T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZUN KUYRUKLU SİMETRİK DAĞILIMIN PARAMETRELERİ İÇİN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEMLERE DAYALI İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Erol KUŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
Konya, 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZUN KUYRUKLU SİMETRİK DAĞILIMIN PARAMETRELERİ İÇİN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEMLERE DAYALI İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Erol KUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez 26/02/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....	…….	……
Doç. Dr. Coşkun KUŞ	Doç.Dr. Aşır GENÇ	Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZUN KUYRUKLU SİMETRİK DAĞILIMIN PARAMETRELERİ İÇİN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEMLERE DAYALI İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Erol KUŞ
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Coşkun KUŞ
2010, 62 Sayfa

Jüri: Doç.Dr. Coşkun KUŞ
Doç.Dr. Aşır GENÇ
Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

Bu tez çalışmasında, uzun kuyruklu simetrik dağılımın parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı parametre tahmini ele alınmıştır. Uzun kuyruklu simetrik dağılımın konum ve ölçek parametrelerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edildi. En çok olabilirlik tahmin edicilerin asimptotik normallik özelliği kullanılarak konum ve ölçek parametreleri için yaklaşık güven aralıkları inşa edilmiştir. Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ve güven aralıklarının kapsama olasılıklarının performanslarını incelemek için simülasyon çalışması yapılmıştır. Aynı zamanda nümerik bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri, ilerleyen tür sansürleme, uzun kuyruklu simetrik dağılım,

ABSTRACT

Master Thesis

STATISCIAL INFERENCE FOR THE PARAMETERS OF LONG-TAILED SYMMETRIC DISTRIBUTION BASED ON CENCORED SAMPLES

Erol KUŞ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor:Assoc.Prof.Dr Coşkun KUŞ

2010, 62 Pages

Jury: Assoc.Prof.Dr. Coşkun KUŞ

Assoc.Prof.Dr. Aşır GENÇ

Ass.Prof.Dr. Hasan KÖSE

In this thesis, it is considered that the estimation of parameters of long tailed symmetric distribution based on progressive type-II right censored samples. Modified maximum likelihood estimators are obtained analitically for location and scale parameters of long tailed symmetric distribution. Approximate confidence intervals of location and scale parameters are constructed using asymtotic normality of maximum likelihood estimators. Simulation study is performed to investigate the performances of the modified maximum likelihood estimators and coverage probabilities of the approximate confidence intervals. A numerical example is also presented.

Key Words: Long tailed symmetric distribution, modified maximum likelihood estimators, progressive censoring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarım süresince beni teşvik eden, maddi ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Doç.Dr.Coşkun KUŞ'a, çalışmalarımda yardımcı olan değerli hocalarım Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI, Yrd.Doç.Dr.Buğra SARAÇOĞLU, Arş.Gör.Ahmet PEKGÖR, Arş.Gör.Alper SİNAN, Dr.Aydın KARAKOCA ve Dr.Neslihan İYİT'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Farklı p değerleri için LTS dağılımının *Basıklık Katsayı* değerleri. 31

Çizelge 3.1 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simulasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları ($p = 3$)…….. 46

Çizelge 3.2 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simulasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları ($p = 5$)…….. 47

Çizelge 3.3 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simulasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları 48
($p = 10$)…….

Çizelge 3.4 Konum ve Ölçek parametrelerinin fisher bilgi matrisine dayalı %95 lik yaklaşık güven aralıklarının kapsama olasılıkları…….. 49

Çizelge 4.1. R sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem….. 50

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem plânı..... 13

Şekil 2.1 Farklı p değerleri için LTS dağılımının o.y.f grafiği…… 27

Şekil 2.2 Farklı μ değerleri için LTS dağılımının o.y.f grafiği…… 28

Şekil 2.3 Farklı σ değerleri için LTS dağılımının olasılık o.y.f. grafiği……... 28

Şekil 2.4 LTS dağılımının farklı p değerleri için *kurtosis* değişim grafiği…….... 31

Şekil 4.1 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan α_i değerleri…. 51

Şekil 4.2 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan β_i değerleri…. 51

Şekil 4.3 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan Δ_i değerleri… 51

Şekil 4.4 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan γ_i değerleri…. 52

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ 1
1. TEMEL KAVRAMLAR 3
1.1. Bazı Özel Fonksiyonlar 3
1.1.1. Gamma Fonksiyonu 3
1.1.2. Beta Fonksiyonu 4
1.1.3. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon 4
1.2. Çarpıklık Katsayısı 5
1.3. Basıklık Katsayısı 5
1.4. Konum-Ölçek Parametreli Dağılımlar Ailesi 6
1.5. Bazı Özel Dağılımlar 8
1.5.1. Düzgün Dağılım 8
1.5.2. Student t Dağılım 8
1.5.3. Lojistik Dağılım 9
1.6. Sıra İstatistikleri 10
1.7. Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem 12
1.8. İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem 13
1.9. Asimptotik Normallik 17
1.10. Olabilirlik Fonksiyonu 18
1.11. Fisher Bilgi Matrisi 19
1.12. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri 19
1.13. Asimptotik Güven Aralıkları 20
1.14. Taylor Serileri 21
1.15. Birinci Mertebe Yaklaşımı 21
1.16. Newton-Raphson Yöntemi 24
2.UZUN KUYRUKLU SİMETRİK DAĞILIM 26
2.1.En Çok Olabilirlik Tahmincisi 32
2.2. Modifiye Edilmiş En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri 33
2.3. LTS Dağılımının Parametrelerinin MMLE Tahmin Edicileri 36
2.4. MLE Tahmin Edicilerinin Varyans-Kovaryans Matrisi 42
2.5 Gözlenen Fisher Bilgi Matrisi 43
3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI 45
4. UYGULAMA 50
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 53
EK 1. Simulasyon Sonuçları İçin Delphi 5 Programında Yazılan Kod 54
KAYNAKLAR 60

GİRİŞ

Bir sistemin güvenilirliği için sonuç çıkarımı yaparken sistemi oluşturan tüm bileşenlerin bozulma zamanlarını gözlemlemek her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin; bir klinikte tedavi gören hastalara ilişkin veriler, eksiksiz gözlenemeyebilir veya pahalı bir elektronik parçanın yaşam zamanı hakkında bilgi edinmek için yapılan yaşam testinde, parçaların hepsinin bozulmalarının gözlenmesi maliyeti ve test zamanını artıracağından istenmeyebilir. Bu tip durumlarda, deney yada gözlem sonrası sansürlenmiş veri elde edilir. Tıp, biyoloji, sigortacılık, mühendislik, kalite kontrol ve birçok alanda sansürlenmiş verilerle karşılaşılmaktadır.

Deney ya da gözlemler sonucunda değişik sansür türleriyle karşılaşmak mümkündür. Birinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, t gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce, sistemdeki bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. İkinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, n birimden oluşan bir sistemin bozulan $k \le n$ biriminin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. Rasgele sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli ise birimlerin bozulma zamanlarının başka bir rasgele olaydan dolayı sansürlenmesi durumudur (Kale 2003).

İkinci tip sansürlemenin en popüler olanı, ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlemedir (progressive type-II right censoring). Bu sansürleme modeli şu şekilde izah edilebilir: n sayıda özdeş bileşenin (aynı yaşam zamanı dağılımına sahip) yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen *1.* bozulma ile rasgele R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini, daha sonra geriye kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, *2.* bozulma ile rasgele R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece m. bozulma ile rasgele R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle m bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen m

hacimli örneklem ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemdir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000)

İlerleyen Tür Tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı Balakrishnan ve ark. (2004) Uç Değer dağılımının, Balakrishnan ve Asgharzadeh (2005) Ölçeklendirilmiş Yarı Lojistik dağılımın (Scaled Half-Logistic Distribution), Lin ve ark. (2006) Log-Gamma dağılımının, Asgharzadeh (2006) Genelleştirilmiş Lojistik dağılımın(Generalized Logistic Distribution), Sultan ve ark. (2007) Weibull dağılımının, Asgharzadeh (2009) Genelleştirilmiş Üstel dağılımın ve parametreleri için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerini önermişler ve bu tahmin edicilerin özelliklerini Monte Carlo simülasyonu yardımıyla incelemişlerdir.

Tezin birinci bölümünde, çalışmada gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. İkinci Bölümde, uzun kuyruklu simetrik dağılım ve özellikleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu dağılımın parametrelerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri ve asimptotik varyans-kovaryans matrisi elde edilmiştir. Üçüncü Bölümde, uzun kuyruklu simetrik dağılımın konum ve ölçek parametreleri için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları hem simülasyon hem de fisher bilgi matrisine dayalı olarak elde edilmiştir. Yine simülasyon çalışmasıyla fisher bilgi matrisine dayalı yaklaşık güven aralıklarının kapsama olasılılıkları incelenmiştir. Dördüncü Bölümde tezde elde edilen sonuçlar için bir uygulama verilmiştir. Beşinci Bölümde ise tezde elde edilen sonuçlara ve ilerideki çalışmalar için bazı önerilere yer verilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

1.1.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\beta)=\int_0^{\infty} t^{\beta-1}\exp(-t)dt,\ \ \beta>0$$

şeklinde tanımlanır (Kuş 2004).

β pozitif tam sayı olmak üzere

$$\Gamma(\beta+1)=\beta!$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt=\sqrt{\pi}=1.7724538509$$
$$\Gamma(2\beta)=(2\pi)^{-1/2}2^{2\beta-1/2}\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1/2)$$

dir.

Stirling formülü

$$\Gamma(\beta)\sim\exp(-\beta)\beta^{\beta-1/2}(2\pi)^{1/2}\left[1+\frac{1}{12\beta}+\frac{1}{288}\right]$$
$$\log[\Gamma(\beta)]=\left(\beta-2^{-1}\right)\log(\beta)-\beta+2^{-1}\log(2\pi)+\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\frac{1}{1260\beta^5}+\cdots$$

şeklindedir.

1.1.2. Beta Fonksiyonu

$a,b>0$ olmak üzere Beta fonksiyonu

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(\bullet)$, Gamma fonksiyonudur (Kuş, 2004).

1.1.3. Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$$F_{p,q}(\mathbf{n},\mathbf{d},r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k\prod_{i=1}^{p}\Gamma(n_i+k)\Gamma^{-1}(n_i)}{\Gamma(k+1)\prod_{i=1}^{q}\Gamma(d_i+k)\Gamma^{-1}(d_i)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbf{n}=[n_1,n_2,...,n_p]$, $\mathbf{d}=[d_1,d_2,...,d_q]$ dır. Özel olarak $p=2, q=1$ için hipergeometrik fonksiyon

$$F_{2,1}(\alpha,\beta;\eta;z)=\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\eta-\beta)}\int_0^1\frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\eta-\beta-1}}{(1-tz)^{\alpha}}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(\beta)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\eta+k)\Gamma^{-1}(\eta)}$$

şeklindedir (Gradshteyn ve Ryzhik 2000).

1.2. Çarpıklık Katsayısı

İlk üç momenti sonlu olan bir X rasgele değişkeninin beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin *Çarpıklık(Skewness) Katsayısı*

$$\gamma_1 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$$

şeklinde tanımlanır.

Çarpıklık katsayısı olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun ortalama etrafındaki asimetrikliğin ölçüsü olarak yorumlanır(Casella ve Berger 2002, Roussas 1973). $\gamma_1 > 0$ ise dağılım sağa çarpıktır, $\gamma_1 < 0$ ise dağılım sola çarpıktır denir(Roussas 1973). X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, $a \in \mathbb{R}$ noktası etrafında simetrik ise $\gamma_1 = 0$ dır(Casella ve Berger 2002, Roussas 1973).

1.3. Basıklık Katsayısı

İlk dört momenti sonlu olan bir X rasgele değişkeninin beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin *Basıklık(kurtosis) Katsayısı*

$$\gamma_2 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4$$

şeklinde tanımlanır(Roussas 1973).

Yukarıdaki tanım ele alındığında, normal dağılım için Basıklık Katsayısı 3 olarak elde edilir.

Basıklık Katsayısı, olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun yükseklik derecesinin ölçüsü olarak yorumlanır. Dağılımın Basıklık Katsayısı $\gamma_2 > 3$ olduğunda normal dağılıma göre sivri, $\gamma_2 < 3$ olduğunda normal dağılıma göre daha basıktır denir.

1.4. Konum-Ölçek Parametreli Dağılımlar Ailesi

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_\mu(x)$ ve

$$F_\mu(\cdot) \in \Im_1 = \{F_\mu(x) : F_\mu(x) = F(x-\mu);\ \mu \in \Theta,\ F \text{ biliniyor}\}$$

olmak üzere $\Im_1$'e konum parametreli dağılımlar ailesi, μ'ye ise konum parametresi denir. Burada Θ, μ parametresi için parametre uzayıdır. μ parametresinin X rasgele değişkeni için konum parametresi olması için gerek ve yeter koşul $X-\mu$ rasgele değişkeninin dağılımının μ'den bağımsız olmasıdır. Yani

$$P(X-\mu \le x) = P(X \le x+\mu) = F_\mu(x+\mu) = F(x+\mu-\mu) = F(x)$$

dir.

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_\sigma(x)$ ve

$$F_\sigma(\cdot) \in \Im_2 = \left\{ F_\sigma(x) : F_\sigma(x) = F\left(\frac{x}{\sigma}\right);\ \sigma \in \Sigma,\ F \text{ biliniyor} \right\}$$

olmak üzere $\Im_2$'e konum parametreli dağılımlar ailesi, σ'ya ise ölçek parametresi denir. Burada Σ, σ parametresi için parametre uzayıdır. σ

parametresinin X rasgele değişkeni için ölçek parametresi olması için gerek ve yeter koşul $\frac{X}{\sigma}$ rasgele değişkeninin dağılımının σ'dan bağımsız olmasıdır. Yani

$$P\left(\frac{X}{\sigma} \le x\right) = P\left(X \le \sigma x\right) = F_{\sigma}(\sigma x) = F\left(\frac{\sigma x}{\sigma}\right) = F\left(x\right)$$

dir.

$\boldsymbol{\gamma} = \left(\mu, \sigma\right)'$ olmak üzere X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_{\gamma}(x)$ ve

$$F_{\gamma}\left(\cdot\right) \in \Im_3 = \left\{F_{\gamma}\left(x\right) : F_{\gamma}\left(x\right) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);\ \gamma \in \Gamma,\ F \text{ biliniyor}\right\}$$

olmak üzere $\Im_3$'e konum ve ölçek parametreli dağılımlar ailesi, μ'ye konum ve σ'ya da ölçek parametresi denir. Burada Γ, $\boldsymbol{\gamma}$ parametresi için parametre uzayıdır. $\boldsymbol{\gamma}$ parametresinin X rasgele değişkeni için konum parametresi olması için gerek ve yeter koşul $\frac{X-\mu}{\sigma}$ rasgele değişkeninin dağılımının $\boldsymbol{\gamma}$ dan bağımsız olmasıdır. Yani

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right) = P\left(X \le \sigma x + \mu\right) = F_{\gamma}\left(\sigma x + \mu\right) = F\left(\frac{\sigma x + \mu - \mu}{\sigma}\right) = F\left(x\right)$$

şeklindedir (Casella ve Berger 2002).

1.5. Bazı Özel Dağılımlar

1.5.1. Düzgün Dağılım

X rasgele değişkeni, (β,θ) aralığında düzgün dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x)=(\theta-\beta)^{-1},\ \beta<x<\theta \tag{1.1}$$

$$F(x)=(x-\beta)(\theta-\beta)^{-1},\ \beta<x<\theta \tag{1.2}$$

biçimindedir. Düzgün dağılım için $Düzgün(\beta,\theta)$ gösterimi kullanılacaktır.

X rasgele değişkeni $Düzgün(\beta,\theta)$ dağılımına sahip olduğunda X in beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=(\beta+\theta)2^{-1} \qquad Var(X)=(\theta-\beta)^2 12^{-1}$$

şeklindedir.

1.5.2. Student t Dağılım

Sürekli bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{\pi r}}\times\left(1+\frac{x^2}{r}\right)^{\frac{r+1}{2}},\ x\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}^+$$

ise X rasgele değişkenine t dağılımına sahiptir denir. Burada r parametresi, dağılımın serbestlik derecesi olarak adlandırılır. r serbestlik dereceli t dağılımı için $t(r)$ gösterimi kullanılacaktır.

X rasgele değişkeni $t(r)$ dağılımına sahip olduğunda X in beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X)=0,\ r=2,3,\ldots$$

$$Var(X)=\frac{r}{r-2},\ r=3,4,\ldots$$

şeklindedir (Ghahramani 2005).

1.5.3. Lojistik Dağılım

μ ve σ parametreli lojistik dağılıma sahip olan X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^2},\ x\in\mathbb{R} \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mu\in\mathbb{R}$ konum ve $\sigma\in\mathbb{R}^+$ ölçek parametresidir. μ ve σ parametreli lojistik dağılım kısaca $Lojistik(\mu,\sigma)$ ile gösterilecektir.

$Lojistik(\mu,\sigma)$ dağılımına sahip olan X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x)=\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)},\ x\in\mathbb{R} \tag{1.4}$$

şeklindedir. $Lojistik(\mu,\sigma)$ dağılıma sahip X rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı sırasıyla $E(X)=\mu$ ve $Var(X)=\frac{\pi^2\sigma^2}{3}$ şeklindedir. Lojistik dağılımın çarpıklık katsayısı sıfır olup $E(X)=\mu$ etrafında simetriktir (Asgharzadeh 2006).

1.6. Sıra İstatistikleri

F dağılım fonksiyonuna sahip bir kitleden alınan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ olacak biçimde büyüklük sırasına göre dizilmesiyle elde edilen her bir $X_{i:n}$ rasgele değişkeni *i*. sıra istatistiği olarak isimlendirilir.

$$X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_1(x) = P\{X_{1:n} \le x\} = 1-(1-F(x))^n \tag{1.5}$$

ve

$$X_{n:n} = \text{maks}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_n(x) = P\{X_{n:n} \le x\} = (F(x))^n$$

biçimindedir (David 1970).

$1 \le r \le n$ olmak üzere $r.$ sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu

$$F_r(x) = P\{X_{r:n} \le x\} = P\{X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ lerden enaz } r \text{ tanesi} \le x\}$$

dir. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n$ lerden tam i tanesi $\le x\}$ olayı A_i ile gösterilsin. A_i olayları ayrık olduğundan,

$$F_r(x) = P\left\{\bigcup_{i=r}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=r}^{n} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i} \qquad (1.6)$$

dır. Bu ise tam olmayan beta fonksiyonudur. Yani

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i}$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

dır. Şayet X_i' ler $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ olacak biçimde sürekli rasgele değişkenler ise

$$f_r(x) = \frac{dF_r(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} f(x)$$

olur.

Burada

$$\mathrm{B}(r, n-r+1) = (n!)^{-1}(r-1)!(n-r)!$$

şeklindedir (David 1970).

$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_{1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \times \cdots \times f(x_n), \quad -\infty < x_1 \le \cdots \le x_n < \infty \quad (1.7)$$

şeklindedir (David 1970).

1.7. Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem

n sayıda özdeş bileşenin yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Meydana gelen $m \le n$ bozulma ile yaşam testi sona erdirilsin. Bu şekilde yapılan sansürlemeye *Tip-II sağdan sansürleme* denir (Kale 2003).

$X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{m:n}$, olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olan dağılımdan alınan tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{m:n}$' nin marjinal ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (1.7) den

$$f_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{i=1}^{m} f(x_i) \{1 - F(x_i)\}^{n-m},$$

$$-\infty < x_1 < \cdots < x_m < \infty \quad (1.8)$$

şeklinde elde edilir (David 1970).

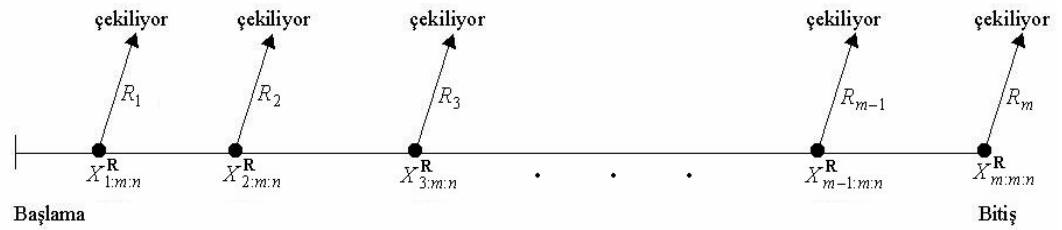
Eşitlik (1.8)'de $m = n$ alınırsa bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (1.7) elde edilir.

Tip-II sağdan sansürleme, yaşam testinin maliyetini ve süresini azaltmasına karşın sonuç çıkarımının güvenilirliğini azaltmaktadır.

1.8. İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklem

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlenmiş model (Progressive type-II right censoring model) şu şekilde tanımlanmaktadır (Balakrishnan ve Aggarwala 2000).

n sayıda özdeş bileşenin bir sistemde yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen 1. bozulma ile R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini daha sonra geriye kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, 2. bozulma ile R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece m. bozulma ile R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle m bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen m hacimli örnekleme *ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem* denir. Burada $n = m + \sum_{i=1}^{m} R_i$ biçimindedir ve $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şeması olarak adlandırılır.



Şekil 1.1. İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem plânı

$X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, olasılık yoğunluk fonksiyonu g ve dağılım fonksiyonu G olan dağılımdan alınan ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$' nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu kombinatorik yöntemler de kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A=\left\{x_1<X^{\mathbf{R}}_{1:m:n}<x_1+\Delta x_1, x_2<X^{\mathbf{R}}_{2:m:n}<x_2+\Delta x_2,\ldots,x_m<X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}<x_m+\Delta x_m\right\}$$

olayı göz önüne alınsın. A olayının gerçekleşmesi için mümkün $X_1,X_2,\ldots,X_n$ rasgele değişkenlerinin kendi aralarında mümkün sıralanmalarının sayısı;

$$c=n(n-R_1-1)\times\cdots\times(n-R_1-R_2-\cdots-R_{m-1}-m+1) \tag{1.9}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
P\{A\}&=P\left\{x_1<X^{\mathbf{R}}_{1:m:n}<x_1+\Delta x_1, x_2<X^{\mathbf{R}}_{2:m:n}<x_2+\Delta x_2,\ldots,x_m<X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}<x_m+\Delta x_m\right\}\\
&=c\times P\{x_1<X_1<x_1+\Delta x_1,\ R_1 \text{ tane } X>x_1+\Delta x_1,\\
&\qquad x_2<X_2<x_2+\Delta x_2,\ R_2 \text{ tane } X>x_2+\Delta x_2,\\
&\qquad\quad\vdots\\
&\qquad x_m<X_m<x_m+\Delta x_m,\ R_m \text{ tane } X>x_m+\Delta x_m\}\\
&=c\times\prod_{i=1}^{m}\left[1-G(x_i+\Delta x_i)\right]^{R_i}\left[G(x_i+\Delta x_i)-G(x_i)\right]
\end{aligned}$$

$$g_{X^{\mathrm{R}}_{1:m:n},X^{\mathrm{R}}_{2:m:n},\ldots,X^{\mathrm{R}}_{m:m:n}}(x_1,x_1,\ldots,x_m)=\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \vdots\\ \Delta x_m\to 0}}\frac{P(A)}{\Delta x_1\times\Delta x_2\times\cdots\times\Delta x_m}$$

$$=c\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left[1-G(x_i+\Delta x_i)\right]^{R_i}\left[G(x_i+\Delta x_i)-G(x_i)\right]}{\Delta x_1\times\cdots\times\Delta x_m}$$

$$=c\times\lim_{\Delta x\to 0}\prod_{i=1}^{m}\left[1-G(x_i+\Delta x_i)\right]^{R_i}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left[G(x_i+\Delta x_i)-G(x_i)\right]}{\prod_{i=1}^{m}\Delta x_i}$$

$$=c\times\prod_{i=1}^{m}\lim_{\Delta x\to 0}\left[1-G(x_i+\Delta x_i)\right]^{R_i}\prod_{i=1}^{m}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x_i+\Delta x_i)-G(x_i)}{\Delta x_i}$$

$$=c\times\prod_{i=1}^{m}\left[1-G(x_i)\right]^{R_i}\prod_{i=1}^{m}g(x_i)$$

$$= c \times \prod_{i=1}^{m} \left[1 - G(x_i)\right]^{R_i} g(x_i) \tag{1.10}$$

elde edilir. (1.10)'da $\mathbf{R} = (0,\ldots,0)$ alınırsa bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (1.7), $\mathbf{R} = (0,\ldots,n-m)$ alınırsa tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (1.8) elde edilir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000).

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme, yaşam zamanı analizlerinde veri elde etmede önemli bir yöntemdir. Çalışan parça diğer bir test için sistemden çekilip, deneyin maliyeti ve deney süresi azaltılabilir(Kuş, 2004).

Teorem 1.1 (Balakrishnan ve Sandhu 1995) $U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < U^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R}$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olsun.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1 - U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}{1 - U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}} \\ V_2 &= \frac{1 - U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}}{1 - U^{\mathbf{R}}_{m-2:m:n}} \\ &\vdots \\ V_m &= 1 - U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} \end{aligned} \tag{1.11}$$

rasgele değişkenleri bağımsızdır ve sırasıyla

$$V_i \sim Beta\left(i + \sum_{j=m-i+1}^{m} R_j, 1\right), \quad i = 1,2,\ldots,m$$

beta rasgele değişkenleridir.

İspat. (1.1),(1.2) ve (1.10)'dan, $U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < U^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$'nin ortak olasılık fonksiyonu

$$f_{U^{\mathbf{R}}_{1:m:n},U^{\mathbf{R}}_{2:m:n},\ldots,U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}(u_1,u_2,\ldots,u_m) = c\prod_{i=1}^{m}(1-u_i)^{R_i}, \quad 0<u_1<\cdots<u_m<1 \tag{1.12}$$

şeklinde elde edilir. Burada c, (1.9)'da tanımlandığı gibidir. (1.11)'de ters dönüşüm yapılırsa

$$U^{\mathbf{R}}_{i:m:n} = 1-\prod_{j=m-i+1}^{m} V_j, \; i=1,2,\ldots,m$$

elde edilir. Eşitlik (1.11)'de tanımlanan dönüşümün jakobiyeni $J=\prod_{i=2}^{m} V_i^{i-1}$ olarak bulunur. Böylece $V_1,V_2,\ldots,V_m$ in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{V_1,V_2,\ldots,V_m}(v_1,v_2,\ldots,v_m) = f_{U^{\mathbf{R}}_{1:m:n},U^{\mathbf{R}}_{2:m:n},\ldots,U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}\left(1-v_m,1-v_{m-1}v_m,\ldots,1-\prod_{j=1}^{m}v_j\right)|J|$$

$$= c\prod_{i=1}^{m} v_i^{\,i-1+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_j}, \quad 0<v_1,\ldots,v_m<1 \tag{1.13}$$

biçiminde elde edilir.

Eşitlik (1.13)'de faktorizasyon teoremi kullanılırsa $V_i \sim Beta\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m}R_j,1\right)$, $i=1,2,\ldots,m$ ve $V_1,V_2,\ldots,V_m$'nin bağımsız olduğu görülür.

$U^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < U^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış **R** sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olsun. Teorem 1.1'den

$$V_1 = \frac{1-U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}}{1-U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}}$$
$$V_2 = \frac{1-U^{\mathbf{R}}_{m-1:m:n}}{1-U^{\mathbf{R}}_{m-2:m:n}}$$
$$\vdots$$
$$V_m = 1-U^{\mathbf{R}}_{1:m:n}$$

rasgele değişkenleri bağımsız ve sırasıyla

$$V_i \sim Beta\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j, 1\right), \quad i=1,2,\ldots,m$$

beta rasgele değişkenleridir. O zaman $W_i = V_i^{\,i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j}$, $i=1,2,\ldots,m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımına sahiptir.

1.9. Asimptotik Normallik

(X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi , Z , standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken ve $\xrightarrow{d}$, dağılımda yakınsamayı göstermek üzere,

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z$$

olacak şekilde reel sayıların (a_n) ve pozitif reel sayıların (b_n) dizileri varsa, (X_n) dizisine asimptotik normal veya daha açık olarak "a_n ortalaması" ve "b_n^2 varyansı" ile asimptotik normal dizisi denir ve $X_n \sim AN(a_n, b_n^2)$ biçiminde gösterilir. Buradaki a_n sayısı X_n'in beklenen değeri ve b_n^2 sayısı X_n nin varyansı olmayabilir. Bu değerler sırasıyla X_n'in asimptotik ortalama ve asimptotik varyans değerleridir (Öztürk 2010).

1.10. Olabilirlik Fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere bu fonksiyona parametrenin bir fonksiyonu gözü ile bakıldığında

$$L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}),\ \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu denir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ve $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)'$ şeklinde olup Γ parametre uzayıdır. Olabilirlik fonksiyonu $L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x})$ in logaritması alınarak

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \log\left(L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x})\right),\quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \tag{1.15}$$

şeklinde elde edilen fonksiyona log-olabilirlik fonksiyonu denir.

1.11. Fisher Bilgi Matrisi

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklem için Fisher bilgi matrisi(Fisher information matrix)

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{\gamma}) &= -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \log\left(L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X})\right)\right)\right\} \\
&= -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \ell(\boldsymbol{\gamma})\right)\right\} \\
&= -\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_p} \\
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p^{\,2}}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

şeklinde tanımlanır, burada $L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X})$ ve $\ell(\boldsymbol{\gamma})$ sırasıyla eşitlik (1.14) ve (1.15) de verilen olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonlarıdır (Wu ve Kuş 2009).

1.12. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

Olabilirlik veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\boldsymbol{\gamma}$ değeri

$$
\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg\max\left(L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x})\right) = \arg\max\left(\ell(\boldsymbol{\gamma})\right) \tag{1.17}
$$

$\boldsymbol{\gamma}$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi (Maximum Likelihood Estimator, MLE) olarak adlandırılır.

1.13. Asimptotik Güven Aralıkları

Eşitlik (1.17) de tanımlanan en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ bazı düzgünlük şartları altında

$$\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\right)$$

olmak üzere asimptotik normaldir, burada $I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$, (1.16) eşitliğinde tanımlı Fisher Bilgi Matrisidir. Fisher Bilgi matrisinin tersi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ nın asimptotik varyans-kovaryans matrisidir. Bu matrisin bilinmesi, büyük örneklemler için $\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\ldots,\hat{\gamma}_n$ tahmin edicilerinin ayrı ayrı asimptotik varyanslarının bilinmesi anlamına gelmektedir. $I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$ nın tutarlı bir tahmin edicisi

$$\hat{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_1^{\,2}} & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_1\partial\gamma_p}\\ \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_2\partial\gamma_1} & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_2^{\,2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_2\partial\gamma_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_p\partial\gamma_1} & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_p\partial\gamma_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial\gamma_p^{\,2}}\end{pmatrix}^{-1}_{\gamma=\hat{\gamma}} \qquad (1.18a)$$

dır (Adamidis ve Loukas 1998). Buradan $\gamma_i,\ i=1,2,\ldots,p$ için $\hat{\gamma}_i$'ya dayalı asimptotik güven aralığı

$$P\left(\hat{\gamma}_i-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}}<\gamma_i<\hat{\gamma}_i+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}}\right)\cong 1-\alpha \qquad (1.18b)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada V_{ii}, eşitlik (1.18a)'da verilen matrisin *i.* diogonal elemanıdır ve $a\in\left(0,1\right)$ için z_a, standart normal dağılımın *a.* kuantilidir (Wu ve Kuş 2009).

1.14. Taylor Serileri

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonunun (a,b) aralığında n. mertebeden türevi $f^{(n)}$ olmak üzere $[a,b]$ 'nin keyfi x_0 ve $x > x_0$ noktaları için

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k / k! + R_n(x) \tag{1.19}$$

açılımına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *Taylor serisi* denir. Burada

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1 \tag{1.20}$$

veya

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0 \tag{1.21}$$

şeklindedir (Shahbazov 2005).

1.15. Birinci Mertebe Yaklaşımı

$U^{\mathbf{R}}_{1:m:n}, U^{\mathbf{R}}_{2:m:n}, \ldots, U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere bu örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(u_1,u_2,\ldots,u_m)=c\prod_{i=1}^{m}(1-u_i)^{R_i},\ 0<u_1<\cdots<u_m<1 \tag{1.22}$$

şeklindedir, burada c

$$c=n(n-R_1-1)\times\cdots\times(n-R_1-R_2-\cdots-R_{m-1}-m+1)$$

dir.

Bu sonuçlar kullanılarak, $U^{\mathbf{R}}_{1:m:n}, U^{\mathbf{R}}_{2:m:n}, \ldots, U^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}$, $i = 1,2,\ldots,m$ $i.$ ilerleyen tür sağdan sansürlü sıra istatistiğinin beklenen değer ve varyansı

$$E\left(U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}\right) = \pi_i = 1 - b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{1.23}$$

$$Var\left(U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}\right) = k_i b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{1.24}$$

şeklindedir. $1 \le i < j \le n$ için $U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}$ ile $U^{\mathbf{R}}_{j:m:n}$ rasgele değişkenlerinin arasındaki kovaryans

$$Cov\left(U^{\mathbf{R}}_{i:m:n}, U^{\mathbf{R}}_{j:m:n}\right) = k_i b_{j,} \qquad 1 \le i < j \le m$$

biçimindedir. Burada $i = 1,2,\ldots,m$ ve $a_j = \dfrac{j + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}{j + 1 + R_{m-j+1} + \cdots + R_m}$ için

$$\begin{aligned} k_i &= \prod_{k=1}^{i} \left\{ \frac{m-k+2+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m}{m-k+3+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m} \right\} \\ &\quad - \prod_{k=1}^{i} \left\{ \frac{m-k+1+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m}{m-k+2+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m} \right\} \\ &= \prod_{j=m-i+1}^{m} \gamma_j - \prod_{j=m-i+1}^{m} a_j \end{aligned} \tag{1.25}$$

ve

$$b_i = \prod_{k=1}^{i} \left\{ \frac{m-k+1+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m}{m-k+2+R_k+R_{k+1}+\cdots+R_m} \right\} = \prod_{j=m-i+1}^{m} a_j \tag{1.26}$$

biçiminde tanımlanır (Balakrishnan ve Aggarwala 2000, sayfa:81-82).

Yukarıdaki açıklamalar kullanılarak herhangi sürekli bir $F(\bullet)$ dağılımına sahip bir kitleden alnınan ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin beklenen değer, varyans ve kovaryans değerleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Ters olasılık integral dönüşümünden

$$Y_{i:m:n}^{\mathbf{R}} \overset{d}{=} F^{-1}\left(U_{i:m:n}^{\mathbf{R}}\right) \tag{1.27}$$

yazılabilir. Burada F^{-1}, ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklemin geldiği yaşam zamanı dağılımı için dağılım fonksiyonun tersidir ve $\overset{d}{=}$ ise dağılımda eşitliği göstermektedir. (1.27) eşitliğinin sağ tarafı $\pi_i = E\left(U_{i:m:n}^{\mathbf{R}}\right)$ civarında Taylor serisine açıp beklenen değerini alınıp ilk terim dışındakiler göz ardı edilerek

$$E\left(Y_{i:m:n}^{\mathbf{R}}\right) \approx F^{-1}\left(\pi_i\right), \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{1.28}$$

yazılabilir. Eşitlik (1.28)'deki π_i, (1.23) eşitliğinde verildiği gibidir. Bu bilgiler yardımıyla varyans ve kovaryans değerleri de

$$Var\left(Y_{i:m:n}^{\mathbf{R}}\right) \approx \left\{F^{-1^{(1)}}\left(\pi_i\right)\right\}^2 k_i b_i \;\; i = 1,2,\ldots,m \tag{1.29}$$

ve

$$Cov\left(Y_{i:m:n}^{\mathbf{R}}, Y_{j:m:n}^{\mathbf{R}}\right) \approx F^{-1^{(1)}}\left(\pi_i\right) F^{-1^{(1)}}\left(\pi_j\right) k_i b_j, \;\; 1 \le i < j \le m \tag{1.30}$$

şeklindedir. Burada $F^{-1^{(1)}}(u) = \dfrac{d}{du} F^{-1}(u)$ şeklinde tanımlıdır (Balakrishnan ve Aggarwala 2000, sayfa:83).

1.16. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün bulunmasındaki iteratif yöntemlerden biridir. $f(x)$ sürekli ve türevlenebilen fonksiyonunun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. $f(x_n+h)$ fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa

$$f(x_n+h)=f(x_n)+hf'(x_n)+\frac{h^2}{2}hf''(\xi_n) \quad \xi\in(x_n,x_n+h)$$

yazılabilir. $x_n+h=x_{n+1}$ değerinin gerçek köke çok yakın olduğu yani $f(x_n+h)$' ın hemen sıfır olduğu düşünülürse,

$$0=f(x_n)+hf'(x_n)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_n) \qquad \xi\in(x_n,x_n+h)$$

yazılır. h yeterince küçük ise h^2'yi içeren terim ve sonraki terimler ihmal edilebilir. Böylece

$$f(x_n)+hf'(x_n)=0$$

veya

$$h=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

olarak elde edilir. Eğer $h=x_{n+1}-x_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterasyon denklemine ulaşılır (Oturanç ve ark 2003).

Newton – Raphson yöntemi geometrik olarak incelenecek olursa $f(x) = 0$ fonksiyonunun başlangıç yaklaşık kökü x_0 olmak üzere fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

olarak yazılabilir. Bu teğetin x eksenini kestiği nokta ilk kök yaklaşımı olur ve

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilir. Bu şekilde ardışık yaklaşımlar kullanılarak, gerçek köke ulaşılır.

2.UZUN KUYRUKLU SİMETRİK DAĞILIM

Uzun Kuyruklu Simetrik dağılım, özellikle aykırı değer içeren örneklemlere dayalı istatistiksel sonuç çıkarımı yaparken çok kullanışlıdır (Tiku ve Akkaya 2004). X rasgele değişkeni, Uzun Kuyruklu Simetrik dağılıma (Long-Tailed Symmetric Distribution, LTS) sahip olduğunda, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

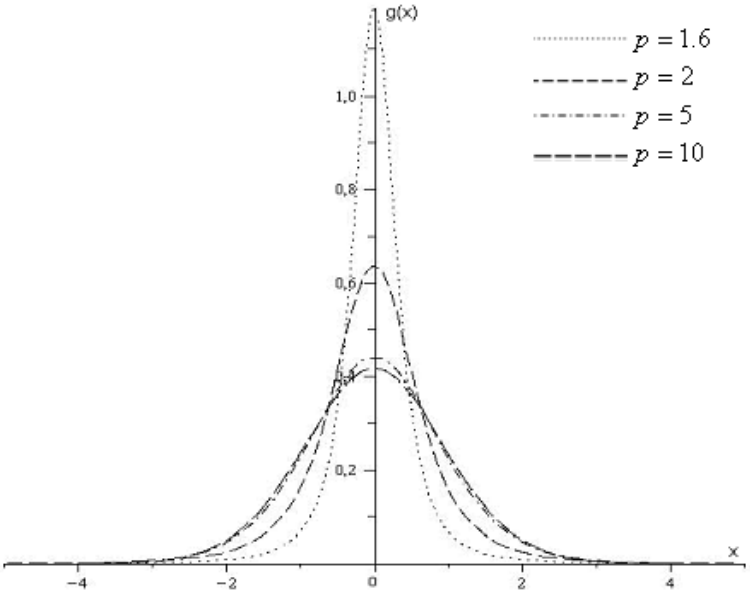
$$g(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{k}\sigma\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p-\frac{1}{2}\right)}\left\{1+\frac{1}{k}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}^{-p},\ x\in\mathbb{R} \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Tiku ve Akkaya 2004, syf:30).

Burada $k=2p-3$, $p>\frac{3}{2}$, $\mu\in\mathbb{R}$ ve $\sigma>0$ dır. Ayrıca X rasgele değişkeninin $p>1.5$ için beklenen değer ve varyansı $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$ şeklindedir. Ayrıca μ konum, σ ölçek parametresidir (Şenoğlu ve Tiku 2001).

$k=2p-3$ ifadesinde p'nin sonsuza yaklaşması durumunda LTS dağılımı normal dağılıma yaklaşır (Şenoğlu ve Tiku 2001, Tiku ve Akaya, 2004).

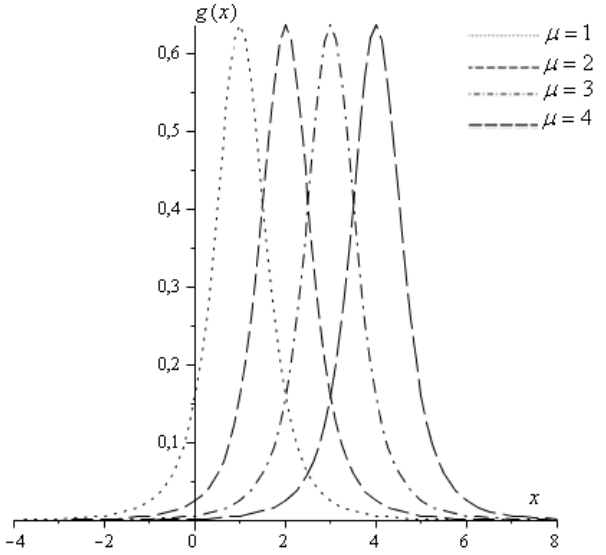
Şekil 2.1 de $\mu=0$ ve $\sigma=1$ olması durumunda farklı p değerleri için LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Şekil 2.1 Farklı p değerleri için LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

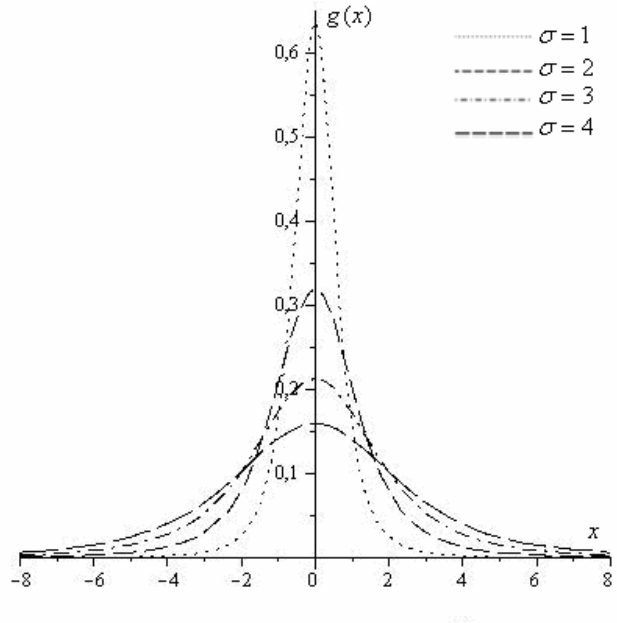
Şekil 2.1 incelendiğinde, p değerlerinin artması durumunda LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzemektedir. $p = 10$ olması durumunda LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu hemen hemen normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ile aynıdır.

Aşağıda $p = 2, \sigma = 1$ değerleri sabit kalması koşulu ile farklı μ değerleri için LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.2 Farklı μ değerleri için LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

Şekil 2.2 incelendiğinde μ arttırıldığında LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği sağa doğru kaymaktadır. Burada μ parametresinin LTS dağılımı için bir konum parametresi olduğu açıkça gözlenmektedir.



Şekil 2.3 Farklı σ değerleri için LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

Şekil 2.3'teki grafikte sabit $p = 2,\ \mu = 0$ değerleri için farklı σ değerlerine karşılık LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Grafik incelendiğinde σ değerleri arttıkça olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin yayılımı artmaktadır. Burada σ'nın, LTS dağılımı için ölçek parametresi olduğu açıkça gözlemlenmektedir.

LTS dağılımına sahip X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$G(x,\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{k}\sigma \,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)} \left\{1+\frac{1}{k}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}^{-p} dx \tag{2.2}$$

şeklindedir.

X rasgele değişkeni μ *ve* σ parametreli LTS dağılımına sahip olduğunda $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü uygulanırsa Z standart LTS dağılımına sahip olur ve Z'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)} \left\{1+\frac{z^2}{k}\right\}^{-p}, z \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathrm{B}(\bullet,\bullet)$ Beta fonksiyonudur. Z'nin Maple 11 program yardımıyla hesaplanan dağılım fonksiyonu ise

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)} \left\{1+\frac{z^2}{k}\right\}^{-p} dz, \qquad z \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

X, LTS dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere X rasgele değişkeninin $r.$momenti Maple 11 programı yardımıyla

$$E\left(X^r\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},p-\frac{1}{2}\right)}\left\{1+\frac{z^2}{k}\right\}^{-p} dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}-\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)(2p-3)^{\binom{r}{2}}\left(1+(-1)^r\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)},\quad p>\frac{3}{2} \tag{2.5}$$

biçiminde elde edilir.

(2.5) eşitsizliği kullanılarak LTS dağılımının *Basıklık katsayısı* (kurtosis)

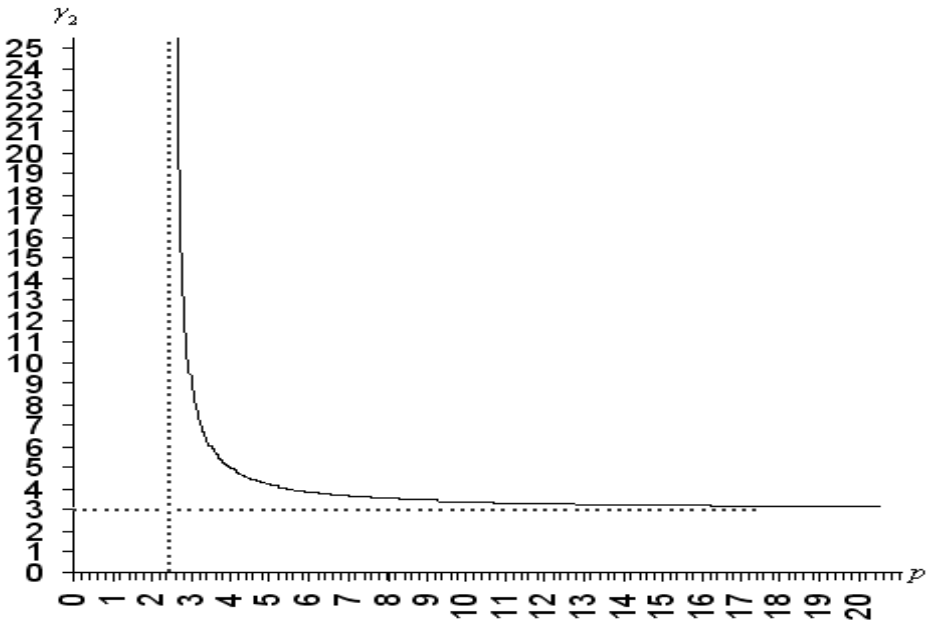
$$\gamma_2=\frac{3\left(p-\frac{3}{2}\right)}{p-\frac{5}{2}},\quad p>\frac{5}{2}$$

şeklindedir (Tiku ve Akkaya 2004).

Ayrıca LTS dağılımı simetrik dağılım olduğundan çarpıklık katsayısı $\gamma_1=0$ dır. Çizelge 2.1'de LTS dağılımının farklı p değerleri için *Basıklık katsayısı* değerleri verilmiştir(Tiku ve Akaya 2004). Şekil 2.4'de Excel yazılımı yardımıyla çizilen farklı p değerleri için *Basıklık katsayısı* değerleri verilmiştir.

Çizelge 2.1 Farklı p değerleri için LTS dağılımının *Basıklık Katsayı* değerleri

p	2.5	3.5	5	10	…	∞
Basıklık katsayısı	∞	6	4.2	3.4	…	3



Şekil 2.4 LTS dağılımının farklı p değerleri için *Basıklık katsayısı* değişim grafiği

Şekil 2.4 incelendiğinde $p = 2.5$ için basıklık katsayısının sonsuza gittiği, p arttıkça basıklık katsayısının 3'e yaklaştığı (normal dağılım basıklık katsayısı) gözükmektedir. Buda LTS dağılımının, p parametresi sonsuza gittiğinde normal dağılıma yaklaştığını desteklemektedir.

X, LTS dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere $T = \sqrt{\frac{v}{k}}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sqrt{\frac{v}{k}}Z$ şeklinde tanımlanan T rasgele değişkeni $v = 2p - 1$ serbestlik dereceli t dağılımına sahiptir (Tiku ve Akkaya 2004, Tiku ve Sürücü, 2009).

2.1.En Çok Olabilirlik Tahmincisi

$X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < X_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$, LTS dağılımından $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem olsun.(1.10)'dan ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu,\sigma) = c\prod_{j=1}^{m} g(x_j,\mu,\sigma)\left(1-G(x_j,\mu,\sigma)\right)^{R_j} \tag{2.6}$$

şeklindedir. Burada *G*, eşitlik (2.1)'de verilen *g* yoğunluk fonksiyonuna ilişkin (2.2) de verilen dağılım fonksiyonudur.

Eşitlik (2.6)'da verilen olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu,\sigma) = c\sigma^{-m}\prod_{j=1}^{m} f(z_j)\left(1-F(z_j)\right)^{R_j} \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir, burada $f(\bullet)$ ve $F(\bullet)$, sırasıyla, (2.3) ve (2.4) de tanımlandığı gibidir. Ayrıca, $z_j = (x_j - \mu)/\sigma$ dır. Olabilirlik fonksiyonun logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu

$$\log[L(\mu,\sigma)] = \log c - m\log(\sigma) + \sum_{j=1}^{m}\log\left(f(z_j)\right) + \sum_{j=1}^{m} R_j \log\left(1-F(z_j)\right)$$

biçiminde elde edilir. Buradan olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Asgharzadeh 2006).

$$\frac{\partial \log L(\mu,\sigma)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\frac{f'(z_j)}{f(z_j)} + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} R_j \frac{f(z_j)}{1-F(z_j)} = 0 \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial \log L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{m}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} z_j \frac{f'(z_j)}{f(z_j)} + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} R_j z_j \frac{f(z_j)}{1-F(z_j)} = 0 \qquad (2.9)$$

2.2. Modifiye Edilmiş En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

İlerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı olabilirlik denklemlerinden ilgili parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri genellikle analitik olarak elde edilemez. Böylece konum ölçek parametreleri için analitik olarak elde edilebilen asimptotik en çok olabilirlik tahmin edicileri arzu edilebilir. Bu analitik tahmin ediciler olabilirlik denklemlerin iteratif çözümleri için iyi bir başlangıç değeri olarak kullanılabilirler. Asimptotik olabilirlik denklemleri fikri yeni değildir. Asimptotik en çok olabilirlik tahmin edicileri ayrıntılı olarak Tiku ve Akkaya (Robust Estimation and Hypothesis Testing)'nın kitabında tartışılmıştır.

En çok olabilirlik tahmin edicileri (MLE), bazı düzgünlük şartları (regularity conditions) altında asimptotik normallik gibi arzu edilen özelliklere sahip olmaktadır. Fisher bilgi matrisinin (Fisher Information Matrix) tersi, bazı düzgünlük şartları altında ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımının varyans-kovaryans matrisi olması nedeniyle parametrelerin asimptotik güven aralıkları ML tahmin edicilerine dayalı olarak elde edilebilmektedir. ML tahmin edicilerinin istenen özelliklere sahip olmasının yanı sıra bazı durumlarda bu tahmin edicilerin elde edilmesinde bazı sorunlar ortaya çıkabilir. Örneğin, olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre lineer olmadığı ve birden fazla tepeli (polymodal) olması durumunda ML tahmin edicilerini elde etmek için Newton-Raphson ve EM (Expectation-Maximization) algoritması gibi bazı iteratif yöntemler kullanılmaktadır. Bu iteratif yöntemlerin uygulanmasında parametrelerin başlangıç değerlerinin seçimi birden fazla tepeli olabilirlik fonksiyonunun en

büyüklenmesinde önemli rol oynamaktadır. Olabilirlik denklemlerinin gerçek çözümlerine uzak başlangıç değerleri verilmesi durumunda yukarıda bahsedilen iteratif yöntemler genel maksimum yerine yerel maksimum değerine ulaşabilir. Sansürlü ve maskeli örneklemlere dayalı olabilirlik fonksiyonları, genellikle parametrelere göre lineer değildir. Bu sebepten iteratif yöntemlerin, istenilen çözüme ulaştırmama ihtimali göz önüne alındığında daima analitik olarak elde edilen ve ML tahmin edicileri ile aynı asimptotik özelliklere sahip olan modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin (MMLE, Tiku 1967a, b; 1968a, b, c; 1970; 1973) önemi ortaya çıkmaktadır. Modifiye edilmiş tahmin ediciler aşağıdaki prosedür yardımıyla elde edilebilir (Tiku ve Akkaya 2004).

Aşağıda ölçek parametresi bilindiğinde konum parametresinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisinin elde edilmesindeki süreç verilmiştir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, konum parametresi θ, ölçek parametresi σ (biliniyor) olan g yoğunluklu bir kitleden alınan n birimlik bir örneklem olmak üzere bu örnekleme dayalı olabilirlik denklemi

$$\frac{\partial \log L(\theta; \mathbf{X})}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} g(z_i) = 0 \,,\; z_i = (x_i - \theta)/\sigma \tag{2.10}$$

şeklinde yazılabilir, burada $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin aldığı değerler ve $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemine dayalı sıra istatistikleri

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)} \tag{2.11}$$

olmak üzere (2.10) eşitliği, (2.11) de verilen sıra istatistiklerine dayalı olarak

$$\frac{\partial \log L(\theta; \mathbf{X})}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)}) = 0 \,,\; z_{(i)} = (x_{(i)} - \theta)/\sigma \tag{2.12}$$

biçiminde yazılabilir, burada $z_i, i = 1, 2, \ldots, n$, $Z_{(1)} \le Z_{(2)} \le \cdots \le Z_{(n)}$ sıra istatistiklerinin aldığı değerlerdir. $t_{(i)}$, i. standartlaştırılmış sıra istatistiği $Z_{(i)}$ nin

beklenen değeri $\left(t_{(i)} = E\left(Z_{(i)}\right), i = 1,2,\ldots,n\right)$ olmak üzere $g(z_{(i)})$ yi, $t_{(i)}$ civarında Taylor serisine açıp ilk iki terimi alındığında aşağıdaki doğrusal eşitlik elde edilir.

$$g(z_{(i)}) \cong g(t_{(i)}) + (z_{(i)} - t_{(i)})\left\{\frac{\partial}{\partial z} g(z)\right\}_{z=t_{(i)}} \tag{2.13}$$

$$= \alpha_i + \beta_i z_{(i)}, \quad (1 \le i \le n)$$

, burada $\beta_i = \left\{\frac{\partial}{\partial z} g(z)\right\}_{z=t_{(i)}}$ ve $\alpha_i = g(t_{(i)}) - \beta_i t_{(i)}$ (2.14)

dır. Eğer *g(z)* sınırlı bir fonksiyon ve $z_{(i)}$, $t_{(i)}$ ye yaklaştığında $1 \le i \le n$ için

$$g(z_{(i)}) - (\alpha_i + \beta_i z_{(i)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{2.15}$$

dır. (2.13) (2.12) de yazıldığında modifiye edilmiş olabilirlik denklemi

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \cong \frac{\partial \log L^*}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha_i + \beta_i z_{(i)}\right\} = 0 \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik bazı düzgünlük (regularity) şartlar altında

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{\partial \log L^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right\} = 0 \tag{2.17}$$

dır. (2.15) ve (2.17) den, modifiye edilmiş en çok olabilirlik denklemi asimptotik olarak en çok olabilirlik denklemine denk olduğu söylenebebilir. (2.16) denkleminden elde analitik olarak elde edilen θ parametresinin tahmin edicisine modifiye edilmiş olabilirlik MML (Modified Maxsimum Likelihood) tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m}\left\{\sigma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{(i)}\right\} \tag{2.18}$$

dir, $m = \sum_{i=1}^{n}\beta_i$ şeklindedir.

Kullanılan dağılım simetrik bir dağılım ise $t_{(i)} = -t_{(n-i+1)}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\alpha_i = \alpha_{n-i+1} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0 \quad \beta_i = \beta_{n-i+1} \quad (1 \le i \le n) \tag{2.19}$$

dir. Simetrik dağılım için, θ nın MML tahmin edicisi sıra istatistiğinin bir lineer fonksiyonu olan

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{(i)} \tag{2.20}$$

dır(Tiku ve Akkaya 2004).

2.3. LTS Dağılımının Parametrelerinin MMLE Tahmin Edicileri

Eşitlik (2.8) ve (2.9) eşitliklerinde verilen olabilirlik denklemleri

$$h_1 = \frac{f'(z_j)}{f(z_j)} = -\frac{2zp}{\left(1+\frac{z^2}{k}\right)} \tag{2.21}$$

ve

$$h_2 = \frac{f(z_j)}{\left(1-F(z_j)\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-p}}{1-\frac{z}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)}\,hipergeom\left(\left[\frac{1}{2}, p\right], \left[\frac{3}{2}\right], -\frac{z^2}{k}\right)} \tag{2.22}$$

ifadelerinden dolayı parametrelere göre lineer olmadığından, en çok olabilirlik tahmin edicilerinin analitik olarak elde edilmesi mümkün değildir. Burada $h_1(z_j)$ ve $h_2(z_j)$ fonksiyonları $E(Z^R_{j:m:n}) = v_{j:m:n}$ civarında Taylor serisine açılarak parametreye göre lineer olmayan olabilirlik denklemleri modifiye edilerek, parametreye göre lineer hale getirilecektir. Bu şekilde elde edilen modifiye edilmiş olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülerek modifiye edilmiş (Asimptotik) en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilecektir. Balakrishnan ve Sandhu (1995)'den

$$F(Z^R_{j:m:n}) \overset{d}{=} U^{\mathbf{R}}_{j:m:n}$$

dir, burada $U^{\mathbf{R}}_{j:m:n}$, standart düzgün dağılımına sahip $j.$ ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü sıra istatistiğidir. Buradan

$$Z^R_{j:m:n} \overset{d}{=} F^{-1}(U^R_{j:m:n})$$

yazılabilir. Böylece birinci mertebe yaklaşımından (first order approximation)

$$v_{j:m:n} = E(Z^R_{j:m:n}) \approx F^{-1}\left(E(U^{\mathbf{R}}_{j:m:n})\right) \tag{2.23}$$

yazılabilir, burada $E(U^{\mathbf{R}}_{j:m:n})$, (1.23) de tanımlan

$$E(U^{\mathbf{R}}_{j:m:n}) = 1 - \prod_{i=m-j+1}^{m} \frac{i + R_{m-i+1} + \cdots + R_m}{j+1+R_{m-i+1} + \cdots + R_m}, \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{2.24}$$

şeklindeki eşitliktir. (2.23) de verilen $v_{j:m:n}$

$$\int_{-\infty}^{v_{j:m:n}} \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right)}\left\{1+\frac{z^2}{k}\right\}^{-p} dx = E\left(U_{j:m:n}^{\mathbf{R}}\right), \qquad j=1,2,\ldots,m$$

eşitliğinden elde edilir (Balakrishnan ve Aggarwala 2000). Bu denklem ise nümerik integral (Simpson kuralı) yöntemleriyle çözülebilir.

$h_1(z_j)$ ve $h_2(z_j)$ fonksiyonlarını $v_{j:m:n}$ civarında Taylor serisine açılıp sadece serinin ilk iki terimi ele alındığında bu fonksiyonların yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} h_1(z_j) &\approx h_1(v_{j:m:n}) + h_1'(v_{j:m:n})(z_j - v_{j:m:n}), \\ &= \alpha_j - \beta_j z_j \end{aligned} \tag{2.25}$$

ve

$$\begin{aligned} h_2(z_j) &\approx h_2(v_{j:m:n}) + h_2'(v_{j:m:n})(z_j - v_{j:m:n}), \\ &= \delta_j + \gamma_j z_j, \end{aligned} \tag{2.26}$$

şeklinde elde edilebilir, burada

$$\alpha_j = h_1(v_{j:m:n}) - v_{j:m:n} h_1'(v_{j:m:n}), \; j=1,2,\ldots,m$$
$$\beta_j = -h_1'(v_{j:m:n}), \; j=1,2,\ldots,m$$

ve

$$\delta_j = h_2(v_{j:m:n}) - v_{j:m:n} h_2'(v_{j:m:n}), \quad j=1,2,\ldots,m$$
$$\gamma_j = h_2'(v_{j:m:n}), \quad j=1,2,\ldots,m$$

dır (Asgharzadeh 2006). (2.8) ve (2.9) da (2.25) ve (2.26) eşitlikleri yazılarak modifiye edilmiş en çok olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial(\mu,\sigma)}{\partial\mu} \approx -\frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j - \beta_j z_j) + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} R_j(\delta_j + \gamma_j z_j) = 0, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} \approx -\frac{m}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} z_j(\alpha_j - \beta_j z_j) + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{m} R_j z_j(\delta_j + \gamma_j z_j) \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir. (2.27) eşitliği $z_j = (x_j - \mu)/\sigma$ eşitliği göz önüne alınarak

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i - R_j\delta_j) - \sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)\left(\frac{x_j - \mu}{\sigma}\right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem

$$\sum_{j=}^{m}(\alpha_j - R_j\delta_j) = \sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Şeklinde yazılabilir. Her iki taraf σ ile çarpıldığında yukarıdaki denklem

$$\mu\sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j) = \sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)x_j - \sigma\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j - R_j\delta_j)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\hat{\mu} = K - \hat{\sigma}\,L \tag{2.29}$$

şeklinde elde edilir, burada

$$K = \frac{\sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)x_j}{\sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)} \quad \text{ve} \quad L = \frac{\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j - R_j\delta_j)}{\sum_{j=1}^{m}(\beta_j + R_j\gamma_j)} \tag{2.30}$$

biçimindedir (Asgharzadeh 2006). (2.28) eşitliğinden

$$\frac{\partial(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\sigma}\left\{\mu + \sum_{j=1}^{m} z_j(\alpha_j - \beta_j z_j) + \sum_{j=1}^{m} R_j z_j(\delta_j + \gamma_j z_j)\right\}$$

$$= m + \sum_{j=1}^{m} z_j\alpha_j - \sum_{j=1}^{m} z_j^2\beta_j + \sum_{j=1}^{m} R_j z_j\delta_j + \sum_{j=1}^{m} R_j z_j^2\gamma_j$$

$$= m + \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_j \right) \left(\frac{x_j - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \left(\frac{x_j - \mu}{\sigma} \right)^2$$

olup

$$m + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_j \right) \left(x_j - K + L\sigma \right) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \left(x_j - K + L\sigma \right)^2 = 0$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} & m + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_j \right) \left(x_j - K \right) + L \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_j \right) \\ & - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \left(x_j - K \right)^2 - L^2 \sum_{j=11}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \\ & - \frac{2L}{\sigma} \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \left(x_j - K \right) = 0 \end{aligned} \qquad (2.31)$$

eşitliği elde edilir. (2.30) da tanımlanan eşitlikler yukarıdaki denklemde ele alındığında

$$L \sum_{j=}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_i \right) - \frac{2L}{\sigma} \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) \left(x_j - K \right) - L^2 \sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right) = 0 \quad (2.32)$$

yazılabilir. (2.31) eşitliğinden (2.32) eşitliğine aşağıdaki açıklamalar ışığında geçilmiştir.

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_j - R_j \delta_j \right)}{\sum_{j=1}^{m} \left(\beta_j + R_j \gamma_j \right)} = \frac{L_1}{L_2}$$

olarak ifade edilsin. Bu ifade (2.32) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{L_1^2}{L_2}-\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\left(x_j-K\right)-\frac{L_1^2}{L_2^2}L_2=0$$

elde edilir.

$$\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\left(x_j-K\right)=0$$

eşitliğinin var olduğunu göstermek (2.31) eşitliğinden (2.32) eşitliğine geçişi göstermeye yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\left(x_j-K\right)&=\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)x_j-\frac{2KL}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\\&=\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)x_j}{\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)}-\frac{2LK}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\\&=\frac{2L}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)K-\frac{2LK}{\sigma}\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)=0\end{aligned}\qquad(2.33)$$

olup (2.31) eşitliğinden (2.32) eşitliğine geçiş gösterilmiş olur. Böylece (2.32) denklemi

$$A_1=\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_j-R_j\delta_j\right)\left(x_j-K\right)$$

$$A_2=\sum_{j=1}^{m}\left(\beta_j+R_j\gamma_j\right)\left(x_j-K\right)^2$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$m+\frac{1}{\sigma}A_1-\frac{1}{\sigma^2}A_2=0$$

şeklinde yazılabilir. Denklemin her iki tarafı σ^2 ile çarpıldığında

$$m\sigma^2 + A_1\sigma - A_2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden σ parametresinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\sigma} = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4mA_2}}{2m} \tag{2.34}$$

olarak bulunur (Asgharzadeh 2006).

2.4. MLE Tahmin Edicilerinin Varyans-Kovaryans Matrisi

Bu bölümde modifiye edilmiş MLE ile MLE tahmin edicilerinin performansı bir simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılarak sonuçlar tartışılmıştır. Bu simülasyon çalışmasında Balakrishnan ve Sandhu (1995)'nun önerdiği algoritma kullanılarak, ilerleyen tür tip II sağdan sansürlü örneklem üretilecektir.

Ayrıca olabilirlik fonksiyonu ve modifiye edilmiş olasılık fonksiyonuna dayalı gözlenen fisher bilgi matrisi elde edilecektir. Bunlar asimptotik normalliğe dayalı pivot elemanlar elde etmeye yarayacaktır. Elde edilen bu pivotlarla oluşturulan güven aralıklarının kapsama olasılıkları (covarages probability) Monte Carlo simülasyon yöntemiyle irdelenecektir. Büyük örneklem yaklaşımının bir uygulaması olarak herhangi bir $(\mu,\sigma)^T$ parametre vektörü MLE tahmin edicisi $(\mu,\sigma)'$ ortalamalı $J^{-1}(\mu,\sigma)$ varyans-kovaryans matrisli iki değişkenli normal dağılıma sahiptir.Burada $J(\mu,\sigma) = E\left(I;\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}\right)$ olmak üzere beklenen fisher bilgi matrisidir, $I\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}$ gözlenen fisher bilgi matrisidir ve

$$I\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 l(\mu,\sigma)}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 l(\mu,\sigma)}{\partial\mu\partial\sigma}\\ \dfrac{\partial^2 l(\mu,\sigma)}{\partial\mu\partial\sigma} & \dfrac{\partial^2 l(\mu,\sigma)}{\partial\sigma^2}\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca gözlenen fisher bilgi matrisi I, beklenen fisher bilgi matrisinin tutarlı tahmin edicisidir (Adamidis ve Loukas 1998).

2.5 Gözlenen Fisher Bilgi Matrisi

Eşitlik (2.8) ve (2.9)'daki olabilirlik fonksiyonlarından

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}h_1'(x_i)-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i h_2'(x_i), \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu\partial\sigma}=&\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}h_1(x_i)-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i h_2(x_i)+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}x_i h_1'(x_i)\\ &-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i x_i h_2'(x_i)\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^2}=&\frac{m}{\sigma^2}+\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i h_1(x_i)+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 h_1'(x_i)\\ &-\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i x_i h_2(x_i)-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}R_i x_i^2 h_2'(x_i)\end{aligned} \tag{2.37}$$

elde edilir. Eşitlik (2.27) ve (2.28)'den modifiye edilmiş olabilirlikleri

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu^2}\approx-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(\beta_i+R_i\gamma_i)=I_{11},$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu\partial\sigma}\approx\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-R_i\delta_i)-\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(\beta_i+R_i\gamma_i)x_i=I_{12},$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \approx \frac{m}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - R_i\delta_i\right)x_i - \frac{3}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\beta_i + R_i\gamma_i\right)x_i^2 = I_{22}$$

şeklinde yazılabilir (Asgharzadeh, 2006). Gözlemlenen fisher bilgi matrisinin tersi alınarak, MMLE tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisinin tahmin edicisi (gözlenen fisher bilgi matrisi)

$$\widehat{ACov}\left(\hat{\mu},\hat{\sigma}\right) \approx \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{(\hat{\mu},\hat{\sigma})} = \begin{pmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{12} & \hat{I}_{22} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

şeklindedir, burada,

$$\hat{I}_{11} = \frac{I_{22}}{I_{11}I_{22} - {I_{12}}^2},\ \hat{I}_{12} = -\frac{I_{12}}{I_{11}I_{22} - {I_{12}}^2},\ \hat{I}_{22} = \frac{I_{11}}{I_{11}I_{22} - {I_{12}}^2}.$$

dır (Asgharzadeh 2006).

3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde uzun kuyruklu simetrik dağılımın konum ve ölçek parametreleri için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin beklenen değerleri, varyansları ve kovaryansları 5000 deneme ile hem simülasyon hem de fisher bilgi matrisine dayalı olarak elde edilmiştir. Algoritma Delphi 5 programlama dilinde yazılmış olup EK 1'de yazılan kodlar verilmiştir. Tüm simülasyonlar $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ için yapılmıştır. Simülasyon sonuçları Çizelge 3.1, Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3'de verilmiştir. Simülasyon sonuçlarına bakıldığında sansür şeması tahmin edicilerin yanını oldukça etkilediği gözlenmektedir. Örneğin Çizelge 3.1'de (0,0,0,0,15) sansür şeması için yan -0.0277 iken (15,0,0,0,0) sansür şeması için yan -0.1124 dır(Yaklaşık 5 katı).

Çizelge 3.1, 3.2 ve 3.3'e beraber bakıldığında aynı sansür şemaları için p değeri artması tahmin edicilerin yanlarını artırmakta varyanslarını azaltmakta olduğu anlaşılmaktadır.

Ayrıca Çizelge 3.4'de 5000 deneme yapılarak fisher bilgi matrisine dayalı yaklaşık güven aralıklarının kapsama olasılıkları (%95'lik güven saviyesi için) farklı sansür şemaları ve p değerleri için verilmiştir. Bu çizelgeden p değerlerinin değişmesinin kapsama olasılıklarını fazla etkilemediği sonucu çıkartılabilir.

Yine Çizelge 3.4 den farklı sansür şemalarının kapsama olasılıklarını fazlaca etkilediği gözlenmiştir. Son olarak m değerinin artması kapsama olasılıklarını iyileştirdiği söylenebilir.

Çizelge 3.1 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simülasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları ($p = 3$ durumu)

n	m	Sansür Şeması	$\widehat{E}(\hat{\mu})$	$\widehat{Var}(\hat{\mu})$	$\widehat{E}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Var}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Cov}(\hat{\mu},\hat{\sigma})$	$\hat{I}^{11}$	$\hat{I}^{12}$	$\hat{I}^{22}$
20	5	(0,0,0,0,15)	-0.0277	3.1576	1.1141	8.8467	5.2227	1.4046	1.0947	1.7876
20	5	(15,0,0,0,0)	-0.1124	2.0745	1.3604	12.1661	-1.2424	1.7536	0.3752	0.9848
20	5	(10,5,0,0,0)	0.0137	1.8159	1.3793	13.6369	3.0105	1.8886	0.6116	1.3157
20	5	(5,5,5,0,0)	0.0296	2.4746	1.2948	11.6403	4.8591	1.6054	0.7400	1.4062
20	5	(3,3,3,3,3)	-0.0523	1.6210	1.1176	7.9704	3.4973	1.0592	0.6318	1.1689
20	5	(0,15,0,0,0)	0.0587	3.2304	1.2467	8.8119	5.0704	1.4598	0.8268	1.5462
20	5	(5,10,0,0,0)	0.0999	4.0195	1.3628	13.7743	7.0134	2.1534	1.0466	1.7668
20	10	(0,…,0,10)	-0.0068	0.2052	1.1129	3.2260	0.7128	0.2197	0.0903	0.3633
20	10	(10,0,…,0)	-0.0379	0.5301	1.3530	8.6388	-0.3788	0.7225	0.0741	0.5000
50	20	(0,…,0,30)	-0.0495	0.0250	0.9675	0.0466	0.0139	0.0256	0.0147	0.0433
50	20	(30,0,…,0)	-0.0027	0.0430	1.1637	1.7111	0.0012	0.1157	0.0000	0.1132
50	25	(0,…,0,25)	-0.0189	0.0201	0.9769	0.0338	0.0079	0.0195	0.0077	0.0329
50	25	(25,0,…,0)	-0.0414	0.1126	1.4057	5.7445	-0.5823	0.2326	0.0114	0.1534

Çizelge 3.2 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simülasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları ($p = 5$ durumu)

n	m	Sansür Şeması	$\widehat{E}(\hat{\mu})$	$\widehat{Var}(\hat{\mu})$	$\widehat{E}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Var}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Cov}(\hat{\mu},\hat{\sigma})$	$\hat{I}^{11}$	$\hat{I}^{12}$	$\hat{I}^{22}$
20	5	(0,0,0,0,15)	-0.0840	0.7556	1.0294	1.2480	0.3457	0.3419	0.0898	0.1617
20	5	(15,0,0,0,0)	-0.1012	0.1691	0.9946	0.4833	0.0865	0.2100	0.0669	0.1072
20	5	(10,5,0,0,0)	-0.0827	0.8450	1.0212	2.8928	1.3413	0.5711	0.2494	0.3700
20	5	(5,5,5,0,0)	-0.1725	0.3495	0.8934	0.9653	0.4975	0.2499	0.1334	0.1951
20	5	(3,3,3,3,3)	-0.0953	0.4210	0.9749	0.8427	0.4972	0.2804	0.1270	0.1841
20	5	(0,15,0,0,0)	-0.1033	0.3833	0.9994	1.7098	0.6408	0.4047	0.1613	0.2428
20	5	(5,10,0,0,0)	-0.0560	0.0837	0.9411	0.3542	0.0950	0.0766	0.0290	0.0836
20	10	(0,…,0,10)	-0.0253	0.2417	1.0490	1.0473	0.1600	0.1724	0.0220	0.0978
20	10	(10,0,…,0)	-0.0610	0.0704	0.9722	0.2600	0.1091	0.0394	0.0200	0.0447
50	20	(0,…,0,30)	-0.0183	0.0960	1.0710	0.8376	-0.0253	0.0844	0.0084	0.0441
50	20	(30,0,…,0)	-0.0218	0.0383	0.9873	0.1920	0.0569	0.0289	0.0111	0.0334
50	25	(0,…,0,25)	-0.0151	0.0614	1.0541	0.6524	-0.0675	0.0611	0.0043	0.0332
50	25	(25,0,…,0)	-0.0840	0.7556	1.0294	1.2480	0.3457	0.3419	0.0898	0.1617

Çizelge 3.3 Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin simülasyonla ve fisher bilgi matrisi kullanılarak elde edilen varyans ve kovaryansları ($p = 10$ durumu)

n	m	Sansür Şeması	$\hat{E}(\hat{\mu})$	$\widehat{Var}(\hat{\mu})$	$\hat{E}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Var}(\hat{\sigma})$	$\widehat{Cov}(\hat{\mu},\hat{\sigma})$	$\hat{I}^{11}$	$\hat{I}^{12}$	$\hat{I}^{22}$
20	5	(0,0,0,0,15)	-0.2365	0.1630	0.8172	0.1310	0.0986	0.1465	0.0928	0.1138
20	5	(15,0,0,0,0)	-0.1007	0.1834	0.9538	0.0798	0.0430	0.1564	0.0418	0.0618
20	5	(10,5,0,0,0)	-0.1217	0.1780	0.9566	0.4780	0.0944	0.2162	0.0713	0.0973
20	5	(5,5,5,0,0)	-0.1453	0.1624	0.9205	0.0925	0.0660	0.1441	0.0569	0.0735
20	5	(3,3,3,3,3)	-0.2019	0.1523	0.8591	0.1069	0.0762	0.1340	0.0686	0.0879
20	5	(0,15,0,0,0)	-0.1304	0.1752	0.9216	0.0861	0.0662	0.1459	0.0539	0.0681
20	5	(5,10,0,0,0)	-0.1243	0.1706	0.9327	0.0866	0.0609	0.1480	0.0520	0.0677
20	10	(0,…,0,10)	-0.0615	0.0681	0.9156	0.0654	0.0248	0.0634	0.0245	0.0585
20	10	(10,0,…,0)	-0.0301	0.0950	0.9883	0.0504	0.0110	0.0878	0.0119	0.0418
50	20	(0,…,0,30)	-0.0822	0.0350	0.9387	0.0342	0.0175	0.0340	0.0168	0.0315
50	20	(30,0,…,0)	-0.0206	0.0475	1.0058	0.0253	0.0047	0.0462	0.0055	0.0210
50	25	(0,…,0,25)	-0.0226	0.0274	0.9727	0.0278	0.0104	0.0272	0.0106	0.0258
50	25	(25,0,…,0)	-0.0192	0.0370	1.0048	0.0222	0.0030	0.0376	0.0033	0.0182

Çizelge 3.4 Konum ve Ölçek parametrelerinin fisher bilgi matrisine dayalı %95 lik yaklaşık güven aralıklarının kapsama olasılıkları

			$p=3$		$p=5$		$p=10$	
n	m	Sansür Şeması	μ için	σ için	μ için	σ için	μ için	σ için
20	5	(0,0,0,0,15)	0.7704	0.7496	0.8136	0.7532	0.7460	0.7218
20	5	(15,0,0,0,0)	0.8830	0.8538	0.8826	0.8504	0.8656	0.8472
20	5	(10,5,0,0,0)	0.8810	0.8582	0.8788	0.8494	0.8582	0.832
20	5	(5,5,5,0,0)	0.8536	0.8316	0.8448	0.8188	0.8366	0.8126
20	5	(3,3,3,3,3)	0.8132	0.7894	0.7992	0.7684	0.7800	0.7624
20	5	(0,15,0,0,0)	0.8586	0.8470	0.8486	0.8278	0.8404	0.8166
20	5	(5,10,0,0,0)	0.8652	0.8486	0.8494	0.8338	0.8546	0.8222
20	10	(0,…,0,10)	0.8868	0.8426	0.8808	0.8436	0.8864	0.8366
20	10	(10,0,…,0)	0.9204	0.8840	0.9228	0.8810	0.9182	0.8938
50	20	(0,…,0,30)	0.9026	0.8980	0.8890	0.8812	0.8824	0.8720
50	20	(30,0,…,0)	0.9362	0.9104	0.9418	0.9116	0.9346	0.9190
50	25	(0,…,0,25)	0.9216	0.9134	0.9228	0.9002	0.9274	0.9038
50	25	(25,0,…,0)	0.9454	0.9004	0.9390	0.9132	0.9440	0.9154

4. UYGULAMA

Konum parametresi 0, ölçek parametresi 1 olan uzun kuyruklu simetrik dağılımdan $\mathbf{R}=(1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem Balakrishnan ve Sandhu'nun (1995) algoritması (Teorem 1.1) kullanılarak üretildi. Üretilen örneklem Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. **R** sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem

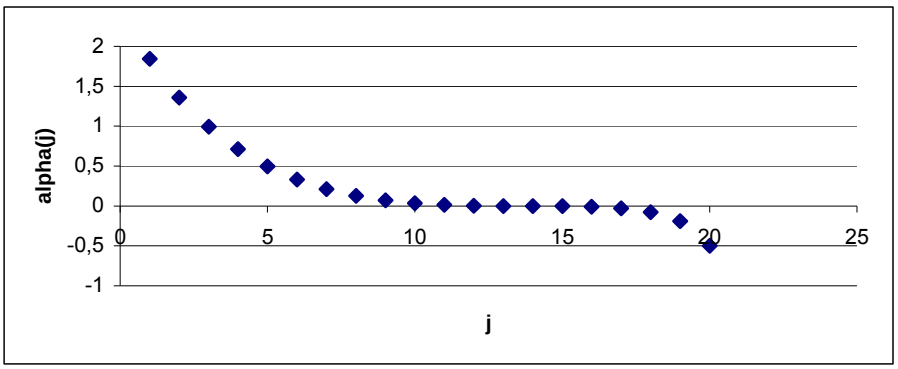
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_i	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$X_{i:m:n}$	-1.3984	-1.2040	-0.9628	-0.9322	-0.5068	-0.4975	-0.3621	-0.2029	-0.1922	-0.1794
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R_i	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$X_{i:m:n}$	-0.1163	-0.0651	0.1468	0.1883	0.2010	0.2646	0.2647	0.2762	0.7478	1.2547

(2.29) ve (2.34) eşitliklerinden μ *ve* σ parametrelerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahminleri sırasıyla $\hat{\mu}=0.1682$ ve $\hat{\sigma}=0.9171$ olarak bulunmuştur. Fisher Bilgi matrisinden modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ nin asimptotik varyans kovaryans matrisi

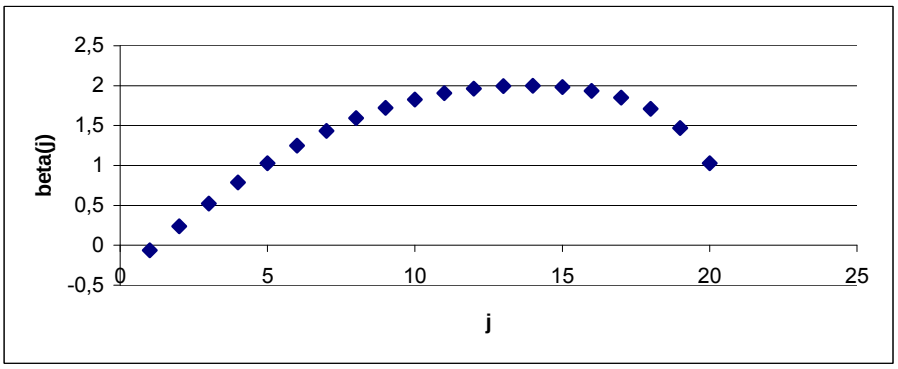
$$Cov(\hat{\mu},\hat{\sigma})=\begin{pmatrix}0.0226 & 0.0021\\ 0.0021 & 0.0263\end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (1.18b) ve (2.38) kullanılarak, μ *ve* σ parametrelerinin 95%'lik güven aralıları, sırasıyla, $(-0.1274,0.4639)$ veya $(0.5991,1.2351)$ şeklinde bulunur. Şekil 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 de Çizelge 4.1 deki veriler için Eşitlik (2.25) ve Eşitlik (2.26) da verilen $\alpha_j,\beta_j,\delta_j$ ve $\gamma_j\,(j=1,2,\ldots,20)$ katsayıları verilmiştir. Şekil 2 ve Şekil 4 den β_j ve γ_j katsayılarının uç değerlere küçük orta değerlere yüksek ağırlıklar vermesi

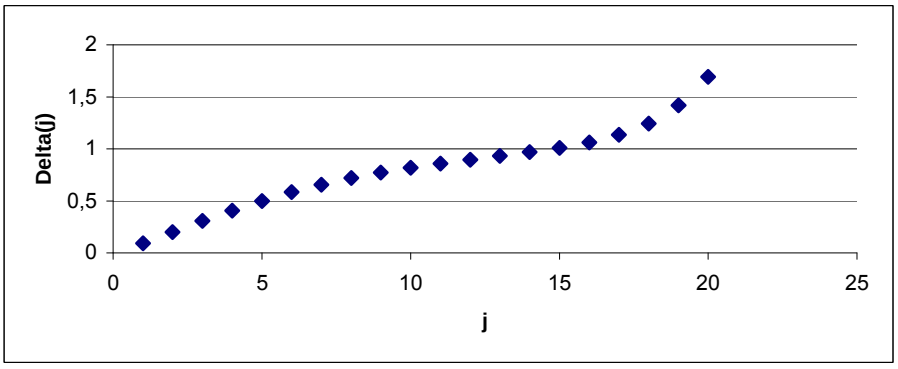
görülmektedir. Bu durum modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerin aykırı değerlere(outlier) karşı sağlam (robust) olduğuna işaret etmektedir.



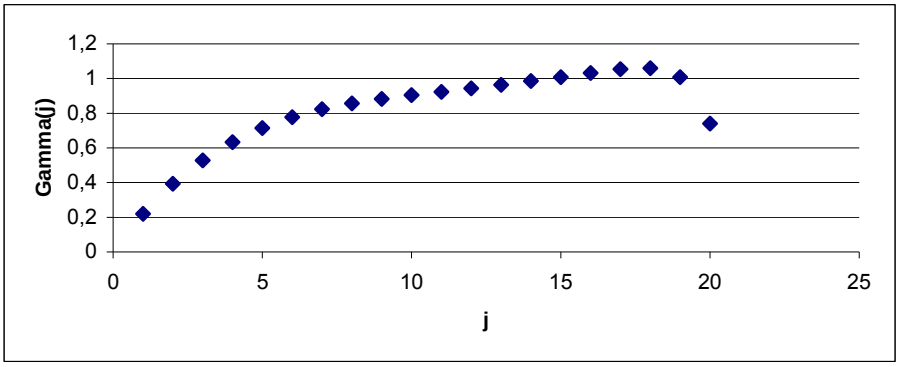
Şekil 4.1 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan α_i değerleri



Şekil 4.2 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan β_i değerleri



Şekil 4.3 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan Δ_i değerleri



Şekil 4.4 Çizelge 4.1'de verilen verilere ait (2.25)'te tanımlanan γ_i değerleri

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

İlerleyen Tür Tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı Balakrishnan ve ark. (2004) Uç Değer dağılımının, Balakrishnan ve Asgharzadeh (2005) Ölçeklendirilmiş Yarı Lojistik dağılımın (Scaled Half-Logistic Distribution), Lin ve ark. (2006) Log-Gamma dağılımının, Asgharzadeh (2006) Genelleştirilmiş Lojistik dağılımın(Generalized Logistic Distribution), Sultan ve ark. (2007) Weibull dağılımının, Asgharzadeh (2009) Genelleştirilmiş Üstel dağılımın ve parametreleri için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerini önermişler ve bu tahmin edicilerin özelliklerini Monte Carlo simülasyonu yardımıyla incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında uzun kuyruklu simetrik dağılımın konum ve ölçek parametresi için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri ve bunların asimptotik varyans kovaryans matrisi elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin özellikleri ve asimptotik dağılıma dayalı güven aralıklarının kapsama olasılıkları Monte Carlo simülasyonu ile incelenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar için bir uygulama yapılmıştır.

Yukarıdaki dağılımlar dışındaki dağılımların parametrelerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin İlerleyen Tür Tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı elde edilmesi, ilerideki çalışmalar için konu olabilir. Ayrıca farklı sansür şemaları için de bu tezde elde edilen sonuçlar geliştirilebilir.

EK 1. Simulasyon Sonuçları İçin Delphi 5 Programında Yazılan Kod

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes,
Graphics, Controls, Forms, Dialogs,
  StdCtrls, AxCtrls, OleCtrls, vcf1,math,
ExtCtrls, Menus;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Panel1: TPanel;
    Panel2: TPanel;
    Panel3: TPanel;
    Label3: TLabel;
    Label4: TLabel;
    Label5: TLabel;
    Edit3: TEdit;
    Edit4: TEdit;
    Button2: TButton;
    Edit5: TEdit;
    Label6: TLabel;
    Label1: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Label2: TLabel;
    Edit2: TEdit;
    Edit6: TEdit;
    Button3: TButton;
    Panel4: TPanel;
    Button1: TButton;
    Label7: TLabel;
    Edit7: TEdit;
    Label8: TLabel;
    Edit8: TEdit;
    Label9: TLabel;
    Edit9: TEdit;
    gr: TF1Book;
    PopupMenu1: TPopupMenu;
    Kes1: TMenuItem;
    Kopyala1: TMenuItem;
    Yaptr1: TMenuItem;
    Label10: TLabel;
    Edit10: TEdit;
    Edit11: TEdit;
    procedure Button1Click(Sender:
TObject);
    procedure Button2Click(Sender:
TObject);
    procedure Button3Click(Sender:
TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure grSelChange(Sender: TObject);
    procedure FormActivate(Sender:
TObject);
    procedure Kes1Click(Sender: TObject);
    procedure Kopyala1Click(Sender:
TObject);
    procedure Yaptr1Click(Sender: TObject);
    procedure grEndEdit(Sender: TObject;
var EditString: WideString;
      var Cancel: Smallint);
    procedure grEndRecalc(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

  function
dlgama(a:double):double;overload;//
gamma(a)=exp(dlgama(a))
  function tablo1(dagilim:integer;var
hata:integer;alt,ust,df1,df2:double):double;//
hesap değerine karşı P değeri
  function tablo2(dagilim:integer;var
hata:integer;x,df1,df2:double):double;      //P
değerine karşı hesap değeri

var
  Form1: TForm1;
  ilkdefa:boolean;
implementation

uses mat;

{$R *.DFM}

function fx(dag:integer;x:array of
double;par1,par2:double):double;
var i,j,k:integer;
p,a,b,c,k1:double;
begin
  case dag of
  1: //ki-kare
  begin
    a:=exp(dlgama(par1/2)); //gamma(a)
    b:=a*power(2,par1/2 );
    if x[0]<>0 then c:=power(x[0],par1/2-1)
else c:=0;
    result:=1/b*c*exp(-x[0]/2);//ki-kare
    //result:=1/a*power(2,par1/2 )*c*exp(-
x[0]/2);//ki-kare
  end;

  2: //long tailed
begin
     k1:=2*par1-3;

result:=exp(dlgama(par1))/(sqrt(k1)*(sqrt(Pi
```

```
)*exp(dlgama(par1-
1/2))))*power(1+sqr(x[0])/k1,-par1);
end;

//  3:
  //4: result:=1/(sqrt(2*pi)*par2)*exp(-
1/2*sqr((x[0]-par1)/par2)  );//normal
  end;
end;

// p değerlerini buluyor
function tablo1(dagilim:integer;var
hata:integer;alt,ust,df1,df2:double):double;
var i,j,n:integer;
p,k1,a,b,c,h,m,sonuc,x:double;
begin

  case dagilim of
    1: // ki-kare
    begin
      n:=1000;
      a:=alt;//alt
      b:=ust;//üst
      h:=(b-a)/n;
      sonuc:=fx(1,a,df1,1)+fx(1,b,df1,1);
      x:=a;
      c:=0;
      for i:=1 to n-1 do
      begin
        x:=x+h;
        if (i mod 2 =1) then
c:=c+4*fx(1,x,df1,1) else
c:=c+2*fx(1,x,df1,1);
      end;

      result:=(sonuc+c)*h/3;

    end;


    2: // long tailed
    begin
      n:=100;
      a:=alt;//alt
      b:=ust;//üst
      h:=(b-a)/n;
      sonuc:=fx(2,a,df1,1)+fx(2,b,df1,1);
      x:=a;
      c:=0;
      for i:=1 to n-1 do
      begin
        x:=x+h;
        if (i mod 2 =1) then
c:=c+4*fx(2,x,df1,1) else
c:=c+2*fx(2,x,df1,1);
            end;

      result:=(sonuc+c)*h/3;
    end;
  end;
end;

// p ye karşılık tablo değeri buluyor
function tablo2(dagilim:integer;var
hata:integer;x,df1,df2:double):double;
var
i,j:integer;
z,a,b,ust,alt,ort,pval:double;

begin
case dagilim of
//-----------------------------------------------
-------------------------
  // kikare
  1:
  begin
  end;

  //-----------------------------------------------
-------------------------
  //long tailed
  2:
  begin

  if x<0.5 then
    begin
      alt:=0;
      ust:=100;
      pval:=0.5-x;
      for i:=1 to 50 do
      begin
      ort:=(ust+alt)/2;
      a:=tablo1(2,j,0,ort,df1,df2);
      if a>pval then ust:=ort else alt:=ort;
      end;
      result:=-ort;
    end else
    begin
      alt:=0;
      ust:=100;
      pval:=x-0.5;
      for i:=1 to 50 do
      begin
      ort:=(ust+alt)/2;
      a:=tablo1(2,j,0,ort,df1,df2);
      if a>pval then ust:=ort else alt:=ort;
      end;
      result:=ort;
    end;
  end;

  //-----------------------------------------------
-------------------------
  // t(3,hesap,sd)
  3:
```

```
 begin
 end;
 //-------------------------------------------------
-------------------------
 // Normal(4,hesap)
 4:
 begin
 end;
end;
end;
function dlgama(a:double):double;
//digamma function
var
 w,temp,y,y2,series: double;
 i,n : integer;
const
 hfln2p = 0.91893853320467274178032973;
 a1=0.83333333333333333333333333e-1;
 a3=-0.27777777777777777777777778e-2;
 a5=0.79365079365079365079365079e-3;
 a7=-0.59523809523809523809523809e-3;
 a9=0.84175084175084175084175084e-3;
 a11=-0.19175269175269175269175269e-2;
 a13=0.64102564102564102564102564e-2;
 a15=-0.29550653594771241830065359e-1;
 a17=0.17964437236883057316493850;
 a19=-1.3924322169059011164274316;
 a21=13.402864044168391994478958;
 a23=-156.84828462600201730636509;

begin
 result := 0.0;
 if (abs(a)<1.0e-20) then exit;

 w := a;
 temp := 0.0;
 if (w-20.0 <= 0.0) then
 begin
   {10}n := 21 - trunc(w);

   temp := 1.0;
   for i := 1 to n do
   begin
     temp := w * temp;
   { 20} w := w + 1.0;
   end;
   temp := ln(temp);
 end;
 {30} y := 1.0 / w;
 y2 := sqr(y);
 series := (((a23)*y2+a21)*y2+a19);
 series :=
(((series*y2+a17)*y2+a15)*y2+a13);
 series :=
(((series*y2+a11)*y2+a9)*y2+a7);
 series :=
(((series*y2+a5)*y2+a3)*y2+a1)*y;
{
          11          10        9        8        7
6
 series=( y2   a23   + y2   a21 + y2  a19 + y2
a17 + y2  a15 + y2  a13

          5        4        3        2
       + y2  a11 + y2  a9 + y2  a7 + y2  a5 +
y2 a3 + a1) y
}

 result:= (w-0.5)*ln(w) - w + hfln2p + series
- temp;
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender:
TObject);
var
i1,ds,hata,c,m,i,j,j1 :integer;
muu,sigmaa,fu,fd,k1,sigma0,mu0,k,mu,tt,a1,
t1,t2,t3,t4,t5,d,a2,a3,a4,a5,p,sigma,b1,b2,b3,
b4,b5:double;
v,w,u,r1,alpha,beta,delta,gamma,t,y,r:array
[1..10000] of double;
ma1,ma2,ma3:tmatrix;
label git1;
begin
ds:=strtoint(edit7.text);//trial number
m:=trunc(gr.NumberRC[16384,256]);//
observation number
p:=strtofloat(edit9.text); // parameter
k1:=2*p-3;// parameter
randomize;
ma1:=tmatrix.create(ds,12);
for i:=2 to m+1 do
begin
r1[i-1]:=gr.numberrc[i,1];
end;

for i := 1 to m do
begin
 t[i]:=1;
   for j:= m-i+1 to m do
   begin
     tt:=0;
     for j1:= m-j+1 to m do
     begin
     tt:=tt+r1[j1];
     end;
     t[i]:=t[i]*(tt+j)/(tt+j+1);
   end;
 t[i]:=1-t[i];
 t[i]:=tablo2(2,hata,t[i],p,1);//vimn's
expected values of progressive censored
order statistics from standart uniform
distribution
end;

for i := 1 to m do
```

```
begin
  alpha[i]:=-
2*p*t[i]/k1/(1+sqr(t[i])/k1)+t[i]*(2*p*(k1-
sqr(t[i]))/sqr(k1+sqr(t[i])));
  beta[i]:=(2*p*(k1-
sqr(t[i]))/sqr(k1+sqr(t[i])));

    gr.NumberRC[i,18]:=alpha[i];
    gr.NumberRC[i,19]:=beta[i];
  if t[i]<0 then fd:=0.5-
tablo1(2,hata,t[i],0,2,1) else
fd:=0.5+tablo1(2,hata,-t[i],0,2,1);
  //gr.NumberRC[i,6]:=fd;
  //gr.NumberRC[i,7]:=fx(2,t[i],p,1);
  fu:=-
2*p*t[i]/k1/(1+sqr(t[i])/k1)*fx(2,t[i],p,1) ;
  gamma[i]:=((1-
fd)*fu+sqr(fx(2,t[i],p,1)))/sqr(1-fd);
  delta[i]:=fx(2,t[i],p,1)/(1-fd)-t[i]*gamma[i];
  gr.NumberRC[i,20]:=gamma[i];
    gr.NumberRC[i,21]:=delta[i];
end;

b1:=0; b2:=0;b3:=0;b4:=0;b5:=0;
muu:=strtofloat(edit10.text);
sigmaa:=strtofloat(edit11.text);

for i1:=1 to ds do
begin
  application.ProcessMessages;
  git1:
     label10.Caption:=inttostr(i1);
     t1:=0;t2:=0;t3:=0;t4:=0;t5:=0;

     // generating progressive censored
sample based on balakrishnan and sandhu is
starting
     FOR I:= 1 TO m do
     begin
     W[I]:=random;
     end;
     T1:=0;
     FOR I:=1 TO m do
     begin
     T1:=T1 + r1[m + 1 - I];
     V[I]:=power(W[I], (1 / (I + T1)));
     end;
     T2:=1;
     FOR I:=1 TO trunc(M) do
     begin
     T2:=T2 * V[trunc(M) + 1 - I];
     U[I]:= 1 - T2;

y[i]:=muu+sigmaa*tablo2(2,hata,u[i],p,1);
     gr.NumberRC[i,17]:=y[i];
     end;

     // generating progressive censored
sample based on balakrishnan and sandhu
finished

     t1:=0;t2:=0;t3:=0;t4:=0;t5:=0;
     // obtaining AMLE of the parameters is
starting

     for i := 1 to m do
     begin
       t1:=t1+(beta[i]+r1[i]*gamma[i])*y[i];
       t2:=t2+(beta[i]+r1[i]*gamma[i]);
       t3:=t3+(alpha[i]-r1[i]*delta[i]);
     end;

     a1:=0;
     a2:=0;
     for i := 1 to m do
     begin
       a1:=a1+(alpha[i]-r1[i]*delta[i])*(y[i]-
t1/t2);

a2:=a2+(beta[i]+r1[i]*gamma[i])*sqr(y[i]-
t1/t2);
     end;
 if  sqr(a1)+4*m*a2 <0 then goto git1;
  sigma:=(-a1+sqrt(sqr(a1)+4*m*a2))/(2*m);
  mu:=t1/t2-t3/t2*sigma;
  ma1[i1,1]:=mu;
  ma1[i1,2]:=sigma;

  t1:=0;t2:=0;t3:=0;t4:=0;t5:=0;
  for i := 1 to m do
  begin
    t1:=t1+(beta[i]+r1[i]*gamma[i]); //V1 için
    t2:=t2+(beta[i]+r1[i]*gamma[i])*(y[i]-
mu)/sigma;
    t3:=t3+(alpha[i]-r1[i]*delta[i]);//V2  için
    t4:=t4+(alpha[i]-r1[i]*delta[i])*(y[i]-
mu)/sigma;//

t5:=t5+(beta[i]+r1[i]*gamma[i])*sqr((y[i]-
mu)/sigma);
  end;
  ma1[i1,5]:=t1; //V1
  ma1[i1,6]:=2*t2-t3; //V2
  ma1[i1,7]:=-(m+2*t4-3*t5); //V3


ma1[i1,8]:=sqr(sigma)*(ma1[i1,7]/(ma1[i1,5
]*ma1[i1,7]-sqr(ma1[i1,6]))); //It1
  ma1[i1,9]:=sqr(sigma)*(-
ma1[i1,6]/(ma1[i1,5]*ma1[i1,7]-
sqr(ma1[i1,6]))); //It12

ma1[i1,10]:=sqr(sigma)*(ma1[i1,5]/(ma1[i1,
5]*ma1[i1,7]-sqr(ma1[i1,6])));//It22
```

```
  if (ma1[i1,1]-sqrt(ma1[i1,8])*1.96 <muu)
and (ma1[i1,1]+sqrt(ma1[i1,8])*1.96 >muu)
then b1:=b1+1;
  if (ma1[i1,2]-sqrt(ma1[i1,10])*1.96
<sigmaa) and
(ma1[i1,2]+sqrt(ma1[i1,10])*1.96 >sigmaa)
then b2:=b2+1;
  gr.numberrc[4,15]:=ma1[i1,1]-
sqrt(ma1[i1,8])*1.96;

gr.numberrc[5,15]:=ma1[i1,1]+sqrt(ma1[i1,8
])*1.96;
    gr.numberrc[4,16]:=ma1[i1,2]-
sqrt(ma1[i1,10])*1.96;

gr.numberrc[5,16]:=ma1[i1,2]+sqrt(ma1[i1,1
0])*1.96;
end;//for i1

a1:=0;
a2:=0;
for i:=1 to ds do
begin
  a1:=a1+ma1[i,1];
  a2:=a2+ma1[i,2];
end;
a1:=a1/ds;
a2:=a2/ds;

a3:=0;
a4:=0;
for i:=1 to ds do
begin
  a3:=a3+sqr(ma1[i,1]-a1);
  a4:=a4+sqr(ma1[i,2]-a2);
end;
a3:=a3/(ds-1);
a4:=a4/(ds-1);

gr.numberrc[2,2]:=a1;//
EntryRC[2,4]:='=average(b2:b'+inttostr(ds+
1)+')'; //a1
gr.numberrc[2,3]:=a3;//
EntryRC[2,5]:='=var(b2:b'+inttostr(ds+1)+')'
;//a3

gr.numberrc[2,4]:=a2;//
EntryRC[2,6]:='=average(c2:c'+inttostr(ds+1
)+')'; //a2
gr.numberrc[2,5]:=a4;//EntryRC[2,7]:='=var
(c2:c'+inttostr(ds+1)+')';//a4

a5:=0;
for i:=1 to ds do
begin
  a5:=a5+(ma1[i,1]-a1)*(ma1[i,2]-a2); // kov
end;
a5:=a5/(ds-1);
gr.NumberRC[2,6]:=a5;

a1:=0;
a2:=0;
a3:=0;
for i:=1 to ds do
begin
  a1:=a1+ma1[i,8];
  a2:=a2+ma1[i,9];
  a3:=a3+ma1[i,10];
end;
a1:=a1/ds;
a2:=a2/ds;
a3:=a3/ds;
b1:=b1/ds;
b2:=b2/ds;

gr.NumberRC[2,12]:=a1;
gr.NumberRC[2,13]:=a2;
gr.NumberRC[2,14]:=a3;
gr.NumberRC[2,15]:=b1;
gr.NumberRC[2,16]:=b2;

end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender:
TObject);
var
a,b,c,d,e,pval,hesap:double;
i,j,k,hata:integer;
begin
hesap:=strtofloat(edit3.text);
//hesap:=-3;

if hesap<0 then pval:=0.5-
tablo1(2,hata,hesap,0,2,1) else
pval:=0.5+tablo1(2,hata,-hesap,0,2,1);
edit5.text:=floattostr(pval);

end;

procedure TForm1.Button3Click(Sender:
TObject);
var
a,b,c,d,e,pval,hesap:double;
i,j,k,hata:integer;
begin
pval:=strtofloat(edit1.text);
hesap:=tablo2(2,hata,pval,strtofloat(edit2.tex
t),1);
edit6.text:=floattostr(hesap);

end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender:
TObject);
begin
ilkdefa:=true;
```

```
end;

procedure TForm1.grSelChange(Sender:
TObject);
begin
edit8.text:=floattostr(gr.numberrc[16384,256
]);

end;

procedure TForm1.FormActivate(Sender:
TObject);
begin
 if ilkdefa=true then
 begin
   ilkdefa:=false;
   gr.SetActiveCell(2,1);
   gr.SetActiveCell(1,1);
 end else
 begin

 end;

end;

procedure TForm1.Kes1Click(Sender:
TObject);
begin
gr.EditCut;
end;

procedure TForm1.Kopyala1Click(Sender:
TObject);
begin
gr.EditCopy;
end;

procedure TForm1.Yaptr1Click(Sender:
TObject);
begin
gr.EditPaste;
end;

procedure TForm1.grEndEdit(Sender:
TObject; var EditString: WideString;
  var Cancel: Smallint);
begin
edit8.text:=floattostr(gr.numberrc[16384,256
]);

end;

procedure TForm1.grEndRecalc(Sender:
TObject);
begin
edit8.text:=floattostr(gr.numberrc[16384,256
]);

end;

end.
```

KAYNAKLAR

Adamidis, K., Loukas, S., 1998. A life time distribution with decreasing failure rate, Statistics&Probability Letters 39, 35-42.

Asgharzadeh, A., 2006. Point and interval estimation for a generalized logistic distribution under progressive type II censoring, Communications in Statistics-Theory and Methods 35, 1685-1702.

Asgharzadeh, A., 2009. Approximate MLE fort he scaled generalized exponential distribution under progressive type–II censoring, Journal of the Korean Statiscical Society 38, 223-229.

Balakrishnan, N., Aggarwala, R., 2000. Progressive Censoring: Theory, Methods And Applications. Birkhauser, Boston.

Balakrishnan, N., Sandhu, R.A., 1995. A simple simulation algorithm for generating progressively type-II censored sample, American Statistician 49 2 229-230.

Balakrishnan, N., Asgharzadeh, A., 2005. Inference for the scaled half-logistic distribution based on progressively Type II censored samples, Communications in Statistics-Theory and Methods 34, 73–87.

Balakrishnan, N., Kanan N., Lin, C.T., Wu, S.J.S., 2004. Inference for the extreme value distribution under progressive Type-II censoring, Journal of Statistical Computation and Simulation 74 (1), 25–45.

Balakrishnan, N., Asgharzadeh, A., 2005. Inference fort he scaled half-logistic distribution based on progressively type–II censored samples, Communications in Statistics – Theory and Methods 34, 73-87.

Casella, G., Berger, R.L., 2002. Statistical inference, 2nd edition, Duxbury.

David, H., 1970. Order Statistics, John Wiley, New York.

Ghahramani, S., 2005. Fundamentals Of Probability, Prentice Hall, New Jersey.

Kale, B., 2003. İlerleyen tür sansürlenmiş sıra istatistikleri:dağılım özellikleri ve uygulamalar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Lin, C.-T., Wu, S.J.S., Balakrishnan N., 2006. Inference for log-gamma distribution based on progressively type-II censored data, Communications in Statistics-Theory and Methods 35, 1271-1292.

Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., 2003. Sayısal Analiz, Dizgi ofset Matbaacılık, Konya.

Öztürk, F., (2010). Matematiksel İstatistik, Basımda.

Roussas, G.G., 1973. A First Course in Mathematical Statistics, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.

Shahbazov, A., 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen yayınevi.

Sultan, K. S., Mahmoud, M. R., Saleh H. M., 2007. Estimation of parameters of the weibull distribution based on progressively censored, Data International Mathematical Forum 2 , 2031 – 2043.

Şenoğlu, B., Tiku, M.L., 2001.Analysis of variance in experimental desing with nonnormal error distrubitions, Communications in Statistics-Theory and Methods 30, 1335-1352.

Tiku, M.L., Akkaya, A.D., 2004. Robust estimation and hypothesis testing, New Age International Publishers, New Delhi, Also, Oscar publications.

Tiku, M.L., Sürücü, B., 2009. MMLEs are as good as m-estimators or beter, Statistics&Probability Letters 79, 984-989.

Tiku, M.L., 1967a. Estimating the mean and standart deviation from a cencored normal sample, Biometrika 54, 155-165.

Tiku, M.L., 1967b. A note on estimating the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample, Austral.J.Statist.9,49-54.

Tiku, M.L., 1968a. Estimating the parameters of log-normal distribution from cencored samples, J.Amer.Stat.Assoc.63,134-140.

Tiku, M.L., 1968b. Estimating the parameters of normal and logistic distributions fom censored samples, Austral.J.Statist.10,64-74.

Tiku, M.L., 1968c. Estimating the mean and standard deviation from progressively censored normal samples, J.Ind.Soc.Agric.Stat.20,20-25.

Tiku, M.L., 1970. Monte carlo study of some simple estimators in cencored normal samples, Biometrika 57,207-210.

Tiku, M.L., 1973. Testing group effects from type II censored normal samples in experimental desing, Biometrica 29,25-33.

Wu**,** S.-J., Kuş, C., 2009. On the estimation based on progressive first failure-censored sample, Computational Statistics and Data Analysis, 53 (10).