EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN PERTURBASYON METODU

Ceren AKÇI

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403. 06. 01

Tezin Sunulduğu Tarih: 14. 01. 2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Bornova-İZMİR

2010

Ceren AKÇI tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan **" Lineer Olmayan Denklemler İçin Perturbasyon Metodu "** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **14.01.2010** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**	.....
Raportör Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIRIM**	.....
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZEL**	.....

ÖZET

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN PERTURBASYON METODU

AKÇI, Ceren
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ
Ocak 2010, 57 sayfa

Giriş bölümü dışında bu tez esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümünde, salınım hareketlerini incelememize olanak sağlayan sarkaç denklemi ele alınarak çeşitli özellikleri incelenmiş, bu tezin diğer bölümüne ışık tutacak şekilde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, Perturbasyon metodu ele alınarak metodun ana hatları ve bazı özellikleri anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, İterasyon Perturbasyon metodu açıklanmıştır. Açıklanan bu metodun kullanışlılığı kesirli kuvvetli ve tekilliği olan iki salınım denklemi çözülerek gösterilmeye çalışılmıştır. Elde edilen çözümler diğer metotlarla bulunan çözümlerle karşılaştırılıp çözümlerin geçerliliği ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler : Sarkaç Denklemi, Perturbasyon Metodu, İterasyon Perturbasyon Metodu, lineer olmayan salınımlar.

ABSTRACT

PERTURBATION METHOD FOR NONLINEAR EQUATIONS

AKÇI, Ceren

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

January 2010, 57 pages

Except the introduction, this thesis consists of three main sections.

In second section, the pendulum equation, which allows us to investigate the oscillatory motion, has been analyzed in a way that it will be central to the remaining parts of the thesis.

In third section, the method of perturbation has been discussed and the draft of the method has been explained along with some of its properties.

In the fourth section, Iteration perturbation method has been explained. Usefulness of this method has been shown by solving two oscillatory equations that have singularities. Finally, the solutions obtained by our analysis have been compared to the ones evaluated from other methods validity of our solutions has been confirmed.

Keywords: Pendulum equation, Perturbation Method, Iteration Perturbation Method, nonlinear oscillators.

TEŞEKKÜR

İki yıldır, bu tezi meydana getirebilmek için özveriyle benimle ilgilenen, anlayışını, emeğini, zamanını esirgemeyen, bu günüme ve geleceğime hem bilimsel yönüyle hem de kişiliğiyle çok şeyler katan hocam Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ' e ve tüm hocalarıma yürekten teşekkür ederim. Ayrıca, iki yıldır bana burs veren TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET v

ABSTRACT vii

TEŞEKKÜR ix

1. GİRİŞ 1

2. MEKANİK TİTREŞİMLER 4

2.1 Sarkaç Denklemi İçin Faz Diyagramı 7

2.2 Faz Düzlemindeki Bağımsız (Autonomous) Denklemler 12

2.3 Konservatif Sistemler 17

2.4 Sönümlü Lineer Osilatör 20

2.4.1 Aşırı Sönümlü Durum (Güçlü Sönüm) ($\Delta > 0$) 21

2.4.2 Yavaş Sönümlü Durum (Zayıf Sönüm) ($\Delta < 0$) 22

2.4.3 Kritik sönüm ($\Delta = 0$) 23

2.5 Lineer Olmayan Sönüm 24

3. PERTURBASYON METODU 28

3.1 Metodun Ana Hatları 28

3.2 Titreşimden Uzak Zorlanmış Salınımlar 32

3.3 Zayıf Uyarımlı Titreşimin Yakınındaki Zorlanmış Salınımlar 35

4. İTERASYON PERTURBASYON METODU 40

5. SONUÇ 49

KAYNAKLAR 51

EKLER 53

Ek 1 Örnek 4.1 için a_n değerlerinin hesaplanması 53

Ek 2 Örnek 4.2 için a_n değerlerinin hesaplanması.....55

ÖZGEÇMİŞ 57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Bir kütle-yay-amortisör sistemi 4

Şekil 2.2 Basit sarkaç. 7

Şekil 2.3 Basit sarkaç için faz diyagramı. 10

Şekil 2.4 Sarkaç için kararsız denge noktası; Yer değiştirilmiş durum C. 11

Şekil 2.5 Basit harmonik osilator için merkez. 16

Şekil 2.6 Eyer noktası. 17

Şekil 2.7 • Kararlı denge noktası, ◦ Kararsız denge noktası. 19

Şekil 2.8 Merkez ve eyer noktaları. 20

Şekil 2.9 Aşırı-sönümlü basit harmonik osilator için çözüm eğrileri. 22

Şekil 2.10 Kararlı spiral. 23

Şekil 2.11 Kararlı limit çevrimi için iki faz yolunun yaklaşımı. 26

1.GİRİŞ

Matematiğin önemli konularından biri olan diferansiyel denklemler, günlük hayattaki birçok problemin özellikle değişim içeren ilginç doğal olaylarının anlaşılması ve çözümü için bir model oluşturur. Örneğin birçok mekanik sistemde meydana gelen titreşimlerin incelenmesi sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle çözülebilen bir problemdir. Karmaşık mekanik sistemlerde oluşan titreşimlerin basit bir örneği olarak kütle-yay-amortisör sistemini verebiliriz. Bu sistemde kütlenin hareketini veren denklem;

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemidir. Bu denklem birçok basit mekanik sistemin hareketini tanımlaması nedeniyle önemlidir. Örneğin, basit harmonik harekete örnek oluşturan sarkacın hareketini analiz etmemize olanak sağlar. Basit harmonik hareket – yayın ucuna takılmış bir kütlenin veya bir sarkacın hareketi – salınım hareketinin temel bilgisini oluşturduğundan dolayı lineer olmayan salınım denklemleri incelenmeden önce sarkaç denklemi incelenmelidir. Fakat lineer model sarkacın olası hareketlerini yeterince tanımlayamaz. Sadece $|\theta| \leq \pi/12$ için denge noktası etrafındaki salınımları tanımlar. Bu nedenle sarkacın tam tepede olduğu denge çözümü dahil, birçok olası hareketi içerdiği için lineer olmayan denklemin kendisi incelenmelidir. Ayrıca klasik sarkaç problemi, faz düzleminde diferansiyel denklemlerin ana özelliklerinin nasıl ortaya çıktığını görmemize olanak sağlar.

Fakat her salınım denklemini özellikle lineer olmayan salınım denklemlerini grafiğinden yorumlamak kolay değildir. Bu durumlarda Nümerik yöntemler uygulanarak bağımlı değişkene ilişkin yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir.

Lineer olmayan salınım denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için yaygın olarak Peturbasyon Metotları kullanılmaktadır. Bu metotların tanıtımını Nayhef [14] , Jordan ve Smith [7] tarafından yazılan kitaplarda bulmak mümkündür. Perturbasyon metotları, genel anlamda tam olarak çözülemeyen salınım denklemleri için, bu denklemlere bağlı lineerleştirilmiş denklemin çözümünden yola çıkılarak yaklaşık bir periyodik çözüm elde etmeyi amaçlar.

Fakat bu metotlar, nonlineerlik zayıf olduğunda kullanılmaktadır. Ayrıca her salınım denkleminde perturbasyon parametresi olmak zorunda değildir. Bu nedenle perturbasyon metotlarının oluşturduğu dezavantajları gidermek için farklı metotlar kullanılabilir. J. H. He'nin [4] güçlü nonlineer salınımlar için İterasyon Perturbasyon Metodu, R. E. Mickens 'in iterasyon tekniği [8,11,15], Harmonic Balance metodu [1,9,10], J.H.He'nin Modified Linsteid-Poincare Metodu [5,15], S. Q. Wang, J. H. He' nin Parameter- Expansion Metodu [17], J. H. He'nin Homotopy perturbasyon metodu [6] gibi metotlar kullanılabilir. Bu örnekleri çoğaltmak mümkündür. Bu tezde bizim amacımız J. H. He'nin iterasyon perturbasyon metodunu inceleyerek, bazı lineer olmayan salınım problemlerini bu yöntem yardımıyla çözmektir.

Dört bölümden oluşan tezin ikinci bölümünde, salınım hareketlerini incelememize olanak sağlayan sarkaç denklemi ele alınarak çeşitli özellikleri incelenmiş, bu tezin diğer bölümlerine ışık tutacak şekilde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, Perturbasyon metodu ele alınarak metodun ana hatları ve bazı özellikleri anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, İterasyon Perturbasyon metodu açıklanmıştır. Açıklanan bu metodun kullanışlılığı kesirli kuvvetli ve tekilliği olan salınım problemlerini çözerek gösterilmeye çalışılmıştır.

Bu salınım denklemlerinin genel yapısı,

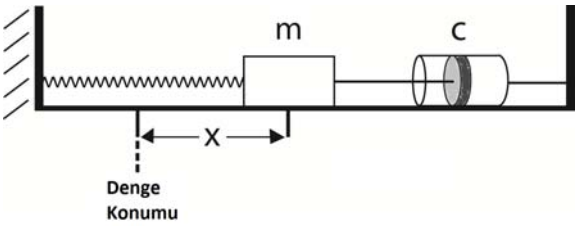
$$\ddot{x} = f(x)$$

formundadır. Burada $f(x)$, x'in lineer olmayan fonksiyonudur. Birinci problemimizin genel hali $k, n \in N$ için, $\alpha = \frac{2k+1}{2n+1}$ olmak üzere $f(x) = -x^{\alpha}$ şeklindedir. $\alpha < 1$ için perturbasyon teknikleri uygulanamaz [14]. Çünkü bu metotlar $x = 0$ noktasında fonksiyonun türevini içerir oysaki bu noktadaki türev tanımsızdır. Biz bu tez çalışmasında $\alpha = 1/3$ değeri için problemi ele aldık. İkinci problemimizde ise $f(x)$ fonksiyonu, $f(x) = -x|x|$ formundadır. Her iki probleme

de iterasyon perturbasyon metodunu uyguladık. Elde ettiğimiz sonuçları diğer metotlarla karşılaştırarak ilk adım iterasyonunun yüksek bir kesinlik sağladığını gösterdik. Bu metodu seçmemizin nedeni, elde edilen çözümlerin sadece zayıf değil aynı zamanda güçlü nonlineer problemler için de geçerli olmasının, ilk adım iterasyonunun yüksek bir kesinlik sağlamasının yanında yüksek mertebeden yaklaşımları elde etmemize olanak sağlamasıdır. Bugünkü teknoloji daha yüksek harmoniklerin bulunmasını gerektirdiğinden dolayı yüksek mertebeden yaklaşımları elde edebilmemiz metodun önemli bir avantajıdır. Oysaki bazı metotlarla salınımın frekansı için ikinci mertebeden yaklaşımı elde etmek imkansızdır.

2. MEKANİK TİTREŞİMLER

Yaya bağlı bir kütlenin hareketi daha karmaşık mekanik sistemlerde meydana gelen titreşimlerin basit bir örneği olarak göze çarpar. Böyle birçok sistem için bu titreşimlerin incelenmesi sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle çözülebilen bir problemdir.



Şekil 2.1 Bir kütle-yay-amortisör sistemi

Şekil 2.1' de görüldüğü gibi germenin yanı sıra sıkıştırmaya karşı koyan yayın bir ucunun duvara bağlandığını, diğer ucuna da bir m kütlesi bağlandığını düşünelim. Kütlenin sıkıştırmak ve germek için sadece ileri geri hareket edebildiği sürtünmesiz yatay bir düzlemde hareketsiz olduğunu kabul edelim. Cismin bulunduğu konum ile denge konumu (yayın gerilmemiş durumunda cismin konumu) arasındaki uzaklığı x ile gösterelim. Yay gerdirilirken $x > 0$ ve sıkıştırılırken $x < 0$ alalım.

Hooke kanununa göre yayın kütleye uyguladığı F_s kuvveti, yayın sıkıştırıldığı veya gerildiği x uzaklığı ile orantılıdır. Bu, denge konumundan m kütlesinin x yer değiştirmesi ile aynı olduğundan,

$$F_s = -kx$$

olur. Pozitif orantı sabiti k, yay sabiti olarak adlandırılır. Burada F_s kuvveti ile x yer değiştirmesi zıt işaretlidir.

m kütlesinin hareketine o anki yönüne ters yönde etki sağlayan amortisörün kütleye uyguladığı F_R kuvvetinin, kütlenin $v = dx/dt$ hızı ile orantılı olacak şekilde yapıldığını kabul edelim.

Yani;

$$F_R = -cv = -c\frac{dx}{dt}$$

olsun. c sabiti amortisörün sönüm sabitidir. Daha genel olarak F_R kuvvetini, sistemdeki sürtünme kuvveti olarak alabiliriz.

Eğer kütleye $F_E = f(t)$ dış kuvveti de uygulanırsa, kütlenin üzerindeki toplam kuvvet $F = F_s + F_R + F_E$ olur. Newton yasası kullanılarak,

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''$$

böylece, kütlenin hareketini veren

$$mx'' + cx' + kx = f(t) \qquad (2.1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

Eğer amortisör yok ise (ve bütün sürtünme kuvvetleri ihmal edilirse) (2.1) denkleminde $c = 0$ yazılır ve bu hareket **sönümsüz** olarak adlandırılır. $c > 0$ ise **sönümlü** hareket denir. Eğer dış kuvvet yok ise $(f(t) = 0)$ **serbest** hareket, $f(t) \neq 0$ durumuna da **zorlanmış** hareket denir. (2.1) diferansiyel denklemi birçok basit mekanik sistemin hareketini tanımlaması nedeniyle önemlidir. Ayrıca, basit harmonik harekete örnek oluşturan sarkacın hareketini de incelememize olanak sağlar.

Buraya kadar yay tarafından kütle üzerine uygulanan $F(x)$ kuvvetinin $F(x) = -kx$ (Hooke kanunu) formunda x 'in bir lineer fonksiyonu olduğunu varsaydık. Oysaki doğadaki her yay (az da olsa) lineer değildir. Bu nedenle, lineer olmamanın etkilerini inceleyebilmek için $F(x)$ fonksiyonunu;

$$F(x) = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots \qquad (2.2)$$

formunda alalım. $x = 0$ denge noktasında $F(0) = 0$ olduğundan, $F(x)$ fonksiyonunun (2.2) kuvvet serisi açılımına sahip olduğunu kabul edebiliriz. x yeterince küçük olduğunda, yayın tepkisinin yer değiştirmenin tersine olması için $k > 0$ almıştık. Eğer yayın tepkisinin aynı uzunluktaki pozitif ve negatif yer değiştirmelere göre simetrik olduğunu da varsayarsak, o zaman $F(-x) = -F(x)$ olur ve $F(x)$ bir tek fonksiyondur. Bu durumda n çift sayı olmak üzere denklemde x^n'lerin katsayıları sıfırdır ve lineer olmayan ilk terim x^3'ü içeren terimdir. Böylece yay tarafından kütleye uygulanan lineer olmayan $F(x)$ kuvvetini, derecesi 3 ten büyük olan bütün terimlerin ihmal edilmesi ile,

$$F(x) = -kx + \beta x^3$$

formunda ele alabiliriz. Böylece m kütlesinin sönümsüz hareketi için denklem

$$mx'' = -kx + \beta x^3$$

formunda bulunur. Burada kütlenin davranışı lineer olmayan terimin işaretine bağlıdır.

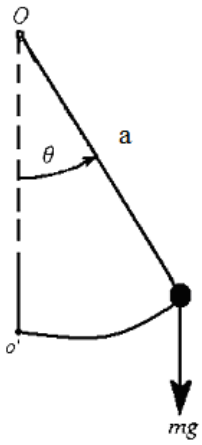
Eğer;

- $\beta > 0$ ise yaya yumuşak yay
- $\beta < 0$ ise yaya sert yay

denir. Sert yay için faz düzlem yörüngelerinin hepsi sınırlı iken, yumuşak yay sınırsız faz düzlem yörüngesine de sahiptir. Bununla birlikte sınırsız yumuşak yay yörüngelerinin kırılma olmaksızın yayın esneme kapasitelerini aştıklarında fiziksel olarak gerçeğe uygun hareketleri göstermeyeceğini unutmamalıyız.

2.1 Sarkaç Denklemi için Faz Diyagramı

Dikey düzlemde sallanabilen a uzunluğundaki hafif ip ya da çubuk ile O noktasından asılmış m kütlesinin hareket ettirilmesi ile **basit bir sarkaç** oluşur.



Şekil 2.2 Basit sarkaç.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

İp ya da çubuğun t zamanında saat yönünün tersine göre dikeyle yaptığı açı $\theta = \theta(t)$. $\theta(t)$ açısıyla kütlenin konumunu belirleyebiliriz.

m kütlesinin hareketini analiz etmek için, m kütlesinin potansiyel ve kinetik enerjisinin toplamının sabit olduğunu söyleyen mekanik enerjinin korunumu yasasını kullanabiliriz.

O''den m kütlesine kadar olan dairesel yay boyunca uzaklık $s = a\theta$ olur. Böylece kütlenin hızı $v = ds/dt = a\,d\theta/dt$ ve kinetik enerjisi,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\,\dot{\theta}^2$$

olur.

Kütlenin ulaşabildiği en alt nokta O' olduğundan, kütlenin V potansiyel enerjisi, kütlenin ağırlığı mg ile O'' den daha yukarıda olan kütlenin dikey yüksekliği $h = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta)$'ın çarpımına eşittir.
O halde;

$$V = mga(1-\cos\theta)$$

eşitliğine ulaşırız. Enerjinin korunumu yasasından T ve V'nin toplamının bir C sabiti olması gerçeği bize;

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = C$$

sonucunu verir. Eşitliğin her iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa;

$$ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

bu ifade $ma^2\dot{\theta}$ ortak çarpanına alınarak sadeleştirilse;

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0 \qquad (2.3)$$

bulunur. Hiçbir sürtünme olmadığını düşünürsek, mekanizmanın denklemi bu formdadır.

$|\theta| < \pi/12$ olmak üzere, $\sin\theta \cong \theta$ yaklaşımı kullanılarak ve $w^2 = \frac{g}{a}$ olmak üzere;

$$\ddot{\theta} + w^2\theta = 0$$

lineer modeli $\theta(t) = C\cos(wt - \alpha)$ genel çözümlü olup, bu çözüm w dairesel frekanslı ve $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ genlikli $\theta = 0$ denge konumu etrafındaki salınımları tanımlar.

Lineer model θ'nın büyük değerleri için sarkacın olası hareketlerini yeterince tanımlamaz.(Örneğin sarkacın tam tepede olduğu $\theta = \pi$ denge çözümünü) Bu nedenle sarkacın lineer olmayan denkleminin kendisi incelenmelidir. Bu yüzden,

$$ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

denklemini tekrar düzenleyelim. $\dot{\theta}$ ortak çarpanına alıp sadeleştirelim;

$$ma^2\ddot{\theta}+mga\sin\theta=0 \tag{2.4}$$

Burada,

$$\ddot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=\dot{\theta}\left(\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\right)$$

olmak üzere (2.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$ma^2\dot{\theta}\left(\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\right)+mga\sin\theta=0$$

elde ederiz.

Yani denklem; θ ve t yerine, θ ve $\dot{\theta}$ 'ne bağlı hale geldi. Denklemin θ'ya göre integralini alırsak;

$$ma^2\int\dot{\theta}\,d\dot{\theta}+mga\int\sin\theta d\theta=0$$

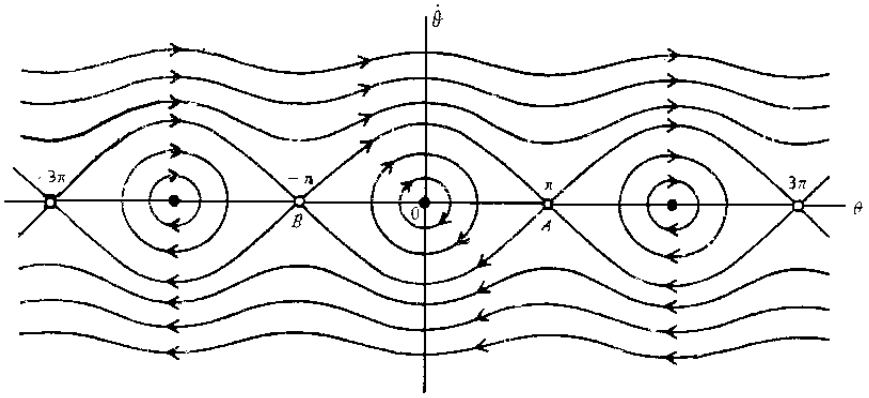
gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-mga\cos\theta=C \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir.

(2.5) denklemi enerji korunumunu göstermektedir. Soldaki terimler sırası ile sakacın kinetik enerjisi ve potansiyel enerjisidir. Belirli hareketler için C'nin değerleri başlangıç koşulları ile sabitlenebilir.(θ ve $\dot{\theta}$' nün $t=0$ noktasındaki değerleri için)

(2.5) bağıntısı bir diyagramda gösterilebilir. Eksenleri θ ve $\dot{\theta}$ olan kartezyen faz düzleminde, C'nin farklı değerleri için (2.5) denklemi tarafından yaratılan 1-parametreli eğri aileleri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 2.3 Basit sarkaç için faz diyagramı.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Şekil 2.3'de çizilen eğriler, faz yolları, yörünge ya da (2.5) denklemine karşılık gelen integral eğrileri olarak bilinir ve tüm şekil sistemin faz diyagramı ya da faz resmi olarak adlandırılır. Her faz yolu, sistemin belirli hareketlerine karşılık gelir.

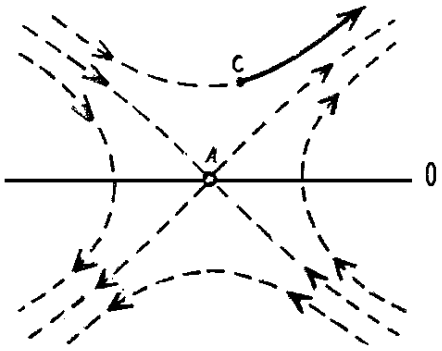
Görebiliyoruz ki; faz düzleminin ortaya çıkmasında zaman değişkeninin olmamasına rağmen, şekil 2.3'den sarkacın hareketlerinin birkaç fiziksel özelliğini çıkarabiliriz. Öncelikle sarkacın fiziksel dengesinin mümkün durumlarını göz önüne alalım. Aşikar olan, sarkaç sallanmadan duruyorken ki durum yani, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ durumudur.Bu şekil 2.3'de orijine karşılık gelen noktadır.Bu duruma karşılık gelen fonksiyon (2.5) denkleminin sabit çözümü olan $\theta(t) = 0$'dır. Fiziksel dengenin ikinci durumu ise A noktası ile gösterilen, diğer bir sabit çözüm olan, $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$ durumudur. Aynı fiziksel koşul B noktası ile gösterilen $\theta = -\pi, \dot{\theta} = 0$ ile tanımlanmıştır ve aslında n tek tamsayı olmak üzere, $\theta = n\pi$, $\dot{\theta} = 0$ durumu bu iki denge şartına karşılık gelir.

O, A, B noktaları fiziksel denge durumunu gösterdiğinden, bu noktalar faz diyagramındaki denge noktaları ya da kritik noktalar olarak adlandırılır.

Şimdi şekil 2.3'deki orijini doğrudan doğruya çevreleyen kapalı eğri ailelerini göz önüne alalım. Bunlar periyodik hareketi belli eder, sarkaç ileriye geriye sallanır. Salınımın genliği, eğri üzerinde karşılaşılan θ'nın maksimum değeridir.

Şekil 2.3'nin en üst ve en alt kısmındaki dalgalı doğrular (sınırsız yörüngeler) ise artarda tepeyi aşan sarkacın hızla dönen hareketini temsil eder.

Ayrıca biz O ve A iki tipik denge noktasının kararlılığını tartışabiliriz. Eğer başlangıç durumu O'dan biraz yer değiştirilirse, çok yakındaki kapalı bir eğriye gider ve çok küçük bir genlik ile sarkacın salınımı neredeyse O'da olur. Bu durumda biz de denge noktasını sıfırda neredeyse kararlı olarak tanımlarız. Eğer başlangıç durumu A'dan biraz kaydırılırsa, bununla beraber öyle bir faz yolunun üzerine gider ki, A noktasını denge durumundan çok daha uzağa, büyük bir salınıma ya da savrulma durumuna taşır. Bu denge noktası böylece kararsız olarak tanımlanır.



Şekil 2.4 Sarkaç için kararsız denge noktası; Yer değiştirilmiş durum C.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

2.2 Faz Düzlemindeki Bağımsız (Autonomous) Denklemler

İkinci mertebeden diferansiyel denklemin genel tipi olan ;

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{2.6}$$

denklemi, mekanik sistem için hareket denklemi olarak tanımlanır. Burada x, birim kütle taneciğinin yer değiştirmesini; $\dot{x}$, onun hızını; $\ddot{x}$, ivmesini ve f uygulanan kuvveti gösterir. Böylece (2.6) denklemi, tanecikler için hareketin Newton kanununu gösterir:

İvme = Birim kütle kuvveti

Mekanik sistemin durumu zamanla değişiklik göstermez ise, mekanik sistem dengededir denir. Bu açıklamadan yola çıkarak, denge durumu (2.6)'nın sabit çözümüne karşılık gelir. Bunun tersi de doğrudur.

Sabit çözüm $\dot{x}$ ve $\ddot{x}$ değerlerinin aynı zamanda sıfır olması gerektiğini belirtir. Sadece $\dot{x}$=0 olması denge için yeterli değildir. Burada sallanan sarkaç maksimum genlik anında durur. Fakat bu açıkça bir denge durumu değildir. Bunun gibi sabit çözümler (eğer varsa),

$$f(x,0,t) = 0 \tag{2.7}$$

denkleminin sabit çözümüdür.

(2.6) denklemini iki tipe ayırıyoruz :

1) f 'nin açıkça t'ye bağlı olmadığı bağımsız tip.
2) t'nin açıkça f denkleminde yer aldığı bağımlı ya da kuvvet denklemi.

Bu bölümde bağımsız denklemleri göz önüne alacağımızdan ve t olmadığından (2.6) denklemi yerine;

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{2.8}$$

denklemini alacağız. Denge durumunu belirten sabit çözümler, eğer varsa,

$$f(x,0) = 0 \tag{2.9}$$

denkleminin çözümleridir.

Örneğin, $\ddot{x} = (1 - x^2) + x\dot{x}$ denkleminin sabit çözümleri;

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 'dir.

Şimdi, faz düzleminde denklem (2.8)'in gösterimini göz önüne alalım. Sistemin $t = t_0$ anındaki durumu, $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ noktasından oluşur. Bu durum, başlangıç koşulları olarak kabul edilebilir ve böylece bunu takip eden diğer durumlar tanımlanabilir. Bu durumlar sırası ile sarkaç için bölüm 2.1'de ki gibi eksenler x ve $\dot{x}$ alınarak, faz düzleminde çizilebilir.

Biz $\dot{x}$'nü y olarak adlandırırsak, bu tanımlama ile;

$$\dot{x} = y \text{ ve } \ddot{x} = \dot{y} \tag{2.10}$$

olur.

Böylece;

$$\dot{y} = f(x, y) \tag{2.11}$$

haline gelir.(2.10) ve (2.11) denklemleri $x(t)$ ve $y(t)$ (yani, $\dot{x}(t)$) fonksiyonları için birinci mertebeden denklemler sistemi olarak görülebilir. y ve x arasındaki ilişkiyi yani faz yollarını veren bağıntıyı elde etmek için t'yi (2.11)'in (2.10)'a bölünmesi ile yok etmeliyiz.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,y)/y \qquad \text{ya da} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y} \tag{2.12}$$

Elde ettiğimiz bu denklemin çözümleri faz yollarını verir.

(2.8) denkleminin sabit çözümlerini elde etmenin yolu, (2.10) ve (2.11) denklemlerinde, $\dot{x} = 0$ ve $\dot{y} = 0$ ya da $\dot{x} = 0$ *ve* $\ddot{x} = 0$ değerlerinin konulması ile bulunur. Faz diyagramındaki (x_0, y_0) denge noktası,

$$\dot{y} = 0, \quad f(x,0) = 0 \tag{2.13}$$

denklem çiftinin herhangi bir çözümüdür.

Not eldim ki;

1) Denge noktaları daima x ekseni üzerindedir.

2) Kapalı yollar periyodik çözümleri gösterir. Daireyi tamamladıktan sonra orijinal durumuna tekrar döner ve hareket basitçe sürekli kendini tekrar eder.

Örnek 2.1: $\ddot{x} + \alpha \sin x = 0$ denklemi için faz yollarını bulalım. Bu aslında denklem (2.3)'dir. $\dot{x} = y$ olarak tanımlarsak bu bize $\dot{y} = -\alpha \sin x$ denklemini verir.

Faz yolu için denklem;

$$\dot{y} \Big/ \dot{x} = -\alpha \sin x / y ,$$

buradan da;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha \sin x}{y} \quad \text{‘t yok edildi’}$$

olur.

$$\int y dy = -\alpha \int \sin x dx + C$$

ya da,

$$\frac{1}{2} y^2 - \alpha \cos x = C$$

burada, C, faz yolunun parametresidir. Düzlemdeki diyagram şekil 2.3’deki gibidir.

Örnek 2.2: $\ddot{x} + w^2 x = 0$ basit harmonik osilatör denklemi için faz diyagramını çizelim.

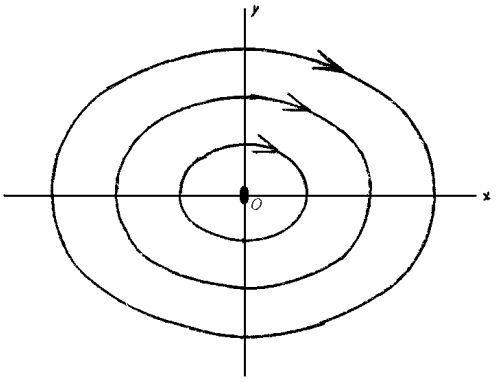
Bu, küçük genlikli sallanışlar için sarkaç denklemine yaklaşımdır. (2.10) ve (2.11) denklemlerine karşılık,

$$\dot{x} = y \text{ ve } \dot{y} = -w^2 x$$

denklemlerine sahibiz. x=0 ve y=0’da bir tane denge noktamız var. Faz yolları,

$$\frac{dy}{dx} = -w^2 \frac{x}{y}$$

denkleminin çözümleridir. Bu da bizi, $y^2 + w^2x^2 = C$ denklemine götürür. Yani faz resmi (portresi), orijini merkez kabul eden elips ailesinden oluşmaktadır. Tüm çözümler periyodiktir, denge noktası kararlıdır. Yakın komşulukları yani kapalı yollar tarafından çevrilen denge noktası merkez olarak adlandırılır ve merkez kararlı denge noktasıdır.



Şekil 2.5 Basit harmonik osilator için merkez.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Örnek 2.3: $\ddot{x} - w^2x = 0$ denklemi için faz diyagramını çizelim.

Burada, (2.10) ve (2.11) denklem çiftine eşdeğer birinci mertebe denklem çifti;

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = w^2x$$

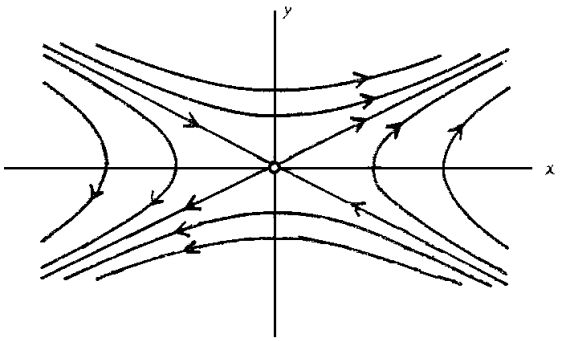
formundadır. $x = 0$ ve $y = 0$ 'da tek bir denge noktası vardır.

$\frac{dy}{dx} = w^2\frac{x}{y}$ denkleminin çözümleri faz yollarıdır. Yani,

$$y^2 - w^2x^2 = C$$

denkleminin çözümü.

Şekil 2.6'da gösterildiği gibi, $y = \pm wx$ asimptotları ile hiperboller faz yollarıdır.



Şekil 2.6 Eyer noktası.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Denge noktasının komşuluğunda bu tipin faz yolları ile denge noktası eyer noktası olarak adlandırılır ve bu nokta kararsızdır. (Denge noktasından küçük bir uzaklaşma ile genel olarak elde edilecek çözüm bizi denge durumundan çok uzağa götürür.)

2.3 Konservatif Sistemler

Mekanik bir ifadeyle, bir serbestlik derecesiyle bir sistem göz önüne alalım ve x genelleştirilmiş koordinat olsun.(konum, açı, ...) T ve V kinetik ve potansiyel enerji fonksiyonları olsun ve farz edelim ki;

$$T = \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2, \quad V = V(x)$$

formunda olsunlar.($m(x) > 0$)Eğer sistem konservatif ise, faz yolunu veren toplam enerji hareket boyunca sabittir.

$$\frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 + V(x) = \delta, \quad 'sbt' \tag{2.14}$$

(2.14) denklemini oluşturan hareket denkleminin tipi, (2.14)'ün zamana göre türevi alınarak elde edilebilir.

$$m(x)\ddot{x}+\frac{1}{2}m'(x)\dot{x}^2+V'(x)=0 \tag{2.15}$$

f birim kütle kuvveti olmak üzere konservatif sistemler için olan;

$$\ddot{x}=f(x) \tag{2.16}$$

standart denklemini ele alalım. Farz edelim ki, f sürekli olsun.

Bu durumda V fonksiyonunu,

$$V(x)=-\int f(x)dx, \text{ ya da } V'(x)=-f(x) \tag{2.17}$$

ile tanımlayabiliriz. Böylece, V fonksiyonu (2.17)'nin potansiyel enerji fonksiyonu olur. (2.17)'nin denge noktaları,

$$V'(x)=-f(x)=0 \tag{2.18}$$

denkleminden bulunur. (Beklenildiği gibi bu potansiyel enerjinin durgun noktalarıdır.)

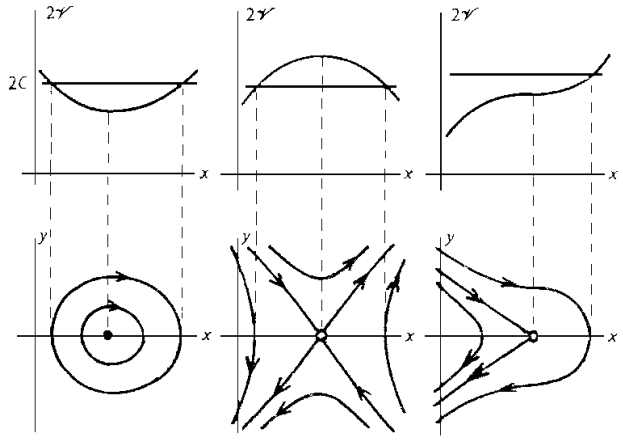
(2.16)'de $\dot{x}=y$ yazarak, enerji denklemi tarafından faz düzlemi, C'nin farklı değerleri için ;

$$\frac{1}{2}y^2+V(x)=C \tag{2.19}$$

formunda ya da,

$$y=\pm\sqrt{(2C-2V(x))} \tag{2.20}$$

formunda verilir.



Şekil 2.7 ● Kararlı denge noktası, ○ Kararsız denge noktası.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Şekil 2.7 gösteriyor ki, denge noktalarının çeşidi V'nin dönüm noktalarının üç çeşidinden ileri gelmektedir: yerel minimum her zaman merkeze, yerel maksimum eyer noktasına ve büküm noktası zirveye (uç) götürür.

Lineer olmayan yay üzerindeki tanecikler için düzeltici kuvvet olan $f(x)$ açısından da meseleye bakabiliriz. Eğer $f(x)$ (V'nin minimum olduğu) denge noktasından geçerken işaretini pozitiften negatife çevirirse, sistem adi lineer yay gibi davranır ve merkezi belirterek sallanır. Eğer negatiften pozitife değişirse, tanecik denge noktasından uzaklaşır ve orası eyer noktasıdır.

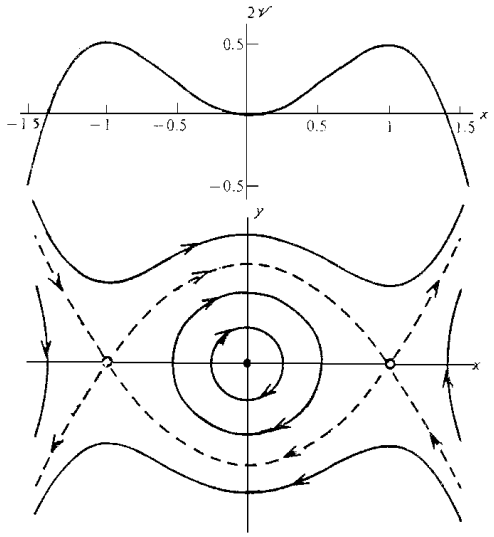
Örnek 2.4: $\ddot{x} = x^3 - x$ denkleminin denge noktalarını bulalım.

Bu konservatif sistem belirtir. (Aslında, (2.3) ölçülü genlikler için sarkaç denkleminde $\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$ yazılarak denklem buna indirilebilir.)

$V'(x) = x - x^3$ ve $V(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$ elimizde var.

Şekil 2.8 faz diyagramının yapısını gösteriyor. Üç tane denge noktası vardır. (0,0)'da merkez, (1,0) ve (-1,0)'da eyer noktası vardır. C'nin 0 ve ¼

değerlerine karşılık gelen (V'nin maksimum ve minimum ordinatları olan) faz düzlemini farklı davranıştaki bölgelere ayırmaları nedeniyle ayıraçlar diye adlandırılır. Ayıraçlar tarafından sınırlanan bölgedeki (0,0) noktasını çevreleyen kapalı yörüngeler, kütlenin $x = 0$ denge noktası etrafında ileri ve geri periyodik salınımlarını temsil eder.



Şekil 2.8 Merkez ve eyer noktaları.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

2.4 Sönümlü Lineer Osilatör

Genel olarak, konservatif sistemden ileri gelmeyen ve yeni gösterimler umabileceğimiz,

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{2.21}$$

formundaki denklemlerden bahsediyoruz. Bunun gibi en basit sistem;

$$\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0, \quad c > 0, \quad k > 0 \tag{2.22}$$

denklemine sahip sönümlü lineer osilatördür. Bu formdaki denklem, birçok diğer salınım sistemi için model olarak gösterilen ve indüktans, elektriksel kapasite, direnç içeren devirli ya da amortisörlü yay-kütle sistemi tanımlar.

Biz sönümlü salınımların aşina özelliğinin, faz düzleminde nasıl gösterildiği göreceğiz. (2.22) denklemi, lineer denklemin standart tipidir. Onun çözümlerinin niteliği, karakteristik denkleminin,

$$m^2 + km + c = 0$$

köklerinin reel ve farklı, kompleks ya da reel ve çakışık olup olmamasına bağlıdır.

Kökler,

$$m_1, m_2 = \frac{1}{2}\left\{-k \pm \sqrt{k^2 - 4c}\right\}$$

buradan bulunur.

Bu nedenle, diskriminant,

$$\Delta = k^2 - 4c \tag{2.23}$$

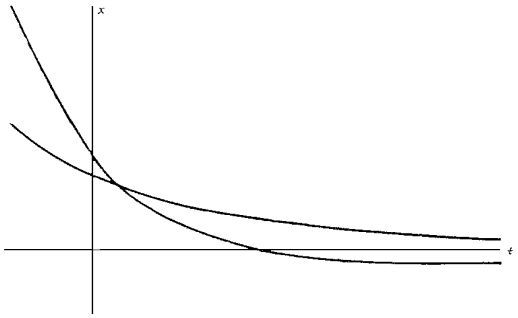
hareketin genel tipini belirleyen parametredir.

2.4.1 Aşırı Sönümlü Durum (Güçlü Sönüm) ($\Delta > 0$)

Bu durumda k oldukça büyük olduğundan, daha zayıf bir yay ya da küçük bir kütle ile karşılaştırıldığında, çok güçlü bir dirençle karşılaşırız. Bu nedenle karakteristik denklem her ikisi de negatif olan farklı iki reel kök verir. A ve B herhangi bir sabit, m_1 ve m_2 karakteristik denklemin kökleri olmak üzere çözümler;

$$x(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} \tag{2.24}$$

formundadır.



Şekil 2.9 Aşırı-sönümlü basit harmonik osilator için çözüm eğrileri.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Burada $t \to \infty$ için $x(t) \to 0$ olduğunu görmek kolaydır ve cisim kendi eylemsizlik (denge) konumuna herhangi bir salınım olmadan gelir. Yani her durumda olması gereken salınımlar sönerek yok olmaktadır.

2.4.2 Yavaş Sönümlü Durum (Zayıf Sönüm) ($\Delta < 0$)

Bu durumda karakteristik denklem biri diğerinin eşleniği olan negatif reel kısımlı iki kompleks köke sahiptir. Çözüm,

$$x(t) = C\exp\left(-\frac{1}{2}kt\right)\cos\left(w_1 t - \alpha\right) \tag{2.25}$$

formundadır.

Burada, $w_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, ye eşittir. Bu çözüm cismin denge konumu komşuluğundaki üstel sönümlü salınımını gösterir. $x(t)$ nin grafiği 'genlik zarfı' olan $x = -Ce^{-\frac{1}{2}kt}$ ve $x = Ce^{-\frac{1}{2}kt}$ eğrileri arasında uzanır ve $w_1 t - \alpha$, π'nin tam katı ise onlara değer.Bu hareket aslında periyodik değildir, fakat yine de w_1'e

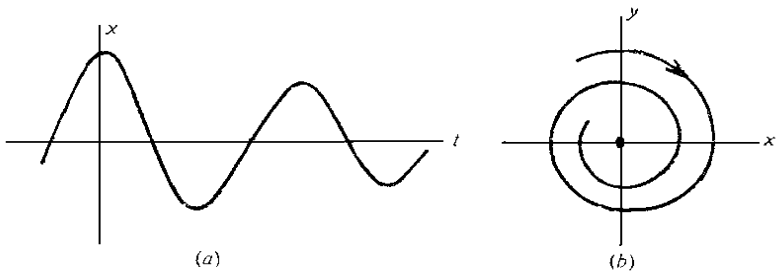
onun dairesel frekansı (hemen hemen frekansı demek daha uygun), $T_1 = \frac{2\pi}{w_1}$ salınımın hemen hemen periyodu ve $Ce^{-\frac{1}{2}kt}$ zaman değişken genliğidir.

Bu durumda amortisörün hareketi en az iki etkiye sahip olur:

1. Zaman-değişken genliği ile uyumlu olarak salınımı üstel olarak söndürür.

2. Hareketi yavaşlatır. Yani hareketin frekansını azaltır.

Şekil 2.10(a)'da tipik çözüm gösteriliyor. Burada, katlanarak azalan genlikli salınım gösteriliyor. k'nın daha büyük değerleri için daha hızlı olarak azalır. Bu da şekil 2.10(b) de gösteriliyor. Orijindeki denge noktası, kararlı spiral ya da kararlı odak olarak adlandırılır.



Şekil 2.10 Kararlı spiral.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

2.4.3 Kritik sönüm ($\Delta = 0$)

Bu durumda karakteristik denklemin,

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}k$$

olmak üzere iki eşit kökü vardır ve çözümler,

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{1}{2}kt}$$

formundadır. $e^{-\frac{1}{2}kt} > 0$ ve $A + Bt$ en çok bir pozitif sıfır yerine sahip olduğundan cisim denge konumundan en çok bir kez geçer. $t \to \infty$ için $x(t) \to 0$ olduğunu görmek kolaydır. Aşırı sönümlü duruma benzer.Amortisörün direnci hemen hemen herhangi bir salınımı söndürecek kadar yeterli büyüklüktedir.

2.5 Lineer olmayan Sönüm

$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ sistemine geri dönelim.Farz edelim ki f;

$$f(x, \dot{x}) = -h(x, \dot{x}) - g(x), \tag{2.26}$$

formunda olsun.h, x'in toplanır fonksiyonunu içermez.Böylece,

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) + g(x) = 0 \tag{2.27}$$

denklemini yazabiliriz. Mekanik koşullarda denklem, kaybedici veya enerji üreten bileşen $h(x, \dot{x})$ ve $g(x)$ konservatif elemanını içeren kuvvet sisteminin altında birim kütlenin x yer değiştirmesini tanımlar.

Yayın bu durumunda, eğer $h(x, \dot{x})$ teriminin varlığı ile değişmiş salınım eğilimi umduğumuz ile denk tipte ise, - $g(x)$ dengeleyici kuvvettir.

Kinetik enerji T, $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ eşittir.(2.26) için tanımladığımız potansiyel enerji fonksiyonu,

$$V(x) = \int g(x)dx \text{, böylece } g(x) = V'(x) \tag{2.28}$$

formundadır.

$$\varepsilon = T + V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int g(x)dx \tag{2.29}$$

ile tanımlanan total enerji genel olarak sabit değildir. Özel bir hareketin ilerlemesi gibi, ε'nin nasıl değişeceğini göz önüne alalım. Bu değişim faz yolu boyunca olur.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x}$$

$$\begin{aligned} &= \dot{x}\left\{ f(x,\dot{x}) + g(x) \right\} \\ &= -\dot{x}h(x,\dot{x}) \end{aligned} \tag{2.30}$$

t, $t = \tau_0$'dan $t = \tau$'a giderken, (2.30)'un integralini alırsak;

$$\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau_0) = -\int_{\tau_0}^{\tau} \dot{x}h(x,\dot{x})dt \tag{2.31}$$

(seçilen faz yolunda (2.26)'un çözümü $x(t)$ olmak üzere) eşitliğini elde ederiz.

Faz düzleminin bazı bölgelerinde uzanan faz yolları için aşağıdaki maddelerden biri söylemek mümkün olabilir;

- $\varepsilon(\tau) < \varepsilon(\tau_0)$, durumunda $\dot{x}h(x,\dot{x}) = yh(x,y) > 0$ ise; Bu durumda enerji azalır, h genlikteki genel azalışa yardımcı sönüm etkisine sahiptir.

- $\varepsilon(\tau) > \varepsilon(\tau_0)$, durumunda $\dot{x}h(x,\dot{x}) = yh(x,y) < 0$ ise; Bu durumda, etki bir iç kaynaktan sisteme enerji püskürtür.

Bir sistem her iki karakteristiği içerebilir. Örneğin, bir sarkaçlı saatte, sarkacın karşılayabileceği ağırlıkta enerji depolanır ve sabit salınımı sürdürebilmek için sürtünme boyunca kaybolan ve depolanan enerjinin arasında bir denge kurulur.

Örnek 2.5: Sönüm etkileri için $\ddot{x}+|\dot{x}|\dot{x}+x=0$ denklemini göz önüne alalım:

$$h(x,\dot{x})=|\dot{x}|\dot{x} \quad ve \quad yh(x,y)=|y|y^2>0, \quad y\neq 0$$

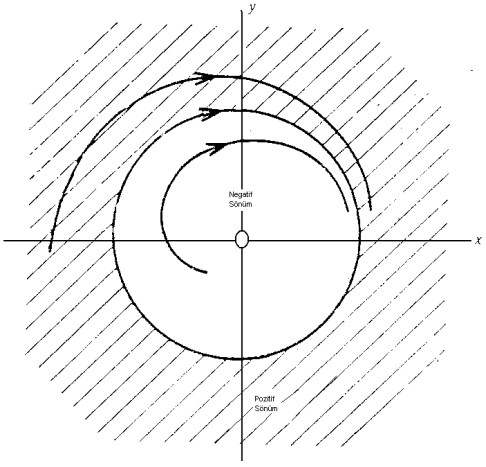
formunda olduğundan, (0,0) denge noktası hariç, faz düzleminde nereye gittiği önemli olmaksızın her faz yolunda enerji kaybı vardır. Bu yüzden eğer herhangi bir başlangıç durumundan, buna denk faz yolu sonunda orijine gider ve hareket durursa şaşırmamalıyız.

Örnek 2.6: $\ddot{x}+(x^2+\dot{x}^2-1)\dot{x}+x=0$ denklemini enerji girişi ya da sönüm etkileri için inceleyelim:

Burada $\dot{x}=y$ alınarak,

$$yh(x,y)=(x^2+y^2-1)y^2$$

elde edilir. $x^2+y^2<1$ olduğunda, $yh(x,y)<0$ ve $x^2+y^2>1$ olduğunda $yh(x,y)>0$ olur.



Şekil 2.11 Kararlı limit çevrimi için iki faz yolunun yaklaşımı.
(Jordan, D.W. ve Smith, P. , 1987)

Şekil 2.11'de faz düzlemi üzerinde, enerji kaybı ve enerji girişlerinin bölgeleri gösterilmiştir. Bu gerçekliyor ki; $x = \cos t$ diferansiyel denklemin çözümüdür ve bu da faz düzlemi üzerinde $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile gösterilmiştir. Faz diyagramı, dış taraftan ona yaklaşan yollarla beraber, iç taraftan yaklaşan yollar ve orijindeki denge noktasıyla bu çemberden oluşur.

Limit çevrimi (cycle); lineer olmayan bir diferansiyel denklemin verdiği periyodik çözümler olarak tanımlanabilir, fakat herhangi bir periyodik çözümden farkı izole edilmiş olmasıdır. $x^2 + y^2 = 1$ izole edilmiş kapalı yoldur. Bunun anlamı, kapalı yolun komşuluğunda diğer bir kapalı yolun bulunmamasıdır ve bu limit çevrimi olarak adlandırılır. $t \to \infty$ durumunda bütün yollar bu çembere yaklaşır.

3. PERTURBASYON METODU

Perturbasyon metotları, lineer olmayan salınım denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Genel anlamda bu metotlar, tam olarak çözülemeyen salınım denklemleri için, bu denklemlere bağlı lineerleştirilmiş denklemin çözümünden yola çıkılarak yaklaşık bir periyodik çözüm elde etmeyi amaçlar. Bu metotlar, nonlineerlik zayıf olduğunda kullanılmaktadır. Bu nedenle, istenilen çözümün kesin çözümlü lineerleştirilmiş denklemden sapmanın miktarını belirleyen 'küçük' bir parametre kullanılarak, kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesini sağlar.

Kuvvet serisinin ana terimi, lineerleştirilmiş denklemin çözümü; diğer terimler ise ilk denklemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

ε : Küçük parametre

x : Tam çözüm

olmak üzere, tam çözüme yaklaşımlı çözüm;

$$x = \varepsilon^0 x_0 + \varepsilon^1 x_1 + \ldots$$

formundadır. Burada x_0 çözümü lineerleştirilmiş denklemin çözümüdür.

3.1 Metodun Ana Hatları:

Sarkacın zorlanmış salınımları için denklem,

x : Eğilme derecesi

$w_0 > 0$: Küçük genlik değişiklikleri için doğal dairesel frekans

$F \cos wt$: Dış kuvvet

olmak üzere;

$$\ddot{x} + w_0^{\,2} \sin x = F \cos wt \tag{3.1}$$

formundadır. Burada, büyük sallanışlara önlem almak için $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ açılımını kullanalım.

Bu durumda (3.1) denklemi,

$$\ddot{x} + w_0^{\,2} x - \frac{1}{6} w_0^{\,2} x^3 = F \cos wt \tag{3.2}$$

lineer olmayan denklemi haline gelir.

(3.2) denkleminin standartlaşmış formu;

$$\tau = wt \quad , \quad \Omega^2 = w_0^{\,2} / w^2 \quad (\Omega > 0), \quad \Gamma = F / w^2 \tag{3.3}$$

alınarak,

$$x'' + \Omega^2 x - \frac{1}{6}\Omega^2 x^3 = \Gamma \cos \tau \tag{3.4}$$

halini alır.

Lineer olmayan terimlere bağlı argümanın ‘küçük’ olması gerekir. Bu nedenle burada biz $\frac{1}{6}\Omega^2$ nin küçük olduğunu farz ediyoruz ve

$$\frac{1}{6}\Omega^2 = \varepsilon_0 \tag{3.5}$$

alıyoruz.

Bununla birlikte denklemimiz,

$$x'' + \Omega^2 x - \varepsilon_0 x^3 = \Gamma \cos \tau \tag{3.6}$$

şekline gelir.

Denklemin w,Γ,ε_0 sabitleriyle mevcut halini almak yerine,

$$x'' + \Omega^2 x - \varepsilon x^3 = \Gamma\cos\tau \qquad (3.7)$$

diferansiyel denklem ailesini göz önüne alalım.

Burada ε, $\varepsilon = 0$ eşitliğini de içeren I_ε aralığında bulunan bir parametredir.

- $\varepsilon = \varepsilon_0$ aldığımızda yine (3.6) denklemine ulaşırız.
- $\varepsilon = 0$ aldığımızda ise (3.7) denklem ailesine karşılık gelen lineerleştirilmiş denklemi elde ederiz.

$$x'' + \Omega^2 x = \Gamma\cos\tau \qquad (3.8)$$

(3.7) nin çözümleri ε ve τ nun fonksiyonları gibi düşünülebilir. Bu yüzden biz $x(\varepsilon,\tau)$ yazarız.

Perturbasyon metodunun en elemanter versiyonu (3.7) nin çözümlerini ε nin kuvvet serisi formunda göstermeye çalışmak.

$$x(\varepsilon,\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \qquad (3.9)$$

Burada $x_i(\tau)$ katsayıları sadece τ 'nun fonksiyonu. ($i = 0,1,2,\ldots$)
(3.7) denkleminde (3.9) serisini yerine koyarsak:

$$\left(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \ldots\right) + \Omega^2\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots\right) - \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots)^3 = \Gamma\cos\tau$$

elde edilir.

I_ε aralığındaki her ε için (3.7) ailesini kapsadığından , ε'nin kuvvetlerinin katsayıları denkleştirilir.
Buradan;

$$x_0'' + \Omega^2 x_0 = \Gamma \cos\tau \tag{3.10a}$$

$$x_1'' + \Omega^2 x_1 = x_0^3 \tag{3.10b}$$

$$x_2'' + \Omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 \tag{3.10c}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Biz sadece kuvvet teriminin 2π periyotlu, periyodik çözümleri ile ilgileniyoruz. Bu nedenle, I_ε aralığındaki tüm ε değerleri ve tüm τ'lar için,

$$x(\varepsilon, \tau + 2\pi) = x(\varepsilon, \tau) \tag{3.11}$$

ve (3.9) denklemiyle de tüm τ lar için,

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau) \quad i = 0,1,2,... \tag{3.12}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

- (3.11) ve (3.12) denklemleri çözümlerin gerektirdiğini sağlarlar.

- (3.10a) denklemi (3.8) lineerleştirilmiş denklemi ile aynıdır, öyle ki (3.6) denkleminde $\varepsilon_0 = 0$ değerini yerine koymak, (3.9) denkleminde $\varepsilon = 0$ değerini yerine koymayı belirtir.

- (3.9) denkleminde ki ana terim, (3.8) lineerleştirilmiş denkleminin periyodik çözümüdür. Böylece bu yöntem lineerleştirilmiş denklemin çözümüne yakın olan lineer olmayan denklemin çözümünü bulmak için bizi kısıtlar.

- Metot herhangi bir diğer periyodik çözüm göstermeyecektir. Sıfırıncı mertebe çözümü $x_0(\tau)$, (3.7) denklemler ailesi için 'üreten çözüm' olarak bilinir.

3.2 Titreşimden Uzak Zorlanmış Salınımlar

Farz edelim ki;

$$\Omega \neq \text{Tek tamsayı} \tag{3.13}$$

olsun. Bu koşul altında (3.12) periyodiklik koşuluna tabi olarak (3.10) denklemini çözelim.

(3.10a) nın çözümleri a_0, b_0 sabit olmak üzere;

$$a_0 \cos\Omega\tau + b_0 \sin\Omega\tau + \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau \tag{3.14}$$

formundadır.

Eğer Ω tamsayı değil ise, 2π periyoda sahip tek çözüm (3.14) de $a_0 = b_0 = 0$ alınarak elde edilir. Buradan da;

$$x_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir.

Bu durumda denklem (3.10b) de;

$$x_1'' + \Omega^2 x_1 = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\right)^3 \cos^3\tau = \frac{\Gamma^3}{\left(\Omega^2 - 1\right)^3}\left(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\right)$$

halini alır.

Yukarıda belirtilen aynı nedenler yüzünden 2π periyotlu tek çözümü:

$$x_1(\tau)=\frac{3}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2-1)^4}\cos\tau+\frac{1}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2-1)^3(\Omega^2-9)}\cos 3\tau \qquad (3.16)$$

formundadır.

(3.9) açılımının ilk 2 terim,

$$x(\varepsilon,\tau)=\frac{\Gamma}{\Omega^2-1}\cos\tau+\varepsilon\left(\frac{3}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2-1)^4}\cos\tau+\frac{1}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2-1)^3(\Omega^2-9)}\cos 3\tau\right)+O(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

çözümünü verir.

Seri, $\varepsilon^2,\varepsilon^3,...$ terimleriyle devam eder ve harmonik (uyumlu) $\cos 5\tau,\cos 7\tau,...$ terimlerini içerir. Sarkaç için (3.5) denkleminde $\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{1}{6}\Omega^2$ eşitliği alınır.

Açıkça görülüyor ki, 1,9,25,… değerlerinden biri Ω^2 değeri olarak alınırsa kesin terimler sınırsız olacağından metot başarısız olur.(Zaten (3.13) koşulu ile bu durum engellendi.)

Bununla beraber , Ω^2 bu değerlerin herhangi birine yakın olsa bile seri yakınsamaz ve bundan dolayı serinin birkaç terimi $x(\varepsilon,\tau)$ ' u yetersiz olarak tanımlayacaktır. Söz konusu Ω nun değerleri yakın titreşimin koşullarına karşılık gelir.

Örnek 3.1 : $x''+\frac{1}{4}x+0.1x^3=\cos\tau$ denklemi için 2π periyotlu zorlanmış tepki yaklaştırmasını elde edelim.

$x''+\frac{1}{4}x+\varepsilon x^3=\cos\tau$ ailesini göz önüne alalım. Kabul eldim ki;

$$x(\varepsilon,\tau)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+...$$

olsun. Periyodiklik $x_0(\tau), x_1(\tau),...$'ların 2π periyotlu olmasını gerektirir. x_0, x_1 için denklemler;

$$x_0'' + \frac{1}{4}x_0 = \cos\tau$$

$$x_1'' + \frac{1}{4}x_1 = -x_0^3$$

Buradan 1. denklemin tek periyodik çözümü:

$$x_0(\tau) = -\frac{4}{3}\cos\tau$$

olarak bulunur.

Bu çözüm yardımı ile 2. denklem;

$$x_1'' + \frac{1}{4}x_1 = \frac{16}{9}\cos\tau + \frac{16}{27}\cos 3\tau$$

formunu alır. Periyodik çözümü;

$$x_1(t) = -\frac{64}{27}\cos\tau - \frac{64}{945}\cos 3\tau$$

olarak bulunur. Böylece;

$$x(\varepsilon,\tau) = -\frac{3}{4}\cos\tau - \varepsilon\left(\frac{64}{27}\cos\tau + \frac{64}{945}\cos 3\tau\right) + O(\varepsilon^2)$$

şeklinde bulunur.

$\varepsilon = 0.1$ için çözüm;

$$x(\varepsilon,\tau) \cong -1.57\cos\tau - 0.006\cos 3\tau$$

olarak bulunur.

3.3 Zayıf Uyarımlı Titreşimin Yakınındaki Zorlanmış Salınımlar

Ω 'nun kritik değerlerinin yakınında iyi bir önerme vermekte başarısız olan tek metot önceki bölümün metodu değil, fakat zorlanmış denklemin 2π periyotlu tüm çözümlerini gösteremedi. Onun bulabildiği tek çözüm, (3.8) lineer denkleminin 2π periyotlu tek çözümüne yakın olan çözümdür.

Daha çok çözüm, yapının değiştirilmesi ile lineer olmayan denklemin üretilmesi mümkün çözümlerinin daha geniş bir sınıfta seçilmesi önerilerek bulunabilir ki böylece farklı bir lineerleştirilmiş denklem elde edilir.

Biz sarkaç denklemini küçük sönüm içermesi için genelleştireceğiz:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + w_0{}^2 x - \frac{1}{6} w_0{}^2 x^3 = F\cos wt \qquad (3.18)$$

(3.4) denklemine karşılık olarak,

$$\tau = wt, \quad \Omega^2 = w_0{}^2 / w^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{6}\Omega^2, \quad K = k/w, \quad \Gamma = F/w^2 \qquad (3.19)$$

olmak üzere;

$$x'' + Kx' + \Omega^2 x - \varepsilon_0 x^3 = \Gamma\cos\tau$$

denklemine sahibiz. Kabul edelim ki, Γ küçük olsun (zayıf uyarma) ve K'da küçük sönüm olsun.

$$\Gamma = \varepsilon_0 \gamma, \;\; K = \varepsilon_0 k^* \;\; (\gamma, k^* > 0) \tag{3.20}$$

Ayrıca farz edelim ki, Ω, 1,3,5,… kritik noktalarından birine yakın olsun. Yani, $\Omega \approx 1$ (titreşime yakın) olsun, böylece aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\Omega^2 = 1 + \varepsilon_0 \beta \tag{3.21}$$

Buradan da (3.18) denklemi;

$$x'' + x = \varepsilon_0 (\gamma \cos\tau - k^* x' - \beta x + x^3) \tag{3.22}$$

halini alır. Şimdi aşağıdaki denklemler ailesini göz önüne alalım:

$$x'' + x = \varepsilon (\gamma \cos\tau - k^* x' - \beta x + x^3) \tag{3.23}$$

ε parametre, γ, k^*, β ise (3.20) ve (3.21) denklemlerinde verilen sabit değerlerine sahipler.

- $\varepsilon = \varepsilon_0$, alındığında (3.22) denklemi elde edilir.

- $\varepsilon = 0$, olduğunda, $x'' + x = 0$ olan yeni lineerleştirilmiş denklemini elde ederiz. Bu 2π periyotlu sınırsız birçok çözüm içerir, yani çözümleri üretmenin geniş seçeneği öneriliyor. ((3.8) ile kıyaslanırsa, sadece kendini gösteriyor.)

  Kabul edelim ki, $x(\varepsilon, \tau)$ aşağıdaki formda seriye açılabilsin,

$$x(\varepsilon, \tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots, \quad \forall \tau \quad için \tag{3.24}$$

((3.12)'deki aynı düşünce ile)

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau), \quad i = 0,1,2,... \tag{3.25}$$

(3.24)'ü, (3.23)'de yerine koyarsak , (3.10) denklemindeki düşünce ile;

$$x_0'' + x_0 = 0 \tag{3.26 a}$$

$$x_1'' + x_1 = \gamma\cos\tau - k^* x_0' - \beta x_0 + x_0^3 \tag{3.26 b}$$

$$x_2'' + x_2 = -x_0 x_1' - \beta x_1 + 3x_0^3 x_1 \tag{3.26 c}$$

$$\vdots$$

(3.26 a)' nın çözümü;

$$x_0(\tau) = a_0\cos\tau + b_0\sin\tau, \quad \forall a_0, b_0 \quad için \tag{3.27}$$

Şimdi (2.27) eşitliğini (2.26 b) denkleminde yerine koyup,

$$\cos^3\tau = \frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau$$

$$\sin^3\tau = \frac{3}{4}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin 3\tau$$

eşitliklerinden yararlanıp bazı düzenlemeler yapılarak,

$$x_1'' + x_1 = \left\{\gamma - k^* b_0 + a_0\left[-\beta + \frac{3}{4}\left(a_0^2 + b_0^2\right)\right]\right\}\cos\tau + \left\{k^* a_0 + b_0\left[-\beta + \frac{3}{4}\left(a_0^2 + b_0^2\right)\right]\right\}\sin\tau$$

$$+ \frac{1}{4}a_0(a_0^2 - 3b_0^2)\cos 3\tau + \frac{1}{4}b_0(3a_0^2 - b_0^2)\sin 3\tau \tag{3.28}$$

Bu önemli aşamada: $x_1(\tau)$ çözümü 2π periyodlu olmalı, ama (3.28) denklemindeki $\cos\tau$ *ve* $\sin\tau$' nun değerleri sıfır değil ise periyodik çözümler yoktur.($\tau\cos\tau$, $\tau\sin\tau$ formlarının şartlarını herhangi bir çözüm içereceğinden)

Bunun gibi periyodik olmayan ya da diğer bir deyişle çözümün istenmeyen parçaları genellikle ıraklık terimi olarak adlandırılır. a_0 ve b_0' ın kabul edilebilir değerlerini belirleyen $\cos\tau$ ve $\sin\tau$'nun katsayılarının sıfır olması gerekçesiyle ıraklık (secular) terimleri eleriz. Bu denklemler a_0 ve b_0'ın değerlerini aşağıdaki şekilde düzenler.

$$k^* a_0 - b_0\left\{\beta - \frac{3}{4}\left(a_0{}^2 + b_0^2\right)\right\} = 0 \qquad (3.29\text{ a})$$

$$k^* b_0 + a_0\left\{\beta - \frac{3}{4}\left(a_0^2 + b_0^2\right)\right\} = \gamma \qquad (3.29\text{ b})$$

r_0, oluşturulan çözümün genliği olmak üzere:

$$r_0 = \sqrt{\left(a_0^2 + b_0^2\right)} > 0 \qquad (3.30)$$

sağlanır.

(3.29 a) ile (3.29 b) eşitliklerinin karesi alınıp, toplanarak;

$$r_0^2\left\{\left(k^*\right)^2 + \left(\beta - \frac{3}{4}r_0^2\right)^2\right\} = \gamma^2 \qquad (3.31)$$

elde edilir.

(3.31) denklemi r_0 için çözüldüğünde, a_0 ve b_0 (3.29) ve (3.30)'dan elde edilebilir.

- $r_0 > 0$ için (3.31) denklemini sağlayan r_0^2' nin üç pozitif değeri olabilir. Bu da belirtiyor ki (3.18), (3.22) ya da (3.23)' ün k^*, β, γ' nın kesin değerleri için üç farklı çözümü olabilir.

(3.29)' u sağlayan a_0, b_0 değerlerinin bir çiftini seçerek,

$$x_1(\tau) = a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau - \frac{1}{32} a_0 (a_0^2 - 3b_0^2) \cos 3\tau - \frac{1}{32} b_0 (3a_0^2 - b_0^2) \sin 3\tau$$

eşitliğini vermesi için (3.28)'i çözeriz.(a_1 ve b_1, herhangi bir sabit olmak üzere)

Bu ifade (3.26 c) denkleminde yerine konulur; burada koşul şudur ki, 2π periyotlu $x_2(\tau)$ önceden belirtildiği gibi, a_1 ve b_1'i belirleyen denklemleri sağlamalıdır. Bu ve takip eden kısımlarda, a_i ve b_i'yi tanımlayan denklemler lineerdir, bu nedenle çözümlerin çeşitliliği önerilemez.

4. İTERASYON PERTURBASYON METODU

İterasyon Perturbasyon metodu,

$$u'' + u + \varepsilon f(u,u'),= 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \tag{4.1}$$

formundaki Mathieu tipi salınımların periyodik çözümlerini elde etmek için Ji-Huan He'nin ortaya koyduğu bir metottur. Bu metot,

$$g(u,u') = f(u,u')/u$$

olmak üzere (4.1) denkleminin,

$$u''+u + \varepsilon u g(u,u') = 0$$

formunda tekrardan yazılmasına dayanır. Burada u_n, n. yaklaşık çözüm olmak üzere yukarıdaki denklem için iterasyon formülü,

$$u''_{n+1} + u_{n+1} + \varepsilon u_{n+1} g(u_n,u'_n) = 0$$

formunda yazılabilir. Burada u_{n+1}'i yaklaşık olarak bulmak için Perturbasyon metodu kullanılır.

Burada tanıttığımız İterasyon Perturbasyon metodunu, kesirli kuvvetli ve tekilliği olan salınım problemlerine uygulayacağız. Bu salınım denklemlerinin genel yapısı,

$$\ddot{x} = f(x)$$

formundadır. Burada $f(x)$, x'in lineer olmayan fonksiyonudur. Birinci problemimizin genel hali $k,n \in N$ için, $\alpha = \frac{2k+1}{2n+1}$ olmak üzere $f(x) = -x^{\alpha}$ şeklindedir. Biz bu problemi $\alpha = 1/3$ değeri için ele aldık.

İkinci problemimizde ise $f(x)$ fonksiyonu, $f(x) = -x|x|$ formundadır. Her iki probleme de iterasyon perturbasyon metodunu uygulayarak elde ettiğimiz çözümleri diğer metotlarla elde edilmiş çözümler ile karşılaştıracağız.

Örnek 4.1: Öncelikle,

$$x'' + x^{1/3} = 0 \ , \quad x(0) = A \ , \quad x'(0) = 0 \, . \tag{4.2}$$

lineer olmayan denklemini göz önüne alalım. Bu denkleme İterasyon Perturbasyon metodunu uygulayabilmek için aşağıdaki şekilde düzenleyelim.

$$x'' + x_0^{-2/3} x = 0 \tag{4.3}$$

$x_0(t) = A\cos wt$ başlangıç çözümü olmak üzere, (4.3) denkleminde x_0 değerini yerine koyarsak,

$$A^{2/3}(\cos wt)^{2/3} x'' + x = 0 \tag{4.4}$$

denklemini elde ederiz.

$a_0 = 1.426348256$, $a_2 = 0.356587064$, $a_4 = -0.1018820183\ldots$ (bkz. Ek 1) olmak üzere,

$$(\cos\phi)^{2/3} = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2\phi + a_4 \cos 4\phi + \ldots , \tag{4.5}$$

açılımından yararlanarak (4.4) denklemini düzenlersek,

$$A^{2/3}\frac{a_0}{2}x'' + A^{2/3}(a_2\cos 2wt + a_4\cos 4wt)x'' + x = 0 \tag{4.6}$$

ya da

$$x'' + \frac{2}{a_0}A^{-2/3}x = -\frac{2}{a_0}\left(a_2\cos 2wt + a_4\cos 4wt\right)x'' \tag{4.7}$$

formundaki denkleme ulaşırız.

Bu adımda Perturbasyon Metodunu uygulayabilmek için eşitliğin sağ yanına p parametresini ekleyelim. [3]

$$x'' + \frac{2}{a_0}A^{-2/3}x = -p\frac{2}{a_0}\left(a_2\cos 2wt + a_4\cos 4wt\right)x'' \tag{4.8}$$

(4.8) denkleminin çözümünü ve katsayısını aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$x = x_0 + px_1 + p^2x_2 + \ldots \tag{4.9}$$

$$\frac{2A^{-2/3}}{a_0} = w^2 + pc_1 + p^2c_2 + \ldots \tag{4.10}$$

(4.9) ve (4.10)'u (4.8) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}&\left[x_0'' + px_1'' + p^2x_2'' + \ldots\right] + \left(w^2 + pc_1 + p^2c_2 + \ldots\right)\left[x_0 + px_1 + p^2x_2 + \ldots\right] = \\ &-\frac{2}{a_0}p\left(a_2\cos 2wt + a_4\cos 4wt\right)\left[x_0'' + px_1'' + p^2x_2'' + \ldots\right]\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde ederiz.

p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek;

$$p^0: \qquad x_0'' + w^2 x_0 = 0$$

$$x_0(0) = A \ , \ \ x_0'(0) = 0 \tag{4.12}$$

$$p: \qquad x_1'' + w^2 x_1 + c_1 x_0 = -\frac{2}{a_0}\left(a_2 \cos 2wt + a_4 \cos 4wt\right) x_0''$$

$$x_1(0) = 0 \ , \ \ x_1'(0) = 0 \tag{4.13}$$

denklemlerini elde ederiz.

(4.12) denkleminin çözümü $x_0(t) = A\cos wt$; x_0 değerini (4.13) denkleminde yerine koyarak;

$$x_1'' + w^2 x_1 = -c_1 A\cos wt + \frac{2}{a_0}\left(a_2 \cos 2wt + a_4 \cos 4wt\right)\left(Aw^2 \cos wt\right)$$

$$= A\cos wt\left(-c_1 + \frac{a_2 w^2}{a_0}\right) + Aw^2 \frac{\left(a_2 + a_4\right)}{a_0}\cos 3wt + Aw^2 \frac{a_4}{a_0}\cos 5wt \tag{4.14}$$

elde edilir.

Iraklık teriminin (secular term) yok edilebilmesi aşağıdaki eşitliği gerektirir.

$$c_1 = \frac{a_2 w^2}{a_0} \tag{4.15}$$

(4.14) denklemini $x_1(0) = 0$ ve $x_1'(0) = 0$ koşulları altında çözersek,

$$x_1(t) = A\frac{\left(3a_2 + 4a_4\right)}{24a_0}\cos wt - A\frac{\left(a_2 + a_4\right)}{8a_0}\cos 3wt - A\frac{a_4}{24a_0}\cos 5wt \tag{4.16}$$

çözümünü elde ederiz.

Böylece 1. mertebeden yaklaşık çözümü,

$$x(t) = A\cos wt + A\frac{(3a_2 + 4a_4)}{24a_0}\cos wt - A\frac{(a_2 + a_4)}{8a_0}\cos 3wt - A\frac{a_4}{24a_0}\cos 5wt$$

ya da

$$= 1.019345238A\cos wt - 0.022321428A\cos 3wt + 0.002976190477\cos 5wt \quad (4.17)$$

formda elde edilir.

2. mertebeden yaklaşık çözümünü elde etmek için,

$$p^2: \qquad x_2'' + w^2 x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_0 = -\frac{2}{a_0}(a_2\cos 2wt + a_4\cos 4wt)x_1'' \qquad (4.18)$$

$$x_2(0) = 0 \ , \ \ x_2'(0) = 0$$

(4.13) denkleminin çözümü,

$$x_1(t) = A\frac{(3a_2 + 4a_4)}{24a_0}\cos wt - A\frac{(a_2 + a_4)}{8a_0}\cos 3wt - A\frac{a_4}{24a_0}\cos 5wt \ ,$$

(4.18) denkleminde yerine konularak gerekli düzenlemeler yapıldığında (secular) ıraklık terimini yok edebilmek için,

$$c_2 = -\frac{9w^2}{8a_0^2}(a_2 + a_4)^2 - \frac{25a_4^2}{24a_0^2}w^2 \qquad (4.19)$$

değeri bulunur. Buradan 2. mertebeden yaklaşık çözümü,

$$x_2(t) = 0{,}004583864797A\cos wt - 0.0034545068A\cos 3wt - 0.0050931831A\cos 5wt$$

$$- 0.0006864725059A\cos 7wt + 0.00006643282315A\cos 9wt$$

formunda bulunur ve bulduğumuz çözümler (4.9) de yerine koyularak ,

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$$
$$= 1.023929103A\cos wt - 0.025775934A\cos 3wt + 0.002466872167A\cos 5wt$$
$$- 0.0006864725059A\cos 7wt + 0.00006643282315A\cos 9wt$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

(4.10), (4.15) ve (4.19) bağıntılarından açısal frekans,

$$w^2 = \frac{48a_0A^{2/3}}{24a_0^2 + 24a_2a_0 - 27(a_2 + a_4)^2 - 25a_4^2}$$

$a_0 = 1.426348257$, $a_2 = 0.356587064$, $a_4 = -0.1018820183$

ya da

$$wA^{1/3} = 1.077017826 \tag{4.20}$$

olarak bulunur.

$wA^{1/3}$'ün gerçek değeri $\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{6}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 1.070451$ [2].Ayrıca $wA^{1/3}$'ün birinci mertebeden harmonik balance metot [9], homotopy perturbasyon metodu [6], bookkeeping parameter method [18] ile hesaplanan değeri 1.04912; nümerik metot [11] ile hesaplanan değeri 1.054; modified Linsteid-Poincare method [15], artifical parameter-Linsteid-Poincare method [16] ile hesaplanan değeri de 1.0768 şeklindedir.

Örnek 4.2: İkinci olarak aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$x'' + |x|x = 0 \ , \quad x(0) = A \ , \ x'(0) = 0 \tag{4.21}$$

(4.21) denklemini aşağıdaki formda düzenleyelim,

$$x'' + |x_0|x = 0 \tag{4.22}$$

$x_0(t) = A\cos wt$ çözümünü (4.22) denkleminde yerine koyarak,

$$x'' + |A\cos wt|x = 0 \ . -\pi/2 \le wt \le \pi/2 \tag{4.23}$$

elde ederiz.

$|\cos wt|$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı,

$$|\cos wt| \cong \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos 2wt - ... \tag{4.24}$$

olmak üzere (4.24) açılımını (4.23) denkleminde yerine koyalım.

$$x'' + \frac{2A}{\pi}x = -\frac{4A}{3\pi}x\cos 2wt \tag{4.25}$$

Bir önceki örnekteki aynı düşünce ile (4.25) denklemine p parametresini ekleyelim.

$$x'' + \frac{2A}{\pi}x = -p\frac{4A}{3\pi}x\cos 2wt \tag{4.26}$$

(4.26) denkleminin çözümü ve (4.26) denklemindeki x'in katsayısı aşağıdaki formda olsun, [3]

$$x = x_0 + px_1 + \ldots \tag{4.27}$$
$$\frac{2A}{\pi} = w^2 + pc_1 + \ldots$$

Bir önceki örnekteki gibi (4.27) eşitliklerini (4.26) denkleminde yerine koyup düzenlersek;

$$\left[x_0'' + px_1'' + \ldots\right] + \left(w^2 + pc_1 + \ldots\right)\left[x_0 + px_1 + \ldots\right] = -\frac{4A}{3\pi} p\cos 2wt\left[x_0 + px_1 + \ldots\right] \tag{4.28}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemde p'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek,

$$p^0: \quad x_0'' + w^2 x_0 = 0 \ , \ \ x_0(0) = A \ , \ \ x_0'(0) = 0$$

$$x_0(t) = A\cos wt \tag{4.29}$$

$$p: \quad x_1'' + w^2 x_1 + c_1 x_0 = -\frac{4A}{3\pi} x_0 \cos 2wt$$

ya da,

$$x_1'' + w^2 x_1 = -c_1 A\cos wt - \frac{4A^2}{3\pi}\left[\cos 2wt\cos wt\right]$$

$$x_1'' + w^2 x_1 = A\cos wt\left[-c_1 - \frac{2A}{3\pi}\right] - \frac{2A^2}{3\pi}\cos 3wt \quad x_0(0) = A\,, x_0'(0) = 0 \tag{4.30}$$

elde ederiz.

Iraklık terimini eleyebilmek için,

$$c_1 = -\frac{2A}{3\pi} \tag{4.31}$$

yazıp, (4.30)'da yerine koyarsak,

$$x_1'' + w^2 x_1 = -\frac{2A^2}{3\pi}\cos 3wt \quad , \quad x_1(0) = 0 \ , \ x_1'(0) = 0 \tag{4.32}$$

elde ederiz ve (4.32) denkleminin yaklaşık çözümü,

$$x_1(t) = A\cos wt + \frac{A}{32}\left(\cos 3wt - \cos wt\right) \tag{4.33}$$

ve (4.27) ,(4.31) denklemlerinden açısal frekans,

$$\frac{2A}{\pi} = w^2 - \frac{2A}{3\pi}$$

ya da

$$w = \sqrt{\frac{8A}{3\pi}} \tag{4.34}$$

olarak bulunur.

An artificial parameter-Linstedt- Poincaré method [16] ve parametrelerin açılımı metodu [17] ile elde edilen sonuçla aynı sonuca ulaşırız.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında tekilliği olan ve kesirli kuvvetli iki lineer olmayan salınım denkleminin İterasyon Perturbasyon Metodu yardımıyla yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Çözümler, farklı metotlarla elde edilen çözümlerle karşılaştırılıp, ilk adım iterasyonunun yüksek bir kesinlik sağladığı ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Hu, H. and Xiong, **Z.G. ,** 2003, Oscillations in an $x^{(2m+1)/(2n+1)}$ potential, *Journal of Sound and Vibration,*259 8(2003) 977-980

Hu, **H. ,** 2006, Solutions of nonlinear oscillators with fractional powers by an iterative procedure, J. Sound Vibr. 294 (2006) 608–614.

He, **J.H.,** 2000, A modified perturbation technique depending upon an artificial parameter, Meccanica, 35 (2000) 299-311

He, **J. H.,** 2001, Iteration perturbation method for strongly nonlinear oscillators, Journal of Vibration and Control 7(2001) 631-642

He, **J. H.,** 2002, Modified Linstedt–Poincare methods for some non-linear oscillations. Part I: expansion of constant, J. Non-linear Mech. 37 (2002) 309–314.

He, J.H., 2006, *Non-Perturbative Methods for Strongly nonlinear Problems*, dissertation. de-verlag im Internet GmbH, Berlin.

Jordan, D.W. and Smith, P., 1987, *Nonlinear Ordinary differential Equations,* Clarendon Press, Oxford.

Mickens, **R.E. ,** 1987, Iteration procedure for determining approximate solutions to non-linear oscillator equations, J. Sound Vibr. 116 (1987) 185–187.

Mickens, R.E., 2001, Oscillations in an $x^{4/3}$ potential, *Journal of Sound and Vibration* 246(2) (2001),375-378

Mickens, R.E. , 2002, Analysis of non-linear oscillators having non-polynomial elastic terms, *Journal of Sound and Vibration* 255(4) (2002), 789-792

Mickens, **R.E. ,**2002, Generalized harmonic balance/numerical method for determininig analytical approximation to the periodic solutions of the $x^{4/3}$ potential, *Journal of Sound and Vibration,* 250 (2002) 951-954

Mickens, R.E. , 2005, A generalized iteration procedure for calculating approximations to periodic solutions of ‘‘truly nonlinear oscillators’’, J. Sound Vibr. 287 (2005) 1045–1051.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Mickens, R.E. , 2006, Iteration method solutions for conservative and limit-cycle $x^{1/3}$ force oscillators, J. Sound Vibr. 292 (2006) 964–968.

Nayfeh, A. H., 1973, *Perturbation Methods,* Wiley-Interscience, New York.

Öziş, T. ve Yıldırım, **A. ,** 2007, Determination of periodic solution of a u1/3 force by He's modified Linstedt–Poincare´ method, J. Sound Vibr. 301 (2007) 415–419.

Ramos, **J.I. ,** 2007, On Linstedt–Poincare´ techniques for the quintic Duffing equation, Appl. Math. Comput., in press, doi:10.1016/j.amc.2007.03.050.

Wang, S.Q. and He, **J.H. ,** 2008, nonlinear oscillator with discontinuity by parameter- expansion method, *Chaos Solitons & Fractals*,35 (2008)688-691

Xu, L., 2006, He's parameter-expanding methods for strongly nonlinear oscillators, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi: 10.1016/j.cam.2006.07.020

Ek 1: Örnek 1 için a_n değerlerinin hesaplanması;

$(\cos\phi)^{2/3}$ çift fonksiyon olduğundan, Fourier seri açılımı ;

$$(\cos\phi)^{2/3} = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\phi + a_2\cos 2\phi + a_3\cos 3\phi + a_4\cos 4\phi + a_5\cos 5\phi + \ldots \quad \text{(E.1)}$$

formundadır. Burada,

$$a_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\phi)^{2/3}\cos(2n+1)\phi d\phi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(\cos\phi)^{2/3}\cos(2n+1)\phi d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\phi)^{2/3}\cos(2n+1)\phi d\phi\right], n = 0,1,\ldots \quad \text{(E.2)}$$

formülünden hesaplanır. $\phi = \pi - \theta$ için,

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\phi)^{2/3}\cos(2n+1)\phi d\phi = -\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2/3}\cos(2n+1)\theta d\theta\,, \quad n = 0,1,\ldots \quad \text{(E.3)}$$

elde edilir. (E.3) eşitliği (E.2)'de yerine konulursa,

$$a_{2n+1} = 0\,, n = 0,1,\ldots \quad \text{(E.4)}$$

bulunur.

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx = \int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \qquad (n > -1) \quad \text{(E.5)}$$

bağıntısı yardımı ile,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^{2/3} d\phi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2/3} d\phi = \frac{2\Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(4/3)} = 1.426348256\,, \qquad \text{(E.6)}$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^{2/3} \cos 2\phi d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^{2/3} \left(2\cos^2\phi - 1\right) d\phi$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{8/3} d\phi - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2/3} d\phi$$

$$= \frac{\Gamma(5/6)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(4/3)} = 0.356587064\,, \qquad \text{(E.7)}$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^{2/3} \cos 4\phi d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^{2/3} \left(8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1\right) d\phi$$

$$= \frac{32}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{14/3} d\phi - \frac{32}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{8/3} d\phi + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2/3} d\phi$$

$$= -\frac{\Gamma(5/6)}{7\sqrt{\pi}\Gamma(4/3)} = \text{-0.1018820183} \qquad \text{(E.8)}$$

değerleri hesaplanır.

Ek 2: Örnek 2 için a_n değerlerinin hesaplanması;

$$f(x) = |\cos x| \ , \ -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

Bu aralıkta $f(x) = \cos x$ ve $f(x)$ çift fonksiyon olduğundan;

$b_n = 0$ eşitliği sağlanır.

$$2L = \pi \ , \ L = \pi/2$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx = \frac{4}{\pi}$$

olarak hesaplanır.

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi(4n^2-1)}(-1)^{n+1} \quad , \quad n = 1,2,...$$

Buradan da;

$$f(x)=|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\left(4n^2-1\right)}(-1)^{n+1}\cos 2nx$$

$$\cong\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3}-\frac{\cos 4x}{15}+\ldots\right]$$

eşitliğine ulaşırız.

ÖZGEÇMİŞ

02.11.1984 yılında İzmir'de doğdu. İlköğrenimini, orta öğrenimini ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2007 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans öğretim programından mezun oldu.

2007 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.