İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNCE CİDARLI YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Özlem DEMİRAL

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2004

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNCE CİDARLI YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Özlem DEMİRAL
(501011043)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Nisan 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Mayıs 2004

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan BODUROĞLU
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Nesrin YARDIMCI (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Turgut KOCATÜRK (Y.T.Ü.)

MAYIS 2004

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında büyük destek ve anlayış gösteren, emeklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hasan BODUROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

İçinde bulunduğum olumsuz koşullara karşın, birçok zorluk ve engellere birlikte göğüs gerdiğim kıymetli aileme, tezin yazılması ve düzenlenmesinde yardımlarını esirgemeyen eşime ve emeği geçenlere teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ **ii**
KISALTMALAR **iv**
TABLO LİSTESİ **v**
ŞEKİL LİSTESİ **vi**
SEMBOL LİSTESİ **vii**
ÖZET **ix**
SUMMARY **x**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı 1

2. İNCE CİDARLI YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ **5**
2.1. Bernoulli - Euler denklemlerinin türetilmesi 18
2.2. Dinamik rijitlik katsayılarının türetilmesi 22
2.3. Boyuna titreşim ve rijitlik katsayıları 24
2.4. Elastik ortamlar için boyuna titreşim ve rijitlik katsayıları 26
2.5.Enerji metodu 27
2.5.1.Enerji yöntem ve kriterleri 27
2.5.1.1. Toplam potansiyel enerji yöntemi 27
2.5.1.2. Virtüel iş prensibi 28
2.6. Dinamik rijitlik metodu 36
2.6.1. İlgili eşitliklerin düzenlenmesi 36
2.6.2. Karakteristik çözümler 59
2.6.3. Sistem matrisinin oluşturulması 64
2.6.4. Strum sayısı 66
2.6.5. Kısmi frekaslar 68
2.6.6. Kütle matrisinin oluşturulması 69
2.6.7. Dönüştürülmüş haller 69

3. ÖRNEKLER
3.1. T kesitli kiriş elemanının dinamik rijitlik matrisinin Matlab programıyla hesaplanması 36
3.2. Bir çerçeve sistemin dinamik rijitlik matrisinin Matlab programıyla hesaplanması 36
3.3. MSC. Nastran DMAP programı ile üniform kirişim dinamik rijitlik matrisinin hesaplanması 36

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **20**
KAYNAKLAR **22**
EKLER **24**
ÖZGEÇMİŞ **30**

KISALTMALAR

FEM	: Finite Element Method
DSC	: Dynamic Stiffness Coefficient
DSM	: Dynamic Stiffness Matrix
FRF	: Frequency Response Function

TABLO LİSTESİ

		Sayfa No
Tablo 2.1.	Sınır koşulları için uç yük ve uç deplasman değerleri ……	11
Tablo 2.2.	Bernoulli- Euler denklem sabitlerinin uç deplasmanlar cinsinden hesabı……	12
Tablo 2.3.	Bernoulli- Euler denklem sabitlerinin uç yükler cinsinden hesabı...	12
Tablo 2.4.	T kirişe ait karakteristik kök ve özdeğer tablosu	58
Tablo 2.5.	T kiriş düğüm noktası yer değiştirmesine ait [X] katsayılar matrisi	58
Tablo 2.6.	T kiriş düğüm noktası yüküne ait [Y] katsayılar matrisi……..	60
Tablo 2.7.	K katsayıları için çeşitli sınır koşulları…….	88

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 1.1.	İnce cidarlı kesitler. ……	1
Şekil 1.2.	Modların tahmin edilmesinde oluşan hata oranları …….	2
Şekil 1.3.	İnce cidarlı kolon elemanının burkulması……	4
Şekil 1.4.	Duyarlılık kusurları……..	4
Şekil 1.5.	Açık kesitli soğukta şekillendirilmiş çelik eleman……..	4
Şekil 2.1.	Prizmatik kiriş……..	6
Şekil 2.2.	Ankastre mesnetli kiriş elemanı……...	10
Şekil 2.3.	Deforme olmuş eleman……	11
Şekil 2.4.	Boyluna titreşim……	13
Şekil 2.5.	Simetrik olmayan ince cidarlı kesit…….....	20
Şekil 2.6.	Momentlerin yönleri ve işaretleri…….....	21
Şekil 2.7.	X eksenine göre simetrik C kesiti.....	25
Şekil 2.8.	Bir eksene göre simetrik kesitler.....	26
Şekil 2.9.	Eğilme Momenti çifti…….....	27
Şekil 2.10.	Üç boyutlu ince cidarlı kirişin eksen takımları…….....	32
Şekil 2.11.	O noktası sabit olan rijit cisim	34
Şekil 2.12.	O noktası sabit olan rijit cismin asal atalet eksenleri	37
Şekil 2.13.	Rijit cismi oluşturan maddesel noktalar…….....	38
Şekil 2.14.	G etrafındaki dönme.....	39
Şekil 2.15.	Hamilton prensibine göre bir kirişe ait geometrik örnek	41
Şekil 2.16.	Çubuk elemanının asal eksenleri…….....	48
Şekil 2.17.	T kesitli kirişe ait kesit özellikleri……	54
Şekil 2.18.	Boyutsuz büyüklükler yardımıyla frekansların elde edilmesi……..	62
Şekil 2.19.	Burkulma rijitliğinin değişimiyle sabit P yükü altında frekansların elde edilmesi……	63
Şekil 2.20.	T kesitli kirişin boyutsuz atalet kuvvetlerinin gözönüne alınması durumundaki karakteristik diyagramı……..	64
Şekil 2.21.	T kesitli kirişlerle oluşturulan çerçeve sisteme ait karakteristik diyagram……...	65
Şekil 2.22.	Çerçeve sistem……	66
Şekil 2.23.	Üniform kiriş eleman……	70
Şekil 2.24.	Basit mesnetli kiriş……...	70
Şekil 2.25.	Dinamik rijitlik matrisi…….....	71
Şekil 2.26.	DMAP ile hesaplanan dinamik rijitlik matrisi ……...	67
Şekil 2.27.	T kesite ait kesit özellikleri……..	84

SEMBOL LİSTESİ

A : Kesit alanı
a, b : Kabuğun planda boyutları
[C] : Sistemin sönüm matrisi
c : Yatak katsayısı
D : Eğilme rijitliği
[D] : Elastisite matrisi
{d} : Düğüm noktası deplasmanları
E : Elastisite modülü
$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$: Eksantirisite
f : Frekans
F : Kuvvet fonksiyonu
G : Kayma modülü
I : Atalet momenti
$\mathbf{I_x}$: x eknenine göre atalet momenti
$\mathbf{I_y}$: y eknenine göre atalet momenti
J : Burulma sabiti
J : Kesite ait St. Venant burkulma sabiti,
[K] : Sistemin rijitlik matrisi
$\mathbf{k_x}$, $\mathbf{k_y}$, $\mathbf{k_{xy}}$: Eğilme ve burulma eğrilikleri
[ke] : Eleman rijitlik matrisi
$\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$, $\mathbf{M_\phi}$: Eğilme momenti
$\mathbf{M_{xy}}$: Burulma momenti
[M] : Sistem kütle matrisi
$\mathbf{[m_e]}$, **[m]** : Eleman kütle matrisi
m : Kütle
N : Normal kuvvet
[N] : Şekil fonksiyonu matrisi
$\mathbf{N_x}$, $\mathbf{N_y}$, $\mathbf{N_\phi}$: Normal kuvvetler
$\mathbf{N_{xy}}$: Kayma kuvveti
$\mathbf{[N_0]_m}$: Mambran kesit tesirleri matrisi
P : Yük
P(t) : Sistemde zamana bağlı dış yük
$\mathbf{P_{ky}}$: Kritik yük, burkulma yükü
[P] : Dış yük matrisi
$\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$: Plağın iç ve dış yarıçapları, eğrilik yarıçapları
[S] : Sistemin zemin etkisi matrisi
$\mathbf{[S_e]}$: Elemanın zemin etkisi matrisi
T : Periyot
t : Zaman
$\Delta\mathbf{t}$: Zaman aralığı
u, v, w : Yer değiştirme bileşenleri

$\mathbf{u_1, v_1, w_1}$ **:** Deplasmanlardaki sonsuz küçük artımlar
$\mathbf{u}$ **:** Yer değiştirme vektörü
$\mathbf{u^{'}}$ **:** Hız vektörü
$\mathbf{u^{''}}$ **:** İvme vektörü
$\mathbf{U}$ **:** Şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{U_i}$ **:** İç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi, iç iş
$\mathbf{U_d}$ **:** Dış kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi, dış iş
$\mathbf{U_m}$ **:** İç kuvvetlerin mambran şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{U_e}$ **:** İç kuvvetlerin eğilme şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{V_x, V_y}$ **:** Kesme kuvvetleri
X, Y, Z **:** Dış yük bileşenleri
ϕ, φ : Açısal koordinatlar
ϕ_x, ϕ_y, τ : Eğilme ve burulma açıları
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ **:** Şekil değiştirme bileşenleri
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ **:** Gerilme bileşenleri
υ **:** Poisson oranı
$\mathbf{k}$ **:** Yük parametresi
λ **:** Yük parametresi
ω : Doğal frekans (açısal hız)
ρ : Birim alana düşen yoğunluk
$\mathbf{u}$ **:** x yönündeki yanal yer değiştirme,
$\mathbf{v}$ **:** y yönündeki yanal yer değiştirme,
ϕ **:** dönme açısı,
$\mathbf{x_0}$ **:** kesme merkezine ait x yönüne göre mesafesi
$\mathbf{y_0}$ **:** kesme merkezine ait y yönüne göre mesafesi
$\mathbf{E}$ **:** elastisite modülü,
$\mathbf{G}$ **:** kayma modülü,
$\mathbf{I_w}$ **:** kesite ait çarpılmalı burulma sabiti, cm^6
$\mathbf{r_0}$ **:** kesitin kesme merkezine kutupsal yarıçap
$\mathbf{M_x}$ **:** x eksenindeki eğilme momenti, Ncm
$\mathbf{M_y}$ **:** y eksenindeki eğilme momenti, Ncm
β_x **:** x eksenindeki burulma eğilmesi hesaplanırken kullanılan büyüklük, cm
β_y **:** y eksenindeki burulma eğilmesi hesaplanırken kullanılan büyüklük, cm

İNCE CİDARLI YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

İnce cidarlı yapılar, inşaat mühendisliği başta olmak üzere, mühendisliğin çeşitli dallarında yaygın olarak kullanılırlar. Bu sebepten söz konusu yapıların titreşim problemi, araştırmacıların uzun yıllardan beri dikkatini çekmiştir. Bu çalışmada, ince cidarlı bir yapının dinamik analizi, dinamik rijitlik metodu uygulanarak yapılmış ve tek katlı bir binanın bu yöntem ile çözümü için gerekli ön çalışmalar sunulmuştur. Yapının, dinamik rijitlik yöntemi ile MATLAB programında modeli kurulmuş ve dinamik analizi sonucu mod şekilleri çıkarılmıştır. Sürekli sistemlerin titreşim problemini ele alırken, gerek doğal frekans ve gerekse mod yönünden yapılan hesaplarda, kesme kuvveti ile dönme atalet momenti etkilerinin de göz önüne alınmasının sonuçlarda hassasiyeti arttırdığı bilinmektedir. Dinamik rijitlik metodunda ince cidarlı yapıların uzaysal hataları ihmal edilmiştir. Metod harmonik titreşim ile ilgili olup bilinen anlamıyla kesin olan sonuca ulaşmak için zaman hataları da gözardı edilmiştir. Dinamik burkulma analizinde sabit eksenel yükler ve momentler hesaba katılmıştır. Eğilme etkisi de hesaba katılırken, ilgili diferansiyel denklemler kullanılarak ince cidarlı bir kiriş elemanının her köşesinde bir deplasman bileşeni, iki de dönme olmak üzere 3 tane deplasman parametresi alınmıştır. Böylece her elemanda 4. dereceden 3 matris oluşturulup, denklemler genişletilerek düğüm noktalarına ait toplam 12 tane serbestlik derecesi tarif edilerek 12 tane yerdeğiştirme sabiti bulunmuştur. Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ile bağlantılı olan genelleştirilmiş düğüm noktası yükleri, dinamik rijitlik matrisindeki kesin sonuçları analitik olarak elde etmemizi sağlar. Sayısal örnekler göstermiştir ki, doğal titreşim frekansına karşılık gelen sabit momentleri ile oluşturulan etkileşim diyagramındaki eğimde monotonik değişiklikler oluşmamıştır. Sonuç olarak oluşturulan diyagramdan da görüleceği gibi sabit düzlem içi momentlerin, burulma modlarını sertleştirirken, gerilme modlarını yumuşattığı söylenebilir.

DYNAMIC STIFFNESS ANALYSIS OF THIN – WALLED STRUCTURES

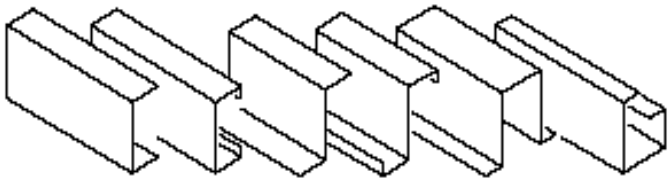
SUMMARY

The thin – walled structures are widely used elements of structures used especially in civil engineering, general applicability of which makes the vibration problems of these structures in common interest to the researchers for a long time.This thesis introduced the exact analytical solution to vibration problems, accompanied with results to verify the theoretical outcomes. Improved dynamic stiffness method for thin – walled structures is found in a new way different from the classical dynamic stiffness method. The vibration characteristics of continuous systems is the contribution of the shear force and rotary inetia effects to the modal characteristics of the structure, both of which are known to increase the accuracy of theoretical calculations. A dynamic stiffness method is introduced to analyse thin – walled structures to reduce spatial discretisation errors. Where harmonic oscillation is concerned, time discretisation errors are also eliminated to give an exact solution in a classic sense. Constant axial forces and in – plane moments are included for dynamic buckling analysis. When warping effects are included, the governing differential equations correspond to a matrix polynomial eigenproblem of order 3 matrices and degree 4. The determinant equation is expanded analytically to give a scalar polynomial equation of degree 12 providing 12 integration constant for the 12 nodal displacements of the thin – walled beam member (excluding the uncoupled axial displacements). The generalised nodal forces are related to the nodal displacements analytically resulting in the exact dynamic stiffness matrix. Numerical examples show that the interaction diagram of natural frequency against the constant in – plane mement do not have monotonic change of slope. This is due to the fact that the constant in – plane moment softens the flexural modes while hardening the torsional modes.

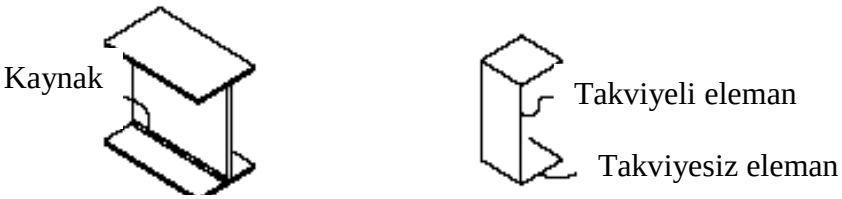
1 GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

İnce cidarlı elemanlar, ağırlık oranlarına bağlı olarak dayanımlarının yüksek ve üretimlerinin kolay oluşu nedeniyle, hafif ağırlık gerektiren inşaat işlerinde oldukça yaygın bir kullanım alanı bulmuşlardır. Bu elemanlar Şekil 1.1.'de görüldüğü gibi, genellikle soğukta şekillendirilmiş düz çubuk şeklindeki çelik veya ince plaklara kaynakla birleştirilen çeşitli şekillerdeki elemanlar olarak kullanılırlar.



Soğukta şekillendirilmiş çelik eleman

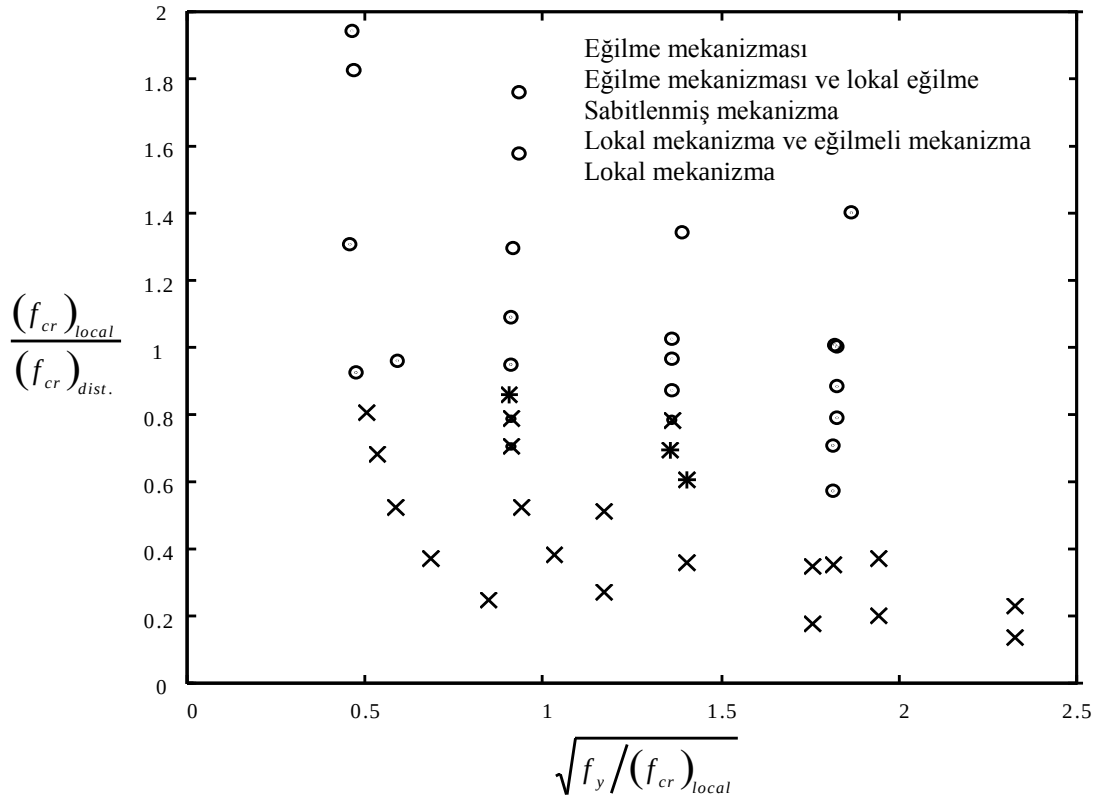


b) Fabrikasyon kesit c) Elemanlar

Şekil 1.1. İnce cidarlı kesitler

Bu tezde, ince cidarlı elemanların dinamik analizi için bazı yöntemlerden bahsedilmiş ve dinamik rijitlik metodu kullanılarak hesaplar yapılmıştır. Sonlu elemanlar metodu, ince cidarlı kiriş, kolon ve yapıların stabilite ve titreşim analizlerinde oldukça sık kullanılır. Bu yöntemde harekete neden olan dış yük ve hareketin ivmelenmesine karşı duran atalet kuvvetleri, yapı ve zemin özelliklerinden

yola çıkılarak titreşim sistemine ait mekanik bir yay - kütle modeli oluşturulur ve kütlelere ait titreşim denklemleri kurularak çözüme ulaşılır. Sistemin titreşim frekansları ve mod şekilleri hesaplanır; statik ve dinamik problem bir özdeğer problemidir. Yöntem, sürekli bir sistemi, problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak; elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir [31]. Eleman boyutlarının büyük olması durumunda gerçek sonuca daha iyi yaklaşmak için nokta kütle sayısını artırmak ve mümkün olduğu kadar yayılı kütle haline yaklaşmak gerekir. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Başka bir alternatif olarak, şekil fonksiyonları frekansa bağlı ise sistemi sonlu elemanlara ayırmaya gerek kalmaz. Bu durumda kullanılacak olan metod dinamik rijitlik metodu olarak adlandırılır [27]. Bir dinamik rijitlik matrisi, gerçek çözümü sağlayacak olan diferansiyel denklemlerin düzenlenmesi ile frekansa bağlı şekil fonksiyonlarından oluşturulur. Yöntem ayrıklaştırma hatalarını eler, sonlu eleman koordinatları vasıtası ile sonsuz elemanın doğal modlarının tahmin edilebilmesini sağlar. Şekil 1.2.'de modların tahmin edilmesinde oluşan hata oranları grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 1.2. Modların tahmin edilmesinde oluşan hata oranları [27]

Yöntem doğal titreşim [1 – 12] ve tepki analizi [13, 14] de olmak üzere birçok dinamik problemin başarı ile çözülmesine olanak sağlar. Yapısal eleman olan kirişlerin üzerindeki sabit basınç yüklerinin etkileri oldukça iyi bilinir. Bu yöntem ile beraber kiriş elemanına ait moment etkisinde oluşan burulma burkulmasının etkisi statik olarak bulunabilirken, buna karşılık sabit momentlerdeki burkulma ve eğilme etkilerinin yapılardaki dinamik davranışları nadiren rapor edilir [15 – 17].

Friberg [18], Vlasov eşitliklerini [19] analitik olarak çözmüş ve kirişteki kesit tesirlerini üzerine almaksızın gerçek dinamik rijitlik matrisini oluşturmuştur. Friberg'in çalışmalarındaki başlıca farklar aşağıdaki gibi sıralanabilir [27]:

(i) Karakteristik polinomlar belirgin bir şekilde genişletilmiştir.

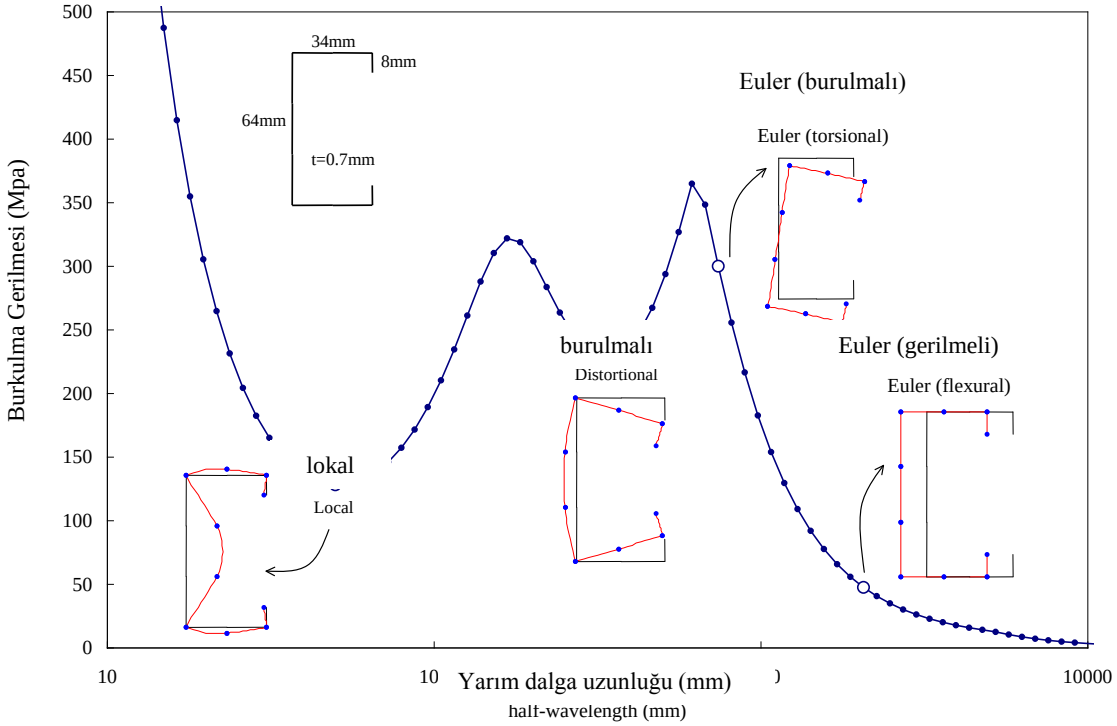
(ii) Kanıtlanmıştır ki denkleme ait karakteristik kökler ya gerçektir ya da tümüyle imajinerdir.

(iii) Diferansiyel denklemler ile birleştirilmiş yalnızca 6 farklı karakteristik vektör vardır.

(iv) Bütün karakteristik vektörler gerçektir.

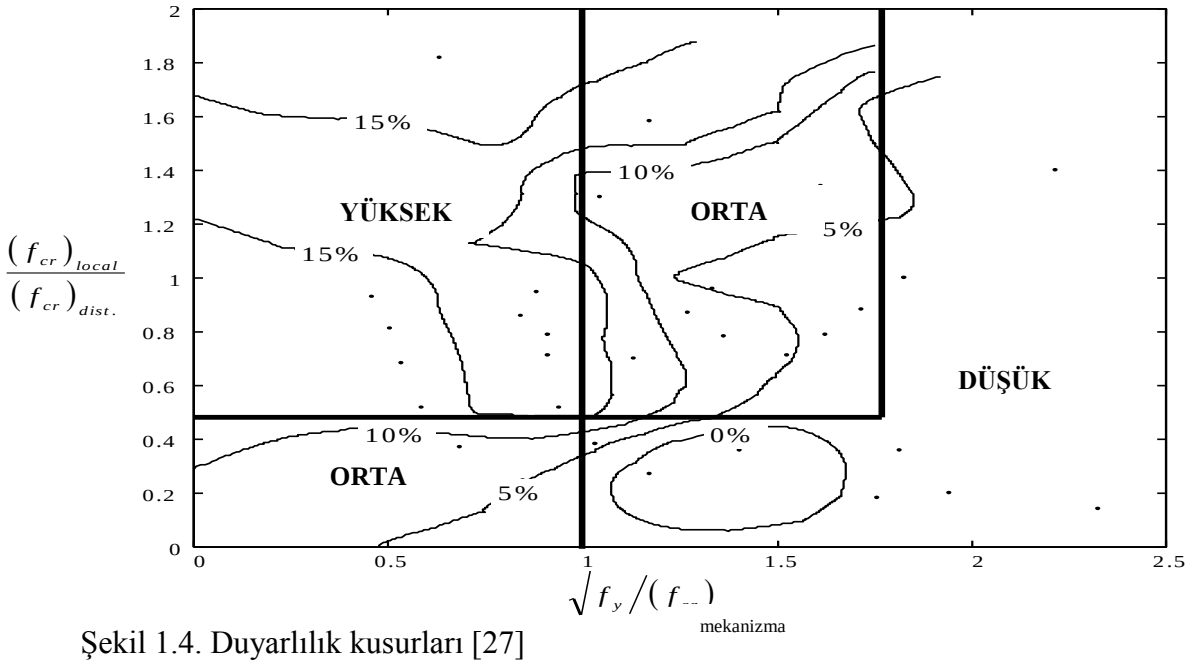
(v) Momentler hesaplara dahil edilmiştir.

Friberg'in [18] yaptığı çalışmalarda momentlerin gerilme modlarını yumuşatırken burulma modlarını sertleştirdiği görülmüştür. Etkileşim diyagramı oldukça karmaşık ve başlangıç sınırlarına ait dışbükeylik kaybolmuştur. Şekil 1.3.'de ince cidarlı kolon elemanının burkulması gösterilmiştir.



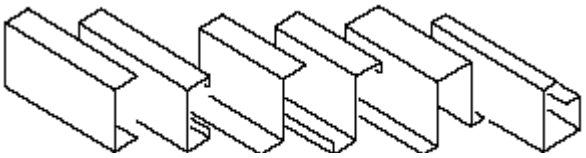
Şekil 1.3. İnce cidarlı kolon elemanının burkulması [27].

Sürekli sistemlerin titreşim problemini ele alırken, gerek doğal frekans ve gerekse mod yönünden yapılan hesaplarda, kesme kuvveti ile dönme atalet momenti etkilerinin de göz önüne alınmasının sonuçlarda hassasiyeti arttırdığı bilinmektedir. Şekil 1.4.'de duyarlılık kusurları grafik halinde çizilmiştir.



Şekil 1.4. Duyarlılık kusurları [27]

İnce cidarlı kesitler genellikle soğukta şekillendirilmiş çelik kesitler olsa da çok ince halde sıcakta şekillendirilmiş kesit şeklinde de olabilirler. Soğukta şekillendirilmiş kesitler, genellikle 6 mm'den ince çelik levhalardır. Şekil 1.5.'de görülen açık kesitli soğukta şekillendirilmiş elemanlar çelik endüstrilerinde yaygın kullanım alanına sahiptir. Soğukta şekillendirilen çelik, levha ya da sargı şeklinde ortam sıcaklığında bükülürken; sıcakta şekillendirilen kesitler, çeliğin eritilmesiyle haddelenir.

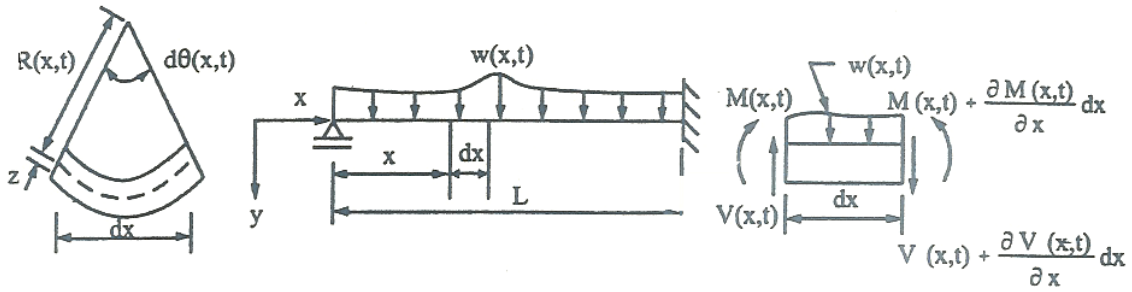


Şekil 1.5. Açık kesitli soğukta şekillendirilmiş çelik eleman

2 İNCE CİDARLI YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

2.1 Bernoulli – Euler Denklemlerinin Türetilmesi

Prizmatik kiriş elemanının zamana bağlı yayılı yükü $w(x,t)$ olsun. Bu yükün sebep olduğu sapma hareketi $y(x,t)$, hız $\partial y(x,t)/\partial t$ ve ivme $\partial y^2(x,t)/\partial t^2$, iç kuvvetlerin oluşturduğu moment $M(x,t)$ ve kesme kuvveti $V(x,t)$ kiriş üzerinde, Şekil 2.12.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Prizmatik Kiriş [32]

$\sum F_y = 0$ ve $\sum M = 0$ denge denklemleri kullanılarak aşağıdaki denklemler yazılabilir. Düşey yöndeki dinamik dengeden izleyen denklem elde edilir [32]:

$$-V(x,t) + w(x,t)dx + V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}dx - mdx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Yukarıdaki (2.26) denklemi

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = m\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - w(x,t) \qquad (2.2)$$

sadeleştirilmiş hali ile yazılabilir [32]: Burada m birim uzunluğa ait kütledir. Momentlerin dinamik dengesinden ise aşağıdaki denklem elde edilir [32]:

$$V(x,t)dx + M(x,t) + mdx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\frac{dx}{2} - M(x,t) - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}dx - w(x,t)dx\,\frac{dx}{2} = 0 \quad (2.3)$$

Yüksek dereceli terimlerin ihmal edilmesi ile denklem

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) \quad (2.4)$$

şeklindeki sadeleştirilmiş forma getirilir [32].

Düşey kuvvetlerin dinamik dengesinden kurduğumuz ilişki (2.4) denkleminde yerine konulursa

$$\frac{\partial M^2(x,t)}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - w(x,t) \quad (2.5)$$

elde edilir [32]. Serbest titreşim hali için $w(x,t) = 0$ olduğuna göre denklem

$$\frac{\partial M^2(x,t)}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

halini alır [32].

Elastik eğrinin eğriliği, aşağıdaki denklem yardımıyla eğrilik yarıçapı olan $R(x,t)$ ile ilişkilendirilir.

$$\frac{1}{R(x,t)} = -\frac{\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.7)$$

Küçük sapma teorisi kullanılarak, $(\partial y(x,t)/\partial x)^2$ terimi ihmal edilirse denklem

$$\frac{1}{R(x,t)} = -\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

olarak yeniden yazılır [32]. Eğrilik, eğilme momenti ve kirişe ait rijitlik katsayısı EI arasındaki ilişki kullanılarak

$$\frac{1}{R(x,t)} = \frac{M(x,t)}{EI} \tag{2.9}$$

ve

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{M(x,t)}{EI} \tag{2.10}$$

bağıntıları elde edilir. (2.9) denklemi, (2.8)'de yerine konularak denklem

$$EI\,\frac{\partial y^4(x,t)}{\partial x^4} + m\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.11}$$

haline gelir [32]. Değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak yazılan $y(x,t)$ diferansiyel denklemi $Y(x)$, x'e bağlı şekil fonksiyonu ve $g(t)$ de zaman fonksiyonu olmak üzere

$$y(x,t) = Y(x).g(t) \tag{2.12}$$

olarak alınıp (2.11)'da yerine konursa;

$$\frac{EI\,\dfrac{d^4 Y}{dx^4}}{mY} = -\frac{\dfrac{d^2 g}{dt^2}}{g} = \mathrm{a}^2 \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.12) denklemi yardımıyla, p^2 sabiti kullanılarak

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \frac{p^2 m}{EI} Y = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + p^2 g = 0 \tag{2.15}$$

ifadesi elde edilir. Aşağıda verilen

$$\lambda^4 = \frac{p^2 m}{EI} \tag{2.16}$$

boyutsuz büyüklüğü yardımıyla (2.14) denklemi yeniden yazılırsa

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \lambda^4 Y = 0 \tag{2.17}$$

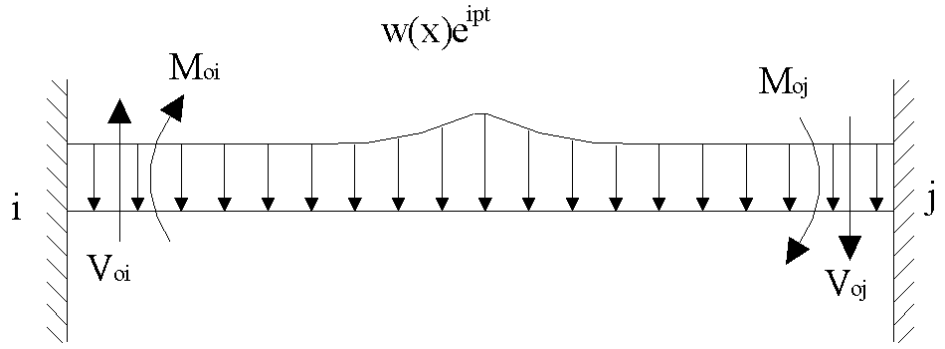
denklemi elde edilir [32] ve (2.15) denklemine ait karakteristik kökler λ , $-\lambda$, $i\lambda$, $-i\lambda$ şekil fonksiyonunun

$$Y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 e^{i\lambda x} + C_4 e^{-i\lambda x} \tag{2.18}$$

şeklinde çözümünü sağlar [32]. Denklem trigonometrik fonksiyonlarla

$$Y = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x \tag{2.19}$$

halini alır. Burada A , B , C , D rastgele seçilmiş sabitlerdir ve bulunan bu denklem Bernoulli – Euler denklemidir [32].



Şekil 2.2. Ankastre mesnetli kiriş elemanı [32]

Şekil 2.2.'de verilen ankastre mesnetli kirişte (2.11) no.'lu formül

$$EI\,\frac{\partial y^4(x,t)}{\partial x^4} + m\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = w(x,t) \tag{2.20}$$

halini alır ve şekil fonksiyonu

$$y(x,t) = Y(x)e^{ipt} \tag{2.21}$$

(2.20) denkleminde yerine konularak

$$EI\,\frac{d^4Y}{dx^4} - mp^2Y = w(x) \tag{2.22}$$

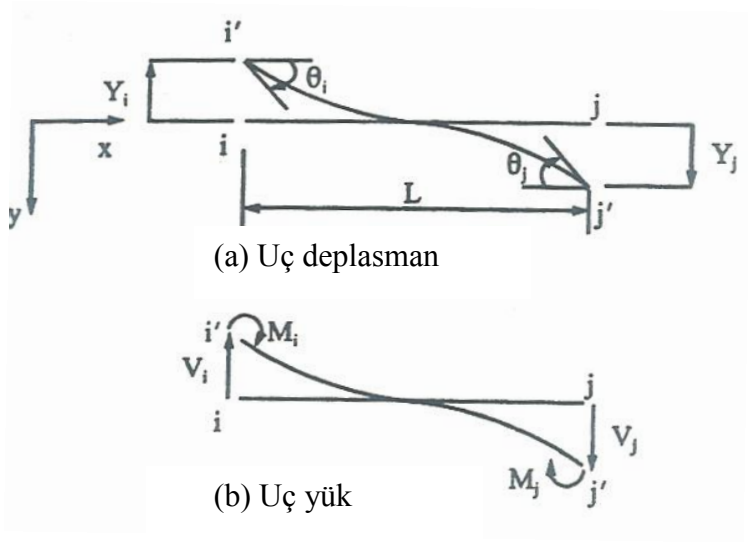
diferansiyel denklemi elde edilir ve denklem $\lambda^4 = p^2 m/EI$ kullanılarak kısaca

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \lambda^4 Y = \frac{w(x)}{EI} \tag{2.23}$$

yazılabilir [32].

2.2 Dinamik Rijitlik Katsayılarının Türetilmesi

Düğüm noktaları i ve j ile gösterilen herhangi bir elemana ait moment, kesme kuvvetleri ve çökmeler (yer değiştirmeler) Şekil 2.3.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Deforme olmuş eleman [32]

$Y = A\sin\ \lambda x + B\cos\ \lambda x + C\sinh\ \lambda x + D\cosh\ \lambda x$ şekil fonksiyonu aşağıdaki sınır koşulları kullanılıp türetilerek her sınır koşulu için uç yük ve uç deplasmanların ne şekilde olacağı aşağıda Tablo 2.1.'de verilmiştir.

Tablo 2.1. Sınır koşulları için uç yük ve uç deplasman değerleri [32]

Sınır Koşulları	Uç Yükler	Uç Deplasmanlar
$x = 0$	$\frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI}$	$\frac{dY}{dx} = \theta_i$
$x = L$	$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{M_j}{EI}$	$\frac{dY}{dx} = \theta_j$
$x = 0$	$\frac{d^3Y}{dx^3} = -\frac{V_i}{EI}$	$Y = -Y_i$
$x = L$	$\frac{d^3Y}{dx^3} = -\frac{V_j}{EI}$	$Y = Y_j$

Bernoulli- Euler denklemine ait A , B , C , D sabitleri yukarıdaki tablodaki değerler kullanılarak uç deplasmanlar cinsinden yazılabilir. M_i , M_j , V_i , V_j değerleri θ_i , θ_j , Y_i , Y_j cinsinden yazılmış ve A , B , C , D hesaplanarak aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 2.2. Bernoulli-Euler denklem sabitlerinin uç deplasmanlar cinsinden hesabı [32]

Uç Deplasmanlar	A	B	C	D
θ_i	λ	0	λ	0
θ_j	$\lambda \cos \lambda L$	$-\lambda \sin \lambda L$	$\lambda \cosh \lambda L$	$\lambda \sinh \lambda L$
$-Y_i$	0	1	0	1
Y_j	$\sin \lambda L$	$\cos \lambda L$	$\sinh \lambda L$	$\cosh \lambda L$

Bernoulli- Euler denklemine ait A , B , C , D sabitleri yine Tablo 2.2.'deki değerler kullanılarak uç yükleri cinsinden de yazılabilir. M_i , M_j , V_i , V_j değerleri $-\frac{M_i}{EI}$, $\frac{M_j}{EI}$, $-\frac{V_i}{EI}$, $-\frac{V_j}{EI}$ cinsinden yazılmış ve A , B , C , D hesaplanarak aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 2.3. Bernoulli- Euler denklem sabitlerinin uç yükler cinsinden hesabı [32]

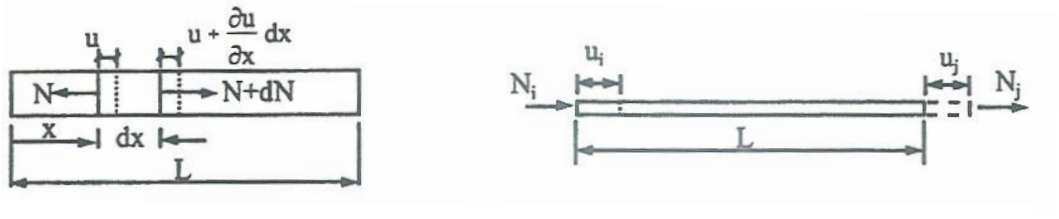
Uç Yükler	A	B	C	D
$-\frac{M_i}{EI}$	0	λ^2	0	λ^2
$\frac{M_j}{EI}$	$-\lambda^2 \sin \lambda L$	$-\lambda^2 \cos \lambda L$	$\lambda^2 \sinh \lambda L$	$\lambda^2 \cosh \lambda L$
$-\frac{V_i}{EI}$	$-\lambda^3$	0	λ^3	0
$-\frac{V_j}{EI}$	$-\lambda^3 \cos \lambda L$	$\lambda^3 \sin \lambda L$	$\lambda^3 \cosh \lambda L$	$\lambda^3 \sinh \lambda L$

Dinamik rijitlik sabitleri;

$$\{Q_e\} = [K_e]\{q_e\} \tag{2.24}$$

denklemiyle gösterilir.Burada $\{Q_e\} = \begin{bmatrix} M_i & M_j & V_i & V_j \end{bmatrix}$ ve $\{q_e\} = \begin{bmatrix} \theta_i & \theta_j & Y_i & Y_j \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerdir [32].

2.3 Boyuna Titreşim ve Rijitlik Katsayıları



(a) Eleman

(b) Kuvvet-şekil değiştirme ilişkisi

Şekil 2.4. Boyuna titreşim

Şekil 2.4a'da verilen çubuğun dx aralığı için boyuna hareket denklemi yazılırsa;

$$(m dx)\ddot{u} = N + dN - N \tag{2.25}$$

Burada u boyuna yer dğiştirmeyi, N de eksenel yükü gösterir. Eksenel yük F alana ve $E\varepsilon$ gerilmesine göre ifade edilirse $N = FE\varepsilon = FE\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şeklinde yazılır ve bu ifade (2.25) denkleminde yerine konulursa;

$$m\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FE\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.26}$$

denklemleri elde edilir [32].

Denklemde $a^2 = F\dfrac{E}{m}$ olarak kısaltılmıştır. $u = X(x)g(t)$ ifadesi (2.26) denkleminde yerine konularak,

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2}X = 0\,; \qquad \frac{d^2g}{dt^2} + p^2 g = 0 \tag{2.27}$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözümü ile X ve g değerleri aşağıdaki formüller ile ifade edilir [32]:

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx\,; \qquad g = d_1 \sin pt + d_2 \cos pt \tag{2.28}$$

Burada;

$$k = \sqrt{\frac{p^2 m}{FE}} \tag{2.29}$$

formülü ile gösterilir. X ve g sırasıyla şekil ve zaman fonksiyonlarını gösterir ve kuvvet-deformasyon ilişkisi Şekil 2.2.'de aşağıdaki sınır koşulları kullanılarak çizilir.

$$x = 0\,; \qquad x = u_i\,; \qquad N_i = -FE\,\frac{dX}{dx}$$

$$x = L\,; \qquad x = u_j\,; \qquad N_j = FE\,\frac{dX}{dx} \tag{2.30}$$

Dinamik rijitlik katsayıları aşağıdaki şekilde türetilir [32]:

$$[DSC] = EFk \begin{bmatrix} \cot kL & -\csc kL \\ simetrik & \cot kL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DSC_1 & DSC_2 \\ simetrik & DSC_1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Burada DSC_1 ve DSC_2 sembolik notasyonlardır ve dinamik rijitlik katsayılarını göstermektedirler.

2.4 Elastik Ortamlar İçin Boyuna Titreşim ve Rijitlik Katsayıları

Yay katsayısı q ve uzunluğu dx olan ve boyuna titreşime bağlı bir prizmatik çubuk düşünürsek; bu çubuğun x yönündeki dinamik denge denkleme yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir [32]:

$$FE\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - qu - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.32}$$

q birim uzunluğa düşen yük olup elemanın kalınlığı da hesaba katılarak ve $u = X(x)g(t)$ formülü (2.32) no.'lu denklemde yerine konularak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$FE\frac{\frac{d^2 X}{dx^2}}{mx} - \frac{q}{m} = \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g} = -p^2 \tag{2.33}$$

$$\frac{d^2 X}{d^2 x} + k^2 X = 0\,; \qquad \frac{d^2 g}{dt^2} + p^2 g = 0 \tag{2.34}$$

Burada ;

$$k = \sqrt{\frac{p^2 m - q}{FE}} \tag{2.35}$$

formülü ile gösterilir.

2.5 Enerji Metodu

2.5.1 Enerji Yöntem ve Kriterleri

2.5.1.1 Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi

Elastik bir sistemde geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün yer değiştirme durumları arasındaki hakiki konum toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır. Toplam potansiyel enerji yönteminde, gerçek denge konumuna sonsuz yakın ikinci bir konumdan hareket edilir. Buna komşu denge durumu denir. Böylece bir sistemde iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işlerden oluşan toplam potansiyel enerjinin minimum olması, deplasman ve gerilmelerin gerçek denge konumuna karşı gelen değerleri aldığını gösterir. Toplam potansiyel enerji denklemi,

$$V = V_i + V_d \tag{2.36}$$

şeklindedir [31]. Burada V_i şekil değiştirme enerjisidir. V_d dış kuvvetlerin enerjidir.

$$V_i = V_m + V_e \tag{2.37}$$

Burada V_m mambran şekil değiştirme enerjisi, V_e eğilme şekil değiştirme enerjisidir. Bu enerjiler;

$$V_m = \frac{C}{2}\iint \left({\varepsilon_x}^2 + {\varepsilon_y}^2 + 2\upsilon\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\upsilon}{2}{\gamma_{xy}}^2 \right) dxdy \tag{2.38}$$

$$V_e = \frac{D}{2}\iint \left({k_x}^2 + {k_y}^2 + 2\,\upsilon\, k_x k_y + 2(1-\upsilon){k_{xy}}^2 \right) dxdy \tag{2.39}$$

şeklindedir. Sistem konservatifse dış kuvvetlerin potansiyeli daima negatiftir.

$$V_d = -\iiint_v t.w_i.dv + \iint_F p.w_i.dF + \oint_s q.w_i.ds + Q.w_i \tag{2.40}$$

Burada w_i deplasmanları, t kütlesel kuvveti, p yüzeysel kuvveti, q çizgisel yükü, Q tekil kuvvetleri gösterir. Bu denklemde deplasman ile kuvvetler aynı yöndedir [31].

2.5.1.2 Virtüel İş Prensibi

Herhangi bir t anındaki bir yüzeysel elemanın hareket denklemi D'Alembert prensibine göre; sisteme etki eden atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve yay kuvvetleri ile beraber dış kuvvetler, dinamik denge halinde olmalıdır. Birim alana gelen kütle yoğunluğu ρ olduğuna göre; titreşime maruz kütlenin etkisi altında kaldığı atalet kuvveti; sönüm kuvveti ve yay kuvvetlerinin ilave dış yükler gibi düşünülmesi ile virtüel iş teoremi uygulanabilir [31].

$v(z)$ çökmeyi

$v(z)$ dönmeyi

$-EI_x v''(z) = M_x$ eğilme momentini

$-EI_x v'''(z) = T_y$ kesme kuvvetini

$EI_x v^{iv}(z) = q_y$ yayılı yükü

göstermektedir [34]. Virtüel iş prensibinde; iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işle dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işin eşit olması kabülü ile çözüm yapılır.

u hakiki deplasmanı

δu virtüel deplasmanı

ε hakiki deformasyonu

$\delta\varepsilon$ virtüel deformasyonu

δV_i iç kuvvetlerin virtüel işini

δV_d dış kuvvetlerin virtüel işini göstersin.

$$\delta V_i = \int \left\{\delta \varepsilon\right\}_i^T \sigma \, dxdy \tag{2.41}$$

$$\{\sigma\} = [D] \; (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \tag{2.42}$$

ε_0 başlangıç şekil değiştirmelerini ve σ_0 başlangıç gerilmelerini ihmal edersek

$$\{\sigma\} = [D] \; \{\varepsilon\} \tag{2.43}$$

elde edilir.

$$\partial V_i = \int \{\delta\varepsilon\}_i^T [D] \; \{\varepsilon\} \sigma \, dxdy \tag{2.44}$$

$$\partial V_d = -\rho \int \left\{\delta u\right\}_i^T \{u''\} dxdy \; - \mu \int \left\{\delta u\right\}_i^T \{u'\} dxdy \; - c \int \left\{\delta u\right\}_i^T \{u\} dxdy \tag{2.45}$$

Burada ρ birim alana gelen yoğunluk, μ sürtünme katsayısı, c zemin yatak katsayısıdır. Tabii durum hakiki yükleme, i birim durumu ise virtüel deplasman ve virtüel şekil değiştirme durumu olarak alınıp; virtüel iş teoremi uyarınca iç kuvvetlerle, dış kuvvetlerin eşitliği yazılırsa [31];

Virtüel yer ve şekil değiştirmeler	Hakiki yer ve şekil değiştirmeler	
$\delta u = [N] \; \left\{\delta d\right\}$	$u = [N] \; \{d\}$	
$\delta u' = [N] \; \left\{\delta d'\right\}$	$u' = [N] \; \{d'\}$	(2.46)
$\delta u'' = [N] \; \left\{\delta d''\right\}$	$u'' = [N] \; \{d''\}$	

$$\delta\,\varepsilon = [\Delta N]\ \left\{\delta\, d\right\} \qquad\qquad \{\varepsilon\} = [\Delta N]\ \{d\}$$

(2.46) denklemi (2.44) ve (2.45) denklemlerinde yerlerine konup; $\partial V_i = \partial V_d$ yazılırsa dinamik dış yükler halinde genel denklem elde edilir [31].

$$\left\{\delta\, d\right\}^T \left[\int [\Delta N]^T [D][\Delta N]dxdy\right]\{d\} = -\left\{\delta\, d\right\}^T \left[\rho\int [N]^T [N]dxdy\right]\{d''\}$$

$$-\left\{\delta\, d\right\}^T \left[\mu\int [N]^T [N]dx\,dy\right]\{d'\} - \left\{\delta\, d\right\}^T \left[c\int [N(w)]^T [N(w)]dx\,dy\right]\{d\} + \{P(t)\}_0$$

Harhangi bir e elemanı için eşitlik matris formunda yazılırsa;

$$[k_e]\ \{d(t)\} + [c_e]\ \{d'(t)\} + [m_e]\ \{d_e''(t)\} + [s_e]\ \{d(t)\} = \{P_e(t)\}_0 \qquad (2.47)$$

Eleman rijitlik matrisi $\qquad [k_e] = \int_F [\Delta N]^T [D]\ [\Delta N]dx\,dy$

Eleman sönüm matrisi $\qquad [c_e] = \mu\int_F [N]^T [N]dx\,dy$

Eleman kütle matrisi $\qquad [m_e] = \rho\int_F [N]^T [N]dx\,dy$

Eleman zemin etki matrisi $\qquad [s_e] = c\int_F [N(w)]^T [N(w)]dF$

Elemanın zamana bağlı dış yükü $\qquad \{P_e(t)\}_0$

e elemanı için yazılan eşitlik tüm sistemler için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

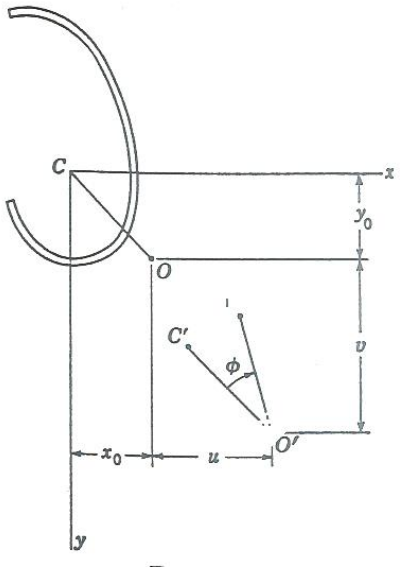
$$[K]\ \{D(t)\} + [C]\ \{D'(t)\} + [M]\ \{D''(t)\} + [S]\ \{D(t)\} = \{P(t)\}_0 \qquad (2.48)$$

2.6 Dinamik Rijitlik Metodu

2.6.1 İlgili Eşitliklerin Düzenlenmesi

İnce cidarlı açık kesitli kolonlarda, burulma hataları genellikle bükülme ve eğilme etkilerinin kombinasyonu sonucu oluşur. Bu tarz burulmayı araştırmak için, Şekil 2.5.'de görüldüğü gibi antisimetrik bir kesit göz önüne alınabilir.

Şekil 2.15.'de x ve y ağırlık merkezine ait asal koordinatları, x_0 ve y_0 da kesme merkezi olan O 'ya ait koordinatları gösterir. Burulma süresince, kesitte dönme ve başka yere doğru kayma oluşur. Bu yer değiştirme sonucu, kesme merkezi olan O, koordinatları sırasıyla u ve v ile gösterilen O' noktasına taşınır. Kesitin ağırlık merkezinin yeri olan C noktası, oluşan dönme etkisiyle C' noktasına taşınır. Kesite ait kesme merkezi, dönme etkisiyle C''den C'' noktasına doğru kayar ve C' ile C'' arasındaki açı ϕ ile gösterilir. Bu yüzden burulma esnasında kesitin ağırlık merkezinin koordinatları $u + y_0\phi$ ve $v - x_0\phi$ olur.



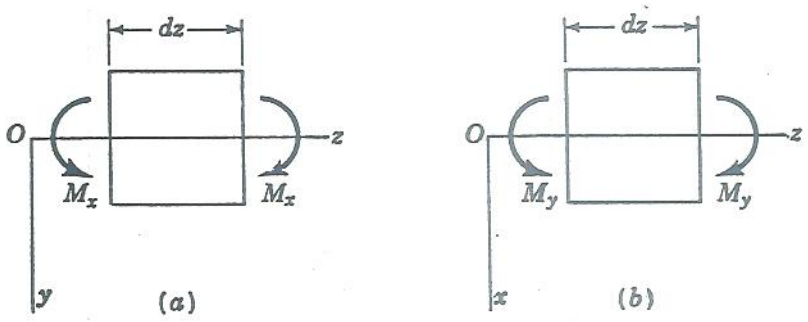
Şekil 2.5. Simertik olmayan ince cidarlı kesit

Eğer kolonun merkezine bir P kuvveti uygulanırsa kesite ait eğilme momentleri aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$M_y = -P(u + y_0\phi) \tag{2.49}$$

$$M_x = -P(v - x_0\phi) \tag{2.50}$$

Momentlerin yönleri ve işaretleri Şekil 2.6'da verilmiştir. Burada, ince cidarlı elemana ait bir dz parçası için pozitif momentler gösterilmiştir.



Şekil 2.6 Momentlerin yönleri ve işaretleri

Kesme merkezi koordinatlarındaki sapma göz önüne alınarak diferansiyel denklemler aşağıdaki hale getirilebilir;

$$+M_y = -P(u + y_0\phi) = EI_y \frac{d^2u}{dz^2} \tag{2.51}$$

$$+M_x = -P(v - x_0\phi) = EI_x \frac{d^2v}{dz^2} \tag{2.52}$$

Bu iki diferansiyel denklemde u, v ve ϕ büyüklükleri bilinmeyenlerdir. Kesitin herhangi bir tds parçası için koordinatları x ve y olarak tanımlanır ve ϕ dönmesi de hesaba katılırsa, burulma esnasında kesitin koordinatları $u + (y_0 - y)\phi$ ve $v - (x_0 - x)\phi$ olur. Elemanın dz uzunluğu için bu ifadelerin z'ye göre ikinci türevleri alınırsa $\sigma\, tds$ yükü için elemanın x ve y yönlerindeki kuvvetleri aşağıdaki gibidir:

$$-\left(\sigma\, tds\right)\frac{d^2}{dz^2}[u + (y_0 - y)\phi] \tag{2.53}$$

$$-\left(\sigma\, tds\right)\frac{d^2}{dz^2}[v - (x_0 - x)\phi] \tag{2.54}$$

Seçilen dz elemanında yukarıda gösterilen kuvvetlerin kesme merkezine göre momentleri alınırsa, birim uzunluğa ait dönme momenti aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$dm_z = -(\sigma t ds)(y_0 - y)\left[\frac{d^2u}{dz^2} + (y_0 - y)\frac{d^2\phi}{dz^2}\right] + (\sigma t ds)(x_0 - x)\left[\frac{d^2v}{dz^2} - (x_0 - x)\frac{d^2\phi}{dz^2}\right] \tag{2.55}$$

(2.55) denkleminin integral sınırı kesit alanı olmak üzere integrali alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\sigma \int_A t ds = P \qquad \int_A x t ds = \int_A y t ds = 0$$

$$\int_A y^2 t ds = I_x \qquad \int_A x^2 t ds = I_y$$

Kesitin kesme merkezine ait polar atalet momenti,

$$I_0 = I_x + I_y + A\left(x_0^2 + y_0^2\right) \tag{2.56}$$

olarak formüle edilir. (2.55) denkleminin integrali sonucu elemana ait dönme momenti, kesitin kesme merkezine kutupsal yarıçap $r_0^2 = \frac{I_0}{A}$ kullanılarak ve $m_z = -\sigma \frac{d^2\phi}{dz^2} I_0$ olduğuna göre,

$$m_z = \int_A dm_z = P\left[x_0 \frac{d^2v}{dz^2} - y_0 \frac{d^2u}{dz^2}\right] - \frac{I_0}{A} P \frac{d^2\phi}{dz^2} \tag{2.57}$$

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dz^4} - \left(GJ - r_0^2\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2v}{dz^2} + Py_0 \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \tag{2.58}$$

şeklinde hesaplanır. Kesme merkezi ile ağırlık merkezinin çakışması durumunda, $x_0 = y_0 = 0$ olur. Bu durumda, (2.51), (2.52) ve (2.58) denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -Pu \tag{2.59}$$

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -Pv \tag{2.60}$$

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dz^4} - \left(GJ - r_0^2\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \tag{2.61}$$

Burada, ilk iki denkleme ait değerler, burulma için hesaplanan kritik Euler yükünü verirken, son denklem bükülmeye ait burulmanın kritik yükünü verir.

İnce cidarlı elemanın basit mesnetli olduğu varsaymı ile, x ve y yönlerinde eğilme ve dönme olurken, z ekseninde dönme olmaması durumu için uç nokta koşulları;

$z = 0$ ve $z = L$ durumu için $u = v = \phi = 0$

$z = 0$ ve $z = L$ durumu için $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$

şeklindedir. Bu koşulların (2.51), (2.52) ve (2.58) denklemlerinde kullanılması sonucu u, v ve ϕ bilinmeyenleri aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$u = A_1 \sin\frac{\pi z}{L} \qquad v = A_2 \sin\frac{\pi z}{L} \qquad \phi = A_3 \sin\frac{\pi z}{L} \tag{2.62}$$

Bu beğerler, (2.51), (2.52) ve (2.58) denklemlerinde yerlerine konularak, A_1, A_2 ve A_3 sabitleri cinsinden yeniden yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left(P - EI_y \frac{\pi^2}{L^2} \right) A_1 + Py_0 A_3 = 0$$

$$\left(P - EI_x \frac{\pi^2}{L^2} \right) A_2 + Px_0 A_3 = 0 \qquad (2.63)$$

$$Py_0 A_1 - Px_0 A_2 - \left(EI_w \frac{\pi^2}{L^2} + GJ - r_0^2 \right) A_3 = 0$$

Bu üç denkleme ait bir çözüm, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ olması durumudur.

(2.63) denkleminin determinantı alındığında x ve y eksenlerindeki burulma için hesaplanan kritik Euler yüklerini ve bükülmeye ait burulmanın kritik yükünü verir.

Bu yükler sırasıyla;

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \qquad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \qquad P_\phi = \frac{1}{r_0^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right) \qquad (2.64)$$

şeklindedir. (2.63) denkleminin determinantı, bu kritik yükler de hesaba katılarak aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenebilir.

$$\begin{vmatrix} P - P_y & 0 & Py_0 \\ 0 & P - P_x & -Px_0 \\ Py_0 & Px_0 & r_0^2 (P - P_\phi) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.65)$$

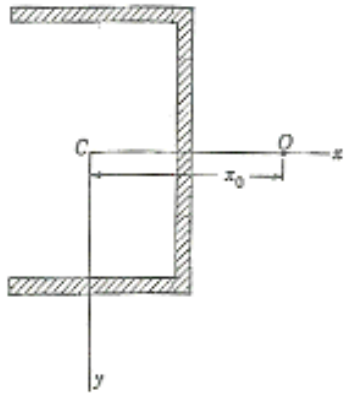
Bu determinantın açılmasıyla, elemana ait kritik P yükü hesaplanır.

$$r_0^2 (P - P_y)(P - P_x)(P - P_\phi) - P^2 y_0^2 (P - P_x) - P^2 x_0^2 (P - P_y) = 0$$

EK..'da elemana ait kritik yük hesabı için Galerkin Metodu adı verilen metod anlatılmıştır.

Kesitin Bir Eksene Göre Simetrik Olması Durumu:

Şekil 2.7'de bir eksene göre simetrik bir C kesiti gösterilmiştir. Kesitin x eksenine göre simetrik olması durumunda, $y_0 = 0$ olduğuna göre (2.51), (2.52) ve (2.58) denklemleri aşağıdaki gibi olur:



Şekil 2.7 X eksenine göre simetrik C kesiti

$$+M_y = -Pu = EI_y \frac{d^2u}{dz^2} \tag{2.66}$$

$$+M_x = -P(v - x_0\phi) = EI_x \frac{d^2v}{dz^2} \tag{2.67}$$

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dz^4} - (GJ - r_0^2)\frac{d^2\phi}{dz^2} - Px_0 \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \tag{2.68}$$

İnce cidarlı elemanın basit mesnetli olduğu varsaymı ile, x ve y yönlerinde eğilme ve dönme olurken, z ekseninde dönme olmaması durumu için uç nokta koşulları;

$z = 0$ ve $z = L$ durumu için $u = \phi = 0$

$z = 0$ ve $z = L$ durumu için $\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$

şeklindedir. Bu koşulların (2.66), (2.67) ve (2.68) denklemlerinde kullanılması sonucu v ve ϕ bilinmeyenleri aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

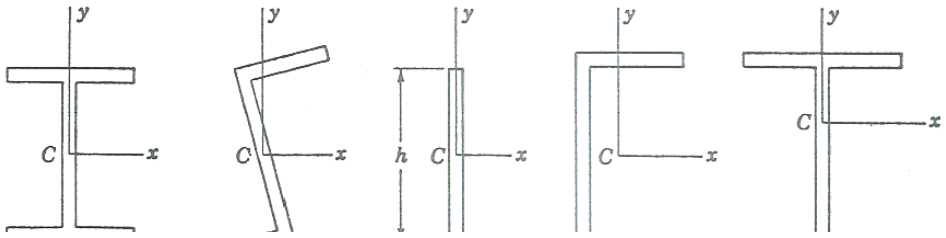
$$v = A_1 \sin \frac{\pi z}{L} \qquad \phi = A_2 \sin \frac{\pi z}{L} \tag{2.69}$$

$$\begin{vmatrix} P - P_x & -Px_0 \\ -Px_0 & r_0^{\,2}\left(P - P_\phi\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.70}$$

Bu determinantın açılmasıyla, elemana ait kritik P yükü hesaplanır.

$$r_0^{\,2}\left(P - P_x\right)\left(P - P_\phi\right) - P^2 x_0^{\,2} = 0 \tag{2.71}$$

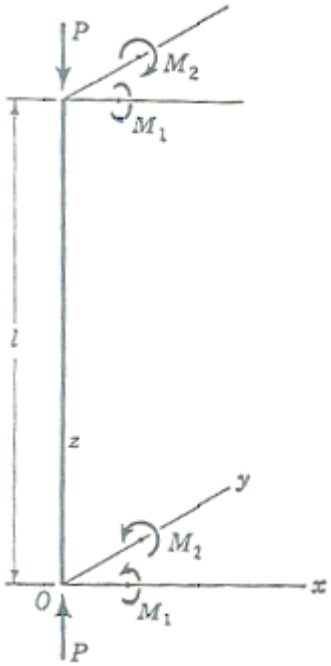
Aşağıda bir eksene göre simetrik kesitlere ait bazı örnekler gösterilmiştir.



a) I Kesit b) Z Kesit c) I Kesit d) C Kesit e) T Kesit

Şekil 2.8 Bir eksene göre simetrik kesitler

Şekil 2.9'da görülen bir P yükü etkisi altındaki elemanın M_x ve M_y eğilme momentleriyle oluşan eğilme etkisi altında olduğu düşünülürse; elemanın dz uzunluğu için eğilme esnasında kesitin koordinatları $u + (y_0 - y)\phi$ ve $v - (x_0 - x)\phi$ 'dir. Buna göre elemana ait yanal yükler ve dönme momenti aşağıdaki gibi hesaplanır:



Şekil 2.9 Eğilme Moment çifti

x yönündeki yanal kuvvet:

$$q_x = -\int_A \left(\sigma\, t\, ds\right) \frac{d^2}{dz^2}\left[u + (y_0 - y)\phi\right] = -\int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\left[\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}(y_0 - y)\right] \qquad (2.72)$$

(2.72) denkleminde $\sigma \int_A t ds = P$ yerine konulursa

$$q_x = -P\left[\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}(y_0 - y)\right] = -P\frac{d^2 u}{dz^2} - Py_0\frac{d^2\phi}{dz^2} + Py\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad (2.73)$$

(2.73) denkleminde $q_x = EI_y \frac{d^4 u}{dz^4}$ yerine konulursa

$$EI_y\frac{d^4 u}{dz^4} + P\frac{d^2 u}{dz^2} + Py_0\frac{d^2\phi}{dz^2} - Py\frac{d^2\phi}{dz^2}$$

$$= EI_y\frac{d^4 u}{dz^4} + P\frac{d^2 u}{dz^2} + (Py_0 - M_x)\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \qquad (2.74)$$

(2.114) denkleminde sadeleştirmeler yapılarak;

$$EI_y \frac{d^4u}{dz^4} + P\frac{d^2u}{dz^2} + (Py_0 - M_x)\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \tag{2.75}$$

denklemi elde edilir ve (2.75) denklemi de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$EI_y u^{iv} + Pu'' - Py_0\phi'' - M_x\phi'' = 0 \tag{2.76}$$

bu durumda x yönündeki yanal kuvvet ile ilgili denge denklemi elde edilir.

y yönündeki yanal kuvvet:

$$q_y = -\int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\frac{d^2}{dz^2}\left[v - (x_0 - x)\phi\right] = -\int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\left[\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{d^2\phi}{dz^2}(x_0 - x)\right] \tag{2.77}$$

(2.77) denkleminde $\sigma\int_A t ds = P$ yerine konulursa

$$q_y = -P\left[\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{d^2\phi}{dz^2}(x_0 - x)\right] = -P\frac{d^2v}{dz^2} + Px_0\frac{d^2\phi}{dz^2} - Px\frac{d^2\phi}{dz^2} \tag{2.78}$$

(2.78) denkleminde $q_y = EI_x\frac{d^4v}{dz^4}$ yerine konulursa,

$$\begin{aligned} &EI_x\frac{d^4v}{dz^4} + P\frac{d^2v}{dz^2} - Px_0\frac{d^2\phi}{dz^2} + Px\frac{d^2\phi}{dz^2} \\ &= EI_x\frac{d^4v}{dz^4} + P\frac{d^2v}{dz^2} - (Px_0 + M_y)\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.79}$$

(2.79) denkleminde sadeleştirmeler yapılarak;

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - \left(Px_0 + M_y\right)\frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \tag{2.80}$$

denklemi elde edilir ve (2.80) denklemi de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$EI_x v^{iv} + Pv'' - Px_0 \phi'' + M_y \phi'' = 0 \tag{2.81}$$

bu durumda y yönündeki yanal kuvvet ile ilgili denge denklemi elde edilir.

z ekseni etrafındaki burulma momenti:

$$\begin{aligned} m_z &= -\int \left(\sigma\, t\, ds\right)\left(y_0 - y\right)\frac{d^2}{dz^2}\left[u + \left(y_0 - y\right)\phi\right] \\ &+ \int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\left(x_0 - x\right)\frac{d^2}{dz^2}\left[v - \left(x_0 - x\right)\phi\right] \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} m_z &= -\int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\left(y_0 - y\right)\left[\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2}\left(y_0 - y\right)\right] \\ &+ \int_A \left(\sigma\, t\, ds\right)\left(x_0 - x\right)\left[\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{d^2 \phi}{dz^2}\left(x_0 - x\right)\right] \end{aligned} \tag{2.83}$$

(2.83) denkleminde $\sigma \int_A t ds = P$ yerine konulursa

$$m_z = -P\left(y_0 - y\right)\left[\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2}\left(y_0 - y\right)\right] + P\left(x_0 - x\right)\left[\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{d^2 \phi}{dz^2}\left(x_0 - x\right)\right] \tag{2.84}$$

elde edilir. (2.84) denklemi katsayılara göre paranteze alınırsa;

$$m_z = \left(-Py_0 + Py\right)\frac{d^2u}{dz^2} + \left(Px_0 - Px\right)\frac{d^2v}{dz^2}$$
$$-P\left(y_0 - y\right)^2\frac{d^2\phi}{dz^2} - P\left(x_0 - x\right)^2\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad (2.85)$$

$$m_z = \left(-Py_0 + M_x\right)\frac{d^2u}{dz^2} + \left(Px_0 - M_y\right)\frac{d^2v}{dz^2}$$
$$-P\left(y_0^2 + x_0^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2y\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad (2.86)$$

elde edilir. (2.86) denklemini kısaltmak için bazı formüller kullanılarak sadeleştirmeler yapılır. Bu formüllerin nasıl hesaba katılacağı aşağıda gösterilmiştir:

Elemana ait burulma momenti,

$M_t = GJ\frac{d\phi}{dz} - EI_w\frac{d^3\phi}{dz^3}$ şeklinde hesaplanır ve bu denklemin z'ye göre birinci türevi alınırsa

$$\frac{dM_t}{dz} = GJ\frac{d^2\phi}{dz^2} - EI_w\frac{d^4\phi}{dz^4} \qquad (2.87)$$

denklemi elde edilir. Elemanın birim uzunluğuna ait burulma momenti, $m_z = -\sigma\frac{d^2\phi}{dz^2}I_0$ ifadesi (2.87)'de yerine konularak aşağıdaki ifade bulunur.

$$EI_w\frac{d^4\phi}{dz^4} - \left(GJ - \sigma I_0\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \qquad (2.88)$$

β_x, x eksenindeki burulma eğilmesi hesaplanırken kullanılan büyüklük,

β_y, y eksenindeki burulma eğilmesi hesaplanırken kullanılan büyüklük olmak üzere;

$$\beta_y = \frac{1}{I_x}\left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2\, y\, dA\right) - 2y_0 \tag{2.89}$$

$$\beta_x = \frac{1}{I_y}\left(\int_A x^3 dA + \int_A x\, y^2 dA\right) - 2x_0 \tag{2.90}$$

$$m_z = \left(-Py_0 + M_x\right)\frac{d^2u}{dz^2} + \left(Px_0 - M_y\right)\frac{d^2v}{dz^2} - P\left(y_0^2 + x_0^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2y\right)\frac{d^2\phi}{dz^2}$$

denkleminde (2.88), (2.89) ve (2.90) denklemleri yerlerine konulursa;

$$EI_w\frac{d^4\phi}{dz^4} - \left(GJ - M_x\beta_y - M_y\beta_2 - P\frac{I_0}{A}\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(Py_0 - M_x\right)\frac{d^2u}{dz^2} - \left(Px_0 - M_y\right)\frac{d^2v}{dz^2} = 0 \tag{2.91}$$

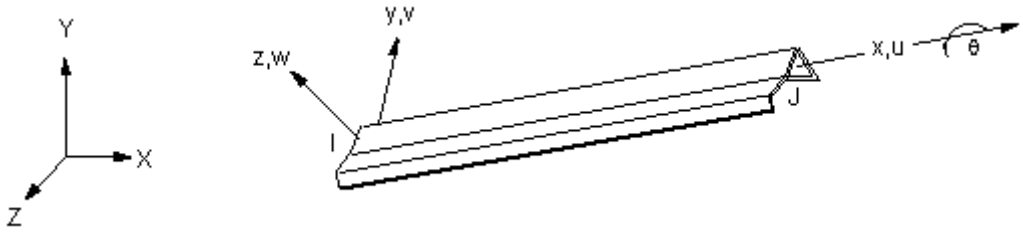
elde edilir ve bu denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$EI_w\phi^{iv} - GJ\,\phi'' + \left(\beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^2\right)\phi'' + Py_0u'' - Px_0v'' - M_xu'' + M_yv'' = 0 \tag{2.92}$$

z ekseni etrafındaki burulma momentine ait denge denklemi elde edilir.

Şekil 2.10'da ince cidarlı kirişe ait eksen takımları gösterilmektedir. Elde edilen (2.76), (2.81) ve (2.92) denklemleri kullanılarak ince cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi hesaplanabilir.

Buna göre, ince cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi, aşağıdaki şekilde belirtilebilir [28, 29]:



Şekil 2.10 Üç boyutlu ince cidarlı kirişin eksen takımları [27]

$$U = \frac{1}{2}\left[\int EI_y\left(u'''\right)^2 + EI_y\left(v'''\right)^2 + EI_w\left(\phi'\right)^2 + GJ\left(\phi\right)^2\right]dz \qquad (2.93)$$

Burada u, v, ϕ; x ve y doğrultularındaki ötelenmeleri ve z ekseni etrafındaki dönmeyi, EI_y, EI_x, EI_w elemana ait eğilme rijitliklerini, GJ elemana ait burulma rijitliğini ve L de kirişin uzunluğunu gösterirken integral sınırları 0'dan z'ye kadar alınmıştır. Değişik kesit türlerine göre çarpılmalı burulma atalet momentinin hesabı EK.B 'de verilmiştir. İntegral, birincil eksenel gerilme nedeni ile

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{yM_x}{I_y} + \frac{xM_y}{I_x} + \frac{\Omega M_w}{I_w} \qquad (2.94)$$

şeklinde gösterilir [28, 29]. (2.93) ile verilen ince cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi, aşağıdaki gibi matris formunda gösterilebilir:

$$U_i = \frac{1}{2}\int \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 & Pa_y - M_x \\ & P & -Pa_x + M_y \\ Simetrik & & \Pr_0{}^2 + M_x\beta_y + M_y\beta_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{Bmatrix} dz \qquad (2.95)$$

İnce cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi, matris formunda gösterilirken (2.76), (2.81) ve (2.92) denklemleri kullanılır. Bu denklemler sırasıyla yazılırsa;

$$EI_y u^{iv} + Pu'' - Py_0\phi'' - M_x\phi'' = 0$$

$$EI_x v^{iv} + Pv'' - Px_0\phi'' + M_y\phi'' = 0$$

$$EI_w\phi^{iv} - GJ\phi'' + \left(\beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^2\right)\phi'' + Py_0 u'' - Px_0 v'' - M_x u'' + M_y v'' = 0$$

elde edilir. Bu üç denklem kullanılarak, iki ayrı matris oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} u^{iv} \\ v^{iv} \\ \phi^{iv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_y & & \\ & EI_x & \\ & & EI_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & 0 & -Py_0 - M_x \\ 0 & P & -Px_0 + M_y \\ -Px_0 + M_y & -Px_0 + M_y & -GJ + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ \phi'' \end{bmatrix} = 0$$

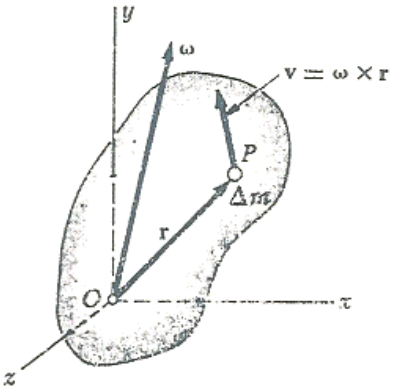
Bu matrislerden ilki, (2.76), (2.81) ve (2.92) denklemlerindeki $\{u\} = \{u, v, \phi\}$ vektörünün dördüncü türevlerine ait elemanlarla oluşturulur. Bu matris, $[A_4]_1$ olarak adlandırılmış ve aşağıda gösterilmiştir.

$$[A_4]_I = \begin{bmatrix} u^{iv} \\ v^{iv} \\ \phi^{iv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_y & & \\ & EI_x & \\ & & EI_w \end{bmatrix} \qquad (2.96)$$

Sisteme ait $[A_4]_1$ matrisi oluşturulurken, rijit bir cismin üç boyuttaki açısal momentumundan yola çıkılabilir. Buna göre, Şekil 2.11'de gösterilen O noktası sabit olan rijit bir cisim göz önünen alınırsa; cismin O noktasına göre açısal momentumu,

$$h_0 = \sum \left[r \times (\Delta m)v\right] \qquad (2.97)$$

dir; burada r ve v sırasıyla, kütlesi Δm olan P maddesel noktasının yer vektörünü ve hızını gösterir.



Şekil 2.11 O noktası sabit olan rijit cisim [36]

Hıza ait $v = \omega \times r$ formülü (2.97)'de yerine konulursa

$$h_0 = \sum [r \times (\omega \times r)\Delta m]$$

elde edilir. Açısal momentuma ait vektörel çarpımın x bileşeninin belirlenmesi için aşağıdaki ifade kullanılır:

$$h_x = \sum [y(\omega \times r)_z - z(\omega \times r)_y]\Delta m \qquad (2.98)$$

$$h_x = \sum [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)]\Delta m \qquad (2.99)$$

$$h_x = \omega_z \sum (y^2 + z^2)\Delta m - \omega_x \sum xy\Delta m - \omega_z \sum xz\Delta m \qquad (2.100)$$

Bu ifadelerdeki toplamalar, integrallerle değiştirilir ve h_y ve h_z için de benzer işlemler yapılırsa;

$$h_x = \omega_x \int (y^2 + z^2)dm - \omega_y \int xydm - \omega_x \int xzdm$$

$$h_y = -\omega_x \int yxdm + \omega_y \int (z^2 + x^2)dm - \omega_z \int yzdm \qquad (2.101)$$

$$h_z = -\omega_{xx} \int zx dm - \omega_y \int zy dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm$$

elde edilir. Karesel terimleri kapsayan integraller cismin sırasıyla x, y ve z eksenlerine göre kütlesel atalet momentini gösterir:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm \qquad (2.102)$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Koordinatları çarpımını kapsayan integraller için ise aşağıdaki kütlesel çarpım atalet momenti tanımlaması yapılır:

$$P_{xy} = \int x\, y\, dm \qquad P_{yz} = \int y\, z\, dm$$

$$P_{zx} = \int z\, x\, dm \qquad P_{yx} = \int y\, x\, dm \qquad (2.103)$$

$$P_{zy} = \int z\, y\, dm \qquad P_{xz} = \int x\, z\, dm$$

Burada $P_{xy} = P_{yx}$, $P_{yz} = P_{zy}$ ve $P_{zx} = P_{xz}$'dir. (2.101) ve (2.102) tanımlamaları (2.103)'de yerlerine konulacak olursa, cismin O noktasına göre h_0 açısal momentumunun bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$h_x = I_x \omega_x - P_{xy} \omega_y - P_{xz} \omega_z$$

$$h_y = -P_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - P_{yz} \omega_z \qquad (2.104)$$

$$h_z = -P_{zx} \omega_x - P_{zy} \omega_y + I_z \omega_z$$

Cismin kütle merkezine göre h_G' açısal momentumunun bileşenleri için, ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini kapsayan benzer bağıntılar elde edilir.

(2.104) bağıntıları, ω vektörünü h_0 vektörüne dönüştüren işlemin, atalet momentlerinin meydana getirdiği aşağıdaki matris ile tanımlandığını gösterir:

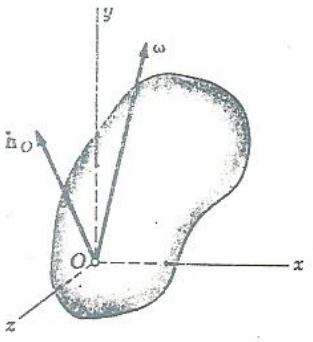
$$\begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{bmatrix} \qquad (2.105)$$

(2.105) matrisi cismin O noktasına göre atalet tansörü adını alır. Farklı bir eksen takımı kullanılacak olursa yeni bir atalet ve çarpım atalet momentleri matrisi bulunur. Bununla birlikte bu yeni matris ile tanımlanan dönüşüm aynı kalmalıdır. Çünkü verilen bir ω açısal hızına karşı gelen h_0 açısal momentumu, koordinat eksenlerinin seçiminden bağımsızdır. Asal atalet eksenleri adı verilen ve cismin bunlara göre çarpım atalet momentlerinin sıfır olmasını sağlayan bir eksen takımı bulmak her zaman mümkündür (Şekil 2.12). Bu durumda (2.105) matrisi köşegen haline gelir:

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \qquad (2.106)$$

Burada I_x, I_y ve I_z cismin atalet momentlerini gösterir ve (2.104) bağıntıları aşağıdaki hali alır:

$$h_x = I_x \omega_x \qquad h_y = I_y \omega_y \qquad h_z = I_z \omega_z$$



Şek. 8.3

Şekil 2.12 O noktası sabit olan rijit cismin asal atalet eksenleri [36]

Bu denklemlerden yola çıkılarak, dinamik rijitlik metodu kullanılarak ince cidarlı bir kirişe ait sistemin çözümünde kullanılmak üzere $[A_4]$ matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[A_4] = E\begin{bmatrix} I_y & & \\ & I_x & \\ & & I_w \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

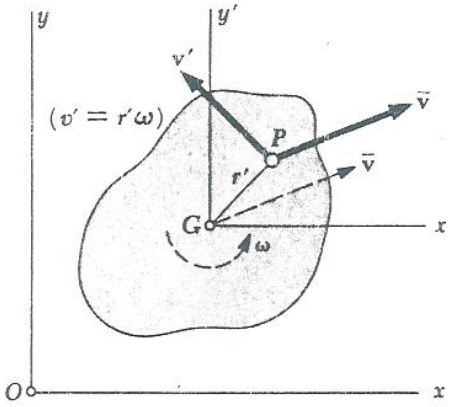
İnce cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi, matris formunda gösterilirken bu matrislerden ikincisi, yukarıdaki denklemlerde $\{u\} = \{u, v, \phi\}$ vektörünün ikinci türevlerine ait elemanlarla oluşturulur. Bu matris, $[A_2]_1$ olarak adlandırılmış ve aşağıda gösterilmiştir.

$$[A_2]_1 = \begin{bmatrix} P & 0 & -Py_0 - M_x \\ 0 & P & -Px_0 + M_y \\ -Px_0 + M_y & -Px_0 + M_y & -GJ + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ \phi'' \end{bmatrix} = 0$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix} P & 0 & -Py_0 - M_x \\ 0 & P & -Px_0 + M_y \\ -Px_0 + M_y & -Px_0 + M_y & -GJ + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^{\,2} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

İnce cidarlı bir kirişe ait şekil değiştirme enerjisi gözönüne alındığında $[A_2]$ ve $[A_4]$ matrisleri elde edilmiştir. Aşağıda kinetik enerji etkisi de hesaba katılarak ince cidarlı bir kirişe ait sistemin çözümünde kullanılmak üzere yeni bir matris hesaplanmıştır.

Şekil 2.13'de görüldüğü gibi düzlemsel hareket yapan ve kütlesi m olan rijit bir cisim göz önüne alınsın.



Şekil 2.13 Rijit cismi oluşturan maddesel noktalar [36]

Cismin v hızı, cismin G kütle merkezinin $\bar{v}$ hızı ile noktanın G 'den geçen ve doğrultusu sabit bir $Gx'y'$ takımına göre v' bağıl hızının toplamı şeklinde ifade edilebilirse, rijit cismi oluşturan maddesel noktalar sisteminin kinetik enerjisi;

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m\right)\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m\right)v'^2 \quad (2.109)$$

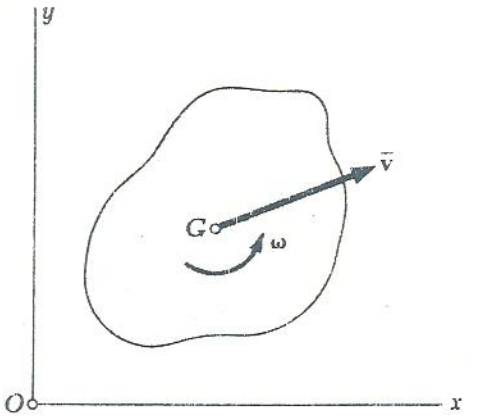
şeklinde yazılabilir. Fakat rijit bir cismin bir S noktasının bağıl hızının, v' şiddeti, aynı anda noktanın G'den geçen ve hareket düzlemine dik olan bir eksene göre r' uzaklığı ile cismin frekansının, ω şiddetinin $r'\omega$ çarpımına eşittir. Bu değer (2.109)'da yerine konulursa,

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m\right)\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum r'^2 \Delta m\right)\omega^2 \qquad (2.110)$$

veya, $\sum \Delta m$ ve $\sum r'^2 \Delta m$ toplamları sırasıyla cismin m kütlesine ve G 'den geçen eksene göre I atalet momentine eşit olduğundan

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (2.111)$$

yazılabilir. Burada eşitliğin sağındaki terimler sırasıyla, cismin G kütle merkezinin hareketinden oluşan kinetik enerji ve cismin G etrafında dönmesinden oluşan kinetik enerjidir. Şekil 2.14'de G etrafındaki dönme gösterilmiştir.



Şekil 2.14 G etrafındaki dönme [36]

İnce cidarlı yapılar için oluşturulan matriste dönmeden dolayı kinetik enerjinin de hesaba katılması gereklidir. Aşağıda kinetik enerji, matris formatında verilmiştir.

$$T = \frac{\rho}{2}\int \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A - I_y D^2 & 0 & Aa_y \\ & A - I_x D^2 & Aa_x \\ Simetrik & & Ar_0^2 - I_w D^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{Bmatrix} dz \qquad (2.112)$$

Kinetik enerji bu şeklide formüle edilirken $\left(\quad ' \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $D \equiv \frac{\partial}{\partial z}$, ρ da birim alana düşen kütle yoğunluğunu gösterir [27]. Buna göre ince cidarlı bir yapının kinetik enerjisi de hesaba katılarak aşağıda $[A_0]$ olarak adlandırılan matris yazılabilir:

$$[A_0] = -\rho A \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_0 \\ & 1 & -x_0 \\ \textit{Simetrik} & & r_0^2 \end{bmatrix} \qquad (2.113)$$

ρ birim alana düşen kütle yoğunluğu kullanılarak hesaplanan kinetik enerji de hesaba katılarak $[A_0]$, $[A_2]$ ve $[A_4]$ matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanırlar.

$$[A_0] = -\rho A \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_0 \\ & 1 & -x_0 \\ \textit{Simetrik} & & r_0^2 \end{bmatrix} \qquad (2.113)$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} P & 0 & -Py_0 - M_x \\ 0 & P & -Px_0 + M_y \\ -Px_0 + M_y & -Px_0 + M_y & -GJ + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \mathrm{Pr}_0^2 \end{bmatrix} \qquad (2.108)$$

$$[A_4] = E \begin{bmatrix} I_y & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \qquad (2.107)$$

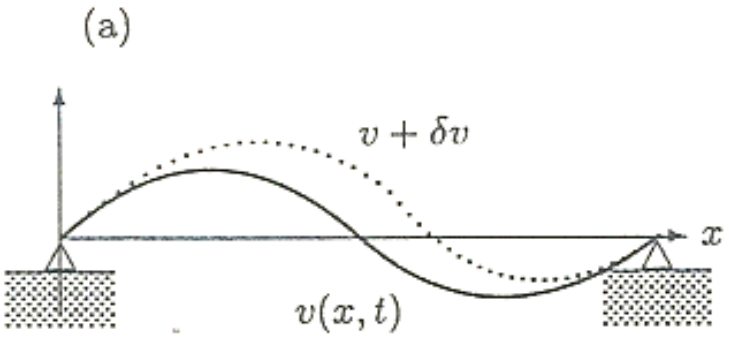
Hamilton Prensibi:

Dinamik problemlerin virtüel işi hesaplanırken, var olan atalet kuvvetlerinin sayısı bilinmeli ve bütün parametrelerin zamanın birer fonksiyonu şeklinde tanımlanmaları gereklidir. Bunun için, önce D'Alembert prensibi ve sonrasında zamanın ortalamasını alma yöntemi uygulanır.

D'Alembert prensibi, dinamik problemi kütle kuvveti gibi davranan atalet kuvvetlerini kullanarak eşleniği olan bir statik denge problemine dönüştürür. Toplam kütle kuvveti $\rho b_i \rightarrow \left(\rho b_i - \rho \ddot{u}_i \right)$'dir. Burada $-\rho \ddot{u}_i dV$ atatet yükü çok küçüktür. Kütle kuvvetinin yaptığı virtüel iş;

$$\delta W^b = \sum_i \int_V \rho b_i \, \delta u_i dV - \sum_i \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \qquad (2.114)$$

şeklinde tanımlanır. Virtüel yer değiştirme gerçekleştiğinde sistemin gerçek hareketi durur. Sonuç olarak, zaman değişkeninin sabit kaldığı düşünüldüğünde virtüel yer değiştirme gerçekleşir.



Şekil 2.15 Hamilton prensibine göre bir kirişe ait geometrik model [28]

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{u}_i \delta u_i \right) = \sum_i \ddot{u}_i \delta u_i + \sum_i \dot{u}_i \delta u_i \qquad (2.115)$$

Atalet parametresi yeniden yazılırsa;

$$\sum_i \int \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV = \sum_i \int \rho \frac{d}{dt}\left(\dot{u}_i \delta u_i\right) dV - \sum_i \int \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV \tag{2.116}$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_i \int \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV \tag{2.117}$$

kinetik enerji elde edilir.

İnce cidarlı kirişe ait şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji, $[A_0]$, $[A_2]$ ve $[A_4]$ matrisleriyle gösterilirken, Hamilton kuralına başvurarak harmonik serbest titreşime ait frekans $\omega = \sqrt{k/m}$ olmak üzere, sisteme ait bir karakteristik denklem elde edilir. Bu karakteristik denklem,

$$\left[A_0 + A_2\omega^2 + A_4\omega^4\right] \{u\} = 0 \tag{2.118}$$

şeklinde yazılabilir [27]. Burada $\{u\} = \left\{u,\ v,\ \phi\right\}$'dir. u, v, ϕ ise titreşim büyüklükleridir.

Doğal başlangıç koşulları birleştirilerek,

$$\{R\}^T \{\delta u'\} + \{S\}^T \{\delta u\} = 0 \tag{2.119}$$

şeklinde bir denklem haline getirilir. R ve S genelleştirilmiş yükleri,

$$\{R\} = [A_4]\ \{u''\} \text{ ve } \{S\} = -[A_2]\ \{u'\} - [A_4]\ \{u'''\} \tag{2.120}$$

eşitlikleri ile hesaplanabilir [27]. Düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörü;

$$\{q\} = \left\{ u(0),\ \ v(0),\ \ \phi(0),\ \ u'(0),\ \ v'(0),\ \ \phi'(0),\ \ u(l),\ \ v(l),\ \ \phi(l),\ \ u'(l),\ \ v'(l),\ \ \phi'(l) \right\}$$

$$\{q\} = \left\{ u(0),\ \ u'(0),\ \ u(l),\ \ u'(l) \right\} \qquad (2.121)$$

ve düğüm noktasına ait yük vektörü;

$$\{Q\} = S(0) \quad R(0) - S(l) - R(l) \qquad (2.122)$$

şeklinde ifade edilir [27]. Burada – işareti sonlu elemanlar kuralında olduğu gibi düğüm noktası yüklerinin yönlerinden kaynaklanır.

Yapılacak olan ilk iş; sonraki aşamalarda düğüm noktası yük vektörü $\{Q\}$ ile düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörü $\{q\}$ arasındaki ilişkiyi kurarak dinamik rijitlik matrisini oluşturmaktır.

2.6.2 Karakteristik Çözümler

$$\{u(z)\} = Ae^{\lambda z}\{\Phi\} \qquad (2.123)$$

eşitliğini düşünelim [27]. Burada A belirlenecek olan integrasyon sabitini, λ ilgili özdeğeri ve Φ de ilgili özvektörü göstersin. (2.123) denklemini (2.118) denkleminde yerine koyar ve $x = \lambda^2$ şeklinde kısaltma yaparsak, denklem;

$$\left[A_0 + A_2 x + A_4 x^2\right]\{\Phi\} = \{0\} \qquad (2.124)$$

şeklini alır [27]. {ϕ} vektörünün bulunması için (2.124) eşitliğinin sol tarafındaki denklemin sıfır olması yani denklemin determinantının sıfır olması gerekir. Bu durumda;

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + p_5 x^5 + p_6 x^6 = 0 \qquad (2.125)$$

şeklinde 6 bilinmeyenli 6. dereceden bir eşitlik elde edilir [27]. Denklemin determinantı alınarak bulunan sabit katsayılar Ek A.'da listelenmiştir.

(2.78) denklemindeki özdeğerler Hermit kuralından bilindiği üzere $[A_0]$'ın negatif belirli olması durumunda λ^2 gerçek sayı olmalıdır. Bu değerle ilgili katsayıların kısaca hesaplanması için gerekli algoritma ekte verilmiştir. Gerçekten de (2.124) denkleminin eşleniği olan lineer form aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} 0 & A_4 \\ A_4 & A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{Bmatrix} \qquad (2.126)$$

Sağ taraftaki matris pozitif belirlidir. Bu nedenle, lineer özdeğer teorisi ile $\frac{1}{x}$ değerinin gerçek sayı olması, yani x olması gerektiği söylenebilir. (2.125) no.'lu denklem çözüldüğünde denkleme ait 6 reel kök; x_i, i = 1, 2, ..., 6 bulunur. Bu nedenle, (2.123) no.'lu denklemin karakteristik çözümü aşağıdaki gibi elde edilir [27]:

(i) $x_i < 0$, $\lambda_i = \sqrt{-x_i}$ ise,

$$c(\lambda_i z) = \cos(\lambda_i z), \quad s(\lambda_i z) = \sin(\lambda_i z)$$

(ii) $x_i > 0$, $\lambda_i = \sqrt{x_i}$ ise,

$$c(\lambda_i z) = \cosh(\lambda_i z), \quad s(\lambda_i z) = \sinh(\lambda_i z)$$

İlgili özvektör $\{\Phi_i\} = [B_i \quad C_i \quad 1]^T$ ise (2.164) denklemi

$$\left[A_0 + A_2 x_i + A_4 x_i^{\,2}\right] \begin{Bmatrix} B_i \\ C_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \text{şeklini alır.} \tag{2.127}$$

$$\{u(z)\} = \begin{Bmatrix} A_1 c(\lambda_1 z)\{\Phi_1\} + A_2 s(\lambda_1 z)\{\Phi_1\} \\ + A_3 c(\lambda_2 z)\{\Phi_2\} + A_4 s(\lambda_2 z)\{\Phi_2\} \\ + A_5 c(\lambda_3 z)\{\Phi_3\} + A_6 s(\lambda_3 z)\{\Phi_3\} \\ + A_7 c(\lambda_4 z)\{\Phi_4\} + A_8 s(\lambda_4 z)\{\Phi_4\} \\ + A_9 c(\lambda_5 z)\{\Phi_5\} + A_{10} s(\lambda_5 z)\{\Phi_5\} \\ + A_{11} c(\lambda_6 z)\{\Phi_6\} + A_{12} s(\lambda_6 z)\{\Phi_6\} \end{Bmatrix} \tag{2.128}$$

A_i , $i = 1,2,3,\ldots\ldots, 12$ ifadesi düğüm noktasına ait 12 yer değiştirme parametresinin saptanması için kullanılan 12 integrasyon sabitini gösterir. (2.128) no.'lu denklemin türetilmesi ile $\{q\}$ düğüm noktası yer değiştirme vektörü ve $\{Q\}$ düğüm noktasına ait yük vektörleri bulunur. Bu iki vektörün bulunması ile ihtiyacımız olan $[D]$ dinamik rijitlik matrisini elde ederiz [27].

(2.128) no.'lu denklemin türetilmesinde kullanılacak olan ifadeleri aşağıdaki şartlar çerçevesinde gerçekleştirebiliriz:

$$\frac{dc\left(\lambda_i z\right)}{dz} = j\lambda_i s\left(\lambda_i z\right) \qquad \frac{ds\left(\lambda_i z\right)}{dz} = \lambda_i c\left(\lambda_i z\right) \tag{2.129}$$

Burada,

$x_i > 0$ ise $j = 1$

$x_i < 0$ ise $j = -1$ olmalıdır.

(2.121) denklemi kullanılarak $\{q\}$ düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörü;

$$\{q\}=\begin{Bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(l) \\ u'(l) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix}=[X][A] \tag{2.130}$$

olarak elde edilir. $[X]$ katsayılar matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulur [27]:

$$[X_i]=\begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \Phi_i \\ c_i\phi_i & s_i\phi_i \\ -j\lambda_i s_i\phi_i & \lambda_i c_i\phi_i \end{bmatrix} \tag{2.131}$$

Burada $c_i = c\left(\lambda_i l\right)$, $s_i = s\left(\lambda_i l\right)$ kısaltmaları yapılmıştır ve (2.122) denklemi kullanılarak $\{q\}$ düğüm noktasına ait yük vektörü;

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} S(0) \\ R(0) \\ -S(l) \\ -R(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = [Y][A] \tag{2.132}$$

olur. $[Y]$ katsayılar matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulur [27]:

$$[Y_i] = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_i \left(A_2 + j\lambda_i^2 A_4 \right) \phi_i \\ j\lambda_i^2 A_4 \phi_i & 0 \\ \lambda_i s_i \left(A_2 + \lambda_i^2 A_4 \right) \phi_i & \lambda_i c_i \left(A_2 + j\lambda_i^2 A_4 \right) \phi_i \\ -j\lambda_i^2 c_i A_4 \phi_i & -j\lambda_i^2 s_i A_4 \phi_i \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

(2.170) ve (2.172) denklemleri birleştirilir ise;

$$\{Q\} = [Y] \ \{A\} = [Y] \ [X]^{-1} \{q\} = [D] \ \{q\} \tag{2.134}$$

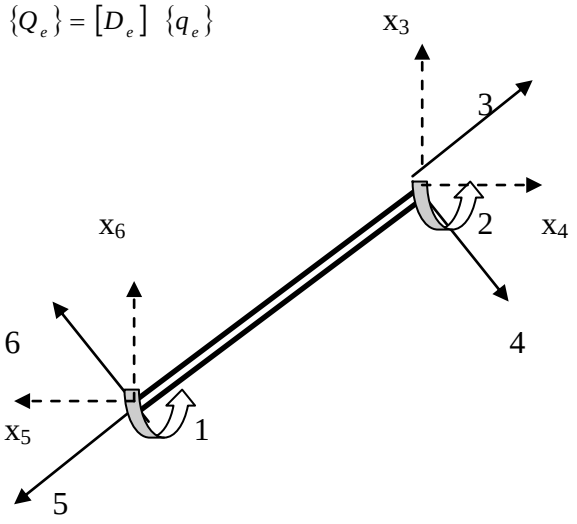
$$[D] = \left[X^{-T} Y^T \right] \tag{2.135}$$

haline getirilir ve aradığımız $[D]$ dinamik rijitlik matrisini elde ederiz.

2.6.3 Sistem Matrisinin Oluşturulması

Eğer sistem birden çok eleman içeriyor ise, (2.134) no.'lu denklem e elemanı için aşağıdaki şekilde yeniden yazılır [27].

$$\{Q_e\} = [D_e]\ \{q_e\} \tag{2.136}$$



Şekil 2.16 Çubuk elemanının asal eksenleri

Düğüm noktasına ait yer değiştirme ve kuvvetleri tarif etmek için Şekil 2.16'da gösterilen, i ucundaki 1, 5, 6 ve j ucundaki 2, 3, 4 eksenleri yani çubuğun asal eksenleri kullanılır. Ancak bazı durumlarda asal eksenler yerine başka eksenleri yani global eksenleri kullanmak daha uygun olabilir. Asal eksen takımlarını bu global eksenlere çevirebilmek için $[T_e]$ şeklinde gösterilen sistem transformasyon yani dönüştürme matrisleri kullanılır. Çubuğun i ucundaki asal eksenler döndürülerek, i_x eksen takımı denilen x_5, x_6 eksenleri ve j ucundaki asal eksenler de döndürülerek j_x eksen takımı denilen x_3, x_4 eksenleri meydana gelmiştir. Eksenlerin β dönme açıları, Şekil 2.16'da görüldüğü gibi, x_3 ve x_5'den itibaren saat akrebi yönünde ölçülmektedir. Asal eksenlere göre, $[P]_i$, $[P]_j$ ve $[d]_i$, $[d]_j$ ile gösterilmiş olan i ve j uçlarındaki uç kuvvet ve uç deplasman matrisleri i_x ve j_x yeni eksen takımlarına göre sırasıyla $[P]_{ix}$, $[P]_{jx}$ ve $[d]_{ix}$, $[d]_{jx}$ ile gösterilecektir. Asal eksen takımından i_x ve j_x eksen takımlarına geçmek için kullanılan 3 x 3 mertebeden $[T_e]_i$ dönüştürme matrisinin,

Birinci kolonu : 1 ekseninin x_1, x_5, x_6 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden, (1, 0, 0)

İkinci kolonu : 5 ekseninin x_1, x_5, x_6 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden,

Üçüncü kolonu : 6 ekseninin x_1, x_5, x_6 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden meydana gelmiştir.

Bu durumda, $[P]_i$ ile $[P]_{ix}$ ve $[d]_i$ ile $[d]_{ix}$ matrisleri arasında

$[P]_{ix} = [T_e]_i \times [P]_i$ ve $[d]_{ix} = [T_e]_i \times [d]_i$ bağıntıları mevcuttur.

Aynı şekilde 3 x 3 mertebeden olan $[T_e]_j$ dönüştürme matrisinin,

Birinci kolonu : 2 ekseninin x_2, x_3, x_4 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden, (1, 0, 0)

İkinci kolonu : 3 ekseninin x_2, x_3, x_4 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden,

Üçüncü kolonu : 4 ekseninin x_2, x_3, x_4 eksen takımına göre doğrultu kosinüslerinden meydana gelmiştir.

Bu durumda, $[P]_j$ ile $[P]_{jx}$ ve $[d]_j$ ile $[d]_{jx}$ matrisleri arasında

$[P]_{jx} = [T_e]_j \times [P]_j$ ve $[d]_{jx} = [T_e]_i \times [d]_j$ bağıntıları mevcuttur.

Düzlemi içindeki kuvvetlerin etkisi altında bulunan düzlem sistemlerde yukarıdaki tanımlar yardımıyla sisteme ait dönüştürme matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[T_e]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_i & -\sin\beta_i \\ 0 & \sin\beta_i & \cos\beta_i \end{bmatrix} \text{ ve } [T_e]_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_j & -\sin\beta_j \\ 0 & \sin\beta_j & \cos\beta_j \end{bmatrix}$$

Sistem global eksenine ait uç deplasman vektörü $\{q_m\}$ şeklinde gösterilirken e elemanına ait uç deplasman;

$$\{q_e\} = [T_e]\ \{q_m\} \tag{2.137}$$

formülü ile hesaplanabilir.

$$\{Q_m\} = [D_m]\ \{q_m\} \tag{2.138}$$

Burada;

$\left\{ Q_m = \sum_e [T_e]^T \{Q_e\} \right\}$ ve $\left\{ D_m = \sum_e [T_e]^T \{D_e\}\ [T_e] \right\}$ olarak hesaplanabilir. Doğal titreşim hali için;

$$[D_m(w)]\ \{q_m\} = \{0\} \tag{2.139}$$

eşitliği çözülerek sisteme ait açışal frekans hesaplanır [27].

2.6.4 Sturm Sayısı

Söz konusu problem başka bir şeçenek olarak sonlu elemanlar yöntemiyle de aşağıdaki eşitlik ile çözülebilir [27]:

$$\left[K - \omega^2 M\right] = \left[D(\omega)\right] \{q\} \tag{2.140}$$

Burada $[K]$ ve $[M]$ sırası ile sistem rijitlik matrisini ve sistem kütle matrisini gösterir. Kütle matrsisi her zaman pozitif belirli ve rijitlik matrisi momentler ve eksenel yüklerin varlığına bağlı olarak belirsizdir.

Sylvester'in atalaet kanunu [23] şu şekilde belirtilir ise; (2.140) denklemindeki özdeğer sayısı $\omega_1 < \omega_2$ ise $S(\omega_2) - S(\omega_1)$ değerine eşittir. $S(\omega_1)$ olarak gösterilen Sturm sayısı üç köşeli $\left[K - \omega^2 M\right]$ matrisinde hiçbir satır ve sütunun yerleri değiştirilmeksizin matrisin ana diyagonalinde bulunan negatif elemanlar için tanımlanan sayıdır. Sylvester kuralı (2.140) denkleminin çözümündeki hiçbir özdeğerin gözden kaçırılmadığını kesinleştirir.

Benzer doğruluğu başarabilmeyi sağlayan faktör (2.139) denkleminden daha fazla koordinat sayısına sahip olan (2.140) denkleminde uzaysal ayrıklaştırma hatalarının olmayışıdır.

Eğer $\{q_m\}$ düğüm noktasına ait deplasman vektörünü şu şekilde parçalara ayırırsak;

$$\{q\}^T = \left[q_s{}^T \quad q_m{}^T\right] \tag{2.141}$$

$\{q_m\}$ (2.139) denklemindeki başlıca koordinata ait deplasman vektörünü, $\{q_s\}$ de (2.140) denklemindeki ilave koordinata ait deplasman vektörünü gösterir. (2.140) denklemini aşağıdaki şekilde parçalara ayırırsak;

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sm} \\ D_{ms} & D_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s \\ q_m \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{2.142}$$

$\{q_s\}$ başlangıç transformasyonu ile elimine edilmesinden sonra matrisinin satır ve sütunlarında herhangi bir yerdeğiştirme yapmaksızın üçgen haline getirme yöntemine benzer bir yöntem ile aşağıdaki denklem elde edilir [27]:

$$[D_m]\ \{q_m\} = \left[D_{mm} - D_{ms} D_{ss}^{-1} D_{sm}\right]\ \{q_m\} = \{0\} \qquad (2.143)$$

Sonlu elemanlar metodunun garantisi ile (2.143) ve (2.139) no.'lu denklemlerin hemen hemen aynı olmasını sağlar ve $\{q_s\}$'deki koordinat sayısının yeterince büyük olması koşulunu koyar. (2.143) no.'lu denklem göstermiştir ki sistem matrisinin Sturm sayısı $[D_m]$'ye ait Sturm sayısı ve $[D_{ss}]$'ye ait Sturm sayısı olmak üzere iki parça içerir. $[D_{ss}]$'ye ait Sturm sayısı sisteme ait $\{q_m\}$'nin sıfır olması durumunda doğal frekans ile ilişkilidir. Burada bahsedilen doğal frekans her elemana ait toplam doğal frekanstır ve her iki ucu ankastre sistemlerdeki kısmi frekansların toplamıdır.

2.6.5 Kısmi Frekanslar

Kısmi frekans sayısı n, tercihen açık basit mesnetli elemanlara ait frekans sayısıdır. n. mod için $\{u_e\} = \{u_e^{\ n}\}\sin\ \gamma_n z$ varsayımı yapılabilir.

Burada $\gamma_n = \dfrac{n\pi}{l}$ olarak yazılan ifade (2.158) no.'lu denklemde yerine koyulursa $\omega_n^{\ 2}$'nin çözümü için kübik eşitlik elde edilir. Bu işlem sadece $\omega_n^{\ 2}$'nin en küçük reel çözümü için yapılır ve n ile $\omega_n^{\ 2}$'nin arasındaki ilişki tespit edilir. Kısmi frekanslar için Rayleigh prensibi kullanılarak her iki ucu ankastre mesnet şartları ile basit mesnet şartları birleştirilerek e elemanına ait kısmi frekansların sayısı türetilir [24].

$$J_e = n - S\left[D_n^{\ *}(w)\right] \qquad (2.144)$$

$\omega_n < \omega < \omega_{n+1}$ şartı ile beraber $[D_n *]$ matrisinin (2.134) no.'lu denklemde bahsi geçen $[D_e]$ matrisine ait 1, 2, 3, 7, 8 ve 9 no'lu satır ve sütunların silinmesi ile oluşturulan 6 x 6'lik matrisidir ve $[D_e(0)] > 0$ varsayımı yapılır. Bu nedenle, sistemin Sturm sayısına ait aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$S(\omega) = S[D_m(\omega)] + \sum_e J_e \qquad (2.145)$$

$\omega = 0$ olması halindeki burkulma modu hesaba katılmaz. Bununla birlikte, asıl ölçüm ve hesaplama $S(\omega_2) - S(\omega_1)$ arasındaki fark ve $\omega = 0$ olması halindeki bağımsız burkulma modu ile yapılır. Sonra sisteme ait doğal frekansların yerleri belirlenir ve Rayleigh'nin iterasyon metodu kullanılarak sisteme ait mod şekillerine ve ek sonuçlara ulaşılır [27].

2.6.6 Kütle Matrisinin Oluşturulması

Kütle matrisi her moda ait kütle genelleştirilmesi gereğini yerine getirmek ve sisteme ait mod analizlerinin yapılabilmesi için çok önemlidir. Aşağıda gösterilen Leung'un [4] kurduğu basit ilişki vasıtası ile kütle matrisinin dinamik rijitlik ile ilişkili olduğu görülür.

$$[M(\omega)] = -\frac{d}{d\omega^2}[D(\omega)] \qquad (2.146)$$

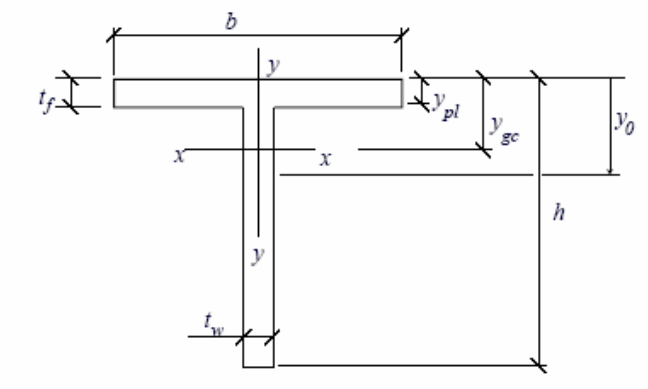
Sisteme ait doğal frekans hesaplanırken $[D(\omega)]$'nin doğal frekansa yakın olan diğer frekanslar için de değerlendirilmesi gerekir. Kütle matrisinin yanlışsız bir şekilde sağlanabilmesi için dinamik rijitliklerin nümerik diferansiyelinde Romberg algoritması kullanılabilir.

2.6.7 Dönüştürülmüş Haller

$\omega = 0$ iken (2.125) no.'lu denklemde dört misli sıfır karakteristik kök bulunur ve analizde hata vardır. Bununla birlikte, şekil fonksiyonları ve gerekli matrisler $\omega = 0$ veya bu değere yakınken kesin sonucu verebilir. I kesitli ve simetrik eksenli kirişlerde (2.125) no.'lu eşitlik kuadratik ve kuartic olmak üzere iki eşitliğe dönüşür ve karakteristik kökler için analitik çözüm bulunur [26].

3 ÖRNEKLER:

3.1 T Kesitli Kiriş Elemanının Dinamik Rijitlik Matrisinin Matlab Programıyla Hesaplanması



Şekil.2.17 T kesitli kirişe ait kesit özellikleri

$A = 7.5cm^2$,
$a_x = 3.33cm$,
$a_y = 0$,
$I_x = 5.261\,cm^4$,
$I_y = 83.6cm^4$,
$I_w = 0.00512\ cm^6$
$E = 2.5G$,
$J = 0.718\,cm^4$,

$r_o^2 = 22.9cm^2$,
$\beta_x = 8.12$,
$\beta_y = 0$,
$L = 167\ cm$,
$h = 10,5cm$,
$b = 5cm$,
$t = 0.5cm$,
$M_y = Pe_x$

olarak verilmiştir. Kirişe ait boyutsuz parametrelerse şu şekilde tanımlanmıştır:

$$p^2 = \frac{PL^2}{EI_y}$$

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2 L^4}{EI_y}$$

$$\phi^4 = \left(\frac{GJL^2}{EI_y r_0^2} \right) - p^2$$

Kirişin kesit özelliklerinin hesabı Ek B.'de gösterilmiştir. Buna göre;

T kesitli kirişin alanı:

$$A = bt_f + (h - t_f)t_w + r^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot 0{,}5 + (10{,}5 - 0{,}5) \cdot 0{,}5 = 7{,}5 cm^2$$

T kesitli kirişin başlığının kesme merkezinin y eksenine olan uzaklığı:

$$y_{gc} = \frac{1}{A}\left[b\frac{t_f^2}{2} + \frac{t_w}{2}(h - t_f)(h + t_f) + 2r^2\left(t_f + \frac{r}{2}\right) - \frac{\pi r^2}{2}\left(t_f + r - \frac{4r}{3\pi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{7{,}5}\left[5 \cdot \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5}{2} \cdot (10{,}5 - 0{,}5) \cdot (10{,}5 + 0{,}5)\right] = 3{,}75\, cm$$

T kesitli kirişin x eksenine göre atalet momenti:

$$I_x = \frac{t_f b^3}{12} + \frac{b_w t_w^3}{12} + \frac{r(2r + t_w)^3}{12} - \frac{\pi r^2}{2}\left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{t_w}{2} + r\right)\left(\frac{t_w}{2} + r - \frac{8r}{3\pi}\right)\right]$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 5^3}{12} + \frac{5 \cdot 0{,}5^3}{12} = 5{,}261\, cm^4$$

T kesitli kirişin y eksenine göre atalet momenti:

$$I_y = \pi a^3 t_c\left[1 + \frac{t_c^2}{12a^2}\right] + 2\left[\frac{2t_f b^3}{3} + \frac{t_w^3 h}{12}\right] = 2\left[\frac{2.0{,}5.5^3}{3} + \frac{0{,}5^3.10}{12}\right] = 83{,}334\, cm^4$$

T kesitli kirişin esas kutup noktasının uzaklığı:

$$e_p = \frac{\pi a t_c (h + a)\left[a^2 + \left(\frac{t_c^{\,2}}{12} \right) \right] + \left(\frac{t_w^{\,3} h^2}{24} \right)}{a^3 t_c \left[1 + \left(\frac{t_c^{\,2}}{12\,a^2} \right) \right] + \frac{2}{3} t_f b^3 + \left(\frac{t_w^{\,3} h}{12} \right)} \approx \frac{a + h}{\left(1 + \frac{2 b^3 t_f}{3 \pi a^3 t_c} \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{0.5^3 \cdot 10^2}{24} \right)}{\frac{2}{3} 0.5 \cdot 5^3 + \left(\frac{0.5^3 .10}{12} \right)} = 0{,}000124 \;\; cm$$

$$I_w = \pi a^3 t_c \left(h + a - e_p \right)^2 \left(1 + \frac{t_c^{\,2}}{12\,a^2} \right) + \frac{2}{3} e_p^{\,2} b^3 t_f \left(1 + \frac{t_f^{\,2}}{12\,a^2} \right) + \frac{t_w^{\,3}}{36} \left(h + a - e_p \right)^2 + \frac{2}{3} e_p^{\,2} b^3 t_f$$

$$= \frac{2}{3}.0{,}000124^{\;2}.5^3.0{,}5 + \frac{0{,}5^3}{36}.(10 - 0{,}000124)^2 + \frac{2}{3}.0{,}000124^{\;2}.5^3.0{,}5 = 0{,}0347 \; cm^6$$

Matlab programıyla yapılan hesaplarda $\left[A_0 + A_2 x + A_4 x^2 \right]\{\Phi\} = \{0\}$ denklemine ait karakteristik kökler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

```
>> [A0]=-p*A*w2*[1 0 ay;0 1 -ax;ay -ax r02]

A0 = 1.0e+007 *

   -0.2636         0         0

         0   -0.2636    0.8779

         0    0.8779   -6.0370
```

```
>> [A2]=[p*Iy*w2+P  0  P*ay-Mx;0  p*Ix*w2+P  -P*ax-My;P*ay-Mx  -P*ax-My
p*Iw*w2+P*r02-G*J+Mx*By+My*Bx]
```

```
A2 = 1.0e+007 *

        2.9386        0          -0.0001

        0             0.1832     -0.0004

       -0.0001       -0.0004     0.0029

>> [A4]=E*[Iy 0 0;0 Ix 0;0 0 Iw]

A4 = 1.0e+006 *

        2.3826        0          0

        0             0.1485     0

        0             0          0.0001

>>          denklem=[A0]+x*[A2]+x.^2*[A4]

>>      kokmatrisi=[51623630277120,98202274890930400756295493/8589934592,-
725000488517312959969325638341/34359738368,-
45133410997038585542606694860899/85899345920,-
10414971561246264887613954805647 5/34359738368,4644980655018390274432 8
835415625/17179869184,-726105984805253110094648437 5/33554432];>>
kokler=roots(kokmatrisi)

kokler = -749.0931

       552.3069

       -13.0364

       -12.4227

         0.7024

         0.0891
```

Denkleme ait 6 karakteristik kök hesaplandıktan sonra her biri denklemde yerine koyularak her kök için birer özvektör bulunmuş ve aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Tablo 2.4 T kirişe ait karakteristik kök ve özdeğer tablosu

ϕ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.0000	0.0000	0.0008	28.1037	0.0000	-0.1109
	0.0001	0.0001	-6.8764	-3.5598	-6.8766	-3.5513
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Amacımız düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörü $\{q\}$ ve düğüm noktasına ait yük vektörü $\{Q\}$ arasındaki ilişkiyi kurarak dinamik rijitlik matrisini elde etmektir. İlk olarak düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörünün katsayılar matrisi için MATLAB'de hesap yapılmış ve şu sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 2.5 T kiriş düğüm noktası yer değiştirmesine ait $[X]$ katsayılar matrisi

$[X_1]$		$[X_2]$		$[X_3]$	
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000800	0,000000
0,000100	0,000000	0,000100	0,000000	-6,876400	0,000000
0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,002880
0,000000	0,000273	0,000000	0,002350	0,000000	-24,827895
0,000000	27,369600	0,000000	23,501210	0,000000	3,610595
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,000036	-0,000071
-0,000003	-0,000009	sonsuz	sonsuz	3,125083	6,125242
-0,331782	-0,943355	sonsuz	sonsuz	-0,454465	-0,890763
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000257	-0,000131
0.000258	-0,000090	sonsuz	sonsuz	-22,115770	11,283409
25,818708	-9,080541	sonsuz	sonsuz	3,216184	-1,640889

$[X_4]$		$[X_5]$		$[X_6]$	
28,103700	0,000000	0,000000	0,000000	-0,110900	0,000000
-3,559800	0,000000	-6,876600	0,000000	-3,551300	0,000000
1,000000	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000	0,000000
0,000000	99,053879	0,000000	0,000000	0,000000	-0,033103
0,000000	-12,546817	0,000000	-5,763230	0,000000	-1,060048
0,000000	3,524585	0,000000	0,838093	0,000000	0,298496
-18,583206	-21,082721	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2,353871	2,670476	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
-0,661237	-0,750176	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
74,307843	-65,498090	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-9,412321	8,296420	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
2,644059	-2,330586	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz

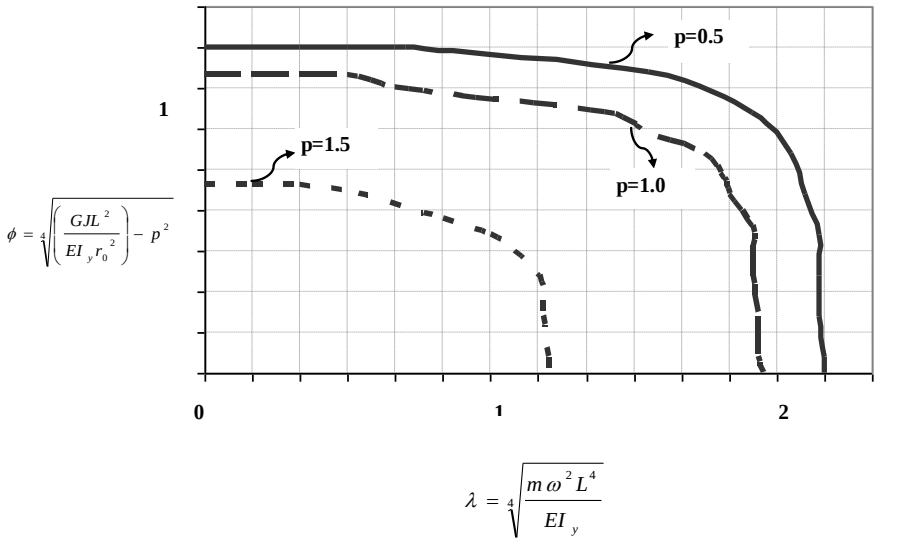
Daha sonra düğüm noktasına ait yük vektörünün katsayılar matrisi için MATLAB'de hesap yapılmış ve şu sonuçlar elde edilmiştir.

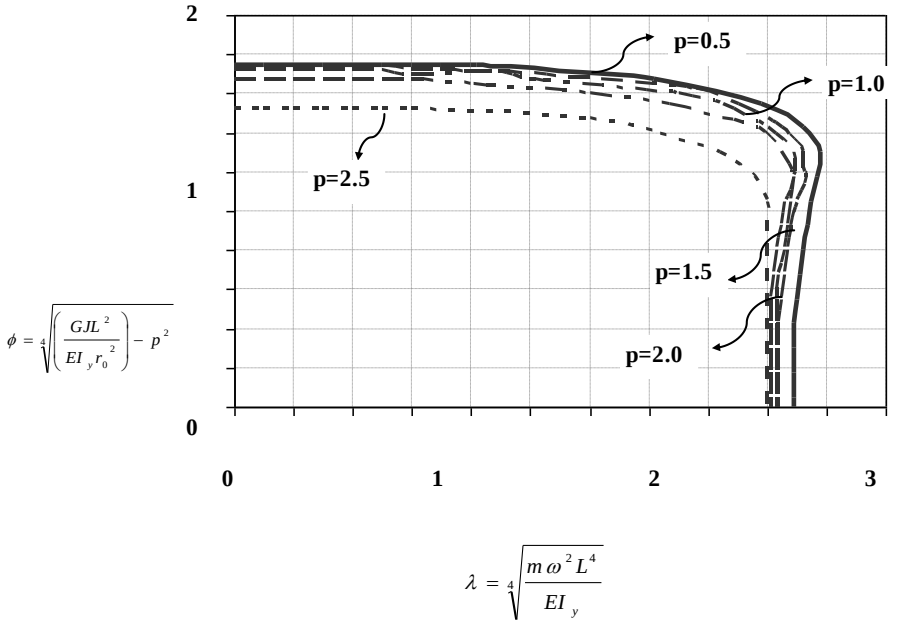
Tablo 2.6 T kiriş düğüm noktası yüküne ait $[Y]$ katsayılar matrisi

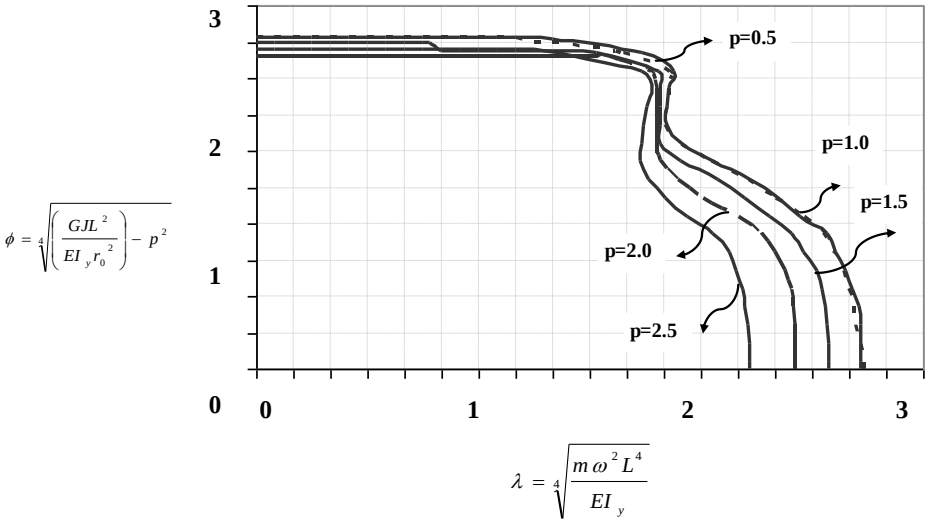
$[Y_1]$		$[Y_2]$		$[Y_3]$	
0,00	27400,00	0,00	23500,00	0,00	8400,00
0,00	405900,00	0,00	282450,00	0,00	-2565300,00
0,00	12565000,00	0,00	616460,00	0,00	199300,00
0,00	0,00	0,00	0,00	-25000,00	0,00
-11124,00	0,00	-8202,00	0,00	13312000,00	0,00
-74909,00	0,00	-55231,00	0,00	-1000,00	0,00
-9040,00	-25800,00	sonsuz	sonsuz	-7500,00	-3800,00
-135040,00	-386000,00	sonsuz	sonsuz	2285100,00	1165800,00
-414940,00	-1186000,00	sonsuz	sonsuz	177500,00	90600,00
0,00	0,00	sonsuz	sonsuz	-11300,00	-22000,00
-3673,00	-10500,00	sonsuz	sonsuz	6049900,00	1185800,00
-24737,00	-70707,00	sonsuz	sonsuz	-600,00	-1000,00

$[Y_4]$		$[Y_5]$		$[Y_6]$	
0,00	21035000,00	0,00	1000,00	0,00	-248300000,00
0,00	-146000,00	0,00	11163000,00	0,00	1960000,00
0,00	-49000,00	0,00	-4700,00	0,00	0,00
-831820000,00	0,00	0,00	0,00	-23543,00	0,00
6570000,00	0,00	-717270,00	0,00	-46988,00	0,00
0,00	0,00	70,00	0,00	9,00	0,00
-15780000,00	-13909000,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
110000,00	97000,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
37000,00	32000,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
-550030000,00	-624010000,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
4340000,00	4930000,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz
0,00	0,00	sonsuz	sonsuz	sonsuz	sonsuz

Düğüm noktasına ait yer değiştirme vektörü $\{q\}$ ve düğüm noktasına ait yük vektörü $\{Q\}$ arasında $\{Q\} = [Y]\{A\} = [Y][X]^{-1}\{q\} = [D]\{q\}$ formülü ile verilen ilişki kurularak dinamik rijitlik matrisi elde edilir. $[D] = \left[X^{-T} Y^{T}\right]$ haline getirilir ve aradığımız $[D]$ dinamik rijitlik matrisini elde ederiz.

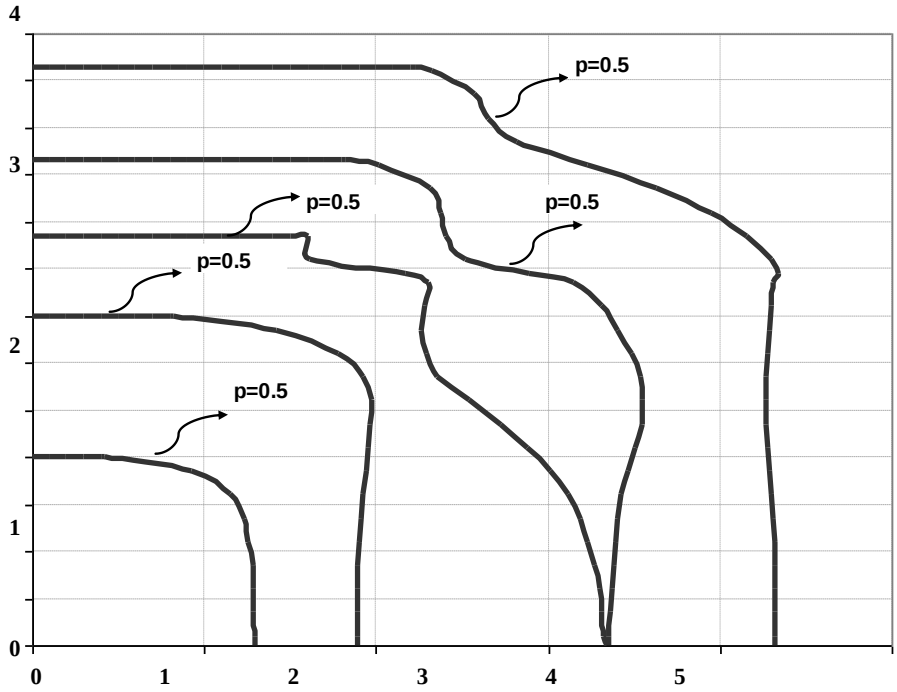






Şekil 2.18 Boyutsuz büyüklükler yardımıyla frekansların elde edilmesi

$$\phi = \sqrt[4]{\left(\frac{GJL^2}{EI_y r_0^2}\right) - p^2}$$



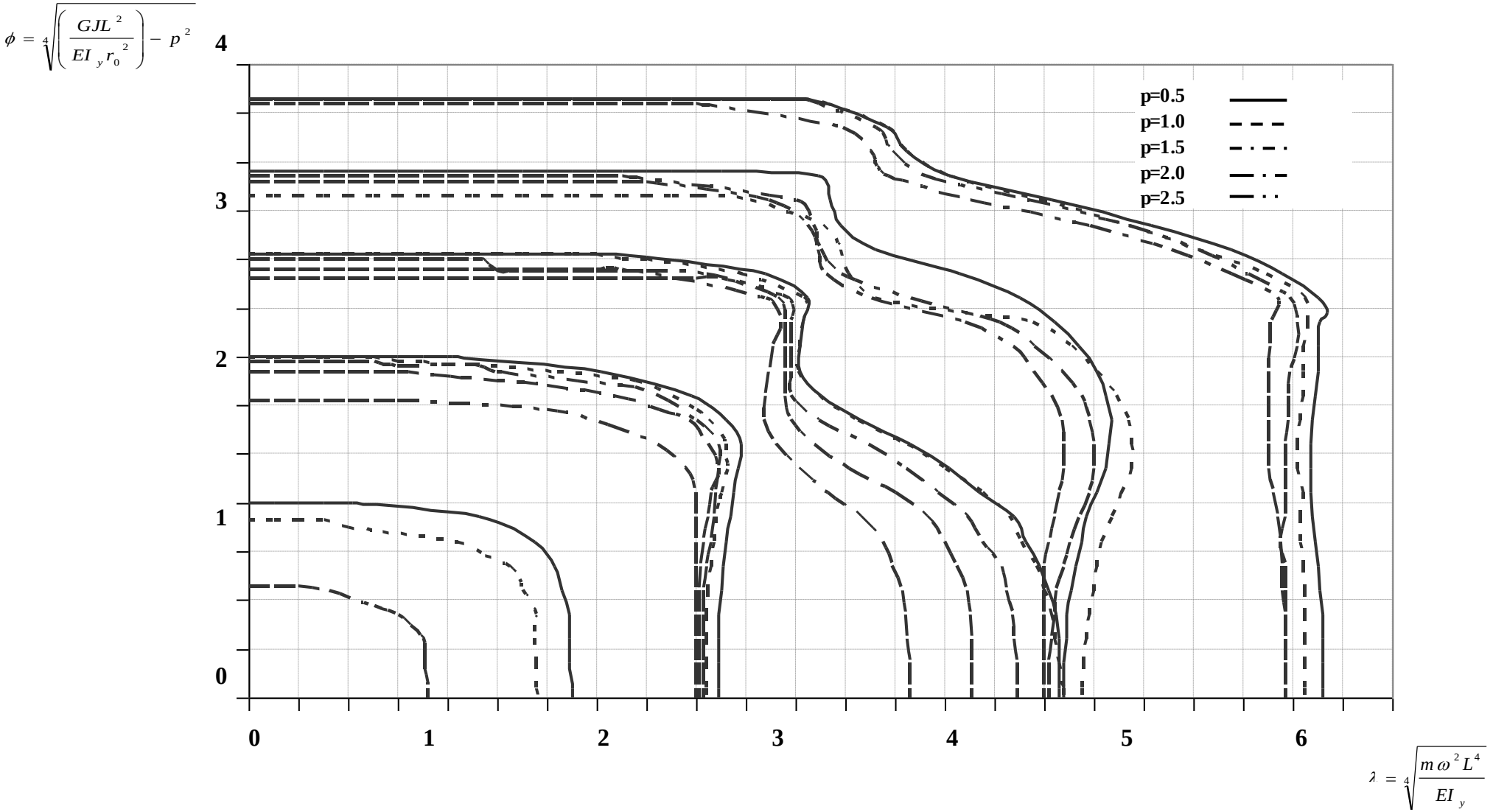
Şekil 2.19 Burkulma rijitliğinin değişimiyle sabit P yükü altında frekansların elde edilmesi

$$p^2 = \frac{PL^2}{EI_y}$$

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2 L^4}{EI_y}$$

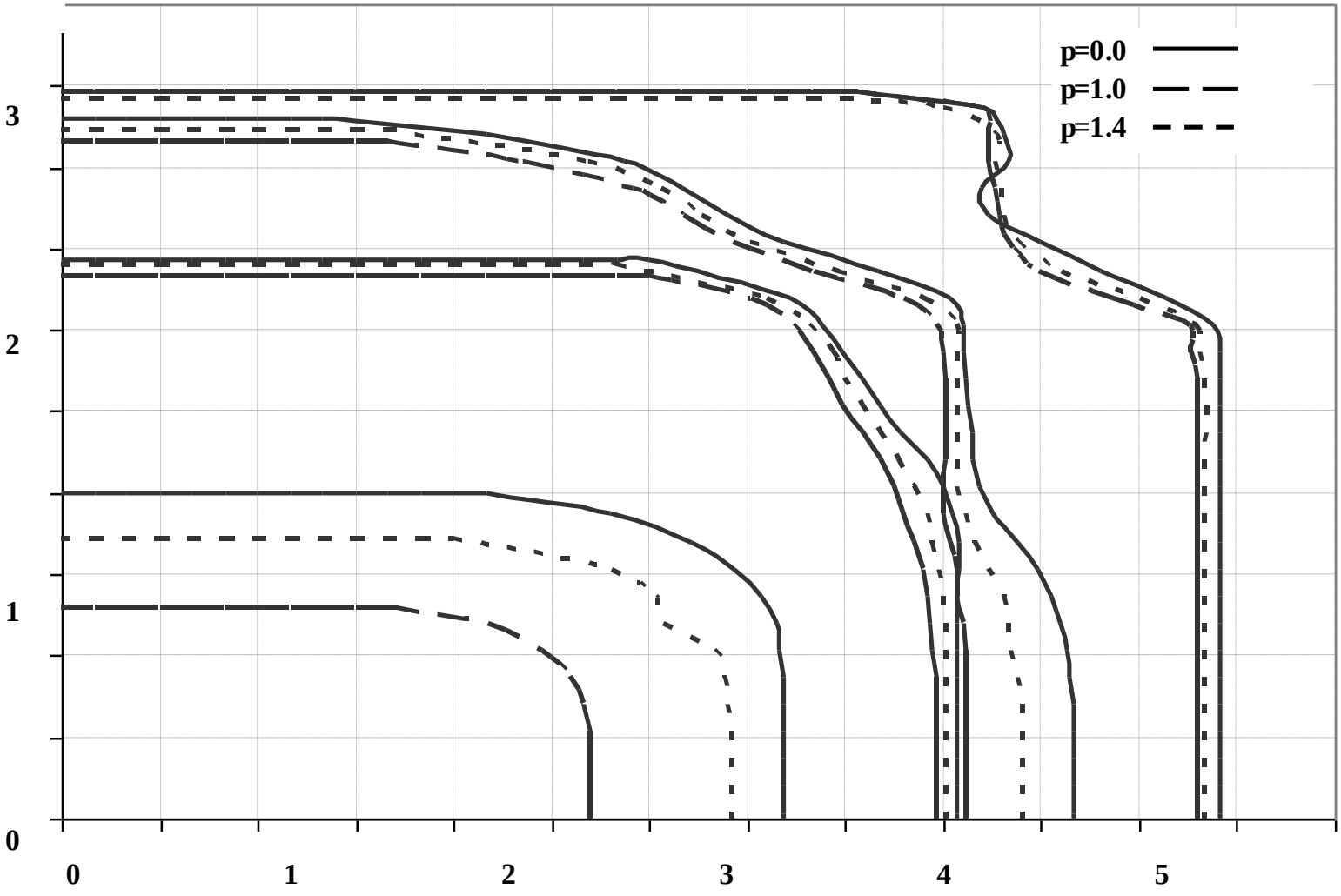
$$\phi^4 = \left(\frac{GJL^2}{EI_y r_0^2}\right) - p^2$$

Yukarıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılarak T kesitli kirişe ait karakteristik denklem Şekil 2.20'de gösterilmiştir. Burada p, μ değerleri eksantrisiteye göre değişebilir. Söz konusu T kirişle oluşturulan çerçeve sisteme ait karakteristik diyagram ise Şekil 2.21'de gösterilmiştir. Sayısal örnekler göstermiştir ki, doğal titreşim frekansına karşılık gelen sabit momentleri ile oluşturulan etkileşim diagramındaki eğimde monotonik değişiklikler oluşmamıştır. Sonuç olarak oluşturulan diyagramdan da görüleceği gibi sabit momentlerin burulma modları sertleştirirken, gerilme modları yumuşattığı söylenebilir.



Şekil 2.20 T kesitli kirişin boyutsuz atalet kuvvetlerinin gözönüne alınması durumundaki karakteristik diyagramı

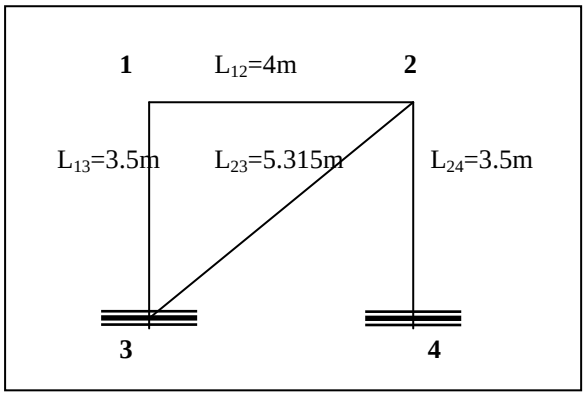
$$\phi = \sqrt[4]{\left(\frac{GJL^2}{EI_y r_0^2}\right) - p^2}$$



$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 L^4}{EI_y}}$$

Şekil 2.21 T kesitli kirişlerle oluşturulan çerçeve sisteme ait karakteristik diyagram

3.2 Bir Çerçeve Sistemin Dinamik Rijitlik Matrisinin Matlab Programıyla Hesaplanması



Şekil 2.22 Çerçeve sistem

$L_{12} = 4m, E_1 = 2E + 08, I_1 = 2.637\ E - 06, G = 5.63\,E - 03$

$L_{13} = 3.5m, E_1 = 2E + 08, I_1 = 8.333\ E - 06, G = 1.00\,E - 03$

$L_{23} = 5.315\ m, E_1 = 2E + 08, I_1 = 5.208\ E - 06, G = 2.50\,E - 03$

$L_{142} = 3.5m, E_1 = 2E + 08, I_1 = 8.333\ E - 06, G = 1.00\,E - 03$

>> Her Bir Elemanına Ait [T] Dönüştürme Matrislerinin Tayini

% 1-2 Elemanı:

>> L12=4;Bi=pi;Bj=0;E=2*10^8;I=2.637*10^-6;G=5.63*10^-3;

[T1]=

1	0	0
0	-1	0
0	0	-1

[T2]=

1	0	0
0	1	0
0	0	1

>> % 1-2 Elemanına Ait Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

[D12]= [D11] [D21] / [D21] [D21] =100000x

0,0053	0,0000	0,0020	0,0026	0,0000	0,0020
0,0000	2,8150	0,0000	0,0000	2,8150	0,0000
0,0020	0,0000	0,0010	0,0020	0,0000	0,0010
0,0026	0,0000	0,0020	0,0053	0,0000	0,0020
0,0000	2,8150	0,0000	0,0000	2,8150	0,0000
0,0020	0,0000	0,0010	0,0020	0,0000	0,0010

>> % 1-2 Elemanına Ait Dönüştürülmüş Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini
>> [D1x1x]=[T1]*[D11]*[T1]' [D1x2x]=[T1]*[D12]*[T2]'
>> [D2x1x]=[T2]*[D21]*[T1]' [D2x2x]=[T2]*[D22]*[T2]'

[D1x2x]= [D1x1x] [D1x2x] / [D2x1x] [D2x2x] = 100000 x

0,0053	0,0000	-0,0020	0,0026	0,0000	0,0020
0,0000	2,8150	0,0000	0,0000	-2,8150	0,0000
-0,0020	0,0000	0,0010	-0,0020	0,0000	-0,0010
0,0026	0,0000	-0,0020	0,0053	0,0000	0,0020
0,0000	-2,8150	0,0000	0,0000	2,8150	0,0000
0,0020	0,0000	-0,0010	0,0020	0,0000	0,0010

% 1-3 Elemanı:
>> L13=3.5;Bi=(3*pi)/2;Bj=pi/2;E=2*10^8;I=8.333*10^-6;G=1*10^-2;

[T1]=

1	0	0
0	0	1
0	-1	0

[T3]=

1	0	0
0	0	-1
0	1	0

>> % 1-3 Elemanına Ait Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

[D13]= [D11] [D13] / [D31] [D33] =100000x

0,0190	0,0000	0,0082	0,0095	0,0000	0,0082
0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143	0,0000
0,0082	0,0000	0,0047	0,0082	0,0000	0,0047
0,0095	0,0000	0,0082	0,0190	0,0000	0,0082
0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143	0,0000
0,0082	0,0000	0,0047	0,0082	0,0000	0,0047

>> % 1-3 Elemanına Ait Dönüştürülmüş Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

>> [D1x1x]=[T1]*[D11]*[T1]' [D1x3x]=[T1]*[D13]*[T3]'
>> [D3x1x]=[T3]*[D31]*[T1]' [D3x3x]=[T3]*[D33]*[T3]'

[D1x2x]= [D1x1x] [D1x3x] / [D3x1x] [D3x3x] = 100000 x

0,0190	0,0082	0,0000	0,0095	-0,0082	0,0000
0,0082	0,0047	0,0000	0,0082	-0,0047	0,0000
0,0000	0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	-5,7143
0,0095	-0,0082	0,0000	0,0190	-0,0082	0,0000
-0,0082	0,0047	0,0000	-0,0082	0,0047	0,0000
0,0000	0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143

% 2-3 Elemanı:
>> L23=5.315;Bi=1.77*pi;Bj=0.77*pi;E=2*10^8;I=5.208*10^-7;G=2.50*10^-3;

[T2]=

1	0	0
0	0,7501	0,6613
0	-0,661	0,7501

[T3]=

1	0	0
0	-0,75	-0,661
0	0,6613	-0,75

>> % 2-3 Elemanına Ait Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

[D23]= [D22] [D23] / [D32] [D33] =10000x

0,0078	0,0000	0,0022	0,0039	0,0000	0,0022
0,0000	9,4073	0,0000	0,0000	9,4073	0,0000
0,0022	0,0000	0,0008	0,0022	0,0000	0,0008
0,0039	0,0000	0,0022	0,0078	0,0000	0,0022
0,0000	9,4073	0,0000	0,0000	9,4073	0,0000
0,0022	0,0000	0,0008	0,0022	0,0000	0,0008

>> % 2-3 Elemanına Ait Dönüştürülmüş Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

>> [D2x2x]=[T2]*[D22]*[T2]'
[D2x3x]=[T2]*[D23]*[T3]'
>> [D3x2x]=[T3]*[D32]*[T2]'
[D3x3x]=[T3]*[D33]*[T3]'

[D2x3x]= [D2x2x] [D2x3x] / [D3x2x] [D3x3x] = 10000 x

0,0078	0,0015	0,0017	0,0039	-0,0015	-0,0017
0,0015	5,2936	-4,6662	0,0015	5,2936	4,6662
0,0017	-4,6662	4,1146	0,0017	4,6662	-4,1146
0,0039	0,0015	0,0017	0,0078	-0,0015	-0,0017
-0,0015	-5,2936	4,6662	-0,0015	5,2936	-4,6662
-0,0017	4,6662	4,1146	-0,0017	-4,6662	4,1146

% 2-4 Elemanı:

>> L24=3.5;Bi=1.5*pi;Bj=0.5*pi;E=2*10^8;I=8.333*10^-6;G=1.0*10^-3;

[T2]=

1	0	0
0	0	1
0	-1	0

[T4]=

1	0	0
0	0	-1
0	1	0

>> % 2-4 Elemanına Ait Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

[D24]= [D22] [D24] / [D42] [D44] =10000x

0,1905	0,0000	0,0816	0,0952	0,0000	0,0816
0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143	0,0000
0,0816	0,0000	0,0466	0,0816	0,0000	0,0466
0,0952	0,0000	0,0816	0,1905	0,0000	0,0816
0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143	0,0000
0,0816	0,0000	0,0466	0,0816	0,0000	0,0466

>> % 2-4 Elemanına Ait Dönüştürülmüş Eleman Rijitlik Matrislerinin Tayini

>> [D2x2x]=[T2]*[D22]*[T2]'
[D2x4x]=[T2]*[D24]*[T4]'
>> [D4x2x]=[T4]*[D42]*[T2]'
[D4x4x]=[T4]*[D44]*[T4]'

[D2x4x]= [D2x2x] [D2x4x] [D4x2x] [D4x4x] = 10000 x

0,1905	0,0816	0,0816	0,0952	0,0816	0,0000
0,0816	0,0466	0,0000	0,0816	0,0466	0,0000
0,0000	0,0000	5,7143	0,0000	0,0000	5,7143
0,0952	0,0816	0,0000	0,1905	-0,0816	0,0816
-0,0816	-0,0466	0,0000	-0,0816	0,0466	0,0000
0,0000	0,0000	-5,7143	0,0000	0,0000	5,7143

>> Çerçeve sistemin dinamik rijitlik matrisinin bulunması

D =
1.0e+005 *

0,0243	0,0082	-0,0020	0,0026	0,0000	0,0020	0,0095	-0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0082	2,8197	0,0000	0,0000	-2,8150	0,0000	0,0082	-0,0047	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,0020	0,0000	5,7153	-0,0020	0,0000	-0,0010	0,0000	0,0000	-5,7143	0,0000	0,0000	0,0000
0,0026	0,0000	-0,0020	0,0243	0,0082	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0095	-0,0082	0,0000
0,0000	-2,8150	0,0000	0,0082	3,3525	-0,4662	0,0000	-0,5328	0,4662	0,0082	-0,0047	0,0000
0,0020	0,0000	-0,0010	0,0020	-0,4662	6,1232	0,0000	0,4662	-0,4079	0,0000	0,0000	-5,7143
0,0095	0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0190	-0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-0,0082	-0,0047	0,0000	0,0000	-0,5328	0,4662	-0,0082	0,5375	-0,4662	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-5,7143	0,0000	0,4662	-0,4079	0,0000	-0,4662	6,1222	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0095	0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0190	-0,0082	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0082	-0,0047	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0082	0,0047	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-5,7143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5,7143

>> % İndirgenmiş sistem dinamik rijitlik matrisi

[D]= 100000 x

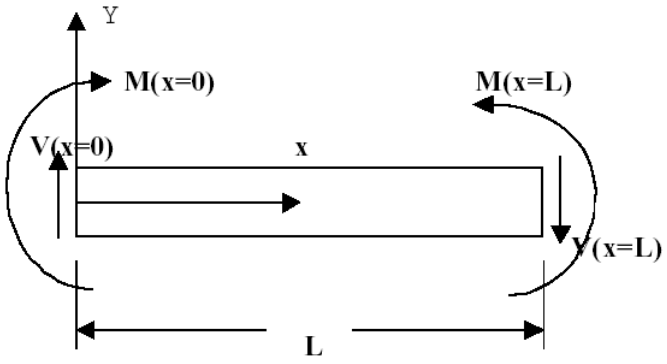
0,0243	0,0082	-0,0020	0,0026	0,0000	0,0020
0,0082	2,8197	0,0000	0,0000	-2,8150	0,0000
-0,0020	0,0000	5,7153	-0,0020	0,0000	-0,0010
0,0026	0,0000	-0,0020	0,0243	0,0082	0,0020
0,0000	-2,8150	0,0000	0,0082	3,3525	-0,4662
0,0020	0,0000	-0,0010	0,0020	-0,4662	6,1232

Çerçeve sisteme ait dinamik rijitlik matrisinin simetrik olduğu kanıtlanmıştır.

[D]= 100000 x

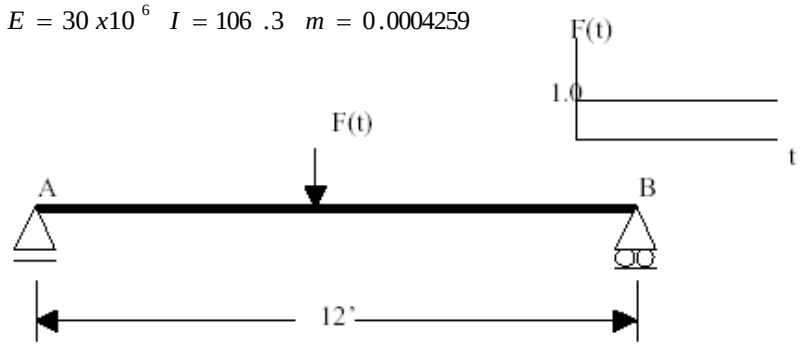
0,0243	0,0082	-0,0020	0,0026	0,0000	0,0020
	2,8197	0,0000	0,0000	-2,8150	0,0000
		5,7153	-0,0020	0,0000	-0,0010
	Simetrik		0,0243	0,0082	0,0020
				3,3525	-0,4662
					6,1232

3.3 MSC.Nastran DMAP programı ile üniform kirişin dinamik rijitlik matrisinin bulunması



Şekil 2.23 Üniform Kiriş Eleman

Şekil 2.23'da görülen bir üniform kirişin dinamik rijitlik matrisi $[D(\omega)]$ DMAP programında aşağıda gösterilecek olan algoritma ile hesaplanmıştır. İlk olarak frekans 100 rad/sn alınmış ve buna göre hesap yapılmıştır. Kirişin özellikleri Şekil 2.24'de gösterilmiştir.



Şekil 2.24 Basit Mesnetli Kiriş

$$EI\begin{bmatrix} 4\dfrac{k^3\left(4e^2sc-1+e^4\right)}{\delta\gamma} & 2\dfrac{k^2\left(1-2e^2+4e^2s^2+e^4\right)}{\delta\gamma} & -8\dfrac{ek^3\left(ce^2-c+e^2s+s\right)}{\delta\gamma} & 8\dfrac{ek^2s(-1+e)(e+1)}{\delta\gamma} \\ 2\dfrac{k^2\left(1-2e^2+4e^2s^2+e^4\right)}{\delta\gamma} & 2\dfrac{k\left(-1-4e^2sc+e^4\right)}{\delta\gamma} & -8\dfrac{ek^2s(-1+e)(e+1)}{\delta\gamma} & 4\dfrac{ke\left(e^2s-ce^2+c+s\right)}{\delta\gamma} \\ -8\dfrac{ek^3\left(ce^2-c+e^2s+s\right)}{\delta\gamma} & -8\dfrac{ek^2s(-1+e)(e+1)}{\delta\gamma} & -4\dfrac{k^3\left(4e^2sc-1+e^4\right)}{\delta\gamma} & -2\dfrac{k^2\left(1-2e^2+4e^2s^2+e^4\right)}{\delta\gamma} \\ 8\dfrac{ek^2s(-1+e)(e+1)}{\delta\gamma} & 4\dfrac{ke\left(e^2s-ce^2+c+s\right)}{\delta\gamma} & -2\dfrac{k^2\left(1-2e^2+4e^2s^2+e^4\right)}{\delta\gamma} & -2\dfrac{k\left(-e^4+4e^2sc+1\right)}{\delta\gamma} \end{bmatrix}$$

Şekil 2.25 Dinamik rijitlik matrisi

$\delta = e^2 + 2es - 1$

$\gamma = e^2 - 2es - 1$

$e = \exp(kL)$

$c = \cos(kL)$

$s = \sin(kL)$

Dinamik Rijitlik Katsayılarının Hesaplanması

```
> with(linalg):
> y:=(x)-
>exp(k*x)*(A*cos(k*x)+B*sin(k*x))+exp(k*x)*(C*cos(k*x)+Dc*sin(k*x));
> yd:=(x)->diff(y(x),x):
> yd(x):
> eqn1:=y(0)=1;
> eqn2:=eval(subs(x=0,yd(x)))=0;
> eqn3:=y(L)=0;
> eqn4:=subs(x=L,yd(x))=0;
> solve({eqn1,eqn2,eqn3,eqn4},{A,B,C,Dc});
> assign('');
> A:
> factor(expand(simplify(subs(tan(k*L)=sin(k*L)/cos(k*L),''))));
> A:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> B:
> factor(expand(simplify(subs(tan(k*L)=sin(k*L)/cos(k*L),''))));
> B:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> C:
> factor(expand(simplify(subs(tan(k*L)=sin(k*L)/cos(k*L),''))));
> C:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> Dc:
> factor(expand(simplify(subs(tan(k*L)=sin(k*L)/cos(k*L),''))));
> Dc:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> VF:=(x)->-EI*diff(y(x),x$3):
> MF:=(x)->-EI*diff(y(x),x$2):
> eval(subs(x=0,simplify(VF(x)))):
> D11:=-factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> eval(subs(x=0,simplify(MF(x)))):
> D21:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> simplify(eval(subs(x=L,VF(x)))):
> D31:=factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
> simplify(eval(subs(x=L,MF(x)))):
> D41:=-factor(expand(subs(cos(k*L)^2=1-sin(k*L)^2,'')));
```

İkinci olarak, yukarıda matris halinde verilen dinamik rijitlik katsayılarının (0.25 - 4000) arasındaki frekans değerleri için kontrolü yapılmış ve D_{11}, D_{12}, D_{13} ve D_{34} değerleri dikkate alınarak frekans parametreleri kullanılmıştır. D_{11}, D_{12}, D_{13} ve D_{34} katsayıları büyük değerler olduklarından daha kullanışlı olan $1/D_{11}$, $1/D_{12}$, $1/D_{22}$ ve $1/D_{34}$ değerleri için kontrol yapılmıştır. Yapılan hesap sonunda bu dört dinamik rijitlik katsayıları dikkate alınarak aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

1- Şekil 2.25'den görüleceği gibi dinamik rijitlik katsayılarına ait imajiner kısımlar çok küçüktür.

2- Dinamik rijitlik katsayıları D_{34}=-D_{12} gibi birbirinin ters işaretlisi olarak gösterilebilir.

3- MSC.Nastran programında Şekil 2.23'de de gösterildiği gibi kirişin solunda moment sağında kesme ters olarak alınmıştır. Bu değişiklik D_{12}, D_{13}, D_{23} ve D_{34} katsayılarının da işaretini değiştirmiştir.

Şekil 2.25'den görüleceği gibi dinamik rijitlik matrisi simetriktir.

$$DSM = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1.052492E+04, I \\ -2.382353E-03 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8.760900E+05, I \\ -1.501403E-01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1.361614E+04, I \\ 2.241085E-03 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9.504490E+05, I \\ -8.395985E-02 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8.760900E+05, I \\ -1.501403E-01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8.736014E+07, I \\ -1.054628E+01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -9.504490E+05, I \\ 8.395985E-02 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4.521165E+07, I \\ -2.613870E+00 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1.361614E+04, I \\ 2.241085E-03 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -9.504490E+05, I \\ 8.395985E-02 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.052492E+04, I \\ -2.382353E-03 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8.760900E+05, I \\ 1.501403E-01 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9.504490E+05, I \\ -8.395985E-02 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4.521165E+07, I \\ -2.613870E+00 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8.760900E+05, I \\ 1.501403E-01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8.736014E+07, I \\ -1.054628E+01 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Şekil 2.26 DMAP ile hesaplanan dinamik rijitlik matrisi

4 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ince cidarlı bir yapının dinamik analizi, dinamik rijitlik metodu uygulanarak yapılmış ve bir çerçeve sistemin bu yöntem ile çözümü için gerekli ön çalışmalar sunulmuştur. Yapının, dinamik rijitlik yöntemi ile MATLAB programında modeli kurulmuş ve dinamik rijitlik matrisi bulunmuştur. İnce cidarlı yapılar için geliştirilen dinamik rijitlik metodu, tamamen klasik dinamik rijitlik ifadelerinin çıkartılışından bağımsız bir yöntemle ortaya konmuştur.İnce cidarlı yapılar için geliştirilen dinamik rijitlik metodunun problemlere uygulanmasından ortaya çıkan sonuçlar kısaca özetlenecek olursa;

- Geliştirilmiş dinamik rijitlik metodu, klasik dinamik rijitlik metodu gibi formülasyonu basit, kullanışlı ve çok yönlüdür.

- Yöntemde, basit mesnetli plakların sınır koşullarının ifadesinde mesnet reaksiyonları karşılıklı birbirini götürdüğünden ve mesnet reaksiyonlarının Betti teoreminde işi hesaplanmadığından, bu tip problemlerin çözümlerinin, kapalı çözümlerle bulunan sonuçlarla yaklaşık aynı çözüm elde edilir.

- Dinamik rijitlik metodunda ince cidarlı yapıların uzaysal hataları ihmal edilir. Metod harmonik titreşim ile ilgili olup bilinen anlamıyla kesin olan sonuca ulaşmak için zaman hataları da gözardı edilir. Dinamik burkulma analizinde sabit eksenel yükler, momentler ve eğilme etkileri hesaba katılmıştır.

- Sonlu elemanlar metodunda, eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Başka bir alternatif olarak, şekil fonksiyonları frekansa bağlı ise sistemi sonlu elemanlara ayırmaya gerek kalmaz. Bu durumda metod dinamik rijitlik metodu kullanılır.

KAYNAKLAR

[1] **Johnson, D.C. Bishop, R.E.D.,** 1960. *The Mechanics of Vibrations*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[2] **Wittrick, W.H. & Williams, F.W.,** 1970. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quart. J. Mech. Appl. Math.,* **24,** 263 – 84

[3] **Kolousek, V.,** 1973. *Dynamics in Engineering Strcutures.* Butterworths, London, UK.

[4] **Leung, A.Y.T.,** 1976. Dynamics of Structural vibrations by frequency dependent matrices and modal analysis. *PhD Thesis*, University of Aston in Birmingham, UK.

[5] **Richards, T.H. & Leung, A.Y.T.,** 1977. An accurate method in structural vibration analysis. *Journal of Sound and Vibrations*., **55**, 363 – 76.

[6] **Leung, A.Y.T.,** 1978. An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*., **12**, 1705 – 16.

[7] **Leung, A.Y.T.,** 1979. An accurate method of dynamic substructing with simplified computation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.,* **14**, 1241 – 56.

[8] **Henrych, J.,** 1981. *The Dynamics of Arches and Frames.* Elsevier, Amsterdam. The Netherlands.

[9] **Lunden, R. & Akesson, B.,** 1983. Damped second order Rayleigh – Timoshenko beam vibration in space: an exact complex dynamic member stiffness matrix. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*., **19**, 431 – 49.

[10] **Howson, W.P., Banerjee, J.R. & Williams, F.W.,** 1983. Concise equations and program for exact eigensolutions of plane frames including member shear. *Advance Engineering Software*., **5**, 137 – 41.

[11] **Banerjee, J.R. & Williams, F.W.,** 1985. Exact Bernoulli - Euler dynamics Stiffnees Matrix for a range of tapered beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.,* **21**, 2289 – 302.

[12] **Pearson, D. & Wittirick, W.H.,** 1986. An exact solution for the vibration of helical springs using a Bernoulli - Euler model. *International Journal for Mechanical Science.,* **28**, 83 – 96.

[13] **Leung, A.Y.T.,** 1987. Dynamics stiffness method for exponentially varying harmonic excitation of continuous system. *Journal of Sound and Vibrations.,* **98**, 337 – 47.

[14] **Leung, A.Y.T.,** 1987. Dynamics stiffness and response analysis. *Dynamic Stability of System*., **2**,125 – 37.

[15] **Chilver, A.H., (ed.)** 1967. Thin-Walled Structures. Chatto and Windus, London, UK.

[16] **Brush, D.O. & Almroth, B.O.,** 1975. Burulma of Bars, Plates and Shells. McGraw-Hill, Kogahusha, Japan, p.57.

[17] **Chen. W.F. & Atsuta .T.,** 1977. Theory of beam-Columns. McGraw-Hill, USA, p.87.

[18] **Friberg. P.O.,** 1985. Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beam. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.,* **21**, 1205.

[19] **Vlasov, V.Z.,** 1959. Thin-Walled Elastic Beams. Moscow.

[20] **Huseyin, K.,** 1969 The convexity of the stability boundary of symetric structural systems. *Acta Mechanics*, **8**, 205 – 11.

[21] **Haslum, K. & Tonnessen, A.** 1972. An analysis of torsion in ship hulls. *Eur. Shipbuilding.* **21**

[22] **Hughes, O.F.,** 1983. Ship Structural Design. John Wiley & Sons, New York.

[23] **Horn, R.A. & Johnson, D.A.,** 1985. Matrix Analysis. Cambridge University Press. Cambridge, Uk.

[24] **Howson, W.P. & Williams , F.W.,** 1973. Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko members. *Journal of Sound and Vibration*. **26**, 503 – 15.

[25] **Leung, A.Y.T.,** 1981. Natural shape functions of a compressed Vlasov element. *Thin-Walled Structures*. **11,** 431 – 8.

[26] **Hallauer, S.W.L. & Liu, R.Y.L.,** 1982. Beam bending-torsion dynamic stiffness method for calculation of exact vibration modes. *Journal of Sound and Vibration.* **85,** 105 – 13.

[27] **Leung, A.Y.T.,** 1992. Dynamics Stiffness Analysis of Thin-Walled Structures. *Journal of Thin-Walled Structures* **14,** 209 – 222.

[28] **Doyle, F.J.,** 2001. Nonlinear analysis of thin-walled structures : statics, dynamics, and stability. Springer, New York.

[29] **Murray, N.W.,** 1984. Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures. *The Oxford engineering science series.* Clarendon, Oxford.

[30] **Çetmeli, E.** 1976. Plaklar, İ.T.Ü İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

[31] **Köksal, E ve Köksal, K.K,** 2003. Kabuk ve plakların statik stabilite ve dinamik analizi. Örnek çözümler ve tablolar

[32] **Cheng, F.Y.,** 2000. Matrix analysis of structural dynamics : applications and earthquake engineering. Marcel Dekker, New York.

[33] **Berktay, İ.,** 1992. Plak teorisi ve uygulamaları. Küçük sehimli ince plaklar. Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.

[34] **İnan, M.,** 1996., Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul

[35] **Timoshenko, S. & Gere, J.M.,** 1963. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York

[36] **Beer, F.P. & Johnston, E.R.,** 1962. Vector Mechanics For Engineers: Dynamics. McGraw-Hill, Singapore.

EKLER

Ek A. 6.dereceden bilinmeyenli denklemin determinantı alınarak bulunan sabit katsayılar

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}\lambda^2 + \begin{vmatrix} B_1 & 0 & B_4 \\ 0 & B_2 & B_5 \\ B_4 & B_5 & B_3 \end{vmatrix}\lambda + \begin{vmatrix} C_1 & 0 & C_4 \\ 0 & C_2 & C_5 \\ C_4 & C_5 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_0 = A_1 \times A_2$$

$$D_1 = A_2 \times B_1 + A_1 \times B_2$$

$$D_2 = C_1 \times A_2 + B_1 \times B_2 + A_1 \times C_2$$

$$D_3 = C_1 \times B_2 + B_1 \times C_2$$

$$D_4 = C_1 \times C_2$$

$$D(1) = D_0 \times A_3$$

$$D(2) = D_1 \times A_3 + D_1 \times B_3 + D_0 \times C_3 - A_2 \times B_4 \times B_4 - A_1 \times B_5 \times B_5$$

$$D(3) = D_3 \times A_3 + D_2 \times B_3 + D_1 \times C_3 - B_2 \times B_4 \times B_4 - B_1 \times B_5 \times B_5$$

$$- 2 \times A_2 \times B_4 \times C_4 - 2A_1 \times B_5 \times C_5$$

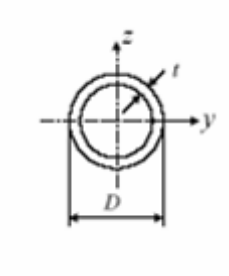
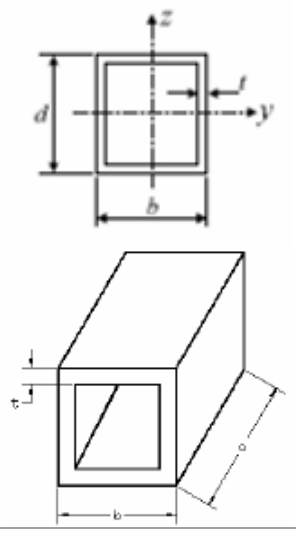
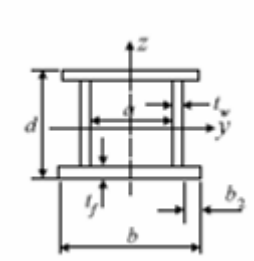
$$D(5) = D_4 \times A_3 + D_3 \times B_3 + D_2 \times C_3 - 2 \times B_4 \times C_4 \times C_2 - B_4 \times C_4 \times C_2 - 2 \times B_5 \times C_5$$

$$\times B_1 - B_5 \times C_5 \times B_1 - A_2 \times C_4 \times C_4 - A_1 \times C_5 \times C_5$$

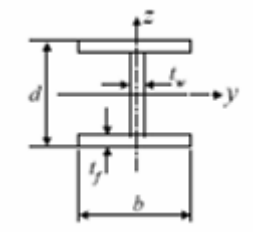
$$D(6) = D_4 \times B_3 + D_3 \times C_3 - C_4 \times C_4 \times B_2 - 2 \times B_4 \times C_4 \times C_2 - C_5 \times C_5 \times B_1 - 2 \times B_5 \times C_5 \times C_1$$

$$D(7) = D_4 \times C_3 - C_2 \times C_4 \times C_4 - C_1 \times C_5 \times C_5$$

Ek B. Değişik kesit türlerine göre çarpılmalı burulma atalet momenti ve diğer parametrelerin hesabı

Kesit Türü	Kesite Ait Parametreler
1-Boru Kesit	
	$A = \frac{\pi\left[D^2 - (D-2t)^2\right]}{4}$ $I_y = I_z = \frac{\pi\left[D^4 - (D-2t)^4\right]}{64}$ $J = \frac{\pi(D-t)^3 t}{4}$ $I_0 = \frac{\pi\left[D^4 - (D-2t)^4\right]}{32}$ $I_w = 0$
2- Kare / Dikdörtgen İçi Boş Kesit	
	$A = 2(b+d)t$ $I_y = \frac{d^2 t(3b+d)}{6}$ $I_z = \frac{b^2 t(b+3d)}{6}$ $J = \frac{2b^2 d^2 t}{b+d}$ $I_0 = \frac{t(b+d)^3}{6}$ $I_w = \frac{b^2 d^2 t}{24}\frac{(d-b)^2}{b+d}$
3- Kaynaklı Yapılmış Kutu Kesit	
	$A = 2(bt_f + dt_w)$ $I_y = \frac{d^2(3bt_f + dt_w)}{6}$ $I_z = \frac{b^2(bt_f + 3dt_w)}{6}$ $J = \frac{2a^2 d^2}{\left(\frac{a}{t_f} + \frac{d}{t_w}\right)}$ $I_0 = I_y + I_z$ $I_w = \frac{\left(b^3 d^2 t_f - a^2 d^3 t_w\right)^2}{24\left(b^3 d^2 t_f + a^2 d^3 t_w\right)}$

4- W kesit



$$A = 2bt_f + dt_w$$

$$I_y = \frac{d^2\left(6bt_f + dt_w\right)}{12}$$

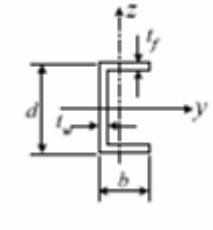
$$I_z = \frac{bt_f}{6}$$

$$J = \frac{2bt_f^3 + dt_w}{3}$$

$$I_0 = I_y + I_z$$

$$J_w = \frac{d^2b^3t_f}{24}$$

5- Kanal ksit



$$A = 2bt_f + dt_w$$

$$I_y = \frac{d^2\left(6bt_f + dt_w\right)}{12}$$

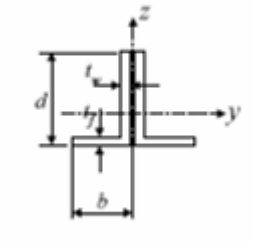
$$I_z = \frac{d^3t_w\left(bt_f + 2dt_w\right)}{3A}$$

$$J = \frac{2bt_f^3 + dt_w^3}{3}$$

$$I_0 = I_y + I_z$$

$$I_w = \frac{d^2b^3t_f\left(3bt_f + 2dt_w\right)}{12\left(6bt_f + dt_w\right)}$$

6- Kaynakla birleştirilmiş T kesit



$$A = 2\left(bt_f + dt_w\right)$$

$$I_y = \frac{d^3t_w\left(4bt_f + dt_w\right)}{3A}$$

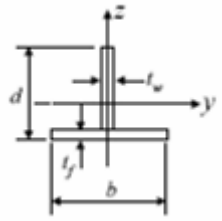
$$I_z = \frac{2b^3t_f}{3}$$

$$J = \frac{2\left(bt_f^3 + dt_w^3\right)}{3}$$

$$I_0 = I_y + I_z$$

$$I_w = \frac{\left(b^3t_f^3 + 4d^3t_w^3\right)}{18}$$

7- T kesit



$$A = bt_f + dt_w$$

$$I_y = \frac{d^3 t_w \left(4bt_f + dt_w\right)}{12A}$$

$$I_z = \frac{b^3 t_f}{12}$$

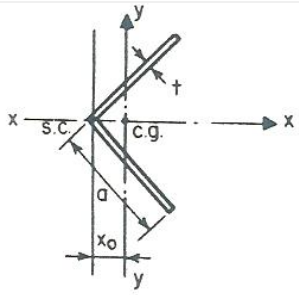
$$J = \frac{\left(bt_f^3 + dt_w^3\right)}{3}$$

$$I_0 = I_y + I_z$$

$$I_y = \pi a^3 t_c \left[1 + \frac{t_c^2}{12a^2}\right] + 2\left[\frac{2t_f b^3}{3} + \frac{t_w^3 h}{12}\right]$$

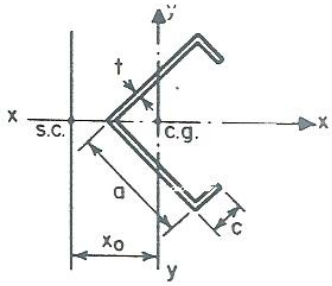
$$I_w = \frac{t_f^3 b^3}{144} + \frac{t_w^3 \left(h - \frac{t_f}{2}\right)^3}{36}$$

8- Ayaklı köşebent kesit



$$I_w = 0$$

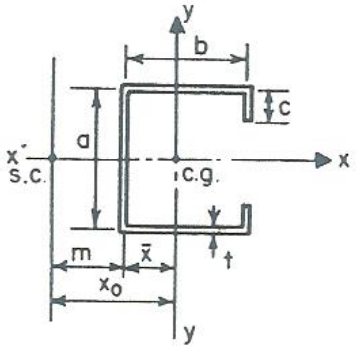
9- Takviyeli ayaklı köşebent kesit



$$I_x = \frac{t}{3}\left(a^3 + c^3 + 3a^2 c - 3ac^2\right)$$

$$I_w = \frac{t^2 2a^4 c^3}{18 I_x}\left(4a + 3c\right)$$

10- Takviyeli kanal kesit



$$A = (a + 2b + 2c)t$$

$$m = \frac{bt}{12 I_x}\left(6ca^2 + 3ba^2 - 8c^3\right)$$

$$\bar{x} = \frac{bt(b + 2c)}{A}$$

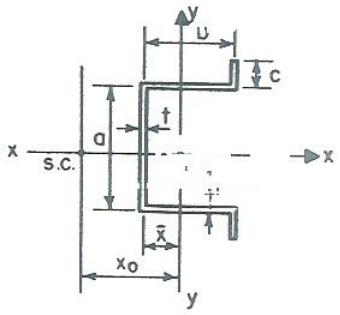
$$I_x = \frac{t}{12}\left(a^3 + 6ba^2 + 6ca^2 - 12ac^2 + 8c^3\right)$$

$$I_w = \left[\frac{\bar{x}Aa^2}{t}\left(\frac{b^2}{3} + m^2 - mb\right) + \frac{A}{3t}\left[m^2a^3 + b^2c^2(2c + 3a)\right]\right.$$

$$- \frac{I_x m^2}{t}(2a + 4c) + \frac{mc^2}{3}\left\{8b^2c + 2m\left[2c(c - a) + b(2c - 3a)\right]\right\}$$

$$\left. + \frac{b^2a^2}{6}\left[(3c + b)(4c + a) - 6c^2\right] - \frac{m^2a^4}{4}\right]$$

11- Şapka kesit



$$A = (a + 2b + 2c)t$$

$$\bar{x} = \frac{bt(2b + c)}{A}$$

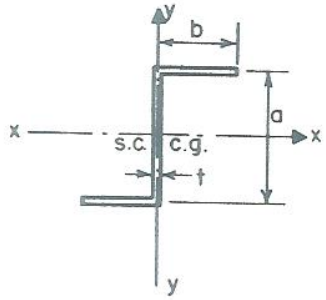
$$I_x = \frac{t}{12}\left(a^3 + 6ba^2 + 6ca^2 + 12ac^2 + 8c^3\right)$$

$$I_y = \frac{tb^2}{3(a + 2b + 2c)}\left(2ab + b^2 + 4bc + 6ca\right)$$

$$I_w = \frac{a^2}{4}\left[Iy + \bar{x}^2 A\left(1 - \frac{a^2 A}{3I_x}\right)\right] + \frac{2b^2tc^3}{3}$$

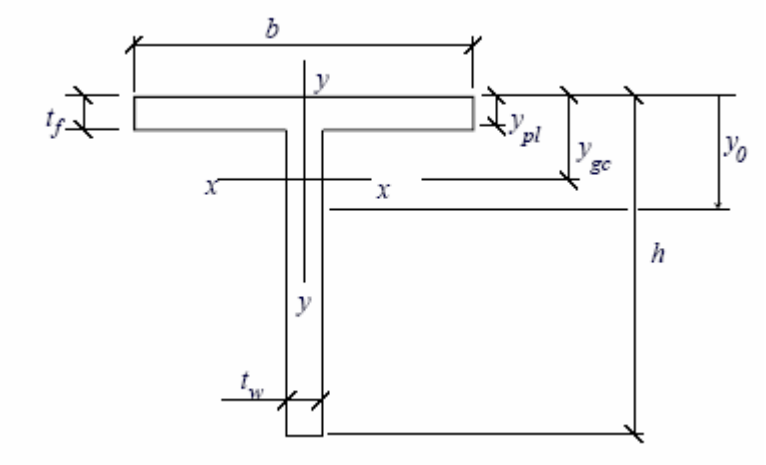
$$- ab^2c^2t + \frac{a^2btc^3\bar{x}A}{3I_x} - \frac{4b^2t^2c^6}{9I_x}$$

12- Z kesit



$$I_w = \frac{\left(\frac{tb^3a^2}{12}\right)(b + 2a)}{2b + a}$$

EK C. T kesitli kirişe ait çarpılmalı burulma atalet momenti hesabı



Şekil 2.27 T kesite ait kesit özellikleri

$$A = bt_f + (h - t_f)t_w + r^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{gc} = \frac{1}{A}\left[b\frac{t_f^2}{2} + \frac{t_w}{2}(h - t_f)(h + t_f) + 2r^2\left(t_f + \frac{r}{2}\right) - \frac{\pi r^2}{2}\left(t_f + r - \frac{4r}{3\pi}\right)\right]$$

$$I_x = \frac{t_f b^3}{12} + \frac{b_w t_w^3}{12} + \frac{r(2r + t_w)^3}{12} - \frac{\pi r^2}{2}\left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{t_w}{2} + r\right)\left(\frac{t_w}{2} + r - \frac{8r}{3\pi}\right)\right]$$

$$I_y = \pi a^3 t_c\left[1 + \frac{t_c^2}{12a^2}\right] + 2\left[\frac{2t_f b^3}{3} + \frac{t_w^3 h}{12}\right]$$

$$W_{pl,y} = \frac{(h - t_f)t_w^2}{4} + \frac{t_f b^2}{4} + r^2(t_w + r) - \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{t_w}{2} + r - \frac{4r}{3\pi}\right)$$

$$y_{pl} = \frac{bt_f + (h - t_f)t_w + r^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}{2b} \qquad y_{pl} \le t_f \text{ ise}$$

$$W_{pl,x} = \frac{b}{2}(t_f - y_{pl})(t_f + y_{pl}) + \frac{t_w}{2}(h - t_f)(h + t_f) + 2r^2\left(t_f + \frac{r}{2}\right)$$

$$- \frac{\pi r^2}{2}\left(t_f + \frac{r}{2}\right) - \frac{\pi r^2}{2}\left(t_f + r - \frac{4r}{3\pi}\right) - \frac{by_{pl}^2}{2}$$

$y_{pl} \le t_f$ ise

$$t_y = 2y_s - \frac{1}{I_x}\int (y^3 + x^2 y)dA = 2y_s - \frac{I}{I_x} \qquad y_s = y_{gc} - \frac{t_f}{2}$$

$$x_0 = \frac{t_w}{2} + r$$

$$y_0 = y_{gc} - t_f - r$$

$$I = \frac{b}{4}\left[{y_{gc}}^4 - \left(y_{gc} - t_f\right)^4\right] + \frac{{b}^3}{24}\left[{y_{gc}}^2 - \left(y_{gc} - t_f\right)^2\right] + \frac{t_w}{4}\left[\left(y_{gc} - t_f\right)^4 - \left(h - y_{gc}\right)^4\right]$$

$$+ \frac{{t_w}^3}{24}\left[\left(y_{gc} - t_f\right)^2 - \left(h - y_{gc}\right)^2\right] + \frac{r}{2}\left[\left(y_{gc} - t_f\right)^4 - {y_0}^4\right] + \frac{r}{3}\left[2\left(y_{gc} - t_f\right) - r\right]\left[{x_0}^3 - \frac{{t_w}^3}{8}\right]$$

$$- r^2\left[\frac{2r^3}{5} + \frac{r^2}{2}\left(\pi y_0 - x_0\right) + 2r\left({y_0}^2 + \frac{{x_0}^2}{3} - \frac{2x_0 y_0}{3}\right) + \frac{\Pi y_0}{2}\left({x_0}^2 + {y_0}^2\right)\right]$$

$$K_v = 1{,}15\,\frac{1}{3}\left[{t_f}^3 b + {t_w}^3\left(h - \frac{t_f}{2}\right)\right]$$

$$K_w = \frac{{t_f}^3 b^3}{144} + \frac{{t_w}^3\left(h - \frac{t_f}{2}\right)^3}{36}$$

$$\Omega_m = \frac{1}{A}\int_A \Omega_{sc}\,dA = \frac{1}{A}\int_s\int_n n \quad s \quad dn \quad ds = \frac{1}{A}\left[2\int_0^{b/2} s \quad ds \int_{-t_f/2}^{h-t_f/2} n \quad dn + \int_0^{h-t_f/2} s \quad ds \int_{-t_w/2}^{t_w/2} n \quad dn\right] = 0$$

$$K_w = \int_A \left(\Omega_{sc} - \Omega_m\right)^2 dA = \int_s\int_n \left(n \quad s - 0\right)^2 dn \quad ds$$

$$= 2\int_0^{b/2} s^2 ds \int_{-t_f/2}^{t_f/2} n^2 dn + \int_0^{h-t_f/2} s^2 ds \int_{-t_w/2}^{t_w/2} n^2 dn = \frac{{t_f}^3 b^3}{144} + \frac{{t_w}^3\left(\frac{h - t_f}{2}\right)^3}{36}$$

$$y_{pl} \le y_0 \le t_f$$

$$N = -t_w\left(h - t_f\right) - bt_f + 2by_0$$

$$M = \frac{t_w}{2}\left[h^2 - {t_f}^2 - 2y_{gc}\left(h - t_f\right)\right] + \frac{b}{2}\left[{t_f}^2 - 2{y_0}^2 - 2y_{gc}\left(t_f - 2y_0\right)\right]$$

$$t_f \le y_0 \le h$$

$$N = bt_f - t_w\left(h + t_f\right) + 2t_w y_0$$

$$M = bt_f\left|y_{gc} - \frac{t_f}{2}\right| + \frac{t_w}{2}\left[h^2 + {t_f}^2 - 2y_{gc}\left(h + t_f\right)\right] + t_w y_0\left(2y_{gc} - y_0\right)$$

I_w çarpılmalı burulma atalet momenti, dış hatların (contour) burulması ve kalınlık burulması olarak iki şekilde hesaplanır. Kalınlık burulması ihmal edilirken, dış hatların (contour) burulması hesaba katılır. T kesit için ise dış hatların burulması sıfırdır. T kesit için I_w, kalınlık burulmasından türetilerek yukarıdaki gibi haseplanır [Edlung].

EK D. Galerkin Metodu:

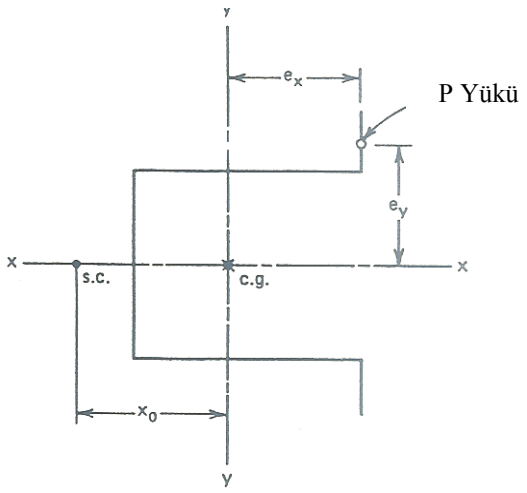
Kolon ve kiriş elemanları simetrik ve antisimetrik açık kesitli elemanlar olarak kullanıldıklarında elastik davranış ile ilişkili olarak aşağıdaki denklemler yazılabilir [35].

$$EI_x v^{iv} + Pv'' - Px_0\phi'' + M_y\phi'' = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$EI_y u^{iv} + Pu'' - Py_0\phi'' - M_x\phi'' = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$EI_w\phi^{iv} - GJ\phi'' + \left(\mathrm{Pr}_0^2 + \beta_x M_x + \beta_y M_y\right)\phi'' + Py_0 u'' - Px_0 v'' - M_x u'' + M_y v'' = 0 \qquad \text{(c)}$$

Burada;Momentler Şekil 2.27'de gösterilen kesitin x ve y yönündeki eksantirisitelerine göre aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:



Şekil 2.28 Asimetrik yüklenmiş kesit

$M_x = Pe_y$ ve $M_y = Pe_x$

Bu durumda (a), (b) ve (c) denklemleri yeniden yazılarak aşağıdaki hale getirilirler:

$$EI_x v^{iv} + Pv'' - Pa_x\phi'' = 0 \qquad \text{(a1)}$$

$$EI_y u^{iv} + Pu'' + Pa_y\phi'' = 0 \qquad \text{(b1)}$$

$$EI_w\phi^{iv} + \left(\mathrm{Pr}_0^2 - GJ\right)\phi'' + Pa_y u'' - Pa_x v = 0 \qquad \text{(c1)}$$

Burada;

$$a_x = x_0 - e_x$$

$$a_y = y_0 - e_y$$

$$r_0^2 = \beta_x e_y + \beta_y e_x + \frac{I_0}{A}$$

formülleriyle gösterilirler. (a1), (b1) ve (c1) formülleri aşağıdaki matris halinde yazılabilirler.

$$\begin{bmatrix} P_{ey} - P & 0 & -Pa_y K'_{13} \\ 0 & P_{ex} - P & Pa_x K'_{23} \\ -Pa_y K'_{31} & Pa_x K'_{32} & r_0^2 (P_{ez} - P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{P^2}{P_{ey}} e_x K_1 \\ -\frac{P^2}{P_{ex}} e_y K_2 \\ -P^2 \left(\frac{a_y e_x}{P_{ey}} - \frac{a_x e_y}{P_{ex}} \right) K_3 \end{Bmatrix}$$

Burada;

$$P_{ey} = K_{11} \frac{\pi^2 E I_y}{L^2}$$

$$P_{ex} = K_{22} \frac{\pi^2 E I_x}{L^2}$$

$$P_{ez} = \frac{1}{r_0^2} \left(K_{33} E I_w \frac{\pi^2}{L^2} + GJ \right)$$

şeklinde hesaplanılırlar.
Burada kullanılan K katsayıları çeşitli sınır koşulları için Tablo 2.7'de verilmiştir.

$z = 0, L$	K_{11}	K_{22}	K_{33}	K_1	K_2	K_3	K'_{13}	K'_{31}	K'_{23}	K'_{32}	K_{23}
$u'' = v'' = \phi'' = 0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.2732	1.2732	1.2732	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$u'' = v' = \phi'' = 0$	1.0000	4.1223	1.0000	1.2732	• • •	1.2732	1.0000	1.0000	0.5507	1.4171	0.8834
$u' = v' = \phi'' = 0$	4.1223	4.1223	1.0000	• • •	• • •	1.2732	0.5507	1.4171	0.5507	1.4171	0.8834
$u'' = v' = \phi' = 0$	1.0000	4.1223	4.1223	1.2732	• • •	0.6597	1.4171	0.5507	1.0000	0.8834	1.0000
$u' = v' = \phi' = 0$	4.1223	4.1223	4.1223	• • •	• • •	0.6597	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$u'' = v'' = \phi' = 0$	1.0000	1.0000	4.1223	1.2732	1.2732	0.6597	1.4171	0.5507	1.4171	0.5507	0.8834

Tablo 2.7 K katsayıları için çeşitli sınır koşulları

ÖZGEÇMİŞ

Özlem Demiral 1978 yılında Karabük'te doğmuş, orta öğretimini İstanbul Plevne Lisesi'nde tamamlamıştır. 1999 yılında İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun olup, halen İstanbul Teknik Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimini sürdürmektedir.