T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DIRICHLET SERİLERİ VE BAZI ÖZEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARIN ARAŞTIRILMASI

Havva DÖNMEZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2009

ÖZET

Doktora Tezi

DIRICHLET SERİLERİ
VE
BAZI ÖZEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARIN
ARAŞTIRILMASI

Havva DÖNMEZ
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2009, 66 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Ahmet CİHANGİR

Bu çalışmada ilk olarak yeni tanımladığımız r ve h fonksiyonlarına ait Dirichlet seri açılımları bulunarak, bunlar $\zeta^{(p)}$ fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Sonra Riemann zeta fonksiyonu ile ilgili çeşitli Dirichlet serilerini üreteç fonksiyon olarak kabul eden $\zeta_{(k)}$, ω_k gibi yeni aritmetik fonksiyonlar elde edilmiştir. Tanımladığımız ω_k fonksiyonlarının bilinen μ_k, genelleştirilmiş Möbius fonksiyonlarının tersi olduğu ispatlanmıştır. Bunların yanında $\zeta^k(s), \zeta(s)\zeta(ks), \zeta(s)/\zeta(ks)$ ifadelerini üreteç kabul eden yeni aritmetik fonksiyon dizileri elde edilmiştir. Özel olarak d_k fonksiyonlarının açılımı bulunmuştur. Ayrıca φ, λ, τ, Ω gibi fonksiyonların Dirichlet terslerinin Dirichlet serileri yardımı ile daha kolay bulunabileceği gözlenmiştir. Son olarak mutlak yakınsak Dirichlet serisi ve bu serinin türevi arasında önemli bir bağıntı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: aritmetik fonksiyon, Dirichlet serileri, Dirichlet konvülüsyonu, Riemann zeta fonksiyonu, üreteç fonksiyon.

ABSTRACT

PhD Thesis

DIRICHLET SERIES
AND
RESEARCH ON SOME SPECIAL GENERATING FUNCTIONS

Havva DÖNMEZ
Selcuk Universty
Graduate School of Natural and Applied Scieences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2009, 66 page

Jury: Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Ahmet CİHANGİR

In this research, firstly we define r and h functions and then we relate their Dirichlet series expansions with $\zeta^{(p)}$ functions. Secondly, we find $\zeta_{(k)}$, ω_k arithmetical functions whose Dirichlet series are defined by using Riemann zeta function. It is proved that the newly defined ω_k function is the Dirichlet inverse of famous μ_k, generalized Möbius function. In addition, we find three arithmetical function sequence which are generated by $\zeta^k(s), \zeta(s)\zeta(ks), \zeta(s)/\zeta(ks)$. Specially, we find the expansion of d_k function. Furthermore, we observe that the Dirichlet inverses of some arithmetical functions, such as φ, λ, τ, Ω can be found much more easily by using Dirichlet series. Lastly, we find an important relation between an absolutely convergent Dirichlet series and its derivative.

Key Words: arithmetic function, Dirichlet series, Dirichlet convolution, Riemann zeta function, generating function.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Öğretim Üyesi Prof. Dr. Hasan ŞENAY yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmalarımın yürütülmesindeki yardımlarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. Hasan ŞENAY' a teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca bana her zaman destek olan canım aileme yürekten teşekkür ederim. Ayrıca tez yazımı konusunda benden yardımlarını esirgemeyen eşim Mustafa DÖNMEZ' e ve ben çalışırken uslu olduğu için oğlum Mehmet'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Havva DÖNMEZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

1. GİRİŞ **1**

2. ÖN BİLGİLER **11**

3. DIRICHLET SERİLERİ **22**

3.1. Euler Çarpımı **33**

3.2. $\zeta(s)$ **İle İlgili Çeşitli Dirichlet Serileri** **39**

4. BAZI YENİ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI **43**

5. SONUÇ VE ÖNERİLER **63**

KAYNAKLAR **64**

1. GİRİŞ

Dirichlet serilerinin tarihçesi 19. yüzyıla kadar uzanmakta olup, matematikçilerin Dirichlet serilerine önem vermelerinin sebebi bu konunun analitik sayılar teorisinde merkezi bir rol üstlenmesidir. Dirichlet serileri teorisinin gelişmesine yardımcı olan isimler arasında Hadamard, Landau, Hardy, Riesz, Schnee ve Bohr sayılabilir. Fakat bu konu ile ilgili esas gelişmeler fonksiyonel analiz konularının Dirichlet serileri içinde de kullanılmaya başlanması ile ortaya çıkmıştır. s kompleks sayı, a ve λ reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-s\lambda(n)} \qquad (1.1)$$

biçimindeki serilere *genelleşirilmiş Dirichlet serileri* denir. Eğer genelleştirilmiş Dirichlet serisinde $\lambda(n) = \log n$ alınırsa $e^{-s\lambda(n)} = n^{-s}$ elde edilir. Ayrıca a yerine aritmetik bir fonksiyon kullanılırsa (1.1) serisi çok bilinen

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad (1.2)$$

elementer Dirichlet serisine dönüşür. Bu seri, s sayısının bazı değerleri için mutlak yakınsak olup, bu durumlarda F fonksiyonu *f aritmetik fonksiyonunun üreteç fonksiyonu* şeklinde isimlendirilir. En çok kullanılan Dirichlet serileri Riemann zeta fonksiyonu ile Dirichlet L-serileri olup; bu seriler ve yakınsak olduğu s değerleri aşağıda sırası ile belirtilmiştir.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1$$

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad s > 1$$

Sayılar teorisinde, asalların sonsuz sayıda oluşu, asalların dağılımına ait teorem ile asal sayı teoremi çeşitli Dirichlet serileri kullanılarak ispat edilmiştir. Euler (1737), Euclid'in sonsuz sayıda asalın varlığına dair teoremini $\sum p^{-1}$ serisinin ıraksak olduğunu kullanarak ispatlamıştır. Bu gerçeğe ise $\zeta(s)$ nin $s > 1$ için yakınsak, $s \to 1$ için ∞ olduğunu göstererek varmıştır. 1748 yılında Euler "Indroductio in Analyin Infinitorum" adlı ünlü eserinde Riemann zeta fonksiyonunu,

$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$ şeklinde ifade etmiştir. Dirichlet serilerinin asal sayılara bağlı sonsuz çarpım şeklinde yazılışı literatürde Euler çarpımı olarak adlandırılıp aynı zamanda aritmetiğin temel teoreminin analitik versiyonu olarak da bilinmektedir. Euler çarpımı çarpanlanabilir bir fonksiyona karşılık gelen Dirichlet serisini elde etme konusunda matematikçilere büyük kolaylıklar sağlamıştır.

Dirichlet (1837), aralarında asal iki sayının sonsuz sayıda asal oluşturduğuna dair teoremini ilk defa kendisinin kullandığı Dirichlet *L*-serileri yardımı ile ispatlamıştır. Bilindiği gibi Dirichlet bu teoremini analizin limit, süreklilik gibi kavramlarını kullanarak ispatlamıştır. Bu ispat metodu sayılar teorisinin bugün için de aktif olan ve analitik sayılar teorisi olarak bilinen yeni bir dalının ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bernhard Riemann, ζ fonksiyonunun özellikleri ile asalların dağılımı arasında ustaca bir bağ kurmuştur. Gerçekten Riemann 1859 yılında yayımladığı sayılar teorisindeki tek makalesinde ζ fonksiyonunun apaçık olmayan sıfırlarının $\sigma=1/2$ (kritik doğru) doğrusu üzerinde olduğunu ispatlamadan ifade etmiştir. Bugün bu ifade Riemann Hipotezi (RH) olarak bilinmektedir ve henüz ispatlanamamıştır. David Hilbert yirminci yüzyılda matematikçilerin uğraşacağı en önemli 199 problem arasına RH'ni de alarak şu ifadeyi kullanmıştır: "Birkaç bin yıl uyusam uyandıktan sonra soracağım ilk soru, Riemann Hipotezi'nin ispatlanıp ispatlanamadığıdır." Bu anlamlı söz bize Dirichlet serilerinin matematikte ne denli önemli olduğunu belirtir. RH'nin kullanımı Artin konjektürü, Weil konjektürü gibi birçok konjektürün oluşmasına yol açmıştır. Bu nedenle yukarıda Hilbert'in belirttiği gibi bu hipotezin ispatlanması birçok konunun gelişmesine katkı sağlayacakır. Riemann, yine yukarıda belirtilen çalışmasında ζ fonksiyonunun $\sigma=1$ doğrusu üzerinde rezidüsü 1 olan basit kutup dışında bütün karmaşık düzleminde analitik sürekli olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Γ fonksiyonu ile Riemann zeta fonksiyonunun

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(s/2\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\left(1-s\right)/2\right)\zeta(1-s) \tag{1.3}$$

eşitliğini sağladığını göstermiştir. Bu eşitlik ζ fonksiyonunun hemen hemen bütün özelliklerini belirterek $\mathrm{Re}(s)\le 0$ değerlerine karşılık gelen $\zeta(s)$ görüntülerini

tanımlamıştır. Yukarıdaki (1.3) eşitliği Riemann zeta fonksiyonunun apaçık olmayan sıfırlarının $0<\sigma<1$ kritik şeritinde olması gerektiğini gösterir ve bu apaçık olmayan sıfırların $\sigma=1/2$ kritik doğrusuna simetrik olarak yerleştiğini belirtir.

1915 yılında Hardy kritik doğru üzerinde sonsuz sayıda sıfırın varlığını ispatlamıştır. Selberg (1942), bu apaçık olmayan sıfırların önemli bir kısmının kritik doğru üzerinde olduğunu göstermiştir. Levinson'a (1974), göre bu oran en az $1/3$ Conrey'e (1989) göre ise $2/5$ tir. Rosser ve ark. (1975), 3.5 milyon sıfırın kritik doğru üzerinde olduğunu; Brent, (1979) 75 milyon tane sıfırın olduğunu; Lune ve Riele (1983), ise 300 milyon bir tane sıfır olduğunu göstermişlerdir. Yapılan bu çalışmalar RH'ni destekler mahiyettedir fakat ters örneklerin varlığı da muhtemeldir. Örneğin Jiang 2004 yılında yayımladığı makalesinde RH'nin yanlış olduğunu belirtmiştir.

Ramanujan (1915), h ve (veya) k doğal sayısının 0 olduğu durumlar dâhil olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_h(n)\sigma_k(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-h)\zeta(s-k)\zeta(s-h-k)}{\zeta(2s-h-k)}$$

olduğunu ispat etmiştir. $\sigma^{(q)}{}_h$ fonksiyonlarını içeren benzer bir formül Crum (1940), tarafından elde edilmiştir. Hardy ve Wright (1938), çarpanlanabilir f fonksiyonu için $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ serisinin mutlak yakınsak olması şartı ile $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}f\left(p_k^j\right)\right\}$ eşitliğini ispatlamışlardır.

Hoheisel (1930), ardışık iki asal sayı arasındaki farkı Riemann zeta fonksiyonuna ait kritik şeritteki bazı dörtgensel bölgelerdeki sıfırlarının sayısı ile ilişkilendirmiştir. Aynı konuda Moreno (1973), Hoheisel'in çalışmalarını genelleştirerek bu özelliği sağlayan Dirichlet serilerinin belirlemiştir. Örneğin Dedekind zeta fonksiyonu, Ramanujan τ fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi bunlardan birkaçıdır.

Bu çalışmaların dışında bazı matematikçiler aritmetik fonksiyonların dağılımı ve asimptotik karakterlerini daha iyi anlamak için bunlara ait üreteç fonksiyonları ile bu üreteç fonksiyonların arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Örneğin, Ramanujan (1916), Wilson (1923), Chowla (1928), Subbarao ve Haris (1966), Cohen (1961), Apostol (1972) bu isimlerden birkaçıdır.

Berndt (1971), Dirichlet *L*-serilerini genelleştirerek bu fonksiyonlar ile Γ fonksiyonu arasında cebirsel bir eşitlik elde etmiştir. 1972 yılında yayımladığı aynı başlıklı ikinci makalesinde ise Hans Rademacher'ın 1959 yılında sadece Hurwitz zeta fonsiyonu için bulduğu denklemi bu seri dışında bir Dirichlet serisi sınıfının sağladığını ispatlamıştır.

Apostol (1973), p asal sayı, f de $|f(n)| \le 1$ şartını sağlayan aritmetik bir fonksiyon ise (p,n); p, n sayılarının ebobunu göstermek üzere $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\mu(n)n^{-s}$ Dirichlet serisi ile $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\mu(n)\mu(p,n)n^{-s}$ serisi arasındaki ilişkileri incelemiştir. Yine aynı makalede $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n$ Dirichlet serisinin alt serilerinin sıfır olduğu durumlarla ilgili çeşitli uygulamalar elde edilmiştir.

Keiper (1992), kuvvet serileri ile Dirichlet serileri arasındaki ilişkileri inceleyerek $\zeta(s)$ fonksiyonunun $s=1$ doğrusuna göre kuvvet serisi açılımını elde etmiştir. Keiper, Riemann Hipotezi ile bu açılımın katsayıları arasında nasıl bir bağ olabileceği konusunda çalışmalar yapmıştır. 1996 yılında yayımladığı başka bir makalesinde ise bilinen aritmetik fonksiyonlardan Ramanujan τ fonksiyonu ve buna karşılık gelen Dirichlet serisinin özellikleri üzerinde durmuştur. Öncelikle bu özel Dirchlet seri için cebirsel bir eşitlik elde etmiş, Riemann hipotezine benzer öngörüler ortaya atarak bunları ispatlamıştır.

Choudhury (1995), rasyonel argumentler için $\zeta(1/k)$, $\zeta'(1/k)$ görüntüleri $k=-10$ ve $k=10$ değerleri arasında bularak $\zeta^{(n)}(0)$ görüntü değerlerini elde etmiş ve hatta $\zeta'(s)$ nin ilk on sıfırını bulmayı başarmıştır .

Balanzario (2001), yılında yayımladığı makalesinde s sayısının pozitif çift tamsayı olduğu durumlarda ζ değerinin bilindiğini, fakat s ve n pozitif tamsayılar olmak üzere $\zeta(2s+1)$ ve $L(2n,\chi_4)$ görüntülerinin henüz hesaplanamadığını ifade etmiştir. Fakat sadece bazı özel durumların değerlerinin örneğin Apery sabiti olarak

bilinen $\zeta(3)$ ve Catalan sabiti olarak bilinen $L(2,\chi_4)$ ün değerlerinin hesaplandığını belirtmiştir. Balanzario kullanılan f aritmetik fonksiyonun periyodik, s sayısının tek tamsayı ve $f(n)$ değerinin çift tamsayı olduğu durumların daha sonraki araştırmalara konu olabileceğini söylemiştir. Cvijović ve Klinowski (1997), s pozitif tamsayı olmak üzere $\zeta(2s+1)$ için üç farklı seri açılımı elde etmeyi başarabilmişlerdir. Bunlardan ikincisinin açılımı, $R_{2s+1,k}$ sayısı Bernoulli sayılarına bağlı sonlu toplamla bulunan bir rasyonel sayı olmak üzere $\zeta(2s+1)=(-1)^s \frac{4(2\pi)^{2s}}{(2s+1)!}\sum_{k=0}^{\infty} R_{2s+1,k}\zeta(2k)$ şeklindedir.

Louboutin (2004), $L(1,\chi)$ nin değerinin modülünü ifade ederek $L(1,\chi)$ için bir üst sınır elde etmiştir. Ishikawa ve Kamiya (2008), Riemann zeta fonksiyonu ve Dirichlet L- serilerinin alabileceği değerlerin $s>1$ için yeni üst sınırlarını belirlemişlerdir.

Peter (1998), Dirichlet serisinde alışılagelenden farklı olarak aritmetik fonksiyon yerine polinom kullanarak bu serilerinin yakınsaklık apsislerinin sınırlı olduğu durumları incelemişlerdir. Ayrıca Peter, aynı çalışmasında polinom içeren Dirichlet serilerinin hangi noktalarda süreksiz olduğunu araştırmıştır. Aynı konuda Tanigawa ve Zhai (2007), çalışmalar yaparak Dirichlet serilerinin analitik süreklilikleri ile ilgili farklı sonuçlar elde etmişlerdir.

Zhou ve Sun (2007), iki Dirichlet serisinin eşit olması durumunda bu Dirichlet serilerine karşılık gelen aritmetik fonksiyonların eşit olduğunu, ayrıca bu ifadenin tersinin de doğru olduğunu ispatlamışlardır.

Sinnott (2008), p asal sayı olmak üzere Dirichlet serilerinin katsayılarını sonlu $\mathbb{Z}_p$ cisminden seçerek sonlu Dirichlet serilerini tanımlamıştır ve adı geçen Dirichlet serilerinin kompleks analizde tanımlanan analitik fonksiyonların özelliklerini taşıdığını ispatlamıştır.

Saksman ve Seip (2009), özel bir uzay tanımlayarak bu uzaydan aldıkları fonksiyonlara ait bir Dirichlet serisi için $\mathrm{Re}(s)>0$ durumunda bu Dirichlet serisinin sınırlarda aldığı değerleri incelemişlerdir.

1920'li yılların başında Hardy, Littlewood ve Hecke kartezyen koordinat sistemindeki herhangi bir üçgensel bölgenin içindeki lattis noktalarını sayan fonksiyonları kullanarak Dirichlet serileri üzerinde çalışmışlardır. Duke ve İmamoğlu (2004), bu fikri genelleştirerek üç boyutlu düzlemde verilen bir koninin üzerindeki lattis noktaların sayısını veren fonksiyonu kullanarak Dirichlet serileri üzerinde çalışma yapmışlardır. Ayrıca bu fonksiyona karşılık gelen Dirichlet serileri için cebirsel bir eşitlik elde etmişlerdir.

Konyagin ve Queffelec (2002), $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2$ serisi yakınsak ise herhangi bir t reel sayısı için $\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\frac{1}{2}+it}$ Dirichlet serisinin de yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Hedenmalm ve ark. (1997), ilk kez

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\chi(n)n^{-s} \tag{1.4}$$

şeklindeki Dirichlet serileri üzerinde çalışmaya başlamışlardır ve hemen hemen tüm χ Dirichlet karakterleri için (1.4) serisinin sağ yarı düzlemde yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bu ilginç sonuca; Hedenmalm ve Saksman (2003), $\mathrm{Re}\,(s)>\frac{1}{2}$ olmak üzere (1.2) serisi yakınsak ise bütün $t\in\mathbb{R}$ ve tüm χ karakterleri için $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\chi(n)n^{-it}$ Dirichlet serisinin de yakınsak olduğunu ispatlayarak katkıda bulunmuşlardır. İki sayının ebobuna karşılık gelen fonksiyona ait Dirichlet serisi üzerinde ilk kez Broughan (2001), çalışmıştır. Daha sonra 2007 yılında yaptığı çalışmalarla bu Diriclet serisinin değerini Riemann zeta fonksiyonu cinsinden ifade eden bir denklem bularak oluşabilecek hata payını her durum için grafiklerle göstermiştir.

Brede (2006), yeni bir dönüşüm formülü ortaya atarak Dirichlet ve benzeri serilerin belli şartlar altında integral cinsinden eşitlerini ifade etmiştir. Bu dönüşüm formülü ile π, log2, $\zeta(2),\zeta(3),\zeta(5),\zeta(1/2),\zeta(-1/2),\zeta'(2),\zeta''(2),\zeta'(1/2)$ değerlerinin seri açılımlarını elde etme konusunda kullanılabilmektedir. Bu formül aynı zamanda daha önce Dirichlet serileri ile ilgili bilinen bağıntıları kısa yoldan elde etmemizi sağlamaktadır. Örneğin, bu dönüşüm formülü Dirichlet *L*-serilerinin

Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden ifadesi, Catalan sabitinin hesaplanışı ve Bernoulli sayılarının özellikleri hakkında fikir vermektedir.

Glöckner ve ark (2007), g aritmetik bir fonksiyon a_d, ..., a_1, a_0 sabit aritmetik fonksiyonlar ve $g^{*d} = g * ... * g$ (d kez) olmak üzere,

$$a_d * g^{*d} + a_{d-1} * g^{*(d-1)} + ... + a_1 * g + a_0 = 0$$

şeklindeki polinom tipi konvülüsyon denklemlerinin çözülebilirlik durumlarını Dirichlet serilerini kullanarak incelemişlerdir. a_d fonksiyonuna karşılık gelen ve sağ yarı düzlemde yakınsak olan Dirichlet serilerin katsayılarının özelliklerinin sonuçta aranan g aritmetik fonksiyonunu verdiğini ispatlamışlardır. Daha sonra bu tip konvülüsyon denklemlerin sadece polinomlarla sınırlı olmadığını ve genelleştirilebileceğini göstermişlerdir. Çoğu matematikçi genelleştirilmiş Dirichlet serisini Laplace dönşümüne benzetmektedir. Bilindiği gibi herhangi bir fonksiyon için Laplace dönüşümü $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ şeklinde tanımlanmıştır. 2009 yılında yayımladıkları makalelerinde ise aynı konuyu genelleştirilmiş Dirichlet serileri ve Laplace dönüşümleri arasında kurdukları ilişkiler çerçevesinde incelemişlerdir.

Mouze (2009), katsayıları sıfırdan farklı herhangi bir L-Dirichlet serisine karşılık gelen matrisi oluşturarak bu Dirichlet serisinin taşıdığı özelliklerin bu seriye karşılık gelen matris tarafından da sağlandığını ispatlamıştır. Yine aynı makalede Mouze bu işlemin tersinin doğruluğunu ifade ederek ispatlamıştır.

Kontorovich (2009), Euler çarpımını kullanarak dış L fonksiyonu için Dirichlet serisi açılımını elde etmiştir. Tek ve çift sayılardaki görüntüler için farklı formüller bulan Kontorovich açılımda Fourier katsayılarını kullanarak daha önce Jacquet ve Shalika'nın yaptığı çalışmalara katkıda bulunmuştur.

Cerone ve Dragomir (2009), $s > 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s)$ şeklinde tanımlanan Lambda fonksiyonunu kullanarak Dirichlet serilerinin konvekslik özelliklerini incelemişlerdir. Bu makalede Riemann zeta ve Lambda fonksiyonuna ait yeni özellikler elde etmişlerdir. Örneğin $1/\zeta$ fonksiyonunun $(1/\zeta(e), \infty)$ aralığında konkav olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca daha önce $s > 1$ için Laforgia ve

Natalini'nin 2006'da elde ettiği, $\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} \leq \frac{s+1}{s}\frac{\zeta(s+2)}{\zeta(s+1)}$ eşitsizliği üzerinde çalışarak yine $s>1$ için, $\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} \leq \frac{\zeta(s+2)}{\zeta(s+1)}$ olduğunu ispatlamışlardır. Bu eşitsizlikler değeri hesaplanamayan Riemann zeta fonksiyonunun bazı görüntüleri hakkında fikir verebilmektedir. Son olarak yine aynı makalede $m,n \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan tamsayılar olmak üzere $\zeta\left(\frac{n+m}{2}\right) \leq \frac{2\zeta(n)\zeta(m)}{\zeta(n)+\zeta(m)}$ eşitsizliğinin varlığı ispatlanmıştır.

Biz Dirichlet serilerinin aritmetik fonksiyonlar teorisine katkıda bulunması, aritmetik fonksiyonlarla yapılan işlemlerin aynı zamanda bu fonksiyonlara karşılık gelen üreteç fonksiyonlar yardımı ile yapılıp yapılamayacağını araştırmak amacı ile bu konuyu seçtik. Aritmetik fonksiyonlarla Dirichlet serilerinin birçok yönde paralelel gitmesi ve kendi alanında bir klasik sayılan Titchmarsh'ın ünlü eseri "The Theory of the Riemann Zeta-Function" ve Dirichlet serileri ile ilgili makaleler bu problemin çıkış noktasını oluşturmuştur. Amacımız Dirichlet serileri yardımı ile yeni aritmetik fonksiyonlar keşfetmek, bilinen aritmetik fonksiyonlar arasında yeni ilişkiler bulmak ve Dirichlet serilerine ait yeni özellikler elde etmektir.

Bu çalışmamızda konumuzu dört ana bölümde inceledik. Giriş bölümünde kaynak araştırması yapılmış, bu konu ile ilgili yaptığımız çalışmalar ve amaçlarımız açıklanmıştır. Ön bilgiler bölümünde konunun daha kolay anlaşılması için gerekli bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamızın temelini oluşturan çeşitli Dirichlet serileri incelenerek daha sonra kullanacağımız temel teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Bu konuda önemli bir yer tutan ve Aritmetiğin temel teoreminin analitik versiyonu olarak da bilinen Euler çarpımı ayrı bir alt başlık altında incelenmiştir. Bu bölümde Euler çarpımının özellikle tam çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonların üreteç fonksiyonlarını elde etme konusunda büyük kolaylık sağladığı gösterilmiştir. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise $\zeta(s)$ ile ilgili çeşitli Dirichlet serileri incelenerek τ, τ^2, φ, λ gibi aritmetik fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonlar elde

edilmiştir. Ayrıca bu konuda elde edilen çalışmalar tezimizin dördüncü bölümünde yer alan orjinal sonuçlara esin kaynağı olmuştur.

Dördüncü bölümde kendi bulduğumuz orjinal sonuçlar sunulmuştur. Öncelikle,

$$r\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}\right)=p_1\dots p_m \qquad \text{ve} \qquad h(n)=\begin{cases}p, & n=p^{\alpha}\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

gibi iki yeni aritmetik fonksiyon tanımlayarak bu iki fonksiyona ait Dirichlet serilerini $\zeta^{(p)}$ fonksiyonları cinsinden ifade ettik.

Ayrıca k pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\zeta^{k+1}(s)$ üreteç fonksiyonlarının $f\left(\prod p^{\alpha}\right)=\prod\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+k)}{k!}$ şeklinde tanımlanan çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonlar dizisi oluşturduğunu gösterdik. Bu üreteç fonksiyon sayesinde d_k fonksiyonları için bir açılım elde etmeyi başardık. Yine k pozitif bir tamsayı olmak üzere $f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod\left(\left[\!\left[\frac{\alpha_i}{k}\right]\!\right]+1\right)$ aritmetik fonksiyonlarının $\zeta(s)\zeta(ks)$ fonksiyonları tarafından üretildiğini ispatladık. Benzer şekilde yeni $\zeta_{(k-1)}$ fonksiyonları tanımlayarak bu fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonların $\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$ olduğunu tespit ettik. Özel olarak, $\zeta_{(1)}(n)=\left|\mu(n)\right|$ eşitliğinin varlığını ispatladık.

Ayrıca $\nu(1)=0$, $\nu\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}\right)=m$ olmak üzere $\Omega(n)=2^{\nu(n)}$ şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyonun Dirichlet tersinin $\lambda(n)\Omega(n)$ olduğunu bulduk. Bir başka deyişle Ω aritmetik fonksiyonun tersi bilinen λ (Liouville fonksiyonu) ile ilişkili olduğu gösterilmiştir. Böylece Dirichlet serileri yardımı ile bazı aritmetik fonksiyonlar arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir. Bunların yanısıra yeni tanımladığımız ω fonksiyonun μ_2 fonksiyonun tersi olduğu gösterilmiştir. Ardından ω fonksiyonları, ω_k fonksiyonları olarak genelleştirerek aynı sonuç ω_k ve μ_k fonksiyonları için doğrulanmıştır. Benzer şekilde daha önce bilinmeyen $\tau(n)$ ve $\tau\left(n^2\right)$ fonksiyonlarının Dirichlet tersleri sırasıyla,

$$\tau^{-1}\left(p^t\right)=\begin{cases}1, & t=0 \text{ veya } 2\\ -2, & t=1\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod a_i \quad \text{olup} \quad a_i=\begin{cases}-3, & \alpha_i \text{ tek ise}\\ 4, & \alpha_i \text{ çift ise}\end{cases}$$

olarak bulunmuştur. Ayrıca φ, λ gibi aritmetik fonksiyonların Dirichlet terslerinin bu fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonlar yardımı ile daha kolay bulunabileceği gözlenmiştir.

Bunların yanı sıra yeni tanımladığımız aritmetik fonksiyonlara karşılık gelen üreteç fonksiyonlar elde edilmiştir. Örneğin, $f\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}\right)=3^n\alpha_1\dots\alpha_n$ eşitliği ile tanımlanan aritmetik fonksiyonu $\dfrac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}$, $h\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod\left(1-p_i^{\,2}\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu ise $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}$ üreteç fonksiyonlarının oluşturduğu gözlenmiştir. Ayrıca bir önceki durumun tersine $\dfrac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}$, $\dfrac{\zeta^2(2s)}{\zeta(s)}$ üreteçlerinden yeni aritmetik fonksiyonlar elde edilmiştir. Bulunan aritmetik fonksiyonlardan bazılarının Dirichlet tersi tezde belirtilen metodla bulunmuştur. Böylece bu tezde belirtilen metodla sayılar teorisinde önemli bir yer tutan aritmetik fonksiyonlar konusuna katkı sağlanmıştır.

Son olarak $F'(s)$ ve $F(s+1)$ fonksiyonları arasında $F'(s)=-sF(s+1)$ şeklinde özel bir bağıntı elde edilmiştir. Böylece $s>\sigma$ için mutlak yakınsaklık şartını sağlayan herhangi bir Dirichlet serisi ve bu serinin türevi arasında önemli bir özellik elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak temel kavramlar ve bu kavramlarla ilgili tanım ve teoremler verilecek, böylece Dirichlet serilerini kavramak kolaylaşacaktır. Burada aritmetik fonksiyon türleri ve özellikleri ile ilgili yeterli bilgiye sahip olunduğu farzedilmiştir.

Tanım 2.1. f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere f ve g fonksiyonlarının *Dirichlet konvülüsyonu*

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n} f(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right)$$

şeklinde tanımlanır (McCarthy 1986).

Tanım 2.2. $*$ işleminin *birim fonksiyonu* δ ile gösterilip

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır (McCarthy 1986).

Burada $f*\delta=\delta*f=f$ eşitliği kolayca elde edilebilir.

Tanım 2.3. f ve g birer aritmetik fonksiyon olsun. Eğer $f*g=g*f=\delta$ ise g aritmetik fonksiyonuna *Dirichlet konvülüsyonuna göre f fonksiyonunun tersi* veya kısaca *Dirichlet tersi* denir ve f^{-1} ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun tersi var ise tektir (McCarthy 1986).

Gerçekten g ve g' her ikisi de f nin ters fonksiyonları olsunlar. O zaman;

$$g=\delta*g=(g'*f)*g=g'*(f*g)=g*\delta=g'$$

olur.

Teorem 2.1. *Bir f fonksiyonunun Dirichlet tersinin var olabilmesi için gerek ve yeter şart $f(1)\neq 0$ olmasıdır. Eğer f fonksiyonunun tersi var ise*

$$f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)} \text{ ve } f^{-1}(n)=-\frac{1}{f(1)}\sum_{\substack{d|n\\ d<n}} f(d)f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

bağıntısı ile bulunur (McCarthy 1986).

Teorem 2.2. *Eğer* $n\geq 1$ *ise*

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\delta(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

dir (Apostol 1998).

Tanım 2.4. Her $n,k\in\mathbb{Z}^+$ için ζ_k *fonksiyonu* $\zeta_k(n)=n^k$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Özel olarak, $k=0$ için $\zeta_0(n)=n^0=1$ şeklinde tanımlanan fonksiyona ise *zeta fonksiyonu* denir (McCarthy 1986).

Sonuç 2.1. *Möbius fonksiyonunun Dirichlet konvülüsyonuna göre tersi zeta fonksiyonudur* (McCarthy 1986).

Tanım 2.5. f özdeş olarak sıfır olmayan bir aritmetik fonksiyon olmak üzere $(m,n)=1$ olan her *m*, *n* pozitif tamsayı çifti için

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

eşitliğini gerçekleyen f fonksiyonuna *çarpanlanabilir fonksiyon* denir. Eğer yukarıdaki şart bütün *m*, *n* tamsayı çiftleri için sağlanıyorsa bu durumda *f tam çarpanlanabilir* olarak isimlendirilir (Şenay 2007).

Sonuç 2.2. *f çarpanlanabilir bir fonksiyon ise* $f(1)=1$ *dir* (Şenay 2007).

Teorem 2.3. *Pozitif bir n tamsayısının standart biçimi* $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ *olmak üzere f çarpanlanabilir fonksiyon ise* $f(n)=\prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ *dir* (Şenay 2007).

Sonuç 2.3. *Çarpanlanabilir f aritmetik fonksiyonun Dirichlet tersi de çarpanlanabilir bir fonksiyondur* (Şenay 2007).

Teorem 2.4. *f çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonun tam çarpanlanabilir olmasının gerek ve yeter şartı $f^{-1} = \mu f$ olmasıdır* (McCarthy 1986).

Teorem 2.5 (Möbius Ters Çevirme Formülü).
f ve g aritmetik fonksiyonlar olup tüm n pozitif tamsayıları için

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad ise$$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$$

dir (McCarthy 1986).

Teorem 2.6. Λ, *Mangoldt fonksiyonu olmak üzere, $n \geq 1$ için*;

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

dir (Apostol 1998).

Teorem 2.7. *$n \geq 1$ ise*;

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

dir (Apostol 1998).

Teorem 2.8. λ, *Liouville fonksiyonu olmak üzere, $n \geq 1$ için*;

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & n \text{ bir sayının karesi} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup aynı zamanda bütün n tamsayıları için; $\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$ *dir* (Apostol 1998).

Tanım 2.6. f herhangi bir aritmetik fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonunun f' *ile gösterilen türevi*

$$f'(n) = f(n) \log n$$

şeklinde tanımlanmıştır (Apostol 1998).

Örnek 2.1. Tüm n pozitif tamsayıları için $\delta(n)\log n = 0$ olduğundan $\delta'(n) = 0$ dır.

Örnek 2.2. Tüm n pozitif tamsayıları için $\zeta_0(n) = 1$ olduğundan $\zeta_0'(n) = \log n$ ifadesi elde edilir. Ayrıca $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ olduğundan $\Lambda * \zeta_0 = \zeta_0'$ eşitliği bulunur.

Tanım 2.7. p asal sayı, m pozitif tamsayı olmak üzere Λ_1 *fonksiyonu*

$$\Lambda_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & n = p^m \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Apostol 1998).

Yukarıdaki tanımdan $\Lambda_1(1) = 0$ olduğunu görebiliriz, bu da bizi Λ_1 fonksiyonunun çarpanlanabilir olmadığı sonucuna ulaştırır.

Sonuç 2.4. *Tüm n pozitif tamsayıları için*

$$\Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

dir (Apostol 1998).

Tanım 2.8. Ω fonksiyonu $v(1) = 0$, $v\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}\right) = m$ olmak üzere $\Omega(n) = 2^{v(n)}$ şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyondur (Titchmarsh 1951).

Ω aritmetik fonksiyonu çarpanlanabilir bir fonksiyon olup bu fonksiyonun Dirichlet tersi orijinal bölümde gösterilen metodla bulunacaktır.

Tanım 2.9. $k = 2,3,\dots$ ve n, v_1, $v_2,\dots$, v_k pozitif tamsayılar olmak üzere d_k *fonksiyonu*

$$d_k(n) = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_k = n} 1$$

şeklinde tanımlanmıştır (Titchmarsh 1951).

Bir başka deyişle $d_k(n)$, n sayısının k tane çarpanın çarpımı şeklinde yazılabildiği durumların sayısıdır. Tabii ki burada çarpanların değişik sırada bulunması farklı durumlar şeklinde değerlendirilmektedir. d_k aritmetik fonksiyonu da çarpanlanabilir bir fonksiyon olup tezin orijinal kısmında $d_k(n)$ için ayrıntılı bir formül elde edilmiştir.

Birçok aritmetik fonksiyonda olduğu gibi μ Möbius fonksiyonunun da genelleştirilmiş şekli mevcut olup bu fonksiyon aşağıdaki tanımla verilmiştir.

Tanım 2.10. k pozitif bir tamsayı olmak üzere *derecesi k olan Möbius fonksiyonu*

$$\mu_k(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = p_1^{\,k} p_2^{\,k} \ldots p_t^{\,k} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (McCarthy 1986).

Yukarıdaki tanımdan hemen $\mu_1 = \mu$ olduğu ve μ_k fonksiyonunun çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon olduğu sonuçları çıkarılabilir.

φ, Euler fonksiyonunu göstermek üzere $\sum_{d|n} \varphi(d)$ ifadesinin değeri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.9. $n \geq 1$ *ise*;

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

dir (Apostol 1998).

Teorem 2.10. *n pozitif bir tamsayı olmak üzere*;

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

dir (Apostol 1998).

Sonuç 2.5. $n\geq 1$ *için* $\varphi(n)=(\mu*\zeta_1)(n)$ *eşitliği geçerlidir* (McCarthy 1986).

Teorem 2.11. *Bütün n pozitif tamsayıları için*,

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

dir (McCarthy 1986).

Aşağıdaki teorem tezimizde farklı ve orijinal metodlarla 4. Bölümde yeniden ispatlanacağından teoremin klasik ispatına bu bölümde yer verilmiştir.

Teorem 2.12. *n pozitif bir tamsayı olmak üze*re,

$$\varphi^{-1}(n)=\prod_{p|n}(1-p)$$

dir (Apostol 1998).

İspat. $\varphi=\mu*\zeta_1$ eşitliğinden ve konvülüsyon işleminin özelliklerinden faydalanarak $\varphi^{-1}=\mu^{-1}*\zeta_1^{-1}$ ifadesi elde edilir. ζ_1 fonksiyonu tam çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon olduğundan $\zeta_1^{-1}=\mu\zeta_1$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $\varphi^{-1}(n)=(\zeta_0*\mu\ \zeta_1)(n)=\sum_{d|n}d\mu(d)$ şeklinde yazılabilir. φ^{-1} çarpanlanabilir olduğu için $\varphi^{-1}(p^\alpha)$ görüntüsünü hesaplamak yeterli olacaktır.

$$\varphi^{-1}(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}d\mu(d)=1\mu(1)+p\mu(p)=1-p$$

Buradan $\varphi^{-1}(n)=\prod_{p|n}(1-p)$ sonucu elde edilerek ispat tamamlanır (Apostol 1998).

Euler'in φ fonksiyonu bir çeşit sayım fonksiyonu olup aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Tanım 2.11. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, J_k şeklinde gösterilen *Jordan fonksiyonu*, $(x_1, x_2, ...x_k, n) = 1$ şartını sağlayan $(x_1, x_2, ...x_k)$ sıralı k lılarının sayısıdır (McCarthy 1986).

Bu durumda $J_1 = \varphi$ olduğu açıkça görülebilir. Bunun yanında $J_k = \zeta_k * \mu$ eşitliği elde edilebilir. Böylece Jordan fonksiyonunun çarpanlanabilir olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 2.12. k pozitif bir tamsayı olmak üzere ϕ_k *fonksiyonu*, (n,k) indirgenmiş rezidü sınıfındaki tamsayıların sayısı şeklinde tanımlanmıştır (McCarthy 1986).

Buradan $\phi_1(n) = \varphi(n)$ olduğu ve

$$\sum_{d|n} \phi_k(d) = n^k$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca Möbius Ters Çevirme Formülünden

$$\phi_k(n) = \sum_{d|n} d^k \mu(n/d)$$

eşitliği bulunur. Bir başka deyişle $J_k = \zeta_k * \mu = \phi_k$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.13. k negatif olmayan bir tamsayı olsun. σ_k *fonksiyonu*, pozitif bir n sayısının bölenlerinin k ıncı kuvvetleri toplamı olarak tanımlanır. Bir başka ifade ile tüm n tamsayıları için ;

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

dir. Özele indirgersek,

$\sigma(n) = \sigma_1(n)$; "*n sayısının bölenleri toplamı*" dır.

$\tau(n) = \sigma_0(n)$; "*n sayısının bölenleri sayısı*" dır.

Bu fonksiyonlar çarpanlanabilir olduğundan hesaplamalarda sadece asal kuvvetlerindeki değerlerini bilmemiz yeterli olacaktır. Yani,

$$\sigma_k\left(p^\alpha\right)=\sum_{j=0}^{\alpha}p^{jk}=\frac{p^{(\alpha+1)k}-1}{p^k-1}$$

$$\tau\left(p^\alpha\right)=\alpha+1,$$

eşitlikleri yardımı ile bu fonksiyonların görüntüleri bulunabilir (McCarthy 1986).

Tanım 2.14. G herhangi bir grup olmak üzere G de tanımlı f fonksiyonu her $a,b\in G$ için $f\left(ab\right)=f\left(a\right)f\left(b\right)$ şartını sağlıyor ve bazı $c\in G$ için $f\left(c\right)\neq 0$ oluyor ise f fonksiyonuna G *grubunun bir karakteri* denir (Apostol 1998).

Tanım 2.15. G grubu mod k ya göre indirgenmiş rezidü sınıfından oluşsun. G grubunun her f karakteri için

$$\chi\left(n\right)=\begin{cases}f\left(n\right), & \left(n,k\right)=1\\ 0, & \left(n,k\right)>1\end{cases}$$

şartlarını sağlayan aritmetik fonksiyona *Dirichlet karakteri* denir (Apostol 1998).

Tanım 2.16. Her n pozitif tamsayısı için bir reel sayı eşleştirdiğimizi ve bunları a_1, a_2, ..., a_n, ... gibi indeksleri artan bir şekilde sıraladığımızı varsayalım. Elde edilen bu listeye *dizi* denir ve a_n de bu dizinin *genel terimi* olarak adlandırılır (Kaplan 1991).

Tanım 2.17. $a_1,a_2,...,a_n,...$ bir dizi olsun. $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, …, $S_n=a_1+...+a_n$, olmak üzere yeni bir S_n dizisi oluşturalım. Burada S_n, $\left\{a_n\right\}$ dizisinin ilk n terimi toplamı olup, *kısmi toplam* olarak isimlendirilir. S_1, S_2, …, S_n, … dizisi

$$a_1+a_2+a_3+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

ile gösterilip *sonsuz seri* ya da kısaca *seri* olarak isimlendirilir. Eğer $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ varsa seri *yakınsak*, diğer durumlarda seri *ıraksaktır* (Kaplan 1991).

Serilerin bazı özel durumları aşağıda kısaca özetlenmiştir.

1) Geometrik Seri: a ve r sabit reel sayılar olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ şeklindeki serilere *geometrik seri* denir. Eğer $|r|<1$ ise seri $S=\frac{a}{1-r}$ değerine yakınsar, $|r|\geq 1$ ise seri ıraksaktır.

2) *p* Serisi: p bir reel sayı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisine *p serisi* denir. Bu seri $p>1$ için yakınsak, $p\leq 1$ için ıraksaktır. Özel olarak $p=1$ için seri *harmonik seri* olarak isimlendirilir (Kaplan 1991).

Tanım 2.18. $\sum|u_n|$ serisi yakınsak ise $\sum u_n$ serisi *mutlak yakınsak* olarak isimlendirilir. Eğer $\sum u_n$ yakınsak, $\sum|u_n|$ ıraksak ise bu durumda $\sum u_n$ serisine *koşullu yakınsak seri* denir (Kaplan 1991).

Teorem 2.13. *Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır* (Kaplan 1991).

Teorem 2.14. *Mutlak yakınsak bir serinin terimlerinin yerleri değiştirilerek yeniden düzenlenebilir, bu serinin yeni hali de aynı toplama yakınsar. Bununla birlikte koşullu yakınsak seriler yeniden düzenlenirse, seriler ıraksak olabilir veya başka bir değere yakınsayabilir* (Kaplan 1991).

Teorem 2.15. *İki mutlak yakınsak serinin toplamı, farkı ve çarpımı yine mutlak yakınsaktır* (Kaplan 1991).

Tanım 2.19. $u_n(x)$, $n=1,2,...$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $[a,b]$ aralığındaki her x için $n>N$ olduğunda $|u_n(x)-F(x)|<\varepsilon$ şartını sağlayacak şekilde bir $N>0$ bulabilirsek diziye $F(x)$ *fonksiyonuna yakınsar* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=F(x)$ şeklinde belirtilir. N sayısı ε değerine bağlı olduğu gibi x sayısına da bağlı olabilir. Eğer N, sadece ε

değerine bağımlı ve x değişkenine bağımlı değilse diziye $[a,b]$ *aralığında düzgün yakınsaktır* denir (Kaplan 1991).

Teorem 2.16. $u_n(x)$ *fonksiyon dizisi* $[a,b]$ *aralığında sürekli ve* $\sum u_n(x)$ *serisi düzgün yakınsak ise bu seri terim terim integrallenebilir* (Kaplan 1991).

Teorem 2.17. $\sum u_n(x)$ *yakınsak serisi* $[a,b]$ *aralığında sürekli kısmi türevleri varsa ve* $[a,b]$*aralığında* $\sum u_n'(x)$ *düzgün yakınsak ise bu durumda* $\sum u_n(x)$ *serisi terim terim türevlenebilir* (Kaplan 1991).

Tanım 2.20. a_0, a_1, $a_2, \ldots$ sayıları birer reel sayı olmak üzere;

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2.1)$$

biçimindeki seriye *kuvvet serisi* denir (Kaplan 1991).

Yukarıdaki seriyi genellikle $\sum a_n x^n$ olarak kısaltmak daha uygundur. Tanımdaki (2.1) kuvvet serisi için R *yakınsaklık yarıçapı* olup bu seri $|x| < R$ için yakınsak ve $|x| > R$ için ıraksaktır. $|x| = R$ için seri yakınsak olabilir veya olmayabilir.

Tanım 2.21. x reel sayı olmak üzere, x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıya x *sayısının tam kısmı* denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir (Şenay 2007).

Teorem 2.18 (Karşılaştırma Teoremi). $\sum a_n$ *ve* $\sum b_n$ *serileri*, n doğal *sayısının yeterince büyük değerleri için* $a_n \le b_n$ *şartını sağlasın. Bu durumda*;

(i) $\sum b_n$ *yakınsak ise* $\sum a_n$ *de yakınsaktır*,

(ii) $\sum a_n$ *ıraksak ise* $\sum b_n$ *de ıraksaktır* (Kaplan 1991).

Tanım 2.22. z_0 karmaşık sayısı için f in türevi var ise $f'(z_0)$ şeklinde gösterilir ve f fonksiyonu z_0 noktasında *analitiktir* denir. Eğer R bölgesindeki her nokta için f analitik ise fonksiyon R *de analitiktir* (Spiegel 1997).

Tanım 2.23. z karmaşık bir sayı ve $|z| < 2\pi$ olmak üzere $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ eşitliği ile tanımlanan B_n katsayılarına *Bernoulli sayıları* denir (Spiegel 1997).

Bu açılımdan $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0 \ldots$ olarak bulunur. $n \geq 1$ için $B_{2n+1} = 0$ dır. Yukarıdaki açılımın yanında $n \geq 2$ için Bernoulli sayılarının $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ eşitliğini sağladığını biliyoruz.

Tanım 2.24. s karmaşık bir sayı olmak üzere $\mathrm{Re}(s) > 0$ için

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir. (Spiegel, 1997)

Bilindiği gibi Gamma fonksiyonu $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ve $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi / \sin(\pi s)$ eşitliklerini sağlamaktadır. n pozitif bir tamsayı ise $\Gamma(n+1) = n!$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu fonksiyon $s = 0,\ -1,\ -2,\ldots$ noktalarındaki basit kutuplar haricinde bütün noktalarda analitiktir, Gamma fonksiyonunun $\mathrm{Re}(s) = 0$ değerleri için analitik sürekliliği sağlanabilir.

3. DIRICHLET SERİLERİ

Tanım 3.1. f herhangi bir aritmetik fonksiyon, s karmaşık bir sayı olmak üzere,

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} \qquad (3.1)$$

şeklindeki seriye *Dirichlet serisi* denir. Bazı Dirichlet serileri s karmaşık sayısının her değeri için mutlak yakınsak değildir. Eğer (3.1) serisi s sayısının bazı değerleri için mutlak yakınsak oluyorsa bu durumda F fonksiyonu f *fonksiyonunun üreteç fonksiyonudur* (Apostol 1989).

Yukarıdaki (3.1) serisinin σ , $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $s = \sigma + it$ için mutlak yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} n^s &= e^{\log n^s} = e^{(\sigma+it)\log n} \\ &= e^{\sigma \log n} e^{it\log n} \\ &= n^{\sigma} e^{it\log n} \end{aligned}$$

olur. Herhangi bir θ reel sayısı için $\left|e^{i\theta}\right|=1$ olduğundan, $\left|n^s\right|=n^{\sigma}$ eşitliği elde edilir. Bu da bize mutlak yakınsaklığın s karmaşık sayısının sadece reel kısmı ile ilgili olduğunu gösterir. Eğer (3.1) Dirichlet serisi $s = a + ib$ için mutlak yakınsak ise $a \leq \sigma$ için $n^a \leq n^{\sigma} = \left|n^s\right|$ olduğundan; $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \frac{\left|f(n)\right|}{n^a}$ bağıntısı elde edilir. Burada Teorem 2.18 (Karşılaştırma Teoremi) kullanılarak $a \leq \sigma$ olmak şartı ile (3.1) serisinin $s = \sigma + it$ için mutlak yakınsak olduğu söylenebilir.

Tanım 3.2. Her Dirichlet serisi için *mutlak yakınsaklığın apsisi* olarak adlandırılan ve σ_a ile gösterilen bir reel sayı vardır. $\sigma > \sigma_a$ Dirichlet serisi mutlak yakınsak iken $\sigma < \sigma_a$ için bu seri mutlak yakınsak değildir (Apostol 1998).

Dirichlet serileri ile kuvvet serileri bu noktada ayrılmaktadır. Kuvvet serileri genellikle yakınsaklık yarıçapı ile belirlenen bir daire içinde yakınsak iken Dirichlet serileri genellikle belli bir yarı düzlemde yakınsaktır.

Eğer, $\sum\left|f(n)n^{-s}\right|$ her yerde yakınsak ise $\sigma_a=-\infty$ olur. Tam tersine, $\sum\left|f(n)n^{-s}\right|$ hiçbir yerde yakınsak değilse $\sigma_a=+\infty$ olur.

Eğer (3.1) Dirichlet serisi bir σ_a için mutlak yakınsak ise $\sigma>\sigma_a$ koşuluna uyan her σ değeri için bu serinin terimlerinin başka bir şekilde düzenlenmesi yakınsaklık durumunu değiştirmez.

Örnek 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n^s}$ Dirichlet serisi için $\sigma_a=\infty$ iken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n n^s}$ Dirichlet serisi için $\sigma_a=-\infty$ olduğu kolaylıkla görülebilir (Apostol 1998).

Örnek 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ Dirichlet serisi, zeta fonksiyonuna ait Dirichlet serisi olup $\sigma>1$ için mutlak yakınsak, $\sigma\le 1$ için ıraksaktır. Bu durumda $\sigma_a=1$ dir. $\sigma>1$ için tanımlanan fonksiyon *Riemann zeta fonksiyonu* olarak bilinir ve $\zeta(s)$ şeklinde gösterilir (Apostol 1998).

Örnek 3.3. Eğer f fonksiyonu her $n\ge 1$ için $\left|f(n)\right|\le M$ şeklinde sınırlı ise $\sum f(n)n^{-s}$ fonksiyonu $\sigma>1$ için mutlak yakınsaktır. Bu durumda $\sigma_a\le 1$ olduğunu ifade edebiliriz. Örneğin f yerine χ *Dirichlet karakteri* seçilirse $L(s,\chi)=\sum\chi(n)n^{-s}$ serisi $\sigma>1$ için mutlak yakınsak olur (Apostol 1998).

Aşağıdaki iki teoremle F üreteç fonksiyonunun özelliklerini yakından inceleme fırsatı elde edeceğiz. Teorem 3.1 ile mutlak yakınsak Dirichlet serileri için her zaman bir üst sınır bulunabileceği tespit edilmiştir. Teorem 3.2 ise F fonksiyonunun $\sigma\to\infty$ için değerini belirlemektedir.

Teorem 3.1. $\sum f(n)n^{-s}$ *serisi,* $\sigma \geq \sigma_a$ *için mutlak yakınsak olsun.* $N>1$ *ve* $\sigma \geq c \geq \sigma_a$ *için*

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq N^{-(\sigma-c)}\sum_{n=N}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-c}$$

dir (Apostol 1998).

İspat. $\left|\sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-c}n^{-(\sigma-c)}$

$$\leq N^{-(\sigma-c)}\sum_{n=N}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-c}$$

eşitsizliği ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.2. $\sum f(n)n^{-s}$ *serisi,* $\sigma \geq \sigma_a$ *için mutlak yakınsak olsun.* $N>1$, $\sigma \geq c \geq \sigma_a$, $\sigma \to \infty$ *için* $F(\sigma+it)$ *serisi* $f(1)$ *değerine düzgün yakınsaktır* (Apostol 1998).

İspat. $F(s) = f(1)+\sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}$ olduğundan, $\sigma \to \infty$ için ikinci terimin 0 değerine yakınsadığını göstermemiz teoremin ispatını verecektir. Yukarıdaki teoremde $N=2$ seçersek;

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq 2^{-(\sigma-c)}\sum_{n=2}^{\infty}\left|f(n)\right|n^{-c} = \frac{A}{2^{\sigma}}$$

ifadesini elde ederiz. Burada A değeri σ ve t değerinden bağımsızdır. $\sigma \to \infty$ iken $\frac{A}{2^{\sigma}}$ değeri sıfıra yakınsar bu da bize teoremin ispatını verir.

Örnek 3.4. Teorem 3.2 yi kullanarak $\sigma \to \infty$ için $\zeta(\sigma+it)$ ve $L(\sigma+it)$ değerlerinin 1 olduğunu söyleyebiliriz (Apostol 1998).

Mutlak yakınsak bir Dirichlet serisi aynı zamanda düzgün yakınsaktır ki bu özellik kuvvet serilerinde bulunmamaktadır. Aşağıdaki teoremde herhangi bir

Dirichlet serisinin mutlak yakınsaklık apsisi (σ_a) ile koşullu yakınsaklık apsisi (σ_c) arasındaki özel bir bağıntıdan söz edilmektedir.

Teorem 3.3. *σ_c sınırlı olmak üzere herhangi bir Dirichlet serisi için* $0 \le \sigma_a - \sigma_c \le 1$ *dir* (Apostol 1998).

İspat. Eğer $\sum f(n)n^{-s_0}$ serisi herhangi bir s_0 için yakınsak ise $\sigma > \sigma_0 + 1$ şartını sağlayan tüm *s* sayıları için bu serinin mutlak yakınsak olduğunu göstermek yeterli olacaktır. *A* sayısı $\left|f(n)n^{-s_0}\right|$ için herhangi bir üst sınır olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right|\left|\frac{1}{n^{s-s_0}}\right| \le \frac{A}{n^{\sigma-\sigma_0}}$$

elde edilir. Böylece $\sum\left|f(n)n^{-s}\right|$ serisi, $\sum n^{\sigma_0-\sigma}$ serisi ile karşılaştırıldığında mutlak yakınsaktır.

Yukarıdaki bağıntı Dirichlet serileri için önemli bir bağıntı olup benzer bir bağıntı kuvvet serileri için bulunmamaktadır. Bu teorem koşullu yakınsaklık veya mutlak yakınsaklık apsislerinden herhangi birisi bulunduğunda diğerine belli bir sınır koymayı kolaylaştırmaktadır.

Örnek 3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$ serisi $\sigma > 0$ için yakınsak olup, $\sigma > 1$ için mutlak yakınsaktır. Bu örnekte $\sigma_c = 0$ ve $\sigma_a = 1$ olduğu ve bu apsislerin yukarıdaki teoremi doğruladığı görülmektedir (Apostol 1998).

Daha önce de bahsedildiği gibi *s* değişkenini kompleks ya da reel sayı seçmek mutlak yakınsaklığı ve yakınsaklık apsisini değiştirmeyeceğinden basitliği sağlamak adına çalışmamızın bundan sonraki bölümlerinde *s* sadece reel sayı olarak kullanılacaktır.

Önerme 3.1. *Her* $s > s_o$ *için* f *ve* g *aritmetik fonksiyonlarına ait Dirichlet serileri mutlak yakınsak ve*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

oluyor ise $f = g$ *dir* (McCharty 1986).

İspat. Bütün n pozitif tamsayıları için $h(n) = f(n) - g(n)$ olsun. Bu durumda $s > s_o$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = 0$ olacaktır. $h(n) = 0$ olduğunu göstermek amacıyla bazı n tamsayıları için $h(n) \neq 0$ olduğunu varsayarak bir çelişkiye ulaşılacaktır. m sayısı $h(m) \neq 0$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda;

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = 0$$

$$\frac{h(m)}{m^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = 0$$

$$h(m) = -m^s \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

olur. $s = s_o + 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^s}$ serisi yakınsaktır.

Sonuç olarak;

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{so+1}} \frac{1}{n^{s-so-1}}$$

$$\leq R \frac{1}{(m+1)^{s-so-1}}$$

şeklinde sınırlandırılır. Böylece $s \to \infty$ iken

$$|h(m)| \leq \left(\frac{m}{m+1} \right)^s (m+1)^{s_o+1} R \to 0$$

elde edilir. Buradan $h(m) = 0$ bulunur ki, bu bir çelişkidir. Bu da teoremin ispatını vermektedir.

F ve G fonksiyonları sırası ile f ve g aritmetik fonksiyonlarının üreteç fonksiyonları ise $F+G$ fonksiyonu $f+g$ aritmetik fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur. Bir sonraki teorem f ve g aritmetik fonksiyonlarının Dirichlet konvülüsyonlarına ait üreteç fonksiyonunu bu fonksiyonların Dirichlet serileri çarpımına eşit olduğunu göstermiştir.

Teorem 3.4. *f ve g aritmetik fonksiyonlarına ait üreteç fonksiyonları olan F ve G sırasıyla $s>a$ ve $s>b$ için mutlak yakınsak olsun. Bu durumda, $s>max(a,b)$ için;*

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(f*g)(n)n^{-s}$$

dir (Apostol 1998).

İspat. Her iki serinin de mutlak yakınsak olduğu herhangi bir s değeri için,

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}\sum_{m=1}^{\infty}g(m)m^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n)g(m)(mn)^{-s}$$

elde edilir. Seriler mutlak yakınsak olduğundan bu serileri birlikte çarparak sonuç değişmeden, terimleri istediğimiz şekilde yer değiştirerek düzenleyebiliriz. m ve n değerlerinin çarpımının k gibi bir sabiti verdiği terimler bir araya yazılırsa k sayısının olası değerleri 1,2,… olur. Böylece

$$F(s)G(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k}f(n)g(m)\right)k^{-s}=\sum_{k=1}^{\infty}h(k)k^{-s}$$

elde edilir. Buradan h fonksiyonunun $f*g$ olduğu kolaylıkla görülür.

Örneğin $\sum n^{-s}$, $\sum\mu(n)n^{-s}$ serilerinin her ikisi de $s>1$ için mutlak yakınsaktırlar. Yukarıdaki teoremde f yerine zeta fonksiyonu ve g yerine Möbius fonksiyonu olarak seçilirse $h=\delta$ olacaktır. Böylece $s>1$ için,

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta_0*\mu)(n)}{n^{s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta(n)}{n^{s}}=1$$

elde edilir. O halde $s > 1$ için $\zeta(s) \neq 0$ olduğu ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

bağıntısı elde edilir. Aslında bu bağıntı tesadüf olmayıp, aşağıdaki Sonuç 3.1 in özel bir halidir (McCarthy 1986).

Sonuç 3.1. *$f(1) \neq 0$ ve $s > s_o$ için $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ serisi mutlak yakınsak olsun. Bu durumda $F(s) \neq 0$ ve f^{-1} fonksiyonuna ait Dirichlet serisi $s > s_o$ için mutlak yakınsak olup,*

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}$$

eşitliğini sağlar (Apostol 1998).

Eğer f aritmetik fonksiyonu tam çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon ise $f^{-1}(n) = f(n)\mu(n)$ bağıntısının varlığı bilinmektedir. Bu durumda $|f^{-1}(n)| \leq |f(n)|$ olduğundan f^{-1} fonksiyonu da $s > s_o$ için mutlak yakınsaktır. Böylece $s > s_o$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) f(n)}{n^s} = \frac{1}{F(s)}$$

bağıntısı elde edilir (Apostol 1998).

Örnek 3.6. Herhangi bir χ Dirichlet karakteri ve $s > 1$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s} = \frac{1}{L(s,\chi)}$$

eşitliği kullanılabilir (Apostol 1998).

Örnek 3.7. ζ_1 fonksiyonuna ait Dirichlet serisi, $\zeta_1(n) = n$ olduğundan, $s > 2$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1)$$

şeklindedir (McCarthy 1986).

Örnek 3.8. σ fonksiyonuna ait Dirichlet serisi, $\sigma = \zeta_1 * \zeta_0$ eşitliğinden yararlanılarak $s > 2$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta_1 * \zeta_0)(n)}{n^s} = \zeta(s-1)\zeta(s)$$

şeklinde yazılabilir (McCarthy 1986)

Örnek 3.9. φ fonksiyonuna ait Dirichlet serisi, $\varphi = \zeta_1 * \mu$ olduğundan $s > 2$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta_1 * \mu)(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

olur (McCarthy 1986).

Böylece Euler'in ünlü fonksiyonuna ait Dirichlet serisinin elde edilebildiğini gördük. Bu örnekten ilerleyen bölümlerde yararlanacağız aynı zamanda bu serinin farklı elde ediliş yöntemlerini göstereceğiz.

Teorem 3.5. *λ fonksiyonuna ait üreteç fonksiyon, $s > 1$ için*;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

dir (Apostol 1998).

İspat. $h = \zeta_0 * \lambda$ olsun. Bu durumda;

$$h(n) = \sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & n = m^2 \\ 0 & n \neq m^2 \end{cases}$$

elde edilir. Teorem 3.4 yardımı ile;

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ kare}}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s)$$

yazılabilir. Buradan;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

bağıntısı kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.6. $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ *serisi* $s>s_o$ *şartını sağlayan yarı uzayda analitik olup türevi*;

$$F'(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\log n}{n^s}$$

dir (Apostol 1998).

İspat. $s>s_o$ için seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim türev alınabilmektedir. Buradan sonuca ulaşılır.

Bu teoremde f fonksiyonuna karşılık gelen seri ve türevi alınmış serinin yakınsaklık apsisleri aynıdır. Burada özel olarak Teorem 3.6 k kez uygulanırsa $s>s_o$ için;

$$F^{(k)}(s)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)(\log n)^k}{n^s}$$

elde edilir.

Örnek 3.10. $s>1$ için Riemann zeta fonksiyonunun türevi;

$$\zeta'(s)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$$

şeklindedir ve Teorem 2.6 yardımı ile

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

olduğu bilinmektedir. Mutlak yakısak bir Dirichlet serisi düzgün yakınsak olduğundan, terim terim integral alınıp $\Lambda_1(n)=\Lambda(n)/\log n$ eşitliği kullanılırsa;

$$\log\zeta(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda_1(n)}{n^s}$$

bağıntısı elde edilir (Titchmarsh 1951).

Riemann zeta fonksiyonu en yaygın kullanılan Dirichlet serisi olup bizim tezimizde elde edilen çoğu üreteç fonksiyon Riemann zeta fonksiyonu cinsinden yazıldığından burada bu fonksiyon ile ilgili bilinen bazı özellikleri özetleyeceğiz.

(1) Riemann zeta fonksiyonu $\sigma < 1$ için yakınsak değildir. Fakat bu fonksiyon $\sigma = 1$ deki rezidüsü 1 olan basit kutup dışında her yerde analitiktir (Riemann 1859).

(2) Riemann zeta fonksiyonu $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left((1-s)/2\right)\zeta(1-s)$ eşitliğini sağlamaktadır. Bu formül kullanılarak $\zeta(s)$ nin, $\mathrm{Re}(s) \le 0$ için değerleri hesaplanabilmektedir (Riemann 1859).

(3) s herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$ eşitliğini sağlar. Burada n pozitif tamsayı olmak üzere $s = 2n+1$ alınırsa $\zeta(-2n) = 0$ elde edilir. Bunlar Riemann zeta fonksiyonun *apaçık (trivial) sıfırları* olarak bilinmektedir (Apostol 1989).

(4) Riemann zeta fonksiyonun *apaçık olmayan (nontrivial) sıfırlarının* ise $\sigma = 1/2$ doğrusu üzerinde olduğu (Riemann Hipotezi) bilinmektedir. Bu apaçık olmayan sıfırların sayısı ve hangi oranda $\sigma = 1/2$ doğrusu üzerinde bulunduğu ile ilgili araştırmalar halen devam etmektedir (Riemann 1859).

(5) Riemann zeta fonksiyonun görüntülerinin elde edilmesi de matematikçiler için bir merak konusudur. (3) den $n > 0$ için $\zeta(-2n) = 0$ olduğunu biliyoruz. Yine $n \ge 1$ için $\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$ ve $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ olarak bulunmuştur. Pozitif bir k tamsayısı için B_{2k} Bernoulli sayılarını göstermek üzere $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$ dir. Fakat $s = 2k+1$ için $\zeta(s)$ nin değerini hesaplayan bir eşitlik bulunmamaktadır. Sadece özel bir durum olarak $\zeta(3)$ ün değeri R. Ape´ry tarafından hesaplanmıştır (Apostol 1989).

(6) ζ fonksiyonu $s>1$ için $\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} \le \frac{\zeta(s+2)}{\zeta(s+1)}$ ve m,n sayıları 1 sayısından büyük pozitif tamsayılar olmak üzere $\zeta\left(\frac{n+m}{2}\right) \le \frac{2\zeta(n)\zeta(m)}{\zeta(n)+\zeta(m)}$ eşitsizliklerini sağlamaktadır (Cerone ve Dragomir 2009).

Aşağıdaki fonksiyon Riemann zeta fonksiyonu ve Dirichlet *L*-serilerinin özelliklerini daha yakından incelemek için kullanılmaktadır.

Tanım 3.3. $s>1$ ve $0<a\le 1$ olmak üzere,

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Hurwitz zeta fonksiyonu* denir (Apostol 1989).

Tanımdan $a=1$ için bu fonksiyondan Riemann zeta fonksiyonunu elde edildiği ortadadır. Hurwitz zeta fonksiyonunu kullanarak $L(s,\chi)$ fonksiyonlarını farklı şekillerde yazmak mümkündür. Farzedelim ki χ, *mod k* için bir karakter olsun. Bu durumda $n=qk+r$ ve $1\le r\le k$ için

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\chi(qk+r)}{(qk+r)^s}=\frac{1}{k^s}\sum_{r=1}^{k}\chi(r)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{\left(q+\frac{r}{k}\right)^s}$$

$$=k^{-s}\sum_{r=1}^{k}\chi(r)\zeta\left(s,\frac{r}{k}\right)$$

olur. Riemann zeta fonksiyonunu Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden ifade ederek $\zeta(s)$ nin birçok özelliğini elde etmek mümkündür (Apostol 1998).

3.1. Euler Çarpımı

f aritmetik fonksiyonun üreteç fonksiyonu olan *F*, $s > s_o$ için mutlak yakınsak olsun. Bu durumda, her *p* asalı için;

$$1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots$$

sonsuz serisi de *F* fonksiyonunun sadece bazı terimlerinden oluştuğundan $s > s_o$ için mutlak yakınsak olacaktır. Eğer *f* çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon ise bu fonksiyona karşılık gelen Dirichlet serisi de sonsuz serilerin çarpımı şeklinde yazılabilecektir. Bir sonraki Euler çarpımı olarak adlandırılan teorem Aritmetiğin Temel Teoremi'nin analitik versiyonu olarak düşünülebilir.

Teorem 3.1.1. *f çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonu,* $s > s_o$ *için mutlak yakınsak olsun. Bu durumda* $s > s_o$ *ve her p asalı için*;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)$$

olup, sonsuz çarpım mutlak yakınsaktır (McCarthy 1986).

İspat. *m* pozitif bir tamsayı ve p_1, p_2, …, p_t de *m* sayısını geçmeyen asal sayılar olsun. *f* fonksiyonunun çarpanlanabilir ve ona karşılık gelen Dirichlet serisinin $s > s_o$ için mutlak yakınsak olduğu varsayımı göz önüne alınarak;

$$\prod_{p \le m} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right) = \sum_{j_1, \ldots, j_t = 0}^{\infty} \frac{f(p_1^{j_1}) \ldots f(p_t^{j_t})}{(p_1^{j_1} \ldots p_t^{j_t})^s}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p \le m} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right) \right| \le \sum_{n \ge m} \frac{|f(n)|}{n^s}$$

elde edilir ve $s > s_o$ için;

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n \ge m} \frac{|f(n)|}{n^s} = 0$$

bulunur. Böylece, sonsuz çarpım Dirichlet serisinin değerine yakınsar. Sonsuz çarpımın mutlak yakınsaklığı için

$$\sum_{p\le m}\left|\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right|$$

$$\le\sum_{p\le m}\left(\frac{|f(p)|}{p^s}+\frac{|f(p^2)|}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

$$\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^s}$$

eşitsizlikleri incelenir. Son seri $s > s_o$ için yakınsak olduğundan, serinin negatif olmayan terimlerinin kısmi toplamlarından oluşan

$$\sum_{p}\left|\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right|$$

ifadesi sınırlı ve bu nedenle serinin yakınsak olduğu ortaya çıkar. Buradan sonsuz çarpımın $s > s_o$ için mutlak yakınsak olduğu sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.1.2. *f fonksiyonu tam çarpanlanabilir aritmetik bir fonksiyon olsun. Bu durumda bu fonksiyona ait Euler çarpımı*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-f(p)p^{-s}}$$

eşitliğini sağlar (McCarthy 1986).

İspat. Tam çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyonun $f\left(p^{\alpha}\right)=f\left(p\right)^{\alpha}$ eşitliğini sağladığını biliyoruz. Buradan geometrik seri tanımı yardımı ile sonuca kolaylıkla ulaşılır.

Örnek 3.1.1. Yukarıdaki teoremde; tam çarpanlanabilir aritmetik fonksiyon yerine Dirichlet karakteri kullanılırsa, s >1 için;

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca eğer, $\chi = \chi_1$ alınırsa bir başka deyişle *mod k* da esas karakter seçilirse, bu durumda $p \mid k$ ise $\chi_1(p) = 0$, $p \nmid k$ ise $\chi_1(p) = 1$ yazılacaktır. Burada $L(s, \chi_1)$ için;

$$L(s,\chi_1) = \prod_{p\mid k} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\mid k} 1-p^{-s} = \zeta(s) \prod_{p\mid k} 1-p^{-s}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $L(s, \chi_1)$ fonksiyonunun, $\zeta(s)$ nin sonlu sayıdaki terimle çarpımına eşit olduğu görülür (Apostol 1998).

Sonuç 3.1.1. *f çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon, r ise pozitif bir tamsayı olsun. $s > s_o$ için*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\mid r} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots \right)$$

dir (McCarthy 1986).

Örnek 3.1.2. $s > 1$ için;

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\ tek}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p>2} \frac{1}{1-p^{-s}} = \left(1-2^{-s}\right)\zeta(s)$$

elde edilir. Yukarıdaki fonksiyon Lambda fonksiyonu olarak da bilinmektedir (Cerone ve Dragomir 2009).

Bazen Dirichlet serilerinin alterne olanları ile de karşılaşmak mümkündür. Bunlardan en yaygın olanı aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $s > 1$ olmak üzere,

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara *eta fonksiyonu* denir (Cerone ve Dragomir, 2009).

Teorem 3.1.3. $s > 1$ *için eta fonksiyonuna ait üreteç fonksiyon*

$$\eta(s) = \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

eşitliği ile bulunur (Apostol 1998).

İspat. $\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$ açılımını incelersek,

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}$$

$$=\left(1+2^{-s}++3^{-s}+\ldots\right)-2\left(2^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+\ldots\right)$$

$$=1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+5^{-s}-6^{-s}+\ldots$$

elde edilir ve bu açılım tanımdaki eta fonksiyonunun açılımıdır ve bu seri $s>1$ için mutlak yakınsaktır.

Bazı durumlarda f fonksiyonunun çarpanlanabilir olmasına gerek duyulmadan da üreteç fonksiyonu dolaylı olarak elde edilebilir. Bir sonraki örnek, bu durumu açıklamada bize yardımcı olabilir. Fakat örnekten önce bazı ön hazırlıklarda bulunmamız gerekiyor. Öncelikle Tanım 2.11 de açıklanan Jordan fonksiyonun genelleştirilebileceğini görelim.

Tanım 3.1.2. s reel sayı olmak üzere ϕ_s fonksiyonu;

$$\phi_s(r)=\sum_{d|r}d^s\mu(r/d)$$

şeklinde tanımlanmıştır (McCarthy 1986).

Bu tanıma göre s pozitif tamsayı ise $\phi_s = J_s$ olduğunu 2. Bölümden biliyoruz. Böylece ϕ_s çarpanlanabilir bir fonksiyon olup;

$$\phi_s(r)=r^s\prod_{p|r}\left(1-p^{-s}\right)$$

şeklinde tanımlanabilir. r nin belli bir değeri için $\phi_s(r)$, s değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak düşünebilir.

Örnek 3.1.3. r tamkare olmayan bir tamsayı ve f fonksiyonu da tüm n ler için $f(n)=\mu(nr)$ şeklinde tanımlanan bir aritmetik fonksiyon olsun. Bu durumda f

fonksiyonunun çarpanlanabilir olmasının gerek ve yeter şartı f in çift sayıda asal bölenlerinin olmasıdır. $(n,r)\neq 1$ durumlarında $\mu(nr)=0$ olacağından

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(nr)}{n^s}=\mu(r)\sum_{\substack{n=1\\(n,r)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(s)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)\\&=\left(\prod_{p\mid r}\left(1-p^{-s}\right)\right)\left(\prod_{p\nmid r}\left(1-p^{-s}\right)\right)\\&=\frac{\phi_s(r)}{r^s}\sum_{\substack{n=1\\(n,r)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $s>1$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(nr)}{n^s}=\frac{\mu(r)r^s}{\phi_s(r)\zeta(s)}$$

özelliğine ulaşılır (McCarthy 1986).

Önerme 3.1.1. *h, k pozitif tamsayılar olmak üzere*;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_h(n)\sigma_k(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-h)\zeta(s-k)\zeta(s-h-k)}{\zeta(2s-h-k)}$$

dir (McCarthy 1986).

İspat. $s>h+k+1$ olsun. σ_h, σ_k aritmetik fonksiyonları çarpanlanabilir olduğundan bu fonksiyonların çarpımı da çarpanlanabilir fonksiyon olur. Böylece Tanım 2.13 kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_h\left(p^m\right)\sigma_k\left(p^m\right)}{p^{ms}}&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}}\frac{p^{(m+1)h}-1}{p^h-1}\frac{p^{(m+1)k}-1}{p^k-1}\\&=\frac{1}{\left(p^h-1\right)\left(p^k-1\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{p^{h+k}}{p^{m(s-h-k)}}-\frac{p^h}{p^{m(s-h)}}-\frac{p^k}{p^{m(s-k)}}+\frac{1}{p^{ms}}\right)\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Geometrik seri yardımı ile;

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma_h\left(p^m\right)\sigma_k\left(p^m\right)}{p^{ms}}=\frac{1}{\left(p^h-1\right)\left(p^k-1\right)}\left(\frac{p^{h+k}}{1-p^{h+k-s}}-\frac{p^h}{1-p^{h-s}}-\frac{p^k}{1-p^{k-s}}+\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

elde edilir. Son ifade ortak payda altında yazılırsa, pay kısmında $\left(p^h-1\right)\left(p^k-1\right)\left(1-p^{h+k-2s}\right)$ elde edilir. Böylece toplamın sonucu;

$$\frac{1-p^{h+k-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)\left(1-p^{h-s}\right)\left(1-p^{k-s}\right)\left(1-p^{h+k-s}\right)}$$

olarak bulunur. Sonuçta;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_h(n)\sigma_k(n)}{n^s}=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-(s-h)}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-(s-k)}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-(s-h-k)}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-(2s-h-k)}}\right)^{-1}$$

elde edilir ki, bu da önermedeki ifadenin sağ tarafıdır.

Örneklerden de anlaşılacağı üzere Teorem 3.1.1 yardımı ile birçok aritmetik fonksiyonun üreteç fonksiyonu elde edilebilmektedir. Önerme 3.1 ve Teorem 3.4 yardımı ile de bu fonksiyonlara ait birçok özellik elde edilebilmektedir.

Örneğin, h ve k negatif olmayan sayılar olsun. $\sigma_k=\zeta_0*\zeta_k$ olduğundan, $s>max\left(h+1,k+1\right)$ için;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\zeta_h*\sigma_k\right)(n)}{n^s}&=\zeta\left(s-h\right)\zeta\left(s\right)\zeta\left(s-k\right)\\&=\zeta\left(s-k\right)\zeta\left(s\right)\zeta\left(s-h\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\zeta_k*\sigma_h\right)(n)}{n^s}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\sum_{d|n}d^h\sigma_k\left(n/d\right)=\sum_{d|n}d^k\sigma_h\left(n/d\right)$$

özelliği bulunur (McCarthy 1986).

Yukarıdaki örnek bize Dirichlet serilerinin, aritmetik fonksiyonlara ait çeşitli özellikleri bulma konusunda yardımcı olduğunu göstermektedir.

3.2. $\zeta(s)$ ile İlgili Çeşitli Dirichlet Serileri

Teorem 3.2.1. *τ fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi $s > 1$ için,*

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

eşitliği ile verilir (Titchmarsh 1951).

İspat. Tanım gereği

$$\zeta^2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{km=n} 1$$

elde edilir. En son toplamdaki terimlerin sayısı, n sayısının bölenlerinin sayısını vereceğinden sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.2. *d_k fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi, $s > 1$ ile k=2,3,... için*;

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}$$

eşitliği ile verilir (Titchmarsh 1951).

İspat. Tanım gereği

$$\zeta^k(s) = \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_1^s} \cdots \sum_{\nu_k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_k = n} 1$$

olur ve son toplamda d_k fonksiyonunun tanımını verir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Yukarıdaki teorem özgün çalışmalarımızın yer aldığı 4. Bölümde yeniden ele alınarak $d_k(n)$ için ayrıntılı bir formül elde edilmiştir.

Teorem 3.2.3. *$s > 1$ için,*

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s}$$

dir (Titchmarsh 1951).

İspat. $\dfrac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$ açılımını incelersek,

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)^3} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{\left(1-p^{-s}\right)^2}$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left\{1+3p^{-s}+\ldots+\left(2m+1\right)p^{-ms}+\ldots\right\}$$

olup $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ için $\tau\left(n^2\right) = \left(2m_1+1\right)\ldots\left(2m_r+1\right)$ olduğundan sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 3.2.4. τ^2 *fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi* $s > 1$ *için*;

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\tau(n)\right\}^2}{n^s}$$

eşitliği ile verilir (Titchmarsh 1951).

İspat. $\dfrac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$ açılımını incelersek,

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)^4} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{\left(1-p^{-s}\right)^3}$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left\{1+3p^{s}+\ldots+\frac{1}{2}\left(m+1\right)\left(m+2\right)p^{-ms}+\ldots\right\}$$

$$= \prod_p \left\{1+4p^{-s}+\ldots+\left(m+1\right)^2 p^{-ms}+\ldots\right\}$$

olarak bulunur. Ayrıca $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ için $\tau^2(n) = \left(m_1+1\right)^2\ldots\left(m_r+1\right)^2$ olduğundan sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.5. $2^{\nu(n)}$ *fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi* $s > 1$ *için*;

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

eşitliği ile verilir (Titchmarsh 1951).

İspat. Verilen Dirichlet serisinin açılımını yaparsak,

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)^2} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left(1+2p^{-s}+2p^{-2s}+\ldots\right)$$

elde edilir ki, bu açılım da teoremde ifade edilen aritmetik fonksiyona aittir.

Teorem 3.2.6. λ *fonksiyonuna karşılık gelen Dirichlet serisi* $s > 1$ *için*;

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

eşitliği ile verilir (Titchmarsh 1951).

İspat. $\zeta(2s)$ ve $\zeta(s)$ açılımlarını teoremde belirtilen yerlere yazarsak,

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{-2s}} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}$$

$$= \prod_p \left(1-p^{-s}+p^{-2s}-p^{-3s}+\ldots\right)$$

elde edilir. Böylece $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ için $\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}$ olduğundan sonuca kolaylıkla ulaşılır.

Kısım 3.1 de φ fonksiyonuna ait Dirichlet serisini $\varphi = \zeta_1 * \mu$ eşitliği ve Teorem 3.4 yardımı ile bulmuştuk. Şimdi ise daha farklı bir yöntem kullanarak aynı sonuca ulaşacağız.

Teorem 3.2.7. $s > 2$ *için*;

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}$$

dir (Titchmarsh 1951).

İspat. Euler çarpımı yardımı ile $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ ifadesini asalların çarpımı üzerinden yazacak olursak,

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}&=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{1-s}+p^{2-2s}+p^{3-3s}+\ldots\right)\\&=\prod_p\left(1+p^{1-s}-p^{-s}+p^{2-2s}-p^{1-2s}+\ldots\right)\\&=\prod_p\left\{1+(p-1)p^{-s}+\left(p^2-p\right)p^{-2s}+\ldots\right\}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\varphi\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$ olduğundan, p^{-ms} nin katsayıları sonuçta φ fonksiyonunu verir.

Teorem 3.2.8. *$s>2$ için ve $a(n)=$ "n sayısının en büyük tek böleni" olmak üzere*;

$$\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

dir (Titchmarsh 1951).

İspat. $\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1)$ açılımını incelersek,

$$\begin{aligned}\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1)&=\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\prod_p\frac{1}{1-p^{1-s}}\\&=\frac{1}{1-2^{-s}}\frac{1}{1-3^{1-s}}\frac{1}{1-5^{1-s}}\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{3}{3^s}+\frac{3^2}{3^{2s}}+\cdots\right)\cdots\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki terimlerin çarpımı ise bize herhangi bir sayının tek bölenlerinin çarpımını vermektedir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4. BAZI YENİ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde tezimizin amacına uygun olarak çeşitli üreteç fonksiyonlar üzerinde çalışılarak yeni aritmetik fonksiyonlar bulunmuştur. Bazı durumlarda ise tersine yeni aritmetik fonksiyonlar tanımlanarak bu fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonlar elde edilmeye çalışılmıştır. Aritmetik fonksiyonlarla ilgili çeşitli konularda, örneğin ters bulma, konvülüsyon elde etme gibi konularda Dirichlet serilerinden faydalanılabileceği vurgulanmıştır. Ayrıca Dirichlet serisi ve türevi arasında basit ve anlamlı bir ilişki elde edilmiştir.

Öncelikle Riemann zeta fonksiyonuna bağlı olarak $\zeta^{(p)}$ fonksiyonları tanımlanmıştır. İki yeni aritmetik fonksiyon tanımlayarak bu fonksiyonlara ait Dirichlet seri açılımları $\zeta^{(p)}$ cinsinden bulunmuştur. Bu aritmetik fonksiyonlardan birinin çarpanlanabilir olmaması yaptığımız işin önemini göstermektedir. Çünkü 3. Bölümde Dirichlet serileri ilgili tüm teorilerin çarpanlanabilir fonksiyonlar üzerine kurulduğunu gördük.

Daha sonra $\zeta^k(s)$, $\zeta(s)\zeta(ks)$ gibi ifadelere karşılık gelen aritmetik fonksiyonlar dizisi elde edilmiştir. Burada diğer durumlardan farklı olarak her bir k tamsayısı için üreteç fonksiyonların yeni bir aritmetik fonksiyon oluşturmasıdır. Özel olarak $\zeta^k(s)$ üreteçleri sayesinde d_k fonksiyonları için özel bir açılım elde edilmiştir. Ayrıca yeni $\zeta_{(k-1)}$ fonksiyonları tanımlanarak bu fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonların $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$ olduğu ispat edilmiştir. Bunun yanında $\zeta_{(k)}$ fonksiyonlarının tanımının zeta fonksiyonuna olan benzerliği dikkat çekmektedir. Özel olarak, $\zeta_{(1)}$ fonksiyonunun $|\mu|$ fonksiyonuna eşit olduğu gözlenmiştir.

Bunların yanında daha önce klasik yöntemlerle de bulunmuş olan φ ve λ aritmetik fonksiyonlarının Dirichlet konvülüsyonuna göre terslerinin üreteç fonksiyonlar yardımı ile daha kolay bir şekilde bulunduğu gözlenmiştir. Bunlara ek olarak daha önce bilinmeyen $\tau(n)$, $\tau(n^2)$ ifadelerinin Dirichlet tersleri de ilgili aritmetik fonksiyonların üreteçleri sayesinde tanımlanmıştır. Ön Bilgiler bölümünde tanımlanan Ω fonksiyonun Dirichlet tersi bulunarak bu fonksiyonun tersinin

Liouville fonksiyonu ile ilişkili olduğu gözlenmiştir. Böylece Diriclet serilerinin aritmetik fonksiyonlarla ilgili yeni bağıntılar elde etme konusunda yardımcı olabileceği gözlenmiştir.

Yeni tanımladığımız ω aritmetik fonksiyonunun, genelleştirilmiş Möbius fonksiyonlarından μ_2 fonksiyonunun tersi olduğu Dirichlet serileri yardımı ile bulunarak bu sonuç ω_k ve μ_k fonksiyonları için genelleştirilmiştir.

Ayrıca $\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}$, $\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}$, üreteçleri incelenerek bu fonksiyonların ürettiği aritmetik fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunların yanısıra $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}$, $\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(s)}$ tarafından üretilen aritmetik fonksiyonlar bulunarak bunların Dirichlet tersleri de elde edilmiştir.

Son olarak belirli bir yarı düzlemde mutlak yakınsak olan Dirichlet serisi ve bu Dirichlet serisinin türevi arasında özel bir bağıntı elde edilmiştir.

Tanım 4.1. p asal sayı olmak üzere $\zeta^{(p)}$ fonksiyonu $s>1$ için;

$$\zeta^{(p)}(s)=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıdaki tanımdan herhangi bir asal ve belirli bir s değeri için bu fonksiyonun değerini hesaplayabileceğimiz ortadadır.

Sonuç 4.1. *$s > 1$ olmak üzere;*

$$\zeta(s)=\prod_p \zeta^{(p)}(s)$$

dir.

İspat. $s>1$ olmak üzere $\zeta^{(p)}$ için;

$$\zeta^{(p)}(s)=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{p^s} + \left(\frac{1}{p^s}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

ifadeleri yazılabilir. Böylece, Euler çarpımını kullanarak $s > 1$ olmak üzere bilinen Riemann zeta fonksiyonu için,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_p \zeta^{(p)}(s)$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki sonuçla biz Riemann zeta fonksiyonunu her bir asal için parçalara bölerek farklı şekillerde kullanma şansını elde etmiş olduk. Bu gösterim bize aşağıda yeni tanımladığımız aritmetik fonksiyonlara karşılık gelen Dirichlet serilerini elde etme konusunda yardımcı olacaktır.

Tanım 4.2. $r(1) = 1$, $r\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}\right) = p_1 p_2 \dots p_m$ şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyona *asal çarpım fonksiyonu* denir.

Bu yeni tanımladığımız asal çarpım fonksiyonun Dirichlet serisini yeni tanımladığımız $\zeta^{(p)}$ fonksiyonundan yararlanarak bulacağımızı aşağıdaki teoremle göstereceğiz.

Teorem 4.1. $s > 2$ *için*;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s} \zeta^{(p)}(s)\right) = \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s - 1}\right)$$

dir.

İspat. r çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon olduğundan Euler çarpımını kullanabiliriz. Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{r(p)}{p^s}+\frac{r(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

$$=\prod_p\left\{1+\frac{p}{p^s}\left(1+\frac{1}{p^s}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}\zeta^{(p)}(s)\right)$$

elde edilir. Ya da geometrik seri yardımı ile;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}\frac{p^s}{p^s-1}\right)$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s-1}\right)$$

şeklinde de ifade edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Yukarıdaki teoremle yeni bir aritmetik fonksiyon üretilerek bu fonksiyona ait üreteç fonksiyon yeni tanımladığımız $\zeta^{(p)}$ kullanılarak bulunmuştur.

Tanım 4.3. $n\geq 1$ için h aritmetik fonksiyonu;

$$h(n)=\begin{cases}p, & n=p^{\alpha}\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

h fonksiyonu çarpanlanabilir bir fonksiyon değildir. Fakat buna rağmen biz aşağıdaki teoremle bu fonksiyona ait Dirichlet serisi açılımı elde edeceğiz.

Teorem 4.2. $s>2$ *için*;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}=\sum_{p}\frac{p}{p^s}\zeta^{(p)}(s)=\sum_{p}\frac{p}{p^s-1}$$

dir.

İspat. Tanımdan $n\neq p^{\alpha}$ ise $h(n)=0$ olduğu açık olup,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}&=\sum_{p}\sum_{m\in N^{+}}\frac{p}{p^{ms}}\\&=\sum_{p}\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\frac{p}{p^{3s}}+\cdots\\&=\sum_{p}\frac{p}{p^s}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\sum_{p}\frac{p}{p^s}\zeta^{(p)}(s)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitlik Tanım 4.1 de ortaya attığımız $\zeta^{(p)}$ fonksiyonu kullanılarak düzenlenmiştir. Aynı eşitlik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}=\sum_{p}\frac{p}{p^s}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)=\sum_{p}\frac{p}{p^s}\frac{p^s}{p^s-1}=\sum_{p}\frac{p}{p^s-1}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde literatürde genellikle çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonların üreteç fonksiyonları üzerinde çalışıldığını gözlemledik. Fakat yukarıdaki teoremle biz çarpanlanabilir olmayan bir aritmetik fonksiyon için de Dirichlet serisi elde ettik.

Aşağıdaki teoremlerle $\zeta^{k}(s)$ tarafından üretilen aritmetik fonksiyonlar dizisi elde edilmiştir. Bu fonksiyonların literatürdeki özel ismi d_k fonksiyonlarıdır. $k=2$ için sonuç bilindiğinden ilk olarak $k=3$ için sonucu bulacağız.

Teorem 4.3. $n=\prod p^{\alpha}$ *ve* $s>1$ *için* $\zeta^{3}(s)$*;*

$$f\left(\prod p^{\alpha}\right)=\prod\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2!}$$

çarpanlanabilir fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.

İspat. $\zeta^{3}(s)$ için Euler çarpımını kullanacak olursak

$$\zeta^{3}(s)=\zeta^{2}(s)\zeta(s)=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)^{2}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$=\prod_{p}\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)^{2}\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_{p}\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+\ldots\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_{p}(1+3p^{-s}+6p^{-2s}+10p^{-3s}+15p^{-4s}+\ldots)$$

$$=\prod_{p}\{1+3p^{-s}+\ldots+\frac{(m+1)(m+2)}{2!}p^{-ms}+\ldots\}$$

ifadesi elde edilir. Asallara karşılık gelen katsayıların çarpanlanabilir fonksiyon oluşturacağını Euler çarpımından biliyoruz böylece teoremin iddasını elde ederiz.

Teorem 4.4. $n=\prod p^{\alpha}$ *ve* $s>1$ *için* $\zeta^{4}(s)$*;*

$$f\left(\prod p^{\alpha}\right)=\prod\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{3!}$$

çarpanlanabilir fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.

İspat. Teoremin ispatı için $\zeta^{4}(s)$ açılımını incelemek gerekmektedir. Bu durumda

$$\zeta^{4}(s)=\zeta^{2}(s)\zeta^{2}(s)=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)^{2}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)^{2}$$

$$=\prod_{p}\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)^{2}\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)^{2}$$

$$=\prod_{p}\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+\ldots\right)\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p (1 + 4p^{-s} + 10p^{-2s} + 20p^{-3s} + 35p^{-4s} + ...)$$

$$= \prod_p \{1 + 4p^{-s} + ... + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3!} p^{-ms} + ...\}$$

elde edilir. Son açılımdaki katsayılar teoremde iddia edilen fonksiyonu verir.

Yukarıdaki ilginç sonuçları herhangi bir k pozitif tamsayısı için de genelleyebileceğimizi rahatlıkla söyleyebiliriz. Bu nedenle aşağıdaki teorem ispata gerek duyulmadan verilmiştir.

Teorem 4.5. *k pozitif tamsayı, $n = \prod p^{\alpha}$ ve $s > 1$ olmak üzere $\zeta^{k+1}(s)$;*

$$f\left(\prod p^{\alpha}\right) = \prod \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+k)}{k!}$$

çarpanlanabilir fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.

Böylece d_k fonksiyonlarının açılımlarını elde etmiş olduk. Şimdi de k pozitif bir tamsayı olmak üzere $\zeta(s)\zeta(ks)$ çarpımının üreteceği aritmetik fonksiyonları tanımlamaya çalışacağız.

Teorem 4.6. *$s > 1$ olmak şartıyla $f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right) = \prod \left(\left[\!\left[\frac{\alpha_i}{2} \right]\!\right] + 1 \right)$ fonksiyonuna ait üreteç fonksiyon $\zeta(s)\zeta(2s)$ dir.*

İspat. $\zeta(s)\zeta(2s)$ açılımı incelenirse

$$\zeta(s)\zeta(2s) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-2s}}\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ...\right)\left(1 + p^{-2s} + p^{-4s} + ...\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + p^{-s} + 2p^{-2s} + 2p^{-3s} + 3p^{-4s} + 3p^{-5s} + ...\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+2p^{-2s}+2p^{-3s}+\ldots+\left(\left[\!\left[\frac{m}{2}\right]\!\right]+1\right)p^{-ms}+\ldots\right)$$

elde edilir. Asallara ait katsayıların ise iddia edilen aritmetik fonksiyonu vereceği açıktır.

Teorem 4.7. *$s>1$ olmak şartıyla $f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod\left(\left[\!\left[\frac{\alpha_i}{3}\right]\!\right]+1\right)$ fonksiyonuna ait üreteç fonksiyon $\zeta(s)\zeta(3s)$ dir.*

İspat. $\zeta(s)\zeta(3s)$ açılımını incelersek,

$$\zeta(s)\zeta(3s)=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-3s}}\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots\right)\left(1+p^{-3s}+p^{-6s}+p^{-9s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+2p^{-3s}+2p^{-4s}+2p^{-5s}+3p^{-6s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+2p^{-3s}+2p^{-4s}+2p^{-5s}+3p^{-6s}+\ldots+\left(\left[\!\left[\frac{m}{3}\right]\!\right]+1\right)p^{-ms}+\ldots\right)$$

olup, böylece istenen sonucu elde ederiz.

Yukarıdaki sonuçları genelleştirmek mümkündür. Aşağıdaki teorem yukarıda ispatlanan iki teoremin genelleştirilmiş halidir.

Teorem 4.8. *$s>1$ için k pozitif bir tamsayı olmak üzere $\zeta(s)\zeta(ks)$ $f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod\left(\left[\!\left[\frac{\alpha_i}{k}\right]\!\right]+1\right)$ şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyona ait üreteç fonksiyondur.*

Aşağıda zeta fonksiyonuna benzeyen bir aritmetik fonksiyon tanımlanarak bu fonksiyonla ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.4. $\zeta_{(k)}$ çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonu; α , k pozitif tamsayılar olmak üzere herhangi bir p asalı için $\zeta_{(k)}(1)=1$ ve

$$\zeta_{(k)}\left(p^{\alpha}\right)=\begin{cases}1, & \alpha \le k\\ 0, & \alpha > k\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 4.9. *k,* 1 *sayısından büyük bir tamsayı olmak üzere* $s>1$ *için* $\zeta_{(k-1)}$ *fonksiyonunun üreteç fonksiyonu* $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$ *dir.*

İspat. $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$ açılımını incelersek

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}=\prod_p \frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}=\prod_p \frac{\left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots+p^{-(k-1)s}\right)}{1-p^{-s}}$$

$$=\prod_p \left(1+p^{-s}+p^{-2s}+\ldots+p^{-(k-1)s}\right)$$

elde edilir, ki da bize $\zeta_{(k-1)}$ fonksiyonunun açılımını vermektedir.

Sonuç 4.2. *Bütün n pozitif tamsayıları için* $\zeta_{(1)}(n)=\left|\mu(n)\right|$ *eşitliği geçerlidir.*

İspat. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\mu(n)\right|}{n^{s}}=\prod_p (1+p^{-s})$ olduğunu üçüncü bölümde göstermiştik. Ayrıca yukarıdaki Teorem 4.9 u kullanarak $\zeta_{(1)}$ için üreteç fonksiyonu bulursak, her ikisine de karşılık gelen Dirichlet serilerinin aynı olduğunu görebiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki Teorem ve farklı bir ispatı Giriş bölümünde (Teorem 2.12) yer almaktadır. Bu bölümde aynı teoremi üreteç fonksiyonlar yardımı ile daha kolay ispatlanabileceğini göstereceğiz.

Teorem 4.10. $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ *olmak üzere*

$$\varphi^{-1}(n)=\prod_{i=1}^{r}(1-p_i)$$

eşitliği ile bulunur (Apostol 1998).

İspat. $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}$ olduğunu Teorem 3.2.7 den biliyoruz. Buradan Sonuç 3.1 yardımı ile $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}$ ifadesini düzenlersek;

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}&=\prod_p\frac{1-p^{1-s}}{1-p^{-s}}=\prod_p\left(1-p^{1-s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots\right)\\&=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots-p^{1-s}-p^{1-2s}-p^{1-3s}-p^{1-4s}+\ldots\right)\\&=\prod_p\left\{1+(1-p)p^{-s}+(1-p)p^{-2s}+(1-p)p^{-3s}+\ldots\right\}\end{aligned}$$

olup $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}$ üreteç fonksiyonu φ^{-1} aritmetik fonksiyonunu üreteceğinden $\varphi^{-1}(p_i)=(1-p_i)$ elde edilir. Ayrıca φ^{-1} fonksiyonu çarpanlanabilir olduğundan teoremin iddasına ulaşılır.

Yine sayılar teorisi derslerinden bildiğimiz aşağıdaki teoremi biz yine tezimizde belirtilen orijinal metod yardımı ile ispatlayacağız.

Teorem 4.11. λ *fonksiyonunun Dirichlet tersi* μ *fonksiyonun mutlak değerine eşittir. Bir başka ifadeyle her pozitif n tamsayısı için* $\lambda^{-1}(n)=\left|\mu(n)\right|$ *eşitliği geçerlidir* (Apostol 1998).

İspat. $\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$ olduğunu Teorem 3.2.6 dan biliyoruz. λ^{-1} fonksiyonunu

bulmak için Sonuç 3.1 kullanılarak $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ ifadesini düzenlenmesi yeterli olacaktır.

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1+p^{-s}\right)$$

olur. Elde ettiğimiz sonuç $\frac{1}{\zeta(s)}$ formülü ile bütün işaretlerin pozitif olması dışında aynıdır ve bu sorunu da görüntülerin mutlak değerlerini alarak giderebiliriz. Böylece $|\mu|$ fonksiyonuna ait Dirichlet serisi ile λ^{-1} aritmetik fonksiyonuna ait Dirichlet serisinin eşit olduğu sonucuna ulaşırız. Önerme 3.1 i kullanarak ispatı tamamlarız.

Daha önce Kısım 3.2 de $\zeta^2(s)$ fonksiyonunun τ fonksiyonun üreteç fonksiyonu olduğunu ifade etmiştik. Şimdi yine üreteç fonksiyonları kullanarak $\tau(n), \tau(n^2)$ ve sonra $2^{\nu(n)}$ görüntülerinin terslerini sırasıyla bulacağız.

Teorem 4.12. *τ fonksiyonunun Dirichlet tersi çarpanlanabilir bir fonksiyon olup*

$$\tau^{-1}(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ veya } 2 \\ -2, & \alpha = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Çarpanlanabilir bir fonksiyonun tersinin de çarpanlanabilir olduğunu biliyoruz. Böylece Sonuç 3.1 gereği sadece $\frac{1}{\zeta^2(s)}$ açılımını incelememiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta^2(s)} &= \prod_p \left(1-p^{-s}\right)\left(1-p^{-s}\right) \\ &= \prod_p \left(1-2p^{-s}+p^{-2s}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kuvvetleri 3 veya daha büyük asalların bu fonksiyonda sıfır değerini aldığını, eğer asalın kuvveti 1 ise -2 değerini aldığını rahatlıkla görebiliriz. Böylece τ^{-1} fonksiyonun belirtilen şartları sağladığını ispatladık.

Teorem 4.13. $\tau\left(n^2\right)$ *ifadesinin Dirichlet tersi*

$$f\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)=\prod a_i \text{ olup burada } a_i=\begin{cases}-3, & \alpha_i \text{ tek ise}\\ 4, & \alpha_i \text{ çift ise}\end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Sonuç 3.1 i kullanarak $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta^3(s)}$ açılımını incelememiz gerekmektedir. Böylece

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta^3(s)}=\prod_p \frac{\left(1-p^{-s}\right)^3}{1-p^{-2s}}=\prod_P \frac{\left(1-p^{-s}\right)^2}{\left(1+p^{-s}\right)}$$

$$=\prod_p\left(1-2p^{-s}+p^{-2s}\right)\left(1-p^{-s}+p^{-2s}-p^{-3s}+p^{-4s}-p^{-5s}+p^{-6s}-\ldots\right)$$

$$=\prod_p\left(1-3p^{-s}+4p^{-2s}-3p^{-3s}+4p^{-4s}+\ldots\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeden bu aritmetik fonksiyonun tek katlı kuvvetlerde -3, çift katlı kuvvetlerde ise 4 değerini aldığını görürüz. Bu da bize teoremin iddiasını vermektedir.

Şimdi de daha önce Ön Bilgiler Bölümünde tanımını vermiş olduğumuz Ω aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersini yine üreteç fonksiyonlar yardımı ile bulacağız.

Teorem 4.14. *n pozitif bir tamsayı olmak üzere* Ω *aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersi*

$$\Omega^{-1}(n)=\lambda(n)\Omega(n)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Sonuç 3.1 den faydalanarak $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}$ açılımını incelemek yeterli olacaktır.

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}=\prod_p \frac{\left(1-p^{-s}\right)^2}{1-p^{-2s}}=\prod_P \frac{\left(1-p^{-s}\right)}{\left(1+p^{-s}\right)}$$

$$= \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)\left(1 - p^{-s} + p^{-2s} - p^{-3s} + p^{-4s} - p^{-5s} + \ldots\right)$$

$$= \prod_p \left(1 - 2p^{-s} + 2p^{-2s} - 2p^{-3s} + 2p^{-4s} + \ldots\right)$$

olur. Bu durumda $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}$ için

$$\Omega^{-1}(n) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_t}\, 2^{\nu(n)}$$

$$= \lambda(n)\Omega(n)$$

elde edilir. Bu da teoremin iddasını vermektedir.

Bu teoremle birlikte Ω fonksiyonun Dirichlet tersinin Liouville fonksiyonu ile ilişkili olduğunu gösterdik. Böylece üreteç fonksiyonların aritmetik fonksiyonların özelliklerini ve aralarında bulunan ilişkilerin ortaya çıkarılmasına yardımcı olduğunu gördük.

Şimdi yeni bir aritmetik fonksiyon tanımlayarak bu fonksiyonun tersinin genelleştirilmiş Möbius fonksiyonlarından μ_2 fonksiyonuna eşit olduğunu göstereceğiz.

Tanım 4.5. *n, m* pozitif tamsayılar ve $\omega(1) = 1$ olmak üzere;

$$\omega(n) = \begin{cases} 1, & n = m^2 \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyona *tam kare fonksiyonu* denir.

Teorem 4.15. $\zeta(2s)$ *ifadesi, ω fonksiyonunun üreteç fonksiyonudur.*

İspat. $\zeta(2s)$ açılımını incelersek

$$\zeta(2s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}}$$

$$= \prod_p \left\{1 + p^{-2s} + p^{-4s} + \ldots\right\}$$

elde edilir. Bu açılımda yalnız tam kare ifadeler 1 değerini alacağından $\zeta(2s)$, ω fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.

Sonuç 4.3. *p_i farklı asalları göstermek üzere; ω aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersi*,

$$\omega^{-1}(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ (-1)^t, & n=p_1^{\,2}p_2^{\,2}\ldots p_t^{\,2}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklindedir. Bir başka deyişle ω^{-1} fonksiyonu μ_2 fonksiyonuna eşittir.

İspat. Sonuç 3.1 kullanılarak sadece $\dfrac{1}{\zeta(2s)}$ açılımını incelemek yeterli olacaktır. Böylece,

$$\frac{1}{\zeta(2s)}=\prod_p\left(1-p^{-2s}\right)$$

ifadesinden sonuç elde edilebilir.

Yukarıda elde ettiğimiz önemli sonucun genelleştirilebileceği açıktır işte bu sebeple aşağıdaki sonuç ispatsız şekilde verilmiştir.

Sonuç 4.4. *k pozitif tamsayı olmak üzere $\dfrac{1}{\zeta(ks)}$, μ_k fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.*

Tanım 4.6. k ve m pozitif tamsayılar olmak üzere ω fonksiyonunun genelleştirilmiş hali

$$\omega_k(n)=\begin{cases}1, & n=m^k\\ 0, & n\neq m^k\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıdaki tanımdan ω_1 fonksiyonunun zeta fonksiyonunu verdiğini görebiliriz.

Sonuç 4.5. *k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere* μ_k *fonksiyonlarının Dirichlet tersi* ω_k *fonksiyonlarıdır.*

Yukarıdaki sonuç daha önceki sayılar teorisi derslerinden bilinen " zeta fonksiyonunun tersi Möbius fonksiyonudur " ifadesi ile örtüşmektedir.

Aşağıdaki iki teoremde çeşitli aritmetik fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonları elde edilmiştir.

Teorem 4.16. $f\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_m^{\alpha_m}\right)=3^m\alpha_1\dots\alpha_m$ *aritmetik fonksiyonun üreteci* $\dfrac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}$ *dir.*

İspat. Bu fonksiyona karşı gelen açılım yazılırsa

$$=\prod_p\left(1+3p^{-s}+6p^{-2s}+9p^{-3s}+\dots+3mp^{-ms}+\dots\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}\right)\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+4p^{-3s}+\dots\right)$$

$$=\prod_p\left(1+p^{-s}+p^{-2s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+p^{-4s}+\dots\right)^2$$

$$=\prod_p\frac{\left(1+p^{-s}+p^{-2s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^2}$$

$$=\prod_p\frac{\left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^3}$$

$$=\prod_p\frac{1-p^{-3s}}{\left(1-p^{-s}\right)^3}$$

$$=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.17. $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ *olmak üzere* $\beta(n)=\prod_{i=1}^{r}\left(1-p_i^{\,2}\right)$ *şeklinde tanımlanan aritmetik fonksiyonun üreteci* $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}$ *dir.*

İspat. Bu fonksiyona karşılık gelen açılım incelenirse

$$=\prod_{p}\left\{1+\left(1-p^2\right)p^{-s}+\left(1-p^2\right)p^{-2s}+\ldots\right\}$$

$$=\prod_{p}\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots-p^{2-s}-p^{2-2s}-p^{2-3s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_{p}\left(1-p^{2-s}\right)\left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots\right)$$

$$=\prod_{p}\frac{1-p^{2-s}}{1-p^{-s}}$$

$$=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-2)}$$

ifadesi elde edilir ki, bu da istenendir.

Yukarıdaki teoremde aynı asal çarpanlara sahip sayılar için aynı değeri alan yeni bir aritmetik fonksiyon üzerinde çalıştık. Bu aritmetik fonksiyonun tersini bulmak için yine bu fonksiyona ait Dirichlet serisini kullanabiliriz.

Teorem 4.18. $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ *olmak üzere β aritmetik fonksiyonunun Dirichlet tersi;*

$$\beta^{-1}(n)=\prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{2\alpha_i}-p_i^{2\alpha_i-2}\right)$$

dir.

İspat. Burada daha önce olduğu gibi üreteç fonksiyonların çarpmaya göre terslerinden faydalanabiliriz. Sonuç 3.1 den;

$$\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{2-s}} = \prod_p \left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{2-s}+p^{4-2s}+p^{6-3s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left(1+p^{2-s}+p^{4-2s}+p^{6-3s}+p^{8-4s}+\ldots-p^{-s}-p^{2-2s}-p^{4-3s}-p^{6-4s}-\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left\{1+\left(p^2-1\right)p^{-s}+\left(p^4-p^2\right)p^{-2s}+\left(p^6-p^4\right)p^{-3s}+\ldots\right\}$$

ifadesi elde edilir. Burada katsayıların teoremde belirtilen fonksiyonu verdiği ortadadır

Teorem 4.18 ile β aritmetik fonksiyonunun tersinin β aritmetik fonksiyonu ile aynı özelliği göstermediğini gözlemledik. Yani bu fonksiyonun Dirichlet tersi aynı asallara sahip sayıları aynı değerlere götürmemektedir.

Şimdi de yeni üreteç fonksiyonlar ele alarak bu üreteçlerin hangi aritmetik fonksiyonları oluşturacağını araştıracağız.

Teorem 4.17. $s>1$ *için;*

$$\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \{1+5p^{-s}+14p^{-2s}+\ldots+\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)p^{-ms}+\ldots\}$$

dir.

İspat. $\dfrac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}$ açılımını incelersek,

$$\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{\left(1-p^{-s}\right)^5} = \prod_p \frac{\left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^5} = \prod_p \frac{\left(1+p^{-s}\right)}{\left(1-p^{-s}\right)^4}$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left\{\left(1-p^{-s}\right)^{-2}\right\}^2$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+\ldots+(m+1)p^{-ms}+\ldots\right)^2$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left(1+4p^{-s}+10p^{-2s}+20p^{-3s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}\right)\left(1+4p^{-s}+10p^{-2s}+\ldots+\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)\,p^{-ms}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \{1+5p^{-s}+14p^{-2s}+\ldots+\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)\,p^{-ms}+\ldots\}$$

elde edilir, ki bu da teoremin ispatını verir.

Teorem 4.20. $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ *olmak üzere* $\dfrac{\zeta^2(2s)}{\zeta(s)}$;

$$g(n)=\prod_{i=1}^{r}(-1)^{\alpha_i}\left[\!\left[\frac{\alpha_i+2}{2}\right]\!\right],$$

fonksiyonuna ait üreteç fonksiyondur.

İspat. $\dfrac{\zeta^2(2s)}{\zeta(s)}$ açılımını incelersek

$$\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{\left(1-p^{-2s}\right)^2} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{\left(1-p^{-s}\right)^2\left(1+p^{-s}\right)^2} = \prod_p \frac{1}{\left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}\right)^2}$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots\right)\left(1-p^{-s}+p^{-2s}-p^{-3s}+p^{-4s}+\ldots\right)^2$$

$$= \prod_p \left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots\right)\left(1-2p^{-s}+3p^{-2s}-4p^{-3s}+\ldots\right)$$

$$= \prod_p \left(1-p^{-s}+2p^{-2s}-2p^{-3s}+3p^{-4s}-3p^{-5s}+\ldots\right)$$

elde edilir. Asallara ait katsayılar bize teoremde ifade edilen g aritmetik fonksiyonunu vermektedir.

Böylece sadece asal sayıların kuvvetlerine göre değerini görüntüleyebileceğimiz yeni bir aritmetik fonksiyon tanımladık. Ayrıca bu fonksiyona ait üreteç fonksiyonu bildiğimizden g aritmetik fonksiyonun Dirichlet tersini de rahatlıkla bulabiliriz.

Teorem 4.21. *$n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ olmak üzere, $g^{-1}(1)=1$ olup bu fonksiyonunun Dirichlet tersi;*

$$g^{-1}\left(p_i^{\alpha_i}\right)=\begin{cases}1, & \alpha_i=1\\ -1, & \alpha_i=2,3\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

dir.

İspat. g fonksiyonu çarpanlanabilir olduğundan tersi de çarpanlanabilirdir. Buradan $g^{-1}(1)=1$ olduğu ortaya çıkar. g fonksiyonunun tersini bulmak için $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta^2(2s)}$ açılımını incelememiz gerekmektedir.

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta^2(2s)}=\prod_p \frac{\left(1-p^{-2s}\right)^2}{\left(1-p^{-s}\right)}=\prod_p \left(1-p^{-s}\right)\left(1+p^{-s}\right)^2=\prod_p \left(1+p^{-s}-p^{-2s}-p^{-3s}\right)$$

ifadesi elde edilir. Asallara karşılık gelen katsayılar teoremde iddia edilen fonksiyonu oluşturur. Böylece teorem ispatlanır.

Aşağıdaki teoremle belirli değerler için mutlak yakınsaklık şartını sağlayan Dirichlet serileri ve bu serilerin türevleri arasında özel bir bağıntının varlığı tespit edilmiştir.

Teorem 4.22. *f aritmetik fonksiyonuna karşılık gelen $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(n)}{n^s}$, Dirichlet serisi, $s>\sigma$ için mutlak yakınsak olmak üzere*

$$F'(s)=-sF(s+1)$$

dir.

İspat. 3. Bölümden herhangi bir Dirichlet serisi $s>\sigma$ için mutlak yakınsak ise bu serinin aynı yarı düzlemde düzgün yakınsak olduğunu biliyoruz. Ayrıca herhangi bir $f(n)$ aritmetik fonksiyonunun türevinin $f(n)\log n$ olduğunu bilmekteyiz. Bu durumda,

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

Dirichlet serisinin her iki tarafının n değişkenine göre türevi alınırsa

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\log n\, n^s - f(n)sn^{s-1}}{n^{2s}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)sn^{s-1}}{n^{2s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\log n\, n^s}{n^{2s}}$$

$$s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^{s+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\log n}{n^s}$$

$$sF(s+1)=-F'(s)$$

bağıntısı elde edilir ki bu da bize teoremin ispatını verir.

Yukarıdaki teoremle $F'(s)$ ve $F(s+1)$ arasında önemli bir bağıntı elde ettik. Bu özel bağıntının bazı Dirichlet serilerinin değerini elde etme konusunda biz matematikçilere yardımcı olabileceği ortadadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamızda farklı Dirichlet serilerinin farklı aritmetik fonksiyonları ürettiğini gördük. $\zeta^{(p)}$ fonksiyonlarından yeni tanımladığımız h ve r aritmetik fonksiyonlarının Dirichlet serilerini elde etme konusunda yararlandık. $\zeta^{k}(s)$, $\zeta(s)\zeta(ks)$, $\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$, $\frac{1}{\zeta(ks)}$ gibi Riemann zeta fonksiyonunu içeren üreteç fonksiyonları kullanarak çeşitli aritmetik fonksiyon dizileri elde ettik. Yeni tanımladığımız ω_k fonksiyonlarının bilinen μ_k fonksiyonlarının tersi olduğunu Dirichlet serileri yardımı ile ispatladık. Ayrıca üreteç fonksiyonların özellikle çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyonun Dirichlet tersinin alınması konusunda matematikçilere yardımcı olacağını, işlerimizi kolaylaştırabileceğini tespit ettik. Üreteç fonksiyona karşılık gelen aritmetik fonksiyonu elde etmenin kolay, tersinin ise daha zor olduğunu gözlemledik. Bunların yanında mutlak yakınsaklık şartını sağlayan herhangi bir Dirichlet serisi ile bu serinin türevi arasında önemli bir bağıntı elde ettik.

Bundan sonraki çalışmalarda herhangi iki aritmetik fonksiyon arasında var olan ilişkilerin, bu fonksiyonlara ait üreteç fonksiyonlara yansıyıp yansımayacağı ya da nasıl yansıyacağı araştırma konusu olabilir. Bir başka deyişle, iki aritmetik fonksiyondan sadece birinin üreteç fonksiyonu biliniyorsa diğerinin üreteç fonksiyonunun bulunup bulunamayacağı merak konusudur. Benzer şekilde aritmetik fonksiyonlara karşılık gelen Dirichlet serilerinin yakınsaklık apsisleri arasında çeşitli ilişkilerin varlığı araştırılabilir. Ayrıca $\zeta^{(p)}$ ile ünlü Riemann zeta fonksiyonu arasında ve $\zeta_{(k)}$ ile zeta fonksiyonu arasında farklı ilişkilerin varlığı söz konusu olabilir. Literatürde zaten (1.3) eşitliği ve gerekli bazı şartları sağlayan herhangi bir Dirichlet serisinin Riemann zeta fonksiyonunun katı olduğu konusunda çalışmalar mevcuttur. Bu ve benzeri soruların cevapları ise bir başka araştırmanın konusu olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Apostol, T. M. 1973. Identities for Series Of The Type, Proceedings Of The American Mathematıcal Society, Volume 40, Number 2, 341-345.

[2] Apostol, T.M. 1989. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, 2nd ed. Springer-Verlag, Newyork.

[3] Apostol, T.M. 1998. Introduction to Analytic Number Theory, 5th ed. Springer-Verlag, Newyork.

[4] Balanzario, E.P. 2001. Evaluation of Dirichlet series, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 10, 969-971.

[5] Berndt, B.C. 1971. The Functional Equation of Some Dirichlet Series, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 29, No. 3, 457-460.

[6] Berndt, B.C. 1972. The Functional Equation of Some Dirichlet Series. II, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 31, No. 1, 24- 26.

[7] Brede, M. 2006. A summation formula for convergence acceleration of some Dirichlet and related series, Integral Transforms and Special Functions, vol.17, No.10, 703-709.

[8] Brent, R.P. 1979. On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip, Mathematics of Computation, Vol. 33, No. 148, 1361-1372.

[9] Broughan, K.A. 2007. The average order of the Dirichlet series of the gcd-sum function, University of Waikato, Hamilton, New Zealand.

[10] Brown, J.W., Churchill, R.W. 1996. Complex Variables and Aplications, 6th ed. McGaw- Hill International Editions.

[11] Cerone, P., Dragomir S.S. 2009. Some convexity properties of Dirichlet series with positive terms, Math. Nachr. 282**,** No. 7, 964-975.

[12] Choudhury, B.K. 1995. "The Riemann Zeta-Function and Its Derivatives" Mathematical and Physical Sciences, Vol. 450, No. 1940, 477-499.

[13] Conrey, J.B. 2003. Riemann Hypothesis, Notices of the AMS.

[14] Cvijović, D., Klinowski, J. 1997. New Rapidly Convergent Series Representations for ζ(2n + 1). Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 125, No. 5, 1263-1271.

[15] Davenport, H., Heillbronn, H. 1936. On the Zeros of Certain Dirichlet Series I-II, J. London Math. Soc.11,181-185, 307-312.

[16] Duke, W., İmamoğlu Ö. 2004. Lattice points in cones and Dirichlet series, International Mathematics Research Notices, 2823-2836.

[17] Glöckner H., Lucht L. G., Porubsky S. 2007. Solutions to arithmetic convolution equations, Proc. Amer. Math. Soc. 135, 1619-1629.

[18] Glöckner H., Lucht L. G., Porubsky S. 2009. General Dirichlet series, arithmetic convolution equations and Laplace transforms, Studia Math. 193, 109-129.

[19] Hafner, J.L. 1987. Zeros on the Critical Line for *L*-function , J. Reine Angew Math 377, 127-158.

[20] Hardy, G.H., Wright, E.M. 1975. An introduction to the theory of Numbers, Oxford at Clarendon Press.

[21] Ishikawa, H., Kamiya Y. 2008. Spectral sets of certain functions associated with Dirichlet series, J. Math. Anal. Appl., 347**,** 204-223.

[22] Jiang, C.X. 2004. Disproof of Riemann Hypothesis, Algebras, Groups and Geometries, Vol 21, 1-13.

[23] Kedlaya, K.S. 2006. Dirichlet series and arithmetic functions*,* Analytic Number Theory, 18.785, 1-5.

[24] Keiper, J.B. 1992. Power Series Expansions of Riemann's ζ Function, Mathematics of Computation, Vol. 58, No. 198, 765-773.

[25] Keiper, J.B. 1996. On the Zeros of the Ramanujan τ-Dirichlet Series in the Critical Strip, Mathematics of Computation, Vol. 65, No. 216, 1613-1619.

[26] Kaplan, W. 1991, Advanced Calculus, 4th ed., Universty of Michigan.

[27] Kontorovich, A.V. 2009. The Dirichlet Series for the Exterior Square *L*-Function on GL(n), Department of Mathematics, Columbia University, New York.

[28] Konyagin, S.V. , Queffelec, H. (2001/02). The translation of ½ in the theory of Dirichlet series, Real Anal. Exchange 27, no. 1, 155-175.

[29] Louboutin, S.R. 2004. Explicit upper bounds for values at $s = 1$ of Dirichlet *L*-series associated with primitive even characters, Journal of Number Theory 104, 118-131.

[30] Levinson, N. 1974. At Least One-Third of Zeros of Riemann's Zeta-Function are on $\sigma = 1/2$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA Vol. 71, No. 4, 1013-1015.

[31] Lune, J., Riele H. J. 1983. On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip. III, Mathematics of Computation, Vol. 41, No. 164, 759-767.

[32] McCarthy, P.J. 1986. Introduction to Arithmetical Functions, Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

[33] Moreno, C.J. 1973. The Hoheisel Phenomenon for Generalized Dirichlet Series, American Mathematical Society, Vol. 40, No. 1, 47-51.

[34] Mouze, A. 2009. Universality and summability of Dirichlet series, Complex Variables and Elliptic Equations Vol. 54, No. 1, 57-70.

[35] Peter, M. 1998. Dirichlet series associated with polynomials, Acta Arithmetica LXXXIV.3, 245-278.

[36] Saksman, E., Seip K. 2009 Integral means and boundary limits of Dirichlet series, Bull. London Math. Soc. 41, 411-422.

[37] Sinnott, W. 2008. Dirichlet series in function fields, Journal of Number Theory 128, 1893-1899.

[38] Spiegel, M. R. 1997. "İleri Matematik" Çeviren: H. H. Hacısalihlioğlu, 36th ed. Nobel Yayınevi.

[39] Şenay, H. 2007. "Sayılar Teorisi Dersleri", Selçuk Üniversitesi

[40] Tanigawa, Y., Zhai, W. 2007. Dirichlet series associated with polynomials and applications, Journal of Number Theory 122, 466-518.

[41] Titchmarsh, E.C. 1939. The Theory of Functions, Oxford University Press, London.

[42] Titchmarsh, E.C. 1951. The Theory of Riemann Zeta Function, Oxford Clarendon Pres, London.

[43] Westrick, L. 2003. Investigations of the Number Derivative, Massachussetts Institute of Technology.

[44] Zorn, C. 2005. Infinitude and Density of Primes in Arithmetic Progression University of California, Santa Cruz Math 195.