{\Gamma(h\alpha+1)}$ analitik çözüm ile kıyaslanması, (b) Varyasyonel iterasyon yöntemiyle kıyaslanması. 70

Şekil 5: İndirgenmiş dönüşüm yönteminin kıyaslaması (a) $u(x,t)=x+x^2\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{t^{1+\frac{3h}{2}}}{\Gamma\left(2+\frac{3h}{2}\right)}\right]$ analitik çözüm ile (b) Varyasyonel iterasyon yöntemiylekıyaslanması.....71

TABLO LİSTESİ

Tablo 1 Lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu.....26

Tablo 2 İki boyutlu diferansiyel dönüşüm tablosu 31

Tablo 3 İki boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu 32

Tablo 4 Kesirli diferansiyel dönüşüm tablosu.....41

Tablo 5 x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu.....50

Tablo 6 t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu.....51

Tablo 7 Lineer olmayan fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu 51

Tablo 8 Lineer olmayan fonksiyonlar için t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu 52

Tablo 9 İndirgenmiş N boyutlu diferansiyel dönüşüm tablosu 54

Tablo 10 İndirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşüm tablosu 56

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Diferansiyel denklemler mühendislik bilimleri, doğa bilimleri ve ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemler lineer olmakla beraber birçok lineer olmayan denklem literatürde tanıtılmış durumdadır. Bu problemlerin çözümü için literatürde analitik ve nümerik birçok yöntem tanıtılmıştır.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak Çin'li bir bilim adamı olan J. K Zhou (1986) tarafında elektirik devre analizinde ortaya çıkan problemleri çözmede kullanılmıştır. Bu yöntem temelde denklemin seri çözümünde meydana gelen polinomların katsayıları ile ilişkilerine dayanmaktadır. C. K. Chen (1999) ilk kez diferansiyel dönüşüm yönteminden hareketle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi tanıtmış ve bazı denklemlere uygulamasını yapmıştır. Chen'in bu çalışması sayesinde diferansiyel dönüşüm yöntemi için yeni uygulama alanları başlatmıştır. F. Ayaz (2003) yılında iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminden hareketle üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini tanıtmış ve bu yöntemin en genel halini A. Kurnaz (2005), N-boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi olarak literatüre sunmuştur. Bu zamana kadar ki ilerlemelerde diferansiyel dönüşüm yöntemi için en önemli eksik, bağımlı değişkeni barındıran lineer olmayan fonksiyonlar için dönüşüm karşılığının bulunamamış olmasıdır. Bu eksiklik Y. Keskin (2008)'in *"The differential transform methods for nonlinear functions and its applications"* isimli çalışması ile ortadan kalkmıştır. Bu çalışma sayesinde lineer olmayan fonksiyonlar için dönüşüm karşılığı rahatlıkla hesap edilebilir hale gelmiştir. Diferansiyel dönüşüm yöntemi için bahsedebileceğimiz bir diğer eksiklik ise kısmi türevli diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü hesaplanırken yapılan iterasyonun k ve h gibi iki değişken üzerinden yapılması, eğer üç boyutlu diferansiyel denklemin çözümü hesaplanıyorsa k, h ve l üzerinden yapılmasıdır. Ayrıca bu iterasyonların sonucunda hesaplanan çözümün diğer yöntemlere kıyaslandığında çok zaman alması yöntemi diğer yöntemlere göre dezavantajlı duruma getirmektedir. Y. Keskin (2009), diferansiyel dönüşüm yönteminin bu dezavantajını literatürdeki çalışmalar ile Y.

Keskin (2008) ‘de lineer olmayan fonksiyonlar için verilen tanımlamadan hareketle “İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi” tanıtarak gidermiştir. İlk kez tanımlana bu yöntem ise “International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation” isimli dergide yayınlanmıştır. Y. Keskin (2010) çalışmasında bu yöntemin biraz daha genellemesini yaparak kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemelere uygulamıştır.

1.2. Literatür Özeti

J. K. Zhou, Differential transformation and its application for electrical circuits, Huarjung University Press, Wuuhahn, China, 1986. Bu çalışmasında ilk olarak diferansiyel dönüşüm yöntemini, elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur.

G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer, Dordrecht, 1994. Bu kitabında Adomian, 1980 yılında tanıttığı kendi adı ile isimlendirilen Adomian Ayrışım Yöntemiyle ilgili bazı tanım ve teoremlere yer vermiş ayrıca bazı diferansiyel denklemlere nasıl uygulanacağını göstermiştir.

J. H. He, Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples, International Journal of Non-Linear Mechanics 34 (4): 699-708 (1999). He, bu çalışmasında lineer olmayan problemlerin çözümleri için variational iteration method ismi verilen yeni bir analitik çözüm tanıtmıştır. Bu yöntem başlangıç değer problemini varyasyon teorideki lagrange çarpanı yardımıyla çözmüştür. Adomian Ayrışım Yöntemi ile kıyasladığında daha iyi sonuç vermiştir.

C. K. Chen, S. H. Ho, Application of differential transformation to eigenvalue problems, Applied Mathematics and Computation, 79, 179-188, 1996. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yöntemini özdeğer problemlerine uygulanmıştır. Özdeğerlerin ve özfonksiyonların bulunmasında kullanılan en çok bilinen yöntemler olan Ritz ve Galerkin yöntemlerinde, $i \geq 2$ için i. özdeğerin bulunması oldukça güç olup Chen ve Ho yaptıkları çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi ile özdeğerleri ve öz fonksiyonları elde etmişlerdir.

M. J. Jang, C. L. Chen, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transform method, Applied Mathematics and Computation; 88, 137-151, 1997. Bu çalışmada, güçlü lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinin analizinde diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanlmış olup elde edilen sonuçlarla, sistemin Runge-Kutta yöntemi ile çözülmesiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen sonuçların daha hassas olduğu ifade edilmiştir.

L. T. Yu, C. K. Chen, The solution of the blasius equation by the differential transform method, Mathematical and Computer Modelling, 28, 101-111, 1998. Bu çalışmada, Blasius diferansiyel denklemi olarak bilinen ve üçüncü mertebeden lineer olmayan bir adi türevli diferansiyel denklem olan denklemin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü yapılmıştır.

C. L. Chen, Y. C. Liu, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, Applied Mathematics and Computation; 95, 155-164, 1998. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm lineer olmayan ısı kondüksiyon problemlerinin çözümü ile birlikte analitik çözümün spektrumunun elde edilebilmesi için bir prosedür geliştirilmiş olup çözüm Taylor serileri yardımıyla ifade edilmiştir.

C. K. Chen, S. H. Ho, Transverse vibration of a rotating twisted timoshenko beams under axial loading using differential transform, Intenational Journal of Mechanical Science; 41-11, 1339-1356, 1999. Bu çalışmada, dönerek bükülmüş Timoshenko kirişinin serbest vibrasyon problemini çözmek için diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmış, çözümler ise analitik formda ifade edilmiştir.

C. K. Chen, S. H. Ho, Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation; 106, 171-179, 1999. Bu çalışmaya kadar yalnızca adi türevli diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodu, bu çalışmayla birlikte ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişletilmiş olup bunun için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm tanımlanmıştır.

M. J. Jang, C. L. Chen, Y.C. Liu, On the solving initial value problems using the differtential transform method, Applied Mathematics and Computation; 115, 145-160, 2000. Bu çalışmada, ilk olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri gridler yardımıyla diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Nümerik yöntemlerde sıklıkla gridlerden faydalanılmasına rağmen ilk olarak bu çalışmada dikkate alınmış olmakla birlikte hem daha iyi sonuçlar elde edilmiş hem de çözümün global hatası kontrol altına alınmıştır.

I. H. Abdel Halim Hassan, On solving eigenvalue problems by using a differential transformation, Applied Mathematics and Computation; 127, 1-22, 2002. Bu çalışmada, diferansiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla, sturm-liouville özdeğer problemi için özdeğer ve normalleştirilmiş özdeğer fonksiyonu elde edilmiştir. Bununla birlikte özdeğerlerin yakınsaklığı incelenmiş ve bilinen analitik sonuçlar ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

I. H. Abdel Halim Hassan, Different Applications for the differential transformation in differential equations, Applied Mathematics and Computation; 129, 183-221, 2002. Bu çalışmada ise yazar, bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini ikinci ve dördüncü mertebe diferansiyel denklemlerin özdeğer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonlarının bulunmasında kullanmıştır. Bununla birlikte iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yardımıyla sabit katsayılı birinci ve ikinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiş elde edilen sonuçlar, aynı problemlerin fark denklemleri yardımıyla elde edilen sonuçları ve analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

M. J. Jang, J. S. Wang, Y. C. Liu, Applying differtential transform method to parameter identification problems, Applied Mathematics and Computation; 139, 2-3, 491-502, 2003. Bu çalışma, parametre tanımlama probleminde maksimum ihtimal değerlerinin bulunması için diferansiyel dönüşüm yönteminden faydalanılmıştır. Bu parametrelerin tanıtım kriterleri fonksiyonu Diferansiyel dönüşüm yardımıyla kurulmuştur. Böylece; sistem modelinin spektrumunun bilinmeyen parametre ve önceden belirlenmiş değişkenin başlangıç değeri yardımıyla bulunuyor olması, singülerlik ve duyarlılık probleminin ters probleme gerek olmadan çözülebilmesi, çözülen problemin iterasyonla yapılıyor

olması ve kolaylıkla nümerik hesaplamalara dönüşmesi ve hem lineer, hem de nonlineer problemler için farklı yöntemlere gerek kalmadan aynı yöntemle çözülmesi problemin çözümünde diferansiyel dönüşüm yönteminin tercih edilmesindeki en önemli etkenler olarak dikkati çekmektedir.

F. Ayaz, On the two dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation, 143, 361-374, 2003. Bu çalışmada, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı teoremler verilmiş ve bununla birlikte lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri çözülmüştür.

F. Ayaz, Applications of differential transform methods to differential algebric equations, Appl. Maths Comput; 152, 649-657, 2004. Bu çalışmada lineer cebirsel-diferansiyel denklemlerin çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemi ile incelenerek konuyla ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

C. K. Chen, S. P. Ju, Application of differential transformation to trasient advective-dispersive transport equation, Applied Mathematics and Computation; 155, 25-38, 2004. Bu çalışmada süreksiz adjective dispersive taşınım denkleminin çözmü DTM ile yapılmıştır. Ayrıca bu çalışmanın bir özelliği de hem sonlu fark metodu hem de DTM birlikte kullanılmıştır.

C. K. Chen, S. S. Chen, Application of the differential transformation method to a non linear conservative system, Applied Mathematics and Computation; 154, 431-441, 2004. Bu çalışmada, lineer olmayan serbest conservative sistemin çözümü diferansiyel dönüşüm ile incelenmiş, elde edilen sonuçlar Runge Kutta Yönteminden elde edilenlerle karşılaştırılmış ve daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

F. Ayaz, G. Oturanç, An Approximate Solution of burgers equation by Differential Transform Method, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 5-2, 15-24, 2004. Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm metodu ile özel bir denklem olan Burgers denklemi çözümü araştırıldı. Başlangıç şartında verilerin değişmesiyle diferansiyel dönüşüm ile bulunan çözümler karşılaştırıldı.

A. Kurnaz, G. Oturanç, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equuation, International Journal of Computer Mathematics, 82, 709–719 2005. Bu çalışmada; diferansiyel dönüşüm yöntemi çözümün arandığı aralıktaki çözüm fonksiyonu gridlere bölünerek sistemlere uygulanmış böylece çözüm fonksiyonu her bir alt aralık için bulunarak çözüme yaklaşılmıştır. Bununla birlikte hata kontrolü yapılarak hata için sisteme girilen üst sınıra bağlı olarak, alınması gereken minimum grid sayısının tesbit edilmiştir.

A. Kurnaz, G. Oturanç M. E. Kiriş, *n* dimensional differential transformation method for solving PDE's, International Journal of Computer Mathematics, ,82(3), 369 – 380, 2005. Bu çalışmada, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirme yapılmış ve *n* boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi tanımlanmıştır. Sonuçlar bazı lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler çözülerek test edilmiştir.

N. Bildik, A. Konuralp, F. O. Bek, S. Küçükarslan, Solution of different type of partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 172 (1),551-567 2006. Bu çalışmada, farklı türlerdeki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü hem diferansiyel dönüşüm yöntemi ile hem de Adomian decomposition yöntemi ile yapılmış olup elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Y. Keskin, A. Kurnaz, M. E. Kiriş, G. Oturanç, Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation; 8(2) 2007, 159-164. Bu çalışmada, genelleştirilmiş pantograf denklemlerin çözümü için diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış, konuyla ilgili örnekler ortaya konulmuştur.

V. S. Ertürk, S. Momani, Z. Odibat, Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8) 2008, 1642-1654. Bu çalışma, Caputo anlamında türevlere sahip çoklu mertebeli lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Diferansiyel

dönüşüm yönteminin uygulanmasını ve konuyla ilgili çözülmüş örnekleri içermektedir.

G. Oturanç, A. Kurnaz, Y. Keskin, A new Analytical Approximate Method for the Solution of Fractional Differential Equation, International Journal of Computer Mathematics, 85-1, 131–142 2008. Bu çalışmada kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yeni bir yaklaşık analitik metod sunulmuştur. Bu yöntemle ilgili tanım ve teoremler verilip lineer veya lineer olmayan denklemler için çözümler incelenmiştir.

Y. Keskin, G. Oturanç, The Differential Transform Methods For Nonlinear Functions And Its Applications, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 9(1), 69-76, 2008. Bu çalışmada lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve Emden Fowler diferansiyel denklemi çözülmüştür.

S. Momani, Z. Odibat, Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order, Chaos, Solitons & Fractals 31(5) 2007, 1248-1255. Bu çalışmada lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli fark yöntemi, Adomian decomposition yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilerek elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

S. Momani, N. Shawagfeh, Decomposition Method for solving fractional Riccati differential equations Applied Mathematics and Computation, 182, 2007, 1083-1092. Bu çalışmada kesirli Riccati diferansiyel denkleminin çözümü için Adomian decmposition metodu kullanılmıştır.

S. Momani, M. A. Noor, Numerical methods for fourth-order fractional integro- differential equations Applied Mathematics and Computation, 182, 2006, 754-760. Bu çalışmada ise caputo anlamındaki türev yardımıyla 4. mertebeden lineer ve lineer olmayan kesirli integro-diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümleri için Adomian decomposition metodu uygulamıştır.

Z. Odibat, S. Momani, Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order, Applied Mathematical Modelling, 32(1) 2008, 28-39. Bu çalışmada lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel

denklemlerin çözümleri için Adomian decomposition yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilmiş, elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Z. Odibat, N. T. Shawagfeh, Generalized Taylor's Formula, **Applied Mathematics and Computation, 186(1) 2007, 286-293.** Bu çalışmada mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ biçiminde olan, caputo anlamında türevler içeren, klasik Taylor formülünden elde edilen yeni bir genelleştirilmiş Taylor formülü kurulmuştur. Bununla birlikte bazı kesirli türevli diferansiyel denklemlere uygulanmış,ve bu problemlerin çözümlerine yer verilmiştir.

V. S. Ertürk, S. Momani, Z. Odibat, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractianal order, Applied Mathematics and Computation, 197(2) 2008, 467-477. Bu çalışma caputo anlamında türevlere sahip kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Diferansiyel dönüşüm yönteminin bir genelleştirilmesi sunulmuş ve bununla ilgili çeşitli örnekler çözülmüştür. Sonuç olarak literatürde var olan sonuçlarla oldukça uyumlu güzel sonuçların elde edildiğini gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Uygulamalı matematik, fizik ve Mühendislik bilimlerindeki birçok problemin matematik analizinde ve temel doğa kanunlarının formülasyonunda sıklıkla kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD) karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemler modern matematikte özellikle fizik, geometri ve analizde çok önemlidir. Fizik alanındaki birçok problem bu denklemler ve problemin doğasından oluşan başlangıç ve/veya sınır şartları ile tanımlanır.

Tanım 2.1.

Bir $u(x,t,...)$ fonksiyonu için kısmi türevli diferansiyel denklem, u fonksiyonu ve onun kısmi türevleri $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, ...$ olmak üzere

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},...)=0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $x,t,...$ bağımsız değişken $u(x,t,...)$ bağımlı değişken ve F bu değişkenlerden oluşan bir fonksiyondur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerde mertebe tanımı adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi en yüksek mertebeden türev olarak tanımlanır. En genel formda birinci mertebeden KTDD

$$F(x,t,u,u_x,u_t)=0$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde genel formda iki boyutlu (x,t bağımsız değişken) ikinci mertebeden KTDD

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0$$

olarak yazılabilir.

Bir KTDD oluşturan bağımsız değişken hariç bağımlı değişkenin kendisi ve türevleri lineerse lineer KTDD, bağımsız değişkeninin en yüksek mertebeden türevini içeren ifade lineerse bu tip denkleme quasi-lineer KTDD ve denklem lineer değilse lineer olmayan KTDD olarak adlandırılır.

Bir diferansiyel denklem operatör formunda

$$L_x u(x)=f(x)$$

yazılabilir. Burada L_x türev operatörü ve

$$L_x\left(au(x)+bv(x)\right)=aL_xu(x)+bL_xv(x) \quad (\text{a,b sabitler}, u(x), v(x) \text{ fonksiyonlar})$$

eşitliğini sağlıyorsa L_x operatörü lineerdir denir. (2.1) denkleminin klasik çözümü olan $u(x,t,...)$ fonksiyonu D bölgesinde tanımlı, kendisi ve türevleri sürekli ayrıca denklemi içeren tüm türevleri yine bu bölgede sürekli olması gerekmektedir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözüm kavramına girmeden önce çözümü $u(x,t)$ olan basit bir örnek çözelim

$$u_{xt} = 0$$

denkleminin her tarafının x'e göre integrali alınırsa

$$u_t = h(t) \quad (h(t)\ t\text{'yi içeren keyfi fonksiyon})$$

şimdi her tarafın y'ye göre integrali alınırsa

$$u(x,t) = \int h(t)dt + f(x) \quad (h(t)\ t\text{'yi içeren ve } f(x)\ x\text{'i içeren keyfi fonksiyon})$$

veya

$$u(x,t) = g(t) + f(x) \quad (g(t)\ t\text{'yi içeren ve } f(x)\ x\text{'i içeren keyfi fonksiyon})$$

ifadesi $u_{xy} = 0$ ikinci mertebe denkleminin genel çözümüdür.

Genel olarak KTDD'lerin genel çözümü adi diferansiyel denklemlerin çözümlerindeki keyfi sabitler benzer şekilde keyfi fonksiyonları içerir. Örneğin

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

şeklinde f ve g keyfi fonksiyonları olmak üzere u fonksiyonun türevleri alınırsa

$$u_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$
$$u_{tt} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) = c^2 u_{xx}$$

bulunur. Düzenlemeler yapılırsa,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

dalga denklemi bulunmuş olur. Burada f, g ikinci mertebeden türetilebilen fonksiyonlardır.

KTDD'lerin genel çözümleri keyfi fonksiyonları içerdiği için birden fazla çözüm vardır. Bunun aksine başlangıç veya sınır değerleri verilmiş bir KTDD'in bir tane özel çözümü vardır. Hemen söylemek gerekir ki problemlerin fiziğinden ortaya çıkan başlangıç şartı veya sınır şartı pek çok problemde mevcuttur. Kısmi türevli bir denklemde t bağımsız değişkeni zamanı göstermek üzere $u(x,t)$'in $t = t_0$ veya t=0 anındaki problemin fiziksel durumunu gösteren şartlara Başlangıç şartı (Initial Conditions) ve bu tür kısmi türevli denkleme Başlangıç değer problemi denir. Eğer

$u(x,t)$ fonksiyonun $u(x,0)$ ve/veya $u_t(x,0)$ belli ise (t=0 anında) bu tür şartlara Cauchy başlangıç şartı bu tür probleme Cauchy problemi denir.

A, B, C, D, E, F ve *G, x* ve *t* bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial t}+Fu=G(x,y)$$

şeklindedir. $G(x,t)=0$ ise denklemi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial t}+Fu=0$$

şekline indirgenir. Kısmi türevli diferansiyel denklemi parabolik eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi vardır.

A, B, C, D, E ve *F* katsayıları gerçel sabitler olmak üzere *x* ve *y* değişkenlerine göre

$$Ax^2+2Bxt+Ct^2+Dx+Et+F=0$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin "Δ" 'na bakılarak tipi belirlenebilir. Bu durumda;

$$\Delta=B^2-4AC\begin{cases}\Delta<0 \quad ise \quad \text{eliptik diferansiyel denklem}\\ \Delta=0 \quad ise \quad \text{parabolik diferansiyel denklem}\\ \Delta>0 \quad ise \quad \text{hiperbolik diferansiyel denklem}\end{cases}$$

gösterdiği bilinmektedir.

Örneğin;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemi $B^2-4AC=-4<0$ olduğundan eliptik tip diferansiyel denklemdir. Bu denklem iki boyutlu Laplace denklemi olarak bilinir. Akışkanlar mekaniğinde sıkıştırılamayan ideal akışkanın akım fonksiyonu, dikdörtgen levhadaki kararlı sıcaklık fonksiyonu gibi fiziksel olaylar tarafından sağlanan denklemdir. Bu denkleminin çözümü;

$$u=f(t+ix)+g(t-ix)$$

olarak elde edilebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=h(x,t)$$

denklemi eliptik tiptedir. İki boyutlu Poisson denklemi olarak bilinir. Çevrintili ideal sıkıştırılamayan akışkanın akım fonksiyonu tarafından sağlanan denklemdir.

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

denkleminde B^2-$4AC=0$ olduğundan parabolik denklemdir. Bir boyutlu ısı (difüzyon) denklemi olarak bilinir. Homojen bir çubuğun sıcaklığı bu denklem ile belirlenir.

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

denkleminde B^2-$4AC=4>0$ olduğundan hiperbolik denklemdir. Bu denklem bir boyutlu dalga denklemi olarak bilinir. Titreşen bir telin üzerindeki tüm noktaların küçük yer değiştirmeleri, ideal akışkanın yüzey dalgalarındaki hızı Dalga denklemi ile belirlenir.

Bütün fiziksel problemler, belli bir D bölgesinde çözümü aranır ve aranan fonksiyonun D bölgesinde belli noktalarda değerleri verilir bu değerlere sınır şartları ve bu tür problemlere Sınır değer problemi denir. Bazen sınırlar belli bir sonlu bölgede olmayabilir. Böyle bir durumda sınır sonsuzdur denir. Fizikte sıklıkla karşılaşılan üç çeşit sınır şartı vardır.

Tanım 2.2. (Dirichlet şartı)

Belli bir D bölgesinde çözümü aranan $u(x,t)$ fonksiyonu için bu D bölgesinin her bir yerinde değerlerinin verilmesi tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan probleme Dirichlet Sınır değer problemi denir.

Tanım 2.3. (Neumann şartı)

Belli bir D bölgesinde çözümü aranan $u(x,t)$ fonksiyonun D bölgesinin her bir yerinde $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ve/veya $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ değerlerinin verilmesi tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan probleme Neumann Sınır değer problemi denir.

Tanım 2.4. (Robin şartı)

Belli bir D bölgesinde çözümü aranan $u(x,t)$ fonksiyonun D bölgesinin her bir yerinde $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + au(x,t)$ ve/veya $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + au(x,t)$ değerlerinin verilmesi tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan probleme Robin Sınır değer problemi denir.

Başlangıç ve/veya sınır şartları ile verilen KTDD'e iyi konulmuş problem denir ve aşağıdaki şartları sağlar

- En az bir çözüm vardır ve bu çözüm tektir.
- Çözüm kararlıdır. Yani giriş verilerindeki küçük değişiklikler

çözümde küçük değişiklikler oluşturur.

Bu kısımda literatürde bilinen bazı özel denklemleri tanıtalım [Debnath, 1997].

a) Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

1. Dalga Denklemi:

Dalga denklemi

$$u_{tt} - c^2\nabla^2 u = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, c \,\text{keyfi sabit} \right)$$

şeklindedir. Bu denklem bir dalganın yayılmasını tanımlar ve fiziksel problemlerin birçok alanında ortaya çıkar. Örneğin bir yayın titreşiminde, bir zarın titreşiminde, kiriş yada elastik bir çubuğun uzunlamasına titreşiminde, sığ su dalgalarında, sesin bir akışkan boyunca yayılmasında oluşan potansiyel hız için tanımlanan akustik problemlerinde, bir kablo boyunca elektrik sinyallerinin iletiminde karşımıza çıkmaktadır.

2. Isı denklemi (Difüzyon Denklemi)

Isı denklemi

$$u_t - \kappa\nabla^2 u = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \kappa \,\text{diffusivity sabiti} \right)$$

şeklindedir. Bu denklem ısının bir nesne üzerinde, belli bir konumda ve zamanda, nasıl dağılacağını tanımlar, bir maddenin difüzyona maruz kalması sonucu yoğunluğundaki dalgalanmaları modeller.

3. Laplace denklemi

Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

şeklindedir. Bu denklem elektrik ve yer çekim potansiyeli ile akışkan potansiyelinin davranışını açıklar. Laplace denkleminin çözümlerinin genel teorisi aynı zamanda potansiyel teorisi olarak da bilinmektedir. Yüklerin azalmasında elektrostatik potansiyeli, kütlenin azalmasında yerçekimi potansiyelini, elastik zarların denge konumuna uzaklıklığını, sıkıştırılamaz sıvıların akışlarında hız potansiyelini, ayrıca zamandan bağımsız ısı iletim problemi olarak tanımlanır.

4. Poisson denklemi

Poisson denklemi

$$\nabla^2 u = f(x,y,z) \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

şeklindedir. Bu denklem homojen olmayan laplace denklemi olarak bilinir. Burada $f(x,y,z)$ fonksiyonu bir kaynağı yada alıcı (sink) akım kaynağı fonksiyonu tanımlar.

5. Helmholtz denklemi

Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \lambda \text{ keyfi sabit} \right)$$

şeklindedir. Hermann von Helmholtz'un ardından adlandırılan Helmholtz denklemi veya indirgenmiş dalga denklemidir. Bu denklem zamandan bağımsız dalga denklemi olarak bilinir ayrıca zamanla harmonik değişimi gösteren elektromanyetik veya akustik dalgalarla uyarılmış ortamlardaki alan dağılımını modellemek için kullanılır.

6. Telgraf denklemi

Telgraf denklemi

$$u_{tt} + a u_t + b u = u_{xx} \quad (a, b \text{ keyfi sabitler})$$

şeklindedir. Bu denklem iletim hatlarındaki bir kabloda elektrik sinyallerinin yayılmasında çalışılırken ortaya çıkmıştır.

7. Klein-Gordon denklemi

Klein-Gordon denklemi

$$\Box\psi + \left(\frac{mc^2}{h}\right)^2 \psi = 0 \quad \left(\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 \text{ d'Alembert operatörü}\right)$$

şeklindedir. Burada h Planck sabiti, m parçacığın kütle sabitidir. Klein (1927) ve Gordon (1926) elektromanyetik alanda yüklü bir parçacık için türetilmiş göreceli denklemdir.

8. Lineer Korteweg-de Vires denklemi

Lineer Korteweg-de Vires denklemi

$$u_t - \alpha^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \ \ (\alpha, \beta \text{ keyfi sabitler})$$

şeklindedir. Ayırgan ortamda lineer uzun plazma dalgalarının ve su dalgalarının yayılımını tanımlar.

9. Lineer Boussinesq denklemi

Lineer Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - \alpha^2\nabla^2 u + \beta^2\nabla^2 u_{tt} = 0 \ \ (\alpha, \beta \text{ keyfi sabitler})$$

şeklindedir. Bu denklem elastikte bir kanalda boyuna dalgaların, uzun su dalgaların ve plazma dalgaların yayılımında karşımıza çıkmaktadır.

Bu denklemlerin haricinde birçok özel tipde lineer KTDD vardır.

b) Lineer Olmayan Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

1. Lineer olmayan Dalga denklemi

Basitçe birinci mertebeden lineer olmayan dalga denklemi veya kinematic dalga denklemi

$$u_t - c(u)u_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

şeklindedir. Burada c(u), u'nun bir fonksiyonudur. Bu denklem lineer olmayan veya karmaşık durumdaki dalganın iletimini tanımlar. Örneğin Lighthill ve Whitham 1955 yılında otobanda oluşan trafik akımında meydana gelen dalgaların modellemesinde, Nye 1960 yılında buzullarda meydana gelen şok dalgalarını, su dalgalarını, Kynch 1952'de nehirlerde tortu taşımında, kromatografide kimyasal değişim süreçlerinin modellenmesinde bu denklemden yararlanılır.

2. Lineer olmayan Klein-Gordon denklemi

Bu denklem

$$u_{tt} - c^2\nabla^2 u + V'(u) = 0$$

şeklindedir. Burada $V'(u)$, $V(u)$ potansiyel enerjinin türevi olarak u'nun lineer olmayan fonksiyonudur.

3. Sine-Gordon denklemi

Uygulamalı matematikde karşılaşılan en önemli kısmi türevli diferansiyel denklemlerden birisidir. Bu denklem, iki super kondiktör arasında Fluxonların yayılımında, lineer olmayan optikde ve akışkan maddelerin kararlılığında karşılaşılmaktadır.

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0$$

ve başlangıç değerleri

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)$$

Şeklinde tanımlanır. Burada *u(x,t)*, iki değişkenli fonksiyon ve *f(x)* ve *g*(*x*) analitik fonksiyonlardır.

4. Burgers Denklemi

Türbülanslı akışkanlar mekaniğinde en önemli denklemlerinden birisi olup dalga teorisinde birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Bu denklem

$$u_t + \varepsilon u u_x = \nu u_{xx}$$

şeklinde tanıtılmış olup burada ε ve ν, kinematik viskoziteyi göstermektedir.

5. Fisher Denklemi

R.A. Fisher, tarafından "The wave of advance of advantageous genes" isimli 1937 yılındaki makalesinde literature tanıttığı denklem sonlu bir boyutlu doğal yaşam alanında mutant genlerinin yayılmasını modellemiştir.

$$u_t - \nu u_{xx} = k\left(u - \frac{u}{\kappa}\right),\ x \in R, t > 0$$

şeklindedir. Burada ν, k ve κ sabitlerdir.

6. Boussinesq denklemi

Soliton dalga teorisinin en önemli denklemlerinden birisidir. Sığ sularda meydana gelen uzun dalgaları modellemek için kullanılan bu denklem

$$u_{tt} - u_{xx} + \left(3u^2\right)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

şeklinde tanımlanır**.**

7. Korteweg–de Vries Denklemi

Hollandalı bilim adamı olan Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries tarafından Russell'ın gözlemlediği sığ su akıntılarındaki su dalgaları için bugünkü soliton teorisinin üzerine kurulduğu KdV denklemi olarak tanınan matematiksel bir model ortaya konulmuştur. x ve t sırasıyla uzaklık ve zaman koordinatları olmak üzere dalga yüzeyinin yüksekliği $\eta(x,t)$ ile gösterilirse, ρ yoğunluğuna sahip bir akışkan üzerinde tek yöndeki dalga hareketi,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

denklemi ile ele alınır. Burada h suyun denge derinliği , g yerçekimi ivmesi , α keyfi bir sabit, $\beta = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{\rho g}$ ve T ise su yüzeyi gerilimidir. Uygun dönüşümlerle

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

KdV denkleminin standart formlarından biri elde edilir. Bu denklem, içerisindeki lineer olmayan terimin etkisinden dolayı dalga olayının uzun süre yayıldığını gösterir

8. Regularized Long Wave (RLW) Denklemi

Sığ su dalgalarını, plazma dalgalarını modellemek için kullanılan bu denklem lineer olmayan denklemler içinde en önemli denklemdir.

$$u_t + u_x + \delta uu_x - \mu u_{xxt} = 0,$$

şeklinde tanımlanır. Burada δ ve μ positif parametreler, sınır şartları ise $x \to \pm\infty$ için $u \to 0$. Bu denklemin soliton çözümü ise

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2\left(p(x - vt - x_0)\right)$$

dir. Burada $p = \sqrt{\frac{c}{4\mu(c+1)}}$, $v = c+1$, $\delta = 1$ ve c sabitdir.

c) Diferansiyel Denklemlerin Operatör FormundaYazılması

Örneğin bir iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemi operatör formunda

$$Fu = f(x,t)$$

alalım. Bu denklemi

$$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = f(x,t)$$

veya

$$L_x u(x,t) + L_t u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = f(x,t)$$

şeklindeki gibi yazabiliriz. Burada L lineer kısmı, L_x x'e göre lineer türev operatörü, L_t t'e göre lineer türev operatörü, R lineer kısmın geri kalan ifadesi, N ise lineer olmayan kısmı göstermektedir.

Örneğin,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - \mu\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}u(x,t) + \delta u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$$

RLW denklemi düşünülürse

$$L_t u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t), L_x u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t),$$

$$Ru(x,t) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}u(x,t), Nu(x,t) = u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$$

şeklinde olur.

O zaman RLW denklemi operator formunda

$$L_t u(x,t) + L_x u(x,t) - \mu Ru(x,t) + \delta Nu(x,t) = 0$$

2.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntem tek değişken içerdiğinden adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır bu yönteme geçmeden önce diferansiyel operatörünün özelliklerin inceleyelim.

1. Lineerlik özelliği

$$\frac{d}{dx}\left(au(x) \pm b\,v(x)\right) = a\frac{d}{dx}u(x) \pm b\frac{d}{dx}v(x) \quad (a,b \text{ keyfi sabitler})$$

2. Yüksek mertebe özelliği

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}u(x)\right) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}u(x), \; u(x) \text{ düzgün ise}$$

3. Leibniz özelliği

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(u(x)v(x)\big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k u(x)}{dx^k}\frac{d^{n-k}v(x)}{dx^{n-k}}$$

$$=v(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x)+\binom{n}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x)+\ldots$$

$$+\binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)+u(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x)$$

Tanım 2.5. (Zhou, 1986)

Tek değişkenli *w(x)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k)* olmak üzere, *w(x)*' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.6. (Zhou, 1986)

W(k) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}W(k)x^k \tag{2.3}$$

biçimde tanımlanır. (2.2) ve (2.3) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.4) eşitliği elde edilir.

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}x^k \tag{2.4}$$

(2.2) ve (2.3) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla tek boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremleri verebiliriz. İspatlar literatürde verilen ispatların yeniden yorumlanması sonucunda yapılmıştır.

Teorem 2.1. (Zhou, 1986)

Tek değişkenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x)\pm v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k)\pm V(k)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x)\rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ ve $v(x)\rightarrow V(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}$ olmak üzere

$w(x)=u(x) \pm v(x)$ ise $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(u(x)\pm v(x)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\pm\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}=\underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}}_{U(k)}\pm\underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}}_{V(k)}$$

$$W(k)=U(k)\pm V(k)$$

Teorem 2.2. (Zhou 1986)

Tek değişkenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)= c\, u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=c\, U(k)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x)\rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ olduğundan $w(x)=cu(x)$ ise

$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}c\,u(x)\right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W(k)=c\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}=cU(k)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.3. (Zhou, 1986)

Tek değişkenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\frac{d}{dx}u(x)$$

ise sırasıyla *W(k)* ve *U(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)U(k+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x)\rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ olduğunu biliyoruz. $w(x)=\frac{du(x)}{dx}$ ise

$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}=(k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}}_{U(k+1)}=(k+1)U(k+1)$$

Teorem 2.4. (Chen, 1986)

Tek değişkenli *w(x)* ve *u(x)* fonksiyonlarını alalım. $r\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\frac{d^r u(x)}{dx^r}$$

ise sırasıyla *W(k)* ve *U(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)\ U(k+r)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.5. (Zhou, 1986)

Tek değişkenli *w(x), u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer *w(x)=u(x)v(x)* ise sırasıyla *W(k),U(k)* ve *V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x)\rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ ve $v(x)\rightarrow V(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}$ olmak üzere $w(x)=u(x)\ v(x)$ ise $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(u(x)v(x)\right)\right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(u(x)v(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[v(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)+\binom{k}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+$$

$$\left[\binom{k}{2}\frac{d^2}{dx^2}v(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}u(x)+\ldots+\binom{k}{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)+u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[v(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+$$

$$\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{2}\frac{d^2}{dx^2}v(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}u(x)\right]_{x=0}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right)v(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=U(k)V(0)+U(k-1)V(1)+\ldots+U(1)V(k-1)+U(0)V(k)$$

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$$

Teorem 2.6. (Chen, 1996)

Tek değişkenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=x^m$$

ise sırasıyla $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspata önce $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}$ ifadesinin eşitini araştıralım. Burada karşımıza 3 durum çıkmaktadır.

1. Durum: $k<m$ durumu $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \left[m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}\right]_{x=0} = 0$

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

2. Durum: $k=m$ durumu $\left[\frac{d^m}{dx^m}x^m\right]_{x=0} = \left[m(m-1)...(m-m+1)x^{m-m}\right]_{x=0} = m!$

$$W(m) = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}x^m\right]_{x=0} = \frac{1}{m!}m! = 1$$

3. Durum: $k>m$ durumu $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \left[m(m-1)...(m-m+1)0\right]_{x=0} = 0$ olur.

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

Bu 3 durum göz önüne alınarak $w(x)=x^m$ olmak üzere

$$W(k)= \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

olur.

Diferansiyel dönüşüm yönteminin önemli bir eksiğini kapatan lineer olmayan fonksiyonların dönüşüm karşılığı için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.7. (Keskin, 2008)

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, lineer olmayan $Nu(x)$' nin diferansiyel dönüşümü ($Nu(x)$ fonksiyonu $u(x)$ fonksiyonun lineer olmayan fonksiyonu)

$$N(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}Nu(x)\right]_{x=0}$$

veya

$$N(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k Nu(x)}{dx^k}\right]_{x=0}=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}N\left(\sum_{r=0}^{\infty}U(r)x^r\right)\right]_{x=0}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımla ilgili iki özel durumu maple paket program yardımıyla inceleyeceğiz.

1. Durum:

$Nu(x)=u^2(x)$ olsun. $u(x)$'in diferansiyel dönüşüm karşılığı $u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)x^k$ olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi yerine yazarsak

$$Nu(x)=u^2(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}U(k)x^k\right)^2=\left(U(0)+U(1)x+U(2)x^2+U(3)x^3+...\right)^2$$

denklemi x'in kuvvetlerine göre düzenlersek

$$Nu(x)=\underbrace{U^2(0)}_{N(0)}+\underbrace{2U(0)U(1)}_{N(1)}x+\underbrace{(2U(0)U(2)+U^2(1))}_{N(2)}x^2$$
$$+\underbrace{(2U(0)U(3)+2U(2)U(1))}_{N(3)}x^3+\underbrace{(2U(0)U(4)+2U(3)U(1)+U^2(2))}_{N(4)}x^4+...)^2$$

elde edilir.

Buradan hareketle $Nu(x)=u^2(x)$ lineer olmayan fonksiyona karşılık gelen diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$N(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u^2(x)\right]_{x=0}=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{r=0}^{\infty}U(r)x^r\right)^2\right]_{x=0}$$

ile tanımlanıp

$$N(0)=U^2(0)$$
$$N(1)=2U(0)U(1)$$
$$N(2)=2U(0)U(2)+U^2(1)$$
$$N(3)=2U(0)U(3)+2U(2)U(1)$$
$$N(4)=2U(0)U(4)+2U(3)U(1)+U^2(2)$$
$$\vdots$$

şeklinde bulunmuş olur. Maple kodları ile gösterecek olursak

```
f1 := add(u[k]*x^k, k=0 ..3);
```

$$f1:=u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3$$

```
q :=collect(f1^2, x);
```

$$q := u_3^{\,2} x^6 + 2 u_2 u_3 x^5 + (2 u_1 u_3 + u_2^{\,2}) x^4 + (2 u_0 u_3 + 2 u_1 u_2) x^3 + (2 u_0 u_2 + u_1^{\,2}) x^2 + 2 u_0 u_1 x + u_0^{\,2}$$

```
for k from 0 to 3 do coeftayl(q, x=0, k) end do;
```

$$u_0^{\,2}$$

$$2 u_0 u_1$$

$$2 u_0 u_2 + u_1^{\,2}$$

$$2 u_0 u_3 + 2 u_1 u_2$$

2. Durum:

$Nu(x) = \sin(u(x))$ olsun. O halde tanımdan dönüşüm karşılığı

$$N(0) = \sin(Y(0))$$

$$N(1) = \cos(Y(0))Y(1)$$

$$N(2) = \cos(Y(0))Y(2) - \frac{1}{2!}\sin(Y(0))Y^2(1)$$

$$N(3) = \cos(Y(0))Y(3) - \sin(Y(0))Y(2)Y(1) - \frac{1}{3!}\cos(Y(0))Y^3(1)$$

$$\vdots$$

maple kodları ile gösterecek olursak

```
f1 := add(u[k]*x^k, k=0 ..3);
```

$$f1 := u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3$$

```
q :=collect(sin(f1), x);
```

$$q := \sin(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3)$$

```
for k from 0 to 3 do coeftayl(q, x=0, k) end do;
```

$$\sin(u_0)$$

$$\cos(u_0)\, u_1$$

$$-\frac{1}{2}\sin(u_0)\, u_1^{\,2} + \cos(u_0)\, u_2$$

$$-\frac{1}{6}\cos(u_0)\, u_1^{\,3} - \sin(u_0)\, u_1 u_2 + \cos(u_0)\, u_3$$

şeklindedir. Şimdi lineer olmayan fonksiyonlar için [Keskin, 2008] de verilen tabloyu verelim.

Tablo 1 Lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$Ny(x)=y^m(x)$	$N(0)=Y^m(0)$ $N(1)=mY^{m-1}(0)Y(1)$ $N(2)=\frac{1}{2}m(m-1)Y^{m-2}(0)Y^2(1)+mY(0)^{m-1}Y(2)$ $N(3)=\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)Y^{m-3}(0)Y^3(1)+m(m-1)Y^{m-2}(0)Y(2)Y(1)$ $+mY^{m-1}(0)Y(3)$ $\vdots$
$Ny(x)=\cos(y(x))$	$N(0)=\cos(Y(0))$ $N(1)=-\sin(Y(0))Y(1)$ $N(2)=-\sin(Y(0))Y(2)-\frac{1}{2!}\cos(Y(0))Y^2(1)$ $N(3)=-\sin(Y(0))Y(3)-\cos(Y(0))Y(2)Y(1)+\frac{1}{3!}\sin(Y(0))Y^3(1)$ $\vdots$
$Ny(x)=e^{y(x)}$	$N(0)=e^{Y(0)}$ $N(1)=Y(1)e^{Y(0)}$ $N(2)=\left(Y(2)+\frac{1}{2!}Y^2(1)\right)e^{Y(0)}$ $N(3)=\left(Y(3)+Y(1)Y(2)+\frac{1}{3!}Y^3(1)\right)e^{Y(0)}$ $\vdots$

$Ny(x)$	Maple Kod
	`restart;`
	`NF:=N(y(x)):  # Fonksiyon`
	`m:=5:  # Mertebe`
	`y[x]:=sum(y[b]*x^b,b=0..m):`
	`NF[x]:=subs(y(x)=y[x],NF):`
	`s:=expand(NF[x],x):`
	`dt:=unapply(s,x):`
	`for i from 0 to m do`
	`n[i]:=((D@@i)(dt)(0)/i!):`
	`print(N[i],n[i]);  # Dönüşüm Fonksiyonu`
	`od:`

2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk kez 1999 yılında (Chen,1999) iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulayarak iki boyutlu diferansiyel dönüşüm

yöntemi aşağıdaki gibi tanıtmıştır. Burada verilen ispatlar konu ile ilgili yapılmış (Chen,1999), (Jang,2001) ve (Ayaz, 2003) çalışmalarından derlenmiştir.

Tanım 2.8. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.9. (Chen, 1999)

W(k,h) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^{k}y^{h} \tag{2.6}$$

biçimde tanımlanır. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.7) eşitliği elde edebiliriz.

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}x^{k}y^{h} \tag{2.7}$$

(2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 2.7. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,y)\rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve

$$v(x,y)\rightarrow V(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olmak üzere $w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$ ise

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}\left(u(x,y)\pm v(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

diferansiyel operatörün özelliğinden

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}u(x,y)\pm\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{k!h!}\left[\frac{d^{k+h}}{dx^{k}dy^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}}_{U(k,h)}\pm\underbrace{\frac{1}{k!h!}\left[\frac{d^{k+h}}{dx^{k}dy^{h}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}}_{V(k,h)}$$

$$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$$

Teorem 2.8. (Chen, 1999)

İki değişkenli $w(x,y)$ ve $u(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. $c\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=c\,u(x,y)$$

ise sırasıyla $W(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=cU(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,y)\rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ olduğundan $w(x,y)=cu(x,y)$ ise

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}c\,u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Diferansiyel operatörün özelliğinden

$$W(k,h)=c\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=cU(k,h)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.9. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,y)\rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ olduğunu biliyoruz. $w(x)=\frac{du(x)}{dx}$ ise

$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ diferansiyel operatörün özelliğinden

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=(k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}}_{U(k+1)}=(k+1)U(k+1,h)$$

Teorem 2.10. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.11. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. $r,s\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)\ U(k+r,h+s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.12. (Chen, 1999)

İki değişkenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,y)\rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve

$$v(x,y)\rightarrow V(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olmak üzere *w(x,y)=u(x,y)v(x,y)* ise

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left(u(x,y)v(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Diferansiyel operatörün özelliğinden

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left(u(x,y)v(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\frac{1}{k!h!}\left(\frac{\partial^h}{\partial y^h}\left(\binom{k}{0}v(x,y)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,y)+\binom{k}{1}\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,y)+\ldots\right.\right.$$

$$+\binom{k}{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}v(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+u(x,y)\frac{\partial^{k}}{\partial x^{k}}u(x,y)\Bigg)_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\frac{1}{k!h!}\left(\binom{k}{0}\binom{h}{0}\frac{\partial^{h}}{\partial y^{h}}v(x,y)\frac{\partial^{k}}{\partial x^{k}}u(x,y)+\binom{k}{0}\binom{h}{1}\frac{\partial^{h-1}}{\partial y^{h-1}}v(x,y)\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k}\partial y}u(x,y)+\ldots\right.$$

$$\binom{k}{0}\binom{h}{1}\frac{\partial^{h+1}}{\partial y^{h}\partial x}v(x,y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,y)+\binom{k}{1}\binom{h}{1}\frac{\partial^{h}}{\partial y^{h-1}\partial x}v(x,y)\frac{\partial^{k}}{\partial x^{k-1}\partial y}u(x,y)+\ldots$$

$$\left.\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial y^{h-s}\partial x^{r}}v(x,y)\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^{s}}u(x,y)+\ldots+\binom{k}{k}\binom{h}{h}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{k}}v(x,y)\frac{\partial^{h}}{\partial y^{h}}u(x,y)\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\frac{1}{k!h!}\left[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^{s}}u(x,y)\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^{r}\partial y^{h-s}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\frac{1}{(k-r)!s!}\frac{1}{(h-s)!r!}\left[\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^{s}}u(x,y)\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^{r}\partial y^{h-s}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$$

Teorem 2.13. (Chen, 1999)

İki bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m\in Z$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=x^{m}y^{n}$$

ise sırasıyla $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m\ ve\ h=n\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Tablo 2 İki boyutlu diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$w(x,t)$	$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial t^{h}}w(x,t)\right]_{(0,0)}$
$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
$w(x,t)=c\,u(x,t)\ (c\in R)$	$W(k,h)=c\,U(k,h)\ \ (c\in R)$
$w(x,t)=\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}}\,u(x,t)$	$W(k,h)=(k+1)\ldots(k+r)U(k+r,h)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r,h)$
$w(x,t)=\frac{\partial^{s}}{\partial t^{s}}\,u(x,t)$	$W(k,h)=(h+1)\ldots(h+s)U(k,h+s)=\frac{(h+s)!}{h!}U(k,h+s)$

$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$	$W(k,h)=U(k,h)\otimes V(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$
$w(x,t)=x^m t^n$	$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m \text{ ve } h=n \text{ ise}\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$
$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)s(x,t)$	$W(k)=(U(k,h)\otimes V(k,h))\otimes S(k,h)$
$w(x,t)=u(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r,h-s)V(k-r+2,s)$
$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)\,U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$
$w(x,t)=x^n t^m u(x,t)$	$W(k,h)=U(k-n,h-m)$
$w(x,t)=e^{ax+bt+c}$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}e^c$
$w(x,t)=\alpha^{ax+bt+c}$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}ln(\alpha)^{k+h}$
$w(x,t)=sin(ax+bt+c)$	$W(k,h)=\frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}sin\left(\frac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$

Lineer olmayan fonksiyonların iki boyutlu diferansiyel dönüşüm karşılığını hesaplamak için Bölüm 2.1'de verilen tanıma benzer şekilde aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.10.

İki değişkenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, linear olmayan N*u(x,t)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü (N*u(x,t)* fonksiyonu *u(x,t)* fonksiyonun lineer olmayan fonksiyonu)

$$N(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial t^h}Nu(x,t)\right]_{\substack{x=0\\t=0}} \tag{2.8}$$

$$N(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial t^h}Nu\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h\right)\right]_{\substack{x=0\\t=0}}$$

olarak tanımlanır.

Tablo 3 İki boyutlu lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kod

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$Nu(x,t)=u^3(x,t)$	$N(0,0)=U(0,0)^3$ $N(0,1)=3U(0,0)^2U(0,1)$ $N(0,2)=3U(0,0)^2U(0,2)+3U(0,0)U(0,1)^2$ $N(1,0)=3U(0,0)^2U(1,0)$ $N(1,1)=3U(0,0)^2U(1,1)+6U(0,0)U(1,0)U(0,1)$

$Nu(x,t)=\cos(u(x,t))$	$N(0,0)=\cos(U(0,0))$ $N(0,1)=-\sin(U(0,0))U(0,1)$ $N(1,0)=-\sin(U(0,0))U(1,0)$ $N(1,1)=-\cos(U(0,0))U(1,0)U(0,1)-\sin(U(0,0))U(1,1)$
$Nu(x,t)=e^{u(x,t)}$	$N(0,0)=e^{U(0,0)}$ $N(0,1)=U(0,1)e^{U(0,0)}$ $N(1,0)=U(1,0)e^{U(0,0)}$ $U(1,1)=U(1,0)U(0,1)e^{U(0,0)}+U(1,1)e^{U(0,0)}$

$Nu(x,t)$	**Maple Kod**
	`restart;`
	`G:=Nu(x,t): # Lineer Olmayan Fonksiyon`
	`m:=2: # Mertebe`
	`u[x,t]:=sum(sum(u[b,k]*x^b*t^k, b=0..m),k=0..m):`
	`G[x,t]:=subs(u(x,t)=u[x,t],G):`
	`s:=expand(G[x,t],x,t):`
	`ft:=unapply(s,x,t):`
	`for i from 0 by 1 while i <= m do`
	`for j from 0 by 1 while j <= m do`
	`a[i,j]:=D[1$i,2$j](ft)(0,0)/i!/j!:`
	`print(a[i,j],A[i,j]):`
	`od:od:`

2.3. N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yönteminin çok boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmasını sağlayan Kurnaz, N boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Kurnaz, 2005).

Tanım 2.11. (Kurnaz, 2005)

n değişkenli fonksiyon $w(x_1,x_2,...,x_n)$ olmak üzere, $w(x_1,x_2,...,x_n)$'nin *n* boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{k_1!k_2!..k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır. Burada daha öncede olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır.

Tanım 2.12. (Kurnaz, 2005)

$W(k_1,k_2,...,k_n)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}W(k_1,k_2,...,k_n)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (2.7) eşitliğine benzer şekilde (2.9), (2.10) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+..+k_n}w(x_1,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\ \vdots\\ x_n=0}}x_1^{k_1}...x_n^{k_n} \tag{2.11}$$

yazabiliriz.

n boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 2.14. (Kurnaz, 2005)

n değişkenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$, $u(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $v(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=u(x_1,x_2,...,x_n)\pm v(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$, $U(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $V(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=U(k_1,k_2,...,k_n)\pm V(k_1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.15. (Kurnaz, 2005)

n değişkenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. $c\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=c\,u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=c\,U(k_1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.16. (Kurnaz, 2005)

n değişkenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ *ve* $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= \frac{\partial}{\partial x_1}\ u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ *ve* $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= (k+1)\ U(k_1+1,k_2,...,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.17. (Kurnaz, 2005)

n değişkenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$ *ve* $u(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,...,x_n)= \frac{\partial^{r_1+r_2+...+r_n}}{\partial x_1^{\,r_1}\partial x_2^{\,r_2}...\partial x_n^{\,r_n}}\ u(x_1,x_2,...,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,...,k_n)$ *ve* $U(k_1,k_2,...,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,...,k_n)= \frac{(k_1+r_1)!}{k_1!}\frac{(k_2+r_2)!}{k_2!}...\frac{(k_n+r_n)!}{k_n!}U(k_1+r_1,\ k_2+r_2,\ ...,\ k_n+r_n)$$

eşitliği sağlanır.

2.4. Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Kesirli mertebeden türev ve integral, teoride çok eskiden beri bilinmesine karşılık fizik, kimya ve mühendislik gibi bilimlerdeki uygulamalarına son dönemlerde artarak karşılaşılmıştır. Birçok fiziksel olgunun kesirli diferansiyel denklemlerle çok başarılı bir şekilde açıklanabildiğinden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için yapılan çalışmalarda birçok gelişmeler meydana gelmiştir. Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde özellikle Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi birçok analitik yaklaşımlar ortaya konulmuş, ancak bu yöntemler kesirli diferensiyel denklemlerin lineerlik, sabit katsayılı olup olmadığı gibi özel hallerinin çözümlerinde kullanılmıştır. Birçok kesirli diferensiyel denklem lineer veya sabit katsayılı olamayacağı gibi tam çözümlerinin de bulunamaması mümkündür. Bu tip durumlarda yaklaşık veya nümerik çözümler kaçınılmaz hale gelmektedir. Bu yüzden son dönemlerde farklı iteratif yöntemlere ağırlık verilmiştir. Bu bölümde diferansiyel dönüşüm yöntemi, kesirli mertebeden diferansiyel

denklemlere uygulanması sonucunda (Oturanç, 2008) tanıtılan kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini açıklayalım.

Şimdi gerekli olan bazı ön bilgileri verelim (Oldham, 1974), (Gorenflo, 1997), (Diethelm, 2005) ve (Momani, 2007).

Tanım 2.13

$n>0$ için,

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon Gamma fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu integral, $n>0$ için yakınsak olup Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

1. $\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)$ dir. Özel olarak, sırasıyla $n=1,2,3,4$ için, $\Gamma(1)=1,\Gamma(2)=1,\Gamma(3)=2!,\Gamma(4)=3!$ elde edilebilir. Daha genel olarak, tümevarımla, $\Gamma(n+1)=n!$ bulunur. Bu yüzden Gamma fonksiyonuna faktöriyel fonksiyonu da denir.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
3. $n<0$ için $\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$ ile tanımlanır.
4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, 0<p<1$

Tanım 2.14.

$x>0$ ve $f(x)$ reel fonksiyonu için $f_1(x)\in C[0,\infty)$ olmak üzere $f(x)=x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p>\mu$, $(\mu\in\mathbb{R})$ reel sayısı varsa $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ'dedir denir. Eğer $n\in\mathbb{N}$ ve $f^{(n)}\in C_\mu$ ise bu takdirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ^n'dedir denir.

Tanım 2.15.

$f \in C_\mu$, $\mu \geq -1$ fonksiyonu için $\alpha \geq 0$ mertebeli, Riemann-Liouville ${}_aI_t^\alpha \equiv {}_aD_t^{-\alpha}$ integral operatörü,

$$ {}_aD_t^{-\alpha} f(t) \equiv {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)du \quad t \geq a \tag{2.12} $$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak $\alpha = 0$ için , Riemann-Liouville integral operatörü, ${}_aI_t^0 f(t) = f(t)$ olarak bulunur.

Tanım 2.16.

$n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir mertebeden kesirli türev $n-\alpha$ mertebeli kesirli integrasyon yardımıyla

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n {}_aD_t^{\alpha-n} f(t) $$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak,

$$ {}_aD_*^\alpha f(t) = {}_aD_t^n \, {}_aI_t^{n-\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u)du, & n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) & , \quad n = \alpha \end{cases} \tag{2.13} $$

yazılabilir. $a = 0$ için,(2.12) ve (2.13) denklemleri sırasıyla Riemann-Liouville integral ve türevleri olarak bilinir.

Kesirli türev kavramı için Riemann-Liouville tanımının dışında bu tanım üzerindeki bazı değişikliklerle elde edilen ve Caputo'nun verdiği ve Caputo türevi olarak ta bilinen tanımı dikkate alacağız. Çünkü; başlangıç değer problemleri için Caputo'nun tanımı daha kullanışlıdır.

Tanım 2.17.

$f(t)$ reel değerli fonksiyonunun Caputo anlamındaki kesirli türevi; $f(t) \in C_{-1}^n$ için

$$ {}_aD_*^{\alpha} f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha}\, {}_aD_*^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u)du, & n-1<\alpha<n, \\ & n\in\mathbb{N},\ t>0 \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) & ,\ n=\alpha \end{cases} $$

biçiminde tanımlanır. Literatürde Caputo anlamındaki kesirli türev tanımına ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

1. $D_*^{\alpha} f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha}\, {}_aD_t^n f(t) \neq {}_a D_t^n\, {}_a I_t^{n-\alpha} f(t) = {}_a D_t^n f(t)$,
2. $D_*^{\alpha} f(t) = {}_a D_t^n \left(f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}\left(0^+\right) \right)$,
3. $D_*^{\alpha}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) = \lambda D_*^{\alpha} f(t) + \mu D_*^{\alpha} g(t)$, λ, μ birer sabit.
4. $D_*^{\alpha} D_*^{\beta} f(t) = D_*^{\alpha+\beta} f(t)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.
5. $D_*^{\alpha}\left(t^j\right) = \begin{cases} 0\ , & j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ ve\ j<n \\ \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)} t^{j-\alpha} & ,\ j\in\mathbb{N}\ ve\ j\geq n\ veya\ j\notin\mathbb{N}\ ve\ j>n \end{cases}$,
6. Herhangi bir C sabiti için, $D_*^{\alpha} C = 0$,
7. $D_*^{\alpha}\, {}_a I_t^{\alpha} f(t) = f(t)$,
8. ${}_a I_t^{\alpha} D_*^{\alpha} f(t) = f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}\left(0^+\right)$, $n-1<\alpha\leq n, n\in\mathbb{N}$,

Tanım 2.18.

Eğer m tamsayısı, $\beta>0$ kesirli türev mertebesinden büyük en küçük tamsayı ise Caputo anlamında zaman-kesirli mertebeden türev tanımı

$$ D_{*t}^{\beta} u(x,t) = \frac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial t^{\beta}} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{\partial^m u(x,\tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & \text{for } m-1\leq\beta<m \\ \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & \text{for } \beta=m\in N \end{array} \right\} $$

şeklindedir.

Teorem 2.18. (Genelleştirilmiş Taylor Formülü)

Kabul edelim ki, $0<\alpha\le 1$ ve $k=0,1,\cdots,n+1$ için ${}_aD_*^{k\alpha}f(t)\in C(a,b]$ olsun. Bu taktirde,

$$R_n^{\alpha}(t,a)=\frac{(t-a)^{(n+1)\alpha}}{\Gamma\left((n+1)\alpha+1\right)}[{}_aD_*^{(n+1)\alpha}f(t)]_{t=\xi}\ ,\ \xi\in[a,t],t\in(a,b] \tag{2.14}$$

olmak üzere

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}[D_*^{i\alpha}f(t)]_{t=a}+R_n^{\alpha}(t,a) \tag{2.15}$$

tir. Burada, $D_*^{n\alpha}=D_*^{\alpha}D_*^{\alpha}\cdots D_*^{\alpha}$ (n defa) olarak dikkate alınmıştır.

Tanım 2.19. (Oturanç, 2008)

$y(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, $D_*^{k\alpha}=D_*^{\alpha}D_*^{\alpha}\cdots D_*^{\alpha}$ (k defa) olmak üzere

$${}_{\alpha}Y(k)=\frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)}[D_*^{k\alpha}y(t)]_{t=t_0}\ ,\ 0<\alpha\le 1\ ,\ k=0,1,\cdots \tag{2.16}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.20. (Oturanç, 2008)

$\left\{{}_{\alpha}Y(k)\right\}_{k=0}^{\infty}$ dizisinin kesirli ters diferansiyel dönüşümü

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{\alpha}Y(k)(t-t_0)^{k\alpha} \tag{2.17}$$

olarak tanımlanır. (2.16) ve (2.17) denklemleri birlikte düşünüldüğünde,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)}[D_*^{k\alpha}y(t)]_{t=t_0}(t-t_0)^{k\alpha} \tag{2.18}$$

elde edilebilir. Burada (2.18) eşitliğinden, kesirli diferansiyel dönüşüm kavramının (Teorem 2.18.) kesirli kuvvet serileri açılımından elde edildiği açıktır.

Teorem 2.19. (Oturanç, 2008)

$y(t)=u(t)\pm v(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k) \pm {}_{\alpha}V(k) $$

biçimindedir.

İspat. Kesirli diferansiyel dönüşüm tanımından ve türev operatörünün lineerliğinden,

$$ \begin{aligned} {}_{\alpha}Y(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{k\alpha}[u(t)+v(t)]\Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{k\alpha}[u(t)]\Big|_{t=t_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{k\alpha}[v(t)]\Big|_{t=t_0} \\ &= {}_{\alpha}U(k) \pm {}_{\alpha}V(k) \end{aligned} $$

elde edilir.

Teorem 2.20. (Oturanç, 2008)

$y(t) = cu(t)$, (c bir sabit) fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y(k) = c\,{}_{\alpha}U(k) $$

biçimindedir.

Teorem 2.21. (Oturanç, 2008)

$y(t) = D_*^{n\alpha}u(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y(k)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k+n)\frac{\Gamma(k\alpha+n\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)} $$

biçimindedir.

İspat. Kesirli diferansiyel dönüşüm tanımından,

$$ {}_{\alpha}Y(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{k\alpha} D_*^{n\alpha}[u(t)]\Big|_{t=t_0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{(k+n)\alpha}[u(t)]\Big|_{t=t_0} $$

yazılabilir. Bununla birlikte, $u(t)$' nin diferansiyel dönüşümü ${}_{\alpha}U(k)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}U(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} D_*^{k\alpha}[u(t)]\Big|_{t=t_0} $$

olup,

$$ {}_{\alpha}U\left(k+n\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\left(k+n\right)+1\right)}D_{*}^{(k+n)\alpha}\left[u\left(t\right)\right]\Big|_{t=t_0} $$

$$ D_{*}^{(k+n)\alpha}\left[u\left(t\right)\right]\Big|_{t=t_0}=\Gamma\left(\alpha\left(k+n\right)+1\right){}_{\alpha}U\left(k+n\right) $$

yazılabilir. Elde edilen bu ifade yerine yazılırsa,

$$ {}_{\alpha}Y\left(k\right)={}_{\alpha}U\left(k+n\right)\frac{\Gamma\left(k\alpha+n\alpha+1\right)}{\Gamma\left(k\alpha+1\right)} $$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.22. (Oturanç, 2008)

$y(t)=D_{*}^{\alpha}u(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y\left(k\right)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y\left(k\right)={}_{\alpha}U\left(k+1\right)\frac{\Gamma\left(k\alpha+\alpha+1\right)}{\Gamma\left(k\alpha+1\right)} $$

biçimindedir.

Teorem 2.23. (Oturanç, 2008)

$y(t)=u(t)v(t)$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y\left(k\right)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y\left(k\right)={}_{\alpha}U\left(r\right)\otimes{}_{\alpha}V\left(k-r\right)=\sum_{r=0}^{k}{}_{\alpha}U\left(r\right){}_{\alpha}V\left(k-r\right) $$

biçimindedir.

Teorem 2.24. (Oturanç, 2008)

$y(t)=t^{n}$, fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşümü, ${}_{\alpha}Y\left(k\right)$ olmak üzere,

$$ {}_{\alpha}Y\left(k\right)=\delta\left(k\alpha-n\right)=\begin{cases}1, & k=n/\alpha,\\ 0 & diger\end{cases} $$

biçimindedir.

Tablo 4 Kesirli diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$y(t)=u(t)\pm v(t)$	${}_{\alpha}Y\left(k\right)={}_{\alpha}U\left(k\right)\pm{}_{\alpha}V\left(k\right)$
$y(t)=cu(t)$	${}_{\alpha}Y\left(k\right)=c\,{}_{\alpha}U\left(k\right)$, c sabit

$y(t) = D_*^{\alpha} u(t)$	${}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k+1)\dfrac{\Gamma(k\alpha+\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}$
$y(t) = D_*^{n\alpha} u(t)$	${}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(k+n)\dfrac{\Gamma(k\alpha+n\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}$
$y(t) = u(t)v(t)$	${}_{\alpha}Y(k) = {}_{\alpha}U(r) \otimes {}_{\alpha}V(k-r) = \sum_{r=0}^{k} {}_{\alpha}U(r)\,{}_{\alpha}V(k-r)$
$y(t) = t^n$	${}_{\alpha}Y(k) = \delta(k\alpha - n) = \begin{cases} 1, & for\ k = n/\alpha, \\ 0 & otherwise \end{cases}$

3. İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk kez tanıtılacaktır. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi sayesinde, diferansiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözüm hesaplanırken ortaya çıkan işlemleri ve iterasyon sayısını azalmak mümkün olabilmektedir. Bu nedenle indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile daha hızlı sonuç elde etmek mümkündür.

3.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Kabul edelim ki iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h$$

şeklinde olsun. O zaman $u(x,t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h}u(x,t)\right]_{\substack{x=0\\t=0}}$$

olarak tanımlanmıştı.

$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{k,h}x^k t^h$ olduğundan fonksiyonu açık halde yazarsak

$$U_{0,0},U_{0,1}x,U_{0,2}x^2,...,U_{1,0}t,U_{1,1}tx,U_{1,2}tx^2,...,U_{2,0}t^2,U_{2,1}t^2x,...$$

elde edilir. Buradaki terimleri t nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani ilk grup $t^0\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,0}x^k$, ikinci grup $t^1\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,1}x^k$, üçüncü grup $t^2\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,2}x^k$ … v.b.

Böylece

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan hareketle aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 3.1.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin t boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h \qquad (3.1)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin *t* boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.

$U_h(x)$ 'nin *t* boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.4) eşitliğini elde edebiliriz.

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} t^h \tag{3.4}$$

Tanım 3.4.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*'nin *x* boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k \tag{3.5}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.5.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin *x* boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6.

$U_k(t)$ 'nin x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(t)x^k \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. (3.6) ve (3.7) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.8) eşitliğini elde edebiliriz.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}x^k \tag{3.8}$$

(3.2), (3.3), (3.6) ve (3.7) ifadeleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla indirgenmiş diferansiyel dönüşüm için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 3.1.

İki değişkenli *w(x,t), u(x,t) ve v(x,t)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$$

ise sırasıyla $W_k(t), U_k(t)$ *ve* $V_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$W_k(t)=U_k(t)\pm V_k(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,t)\rightarrow \quad U_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0} \text{ ve } \quad v(x,t)\rightarrow \quad V_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,t)\right]_{x=0}$$

olmak üzere.

$$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$$

ise $W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(u(x,t)\pm v(x,t)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(u(x,t)\pm v(x,t)\right)\right]_{x=0}=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}\pm\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}$$

olup

$$W_k(t)=U_k(t)\pm V_k(t)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.

İki değişkenli *w(x,t) ve u(x,t)* fonksiyonlarını alalım. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer

$$w(x,t) = c\, u(x,t)$$

ise sırasıyla $W_k(t)$ ve $U_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W_k(t) = cU_k(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,t) \rightarrow U_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}$ olduğundan $w(x,t) = c\, u(x,t)$ ise

$$W_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}c\left(u(x,t)\right)\right]_{x=0}$$

olur. Diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W_k(t) = c\left(\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}\right) = cU_k(t)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.

İki değişkenli *w(x,t)* ve *u(x,t)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$$

ise sırasıyla $W_k(t)$ ve $U_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$W_k(t) = (k+1)U_{k+1}(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,t) \rightarrow U_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}$ olduğunu biliyoruz. $W(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,t)$ ise $W_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(x,t)\right]_{x=0} = (k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(x,t)\right]_{x=0}}_{(k+1)U_k(t)}$$

olup

$$W_k(t) = (k+1)U_{k+1}(t)$$

Teorem 3.4.

İki değişkenli *w(x,t)* ve *u(x,t)* fonksiyonlarını alalım. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r}w(x,t)$$

ise sırasıyla $W_k(t)$ ve $U_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W_k(t) = \frac{(k+r)!}{k!}U_{k+r}(t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.5.

İki değişkenli *w(x,t), u(x,t)* ve *v(x,t)* fonksiyonlarını alalım. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$$

ise sırasıyla $W_k(t)$, $U_k(t)$ ve $V_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W_k(t) = \sum_{r=0}^{k} U_r(t)V_{k-r}(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,t)\rightarrow \quad U_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0} \quad \text{ve} \quad v(x,t)\rightarrow \quad V_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,t)\right]_{x=0}$$

olmak üzere.

$$w(x,t)=u(x,t)\ v(x,t)$$

ise $W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(u(x,t)v(x,t)\right)\right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(u(x,t)v(x,t)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[v(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)+\binom{k}{1}\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(x,t)\right]_{x=0}+$$

$$\left[\binom{k}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}u(x,t)+\ldots+\binom{k}{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)+u(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,t)\right]_{x=0}$$

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[v(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{1}\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,t)\right]_{x=0}+$$

$$\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}}u(x,t)\right]_{x=0}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,t)\right]_{x=0}$$

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right)v(x,t)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,t)\right]_{x=0}+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x,t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,t)\right]_{x=0}$$

$$W_k(t)=U_k(t)V_0(t)+U_{k-1}(t)V_1(t)+\ldots+U_1(t)V_{k-1}(t)+U_0(t)V_k(t)$$

$$W_k(t)=\sum_{r=0}^{k}U_r(t)V_{k-r}(t)$$

bulunur

Teorem 3.6.

İki değişkenli *w(x,t)* fonksiyonunu alalım. $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x,t)=x^m f(t),\ f(t)\text{: Analitik fonksiyon}$$

ise $W_k(t)$ verilen fonksiyonun x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W_k(t)=\delta(k-m)f(t),\ \delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspata önce $\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}x^m f(t)\right]_{x=0}$ ifadesinin eşitini araştırarak hesaplayalım. Burada karşımıza üç durum çıkmaktadır.

1. Durum: $k<m$ durumu

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}x^m f(f)\right]_{x=0}=\left[m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}\right]_{x=0}f(t)=0$$

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}x^m f(t)\right]_{x=0}=0$$

2. Durum: $k=m$ durumu

$$\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}x^m f(t)\right]_{x=0}=\left[m(m-1)...(m-m+1)x^{m-m}\right]_{x=0}f(t)=m!f(t)$$

$$W_m(t)=\frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}x^m f(t)\right]_{x=0}=\frac{1}{m!}m!f(t)=f(t)$$

3. Durum: $k>m$ durumu $\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}x^m f(t)\right]_{x=0}=\left[m(m-1)...(m-m+1)0\right]_{x=0}f(t)=0$ olur.

$$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}x^m f(t)\right]_{x=0}=0$$

Bu üç durum göz önüne alınarak $w(x,t)=x^m f(t)$ olmak üzere

$$W_k(t)=\delta(k-m)f(t),\ \delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

Tablo 5 x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu

$w(x,t)$	$W_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}w(x,t)\right]_{t=0}$
$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W_k(t)=U_k(t)\pm V_k(t)$
$w(x,t)=c\,u(x,t)\ (c\in R)$	$W_k(t)=c\,U_k(t)\ \ (c\in R)$
$w(x,t)=\frac{\partial^r}{\partial x^r}u(x,t)$	$W_k(t)=\frac{(k+r)!}{k!}\,U_{k+r}(t)$
$w(x,t)=\frac{\partial^s}{\partial t^s}u(x,t)$	$W_k(t)=\frac{\partial^s}{\partial t^s}U_k(t)$
$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$	$W_k(t)=\sum_{r=0}^{k}V_r(t)U_{k-r}(t)=\sum_{k=0}^{k}U_r(t)V_{k-s}(t)$
$w(x,t)=x^m t^n$	$W_k(t)=\delta(k-m)\,t^n$
$w(x,t)=x^m t^n\,u(x,t)$	$W_k(t)=U_{k-m}(t)t^n$

Benzer şekilde t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tanımını kullanarak aşağıdaki tablo elde edilebilir.

Tanım 3.7.

İki bileşenli u(x,t) fonksiyon olmak üzere, linear olmayan N$u(x,t)$' nin x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşümü fonksiyonu (N$u(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t)$ fonksiyonun lineer olmayan fonksiyonu)

$$N_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}Nu(x,t)\right]_{x=0} \tag{3.9}$$

$$N_k(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}Nu\left(\sum_{k=0}^{\infty}U_k(t)x^k\right)\right]_{x=0}$$

olarak tanımlanır.

Tablo 6 t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$w(x,t)$	$W_h(x)=\frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}w(x,t)\right]_{t=0}$
$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W_h(x)=U_h(x)\pm V_h(x)$
$w(x,t)=c\,u(x,t)\ (c\in R)$	$W_h(x)=c\,U_h(x)\ \ (c\in R)$
$w(x,t)=\frac{\partial^r}{\partial x^r}u(x,t)$	$W_h(x)=\frac{\partial^r}{\partial x^r}U_h(x)$
$w(x,t)=\frac{\partial^s}{\partial t^s}u(x,t)$	$W_h(x)=\frac{(h+s)!}{h!}U_{h+s}(x)$
$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$	$W_h(x)=\sum_{s=0}^{h}V_s(x)U_{h-s}(x)=\sum_{s=0}^{h}U_s(x)V_{h-s}(x)$
$w(x,t)=x^m t^n$	$W_h(x)=x^m\delta(h-n)$
$w(x,t)=x^m t^n\,u(x,t)$	$W_h(x)=x^m U_{h-n}(x)$

Tablo 7 Lineer olmayan fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kod

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$Nu(x,t)=u^m(x,t)$	$N_0(t)=U_0^m(t)$ $N_1(t)=mU_0^{m-1}(t)U_1(t)$ $N_2(t)=\frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(t)U_1^2(t)+mU_0^{m-1}(t)U_2(t)$ $N_3(t)=\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)U_0^{m-3}(t)U_1^3(t)+m(m-1)U_0^{m-2}(t)U_2(t)U_1(t)+mU_0^{m-1}(t)U_3(t)$ $\vdots$
$Nu(x,t)=\cos(u(x,t))$	$N_0(t)=\cos(U_0(t))$ $N_1(t)=-\sin(U_0(t))U_1(t)$ $N_2(t)=-\sin(U_0(t))U_2(t)-\frac{1}{2!}\cos(U_0(t))U_1^2(t)$ $N_3(t)=-\sin(U_0(t))U_3(t)-\cos(U_0(t))U_2(t)U_1(t)+\frac{1}{3!}\sin(U_0(t))U_1^3(t)$ $\vdots$
$Nu(x,t)=e^{u(x,t)}$	$N_0(t)=e^{U_0(t)}$ $N_1(t)=U_1(t)e^{U_0(t)}$ $N_2(t)=\left(U_2(t)+\frac{1}{2!}U_1^2(t)\right)e^{U_0(t)}$ $N_3(t)=\left(U_3(t)+U_1(t)U_2(t)+\frac{1}{3!}U_1^3(t)\right)e^{U_0(t)}$ $\vdots$

$Nu(x,t)=\ln(u(x,t))$	$N_0(t)=\ln(U_0(t))$ $N_1(t)=\frac{U_1(t)}{U_0(t)}$ $N_2(t)=\frac{U_2(t)}{U_0(t)}-\frac{1}{2}\frac{U_1^2(t)}{U_0^2(t)}$ $N_3(t)=\frac{U_3(t)}{U_0(t)}-\frac{U_1(t)U_2(t)}{U_0^2(t)}+\frac{1}{3}\frac{U_1^3(t)}{U_0^3(t)}$ $\vdots$

$Ny(x)$	**Maple Kod**
	`restart;`
	`NF:=N(u(x)):# Lineer Olmayan Fonksiyon`
	`m:=5:  # Mertebe`
	`u[x]:=sum(u[b]*x^b,b=0..m):`
	`NF[x]:=subs(u(x)=u[x],NF):`
	`s:=expand(NF[x],x):`
	`dt:=unapply(s,x):`
	`for i from 0  to m do`
	`n[i]:=((D@@i)(dt)(0)/i!):`
	`print(N[i],n[i]);`
	`od:`

Tanım 3.8.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, linear olmayan N*u(x,t)*' nin *t* boyunca hesaplanacak çözümün diferansiyel dönüşümü (N*u(x,t)* fonksiyonu *u(x,t)* fonksiyonun lineer olmayan fonksiyonu)

$$N_h(x)=\frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}Nu(x,t)\right]_{t=0} \tag{3.10}$$

$$N_h(x)=\frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}Nu\left(\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h\right)\right]_{t=0}$$

olarak tanımlanır.

Tablo 8 Lineer olmayan fonksiyonlar için t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu ve maple kodu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$Nu(x,t)=u^m(x,t)$	$N_0(x)=U_0^m(x)$ $N_1(x)=mU_0^{m-1}(x)U_1(x)$ $N_2(x)=\frac{1}{2}m(m-1)U_0^{m-2}(x)U_1^2(x)+mU_0^{m-1}(x)U_2(x)$ $N_3(x)=\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)U_0^{m-3}(x)U_1^3(x)+m(m-1)U_0^{m-2}(x)U_2(x)U_1(x)$ $+mU_0^{m-1}(x)U_3(x)$

$Nu(x,t)=\cos(u(x,t))$	$N_0(x)=\cos(U_0(x))$ $N_1(x)=-\sin(U_0(x))U_1(x)$ $N_2(x)=-\sin(U_0(x))U_2(x)-\frac{1}{2!}\cos(U_0(x))U_1^2(x)$ $N_3(x)=-\sin(U_0(x))U_3(x)-\cos(U_0(x))U_2(x)U_1(x)+\frac{1}{3!}\sin(U_0(x))U_1^3(x)$
$Nu(x,t)=e^{u(x,t)}$	$N_0(x)=e^{U_0(x)}$ $N_1(x)=U_1(x)e^{U_0(x)}$ $N_2(x)=\left(U_2(x)+\frac{1}{2!}U_1^2(x)\right)e^{U_0(x)}$ $N_3(x)=\left(U_3(x)+U_1(x)U_2(x)+\frac{1}{3!}U_1^3(x)\right)e^{U_0(x)}$
$Nu(x,t)=\ln(u(x,t))$	$N_0(x)=\ln(U_0(x))$ $N_1(x)=\frac{U_1(x)}{U_0(x)}$ $N_2(x)=\frac{U_2(x)}{U_0(x)}-\frac{1}{2}\frac{U_1^2(x)}{U_0^2(x)}$

$Ny(x)$	**Maple Kod**
	`restart;`
	`NF:=N(u(x)):# Lineer Olmayan Fonksiyon`
	`m:=5:  # Mertebe`
	`u[x]:=sum(u[b]*x^b,b=0..m):`
	`NF[x]:=subs(u(x)=u[x],NF):`
	`s:=expand(NF[x],x):`
	`dt:=unapply(s,x):`
	`for i from 0  to m do`
	`n[i]:=((D@@i)(dt)(0)/i!):`
	`print(N[i],n[i]);`
	`od:`

3.2. İndirgenmiş N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Daha önce (Kurnaz, 2005) çalışmasında tanıtılan N boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde kullanılan seri açılımdan elde edilen indirgenmiş n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi aşağıdaki şekildedir.

Tanım 3.9.

N değişkenli $u(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k_1,k_2,\ldots k_N)$ olmak üzere, $u(x_1,x_2,\ldots,x_N)$' nin x_1 boyunca hesaplanacak çözümü,

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x_2,\ldots,x_N)x_1^k \tag{3.11}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.10.

N değişkenli $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k_1, k_2, \ldots k_N)$ olmak üzere, $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$' nin x_1 boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_k(x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\,k}} u(x_1, x_2, \ldots, x_N)\right]_{x_1=0} \tag{3.12}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.11.

$U_k(x_2, \ldots, x_N)$'nin x_1 boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi,

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_2, \ldots, x_N) x_1^{\,k} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.14) eşitliğini elde edebiliriz.

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\,k}} u(x_1, x_2, \ldots, x_N)\right]_{t=0} x_1^{\,k} \tag{3.14}$$

Tablo 9 İndirgenmiş N boyutlu diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$u(x_1, \ldots, x_N)$	$U_k(x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\,k}} u(x_1, x_2, \ldots, x_N)\right]_{x_1=0}$
$w(x_1, \ldots, x_N) = u(x_1, \ldots, x_N) \pm v(x_1, \ldots, x_N)$	$W_k(x_2, \ldots, x_N) = U_k(x_2, \ldots, x_N) \pm V_k(x_2, \ldots, x_N)$
$w(x_1, \ldots, x_N) = cu(x_1, \ldots, x_N)$	$W_k(x_2, \ldots, x_N) = cU_k(x_2, \ldots, x_N)$
$w(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, \ldots, x_N)$	$W_k(x_2, \ldots, x_N) = (k+1)U_{k+1}(x_2, \ldots, x_N)$
$w(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, \ldots, x_N)$	$W_k(x_2, \ldots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_2} U_k(x_2, \ldots, x_N)$
$w(x_1, \ldots, x_N) = x_1^{\,m} f(x_2, \ldots, x_N)$	$W_k(x_2, \ldots, x_N) = \delta(k-m) f(x_2, \ldots, x_N)$

3.3. İndirgenmiş Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Daha önce (Momani, 2007) çalışmasında tanıtılan genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemide kullaılan seri açılımdan elde edilen indirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemi aşağıdaki şekildedir.

Tanım 3.12.

$u(x,t)$ fonksiyonu t ve x boyunca diferansiyel sürekli ve analitik fonksiyon olsun. iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere, $u(x,t)$ ' nin t boyunca hesaplanacak çözümü,

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^{h\beta} \tag{3.15}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.13.

İki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere, $u(x,t)$ ' nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşümü,

$$U_h(x)=\frac{1}{\Gamma(h\beta+1)}\left[\frac{\partial^{h\beta}}{\partial t^{\beta h}}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{3.16}$$

olarak tanımlanır. Burada β parametresi zaman-kesirli mertebeden Caputo türevi ve $U_h(x)$ fonksiyonu ise spektrum fonksiyonudur.

Tanım 3.14.

$U_h(x)$ 'nin t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi,

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^{h\beta} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlanır. (3.16) ve (3.17) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.18) eşitliğini elde edebiliriz.

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(h\beta+1)}\left[\frac{\partial^{h\beta}}{\partial t^{\beta h}}u(x,t)\right]_{t=0}t^{h\beta} \tag{3.18}$$

Tablo 10 İndirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşüm tablosu

Fonksiyon	**Dönüşüm Karşılığı**
$u(x,t)$	$U_h(x)=\frac{1}{\Gamma(h\beta+1)}\left[\frac{\partial^{h\beta}}{\partial t^{h\beta}}u(x,t)\right]_{t=0}$
$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W_h(x)=U_h(x)\pm V_h(x)$
$w(x,t)=cu(x,t)$	$W_h(x)=cU_h(x)$ (c is a constant)
$w(x,y)=x^m t^n$	$W_h(x)=x^m\delta(h\beta-n)$
$w(x,y)=x^m t^n u(x,t)$	$W_h(x)=x^m U(h\beta-n)$
$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$	$W_h(x)=\sum_{s=0}^{h}V_s(x)U_{h-s}(x)=\sum_{s=0}^{h}U_s(x)V_{h-s}(x)$
$w(x,t)=\frac{\partial^{N\beta}}{\partial t^{N\beta}}u(x,t)$	$W_h(x)=\frac{\Gamma(h\beta+N\beta+1)}{\Gamma(h\beta+1)}U_{h+N}(x)$
$w(x,t)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(x,t)$	$W_h(x)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}U_h(x)$

$Nu(x,t)$	Maple Kod
	`restart;`
	`NF:=Nu(x,t):# Fonksiyon`
	`m:=5:  # Mertebe`
	`u[t]:=sum(u[b]*t^b,b=0..m):`
	`NF[t]:=subs(Nu(x,t)=u[t],NF):`
	`s:=expand(NF[t],t):`
	`dt:=unapply(s,t):`
	`for i from 0 to m do`
	`n[i]:=((D@@i)(dt)(0)/i!):`

4. UYGULAMALAR

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (RDTM); lineer, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir ve diğer yöntemlerle kıyaslandığında daha az iterasyon uygulayarak daha iyi sonuç vermektedir. Bu bölümde ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümleri anlatılacak daha sonra denklem sistemlerinin ve zaman-kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel deklemlerin nümerik çözümlerini hesaplamak için indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemin nasıl uygulanılacağı anlatılacaktır.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin temel fikrini açıklamak için aşağıda genel formda verilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemini düşünelim:

$$L_t u(x,t) + L_x u(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \tag{4.1}$$

başlangıç değeri

$$u(x,0) = f(x), \tag{4.2}$$

burada $L_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $Ru(x,t) = \varphi(x,t)u(x,t)$ kısmi türevlere sahip lineer terim, $Nu(x,t)$ lineer olmayan terim ve homojen olmayan $g(x,t)$ fonksiyonu da analitik bir fonksiyondur.

Kabul edelim ki

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_{k,h} x^k t^h \quad \text{veya} \quad u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{k,h} x^k\right] t^h = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$$

Eğer $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_{k,h} x^k t^h$ ise o zaman $u(x,t)$ fonksiyonu açık halde yazılıp t nin kuvvetine göre gruplara ayrılırsa ilk grup $t^0 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,0} x^k$, ikinci grup $t^1 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,1} x^k$ vb.

Böylece $u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$ şeklinde yazılabilir. Burada $U_h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,h} x^k$ şeklindedir.

Ayrıca $Ru(x,t) = \varphi(x,t)u(x,t)$ lineer terimi için

$$\varphi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_{k,h}x^k t^h=\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{k,h}x^k\right]t^h=\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_h(x)t^h$$

ve lineer olmayan terim

$$Nu(x,t)=\alpha(x,t)f(u)$$

olduğundan

$$\alpha(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_{k,h}x^k t^h=\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k,h}x^k\right]t^h=\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h(x)t^h$$

$$f(u)=\sum_{h=0}^{\infty}N_h(U_0(x),...,U_h(x))t^h=\sum_{h=0}^{\infty}N_h(x)t^h.$$

Son olarak homojen olmayan $g(x,t)$ analitik fonksiyonu için

$$g(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}G_{k,h}x^k t^h=\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}G_{k,h}x^k\right]t^h=\sum_{h=0}^{\infty}G_h(x)t^h$$

şeklinde düşünelim. t boyunca kısmi çözümü elde etmek için seri formda elde ettiğimiz denklemin her tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$u(x,t)=\Phi-L_t^{-1}g(x,t)-L_t^{-1}L_x u(x,t)-L_t^{-1}Ru(x,t)-L_t^{-1}Nu(x,t) \qquad (4.3)$$

olur. Burada

$$\Phi=\tau_0(x)=u(t,x)_{t=0} \text{ ve } L_t^{-1}=\int_0^t(.)\,dt$$

dir. Yukarıda elde ettiğimiz $u(x,t), f(u), g(x,t)$ ve $\varphi(x,t),$ yerine yazılırsa

$$\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h=\tau_0(x)+\int_0^t\sum_{h=0}^{\infty}G_h(x)t^h dt-\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h dt-$$
$$\int_0^t\left\{\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_h(x)t^h\right\}\left\{\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h\right\}dt-\int_0^t\left\{\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h(x)t^h\right\}\left\{\sum_{h=0}^{\infty}N_h(x)t^h\right\}dt$$

olur. Parantez içindeki ifadeleri düzenleyip seri formda yerine yazarsak

$$\left\{\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_h(x)t^h\right\}\left\{\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h\right\}=\sum_{h=0}^{\infty}t^h\sum_{s=0}^{h}\varphi_s(x)U_{h-s}(x)$$

$$\left\{\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h(x)t^h\right\}\left\{\sum_{h=0}^{\infty}N_h(x)t^h\right\}=\sum_{h=0}^{\infty}t^h\sum_{s=0}^{h}\alpha_s(x)N_{h-s}(x)$$

Buradan,

$$\sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h = \tau_0(x) + \int_0^t \sum_{h=0}^{\infty} G_h(x)t^h dt - \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h dt$$
$$-\int_0^t \sum_{h=0}^{\infty} t^h \sum_{s=0}^{h} \varphi_s(x) U_{h-s}(x) dt - \int_0^t \sum_{h=0}^{\infty} t^h \sum_{s=0}^{h} \alpha_s(x) N_{h-s}(x) dt$$

olur. Her tarafın integralleri alınırsa

$$\sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h = \tau_0(x) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{h+1}}{(h+1)} G_h(x) - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{h+1}}{(h+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_h(x)$$
$$-\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{h+1}}{(h+1)} \sum_{s=0}^{h} \varphi_s(x) U_{h-s}(x) - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{h+1}}{(h+1)} \sum_{s=0}^{h} \alpha_s(x) N_{h-s}(x)$$

Denklemin sağ tarafında $h \to h-1$ ötelemesi yapıldığı takdirde

$$\sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h = \tau_0(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{t^h}{h} G_{h-1}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{t^h}{h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{h-1}(x)$$
$$-\sum_{h=1}^{\infty} \frac{t^h}{h} \sum_{s=0}^{h-1} \varphi_s(x) U_{h-1-s}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{t^h}{h} \sum_{s=0}^{h-1} \alpha_s(x) N_{h-1-s}(x).$$

bulunur. Bu denklemin her tarafında t kuvvetine göre birbirine eşitlemeler yapılırsa (polinomların eşitliğine göre)

$$U_0(x) = \tau_0(x) \tag{4.4}$$

ve

$$(h+1)U_{h+1}(x) = G_h(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_h(x) - \sum_{s=0}^{h} \varphi_s(x) U_{h-s}(x) - \sum_{s=0}^{h} \alpha_s(x) N_{h-s}(x) \tag{4.5}$$

burada $U_h(x), \sum_{s=0}^{h} \varphi_s(x) U_{h-s}(x), \sum_{s=0}^{h} \alpha_s(x) N_{h-s}(x)$ ve $G_h(x)$ fonksiyonları sırası ile $Lu(x,t)$, $Ru(x,t)$, $Nu(x,t)$ ve $g(x,t)$ fonksiyonlarının indirgenmiş dönüşüm karşılıklarıdır.

Başlangıç şartından,

$$U_0(x) = f(x). \tag{4.6}$$

elde edilir. Buradan (4.6) denklemi (4.5) ifadesinde yerine yazılıp $U_h(x)$ değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerler indirgenmiş ters dönüşüm fonksiyonunda yerine yazılması sonucunda $\{U_h(x)\}_{h=0}^{n}$ değerlerini içeren yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}_n(x,t) = \sum_{h=0}^{n} U_h(x)t^h \tag{4.7}$$

bulunmuş olur. Burada n yaklaşık çözümün mertebesini vermektedir. Sonuçda aranılan tam çözüm ise,

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n(x,t)\,.$$

olarak bulunur.

4.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu bölümde, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu amaçla KdV denklemi ile quasi lineer kısmi türevli denklemin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümleri verilecektir.

Örnek 4.1.

Literatürde KdV denklemi olarak bilinen (Kaya, 2002)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, x \in R, \tag{4.8}$$

ve başlangıç değeri

$$u(x,0) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{4.9}$$

şeklinde olan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm

Diferansiyel denklemin analitik çözümü $u(x,t) = -\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x - k^2 t\right)\right)$ dir.

Şimdi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemi çözelim. (4.8) denklemine indirgenmiş dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$(h+1)U_{h+1}(x) = 6\sum_{s=0}^{h} U_{h-s}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_s(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_h(x) \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada $U_h(x)$, $u(x,t)$'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümüdür.

(4.9) başlangıç değerinden

$$U_0(x) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{4.11}$$

(4.11) denklemi (4.10) denkleminde yerine yazılması sonucunda istenilen mertebe kadar $U_h(x)$ değerleri ardışık olarak hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa

$$U_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)k^5}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3},$$

$$U_2(x) = -\frac{1}{8}\frac{k^8\left(-3+2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4}$$

$$U_3(x) = -\frac{1}{12}\frac{k^{11}\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\left(\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-3\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^5},$$

$$U_4(x) = -\frac{1}{96}\frac{k^{14}\left(2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4+15-15\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

$$\vdots$$

O zaman $\{U_h(x)\}_{h=0}^{4}$ değerlerinin ters indirgenmiş diferansiyel dönüşümü alınarak verilen denklemin dördüncü mertebeden yaklaşık çözümü

$$\tilde{u}_4(x,t) = \sum_{h=0}^{4} U_h(x)t^h = -\frac{k^2\left(15k^{12}-15k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2+2k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)t^4}{96\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(8k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3-24k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^3$$

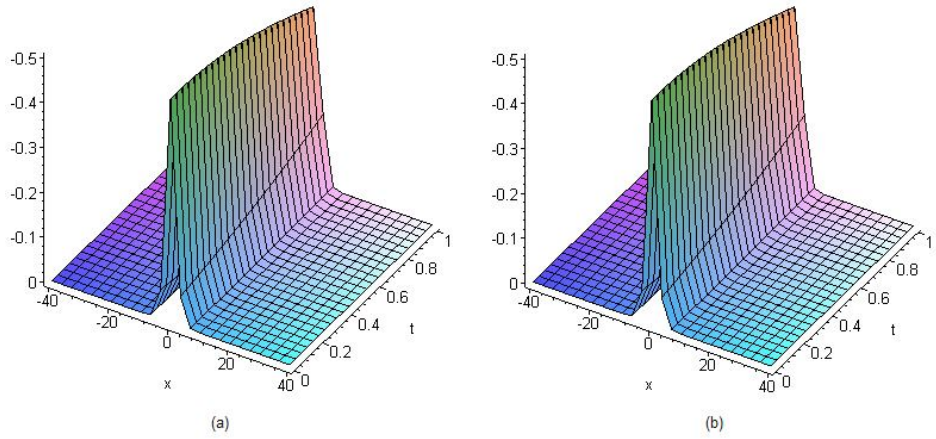
$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(-36k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-24k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k^5\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3}t-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2}$$

Böylece problemin aranılan analitik çözümü

$$u(x,y)=\lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n(x,y)\,.$$

şeklinde verilir. Bu çözüm (Kaya, 2002) de verilen $u(x,t)=-\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x-k^2t\right)\right)$ analitik çözüme yakınsak olduğu ayrıca (Abassy, 2007) de verilen varyasyonel iterasyon yöntemi ile kıyaslandığında aynı olduğu şekilden görülebilir.



Şekil 1: İndirgenmiş dönüşüm yöntemiyle elde edilen $\tilde{u}_4(x,y)$ yaklaşık çözümü (a) $u(x,t)=-\frac{k^2}{2}\sec h\left(\frac{k}{2}\left(x-k^2t\right)\right)$ analitik çözüm ile kıyaslanması, (b) varyasyonel iterasyon yöntemi soliton dalga çözümünün kıyaslaması (k=1).

Örnek 4.2

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+(1+u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \tag{4.12}$$

birinci mertebe quasi-lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denkleminin

$$u(x,0)=\frac{x-1}{2} \tag{4.13}$$

başlangıç şartı ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü indirgenmiş dönüşüm yöntemi ile bulalım.

Çözüm

(4.12) denklemi ve (4.13) başlangıç şartının indirgenmiş diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$(h+1)U_{h+1}(x)=-\frac{\partial U_h(x)}{\partial x}-\sum_{s=0}^{h}U_{h-s}(x)\frac{\partial U_s(x)}{\partial x} \tag{4.14}$$

başlangıç şartı

$$U_0(x)=\frac{x-1}{2} \tag{4.15}$$

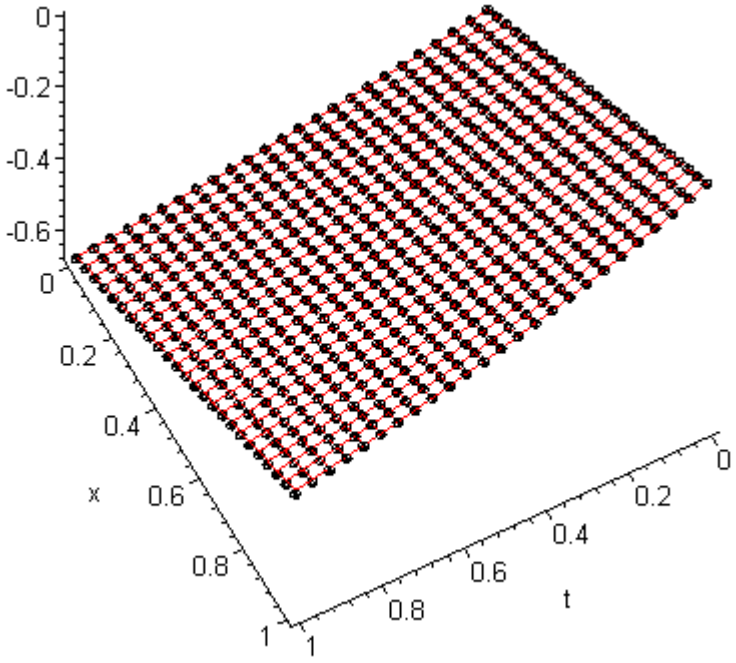
(4.15) denkleminin (4.14) denkleminde yerine yazılması sonucunda istenilen mertebe kadar $U_h(x)$ değerleri ardışık olarak hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa

$$U_1(x)=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4},$$
$$U_2(x)=\frac{x}{8}+\frac{1}{8},$$
$$U_3(x)=-\frac{x}{16}-\frac{1}{16},$$
$$U_4(x)=\frac{x}{32}+\frac{1}{32},\ldots$$

bu şekilde devam edilerek $U_h(x)$ değerleri hesap edilir. Hesaplanan $U_h(x)$ değerlerinin (3.3) de yerine yazılması ile

$$\tilde{u}_5(x,t)=\sum_{h=0}^{5}U_h(x)t^h$$
$$\tilde{u}_5(x,t)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)t+\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{8}\right)t^2+$$
$$\left(-\frac{x}{16}-\frac{1}{16}\right)t^3+\left(\frac{x}{32}+\frac{1}{32}\right)t^4+\left(-\frac{x}{64}-\frac{1}{64}\right)t^5$$

bulunan bu ifade, varyasyonel iterasyon yöntemi ve adomian ayrışım yöntemi uygulanarak (Bildik, 2006)'da verilen çözüm ile aynıdır.



Şekil 2: İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen beşinci mertebe yaklaşık çözüm ile analitik çözümün kıyaslanması

Şekil 2'de indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen beşinci mertebe yaklaşık çözüm ile $u(x,t)=\dfrac{x-t-1}{t+2}$ analitik çözümün kıyaslanması görülmektedir. Burada çizgilerle verilen RDTM ile elde edilen çözümü, daireler ise analitik çözümü göstermektedir. Buradan da anlaşılacağı üzere elde edilen yaklaşık çözüm analitik çözüm için iyi bir yaklaşımdır.

4.2. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması

Bu bölümde, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu amaçla Coupled Burgers denklemi ile Coupled KdV denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümleri verilecektir.

Örnek 4.3.

$$\begin{aligned} &u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)-2u(x,t)u_x(x,t)+\big(u(x,t)v(x,t)\big)_x=0\\ &v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)-2v(x,t)v_x(x,t)+\big(u(x,t)v(x,t)\big)_x=0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Coupled Burgers denklemi (Ganji, 2008) olarak bilinen ve

$$u(x,0)=\sin(x),\ v(x,0)=\sin(x) \tag{4.17}$$

başlangıç şartı ile verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümünü indirgenmiş dönüşüm yöntemi ile bulalım.

Çözüm

(4.16) denklem sistemi ve (4.17) başlangıç şartının indirgenmiş diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$\begin{aligned}(h+1)U_{h+1}(x)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_h(x)-2\sum_{s=0}^{h}U_s(x)\frac{\partial}{\partial x}U_{h-s}(x)-\frac{\partial}{\partial x}\sum_{s=0}^{h}U_s(x)V_{h-s}(x)\\(h+1)V_{h+1}(x)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_h(x)-2\sum_{s=0}^{h}V_s(x)\frac{\partial}{\partial x}V_{h-s}(x)-\frac{\partial}{\partial x}\sum_{s=0}^{h}U_s(x)V_{h-s}(x)\end{aligned} \tag{4.18}$$

başlangıç şartı

$$U_0(x)=\sin(x),V_0(x)=\sin(x). \tag{4.19}$$

(4.15) denklemini (4.14) denkleminde yerine yazılması sonucunda istenilen mertebe kadar $U_h(x)$ değerleri ardışık olarak hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}U_1(x)&=-\sin(x),\ \ U_2(x)=\frac{\sin(x)}{2},U_3(x)=-\frac{\sin(x)}{6},\ \cdots,U_h(x)=\frac{\sin(x)(-1)^h}{h!}\\V_1(x)&=-\sin(x),\ \ V_2(x)=\frac{\sin(x)}{2},V_3(x)=-\frac{\sin(x)}{6},\ \cdots,V_h(x)=\frac{\sin(x)(-1)^h}{h!}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $U_h(x)$ ve $V_h(x)$ değerleri için indirgenmiş ters diferansiyel dönüşüm tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n(x,t)&=\sum_{k=0}^{n}U_k(x)t^k=\sin(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sin(x)e^{-t}\\\tilde{v}_n(x,t)&=\sum_{k=0}^{n}V_k(x)t^k=\sin(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sin(x)e^{-t}\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur. Bulunan bu sonuç (Ganji, 2007)'de verilen VIM çözümü ve analitik çözüm (Ravi Kanth, 2008) ile aynıdır.

Örnek 4.4.

Literatürde coupled KdV denklemi olarak bilinen

$$\begin{aligned}u_t(x,t)&=a\left(u_{xxx}(x,t)+6u(x,t)u_x(x,t)\right)+2bv(x,t)v_x(x,t)\\v_t(x,t)&=-v_{xxx}(x,t)-3u(x,t)v_x(x,t)\end{aligned} \tag{4.20}$$

ve başlangıç şartı

$$u(x,0) = -\frac{1+a}{3+6a}k^2 + 4k^2\frac{e^{kx}}{(1+e^{kx})^2},$$
$$v(x,0) = \frac{Me^{kx}}{(1+e^{kx})^2}, \tag{4.21}$$

burada $a \neq \frac{1}{2}, ab < 0$ ve $M = \left(-\frac{24a}{b}\right)^{1/2} k^2$ (k sabit)

şeklinde olan denklem siteminin çözümünü bulalım.

Diferansiyel denklem siteminin analitik çözümü $u(x,t) = -\frac{1+a}{3+6a}k^2 + 4k^2\frac{e^{k(x+ct)}}{(1+e^{k(x+ct)})^2}$ ve $v(x,t) = \frac{Me^{k(x+ct)}}{(1+e^{k(x+ct)})^2}$ dir.

Şimdi indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemi çözelim. (4.20) sistemine indirgenmiş dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$(h+1)U_{h+1}(x) = a\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_h(x) + 6a\sum_{s=0}^{h}U_s(x)\frac{\partial}{\partial x}U_{h-s}(x) + 2b\sum_{s=0}^{h}V_s(x)\frac{\partial}{\partial x}V_{h-s}(x)$$
$$(h+1)V_{h+1}(x) = -\frac{\partial^3}{\partial x^3}V_h(x) - 3\sum_{s=0}^{j}U_s(x)\frac{\partial}{\partial x}V_{h-s}(x) \tag{4.22}$$

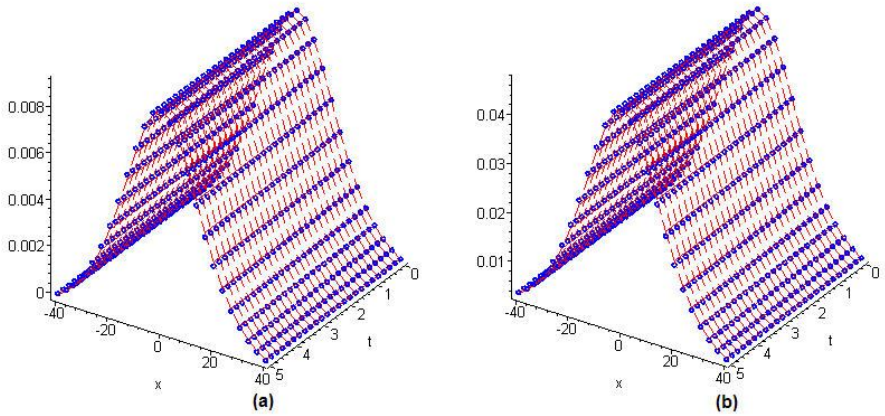
başlangıç değerleri

$$U_0(x) = -\frac{1+a}{3+6a}k^2 + 4k^2\frac{e^{kx}}{(1+e^{kx})^2},\ V_0(x) = \frac{Me^{kx}}{(1+e^{kx})^2} \tag{4.23}$$

(4.23) değerlerinin (4.22) denkleminde yerine yazılması ile sadece bir iterasyon yaparak

$$\tilde{u}_1(x,t) = \frac{0.00001}{\left(1+e^{0.1x}\right)^5}\left(\begin{array}{l}\left(-3e^{0.1x} - 8e^{0.2x} + 8e^{0.4x}\right)t + \\ \left(-83 + 3600e^{0.1x} + 11000e^{0.2x} + 11000e^{0.3x}\right. \\ \left. + 3600e^{0.4x} - 83e^{0.5x}\right)\end{array}\right)$$
$$\tilde{v}_1(x,t) = \frac{0.00002}{\left(1+e^{0.1x}\right)^5}\left(\begin{array}{l}\left(-7e^{0.1x} - 10e^{0.2x} + 5e^{0.3x}\right)t + \\ \left(9500e^{0.1x} + 28000e^{0.2x} + 28000e^{0.3x} + 9500e^{0.4x}\right)\end{array}\right)$$

elde edilirki, bu sonuç (El-Wakil, 2009) da VIM ile elde edilen sonuç ile aynıdır.



Şekil 3: İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile analitik çözümün kıyaslanması $a=-1.5$, $c=0.1$, $b=0.1$ and $k=0.1$

Şekil 3 (a)-(b) de indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile analitik çözümün kıyaslanması görülmektedir. a) analitik çözümü $u(x,t)=-\frac{1+a}{3+6a}k^2+4k^2\frac{e^{k(x+ct)}}{(1+e^{k(x+ct)})^2}$ ile RDTM ile bir itersyon sonucunda elde ettiğimiz çözümün kıyaslanması b) analitik çözümü $v(x,t)=\frac{Me^{k(x+ct)}}{(1+e^{k(x+ct)})^2}$ ile elde edilen çözümün kıyaslanması. Şekilde çizgilerle yaklaşık çözüm, çemberle analitik çözüm gösterilmiştir.

4.3. İndirgenmiş Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Zaman Kesirli Mertebeli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması

Bu bölümde, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu amaçla zaman-kesirli mertebeden türevli difüzyon denklemi ve dalga denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümleri verilecektir.

Örnek 4.5.

Zaman-Kesirli mertebeden türevli difüzyon denklemi (Momani, 2007)

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\quad t>0, x\in R, 0<\alpha\leq 1 \tag{4.24}$$

başlangıç şartı

$$u(x,0)=\sin(x), \tag{4.25}$$

şeklindeki gibi tanıtılsın. Burada $u = u(x,t)$, iki değişkenli fonksiyondur

Çözüm

İndirgenmiş kesirli diferansiyel dönüşüm tablosundan (4.24) denkleminin dönüşüm karşılığı

$$\frac{\Gamma(h\alpha+\alpha+1)}{\Gamma(h\alpha+1)}U_{h+1}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_h(x), \tag{4.26}$$

ve başlangıç şartı

$$U_0(x) = \sin(x), \tag{4.27}$$

Bu değer (4.26) denkleminde yerine yazılırsa ardışık $U_h(x)$ değerleri hesaplanılır.

$$U_1(x) = -\frac{\sin(x)}{\Gamma(1+\alpha)},\quad U_2(x) = \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+2\alpha)},$$
$$U_3(x) = -\frac{\sin(x)}{\Gamma(1+3\alpha)}, U_4(x) = \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+4\alpha)}$$
$$U_5(x) = -\frac{\sin(x)}{\Gamma(1+5\alpha)},\quad U_6(x) = \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+6\alpha)},$$
$$U_7(x) = -\frac{\sin(x)}{\Gamma(1+7\alpha)}, U_8(x) = \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+8\alpha)}$$

Daha sonra indirgenmiş ters diferansiyel dönüşüm tanımından $\{U_h(x)\}_{h=0}^{8}$ dizisinin değerleri kullanılarak sekizinci mertebeden diferansiyel denklemin istenilen yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_8(x,t) = \sum_{h=0}^{8} U_h(x)t^{h\alpha} &= \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha} + \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+2\alpha)}t^{2\alpha} \\ &- \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} + \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+4\alpha)}t^{4\alpha} - \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+5\alpha)}t^{5\alpha} + \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+6\alpha)}t^{6\alpha} \\ &- \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+7\alpha)}t^{7\alpha} + \frac{\sin(x)}{\Gamma(1+8\alpha)}t^{8\alpha}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunmuş olur. Denklemin analitik çözümü ise,

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n(x,y).$$

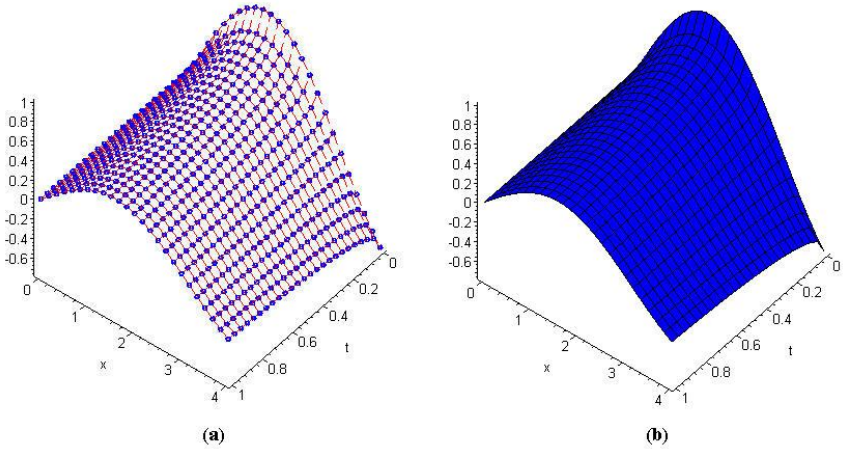
şeklinde bulunabilir. Hesaplanan $U_h(x)$ değerleri kolayca formülüze edilirse

$$U_h(x) = \frac{(-1)^k \sin(x)}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

olacağından analitik çözüm

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \sin(x) t^{h\alpha}}{\Gamma(h\alpha+1)}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değer (Odibat, 2008)'de verilen analitik çözüm ile aynıdır.



Şekil 4: $\tilde{u}_8(x,y)$ yaklaşık çözüm ile (a) $u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \sin(x) t^{h\alpha}}{\Gamma(h\alpha+1)}$ analitik çözüm ile kıyaslanması, (b) Varyasyonel iterasyon yöntemiyle kıyaslanması.

Örnek 4.6.

Zaman-Kesirli mertebeden türevli dalga denklemi (Odibat, 2008)

$$\frac{\partial^{1.5} u(x,t)}{\partial t^{1.5}} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.29}$$

başlangıç şartı

$$u(x,0) = x,\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = x^2. \tag{4.30}$$

Verilsin. İndirgenmiş ters diferansiyel dönüşüm tanımından

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} U_{h+3}(x) = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_h(x), \text{ for } \alpha = \frac{1}{2} \text{ and } N = 3 \tag{4.31}$$

ve başlangıç şartı

$$U_0(x) = x,\ U_2(x) = x^2 \tag{4.32}$$

olur. Bu değer (4.31) denkleminde yeri yazılırsa

$$U_1(x)=0,\ U_5(x)=\frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)},U_8(x)=\frac{x^2}{\Gamma(5)},U_{11}(x)=\frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)},$$

$$U_{14}(x)=\frac{x^2}{\Gamma(8)},U_{17}(x)=\frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{19}{2}\right)},U_{20}(x)=\frac{x^2}{\Gamma(11)},\ldots$$

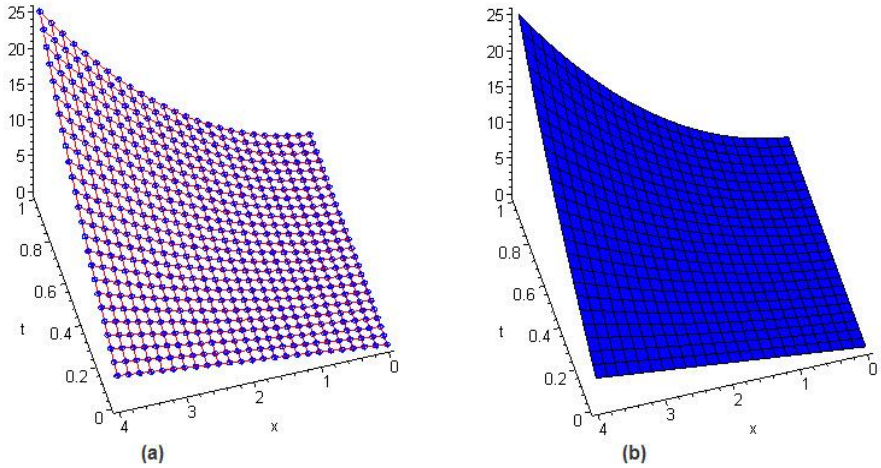
bulunan tüm $U_h(x)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{20}(x,t)=\sum_{h=0}^{20}U_h(x)t^{h/2},$$

$$\tilde{u}_{20}(x,t)=x+x^2t+\frac{x^2t^{5/2}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}+\frac{x^2t^4}{\Gamma(4+1)}+\frac{x^2t^{11/2}}{\Gamma\left(\frac{11}{2}+1\right)}+\frac{x^2t^7}{\Gamma(7+1)}+$$

$$\frac{x^2t^{17/2}}{\Gamma\left(\frac{17}{2}+1\right)}+\frac{x^2t^{10}}{\Gamma(10+1)},$$

dir. Bu yaklaşık çözüm (Odibat, 2008)'de verilen VIM ve ADM ile elde edilmiş yaklaşık çözüm ile aynıdır.



Şekil 5: İndirgenmiş dönüşüm yönteminin kıyaslaması (a) $u(x,t)=x+x^2\sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{t^{1+\frac{3h}{2}}}{\Gamma\left(2+\frac{3h}{2}\right)}\right]$ analitik çözüm ile (b) Varyasyonel iterasyon yöntemiylekıyaslanması

Hesaplanan $U_h(x)$ değerleri kolayca formülüze edilebilir

$$U_h(x) = \frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{h+2}{2}\right)}, h = 5,8,11,14,...$$

olacağından analitik çözüm

$$u(x,t) = x + \sum_{h=5,8,11,...}^{\infty} \frac{x^2 t^{\frac{h}{2}}}{\Gamma\left(\frac{h+2}{2}\right)}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değer verilen analitik çözüm ile aynıdır.

5. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada literatürde ilk kez tanıtılan "İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi" hakkında bilgiler verilerek yöntemin bazı denklemlere nasıl uygulanacağını göstermek için uygulamalar yapılmıştır. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi diğer yöntemlerle örneğin G. Adomian tarafından 1986 yılında tanıtılan Adomian ayrışım yöntemi, J. H. He tarafından 1997 yılında tanıtılan varyasyonel iterasyon yöntemi ve J. K. Zhou tarafından tanıtılan diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kıyaslandığında avantajlarını şöyle sıralayabiliriz.

1) İndirgenmiş diferansiyel yöntemi, fonksiyonların türevini kullanarak sonuca ulaşırken, adomian ayrışım yöntemi ve varyasyonel iterasyon yönteminde fonksiyonların integrali kullanılır. Bu nedenle bazı denklemlerin indirgenmiş dönüşüm yöntemi ile çözümü elde edilirken istenildiği kadar iterasyon uygulanırken diğer yöntemlerde alınamayan integrallerden dolayı iterasyon sayısı üçü geçmemektedir. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminde fonksiyonlar üzerinden rekürans bağıntısı ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü rahatlıkla hesaplanabilir. Yüksek işlem hacmi gerekmemektedir.

2) Diferansiyel denklemlerin çözümü indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilirken kullanılan rekürans bağıntısı diğer yöntemlere göre rahatlıkla yazılabilir. Örneğin varyasyonel iterasyon yönteminde rekürans bağıntısı hesaplanabilmesi için her denklem için değişen Lagrange çarpanınının hesaplanması gerekir. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminde rekürans bağıntısı çözümü istenilen denklemde verilen ifadelerin yerine dönüşüm karşılıkları yazılarak kolay bir şekilde oluşturulabilir.

3) İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminde rekürans bir boyutlu k değişkeni üzerinden yapılırken, diferansiyel dönüşüm yönteminde ise diferansiyel denkleminin boyutu arttıkca rekürans denkleminde kullanılan değişkende artmaktadır. Bu nedenle diferansiyel dönüşüm yöntemi ile iterasyon uygulamak hesaplamalarda çok iyi bilgisayarlar kullanılmasına rağmen oldukça zordur.

KAYNAKLAR

Abassy T. A., El-Tawil M. A., El Zoheiry H. (2007) "*Solving nonlinear partial differential equations using the modified variational iteration Padé technique*", Journal of Computational and Applied Mathematics 207 (1) 73-91.

Abdel-Halim Hassan I. H. (2002) *"On solving eigenvalue problems by using a differential transformation",* Applied Mathematics and Computation; 127, 1-22.

Abdel-Halim Hassan I. H. (2002) *"Different Applications for the differential transformation in differential equations",* Applied Mathematics and Computation, 129, 183-221.

Abdel-Halim Hassan I. H. (2004) *"Differential Transformation technique for solving higher-order initial value problems",* Applied Mathematics and Computation, 154, 299-311.

Adomian G. (1984) *"New Approach To Nonlinear Partial Differential Equations",*. J. Math. Anal. Appl, 135, 420–434.

Adomian G. (1988) *"Review of The Decomposition Method In Applied Mathematics",* J. Math. Anal. Appl., 135, 501-544.

Adomian G. (1988) *"Nonlinear stochastic system theory and application to physics",* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Adomian G. (1994) *"Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method",* Boston, Kluwer Academic Publishers.

Arikoğlu A., Özkol I. (2005) *"Solution of boundry value problems for integro-differential equations by using differential transform method",* Applied Mathematics and Computation 168 (2), 1145-1158.

Arikoğlu A., Özkol I. (2006) *"Solution of differential–difference equations by using differential transform method",* Applied Mathematics and Computation, 181(1), 153-162.

Ayaz F. (2002) *"Solution of partial differential equations by using two dimensional differential transform method",* Third Intern. Symp. Math&Comput. Appl., Konya, Turkey.

Ayaz F. (2003) *"On the two dimensional differential transform method",* Applied Mathematics and Computation, 143, 361-374.

Ayaz F., Oturanç G., Kurnaz A., Kiriş M.E. (2003) *"Isı İletim denkleminin dönüşüm yöntemi ile çözümü",* 14. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Isparta 3-5 Eylül.

Ayaz F., (2004) *"Applications of differential transform methods to differential algebric equations",* Applied Mathematics and Computation, 152, 649-657.

Ayaz F., Oturanç G. (2004) *"An approximate solution of burgers equation by differential transform method",* Selcuk Journal of Applied Mathematics; 5(2), 15-24.

Bildik N., Konuralp A. (2006) *"Two-dimensional differential transform method, Adomian's decomposition method, and variational iteration method for partial differential equations",* International Journal of Computer Mathematics, 83 (12), 973–987.

Bildik N., Konuralp A. (2006)*"The use of variatonal iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations",* International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(1), 65-70.

Bildik N., Konuralp A., Bek F. O., Küçükarslan S. (2005) *"Solution of different type of partial differential equation by differential transform method and adomian's decomposition method",* Applied Mathematics and Computation.

Bulut H., Evans D. J. (2001) "*On solution of the Ricatti equation by the decompositions method",* International Journal of Computer Mathematics, 80(1), 1–7.

Bulut H., Asil V., Evans D. J. (2005)*"The Adomian decomposition method for the approximate solution of homogeneous differential equations with dual variable and dual coefficients",* International Journal of Computer Mathematics, 82(8), 977–986.

Chen C. K., Ho S. H. (1996) *"Application of differential transformation to eigenvalue problems",* Applied Mathematics and Computation, 79, 179-188.

Chen C. L., Liu Y. C. (1998) *"Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems",* Applied Mathematics and Computation, 95, 155-164.

Chen C. K., Ho S. H. (1999)*"Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method",* Applied Mathematics and Computation, 106, 171-179.

Chen C. K., Ho S. H. (1999) *"Transverse vibration of a rotating twisted timoshenko beams under axial loading using differential transform",* Intenational Journal of Mechanical Science, 41(11), 1339-1356.

Chen C. K., Ju S. P. (2004) *"Application of differential transformation to trasient advective-dispersive transport equation",* Applied Mathematics and Computation, 155, 25-38.

Chen C. K., Chen S. S. (2004) *"Application of the differential transformation method to a non linear conservative system",* Applied Mathematics and Computation, 154, 431-441.

Debnath L. (1997) "*Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers",* Birkhauser, Boston.

Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D., Luchko Y. (2005) *"Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods",* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 743–773.

El-Sayed A. M. A. (1992) *"On the fractional differential equations",* Applied Mathematics and Computation, 49, 205–213.

El-Sayed A. M. A. (1993) *"Linear differential equations of fractional orders",* Applied Mathematics and Computation, *55*, 1-12.

El-Wakil S. A., Abulwafa E. M., Abdou M. A. *"An Improved variational iteration method for solving coupled KdV and Boussinesq-like B(m,n) equations",* Chaos Solitons Fractals (in press).

Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. (2007) "*Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations"* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.

Ertürk V. S., Momani S., Odibat Z. (2008) *"Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractianal order",* Applied Mathematics and Computation, 197 (2), 467-477.

Evans L. C. (1998) *"Partial differential equations",* American Mathematical Society Providence, Rhod Island, 19, 1-2.

Faires J. D., Burden R. L. (1993) *"Numerical Methods",* MA. PWS Publishig, Boston. 1993.

Ganji D. D., Sadighi A., Khatami I. (2008) *"Assessment of two analytical approaches in some nonlinear problems arising in engineering sciences",* Physics Letters A, 372, 4399–4406.

Gorenflo R., Mainardi F. (1997) *"Fractional Calculus: İntegral and Diffrential Equations of Fractional Order",* ISBN 3-221-82913-X. Volume No. 378 of the series CISM Lecture Notes, International Centre fort he Mechanical Science Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, Italy.

He J. H. *"Variational iteration method for delay differential equations"*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2, 4, 1997, 235-236.

He J. H. (2006) *"Some asymptotic Methods for strongly nonlinear equations",* International Journal of Modern Physics B, 20(10), 1141-1199.

He J. H. (2006) *"Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems",* Berlin: dissertation.de-Verlag.

He J. H. (1998) *"Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media",* Comput Methods Appl. Mech. Engrg.,167, 57-68.

Iserles A. (1992) "*On the generalized pantograph functional-differential equation",* European J. Appl. Math., 4, 1-38.

Jang M. J., Chen C. L. (1997) *"Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transform method",* Applied Mathematics and Computation, 88, 137-151.

Jang M. J., Chen C. L., Liu Y. C. (2000) *"On the solving initial value problems using the differtential transform method",* Applied Mathematics and Computation; 115, 145-160.

Jang M. J., Chen C. L., Liu Y. C. (2001) *"Two dimensional differential transform for partial differential equation"*, Applied Mathematics and Computation, 121, 261-270.

Jang M. J., Wang J. S., Liu Y. C. (2003) *"Applying differtential transform method to parameter identification problems",* Applied Mathematics and Computation, 139, 2-3, 491-502.

Kaya D., Aassila M. (2002) *"An application for a generalized KdV equation by the decomposition method",* Physics Letters A 299, 201–206.

Kaya D., Yokuş A. (2002) *"A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial differential equations",* Mathematics and Computers in Simulation; 60, 507-512.

Kemple S., Beyer H. (1997) *"Global and causal solutions of fractional differential equations, in: Transform Methods and Special Functions",* Varna96, Proceedings of 2nd International Workshop (SCTP), Singapore, 210–216.

Keskin Y. (2005) *"Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözülmesi",* Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Keskin Y., Kurnaz A., Kiriş, M. E., Oturanç, G. (2007) *"Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform*

method", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2), 159-164.

Keskin Y., Oturanç G. (2008) *"The Differential Transform Methods For Nonlinear Functions And Its Applications",* Selçuk Journal of Applied Mathematics, 9(1), 69-76.

Keskin Y., Oturanc G. (2009) *"Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations",* International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 10 (6), 741-749.

Keskin Y., Oturanc G. (2010) *"Reduced Differential Transform Method for fractional partial differential equations",* Nonlinear Science Letters A 1(2), 61-72.

Keskin Y., Oturanc G., (2010) *"Reduced Differential Transform Method for generalized KdV equations",* Mathematical and Computational Applications, 15(3) 382-393.

Kurnaz A., Oturanç, G. (2005) *"The differential transform approximation for the system of ordinary differential equuation"*, International Journal of Computer Mathematics, 82, 709-719.

Kurnaz A., Oturanç G., Kiriş M. E. (2005) *"n dimensional differential transformation method for solving PDE's",* International Journal of Computer Mathematics, 82(3), 369 - 380.

Kuo B. L. (2005) *"Application of the differential transformation method to the solution of the free convection problem"*, Applied Mathematics and Computation, 165(1) 63-79.

Luchko Y., Srivastava H. M. (1995) *"The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus",* Comput. Math. Appl. 29, 73–85.

Luchko Y., Gorenflo R. (1998) *"The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative",* Preprint Series A08-98, Fachbereich Mathematik und Informatick, Freie Universitat Berlin.

Momani S., Abuasad S. (2006) *"Application of He's variational-iteration method to Helmholtz equation"*, Chaos, Solitons &Fractals, 27(5), 1119–1123.

Momani S., Noor M. A. (2006) "*Numerical methods for fourth-order fractional integro- differential equations",* Applied Mathematics and Computation, 182, 754-760

Momani S., Odibat Z. (2007) *"Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order",* Chaos, Solitons & Fractals, 31(5), 1248-1255.

Momani S., Shawagfeh N. (2007) "*Decomposition Method for solving fractional Riccati differential equations",* Applied Mathematics and Computation, 182, 1083-1092.

Momani S., Odibat Z., Ertürk V. S. (2007) *"Generalized differential transform method for solving a space-and time-fractional diffusion-wave equation",* Physics Letters A, 370(5-6), 379-387.

Momani S., Odibat Z., (2007) *"Comparison between the homotopy perturbation method and the variational iteration method for linear fractional partial differential equations",* Computers and Mathematics with Applications, 54(7-8), 910-919.

Momani S. and Odibat Z. "*Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order*" Applied Mathematics and Computation, (In Press).

Odibat Z., Momani S. (2006) "*Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order",* Internatioanal Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(1), 27-34.

Odibat Z., Shawagfeh N. T. (2007) "*Generalized Taylor's Formula*" Applied Mathematics and Computation, 186(1), 286-293.

Odibat Z., Momani S. (2008) "*Generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order", Applied Mathematics Letters,* 21 (2), 194–199.

Oldham K. B., Spanier J. **(1974)** "*The Fractional Calculus",* Academic Press, New York.

Oturanç G., Kurnaz A., Keskin Y. (2008) *"A new Analytical Approximate Method for the Solution of Fractional Differential Equation",* International Journal of Computer Mathematics, 85-1, 131–142.

Öziş T., Yıldırım A. (2007) "*Traveling wave solution of Korteweg–de Vries equation using He's homotopy perturbation method"* International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8, 239–242.

Öziş T., Yıldırım A. (2008) "*Comparison between Adomian's method and He's homotopy perturbation method",* Computer Mathematics with Applications.

Özışık M. N. (1980) *"Heat Conduction"*, John Willey&Sons, New York.

Özkan O., Keskin, Y. (2005) *"An application of the differential transform Method to the boundry value problems of the system of integro differential equations"*, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 6(1), 43-53.

Özkan O., Keskin, Y. (2005) *"Yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümleri"*, XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, İstanbul.

Ravi Kanth A. S. V., Aruna K. (2008) *"Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations",* Physics Letters A, 372(46), 6896-6898.

Ray S. S., Bera R. K. (2005) *"An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method",* Applied Mathematics and Computation, 167(1), 561-571.

Shing H. H, Lien-Tsai Y., Cha'o K. C. (1998) *"Analysis of general elastically end restrained non uniform beams using differential transformation"*, Applied Mathematical. Modelling, 22(4-5), 219-234.

Shawagfeh N. T. (2002) "*Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations"*, Applied Mathematics and Computation, 131(2-3), 517-529.

Strauss, W. A. (1992) *"Partial Differential equations an introduction"*, John Willey&Sons, Singapore.

Wazwaz A. M. (1997) *"A First Course in Integral Equations",* World Scientific, Singapore.

Wazwaz A. M. (1999) *"Analytical approximations and Padé's approximants for Volterra's population model",* Appl. Math. Comput. 100, 13 –25.

Wazwaz A. M. (1999) *"A Reliable Modification of Adomian Decomposition Method"*, Appl. Math. Comp.102, 77–86.

Wazwaz A. M. (2000) *"A new technique for calculating Adomian polynomials for nonlinear polynomials",* Appl. Math. Comput. 111 (1), 33 –51.

Wazwaz A. M. (2000) *"A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators",* Appl. Math. and Comput. 111, 53–69.

Wazwaz A. M. (2002) *"Partial Differential Equations: Methods and Applications",* Balkema Publishers, The Netherlands.

Wazwaz A. M. (2002) *"A new method for solving singular initial value problems in the second order differential equations",* Appl. Math. Comput. 128, 47–57.

Wazwaz A. M. (2008) *"The KdV Equation, Handbook of Differential Equations (Evolutionary Equations)",* Volume 4, Elsevier.

Wazwaz A. M. (2009) *"Partial Differential Equations and Solitay Wave Theory",* Springer.

Yang X., Liu Y., Bai S. (2005) *"A numerical solution of second order partial differential equation by differential transform",* Applied Mathematics and computation.

Yu L.T, Chen C. K. (1998) *"The solution of the blasius equation by the differential transform method",* Math. Comput. Modelling, 28, 101-111.

Zauderer E. (1993) *"Partial Differential equations of applied mathematics"*, John Willey&Sons, USA.

Zhou J. K. (1986) *"Differential Transformation and its applications for electrical circuits"*, Huazhong University Press, Wuhan, China.