T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MASKELİ VERİLERE DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

Harun KINACI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
Konya, 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MASKELİ VERİLERE DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

Harun KINACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28 / 12 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....	.....	.....
Doç.Dr.Coşkun KUŞ	Doç.Dr.Aşır GENÇ	Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MASKELİ VERİLERE DAYALI PARAMETRE TAHMİNİ

Harun KINACI
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Coşkun KUŞ
2010, 67 Sayfa

Jüri: Doç.Dr. Coşkun KUŞ
Doç.Dr. Aşır GENÇ
Yrd.Doç.Dr.Hasan KÖSE

Bu tez çalışmasında, iki bileşenli seri ve paralel sistemler için sistem bileşenlerinin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin maskeli verilere dayalı tahmini ele alınmıştır. Bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının konum-ölçek parametreli dağılımlar ailesine ait olmaları durumunda konum parametrelerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilmiştir. Simülasyon çalışması ile lojistik dağılım için, modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin performansları incelenmiş ve sayısal örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Maskeli örneklem, Seri sistemler, Paralel sistemler, En çok olabilirlik tahmin edicileri, Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri.

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION BASED ON MASKED DATA

Harun KINACI

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor:Assoc.Prof.Dr Coşkun KUŞ

2010, 67 Pages

Jury: Assoc.Prof.Dr. Coşkun KUŞ

Assoc.Prof.Dr. Aşır GENÇ

Ass.Prof.Dr. Hasan KÖSE

In this thesis, it is considered that the estimation of the parameters of distributions of components for serial and parallel systems with two components based on masked data. Modified maximum likelihood estimators are obtained analitically for location parameters when the distributions of componets are belong to location-scale family. Simulation study is performed to investigate the performances of the modified maximum likelihood estimators and numerical examples are given under the logistic distribution theory.

Key Words: Masked samples, Serial system, Parallel system, Maximum likelihood estimators, Modified maximum likelihood estimators.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Doç.Dr.Coşkun KUŞ'a, çalışmamda yardımcı olan ağabeyim ve hocam Yrd.Doç.Dr.İsmail KINACI'ya ve manevi desteğini esirgemeyen eşime teşekkürlerimi sunarım.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1. $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları…….……48

Çizelge 2. $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları…….....49

Çizelge 3. $p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti……53

Çizelge 4. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri……...53

Çizelge 5. $p = 0.3, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti……..55

Çizelge 6. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri……...55

Çizelge 7. $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları……..…...56

Çizelge 8. $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları……..…57

Çizelge 9. $p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti……60

Çizelge 10. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri…….61

Çizelge 11. $p = 0.3, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti……62

Çizelge 12. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri……..…62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları……...…..50

Şekil 2. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……...….50

Şekil 3. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları……...….51

Şekil 4. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……...….51

Şekil 5. $p = 0$ için n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları….....52

Şekil 6. $p = 0.3$ için n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……...52

Şekil 7. Ağırlıkların grafikleri …….....54

Şekil 8. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları…….……57

Şekil 9. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……...….58

Şekil 10. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları…….59

Şekil 11. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……..……59

Şekil 12. n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları……..…60

Şekil 13. Ağırlıkların grafikleri…….….61

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
2.1. Sıra İstatistikleri 4
2.2. Konum-Ölçek Parametreli Dağılımlar Ailesi 8
2.2.1. Lojistik Dağılım 9
2.3. Taylor Açılımı 10
2.4. Newton-Raphson Yöntemi 11
2.5. Asimptotik Normallik 13
2.6. Fisher Bilgi Matrisi 14
2.7. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri 15
2.8. Asimptotik Güven Aralıkları 15
2.9. Modifiye Edilmiş Ençok Olabilirlik Tahmin Edicileri 16
3. MASKELİ ÖRNEKLEMLER 20
3.1. İki Bileşenli Seri Sistemler 21
3.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler 24
4. MASKELİ VERİLER İÇİN MML TAHMİNİ 29
4.1. İki Bileşenli Seri Sistemler 29
4.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler 36
4.3. Maskeli Örneklemlere Dayalı Logistik Dağılımının MML Tahmin Edicileri 44
4.3.1. İki Bileşenli Seri Sistemler 44
4.3.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler 45
5. SİMÜLASYON 47
5.1. İki Bileşenli Seri Sistemler 47
5.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler 55
6. SONUÇ 63
KAYNAKLAR 64

1. GİRİŞ

İstatistik biliminin en önemli problemlerinden birisi parametre tahmini problemidir. Literatürde dağılımların parametrelerini tahmin etmek için çeşitli tahmin ediciler önerilmiştir. Bunlardan bazıları en çok olabilirlik tahmin edicileri, en küçük kareler tahmin edicileri, Bayes tahmin edicileri ve parametrik olmayan tahmin edicilerdir. Bu tahmin edicilerin, farklı durumlarda farklı kriterlere göre birbirlerine karşı üstünlükleri bulunabilir. Parametre tahmini probleminde esas amaç, içinde bulunulan durum için bilinmeyen parametrenin en iyi özelliklere sahip tahmin edicisini elde etmektir. Tahmin teorisinde alınan örnek hacmi ne kadar büyük olursa tahmin edicinin özellikleri de o kadar iyi olmaktadır yani, tahmin edici parametrenin gerçek değerine yakın sonuçlar vermektedir. Ancak çoğu durumda gerek zaman gerekse maddiyat olarak büyük hacimli örneklem elde etmek mümkün olmamaktadır. Bu sebeple elde edilen tahmin edicilerin büyük örnek hacmindeki özellikleri yerine küçük örnek hacmindeki özellikleri önem kazanmaktadır.

Uygulanmasının kolaylığı ve tahmin edicilerinin asimptotik olarak yansız ve normal dağılımlı olmasından dolayı çoğu durumda bilinmeyen parametrelerin tahmini için en çok olabilirlik tahmin edicileri kullanılmakta ve parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmektedir. Ancak örneklemin geldiği dağılıma göre bazen bu tahmin ediciler analitik olarak elde edilememekte ve tahmin edici yerine iteratif yöntemlerle parametrenin tahmin değerleri elde edilebilmektedir. Bu gibi durumlarda parametrelerin tahmin edicilerini analitik olarak elde etmek için Tiku (1967a,1967b, 1968a, 1968b,1968c), modifiye edilmiş (asimptotik) en çok olabilirlik yöntemini önermiştir. Bu yöntemden elde edilen tahmin edicilerin asimptotik özellikleri en çok olabilirlik tahmin edicileri ile aynıdır. Modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisine yaklaşık MLE' de denilmektedir (Balakrishnan ve ark. 2004)

Güvenilirlik teorisinde genellikle, bir bileşenin veya n tane bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanının dağılımının parametreleri tahmin edilmeye çalışılmaktadır. İki tane bileşenden oluşan bir sistem düşünüldüğünde bu sistemin yaşam zamanı, bileşenler seri bağlı olduğunda küçük ömürlü bileşenin, paralel bağlı ise büyük ömürlü bileşenin ömrü kadar olacaktır. Sistemin bozulmasına neden olan bileşenin gözlenemediği durumda elde edilen gözlem, maskeli gözlem olarak adlandırılmaktadır.

İncelenen maskeli örnekleme ilişkin olabilirlik fonksiyonunun yapısından dolayı örneklemin geldiği dağılımlar için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri genellikle analitik olarak elde edilememektedir. Bu çalışmada maskeli örneklemler için parametre tahmininde modifiye edilmiş en çok olabilirlik yöntemi kullanılmış ve parametre tahmin edicileri analitik olarak elde edilmeye çalışılmıştır.

Maskeli örneklem konusu ilk önce Miyakawa (1984) tarafından ortaya atılmıştır. Çalışmasında seri bağlı iki bileşenden oluşan sistemleri incelemiş ve sistemin bozulmasına neden olan bileşenin gözlenemediği durumda bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicilerinin nasıl elde edileceğinden bahsetmiştir. Usher ve Hodgson (1988), sabit bozulma oranına sahip üç bileşenin seri bağlı olduğu sistemler için bileşenlerin yaşam zamanı dağılımı parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Usher and Guess (1989), seri sistemlerdeki bileşenlerin güvenilirliklerini tahmin etmek için iteratif bir yöntem önermişler ve iki bileşen için bileşenlerin yaşam zamanlarının Weibull dağılımına sahip olması durumunda sayısal bir örnek vermişlerdir. Sarhan (2003), seri bağlı m tane bileşenden oluşan sistemleri incelemişler ve iki ve üç bileşenli sistemler için bileşenlerin yaşam zamanlarının Weibull dağılımına sahip olması durumunda yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini analitik olarak elde etmişlerdir. Guess ve ark.(1991), seri bağlı J tane bileşenden oluşan sistemlerin bozulmasına neden olabilecek bileşenler hakkında bir önsel bilgiye sahip olunduğu durum için sistemin ve bileşenlerinin güvenilirliklerine ilişkin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Sarhan ve El-Gohary (2003), yaşam zamanları Pareto

dağılımına sahip olan, birbirlerine seri bağlı J tane bileşenden oluşan sistemleri ele alarak bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametreleri için maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Sarhan (2004a), seri bağlı J tane bileşenden oluşan sistemler için bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiştir. Burada sistemdeki $j.$ bileşenin hazard fonksiyonunun $h_j(t) = \alpha_j + \beta_j t,\ j = 1,2,\ldots,J$ şeklinde olduğu varsayılmıştır. Ayrıca Sarhan (2004b), $h_j(t) = \alpha_j + \beta_j t^{\gamma_j - 1},\ j = 1,2,\ldots,J$ durumu için γ parametresinin bilindiği varsayımı altında bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerini elde etmiştir. Sarhan ve El-Bassiouny (2003), yaşam zamanları Weibull dağılımına sahip olan, birbirlerine paralel bağlı J tane bileşenden oluşan sistemleri ele alarak bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametreleri için maskeli örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, çalışmada kullanılacak temel kavramlar tanıtılmıştır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, iki bileşenli seri ve paralel sistemler için maskeli örneklemler tanıtılmış ve maskeli örneklemlere ilişkin olabilirlik fonksiyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde iki bileşenli seri ve paralel sistemler için, konum ölçek parametreli dağılımlar ailesinden elde edilen maskeli örnekleme dayalı, ölçek parametresi bilindiğinde konum parametreslerinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik (MML) tahmin edicileri elde edilmiştir. Çalışmanın beşinci bölümünde ise, iki bileşenli seri bağlı sistemin bileşenlerinin, bağımsız ve aynı ölçek parametreleri lojistik dağılımdan geldiği varsayımı altında, bileşenlerin dağılımlarının konum parametreleri için elde edilen MML tahmin edicisinin küçük ve büyük örnek hacimlerindeki özellikleri farklı maskeleme olasılıkları altında simülasyon çalışması ile irdelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tez içerisinde kullanılacak olan sıra istatistikleri, konum ölçek parametreli dağılımlar ailesi, Taylor serileri, Newton Raphson yöntemi, Asimptotik Normallik, Fisher Bilgi Matrisi, En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri, Asimptotik Güven Aralıkları, Modifiye Edilmiş Ençok Olabilirlik Tahmin Edicileri gibi konular kısaca tanıtılmıştır.

2.1. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip örnekleminin $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ olacak biçimde büyüklük sırasına göre dizilmesiyle elde edilen her bir $X_{i:n}$ rasgele değişkeni $i.$ sıra istatistiği olarak isimlendirilir.

$$X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_1(x) = P\left(X_{1:n} \le x\right) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n \tag{2.1}$$

ve

$$X_{n:n} = \text{maks}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_n(x) = P\left(X_{n:n} \le x\right) = \left(F(x)\right)^n \tag{2.2}$$

dır. $1 \le r \le n$ olmak üzere $r.$ sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu ise

$$F_r(x) = P\left(X_{r:n} \le x\right) = P\left\{X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ lerden en az } r \text{ tanesi} \le x\right\}$$

$$= P\left\{\sum_{i=r}^{n} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ lerden tam } i \text{ tanesi} \le x\right\}$$

olur. A_i: $\left\{X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ lerden tam } i \text{ tanesi} \le x\right\}$ olması olayı olsun. A_i olayları ayrık olduğundan ,

$$F_r(x) = P\left(\sum_{i=r}^{n} A_i\right) = \sum_{i=r}^{n} P\left(A_i\right)$$

$$= \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x)\right)^i \left(1 - F(x)\right)^{n-i} \tag{2.3}$$

dır. Bu ise tam olmayan beta fonksiyonudur. Yani

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x)\right)^i \left(1 - F(x)\right)^{n-i}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

Burada $B\left(\alpha, \beta\right)$, $\alpha \ge 1$ ve $\beta \ge 1$ için

$$\mathrm{B}\left(\alpha, \beta\right) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1} dx$$

şeklinde tanımlanan Beta fonksiyonudur. X_i' ler $f(x) = \dfrac{dF\left(x\right)}{dx}$ ($F\left(x\right)$ in türevlenemediği noktalar hariç) olacak biçimde sürekli rasgele değişkenler ise

$$f_r(x) = \frac{dF_r(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \left(F(x)\right)^{r-1} \left(1 - F(x)\right)^{n-r} f(x) \tag{2.4}$$

olur. Burada

$$\mathrm{B}(r, n-r+1) = (n!)^{-1}(r-1)!(n-r)!$$

Şeklindedir (David 1970).

Sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları, kombinatorik yöntemler de kullanılarak, aşağıdaki gibi verilir (David 1970).

$$A_r = \{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$$

olayı göz önüne alınsın. A_r olayının gerçeklenmesi için $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $r-1$ tane örneğin x den küçük, 1 tane örneğin $(x, x+\Delta x]$ aralığında ve $n-r$ tane örneğin de $x+\Delta x$ den büyük olması gerekir. Dolayısıyla A_r olayı,

$$\binom{n}{r-1}\binom{n-(r-1)}{1}\binom{n-r}{n-r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

farklı durumda gerçekleşebilir.

$$\begin{aligned} P\{A_r\} &= P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x\} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} P\{X_1, \ldots, X_{r-1} \le x; X_r \in (x, x+\Delta x]; X_{r+1}, \ldots, X_n > x + \Delta x\} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [F(x+\Delta x) - F(x)][1 - F(x+\Delta x)]^{n-r} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $F_r(x+\Delta x) - F_r(x) = P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$ olmak üzere

$$f_r(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_r(x+\Delta x) - F_r(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[F(x)]^{r-1}[F(x+\Delta x) - F(x)][1 - F(x+\Delta x)]^{n-r}}{\Delta x}$$

$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ yazılırsa

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\lim_{\Delta x \to 0}[F(x)]^{r-1} f(x)[1 - F(x+\Delta x)]^{n-r} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)}[F(x)]^{r-1}[1 - F(x)]^{n-r} f(x) \qquad (2.5)$$

bulunur (David 1970).

Özel olarak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemi [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahip olmak üzere, bu örneklemin $i.$ sıra istatistiği $X_{i:n}$'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_i(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(i, n-i+1)} x^{i-1}(1-x)^{n-i}, \quad 0 \le x \le 1$$

olmak üzere $1 \le i \le n$ için

$$E(X_{i:n}) = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{B}(i, n-i+1)} x^i (1-x)^{n-i}\, dx$$

$$= \frac{\mathrm{B}(i+1, n-i+1)}{\mathrm{B}(i, n-i+1)}$$

$$= \frac{i}{n+1}$$

şeklinde elde edilir.

2.2. Konum-Ölçek Parametreli Dağılımlar Ailesi

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_\mu(x)$ ve

$$F_\mu(\cdot) \in \Im_1 = \left\{ F_\mu(x) : F_\mu(x) = F(x-\mu);\ \mu \in \Gamma,\ F \text{ biliniyor} \right\} \tag{2.6}$$

olmak üzere $\Im_1$'e konum parametreli dağılımlar ailesi, μ'ye ise konum parametresi denir. Burada Γ, μ parametresi için parametre uzayıdır. μ parametresinin X rasgele değişkeni için konum parametresi olması için gerek ve yeter koşul $X-\mu$ rasgele değişkeninin dağılımının μ den bağımsız olmasıdır. Yani

$$P(X-\mu \le x) = P(X \le x+\mu) = F_\mu(x+\mu) = F(x+\mu-\mu) = F(x)$$

şeklindedir (Casella ve Berger, 1990).

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_\sigma(x)$ ve

$$F_\sigma(\cdot) \in \Im_2 = \left\{ F_\sigma(x) : F_\sigma(x) = F\left(\frac{x}{\sigma}\right);\ \sigma \in \Gamma,\ F \text{ biliniyor} \right\} \tag{2.7}$$

olmak üzere $\Im_2$'ye ölçek parametreli dağılımlar ailesi, σ'ya ise ölçek parametresi denir. Burada Γ, σ parametresi için parametre uzayıdır. σ parametresinin X rasgele değişkeni için ölçek parametresi olması için gerek ve yeter koşul $\frac{X}{\sigma}$ rasgele değişkeninin dağılımının σ'dan bağımsız olmasıdır. Yani

$$P\left(\frac{X}{\sigma} \le x\right) = P(X \le \sigma x) = F_\sigma(\sigma x) = F\left(\frac{\sigma x}{\sigma}\right) = F(x)$$

şeklindedir (Casella ve Berger, 1990).

$\gamma = (\mu, \sigma)'$ olmak üzere X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_\gamma(x)$ ve

$$F_\gamma(\cdot) \in \Im_3 = \left\{ F_\gamma(x) : F_\gamma(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);\ \gamma \in \Gamma,\ F \text{ biliniyor} \right\} \tag{2.8}$$

olmak üzere $\Im_3$'e konum ve ölçek parametreli dağılımlar ailesi, μ'ye konum ve σ'ya da ölçek parametresi denir. Burada Γ, γ parametresi için parametre uzayıdır. γ parametresinin X rasgele değişkeni için konum ölçek parametresi olması için gerek ve yeter koşul $\frac{X-\mu}{\sigma}$ rasgele değişkeninin dağılımının γ'dan bağımsız olmasıdır. Yani

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right) = P(X \le \sigma x + \mu) = F_\gamma(\sigma x + \mu) = F\left(\frac{\sigma x + \mu - \mu}{\sigma}\right) = F(x)$$

şeklindedir (Casella ve Berger, 1990).

2.2.1. Lojistik Dağılım

μ ve σ parametreli lojistik dağılıma sahip olan X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left[1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^2},\ x \in R \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, μ konum ve $\sigma \in R^+$ ölçek parametresidir. Lojistik dağılıma sahip olan X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x)=\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)},\ x\in R \tag{2.10}$$

şeklinde elde edilir. Lojistik dağılımın beklenen değer ve varyansı sırasıyla $E(X)=\mu$ ve $Var(X)=\frac{\pi^2\sigma^2}{3}$ şeklindedir. μ ve σ parametreli lojistik dağılım kısaca $Lojistik(\mu,\sigma)$ ile gösterilecektir. Lojistik dağılımın çarpıklık katsayısı sıfır olup $E(X)=\mu$ etrafında simetriktir.

2.3. Taylor Açılımı

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonunun (a,b) aralığında n. mertebeden türevi $f^{(n)}$ olmak üzere $[a,b]$ 'nin keyfi x_0 ve $x>x_0$ noktaları için

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+R_n(x) \tag{2.11}$$

açılımına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *Taylor açılımı* denir. Burada

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1 \tag{2.12}$$

şeklindedir (Shahbazov 2005).

$z=f(x,y)$ kapalı bir bölgede $n.$ mertebeden sürekli ve açık bölgede $(n+1).$ mertebeden türevli ise bölgenin bir (a,b) noktası komşuluğunda iki değişkenli fonksiyonlar için Taylor açılımı

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^n_{x=a,y=b}+R_n(x,y) \tag{2.14}$$

şeklindedir. Burada R_n,

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^{n+1}_{x=a,y=b}$$

$$\times f\left(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\right) \tag{2.15}$$

biçiminde tanımlanır ve Lagrange kalanı olarak adlandırılır (Berksoy ve Özkan 2001).

2.4. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f(x)=0$ denkleminin çözümü analitik olarak elde edilemediği zaman bu çözüm yaklaşık olarak, (a,b) aralığından seçilen bir x_0 başlangıç noktasından başlanarak,

$$x^{(h+1)}=x^{(h)}-\frac{f\left(x^{(h)}\right)}{f'\left(x^{(h)}\right)}$$

iterasyonundan elde edilebilmektedir. Burada x_i; $i.$ iterasyondaki değeri ifade etmektedir. $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ olduğunda iterasyon sonlandırılır ve elde edilen x_{i+1} değeri $f(x)$ fonksiyonunun kökü olarak alınır. Bu yöntem Newton-Raphson yöntemi olarak adlandırılmaktadır.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ olmak üzere $f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f_k(\mathbf{x}) = 0$ gibi k tane denklemin çözümünü bulmak için çok değişkenli Newton-Raphson yöntemi kullanılabilir. Bu durumda iterasyon formülü

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \left(J_f\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)^{-1} \right) \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)$$

şeklinde olacaktır. Burada $\mathbf{x}^{(r)} = \left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}\right)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})\right)'$ ve

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\left\|\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^{(i)}\right\| < \varepsilon$ olduğunda iterasyon sonlandırılır ve elde edilen $\mathbf{x}^{i+1} = \left(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \ldots, x_k^{(i+1)}\right)'$ değerleri $f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f_k(\mathbf{x}) = 0$ denklem sistemlerinin çözümü olarak alınır. Ugulamada genellikle $\varepsilon = 10^{-5}$ olarak alınmaktadır.

2.5. Asimptotik Normallik

(X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi , Z , standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken ve $\xrightarrow{d}$, dağılımda yakınsamayı göstermek üzere,

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z$$

olacak şekilde reel sayıların (a_n) ve pozitif reel sayıların (b_n) dizileri varsa, (X_n) dizisine asimptotik normal veya daha açık olarak "a_n ortalaması" ve "b_n^2 varyansı" ile asimptotik normal dizisi denir ve $X_n \sim AN(a_n, b_n^2)$ biçiminde gösterilir. Buradaki a_n sayısı X_n'in beklenen değeri ve b_n^2 sayısı X_n nin varyansı olmayabilir. Bu değerler sırasıyla X_n'in asimptotik ortalama ve asimptotik varyans değerleridir. (Öztürk, 2010).

2.6. Olabilirlik fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \in R^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}),\ \mathbf{x} \in R^n$$

olmak üzere bu fonksiyona parametrenin bir fonksiyonu gözü ile bakıldığında

$$L(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\gamma}),\ \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset R^p \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu denir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ve $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)'$ şeklinde olup Γ parametre uzayıdır. Olabilirlik fonksiyonu $L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x})$ in logaritması alınarak

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}) = \log\left(L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{x})\right), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma \subset R^p \tag{2.17}$$

şeklinde elde edilen fonksiyona log-olabilirlik fonksiyonu denir.

2.6. Fisher Bilgi Matrisi

Fisher bilgi matrisi

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\gamma}) &= -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \log\left(L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{X})\right)\right)\right\} \\ &= -E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \ell(\boldsymbol{\gamma})\right)\right\} \end{aligned}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_p} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_1} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p \partial \gamma_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_p^2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanır, burada $L(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{X})$ ve $\ell(\boldsymbol{\gamma})$ sırasıyla eşitlik (2.16) ve (2.17) de verilen olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonlarıdır (Wu ve Kuş, 2009).

2.7. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

Olabilirlik veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\boldsymbol{\gamma}$ değeri

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg\max\left(L\left(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{x}\right)\right) = \arg\max\left(\ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\right) \tag{2.19}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE) olarak adlandırılır.

2.8. Asimptotik Güven Aralıkları

Eşitlik (2.19) da tanımlanan en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ bazı düzgünlük şartları altında

$$\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\right)$$

olmak üzere asimptotik normaldir, burada $I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$, (2.18) eşitliğinde tanımlı Fisher Bilgi Matrisidir. Fisher Bilgi matrisinin tersi $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ nın asiptotik varyans-kovaryans matrisi dir. Bu matrisin bilinmesi, büyük örneklemler için $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_n$ tahmin edicilerinin ayrı ayrı asimptotik varyanslarının bilinmesi anlamına gelmektedir. $I^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$ nın tutarlı bir tahmin edicisi

$$\hat{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_1^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_p} \\ \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1} & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_2^{\,2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_p \partial \gamma_1} & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_p \partial \gamma_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\gamma}\right)}{\partial \gamma_p^{\,2}} \end{pmatrix}^{-1}_{\gamma=\hat{\gamma}} \tag{2.20}$$

dır (Adamidis ve Loukas, 1998). Buradan $\gamma_i, i=1,2,\ldots,p$ için $\hat{\gamma}_i$'ya dayalı asimptotik güven aralığı

$$P\left(\hat{\gamma}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}} < \gamma_i < \hat{\gamma}_i + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V_{ii}}\right) \cong 1-\alpha$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada V_{ii}, (2.20) eşitliğinde verilen matrisin *i.* diogonal elemanıdır ve $a \in (0,1)$ için z_a, standart normal dağılımın *a.* kuantilidir (Wu ve Kuş, 2009).

2.9. Modifiye Edilmiş Ençok Olabilirlik Tahmin Edicileri

En çok olabilirlik tahmin edicileri (MLE), bazı düzgünlük şartları (regularity conditions) altında asimptotik normallik gibi arzu edilen özelliklere sahip olmaktadır. Fisher bilgi matrisinin (Fisher Information Matrix) tersi, bazı düzgünlük şartları altında ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımının varyans-kovaryans matrisi olması nedeniyle parametrelerin asimptotik güven aralıkları ML tahmin edicilerine dayalı olarak elde edilebilmektedir. ML tahmin edicilerinin istenen özelliklere sahip olmasının yanı sıra bazı durumlarda bu tahmin edicilerin elde edilmesinde bazı sorunlar ortaya çıkabilir. Örneğin, olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre lineer olmadığı ve birden fazla tepeli (polymodal) olması durumunda ML tahmin edicilerini elde etmek için Newton-Raphson ve EM (Expectation-Maximization) algoritması gibi bazı iteratif yöntemler kullanılmaktadır. Bu iteratif yöntemlerin uygulanmasında parametrelerin başlangıç değerlerinin seçimi birden fazla tepeli olabilirlik fonksiyonunun en büyüklenmesinde önemli rol oynamaktadır. Olabilirlik denklemlerinin gerçek çözümlerine uzak başlangıç değerleri verilmesi durumunda yukarıda bahsedilen iteratif yöntemler genel maksimum yerine yerel maksimum değerine ulaşabilir.

Sansürlü ve maskeli örneklemlere dayalı olabilirlik fonksiyonları, genellikle parametrelere göre lineer değildir. Bu sebepten iteratif yöntemlerin, istenilen çözüme ulaştırmama ihtimali göz önüne alındığında daima analitik olarak elde edilen ve ML tahmin edicileri ile aynı asimptotik özelliklere sahip olan modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicilerinin (MMLE, Tiku 1967a, b; 1968a, b, c; 1970; 1973) önemi ortaya çıkmaktadır. Modifiye edilmiş tahmin ediciler aşağıdaki prosedür yardımıyla elde edilebilir.

Aşağıda ölçek parametresi bilindiğinde konum parametresinin modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisinin elde edilmesindeki prosedür verilmiştir (Tiku ve Akaya, 2004) $X_1, X_2, \ldots, X_n$, konum parametresi θ, ölçek parametresi σ (biliniyor) olan g yoğunluklu bir kitleden alınan n birimlik bir örneklem olmak üzere bu örnekleme dayalı olabilirlik denklemi

$$\frac{\partial \ln L(\theta;\mathbf{x})}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} g(z_i) = 0,\ z_i = (x_i - \theta)/\sigma \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir, burada $x_i,\ i = 1,2,\ldots,n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemin aldığı değerler ve $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindedir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemine dayalı sıra istatistikleri de

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)} \tag{2.22}$$

olmak üzere (2.21) eşitliği, (2.22) de verilen sıra istatistiklerine dayalı olarak

$$\frac{\partial \ln L(\theta;\mathbf{x})}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} g(z_{(i)}) = 0,\ z_{(i)} = (x_{(i)} - \theta)/\sigma \tag{2.23}$$

biçiminde yazılabilir, burada $x_{(i)},\ i = 1,2,\ldots,n$, $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ sıra istatistiklerinin aldığı değerlerdir.

$t_{(i)}$, $i.$ standartlaştırılmış sıra istatistiği $z_{(i)}$ nin beklene değeri $\left(t_{(i)} = E\left(z_{(i)}\right),\ i = 1,2,\ldots,n\right)$ olmak üzere $g\left(z_{(i)}\right)$ fonksiyonu $t_{(i)}$ civarında Taylor serisine açılıp ilk iki terimi alındığında aşağıdaki doğrusal denklik elde edilir.

$$g\left(z_{(i)}\right) \cong g\left(t_{(i)}\right) + \left(z_{(i)} - t_{(i)}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial z} g\left(z\right)\right\}_{z=t_{(i)}} \tag{2.24}$$

$$= \alpha_i + \beta_i z_{(i)}, \quad \left(1 \le i \le n\right)$$

Burada

$$\beta_i = \left\{\frac{\partial}{\partial z} g\left(z\right)\right\}_{z=t_{(i)}}, \ \alpha_i = g\left(t_{(i)}\right) - \beta_i t_{(i)} \tag{2.25}$$

dır. Eğer *g(z)* sınırlı bir fonksiyon ve $z_{(i)}$ beklenen değeri, $t_{(i)}$'ye yaklaşıyorsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{g(z_{(i)}) - (\alpha_i + \beta_i z_{(i)})\right\} = 0\,,\ \left(1 \le i \le n\right) \tag{2.26}$$

olacaktır. (2.24) ve (2.25) den elde edilen modifiye edilmiş olabilirlik denklemi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \cong \frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha_i + \beta_i z_{(i)}\right\} = 0 \tag{2.27}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliği bazı çok genel şartlar altında aşağıdaki formda da yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right\} = 0 \tag{2.28}$$

(2.26) ve (2.28)'e dikkatlice bakıldığında bu iki eşitliğin birbirlerine asimptotik olarak denk olduğunu söyleyebiliriz. θ'ya ait olan (2.27) denkleminin kesin çözümü MML (modified maxsimum likelihood) tahmini olarak adlandırılır.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m}\left\{\sigma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{(i)}\right\}, \quad m = \sum_{i=1}^{n}\beta_i \tag{2.29}$$

Kullanılan dağılım simetrik bir dağılım ise $t_{(i)} = -t_{(n-i+1)}$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle

$$\alpha_i = \alpha_{n-i+1}, \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0, \quad \beta_i = \beta_{n-i+1} \quad (1 \le i \le n) \tag{2.30}$$

dir. Simetrik bir dağılım için, θ nın MML tahmin edicisi aşağıdaki sıra istatistiğinin bir lineer fonksiyonudur,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{(i)} \tag{2.31}$$

ve görüldüğü üzere bu lineer fonksiyon σ dan bağımsızdır. Gerçekte MML tahmin edicisi olan $\hat{\theta}$, asimptotik olarak ML tahmin edicisine denktir.

3. MASKELİ ÖRNEKLEMLER

m bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı X ve bozulma gerçekleştiğinde bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı S ile gösterilsin. Bu durumda,

- Sistemin bozulmasına $i.$ bileşen neden olduğunda
$$S = \{i\}$$
- Sistemin bozulmasına $i_1.,i_2.,\ldots,i_k.,\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m$ bileşenlerden biri neden olduğunda
$$S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

olacaktır. S kümesi birden fazla elemanlı olduğunda X e maskeli rasgele değişken denir.

Bu tezde iki bileşenli sistemler kullanılacaktır. İki bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı X ve bu bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı S ile gösterilsin. Bu durumda,

- Sistemin bozulmasına 1. bileşen neden olduğunda
$$S = \{1\}$$
- Sistemin bozulmasına 2. bileşen neden olmuşsa
$$S = \{2\}$$
- Sistemin bozulmasına neden olan bileşen bilinmiyorsa
$$S = \{1,2\}$$

olacaktır. Sistemin bozulmasının hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenemediğinde (maskelendiğinde, yani $S = \{1,2\}$ durumunda) X e maskeli rasgele değişken denir.

3.1. İki Bileşenli Seri Sistemler

T_{1i}, $i=1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 1. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{11},T_{12},...,T_{1n}$, $f_1(x;\theta_1)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve $F_1(x;\theta_1)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve T_{2i}, $i=1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 2. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{21},T_{22},...,T_{2n}$, $f_2(x;\theta_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu $F_2(x;\theta_2)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olsun. Ayrıca T_{1i} ile T_{2i}, $i=1,2,\ldots,n$ de bağımsız olsun.

$X_i=\min(T_{1i},T_{2i})$, $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere yaşam süreleri $(X_1,S_1),(X_2,S_2),\ldots,(X_n,S_n)$ olan ve birbirinden bağımsız çalışan n tane iki bileşenli seri sistem göz önüne alınsın.

1. Durum

$S_i=\{j\}$, $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $(X_i,S_i=\{j\})$, $i=1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$A_i=\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x, S_i=\{j\}\}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$P(A_i)=P\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x, S_i=\{j\}\}$$

$$=P\left(x_i\le T_{ji}<x_i+\Delta x,\ T_{(3-j)i}>x_i+\Delta x\right)$$

$$=P\left(x_i\le T_{ji}<x_i+\Delta x\right)P\left(T_{(3-j)i}>x_i+\Delta x\right)$$

$$=\left[F_j(x_i+\Delta x)-F_j(x_i)\right]\left(1-F_{3-j}(x_i+\Delta x)\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$f_{X_i,S_i}\left(x_i,\{j\}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(A_i\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(F_j\left(x_i+\Delta x\right)-F_j\left(x_i\right)\right)\left(1-F_{3-j}\left(x_i+\Delta x\right)\right)}{\Delta x}$$

$$=f_j\left(x_i\right)\left(1-F_{3-j}\left(x_i\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(X_1,S_1=\{j\}\right),\left(X_2,S_2=\{j\}\right),\ldots,\left(X_n,S_n=\{j\}\right)$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\theta_1,\theta_2;\mathbf{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}f_j\left(x_i\right)\left(1-F_{3-j}\left(x_i\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

2. Durum

$S_i=\{1,2\}$, $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $\left(X_i,S_i=\{1,2\}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$B_i=\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1,2\}\right\}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$P\left(B_i\right)=P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1,2\}\right\}$$

$$=P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1\}\right\}+P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{2\}\right\}$$

$$= P\left(x_i \le T_{1i} < x_i + \Delta x, T_{2i} > x_i + \Delta x\right) + P\left(x_i \le T_{2i} < x_i + \Delta x, T_{1i} > x_i + \Delta x\right)$$

$$= P\left(x_i \le T_{1i} < x_i + \Delta x\right) P\left(T_{2i} > x_i + \Delta x\right) + P\left(x_i \le T_{2i} < x_i + \Delta x\right) P\left(T_{1i} > x_i + \Delta x\right)$$

$$= \left[F_1\left(x_i + \Delta x\right) - F_1\left(x_i\right)\right]\left(1 - F_2\left(x_i + \Delta x\right)\right) + \left[F_2\left(x_i + \Delta x\right) - F_2\left(x_i\right)\right]\left(1 - F_1\left(x_i + \Delta x\right)\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$f_{X_i,S_i}\left(x_i,\{1,2\}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(B_i\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[F_1\left(x_i + \Delta x\right) - F_1\left(x_i\right)\right]\left(1 - F_2\left(x_i + \Delta x\right)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[F_2\left(x_i + \Delta x\right) - F_2\left(x_i\right)\right]\left(1 - F_1\left(x_i + \Delta x\right)\right)}{\Delta x}$$

$$= f_1\left(x_i\right)\left(1 - F_2\left(x_i\right)\right) + f_2\left(x_i\right)\left(1 - F_1\left(x_i\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(X_1, S_1 = \{1,2\}\right), \left(X_2, S_2 = \{1,2\}\right), \ldots, \left(X_n, S_n = \{1,2\}\right)$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ f_1\left(x_i\right)\left(1 - F_2\left(x_i\right)\right) + f_2\left(x_i\right)\left(1 - F_1\left(x_i\right)\right) \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 1 ve Durum 2 göz önüne alınarak, n tane sistemin n_1 tanesinin birinci bileşenden, n_2 tanesinin ikinci bileşenden kaynaklandığı gözlenip, n_3 tanesinin hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenemediğinde (X_i, S_i), $i = 1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir: $(X_1, S_1),(X_2, S_2),\ldots,(X_n, S_n)$ örnekleminde $S_i = \{1\}$ olanlar $X_{11}, X_{12},\ldots, X_{1n_1}$ ile, $S_i = \{2\}$ olanlar $X_{21}, X_{22},\ldots, X_{2n_2}$ ile ve $S_i = \{1,2\}$ olanlar $X_{31}, X_{32},\ldots, X_{3n_3}$ ile gösterilmek üzere $(X_1, S_1),(X_2, S_2),\ldots,(X_n, S_n)$ örmeklemi

$$X_{11}, X_{12},\ldots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22},\ldots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32},\ldots, X_{3n_3}$$

şeklinde gösterilebilir, burada $n_1 + n_2 + n_3 = n$ dir.

Durum 1 ve Durum 2 göz önüne alındığında $X_{11}, X_{12},\ldots, X_{1n_1}$ $X_{21}, X_{22},\ldots, X_{2n_2}, X_{31}, X_{32},\ldots, X_{3n_3}$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n_1} f_1(x_{1i})\left(1 - F_2(x_{1i})\right) \prod_{i=1}^{n_2} f_2(x_{2i})\left(1 - F_1(x_{2i})\right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n_3}\left(f_1(x_{3i})\left(1 - F_2(x_{3i})\right) + f_2(x_{3i})\left(1 - F_1(x_{3i})\right)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j \in S_i} f_j(x_i)\left(1 - F_{3-j}(x_i)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir .

3.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler

T_{1i}, $i = 1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 1. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{11}, T_{12},\ldots,T_{1n}$, $f_1(x;\theta_1)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve $F_1(x;\theta_1)$ dağılım

fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve $T_{2i}, i=1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 2. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{21},T_{22},...,T_{2n}$, $f_2(x;\theta_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu $F_2(x;\theta_2)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olsun. Ayrıca T_{1i} ile $T_{2i}, i=1,2,\ldots,n$ de bağımsız olsun.

$X_i=\max(T_{1i},T_{2i}),\ i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere yaşam süreleri $(X_1,S_1),(X_2,S_2),\ldots,(X_n,S_n)$ olan ve birbirinden bağımsız çalışan n tane iki bileşenli paralel sistem göz önüne alınsın.

1. Durum

$S_i=\{j\}, i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $(X_i,S_i=\{j\}), i=1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$A_i=\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x, S_i=\{j\}\}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$P(A_i)=P\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x, S_i=\{j\}\}$$

$$=P\left(x_i\le T_{ji}<x_i+\Delta x, T_{(3-j)i}<x_i\right)$$

$$=P\left(x_i\le T_{ji}<x_i+\Delta x\right)P\left(T_{(3-j)i}<x_i\right)$$

$$=\left[F_j(x_i+\Delta x)-F_j(x_i)\right]F_j(x_i)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$f_{X_i,S_i}\left(x_i,\{j\}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(A_i\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[F_j\left(x_i+\Delta x\right)-F_j\left(x_i\right)\right]F_{3-j}\left(x_i\right)}{\Delta x}$$

$$=f_j\left(x_i\right)F_{3-j}\left(x_i\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(X_1,S_1=\{j\}\right),\left(X_2,S_2=\{j\}\right),\ldots,\left(X_n,S_n=\{j\}\right)$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\theta_1,\theta_2;\mathbf{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}f_j\left(x_i\right)F_{3-j}\left(x_i\right)$$

şeklinde elde edilir.

2. Durum

$S_i=\{1,2\}$, $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $\left(X_i,S_i=\{1,2\}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$B_i=\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1,2\}\right\}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$P\left(B_i\right)=P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1,2\}\right\}$$

$$=P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{1\}\right\}+P\left\{x_i\le X_i<x_i+\Delta x,S_i=\{2\}\right\}$$

$$= P\left(x_i \le T_{1i} < x_i + \Delta x, T_{2i} < x_i\right) + P\left(x_i \le T_{2i} < x_i + \Delta x, T_{1i} < x_i\right)$$

$$= P\left(x_i \le T_{1i} < x_i + \Delta x\right) P\left(T_{2i} < x_i\right) + P\left(x_i \le T_{2i} < x_i + \Delta x\right) P\left(T_{1i} < x_i\right)$$

$$= \left[F_1\left(x_i + \Delta x\right) - F_1\left(x_i\right)\right] F_2\left(x_i\right) + \left[F_2\left(x_i + \Delta x\right) - F_2\left(x_i\right)\right] F_1\left(x_i\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$f_{X_i,S_i}\left(x_i,\{1,2\}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(B_i\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[F_1\left(x_i + \Delta x\right) - F_1\left(x_i\right)\right] F_2\left(x_i\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[F_2\left(x_i + \Delta x\right) - F_2\left(x_i\right)\right] F_1\left(x_i\right)}{\Delta x}$$

$$= f_1\left(x_i\right) F_2\left(x_i\right) + f_2\left(x_i\right) F_1\left(x_i\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(X_1, S_1 = \{1,2\}\right), \left(X_2, S_2 = \{1,2\}\right), \ldots, \left(X_n, S_n = \{1,2\}\right)$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\theta_1, \theta_2; \mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left\{f_1\left(x_i\right) F_2\left(x_i\right) + f_2\left(x_i\right) F_1\left(x_i\right)\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 1 ve Durum 2 göz önüne alınarak, n tane sistemin n_1 tanesinin birinci bileşenden, n_2 tanesinin ikinci bileşenden kaynaklandığı gözlenip, n_3 tanesinin hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenemediğinde $\left(X_i, S_i\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$(X_1,S_1),(X_2,S_2),\ldots,(X_n,S_n)$ örnekleminde $S_i=\{1\}$ olanlar $X_{11},X_{12},\ldots,X_{1n_1}$ ile, $S_i=\{2\}$ olanlar $X_{21},X_{22},\ldots,X_{2n_2}$ ile ve $S_i=\{1,2\}$ olanlar $X_{31},X_{32},\ldots,X_{3n_3}$ ile gösterilmek üzere $(X_1,S_1),(X_2,S_2),\ldots,(X_n,S_n)$ örmeklemi

$$X_{11},X_{12},\ldots,X_{1n_1},X_{21},X_{22},\ldots,X_{2n_2},X_{31},X_{32},\ldots,X_{3n_3}$$

şeklinde gösterilebilir, burada $n_1+n_2+n_3=n$ dir.

Durum 1 ve Durum 2 göz önüne alındığında $X_{11},X_{12},\ldots,X_{1n_1}$ $X_{21},X_{22},\ldots,X_{2n_2},X_{31},X_{32},\ldots,X_{3n_3}$ örnekleminin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta_1,\theta_2;\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n_1}f_1(x_{1i})F_2(x_{1i})\prod_{i=1}^{n_2}f_2(x_{2i})F_1(x_{2i})$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_3}\left(f_1(x_{3i})F_2(x_{3i})+f_2(x_{3i})F_1(x_{3i})\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in S_i}f_j(x_i)F_{3-j}(x_i)\right) \qquad (3.2)$$

olarak elde edilir .

4. MASKELİ VERİLER İÇİN MML TAHMİNİ

4.1. İki Bileşenli Seri Sistemler

$T_{1i}, i=1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 1. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{11},T_{12},...,T_{1n}$, $f_1(x;\mu_1)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve $F_1(x;\mu_1)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve $T_{2i}, i=1,2,\ldots,n$: i. sistemdeki 2. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{21},T_{22},...,T_{2n}$, $f_2(x;\mu_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu $F_2(x;\mu_2)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olsun. Ayrıca T_{1i} ile $T_{2i}, i=1,2,\ldots,n$ de bağımsız olsun.

Birbirlerine seri bağlı iki bileşenden oluşan n tane özdeş sistem düşünülsün. Bu sistemlerin yaşam zamanları $X_1,X_2,\ldots,X_n$ olsun. Bu n tane sistemdeki birinci ve ikinci bileşenin konum ölçek parametreli dağılıma sahip olduğu ve konum ve ölçek parametrelerinin sırasıyla μ_1,σ_1 ve μ_2,σ_2 olduğu ve σ_1 ve σ_2 parametrelerinin bilindiği varsayılsın. Bu n tane sistemden n_1 tanesi birinci bileşenden, n_2 tanesi ikinci bileşenden dolayı bozulmuş olsun. Ayrıca n_3 tane sistemdeki bozulmaların hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenememiş olsun. $X_{1i}, i=1,2,\ldots,n_1$ birinci bileşenden dolayı bozulan sistemlerin yaşam zamanlarını, $X_{2i}, i=1,2,\ldots,n_2$ ikinci bileşenden dolayı bozulan sistemlerin yaşam zamanlarını ve $X_{3i}, i=1,2,\ldots,n_3$ bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığının bilinmediği sistemlerin yaşam zamanlarını göstersin. Bu durumda (3.1) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonu

$$z_{ji}^{(k)}=\frac{x_{ji}-\mu_k}{\sigma_k},\ j=12,3;\ k=1,2;\ i=1,2,\ldots,n_j$$

olmak üzere

$$L(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{1i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{1i}^{(2)}\right)\prod_{i=1}^{n_2}\frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{2i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_3}\left(\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)\right) \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada $\overline{F}(\square)=1-F(\square)$ dir ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\mu_1,\mu_2)=-n_1\log(\sigma_1)-n_2\log\sigma_2+\sum_{i=1}^{n_1}\log\left(f\left(z_{1i}^{(1)}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n_2}\log\left(f\left(z_{2i}^{(2)}\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1}\log\left(\overline{F}\left(z_{1i}^{(2)}\right)\right)+\sum_{i=1}^{n_2}\log\left(\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n_3}\log\left(\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial\ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\frac{1}{\sigma_1^2}f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\frac{\partial\ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)}+\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{\overline{F}\left(z_{1i}^{(2)}\right)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\frac{1}{\sigma_2^2}f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)+\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

dir ve buradan

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1}=\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\frac{f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)} \tag{4.2}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{3i}^{(2)}\right)f\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2}=\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)}+\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{\overline{F}\left(z_{1i}^{(2)}\right)}$$

$$+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\frac{f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)} \tag{4.3}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre olabilirlik denklemlerinin

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \mu_1}\right|_{\mu_1=\hat{\mu}_1}=0 \tag{4.4}$$

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \mu_2}\right|_{\mu_2=\hat{\mu}_2}=0 \tag{4.5}$$

olduğu düşünüldüğünde bu denklemlerden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ genellikle analitik olarak elde edilememektedir. Bu nedenle (4.2) ve (4.3) eşitliklerindeki toplam sembollerinin

içinde yer alan ifadeler t_{1i}, t_{2i} ve t_{3i} civarında birinci dereceden Taylor serisine açılsın. Bu açılımlar aşağıda verilmiştir.

$$h_1\left(z_{1i}^{(1)}\right)=\frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)}\cong h_1\left(t_{1i}\right)+h_1'\left(t_{1i}\right)\left(z_{1i}^{(1)}-t_{1i}\right)=\alpha_i^{(1)}-\beta_i^{(1)}z_{1i}^{(1)}$$

$$h_2\left(z_{2i}^{(1)}\right)=\frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{\overline{F}\left(z_{2i}^{(1)}\right)}\cong h_2\left(t_{2i}\right)+h_2'\left(t_{2i}\right)\left(z_{2i}^{(1)}-t_{2i}\right)=\delta_i^{(1)}+\gamma_i^{(1)}z_{2i}^{(1)}$$

$$h_3\left(z_{3i}^{(1)},z_{3i}^{(2)}\right)=\frac{f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_3\left(t_{3i},t_{3i}\right)+\left(z_{3i}^{(1)}-t_{3i}\right)h_3^{(1)}\left(t_{3i},t_{3i}\right)+\left(z_{3i}^{(2)}-t_{3i}\right)h_3^{(2)}\left(t_{3i},t_{3i}\right)$$

$$=\phi_i^{(1)}+\psi_i^{(1)}z_{3i}^{(1)}+\xi_i^{(1)}z_{3i}^{(2)}$$

$$h_4\left(z_{3i}^{(1)},z_{3i}^{(2)}\right)=\frac{f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_4+\left(z_{3i}^{(1)}-t_{3i}\right)h_4^{(1)}+\left(z_{3i}^{(2)}-t_{3i}\right)h_4^{(1)}$$

$$=\theta_i^{(1)}+\lambda_i^{(1)}z_{3i}^{(1)}+\tau_i^{(1)}z_{3i}^{(2)}$$

$$h_5\left(z_{2i}^{(2)}\right)=\frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)}\cong h_5\left(t_{2i}\right)+h_5'\left(t_{2i}\right)\left(z_{2i}^{(2)}-t_{2i}\right)=\alpha_i^{(2)}-\beta_i^{(2)}z_{2i}^{(2)}$$

$$h_6\left(z_{1i}^{(2)}\right)=\frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{\overline{F}\left(z_{1i}^{(2)}\right)}\cong h_6\left(t_{1i}\right)+h_6'\left(t_{1i}\right)\left(z_{1i}^{(2)}-t_{1i}\right)=\delta_i^{(2)}+\gamma_i^{(2)}z_{2i}^{(2)}$$

$$h_7\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)\overline{F}\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_7\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(1)} - t_{3i}\right) h_7^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(2)} - t_{3i}\right) h_7^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)$$

$$= \phi_i^{(2)} + \psi_i^{(2)} z_{3i}^{(1)} + \xi_i^{(2)} z_{3i}^{(2)}$$

Yukarıdaki Taylor serisi açılımlarından

$$\alpha_i^{(1)} = h_1\left(t_{1i}\right) - t_{1i} h_1'\left(t_{1i}\right), \quad \beta_i^{(1)} = -h_1'\left(t_{1i}\right), \; i = 1,2,\ldots,n_1$$

$$\delta_i^{(1)} = h_2\left(t_{2i}\right) - t_{2i} h_2'\left(t_{2i}\right), \; \gamma_i^{(1)} = h_2'\left(t_{2i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_2$$

$$\phi_i^{(1)} = h_3\left(t_{3i}, t_{3i}\right) - t_{3i}\left(h_3^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + h_3^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)\right), \psi_i^{(1)} = h_3^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right),$$
$$\xi_i^{(1)} = h_3^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_3$$

$$\theta_i^{(1)} = h_4\left(t_{3i}, t_{3i}\right) - t_{3i}\left(h_4^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + h_4^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)\right), \lambda_i^{(1)} = h_4^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right),$$
$$\tau_i^{(1)} = h_4^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_3$$

$$\alpha_i^{(2)} = h_5\left(t_{2i}\right) - t_i h_5'\left(t_{2i}\right), \; \beta_i^{(2)} = -h_5'\left(t_{2i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_2$$

$$\delta_i^{(2)} = h_6\left(t_{1i}\right) - t_{1i} h_6'\left(t_{1i}\right), \; \gamma_i^{(2)} = h_6'\left(t_{1i}\right), \; i = 1,2,\ldots,n_1$$

$$\phi_i^{(2)} = h_7\left(t_{3i}, t_{3i}\right) - t_{3i}\left(h_7^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + h_7^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)\right), \psi_i^{(2)} = h_7^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right),$$
$$\xi_i^{(2)} = h_7^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n_3$$

eşitlikleri elde edilir, burada

$$h_k^{(j)}\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{\partial h_k^{(j)}\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right)}{\partial z_{3i}^{(j)}},\ j = 1,2$$

şeklindedir. (4.4) ve (4.5) de verilen olabilirlik denklemlerindeki ifadelerin yerine Taylor açılımından elde edilen yaklaşık değerleri yazıldığında asimptotik olabilirlik denklemleri

$$\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\alpha_i^{(1)} - \beta_i^{(1)} z_{1i}^{(1)}\right) + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\delta_i^{(1)} + \gamma_i^{(1)} z_{2i}^{(1)}\right) +$$
$$+ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\left(\phi_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} z_{3i}^{(1)} + \xi_i^{(1)} z_{3i}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{n_3}\left(\theta_i^{(1)} + \lambda_i^{(1)} z_{3i}^{(1)} + \tau_i^{(1)} z_{3i}^{(2)}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\alpha_i^{(2)} - \beta_i^{(2)} z_{2i}^{(2)}\right) + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\delta_i^{(2)} + \gamma_i^{(2)} z_{1i}^{(2)}\right) +$$
$$+ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\left(\phi_i^{(2)} + \psi_i^{(2)} z_{3i}^{(1)} + \xi_i^{(2)} z_{3i}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{n_3}\left(\theta_i^{(1)} + \lambda_i^{(1)} z_{3i}^{(1)} + \tau_i^{(1)} z_{3i}^{(2)}\right) = 0$$

elde edilir. Bu denklemlerde

$$z_{ji}^{(k)} = \frac{x_{ji} - \mu_k}{\sigma_k},\ j = 12,3;\ k = 1,2;\ i = 1,2,\ldots,n_j$$

değerleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial \ell\left(\mu_1, \mu_2\right)}{\partial \mu_1} \cong \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(1)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)} - \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)} x_{1i} + \frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)}$$
$$+ \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)} x_{2i} - \frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)} x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_1\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)} x_{3i}$$
$$- \frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)} x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)} x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2} \cong \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i^{(2)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(2)} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)} - \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}x_{2i} + \frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}$$
$$+ \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}x_{1i} - \frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)}x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)}x_{3i}$$
$$- \frac{\hat{\mu}_2\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i} - \frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)} = 0$$

asimptotik olabilirlik denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin MML tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_2B_3 - A_3B_2}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_2B_3 - A_3B_2}$$

şeklinde analitik olarak elde edilir. Burada

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i} + \sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)}x_{3i}\right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}$$
$$+ \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}x_{2i} - \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)}x_{1i}\right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)}x_{3i} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)} - \sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}$$

$$A_3 = -\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}$$

$$B_1 = \frac{1}{\sigma_2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)}x_{3i} + \sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}$$
$$+ \frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}x_{1i} - \sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}x_{2i}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)}x_{3i} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i}$$

$$B_2 = -\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}$$

$$B_3 = \frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}$$

şeklindedir.

4.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler

$T_{1i},\ i=1,2,\ldots,n$: $i.$ sistemdeki 1. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{11},T_{12},...,T_{1n}$, $f_1(x;\mu_1)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu ve $F_1(x;\mu_1)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler ve $T_{2i},\ i=1,2,\ldots,n$: $i.$ sistemdeki 2. bileşenin yaşam zamanı olmak üzere, $T_{21},T_{22},...,T_{2n}$, $f_2(x;\mu_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu $F_2(x;\mu_2)$ dağılım fonksiyonlu bağımsız rasgele değişkenler olsun. Ayrıca T_{1i} ile $T_{2i},\ i=1,2,\ldots,n$ de bağımsız olsun.

Birbirlerine paralel bağlı iki bileşenden oluşan n tane özdeş sistem düşünülsün. Bu sistemlerin yaşam zamanları $X_1,X_2,\ldots,X_n$ olsun. Bu n tane sistemdeki birinci ve ikinci bileşenin konum ölçek parametreli dağılıma sahip olduğu ve konum ve ölçek parametrelerinin sırasıyla μ_1,σ_1 ve μ_2,σ_2 olduğu ve σ_1 ve σ_2 parametrelerinin bilindiği varsayılsın. Bu n tane sistemden n_1 tanesi birinci bileşenden, n_2 tanesi ikinci bileşenden dolayı bozulmuş olsun. Ayrıca n_3 tane sistemdeki bozulmaların hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenememiş olsun. $X_{1i},\ i=1,2,\ldots,n_1$ birinci bileşenden dolayı bozulan sistemlerin yaşam zamanlarını,

$X_{2i}, i = 1,2,\ldots,n_2$ ikinci bileşenden dolayı bozulan sistemlerin yaşam zamanlarını ve $X_{3i}, i = 1,2,\ldots,n_3$ bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığının bilinmediği sistemlerin yaşam zamanlarını göstersin. Bu durumda (3.2) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonu

$$z_{ji}^{(k)} = \frac{x_{ji} - \mu_k}{\sigma_k} \ , j = 12,3;\ k = 1,2;\ i = 1,2,\ldots,n_j$$

olmak üzere

$$L(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sigma_1} f\left(z_{1i}^{(1)}\right) F\left(z_{1i}^{(2)}\right) \prod_{i=1}^{n_2}\frac{1}{\sigma_2} f\left(z_{2i}^{(2)}\right) F\left(z_{2i}^{(1)}\right) \times \prod_{i=1}^{n_3}\left(\frac{1}{\sigma_1} f\left(z_{3i}^{(1)}\right) F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \frac{1}{\sigma_2} f\left(z_{3i}^{(2)}\right) F\left(z_{3i}^{(1)}\right)\right) \tag{4.6}$$

şeklinde ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\mu_1,\mu_2) = -n_1\log(\sigma_1) - n_2\log\sigma_2 + \sum_{i=1}^{n_1}\log\left(f\left(z_{1i}^{(1)}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n_2}\log\left(f\left(z_{2i}^{(2)}\right)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_1}\log\left(F\left(z_{1i}^{(2)}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n_2}\log\left(F\left(z_{2i}^{(1)}\right)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_3}\log\left(\frac{1}{\sigma_1} f\left(z_{3i}^{(1)}\right) F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \frac{1}{\sigma_2} f\left(z_{3i}^{(2)}\right) F\left(z_{3i}^{(1)}\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1} = \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{F\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\frac{1}{\sigma_1^2}f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) - \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2} = \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{F\left(z_{1i}^{(2)}\right)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\frac{1}{\sigma_2^2}f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right) - \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_1}f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \frac{1}{\sigma_2}f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

dir ve buradan

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1} = \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{F\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\frac{f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{2i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{2i}^{(1)}\right)} \tag{4.7}$$

$$-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{3i}^{(2)}\right)f\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{2i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

$$\frac{\partial \ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2} = \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{F\left(z_{1i}^{(2)}\right)}$$

$$+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\frac{f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{2i}^{(1)}\right)} \tag{4.8}$$

$$-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{2i}^{(2)}\right)+\sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{2i}^{(1)}\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre olabilirlik denklemlerinin

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \mu_1}\right|_{\mu_1=\hat{\mu}_1} = 0 \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \mu_2}\right|_{\mu_2=\hat{\mu}_2} = 0 \tag{4.10}$$

olduğu düşünüldüğünde bu denklemlerden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ genellikle analitik olarak elde edilememektedir. Bu nedenle (4.7) ve (4.8) eşitliklerindeki toplam sembollerinin içinde yer alan ifadeler t_{1i}, t_{2i} ve t_{3i} civarında birinci dereceden Taylor serisine açılsın. Bu açılımlar aşağıda verilmiştir.

$$h_1\left(z_{1i}^{(1)}\right) = \frac{f'\left(z_{1i}^{(1)}\right)}{f\left(z_{1i}^{(1)}\right)} \cong h_1\left(t_{1i}\right) + h_1'\left(t_{1i}\right)\left(z_{1i}^{(1)} - t_{1i}\right) = \alpha_i^{(1)} - \beta_i^{(1)} z_{1i}^{(1)}$$

$$h_2\left(z_{2i}^{(1)}\right) = \frac{f\left(z_{2i}^{(1)}\right)}{F\left(z_{2i}^{(1)}\right)} \cong h_2\left(t_{2i}\right) + h_2'\left(t_{2i}\right)\left(z_{2i}^{(1)} - t_{2i}\right) = \delta_i^{(1)} + \gamma_i^{(1)} z_{2i}^{(1)}$$

$$h_3\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{f'\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_3\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(1)} - t_{3i}\right)h_3^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(2)} - t_{3i}\right)h_3^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)$$

$$= \phi_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} z_{3i}^{(1)} + \xi_i^{(1)} z_{3i}^{(2)}$$

$$h_4\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{f\left(z_{3i}^{(1)}\right)f\left(z_{3i}^{(2)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_4 + \left(z_{3i}^{(1)} - t_{3i}\right)h_4^{(1)} + \left(z_{3i}^{(2)} - t_{3i}\right)h_4^{(1)}$$

$$= \theta_i^{(1)} + \lambda_i^{(1)} z_{3i}^{(1)} + \tau_i^{(1)} z_{3i}^{(2)}$$

$$h_5\left(z_{2i}^{(2)}\right) = \frac{f'\left(z_{2i}^{(2)}\right)}{f\left(z_{2i}^{(2)}\right)} \cong h_5\left(t_{2i}\right) + h_5'\left(t_{2i}\right)\left(z_{2i}^{(2)} - t_{2i}\right) = \alpha_i^{(2)} - \beta_i^{(2)} z_{2i}^{(2)}$$

$$h_6\left(z_{1i}^{(2)}\right) = \frac{f\left(z_{1i}^{(2)}\right)}{F\left(z_{1i}^{(2)}\right)} \cong h_6\left(t_{1i}\right) + h_6'\left(t_{1i}\right)\left(z_{1i}^{(2)} - t_{1i}\right) = \delta_i^{(2)} + \gamma_i^{(2)} z_{2i}^{(2)}$$

$$h_7\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{f'\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}{\sigma_2 f\left(z_{3i}^{(1)}\right)F\left(z_{3i}^{(2)}\right) + \sigma_1 f\left(z_{3i}^{(2)}\right)F\left(z_{3i}^{(1)}\right)}$$

$$\cong h_7\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(1)} - t_{3i}\right)h_7^{(1)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right) + \left(z_{3i}^{(2)} - t_{3i}\right)h_7^{(2)}\left(t_{3i}, t_{3i}\right)$$

$$= \phi_i^{(2)} + \psi_i^{(2)} z_{3i}^{(1)} + \xi_i^{(2)} z_{3i}^{(2)}$$

Yukarıdaki Taylor serisi açılımlarından

$$\alpha_i^{(1)} = h_1(t_{1i}) - t_{1i}h_1'(t_{1i}),\ \ \beta_i^{(1)} = -h_1'(t_{1i})\ ,\ i = 1,2,\ldots,n_1$$

$$\delta_i^{(1)} = h_2(t_{2i}) - t_{2i}h_2'(t_{2i}),\ \gamma_i^{(1)} = h_2'(t_{2i})\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n_2$$

$$\phi_i^{(1)} = h_3(t_{3i},t_{3i}) - t_{3i}\left(h_3^{(1)}(t_{3i},t_{3i}) + h_3^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\right), \psi_i^{(1)} = h_3^{(1)}(t_{3i},t_{3i}),$$
$$\xi_i^{(1)} = h_3^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n_3$$

$$\theta_i^{(1)} = h_4(t_{3i},t_{3i}) - t_{3i}\left(h_4^{(1)}(t_{3i},t_{3i}) + h_4^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\right), \lambda_i^{(1)} = h_4^{(1)}(t_{3i},t_{3i}),$$
$$\tau_i^{(1)} = h_4^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\ \ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n_3$$

$$\alpha_i^{(2)} = h_5(t_{2i}) - t_i h_5'(t_{2i}),\ \beta_i^{(2)} = -h_5'(t_{2i})\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n_2$$

$$\delta_i^{(2)} = h_6(t_{1i}) - t_{1i}h_6'(t_{1i}),\ \gamma_i^{(2)} = h_6'(t_{1i})\ ,\ i = 1,2,\ldots,n_1$$

$$\phi_i^{(2)} = h_7(t_{3i},t_{3i}) - t_{3i}\left(h_7^{(1)}(t_{3i},t_{3i}) + h_7^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\right), \psi_i^{(2)} = h_7^{(1)}(t_{3i},t_{3i}),$$
$$\xi_i^{(2)} = h_7^{(2)}(t_{3i},t_{3i})\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n_3$$

eşitlikleri elde edilir, burada

$$h_k^{(j)}\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right) = \frac{\partial h_k^{(j)}\left(z_{3i}^{(1)}, z_{3i}^{(2)}\right)}{\partial z_{3i}^{(j)}},\ j = 1,2$$

şeklindedir. (4.9) ve (4.10) da verilen olabilirlik denklemlerindeki ifadelerin yerine Taylor açılımından elde edilen yaklaşık değerleri yazıldığında asimptotik olabilirlik denklemleri

$$\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\alpha_i^{(1)}-\beta_i^{(1)}z_{1i}^{(1)}\right)-\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\delta_i^{(1)}+\gamma_i^{(1)}z_{2i}^{(1)}\right)+$$
$$+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\left(\phi_i^{(1)}+\psi_i^{(1)}z_{3i}^{(1)}+\xi_i^{(1)}z_{3i}^{(2)}\right)-\sum_{i=1}^{n_3}\left(\theta_i^{(1)}+\lambda_i^{(1)}z_{3i}^{(1)}+\tau_i^{(1)}z_{3i}^{(2)}\right)=0$$

$$\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\alpha_i^{(2)}-\beta_i^{(2)}z_{2i}^{(2)}\right)-\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\delta_i^{(2)}+\gamma_i^{(2)}z_{1i}^{(2)}\right)+$$
$$+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\left(\phi_i^{(2)}+\psi_i^{(2)}z_{3i}^{(1)}+\xi_i^{(2)}z_{3i}^{(2)}\right)-\sum_{i=1}^{n_3}\left(\theta_i^{(1)}+\lambda_i^{(1)}z_{3i}^{(1)}+\tau_i^{(1)}z_{3i}^{(2)}\right)=0$$

elde edilir. Bu denklemlerde

$$z_{ji}^{(k)}=\frac{x_{ji}-\mu_k}{\sigma_k}\ ,j=1,2,3;\ k=1,2;\ i=1,2,\ldots,n_j$$

değerleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial\ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_1}\cong\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(1)}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)}x_{1i}+\frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)}$$
$$-\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}x_{2i}+\frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)}x_{3i}-\frac{\hat{\mu}_1\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)}x_{3i}$$
$$-\frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i}+\frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}+\frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}=0$$

$$\frac{\partial\ell(\mu_1,\mu_2)}{\partial\mu_2}\cong\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i^{(2)}-\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(2)}+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}x_{2i}+\frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}$$
$$-\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}x_{1i}+\frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}+\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)}x_{3i}-\frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)}+\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)}x_{3i}$$
$$-\frac{\hat{\mu}_2\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)}-\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i}+\frac{\hat{\mu}_1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}-\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}+\frac{\hat{\mu}_2}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}=0$$

asimptotik olabilirlik denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin MML tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_2 B_3 - A_3 B_2}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_2 B_3 - A_3 B_2}$$

şeklinde analitik olarak elde edilir. Burada

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^{(1)} - \sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(1)} - \sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i} + \sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)}x_{3i}\right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(1)} - \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}$$
$$-\frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}x_{2i} + \sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)}x_{1i}\right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)}x_{3i} - \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\beta_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2}\gamma_i^{(1)}\right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}$$

$$A_3 = -\frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(1)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}$$

$$B_1 = \frac{1}{\sigma_2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{n_2}\delta_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)}x_{3i} - \sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}x_{3i}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\phi_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{n_3}\theta_i^{(1)}$$
$$-\frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)}x_{2i}\right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)}x_{3i} - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}x_{3i}$$

$$B_2 = -\frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\psi_i^{(2)} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_i^{(1)}$$

$$B_3 = \frac{1}{\sigma_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{n_1}\gamma_i^{(2)}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_3}\xi_i^{(2)} + \frac{1}{\sigma_2}\sum_{i=1}^{n_3}\tau_i^{(1)}$$

şeklindedir.

4.3. Maskeli Örneklemlere Dayalı Logistik Dağılımının MML Tahmin Edicileri

Bu kısımda, sistemi oluşturan iki bileşenin yaşam zamanlarının bağımsız ve sırasıyla $Lojistik(\mu_1,\sigma_1)$ ve $Lojistik(\mu_2,\sigma_2)$ dağılımlarına sahip olmaları durumunda μ_1 ve μ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmini ele alınacaktır. Yani $T_{11},T_{12},...,T_{1n} \sim Lojistik(\mu_1,\sigma_1)$ ve $T_{21},T_{22},...,T_{2n} \sim Lojistik(\mu_2,\sigma_2)$ olmak üzere T_{1i} ve T_{2i} $,i=1,2,\ldots,n$ rasgele değişkenleri bağımsız olarak varsayılmıştır.

4.3.1. İki Bileşenli Seri Sistemler

Yaşam zamanları $X_1,X_2,\ldots,X_n$ ile gösterilen, seri bağlı iki bileşenden oluşan n tane özdeş sistem düşünülsün. Bu n tane sistemden n_1 tanesi birinci bileşenden, n_2 tanesi ikinci bileşenden dolayı bozulmuş olsun. Ayrıca n_3 tane sistemdeki bozulmaların hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenememiş olsun. Bu durumda (4.1) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonu

$$L(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{\exp\left(-z_{1i}^{(1)}\right)}{\sigma_1\left[1+\exp\left(-z_{1i}^{(1)}\right)\right]^2}\left(\frac{\exp\left(-z_{1i}^{(2)}\right)}{1+\exp\left(-z_{1i}^{(2)}\right)}\right)$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_2}\frac{\exp\left(-z_{2i}^{(2)}\right)}{\sigma_2\left[1+\exp\left(-z_{2i}^{(2)}\right)\right]^2}\left(\frac{\exp\left(-z_{2i}^{(1)}\right)}{1+\exp\left(-z_{2i}^{(1)}\right)}\right)$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_3}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\exp\left(-z_{3i}^{(j)}\right)}{\sigma_j\left[1+\exp\left(-z_{3i}^{(j)}\right)\right]^2}\left(\frac{\exp\left(-z_{3i}^{(3-j)}\right)}{1+\exp\left(-z_{3i}^{(3-j)}\right)}\right)\right)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve

$$z_{ji}^{(k)} = \frac{x_{ji} - \mu_k}{\sigma_k} \ , j = 1,2,3;\ k = 1,2;\ i = 1,2,\ldots,n_j$$

şeklindedir. Dolayısıyla μ_1 ve μ_2 parametreleri için olabilirlik denklemleri sırasıyla

$$\frac{\partial L(\mu_1, \mu_2; \mathbf{x})}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mu_1, \mu_2; \mathbf{x})}{\partial \mu_2} = 0$$

şeklinde olacaktır. Bu olabilirlik denklemlerinden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ analitik olarak elde edilememektedir. Ancak $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicileri yaklaşık olarak, modifiye edilmiş en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilebilmektedir.

4.3.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler

Yaşam zamanları $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterilen, paralel bağlı iki bileşenden oluşan n tane özdeş sistem düşünülsün. Bu n tane sistemden n_1 tanesi birinci bileşenden, n_2 tanesi ikinci bileşenden dolayı bozulmuş olsun. Ayrıca n_3 tane sistemdeki bozulmaların hangi bileşenden kaynaklandığı gözlenememiş olsun. Bu durumda (4.6) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonu

$$L\left(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x}\right)=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{\exp\left(-z_{1i}^{(1)}\right)}{\sigma_1\left[1+\exp\left(-z_{1i}^{(1)}\right)\right]^2\left(1+\exp\left(-z_{1i}^{(2)}\right)\right)}$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_2}\frac{\exp\left(-z_{2i}^{(2)}\right)}{\sigma_2\left[1+\exp\left(-z_{2i}^{(2)}\right)\right]^2\left(1+\exp\left(-z_{2i}^{(1)}\right)\right)}$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_3}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\exp\left(-z_{3i}^{(j)}\right)}{\sigma_j\left[1+\exp\left(-z_{3i}^{(j)}\right)\right]^2\left(1+\exp\left(-z_{3i}^{(3-j)}\right)\right)}\right)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ ve

$$z_{ji}^{(k)}=\frac{x_{ji}-\mu_k}{\sigma_k}\ ,\ j=1,2,3;\ k=1,2;\ i=1,2,\ldots,n_j$$

şeklindedir. Dolayısıyla μ_1 ve μ_2 parametreleri için olabilirlik denklemleri sırasıyla

$$\frac{\partial L\left(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x}\right)}{\partial\mu_1}=0$$

$$\frac{\partial L\left(\mu_1,\mu_2;\mathbf{x}\right)}{\partial\mu_2}=0$$

şeklinde olacaktır. Bu olabilirlik denklemlerinden μ_1 ve μ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ analitik olarak elde edilememektedir. Ancak $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicileri yaklaşık olarak, modifiye edilmiş en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilebilmektedir.

5. SİMÜLASYON

Bu kesimde, sistemi oluşturan iki bileşenin birbirlerine seri yada paralel olarak bağlı olması durumları için sistemlerin yaşam zamanlarına bağlı olarak, bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının parametre tahminlerine ilişkin simülasyon sonuçları 10000 tekrar ile ayrı ayrı elde edilmiştir. Sistemi oluşturan bileşenlerin μ_1, σ_1 ve μ_2, σ_2 parametreli lojistik dağılımına sahip oldukları ve σ_1 ve σ_2 parametrelerinin bilindikleri varsayılmıştır. μ_1 ve μ_2 parametreleri için elde edilen MML tahmin edicileri $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ ile birlikte bu tahmin edicilerin yan (Bias) ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri simülasyonla elde edilmiştir. Ayrıca $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve varyanslarının maskeleme olasılığı p ve örnek hacmi n'e bağlı olarak değişimleri incelenmiştir.

5.1. İki Bileşenli Seri Sistemler

Seri bağlı iki bileşenden oluşan n tane sistemin yaşam zamanlarına bağlı olarak $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin beklenen değerleri, yanları ve MSE değerlerine ilişkin simülasyon sonuçları $p = 0, 0.3, 0.5$ gibi üç farklı maskeleme olasılığı ve $n = 10, 30, 50, 100$ gibi dört farklı örnek hacmi için elde edilmiş ve bu değerler Çizelge 1'de verilmiştir. Burada $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ olduğu yani seri sistemi oluşturan bileşenlerin özdeş oldukları varsayılmıştır.

Çizelge 1. $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları

p	n	$Bias(\hat{\mu}_1)$	$MSE(\hat{\mu}_1)$	$Bias(\hat{\mu}_2)$	$MSE(\hat{\mu}_2)$
0	**10**	0.1134	1.6435	0.1060	1.5759
	30	0.0969	0.5655	0.0890	0.5586
	50	0.0732	0.3461	0.0828	0.3478
	100	0.0312	0.1820	-0.0149	0.1787
0.3	**10**	-0.1785	0.7847	-0.1758	0.7745
	30	-0.0538	0.4554	-0.0587	0.4380
	50	0.0132	0.2861	0.0141	0.2944
	100	0.0051	0.1613	0.0046	0.1577
0.5	**10**	-0.4035	0.8213	-0.4031	0.8264
	30	-0.1654	0.3820	-0.1726	0.3791
	50	-0.0843	0.2555	-0.0878	0.2519
	100	-0.0023	0.1441	-0.0053	0.1397

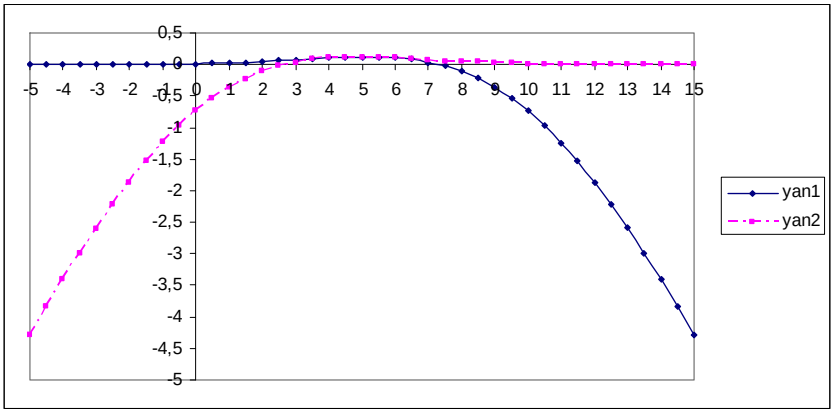
Çizelge 1'e bakıldığında maskeleme olasılığı p değeri sabit tutulup n değeri artırıldığında $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin ciddi şekilde küçüldüğü görülmektedir. n değeri sabit tutulup p değeri artırıldığında ise $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin MSE değerlerinin küçüldüğü ancak yan değerlerinin arttığı gözlenmektedir. Yan değerlerindeki artışın sebebi olarak, maskeleme olasılığındaki artışa bağlı bilgi kaybının fazlalaşması gösterilebilir. Çünkü maskeleme olasılığının artması bozulmanın hangi bileşenden kaynaklandığı bilinmeyen sistemlerin sayısının artması anlamına gelmektedir.

$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ olduğu varsayıldığında yani sistemdeki birinci bileşenin ortalama yaşam zamanının ikinci bileşeninkinden daha büyük olması durumunda elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 2'de verildiği gibidir.

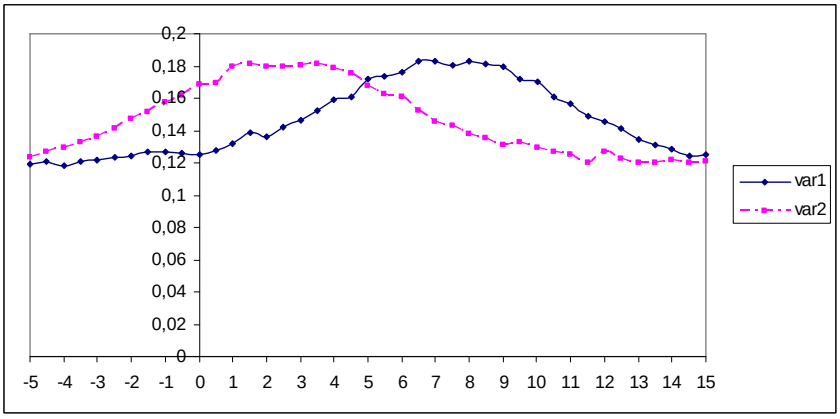
Çizelge 2. $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları

p	n	$Bias(\hat{\mu}_1)$	$MSE(\hat{\mu}_1)$	$Bias(\hat{\mu}_2)$	$MSE(\hat{\mu}_2)$
0	**10**	0.1065	1.7011	0.0986	1.5347
	30	0.0881	0.5929	0.0840	0.5276
	50	0.0704	0.3586	0.0734	0.3177
	100	-0.0511	0.1910	-0.0078	0.1661
0.3	**10**	-0.5804	1.3994	-0.1997	1.0243
	30	-0.2733	0.5378	-0.0146	0.4248
	50	-0.1674	0.3369	0.0479	0.2909
	100	-0.0798	0.1718	0.0872	0.1587
0.5	**10**	-0.9062	1.5510	-0.3160	0.7403
	30	-0.5191	0.6433	-0.0816	0.3485
	50	-0.3854	0.4054	0.0042	0.2419
	100	-0.2510	0.2093	0.0773	0.1409

Çizelge 2'ye bakıldığında $\mu_1 = \mu_2 = 1$ durumu için elde edilen sonuçlara benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. Ayrıca $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ için $\hat{\mu}_1$ tahmin edicisinin yan değerleri $\hat{\mu}_2$ 'ninkinden daha büyük çıkmaktadır. Bunun sebebi, birinci bileşenin ortalama ömrünün ikinci bileşeninkinden daha büyük olmasına bağlı olarak sistem bozulmalarının çoğunun ikinci bileşenden kaynaklanmasıdır. Bu durumda birinci bileşenden elde edilen gözlem sayısı küçük olacağından $\hat{\mu}_1$ tahmin edicisinin yanı Çizelge 1'dekilerden daha büyük çıkmıştır. $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve varyans değerlerinin değişimlerini daha iyi görebilmek için $n = 100, p = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ ve $\mu_2 = 5$ için μ_1 parametresinin -5 ile 15 arasında değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve varyans değerlerinin grafikleri elde edilmiş ve sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 1. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları

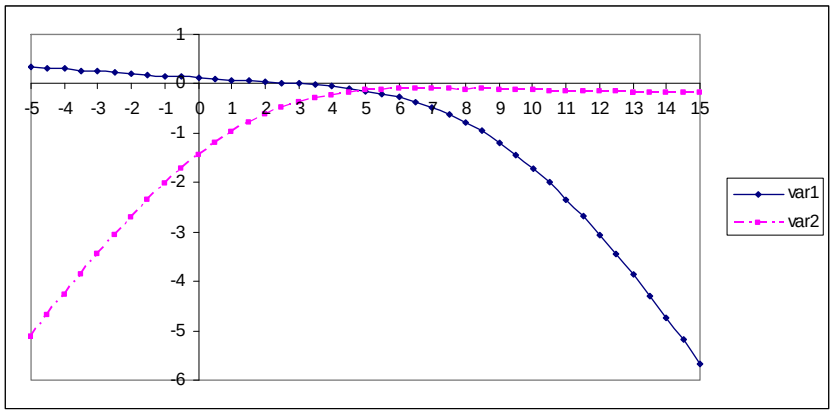


Şekil 2. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

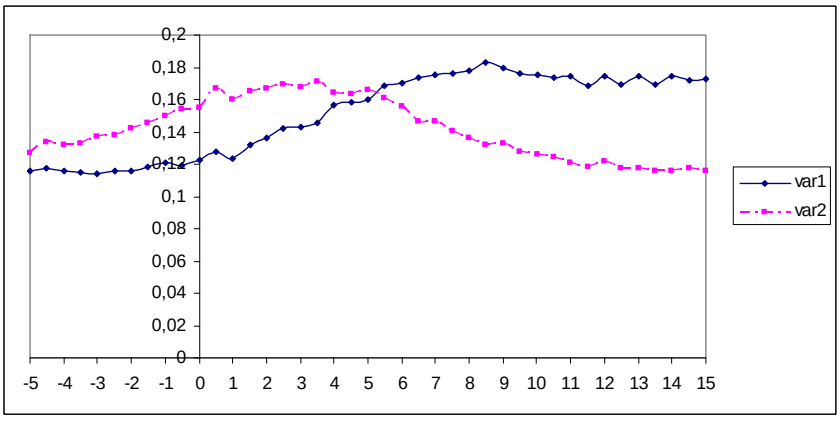
Şekil 1'e bakıldığında $\mu_1 < \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_2$'nın yanı, $\mu_1 > \mu_2 = 5$ olduğunda ise $\hat{\mu}_1$'nın yanı mutlak değerce daha büyük çıkmaktadır ve μ_1 ve μ_2 arasındaki fark büyüdükçe bu yan değerleri de mutlak değerce büyüdüğü görülmektedir. Çünkü μ_1 ve μ_2 arasındaki farkın büyümesi durumunda ortalama ömrü büyük olan bileşenden çok az gözlem elde edilebilmekte ve bu durumda da bu bileşenin yaşam zamanı dağılımının parametresinin tahmin edicisinin yanı büyük çıkmaktadır. Ayrıca μ_1'in $\mu_2 = 5$ değerine yakın değerleri için her iki bileşenden de yakın sayıda gözlemler elde edileceği için $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yan değerleri beklendiği gibi birbirine yakın olarak elde edilmiştir.

Şekil 2'ye göre, μ_1 ve μ_2 arasındaki fark mutlak değerce büyüdükçe, $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin varyansları birbirine yaklaşmaktadır. Ayrıca μ_1'in $\mu_2 = 5$ değerine yakın değerleri için de varyanslar birbirine yakın çıkmakta ve $\mu_1 \cong 5$ için varyanslar eşit çıkmaktadır.

Yukarıdaki koşullardan farklı olarak maskeleme olasılığı $p = 0.3$ olarak alındığında $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yanlarının ve varyanslarının grafikleri sırasıyla Şekil 3 ve Şekil 4'de verilmiştir.



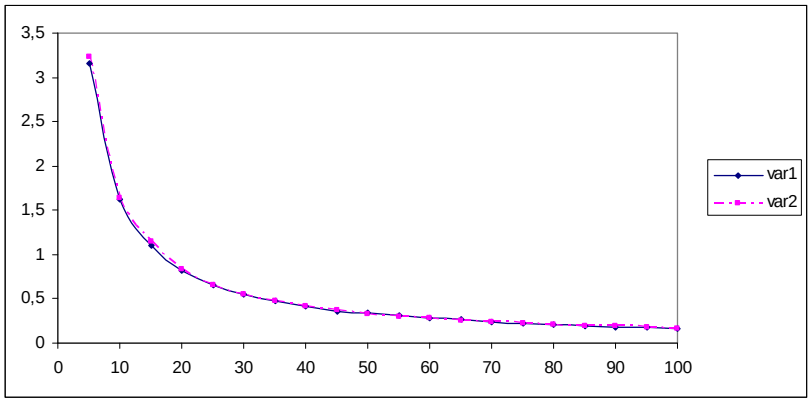
Şekil 3. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları



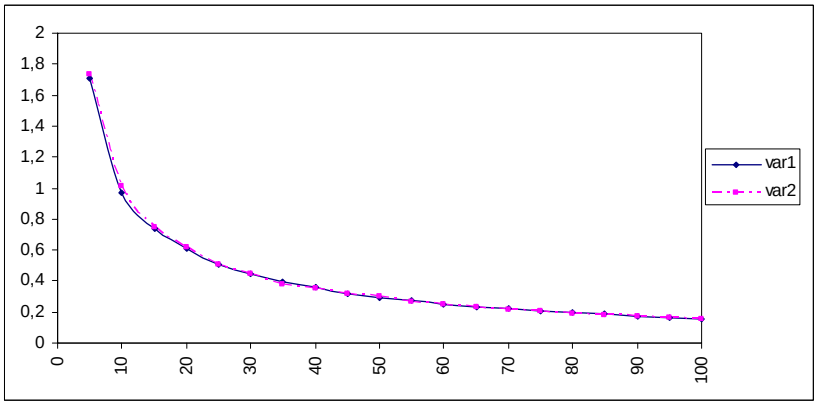
Şekil 4. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

Şekil 3 ve Şekil 4'e göre $\mu_1 \cong \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yanlarının ve varyanslarının yaklaşık olarak eşit olduğu görülmektedir. Ancak $p = 0$ durumundan farklı olarak $\mu_1 < \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_1$, $\mu_1 > \mu_2 = 5$ olduğunda ise $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin bir miktar yana sahip oldukları gözlenmektedir.

$p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için örnek hacmi n'nin 5 ile 100 arasında değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin varyans değerlerinin grafiği Şekil 5'de ve $p = 0.3$ durumu için Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 5. $p = 0$ için n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları



Şekil 6. $p = 0.3$ için n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

Şekil 5 ve Şekil 6'dan açıkça görülüyor ki maskeleme olması veya olmaması durumlarında n değeri büyüdükçe $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları birlikte sıfıra yaklaşmaktadır.

5.1.1. Uygulama

Bu kısımda, $p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için paralel sistemlerin yaşam zamanlarından simülasyonla $n = 100$ birimlik gözlem elde edilmiş ve bu gözlemler sistemin bozulmasına neden olan bileşene göre iki blok halinde Çizelge 3'de gösterilmiştir.

Çizelge 3. $p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti

X_{1i} , $i = 1,2,\ldots,52$				X_{2i} , $i = 1,2,\ldots,48$			
2.9683	-0.1714	1.8215	2.7549	-4.2436	-1.8770	3.3164	-4.0002
-2.8226	-0.2551	2.3315	4.4923	0.3028	-2.1890	0.2648	1.7573
4.3775	-0.1015	-1.1039	3.3128	-1.0783	2.4549	-4.2800	-5.5655
-4.9158	-1.8385	-7.2319	3.5063	1.6723	-8.1355	-0.2080	3.1154
-0.3827	-2.2192	-0.7514	-1.8244	1.3470	-1.5724	-1.0809	-0.7888
-0.3130	-0.9338	1.2496	0.0720	5.4017	-3.1947	-4.2365	-2.8968
2.4172	-1.8732	-0.8436	0.2169	-3.5388	-1.3695	0.9893	2.6023
-5.2259	2.0835	0.2465	1.3540	-1.5134	7.0399	-3.2633	0.1954
2.6219	-0.4335	-0.8155	-2.8665	-6.0265	6.6410	2.1607	-1.2049
-2.6920	-1.4720	-4.4993	-0.7407	-0.8303	0.4839	2.0419	
3.9723	-3.7359	0.8946	6.1618	0.7348	2.6126	-1.8544	
1.3623	-1.5285	-2.5527	-4.7533	-3.3290	1.6504	-0.0187	
0.7411	-2.3243	-1.5237	0.2128	-0.4119	-0.6838	1.9645	

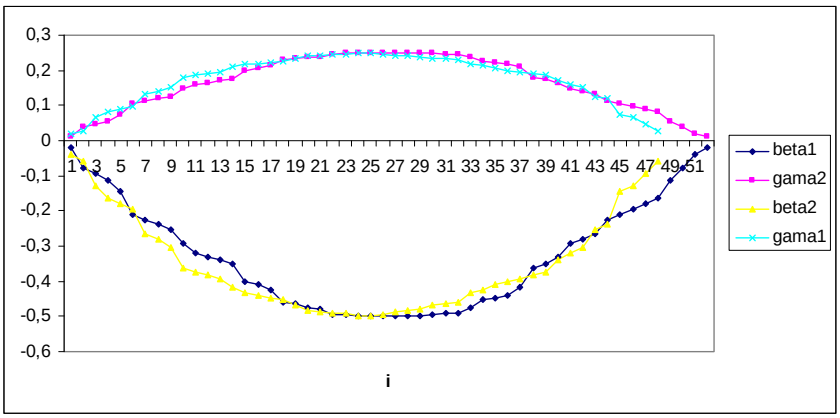
Bu değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin ML ve MML tahmin değerleri ve asimptotik güven aralıkları Çizelge 4'de verildiği gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri

	MLE	**MMLE**	**Asimptotik Güven Aralığı**
μ_1	1.4698	1.5471	(-3.3507 , 6.4513)
μ_2	1.6559	1.7243	(-3.0215 , 6.4726)

Çizelge 4'e bakıldığında MML tahmin değerlerinin ML tahmin değerlerine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 3'deki değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin Çizelge 4'de verilen MML tahmin değerlerinin elde edilmesinde kullanılan t_{1i}, t_{2i} ve t_{3i} civarında Taylor serisi açılımlarında sırasıyla $z_{1i}^{(1)}, z_{1i}^{(2)}, z_{2i}^{(1)}$ ve $z_{2i}^{(2)}$'lerin katsayıları durumunda bulunan $\beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(1)}$ ve $\beta_i^{(2)}$ parametrelerin, karşılık gelen $t_{\cdot i}$'lere göre sıralanmasından sonra elde edilen değerlerin grafikleri Şekil 7'de verilmiştir. Bu parametreler aynı zamanda gözlemlerin ağırlıkları olarak da yorumlanmaktadır.



Şekil 7. Ağırlıkların grafikleri

Şekil 7'den i'nin küçük ve büyük değerleri için $\beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(1)}$ ve $\beta_i^{(2)}$ parametrelerin mutlak değerce küçük, i'nin ara değerleri için mutlak değerce büyük değerler aldığı görülmektedir. Yani gözlemlerdeki uç değerlere küçük ağırlıklar, ara değerlere büyük ağırlıklar yüklenmektedir. Bu da MML tahmin edicilerinin uç değerlere karşı sağlam (robust) tahmin ediciler olduğunu göstermektedir.

Burada ayrıca, yukarıdaki uygulama ile aynı koşullar altında sadece $p = 0.3$ alınarak $n = 100$ birimlik başka bir veri seti üretilmiş ve Çizelge 5'de verilmiştir.

Çizelge 5. $p = 0.3, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti

X_{1i} , $i = 1,2,\ldots,26$		X_{2i} , $i = 1,2,\ldots,38$			X_{3i} , $i = 1,2,\ldots,36$		
-0.0453	-0.0997	-2.2899	2.5522	0.9514	-1.7405	1.8927	1.0000
-3.8306	-0.5576	-0.4352	-8.7420	-1.4452	-0.9597	-4.5108	-2.3430
-4.1560	1.7761	-1.2331	3.1927	-1.1497	-0.0824	-3.2533	-0.1081
-4.5129	1.3901	-0.8986	-2.5706	-0.5201	2.6725	-0.3151	1.2822
-2.2776	-3.8649	-2.4820	3.5806	-0.7283	-0.6317	-2.6075	-0.4433
-2.6131	-2.8607	-6.6193	-0.8119	-3.1330	-0.8171	-4.2621	-4.1258
0.9622	-3.3518	-8.2624	-2.3604	2.5206	3.4478	2.2948	-2.0276
1.0797	1.4373	2.7724	-2.0673	-0.9161	0.9402	3.0974	0.9485
1.7220	-3.3792	-1.6980	0.9852	-4.7082	-6.7536	1.4173	1.7065
-3.5399	-7.1692	1.7515	-2.3774	-0.2629	2.2439	0.2858	-3.1853
-0.8887	-0.2050	2.1860	-3.8752	-1.6796	-3.7298	0.2195	
-2.2981	-2.8452	-1.2641	0.0345	1.3253	2.7458	-4.7312	
-4.4927	-0.4515	-0.7358	0.4919		1.3504	2.7030	

Çizelge 5'de verilen değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin ML ve MML tahmin değerleri ve asimptotik güven aralıkları Çizelge 6'da verildiği gibi elde edilmiştir.

Çizelge 6. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri

	MLE	**MMLE**	**Asimptotik Güven Aralığı**
μ_1	1.2856	1.3272	(-2.8714 , 5.5258)
μ_2	0.5781	0.7515	(-3.9687 , 5.4716)

Çizelge 6'ya bakıldığında MML tahmin değerlerinin ML tahmin değerlerine yakın olduğu görülmektedir.

5.2. İki Bileşenli Paralel Sistemler

Paralel bağlı iki bileşenden oluşan n tane sistemin yaşam zamanlarına bağlı olarak $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin beklenen değerleri, yanları ve MSE değerlerine

ilişkin simülasyon sonuçları $p = 0.0,0.3,0.5$ gibi üç farklı maskeleme olasılığı ve $n = 10,30,50,100$ gibi dört farklı örnek hacmi için elde edilmiş ve bu değerler Çizelge 7'de verilmiştir. Burada $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ olduğu yani sistemi oluşturan bileşenlerin özdeş oldukları varsayılmıştır.

Çizelge 7. $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları

p	n	$Bias(\hat{\mu}_1)$	$MSE(\hat{\mu}_1)$	$Bias(\hat{\mu}_2)$	$MSE(\hat{\mu}_2)$
0	**10**	-0.1203	1.6349	-0.1211	1.6310
	30	-0.0923	0.5564	-0.0848	0.5784
	50	-0.0759	0.3470	-0.0797	0.3475
	100	-0.0061	0.1804	-0.0063	0.1823
0.3	**10**	-0.2264	1.0356	-0.2345	1.0538
	30	-0.1761	0.4776	-0.1855	0.4843
	50	-0.1741	0.3155	-0.1638	0.3229
	100	-0.1515	0.1822	-0.1583	0.1828
0.5	**10**	-0.3587	0.8047	-0.3678	0.8058
	30	-0.2794	0.4294	-0.2708	0.4208
	50	-0.2402	0.2991	-0.2480	0.3123
	100	-0.2046	0.1817	-0.2097	0.1850

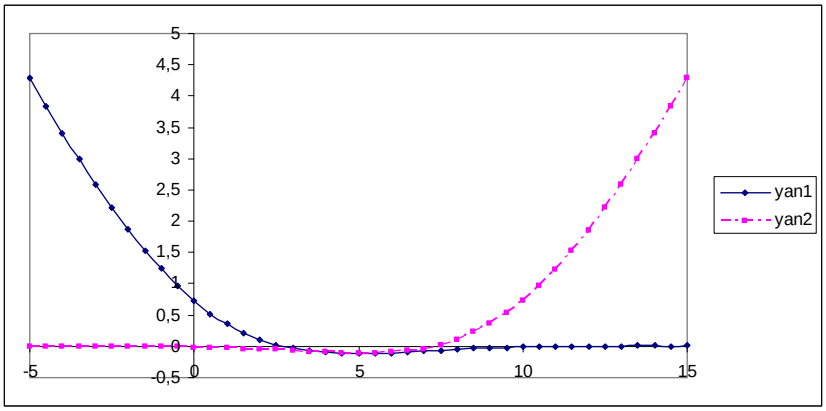
Çizelge 7'ye bakıldığında aynı seri sistemlerde olduğu gibi maskeleme olasılığı p değeri sabit tutulup n değeri artırıldığında $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve MSE değerlerinin ciddi şekilde küçüldüğü görülmektedir. n değeri sabit tutulup p değeri artırıldığında ise $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin MSE değerlerinin küçüldüğü ancak yan değerlerinin arttığı gözlenmektedir.

$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ olduğu varsayıldığında yani sistemdeki birinci bileşenin ortalama yaşam zamanının ikinci bileşeninkinden daha büyük olması durumunda elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 8'de verildiği gibidir.

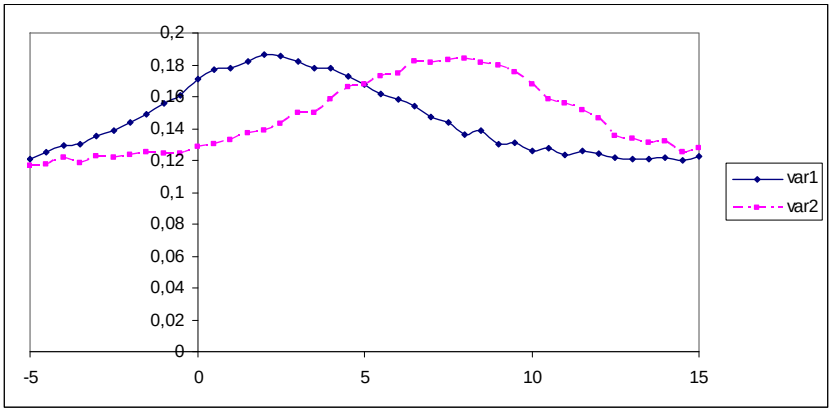
Çizelge 8. $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$ ve $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için simülasyon sonuçları

p	n	$Bias(\hat{\mu}_1)$	$MSE(\hat{\mu}_1)$	$Bias(\hat{\mu}_2)$	$MSE(\hat{\mu}_2)$
0	**10**	-0.1021	1.5042	-0.1021	1.7008
	30	-0.0833	0.5269	-0.0785	0.5774
	50	-0.0748	0.3207	-0.0574	0.3602
	100	-0.0111	0.1668	0.0469	0.1887
0.3	**10**	-0.5116	1.3028	-0.1279	1.0220
	30	-0.3465	0.5576	-0.0976	0.4668
	50	-0.3013	0.3718	-0.0784	0.3013
	100	-0.2459	0.2090	-0.0755	0.1670
0.5	**10**	-0.8313	1.4097	-0.2400	0.7185
	30	-0.5821	0.6865	-0.1351	0.3743
	50	-0.4850	0.4865	-0.1058	0.2514
	100	-0.4030	0.3026	-0.0630	0.1436

Çizelge 8'e bakıldığında $\mu_1 = \mu_2 = 1$ durumu için elde edilen sonuçlara benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve varyans değerlerinin değişimlerini daha iyi görebilmek için $n = 100, p = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ ve $\mu_2 = 5$ için μ_1 parametresinin -5 ile 15 arasında değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yan ve varyans değerlerinin grafikleri elde edilmiş ve sırasıyla Şekil 8 ve Şekil 9'da gösterilmiştir.



Şekil 8. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları

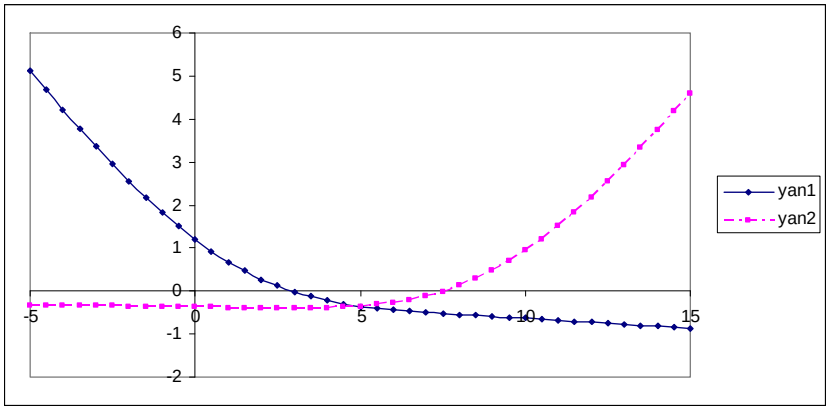


Şekil 9. $p = 0$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

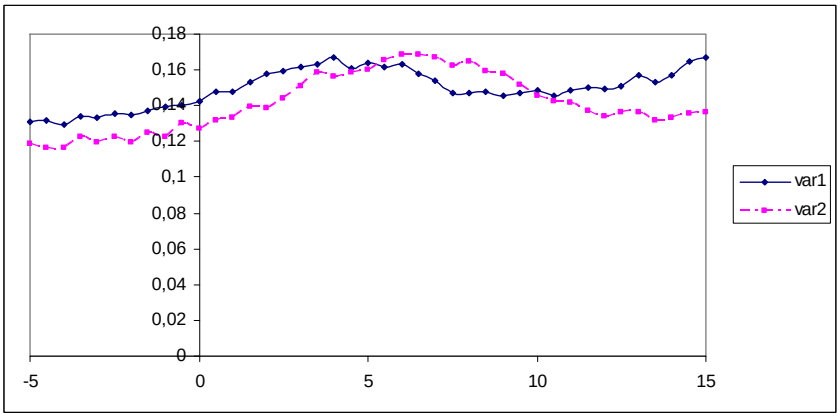
Şekil 8'e bakıldığında doğal olarak Şekil 1'deki sonuçların tersi sonuçların elde edildiği görülmektedir. Yani, $\mu_1 < \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_2$'nın yanı, $\mu_1 > \mu_2 = 5$ olduğunda ise $\hat{\mu}_1$'nın yanı mutlak değerce daha küçük çıkmaktadır ve μ_1 ve μ_2 arasındaki fark büyüdükçe bu yan değerleri de mutlak değerce büyüdüğü görülmektedir. Çünkü μ_1 ve μ_2 arasındaki farkın büyümesi durumunda ortalama ömrü küçük olan bileşenden çok az gözlem elde edilebilmekte ve bu durumda da bu bileşenin yaşam zamanı dağılımının parametresinin tahmin edicisinin yanı büyük çıkmaktadır.

Şekil 9'da elde edilen sonuçlar Şekil 2'deki sonuçlarla hemen hemen aynıdır. Yani, μ_1 ve μ_2 arasındaki fark mutlak değerce büyüdükçe, $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin varyansları birbirine yaklaşmaktadır. Ayrıca μ_1'in $\mu_2 = 5$ değerine yakın değerleri için de varyanslar birbirine yakın çıkmakta ve $\mu_1 \cong 5$ için varyanslar eşit çıkmaktadır.

Yukarıdaki koşullardan farklı olarak maskeleme olasılığı $p = 0.3$ olarak alındığında $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yanlarının ve varyanslarının grafikleri sırasıyla Şekil 10 ve Şekil 11'de verilmiştir.



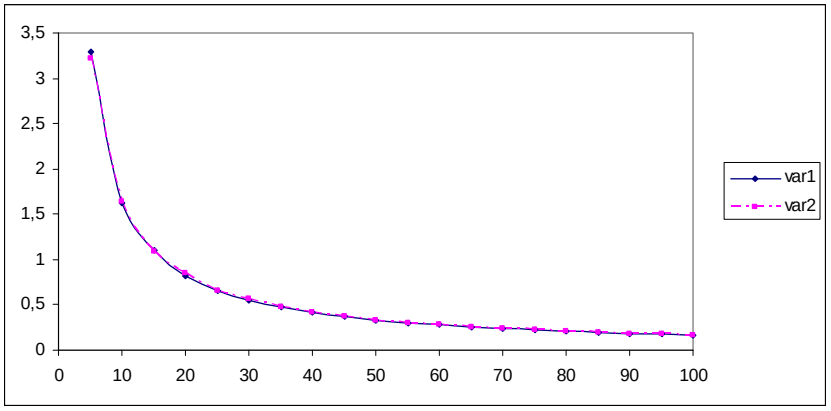
Şekil 10. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın yanları



Şekil 11. $p = 0.3$ için μ_1'in değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

Şekil 10 ve Şekil 11'e göre $\mu_1 \cong \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin yanlarının ve varyanslarının yaklaşık olarak eşit olduğu görülmektedir. Ancak $p = 0$ durumundan farklı olarak $\mu_1 < \mu_2 = 5$ olduğunda $\hat{\mu}_2$, $\mu_1 > \mu_2 = 5$ olduğunda ise $\hat{\mu}_1$ tahmin edicilerinin bir miktar yana sahip oldukları gözlenmektedir.

$p = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için örnek hacmi n'nin 5 ile 100 arasında değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahmin edicilerinin varyans değerlerinin grafiği Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 12. n değerinin değişimine göre $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları

Şekil 12'den açıkça görülüyor ki n değeri büyüdükçe aynı seri sistemlerde olduğu gibi paralel sistemlerde de $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'nın varyansları giderek sıfıra yaklaşmaktadır.

5.2.1. Uygulama

Bu kısımda, $p=0, \mu_1=\mu_2=1, \sigma_1=\sigma_2=2$ için paralel sistemlerin yaşam zamanlarından $n=100$ birimlik gözlem elde edilmiş ve bu gözlemler sistemin bozulmasına neden olan bileşene göre iki blok halinde Çizelge 9'da gösterilmiştir.

Çizelge 9. $p=0, \mu_1=\mu_2=1, \sigma_1=\sigma_2=2$ için üretilen veri seti

X_{1i} , $i=1,2,\ldots,51$				X_{2i} , $i=1,2,\ldots,49$			
7.9546	2.8147	3.8247	1.1631	8.4134	5.0157	0.1281	4.2195
-0.4093	8.8796	2.5550	3.6894	1.3364	9.1820	3.3070	0.8099
0.8127	-4.3074	2.8578	3.8303	0.3408	5.0301	2.9550	1.3054
0.7843	3.7134	8.8583	0.5634	1.0686	4.0145	1.5048	3.4014
2.7578	-0.6247	4.5691	2.4192	2.5408	2.4374	4.9806	-0.9525
2.8267	7.0490	4.6238	5.5460	-0.0383	3.4467	4.7558	5.7619
0.9392	0.9752	7.6324	2.5118	1.4314	3.3176	3.5274	1.2647
4.4436	0.3418	2.2766	7.6114	-0.1228	3.7758	6.9605	-1.9931
1.8385	-0.5777	6.7742	11.6031	5.1395	5.5601	3.0924	3.2278
2.9978	5.7592	5.1339	3.0366	2.8430	1.5091	0.9664	4.1678
5.0200	2.3777	5.2458	6.2085	5.5896	3.8294	7.1078	
-0.6353	8.5742	4.8951	11.5964	1.9593	2.3725	0.5146	
2.7978	7.6799	10.4166		-0.7707	4.8427	2.9910	

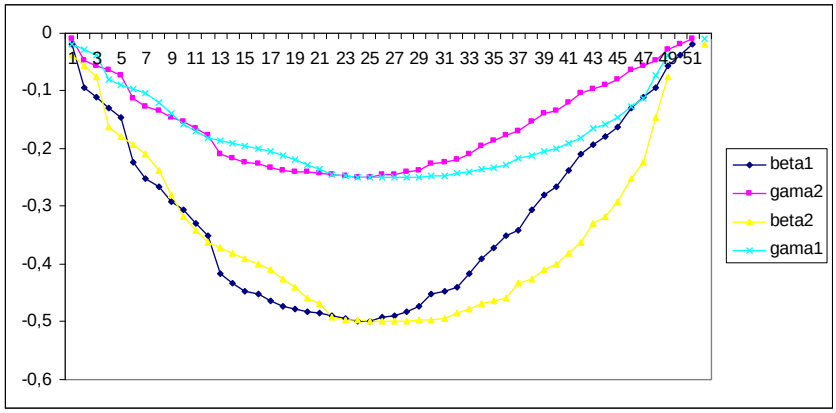
Bu değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin ML ve MML tahmin değerleri ve asimptotik güven aralıkları Çizelge 10'da verildiği gibi elde edilmiştir.

Çizelge 10. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri

	MLE	**MMLE**	**Asimptotik Güven Aralığı**
μ_1	1.6896	1.5697	(-3.2180 , 6.6012)
μ_2	1.3683	1.2281	(-35741 , 6.3141)

Çizelge 10'a bakıldığında MML tahmin değerlerinin ML tahmin değerlerine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 9'daki değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin Çizelge 10'da verilen MML tahmin değerlerinin elde edilmesinde kullanılan t_{1i}, t_{2i} ve t_{3i} civarında Taylor serisi açılımlarında sırasıyla $z_{1i}^{(1)}, z_{1i}^{(2)}, z_{2i}^{(1)}$ ve $z_{2i}^{(2)}$'lerin katsayıları durumunda bulunan $\beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(1)}$ ve $\beta_i^{(2)}$ ağırlıklarının, karşılık gelen $t_{\cdot i}$'lere göre sıralanmasından sonra elde edilen değerlerin grafikleri Şekil 13'te verilmiştir.



Şekil 13. Ağırlıkların grafikleri

Şekil 13'den i'nin küçük ve büyük değerleri için $\beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(1)}$ ve $\beta_i^{(2)}$ ağırlıklarının mutlak değerce küçük, i'nin ara değerleri için mutlak değerce büyük

değerler aldığı görülmektedir. Yani gözlemlerdeki uç değerlere küçük ağırlıklar, ara değerlere büyük ağırlıklar yüklenmektedir.

Burada ayrıca, yukarıdaki uygulama ile aynı koşullar altında sadece $p = 0.3$ alınarak $n = 100$ birimlik başka bir veri seti üretilmiş ve Çizelge 11'de verilmiştir.

Çizelge 11. $p = 0.3, \mu_1 = \mu_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 2$ için üretilen veri seti

X_{1i} , $i = 1,2,\ldots,39$			X_{2i} , $i = 1,2,\ldots,34$			X_{3i} , $i = 1,2,\ldots,27$	
0.8815	0.7142	0.2745	2.3636	3.7770	-0.4115	4.6708	2.7312
1.1705	2.1035	5.0779	3.8196	-1.5110	4.0571	-3.3651	5.7882
-2.3089	7.4809	0.3666	10.6599	5.0342	3.1665	5.9490	3.8807
0.9789	4.8047	-0.6211	7.0846	0.7937	2.3624	3.4058	0.4989
-0.5099	6.2187	2.2875	-1.6095	3.9863	1.9694	3.1614	2.2433
3.5746	4.6245	4.9392	8.8022	1.7967	3.4266	2.0594	3.2854
6.0018	8.9144	0.7627	3.8005	1.8504		10.2335	3.9372
2.5914	1.4882	3.9842	16.4284	2.2877		2.2058	1.9451
2.6574	0.5110	4.5802	11.5315	0.7691		-1.3145	2.9326
7.8760	0.7965	-1.2216	3.5494	-0.2559		2.5942	7.3810
1.9491	3.5423	5.4010	-0.0986	5.2777		2.3387	8.3415
3.9031	-0.7720		5.8319	1.1118		4.1037	0.7202
6.9615	0.7258		5.2712	1.6659		4.8532	-0.2907
3.2951	4.5608		12.0448	1.9265		3.7659	

Çizelge 11'de verilen değerler kullanılarak μ_1 ve μ_2 parametrelerinin ML ve MML tahmin değerleri ve asimptotik güven aralıkları Çizelge 12'de verildiği gibi elde edilmiştir.

Çizelge 12. μ_1 ve μ_2'nin ML ve MML tahmin değerleri

	MLE	**MMLE**	**Asimptotik Güven Aralığı**
μ_1	1.2896	1.1031	(-3.3586 , 5.7980)
μ_2	1.1038	0.9760	(-3.3166 , 5.4497)

Çizelge 12'ye bakıldığında MML tahmin değerlerinin ML tahmin değerlerine yakın olduğu görülmektedir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, iki bileşenli seri ve paralel sistemler için maskeli verilere dayalı parametre tahmini problemi ele alınmıştır. Sistemdeki bileşenlerin yaşam zamanları dağılımlarının parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin analitik olarak elde edilemediği durumda kullanılan modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri tanıtılmıştır. Ayrıca sistemdeki bileşenlerin yaşam zamanı dağılımlarının konum-ölçek parametreli dağılımlar ailesine ait olmaları durumunda konum parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilemediği için modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilmiştir. Ayrıca bileşenlerin lojistik dağılıma sahip olmaları durumunda seri ve paralel sistemler için sayısal örnekler verilmiş ve modifiye edilmiş en çok olabilirlik tahminlerinin, en çok olabilirlik tahminlerine yakın olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

Akdi,Y. 2005. Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Kitapevi, Ankara.

Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C. T., Wu, S. J. S. 2004. Inference for the extreme value distribution under progressive Type-II censoring. *J. Statist. Comp. Simul.* 74:25–45.

Berksoy, A.H., Özkan, O. 2001. Çözümlü Analiz Problemleri. S.Ü. Basımevi, Konya.

Borovkov,A.A. 1998. Mathematical Statistics, Overseas Publishers Association, Amsterdam.

Casella, G. Berger, R.L. 1990. Statistical Inference, Duxbury Press, California.

Cramer,H. 1962. Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, New Jersey.

David H. A. 1970. Order Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Ferguson, T.S. 1996. A Course in Large Sample Theory, Chapman&Hall, London.

Lawless, J.F. 1982. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley&Sons, New York.

Lin,D.K.J., Usher,J.S., Guess,F.M. 1993. Exact Maximum Likelihood Estimation Using Masked System Data, , IEEE Transactions on Reliability, Vol. 42, No. 4, 631-635.

Miyakawa,M. 1984. Analysis of Incomlete Data In Competing Risks Model, IEEE Transactions on Reliability, R-33 , 293-296.

Öztürk,F. 2010. Matematiksel İstatistik, Basımda.

Reiser,B., Yashchin,E., Flehinger,B.J. 1997. Statistical Inference for Masked Data, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 30, No. 7, 4425-4432.

Sarhan,A.M. 2001. Reliability Estimations of Components From Masked System Life Data, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 74, 107-113.

Sarhan,A.M. 2003. Estimation of System Components Reliabilities Using Masked Data, Applied Mathematics and Computation, Vol. 136, 79-92.

Sarhan, A.M., El-Bassiouny, A.H. 2003. Estimation of components reliability in a paralel system using masked system life data, Applied Mathematics and Computation 138, 61-75.

Sarhan, A.M. 2004a. Parameter estimations in linear failure rate model using masked data, Applied Mathematics and Computation 151, 233-249.

Sarhan, A.M. 2004b. Parameter estimations in general hazard rate model using masked data, Applied Mathematics and Computation 153, 513-536.

Sarhan, A.M., El-Gohary, A.I., 2003. Estimation of parameters in Pareto reliability model in the presence of masked data, Reliability Engineering and System Safety 82, 75-83.

Shahbazov, A. 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Şenesen,Ü. 2002. John E: Freund' dan Matematiksel İstatistik, 6. Baskıdan Çeviri, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Tan,Z. 2005. Estimation of Component Failure Probability From Masked Binominal System Testing Data, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 88, 301-309.

Tiku, M.L., 1967a. Estimating the mean and Standard deviation from a censored normal sample, Biometrika 54,155-165.

Tiku, M.L., 1967b. A note on estimating the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample, Austral.J.Statist.9,49-54.

Tiku, M.L., 1968a. Estimating the parameters of log-normal distribution from censored samples, J.Amer.Stat.Assoc.63,134-140.

Tiku, M.L., 1968b. Estimating the parameters of normal and logistic distributions from censored samples.Austral.J.Statist.10, 64-74.

Tiku, M.L., 1968c. Estimating the mean and Standard deviation from progressively censored normal samples, J.Ind.Soc.Agric.Stat.20, 20-25.

Tiku,M.L., Akaya,A.D. 2004. Robust Estimation and Hypothesis Testing, New Age International (P) Limited, New Delhi.

Usher,J.S. 1996. Weibull Component Reliability-Prediction in the Presence of Masked Data, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 45, No. 2, 229-232.

Usher,J.S.,Guess,F.M., 1989. An iterative approach for estimating component reliability from masked system life data, Quality and Reliability Engineering International.5, 257-261.

Usher,J.S., Hodgson,T.J. 1988. Maximum Likelihood Analysis of Component Reliability Using Masked System Life-Test Data, , IEEE Transactions on Reliability, Vol. 37, No. 5, 550-555.

Wu, S. J., Kuş, C. 2009. On the Estimation Based on Progressive First Failure-Censored Sample, Computational Statistics and Data Analysis, 53 (10), 3659-3670.