



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN GRAFLAR YARDIMIYLA TEMSİLİ

Fadime ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN GRAFLAR YARDIMIYLA TEMSİLİ

Fadime ÖZKAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2012, 126 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Hakan Kasım AKMAZ

Bu tezde, graflar ve grafların Fibonacci sayıları ile ilişkisi üzerine detaylı bir çalışma sunulmaktadır. Bu çalışmada temel düşünce, literatürde olan bu ilişkileri ele almaktır. Bazı graflarda bağımsız küme sayısı Fibonacci sayılarını vermektedir. Bu bağlamda, Fibonacci sayısının hesaplanmasında etkili bir yöntem olan köşe ve kenar indirgeme formülleri verilmiştir. Daha sonra da, adı geçen bu yöntem kullanılarak unicyclic, dicyclic grafların ağaçların ve kuvvet graflarının Fibonacci sayılarının hesaplanmasına ilişkin çalışmalar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bağımsız küme sayısı, Fibonacci sayıları, graflar

ABSTRACT

MS THESIS

THE REPRESENTATION OF SOME KINDS OF SPECIAL NUMBER SEQUENCES VIA GRAPHS

Fadime ÖZKAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Asistant Prof. Dr. Necati TAŞKARA

2012, 126 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Necati TASKARA
Prof. Dr. Ahmet Sinan Cevik
Assoc. Prof. Dr. Hakan Kasım AKMAZ

In this thesis, a detailed survey on the relations between graphs and Fibonacci numbers is presented. The main idea of our study is to review such relations. The number of independent sets in some kinds of graphs give the Fibonacci numbers. In this sense, the vertex and edge reduction formulas, which are efficient methods evaluating the Fibonacci number of a graph, are introduced. Then,studies on the evaluation of the Fibonacci numbers of unicyclic graphs, dicyclic graphs, trees, power graphs are investigated by using the aforementioned method.

Keywords: Fibonacci numbers, graphs, number of independent sets

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada beni yönlendiren ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde en büyük paya sahip olan ailem ile uğradığım her hayal kırıklığında beni hoşgörü ve sabırla dinleyen, cesaretlendiren ve tekrar amacıma yönelten canım yol arkadaşım Esma BARAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Fadime ÖZKAN
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **5**

3. GRAFLAR ve TEMEL ÖZELLİKLERİ **6**

3.1. Temel Kavramlar 6
3.1.1. Graflarda İzomorfizm 8
3.1.2. Alt Graflar 13
3.1.3. Bir Köşenin Derecesi 19
3.1.4. Regüler Graflar 21
3.1.5. İki Parçalı Graflar 22
3.1.6. Yol, Patika ve İz 23
3.1.7. Graflar Üzerinde İşlemler 26
3.2. Euler ve Hamilton Grafları 30
3.3. Yönlendirilmiş Graflar (Digraflar) 36
3.3.1. Digraflarda İzomorfizm 38
3.3.2. Alt Digraflar 39
3.3.3. Euler ve Hamilton Digrafları 42
3.4. Grafların Matrisler Yardımıyla Temsili 43
3.5. Ağaçlar 55

4. GRAFLARDA FİBONACCİ SAYI DİZİSİ **57**

4.1. Bir veya İki Döngü İçeren Grafların Fibonacci Sayısı 68
4.2. Ağaçlarda Fibonacci Sayısı 88
4.3. Kuvvet Grafları 98
4.4. Grafların Fibonacci Polinomu 108
4.5. Grafların Bağımsız Kenar Kümeleri 114

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **124**

KAYNAKLAR **125**

ÖZGEÇMİŞ **126**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$G=(V,E)$: Graf

$N(v)$: v köşesinin açık komşuluğu

$d(v)$: v köşesinin derecesi

$N[v]$: v köşesinin kapalı komşuluğu

$G_1[G_2]$: G_1 ve G_2 graflarının bileşkesi

$G_1 \cup G_2$: G_1 ve G_2 graflarının birleşimi

$G_1 \oplus G_2$: G_1 ve G_2 graflarının halka toplamı

$G_1 \cap G_2$: G_1 ve G_2 graflarının kesişimi

$G_1 + G_2$: G_1 ve G_2 graflarının toplamı

$d^+(v)$: D digrafına ait v köşesinin dış derecesi

$d^-(v)$: D digrafına ait v köşesinin iç derecesi

$D(V,E)$: Digraf (yönlendirilmiş graf)

$d_G(v)$: G grafına ait v köşesinin derecesi

$G-e$: G grafından e kenarının kaldırılması ile elde edilen alt graf

$G-v$: G grafından v köşesinin kaldırılması ile elde edilen alt graf

$G[F]$: G grafının $F \subseteq E(G)$ kenarlar kümesine indirgenmiş alt grafı

$G[U]$: G grafının $U \subseteq V(G)$ köşeler kümesine indirgenmiş alt grafı

$M \subseteq E(G)$: G grafının bağımsız kenar kümesi

S : G grafının bağımsız köşe kümesi

$\overline{G}$: G grafının tamamlayıcısı

$L(G)$: G grafının çizgi grafı

$f(G)$: G grafının Fibonacci sayısı

$M(G)$: G grafının incidence matrisi

$F_k(G)$: G grafının k-elemanlı tüm bağımsız kümelerinin sayısı

$E(G)$: G grafının kenarlar kümesi

$A(G)$: G grafının komşuluk matrisi

$V(G)$: G grafının köşeler kümesi

$w(G)$: G grafının tüm bileşenlerinin sayısı

$f_v(G)$: G grafının v köşesini içeren tüm bağımsız kümelerinin sayısı

$f_{-v}(G)$: G grafının v köşesini içermeyen tüm bağımsız kümelerinin sayısı

$K_{r,s}$: İki parçalı tam graf

C_n : n köşeli döngü

K_n : n köşeli tam graf

P_n : n köşeli tam graf

S_n : n köşeli yıldız

F_n : n. Fibonacci sayısı

T : Ağaç

$B_{n,d,k}$: Süpürge graf

$d(v_1, v_2)$: v_1 ve v_2 köşeleri arasındaki uzaklık

$|G|$: G grafının mertebesi

$\|G\|$: G grafının boyutu

$çap(G)$: G grafının çapı

L_n : n. Lucas sayısı

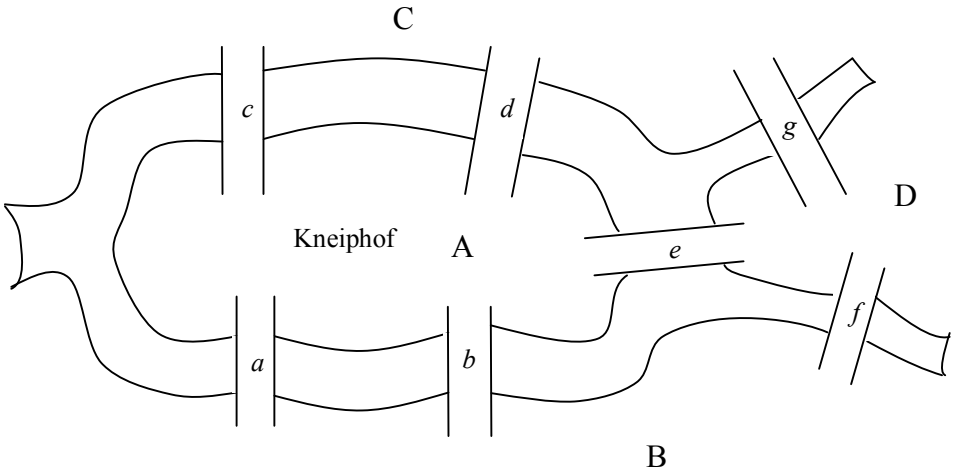
$f_G(x)$: G grafının Fibonacci polinomu

$G(n,k)$: n köşeli G grafının k. kuvveti

1. GİRİŞ

Graf Teori, 1736 yılında Leonhard Euler'in (1707-1783) Königsberg köprü problemini ele almasıyla yeni bir bilim dalı olarak ortaya çıkmıştır. Königsberg köprü problemi ve Euler'in bu probleme yaklaşımı aşağıda anlatıldığı gibidir:

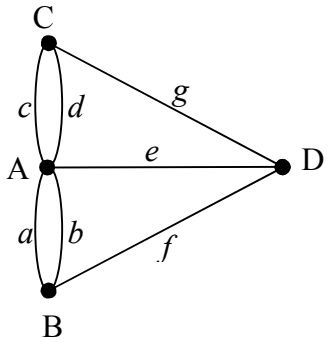
18. yy.ın başlarında Königsberg şehrinin ortasında Pregel nehri ile çevrelenmiş Kneiphof adası vardır. Şehir aşağıda gösterildiği gibi dört kara parçasına (A, B, C, D) ayrılmıştır ve bu kara parçaları arasındaki ulaşım 7 köprü (*a, b, c, d, e, f, g*) ile sağlanmaktadır.



Şekil 1.1. Königsberg şehri

Königsberg halkının şehirleri ile ilgili bir oyun bulduğu söylenir. Bu oyun, tüm köprülerden sadece bir kez geçmek şartı ile başlangıç noktasına geri dönecek şekilde bir rota belirlemektedir. Ama ne var ki halk ne kadar uğraşsa da böyle bir yol bulamaz.

Euler 1736 yılında Königsberg köprü problemini çizdiği şekiller yardımıyla inceler. Buna göre kara parçalarını noktalar ile, bu kara parçalarını birbirine bağlayan köprüleri de kara parçalarının karşılık geldiği noktaları birleştiren çizgilerle gösterir. Bu durumda şehir aşağıdaki diyagramda gösterildiği gibi olur.



Şekil 1.2.

Şehrin bir parçasına geçildiğinde o parçayı farklı bir köprü ile terk etme imkanı varsa yukarıdaki şartları sağlayan yol bulunabilir. Bunun için de herhangi iki kara parçasını birbirine bağlayan köprü sayısı çift olmalıdır. Königsberg şehri ise bu şartı sağlamadığından istenilen özellikte bir yol mevcut değildir.

Bu şekilde nesnelerin noktalarla, nesneler arası ilişkilerin de çizgilerle temsil edildiği diyagrama *graf* denir. Grafi oluşturan noktalara *köşe*, çizgilere de *kenar* denir.

Euler'in bu çalışmasının ardından araştırmacılar problemlerini Euler gibi şekillere aktararak incelemişlerdir. Öyle ki Graf Teorisi, matematiğin yanı sıra Kimya, Ekoloji, Arkeoloji, Bilgisayar, Mühendislik, Kodlama Teorisi ve Oyun Teorisi gibi birçok bilim dalında geniş uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, kimyasalların tehlikeli reaksiyonlarını önleyecek şekilde kimyasalları depolama biçiminde, bir haritanın dört renk ile boyanabileceğini göstermede, tüm yüzleri dört fraklı renge boyanmış küplerin her yönden bakıldığında tüm renklerin görünebileceği dizilişi bulmada, bir postacının tüm mektuplarını dağıtabileceği en kısa yol güzergahını belirlemede çoğunlukla tercih edilen Graf Teori'dir.

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Bazı Fibonacci sayıları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Tablo 1.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	...

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ve $\beta = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. Bu durumda

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

olup bu formüle *Binet Fibonacci formülü* denir.

$L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine Lucas dizisi denir. Bazı Lucas sayıları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Tablo 1.2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	...

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında $n \geq 2$ olmak üzere

$$L_n = F_n + F_{n-2}$$

bağıntısı mevcuttur.

Bu tez graflar ve grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkisi üzerine yapılan çalışmaların bir derlemesi olup, 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm girişe, ikinci bölüm kaynak araştırmasına ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde graflara ilişkin temel kavramlar ve teoremler verilerek Euler ve Hamilton grafları, Yönlendirilmiş graflar, ağaçlar ve grafların matrisler yardımıyla temsili kapsamlı olarak sunulmuştur.

Dördüncü bölümde öncelikle grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri incelenmiştir. Bu amaçla literatürde iyi bilinen bir grafın Fibonacci sayısı kavramı verilmiştir. Bu sayının hesaplanmasında iyi bir yöntem olan köşe ve kenar indirgeme formülleri verilerek bu yöntemle unicyclic, dicyclic grafların ağaçların ve kuvvet graflarının Fibonacci sayılarını hesaplamaya ilişkin çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra bir graf için *k*-elemanlı bağımsız küme kavramı verilmiştir ve graflardan elde edilen bu

sayılar ile oluşturulan Fibonacci tanımı sunulmuştur. Son olarak bağımsız kenar küme tanımı verilmiştir ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını bazı özel tipteki grafların matching sayısı olarak temsil eden bazı çalışmalar incelenmiştir. Son bölümde sonuç ve öneriler sunulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Chism L. M. (2009) Bu çalışmada izomorf olmayan, fakat aynı bağımsızlık polinomuna sahip graflar için bağımsızlık denkliği kavramı tanımlanarak bu özelliği sağlayan graflar bulunmuştur. Ayrıca $2 \times n$ latis, silindir ve Möbius ladder graflarının bağımsızlık polinomları elde edilmiştir.

Startek M., Wloch A., Wloch I. (2009) Bu çalışmada bazı bir ve iki döngü içeren graflar tanımlanarak bu grafların Fibonacci sayıları hesaplanmıştır. Ayrıca *n* köşeli iki döngü içeren grafların Fibonacci sayıları için alt ve üst sınır elde edilmiştir.

Wingard G. C. (1995) Bu çalışmada bazı özel graflar ve graflar üzerinde işlemlerle elde edilen yeni graflar için grafların Fibonacci polinomlarının hesaplanmasında kullanılan köşe ve kenar indirgeme formülleri elde edilmiştir.

Hopkins G., Staton W. (1984) Bu çalışmada herhangi bir grafın Fibonacci polinomu kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca patika ve döngü grafların Fibonacci polinomu aracılığı ile bazı eşitlikler elde edilmiştir.

Horton L. B. M. (2007) Bu çalışmada bir grafın kuvvet grafı tanımlanarak patika ve döngü graflarının *n*. kuvvet grafları için bağımsız küme sayısını veren genel bir formül elde edilmiştir.

Pedersen A. S., Vestergaard P.D. (2004) Bu çalışmada Broom grafı tanımlanarak bağımsız küme sayısı ile ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca herhangi bir ağacın bağımsız küme sayısı için Broom grafının bağımsız küme sayısı cinsinden bir üst sınır elde edilmiştir.

Prodinger H., Tichy R.F. (1982) Bu çalışmada herhangi bir G grafı için bağımsız küme tanımı kullanılarak patika ve döngü grafları için bağımsız küme sayılarının sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayıları olduğu tespit edilmiştir.

Levit V. E., Mandrescu E. (2005) Bu çalışmada graflara ait Fibonacci polinomlarına ilişkin çalışmaların genel bir incelemesi yapılmıştır.

Holliday S., Krop E. (2011) Bu çalışmada patika-tipi graflar tanımlanıp bu grafların tüm bağımsız kenar kümelerinin sayımı sonucu genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri elde edilmiştir.

Zhao H., Li X. (2006) Bu çalışmada iki tip ağaç tanımlanarak bu ağaçlar Fibonacci sayılarına göre sıralanmıştır.

Chen G., Zhu Z. (2012) Bu çalışmada tek döngü içeren grafların bağımsız köşe ve kenar kümelerinin sayıları hesaplanmıştır.

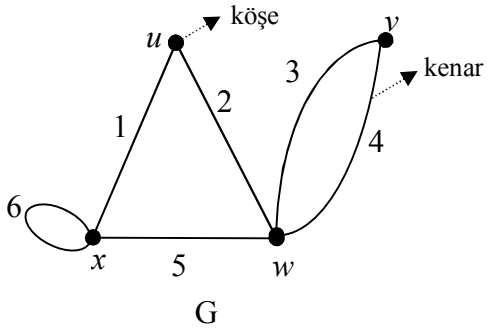
3. GRAFLAR ve TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde graflar için temel kavramlar ve graf çeşitleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Bu bölümde kullandığımız temel tanım, teorem, örnek ve şekiller Aldous ve Wilson (2003); West (2000); Koshy (2003); Clark ve Holton (1991), Vasudev (2006) kaynaklarından alınmıştır.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Bir graf, köşe ve kenar kümelerinden oluşur. Bu kümeler $V(G)$ şeklinde gösterilen köşeler kümesi ile $E(G)$ şeklinde gösterilen ve elemanları $V(G)$'nin sırasız eleman çiftleri olan kenarlar kümesidir. Bir G grafı, $G=(V,E)$ veya $G=(V(G),E(G))$ şeklinde gösterilir. Buradan da anlaşılacağı gibi her bir kenar iki köşeyi birleştirir. Örneğin;



Şekil 3.1.

Yukarıda gösterilen grafın köşelerinin kümesi $V(G)=\{u,v,x,w\}$ ve kenarlarının kümesi de $E(G)=\{1,2,3,4,5,6\}$ dır. 1 kenarı u ve x köşelerini, 2 kenarı u ve w köşelerini, 3 kenarı v ve w köşelerini, 4 kenarı v ve w köşelerini ve 5 kenarı x ve w köşelerini birleştirirken, 6 kenarı x köşesini kendisi ile birleştirir.

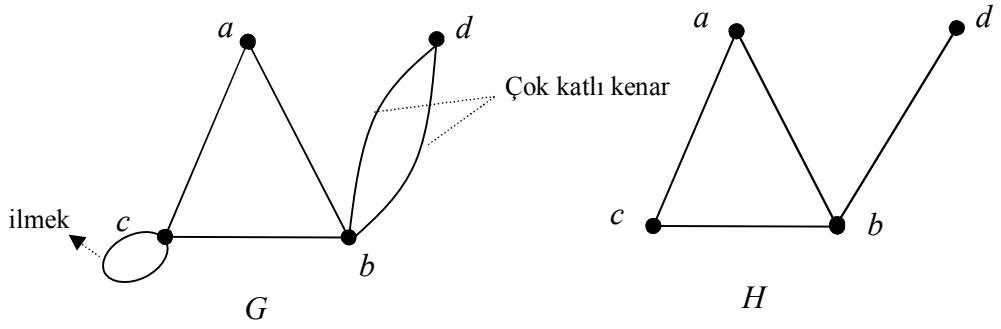
Graflarda bir kenar genelde iki köşesi belirtilerek gösterilir. Örneğin, 1 kenarı xu veya ux şeklinde, 3,4 kenarları vw veya wv şeklinde ve 6 kenarı xx şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. $G=(V,E)$ grafı verilsin. G grafının tüm köşelerinin sayısına grafın *mertebesi* denir ve $|G|$ şeklinde gösterilir. G grafının tüm kenarlarının sayısına da grafın *boyutu* denir ve $\|G\|$ şeklinde gösterilir. Örneğin, yukarıda Şekil 3.1. ile verilen G grafı için $|G|=4$ ve $\|G\|=6$ 'dır.

Tanım 3.1.3. Bir grafta aynı köşe çiftini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenarlara *çok katlı kenar (multiple edges)* veya *paralel kenar (paralel)* denir.

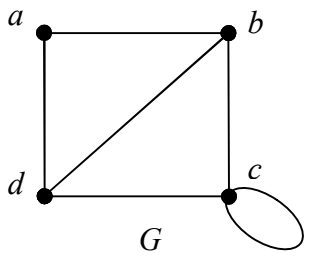
Bir grafta bir köşeyi kendisi ile birleştiren kenara *ilmek (loop)* denir.

Çokkatlı kenarı ve ilmeği olmayan grafa *basit graf (simple graph)* denir. Aşağıda basit H grafı ve basit olmayan G grafına birer örnek verilmiştir.



Şekil 3.2.

Örnek 3.1.1. Köşeler kümesi $V(G)=\{a,b,c,d\}$ ve kenarlar kümesi $E(G)=\{ab,ad,bd,bc,cd,cc\}$ olan G grafı Şekil 3.3.'deki gibi çizilebilir.



Şekil 3.3.

Dikkat edilirse G grafının c köşesinde ilmeği olduğundan G, basit graf değildir.

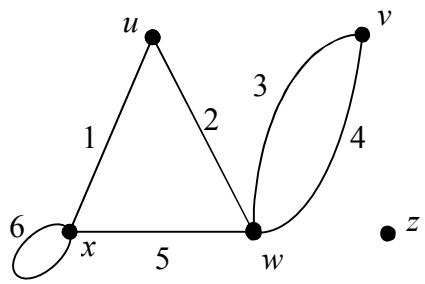
Tanım 3.1.4. e herhangi bir G grafının bir kenarı olsun. O zaman G grafında e kenarının bağlı olduğu köşelere e 'nin *uç köşeleri (endpoints)* denir.

G grafında hiçbir kenarın uç köşesi olmayan köşeye *izole köşe (isolated vertex)* denir.

Herhangi bir G grafında bir kenar ile bağlı olan köşelere *komşu (adjacent)* köşeler denir. Komşu v ve w köşeleri $v \sim w$ şeklinde gösterilir.

G grafında sabit bir v köşesinin tüm komşularının kümesine v'nin *açık komşuluğu (neighbourhood)* ya da kısaca komşuluğu denir ve $N(v)$ şeklinde gösterilir. $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ kümesine de v'nin *kapalı komşuluğu (closed neighbourhood)* denir.

Örnek 3.1.2. Aşağıdaki G grafını göz önüne alalım.



G

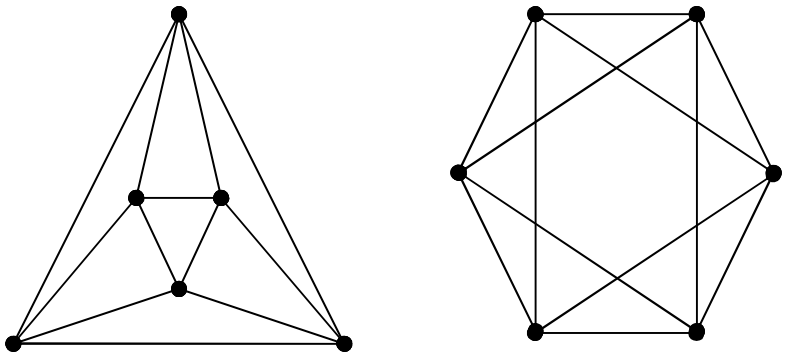
Şekil 3.4.

G grafında z köşesi izole köşe ve 3 ile 4 kenarları paralel kenarlardır. Ayrıca u köşesinin açık ve kapalı komşulukları sırasıyla;

$$N(u) = \{x, w\}$$
$$N[u] = \{x, w, u\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.5. Köşeleri isimlendirilmemiş graflara *etiketsiz (unlabelled) graf* denir.



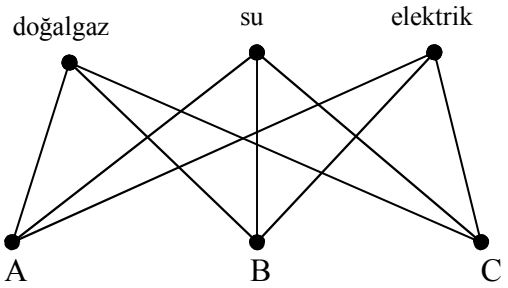
G H

Şekil 3.5.

3.1.1. Graflarda İzomorfizm

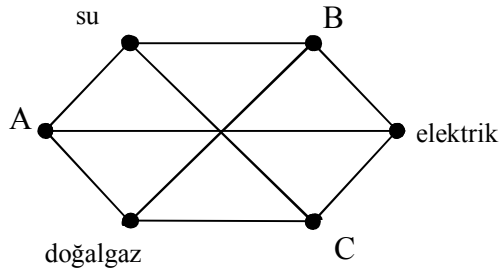
Graflarda izomorfizm kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle iyi bilinen aşağıdaki basit örneği verelim.

Birbirleriyle geçinemeyen üç komşu evlerine elektrik, su ve doğalgaz tesisatı döşetmek istiyorlar. Bu üç komşunun aralarında bağlantı kurmaması şartıyla söz konusu olan tesisatların döşenmesini temsil eden graflardan ikisi



Şekil 3.6.

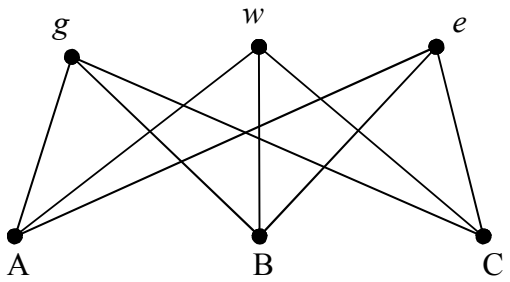
veya



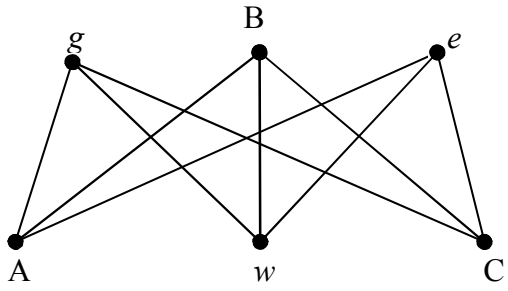
Şekil 3.7.

şeklinde çizilebilir.

Bir grafı çizmek için köşelerini ve kenarlarını bilmemiz yeterlidir. Yukarıdaki örnekte de gördüğümüz gibi bir graf birden çok yolla çizilebilir. Her iki graf da 6 köşe ve 9 kenardan oluşur. Sonuçta nesnelerin ilişkilendirilme biçimleri görsel olarak farklılık gösterse de yapılan iş aynıdır. Yani, her türlü durumda aynı evlere aynı tesisatlar döşenmiştir. Diğer taraftan iki diagram benzer gözükebilirken, farklı grafları ifade edebilirler. Örneğin;



Şekil 3.8.



Şekil 3.9.

diyagramları benzerdir, ancak aynı graflar değildirler. Çünkü birinci grafta AB kenarı yok iken ikinci grafta vardır. Böyle bir benzerlik (veya farklılık) graflarda izomorfizm kavramı ile ifade edilir.

Tanım 3.1.1.1. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ grafları verilsin. Eğer $f : V_1 \to V_2$ dönüşümü 1-1, örten ve $\forall u_1, v_1 \in V_1$ için u_1v_1'in, E_1'de bir kenar olması için gerek ve yeter şart $f(u_1)f(v_1)$'in de E_2'de bir kenar olması ise G_1 ve G_2 graflarına *izomorf graflar* denir ve $G_1 \simeq G_2$ şeklinde gösterilir. Böyle bir f dönüşümüne de *izomorfizm* denir.

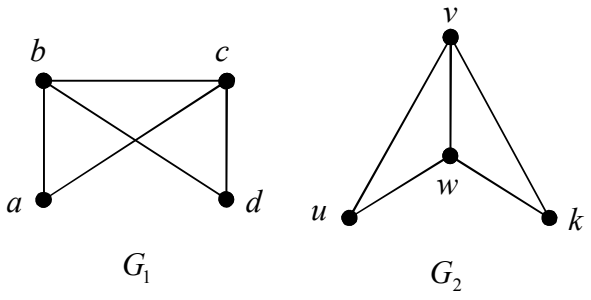
Başka bir deyişle G_1 ve G_2 graflarının izomorf olmaları için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

i) $|V_1| = |V_2|$

ii) $|E_1| = |E_2|$

iii) $f : V_1 \to V_2$ 1-1, örten dönüşümü komşulukları korumalıdır. Yani; u_1v_1'in E_1'de bir kenar olması için gerek ve yeter şart $f(u_1)f(v_1)$ de E_2'de bir kenar olmasıdır.

Örnek 3.1.1.1. Aşağıda verilen G_1 ve G_2 graflarının izomorf olup olmadıklarını inceleyelim.



Şekil 3.10.

i) $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 4$,

ii) $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 5$,

iii) $f : V_1 \to V_2$ dönüşümü için, $f(a) = u$, $f(b) = v$, $f(c) = w$, $f(d) = k$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm i) ve ii) den 1-1 ve örten olup, şimdi de komşulukları koruyup korumadığını inceleyelim.

Tablo 3.1.

$\{x, y\} \in E_1$	$\{f(x), f(y)\}$	$\{f(x), f(y)\}$, E_2'de kenar mı?
$\{a,b\}$	$\{f(a), f(b)\} = \{u,v\}$	Evet
$\{a,c\}$	$\{f(a), f(c)\} = \{u,w\}$	Evet
$\{b,c\}$	$\{f(b), f(c)\} = \{v,w\}$	Evet
$\{b,d\}$	$\{f(b), f(d)\} = \{v,k\}$	Evet
$\{c,d\}$	$\{f(c), f(d)\} = \{w,k\}$	Evet

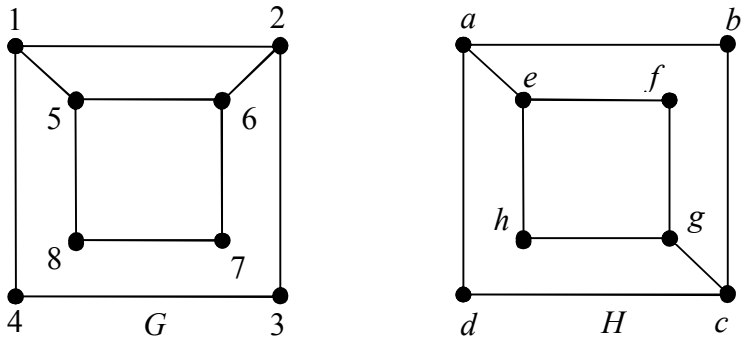
Tablodan da görüldüğü gibi f dönüşümü komşulukları korur. Böylece G_1 ve G_2 grafları izomorftur.

İki grafın izomorf olup olmadığı grafa ait temel elemanları kullanarak da incelenebilir. Yani, graflardan birinin köşelerini yeniden etiketliyerek diğerini elde edip edilemediği araştırılır. Bunun için;

i) İki grafın köşe ve kenar sayısına bakılır,

ii) Graflardan birinin sahip olduğu bir özelliğin diğer grafta da olup olmadığı incelenir. (Çokkatlı kenar, ilmek veya bir köşeyi bağlayan kenar sayısı gibi…)

Örnek 3.1.1.2. Aşağıda verilen G ve H graflarının izomorf olup olmadıklarını inceleyelim.

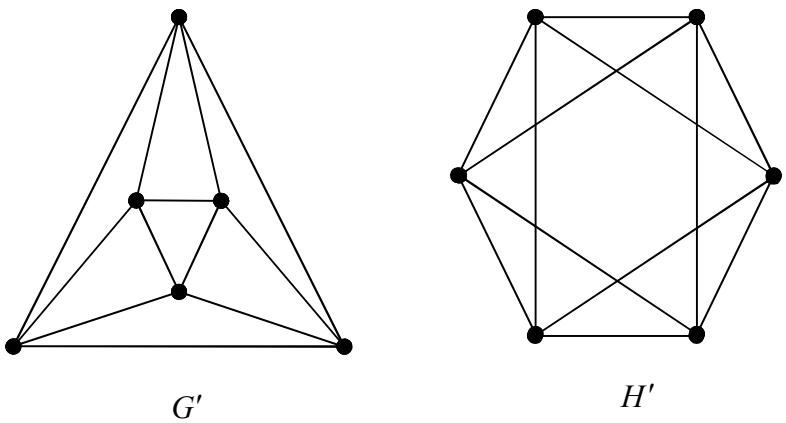


Şekil 3.11.

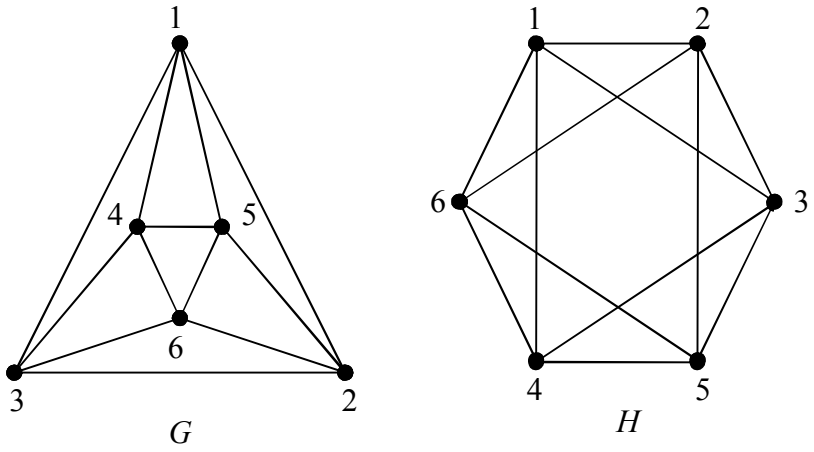
i) Her iki graf da eşit sayıda kenar ve köşeye sahiptir.

ii) G grafında iki kenar ile bağlı olan köşeler kümesi $\{3,4,7,8\}$ ve H grafında iki kenar ile bağlı olan köşeler kümesi de $\{b,d,h,f\}$ olur. Yani iki graf da eşit sayıda iki kenar ile bağlı olan köşeye sahiptir. Ancak; G grafında iki kenar ile bağlı köşelerden 3 ile 4 ve 7 ile 8 komşu köşeler iken H grafında iki kenar ile bağlı olan $\{b,d,h,f\}$ köşelerinden hiçbirisi komşu değildir. Bu yüzden $V(G)$ ile $V(H)$ arasında komşulukları koruyan 1-1 ve örten bir dönüşüm tanımlanamayacağından G ve H grafları izomorf değildirler.

Tanım 3.1.1.2. İzomorf olacak şekilde köşelerin uygun bir etiketlenmesine sahip iki etiketsiz graf izomorftur. Örneğin; aşağıda verilen etiketsiz iki grafın köşelerinin uygun bir etiketlemesi ile izomorf olduklarını gösterelim.



Şekil 3.12.

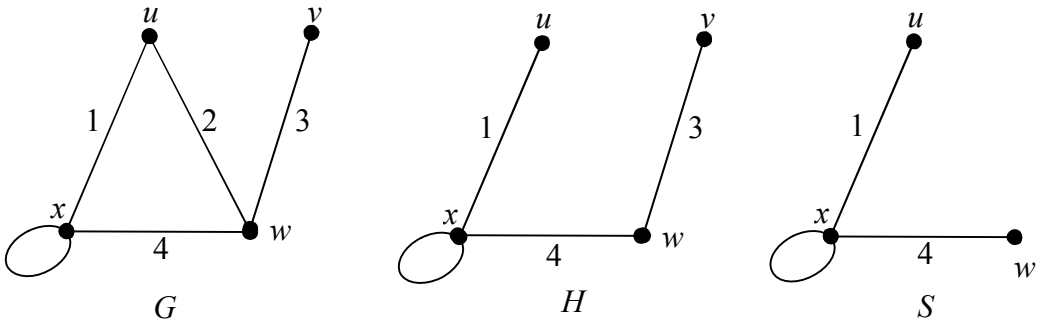


Şekil 3.13.

Böylece yapılan bu etiketlendirme sonucu G ve H grafları izomorftur. Dolayısıyla etiketsiz olan G' ve H' grafları da izomorf olur.

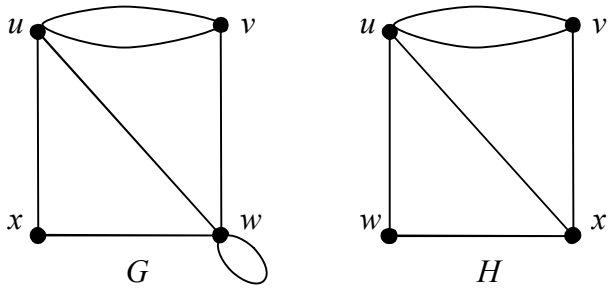
3.1.2. Alt Graflar

Tanım 3.1.2.1. $G=(V(G),\ E(G))$ grafı ve $H=(V(H),E(H))$ grafı verilsin. Eğer $V(H)\subseteq V(G)$ ve $E(H)\subseteq E(G)$ ise H grafına G grafının *alt grafı (subgraph)* denir. Örneğin, aşağıda bir G grafı ve bu grafa ait H ve S alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.14.

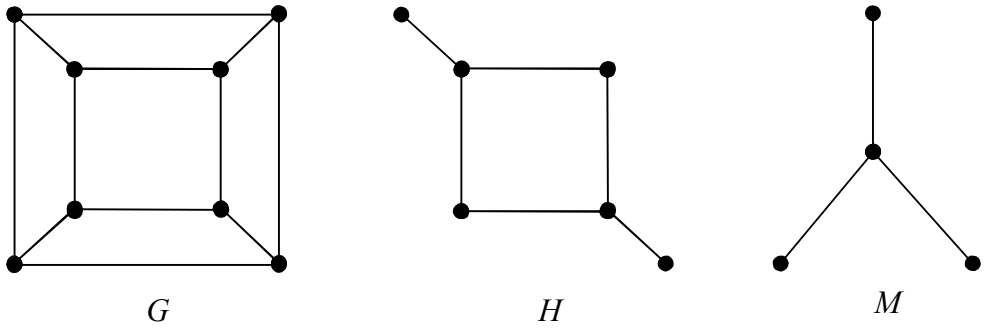
Örnek 3.1.2.1. Aşağıda verilen H grafının G'nin alt grafı olup olmadığını inceleyelim.



Şekil 3.15.

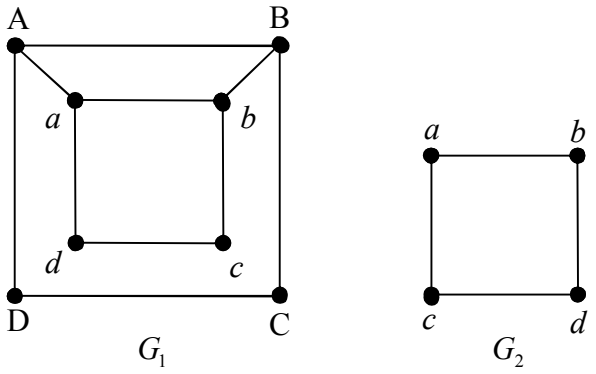
H grafındaki vx kenarı G'ye ait olmadığından H grafı, G grafının alt grafı değildir.

Alt graflar etiketsiz graflar için genelleştirilebilir. Örneğin, aşağıda etiketsiz bir G grafı ve bu grafa ait H ve M alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.16.

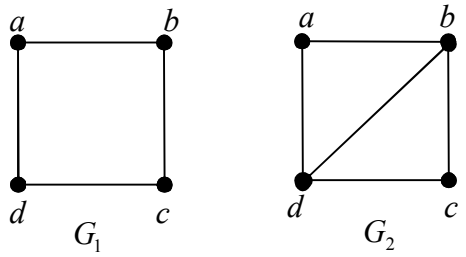
Tanım 3.1.2.2. G ve H grafları verilsin. Eğer H grafı G'nin $V(H) \neq V(G)$ veya $E(H) \neq E(G)$ olacak şekildeki bir alt grafı ise bu durumda H grafına G'nin *düzgün (proper) alt grafı* denir. Örneğin, aşağıda Şekil 3.17. ile gösterilen G_1 ve G_2 graflarından G_2 grafı, G_1 grafının alt grafıdır. Ayrıca $V(G_1) \neq V(G_2)$ olduğundan G_2 grafı G_1 grafının düzgün alt grafıdır.



Şekil 3.17.

Tanım 3.1.2.3. G ve H grafları verilsin. Eğer H grafı G'nin $V(H)=V(G)$ olacak şekilde bir alt grafı ise H grafına G'nin *kapsayıcı alt grafı (spanning subgraph)* denir.

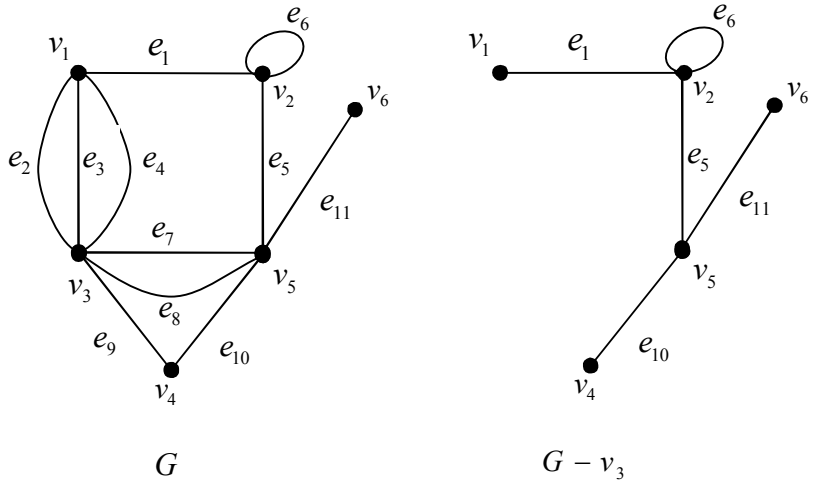
Örnek 3.1.2.2. Aşağıda verilen G_1 ve G_2 graflarını inceleyelim.



Şekil 3.18.

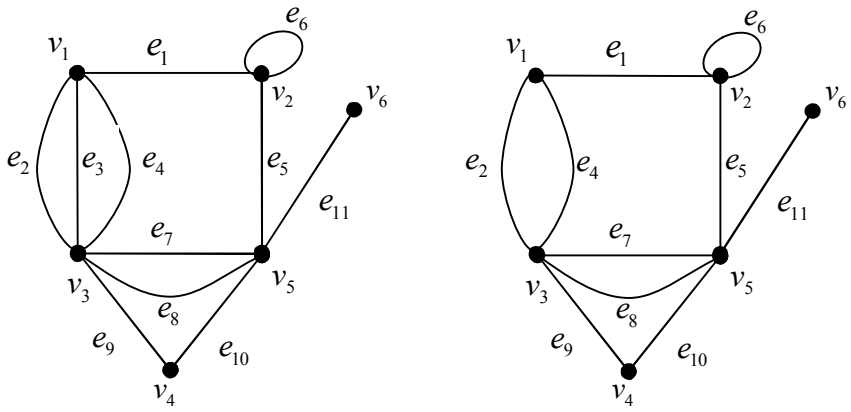
G_1 grafı G_2 grafının alt grafıdır. Ayrıca $V(G_1)=V(G_2)$ oluğundan G_1 grafı G_2 grafının kapsayıcı alt grafıdır. Diğer taraftan $E(G_1)\neq E(G_2)$ olduğundan G_2 grafı ayrıca G_1 grafının düzgün alt grafıdır.

Tanım 3.1.2.4. $G=(V,E)$ grafı en az iki köşeli bir graf olmak üzere G'nin herhangi bir $v\in V$ köşesinin ve bu v köşesini uç köşe kabul eden tüm kenarların silinmesiyle elde edilen G'nin alt grafı $G-v$ şeklinde gösterilir. Örneğin, aşağıda G grafı ve $G-v_3$ alt grafı gösterilmiştir.



Şekil 3.19.

Tanım 3.1.2.5. $G=(V,E)$ grafı verilsin. G grafı ile aynı V köşe kümesine ve $e\in E$ için $E-e$ kenar kümesine sahip G'nin alt grafı $G-e$ şeklinde gösterilir. Örneğin aşağıda G grafı ve $G-e_3$ alt grafı çizilmiştir.

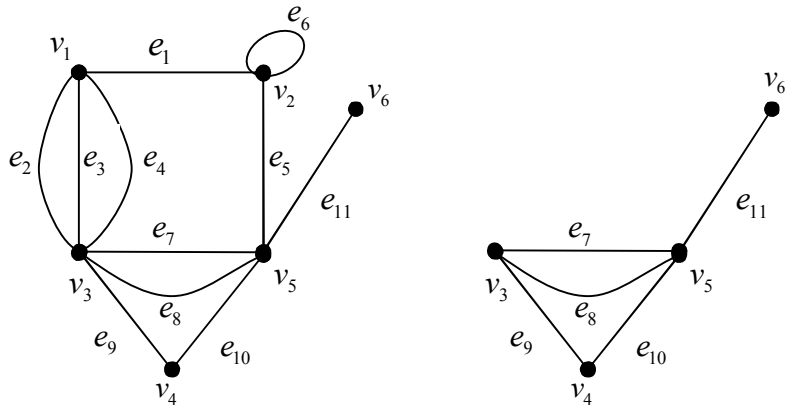


Şekil 3.20.

Yukarıdaki tanımları birçok köşenin ve kenarların silinmesi şeklinde genelleştirebiliriz.

Tanım 3.1.2.6. $G=(V,E)$ grafı ve $U \subset V$ alt kümesi verilsin. G grafından U 'nun elemanı olan köşelerin (dolayısıyla bu köşeler ile uç köşelerinden en az biri U 'da olan kenarlar da silinecektir.)silinmesi ile elde edilen alt graf $G-U$ şeklinde gösterilir.

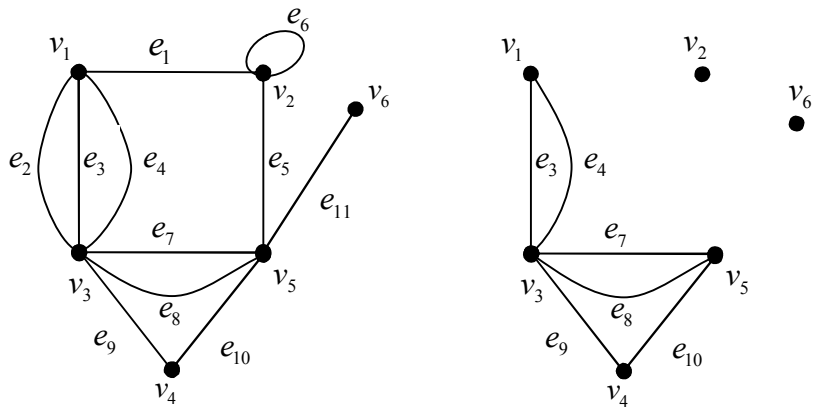
Örnek 3.1.2.3. Aşağıda G grafı ve $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $U=\{v_1,v_2\}$ için $G-U$ alt grafı gösterilmiştir.



Şekil 3.21.

Tanım 3.1.2.7. $G=(V,E)$ grafı ve $F \subset E$ alt kümesi verilsin. G grafından F 'nin elemanı olan kenarların silinmesi ile elde edilen alt graf $G-F$ şeklinde gösterilir. Aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi, $G-F$ alt grafı G grafı ile aynı V köşe kümesine sahiptir.

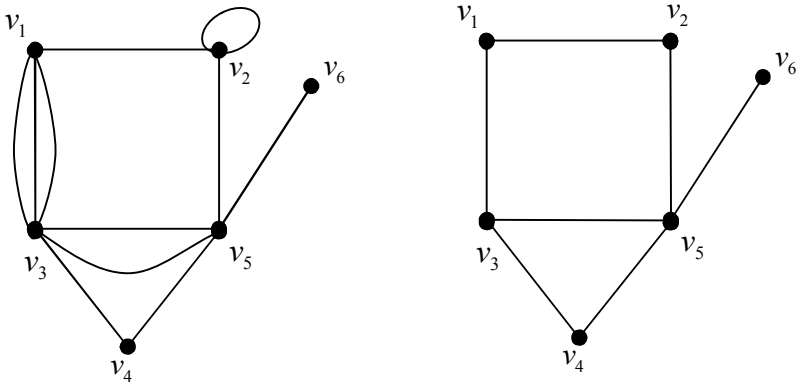
Örnek 3.1.2.4. Aşağıda G grafı ve $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11}\}$, $F=\{e_1,e_2,e_5,e_6,e_{11}\}$ için $G-F$ alt grafı gösterilmiştir.



G $\qquad\qquad$ $G-F$

Şekil 3.22.

Tanım 3.1.2.8. G grafından tüm ilmeklerin kaldırılması ve paralel kenarlardan sadece biri kalacak şekilde diğerlerinin silinmesi ile elde edilen alt grafa G'nin *kapsadığı basit alt graf (underlying simple graph)* denir. Örneğin, aşağıda G grafı ve bu grafın kapsadığı basit H alt grafı gösterilmiştir.



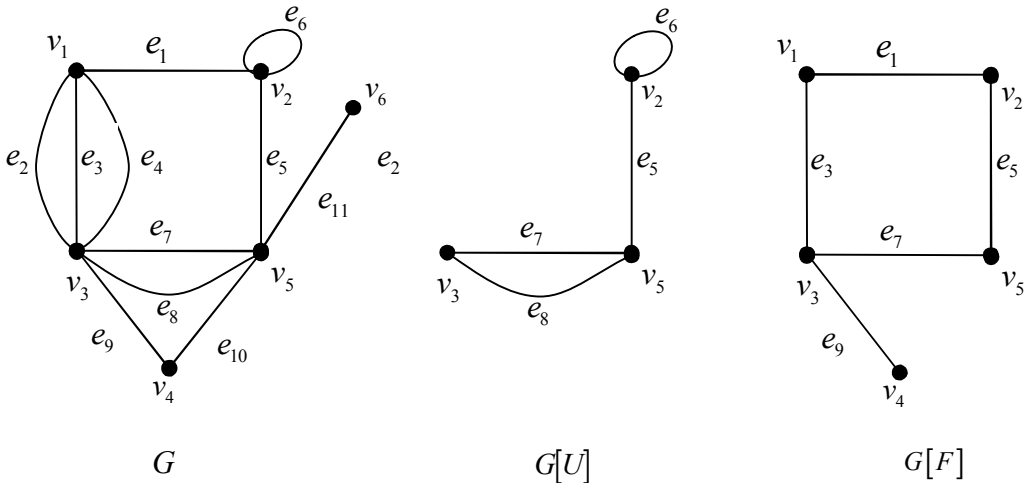
G $\qquad\qquad$ H

Şekil 3.23

Tanım 3.1.2.9. $G=(V,E)$ grafı ve $U\subset V$ alt kümesi verilsin. Köşeleri U'nun elemanlarından, kenarları da G'nin her iki uç köşesi de U'da olan kenarlarından oluşan alt grafa G'nin U'ya *indirgenmiş alt grafı (induced subgraph)* denir. G'nin U'ya indirgenmiş alt grafı $G[U]$ şeklinde gösterilir.

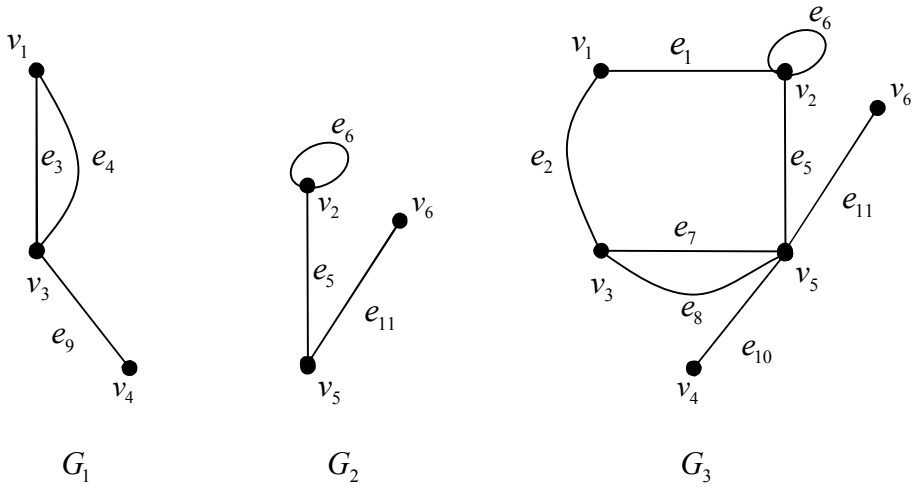
Benzer şekilde $F \subseteq E$ alt kümesi için de kenarları F 'nin elemanları ve köşeleri de F 'deki kenarların uç köşeleri olan alt grafa G'nin F 'ye indirgenmiş alt grafı denir. G'nin F 'ye indirgenmiş alt grafı $G[F]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.2.5. Aşağıda bir G grafı ve bu G grafının $U = \{v_2, v_3, v_5\}$ köşeler kümesine ve $F = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9\}$ kenarlar kümesine indirgenmiş alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.24.

Tanım 3.1.2.10. $G = (V, E)$ grafı ve G'nin $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ alt grafları verilsin. Eğer G_1 ve G_2 alt grafları ortak köşe içermiyorsa yani; $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ise G_1 ve G_2 graflarına *ayrık (disjoint)*; ortak kenar içermiyorsa da yani; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ise G_1 ve G_2 graflarına *kenar ayrık (edge disjoint)* graflar denir. Örneğin; aşağıda Şekil 3.25. ile verilen graflardan G_1 ve G_2 grafları ayrık, G_1 ve G_3 grafları da kenar ayrık graflardır.



Şekil 3.25.

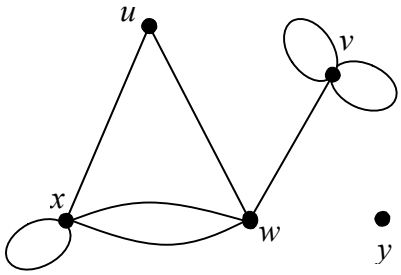
3.1.3. Bir Köşenin Derecesi

Graf Teorisi'nde birçok uygulamada bir köşenin bağlı olduğu kenar sayısına ihtiyaç duyarız. Örneğin bir kavşakta birleşen yolların sayısını belirlemede, bir elektrik devresinin uç birimlerinde birleşen kabloların sayısını bulmada veya kimyada incelenen bir atomun komşuları ile yaptığı bağ sayılarını belirtmede kullanılan hep bir köşenin derecesidir.

Tanım 3.1.3.1. $G=(V,E)$ grafı verilsin. G grafında v köşesinin bağlı olduğu kenar sayısına $v \in V$ köşesinin *derecesi (degree)* denir. Derece belirlenirken her bir ilmek iki kere sayılır. v köşesinin derecesi $der(v)$, $der_G(v)$ veya $d(v)$ şeklinde gösterilir.

Herhangi bir G grafının her bir köşesinin derecelerinin küçükten büyüğe gerektiğinde tekrarlanarak listelenmesine G'nin *derece dizisi (degree sequence)* denir.

Örnek 3.1.3.1. Aşağıdaki G grafı için

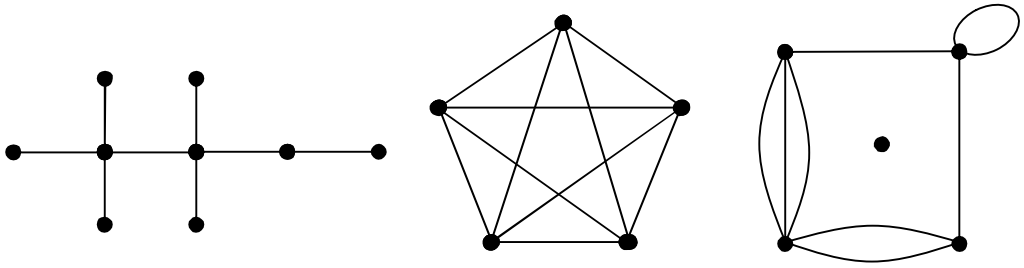


G

Şekil 3.26.

$\text{der}(u)=2,\ \text{der}(x)=5,\ \text{der}(w)=4,\ \text{der}(v)=5,\ \text{der}(y)=0$ dır. Dolayısıyla G grafının derece dizisi (0,2,4,5,5)'dir.

Örnek 3.1.3.2. Aşağıda etiketlendirilmemiş graflar ve bu graflara ait derece dizileri verilmiştir.



(1,1,1,1,1,1,2,4,4) (4,4,4,4,4) (0,3,4,4,5)

Şekil 3.27.

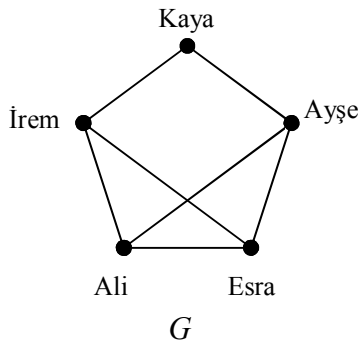
Teorem 3.1.3.1. (Tokalaşma Teoremi) $G=(V,E)$ grafı için $|V|=n,\ |E|=e$ olsun. Bu durumda G grafında köşelerin derecelerinin toplamı, kenarların sayısının iki katıdır. Yani;

$$\sum_{i=1}^{n} der_G(v_i) = 2e$$

dir.

İspat. Her bir kenarın iki uç köşesi olduğundan köşe derecelerine 2 kat etki eder. □

Tokalaşma Teoremi, ismini belli bir grupta tokalaşan insanları temsil eden graftan alır. Örneğin, aşağıda köşeleri bir gruptaki insanları, kenarları da bu grupta toklaşan insan çiftlerini temsil eden G grafı verilmiştir.



G

Şekil 3.28.

Bir grafın köşesi, derecesinin tek ya da çift olmasına bağlı olarak tek ya da çift şeklinde isimlendirilir.

Sonuç 3.1.3.1. Herhangi bir $G=(V,E)$ grafı için $|V|=n,\ |E|=e$ olmak üzere tek köşelerin sayısı çifttir.

İspat W, G grafının tek köşelerinin kümesi; U da G grafının çift köşelerinin kümesi olsun. Bu takdirde $u\in U$ için $d(u)$ çift olduğundan $\sum_{u\in U} d(u)$ çift olur. Teorem 3.1.3.1.'den

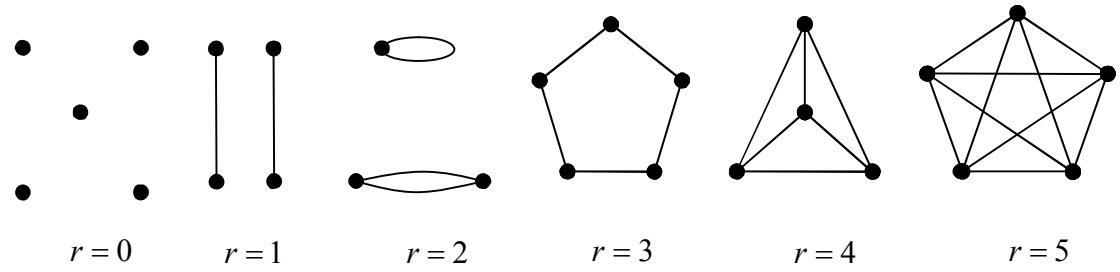
$$\sum_{u\in U} d(u) + \sum_{w\in W} d(w) = \sum_{v\in V} d(v) = 2e$$

$$\sum_{w\in W} d(w) = 2e - \sum_{u\in U} d(u)$$

olur. Son eşitliğin sağ tarafı çift ve $\sum_{w\in W} d(w)$ toplamındaki tüm terimler tek olduğundan $\sum_{w\in W} d(w)$ değerinin çift olması için terim sayısı çift olmalıdır. □

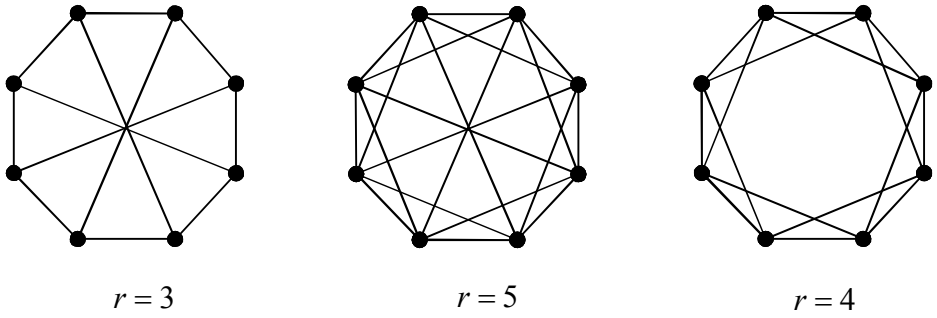
3.1.4. Regüler Graflar

Tanım 3.1.4.1. Tüm köşelerinin derecesi aynı olan graflara *regüler (regular) graf* denir. Özel olarak tüm köşelerinin derecesi *r* olan regüler grafa *r-regüler*; *r* değerine de grafın *regülerlik derecesi* denir. Örneğin, aşağıda farklı *r* değerleri için bazı *r*-regüler graflar çizilmiştir.



Şekil 3.29.

Örnek 3.1.4.1. Aşağıda $r = 3, 4, 5$ değerleri için 8 köşeli regüler graflar çizilmiştir.



Şekil 3.30.

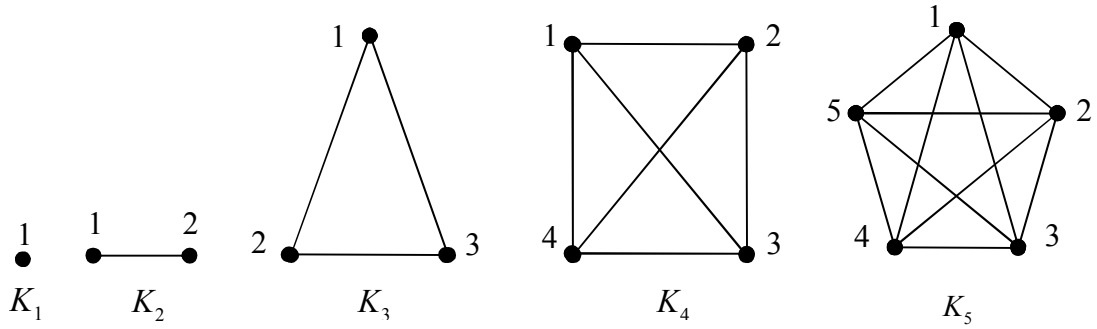
Lemma 3.1.4.1. *G*, *n* köşeli *r*-regüler graf ise bu takdirde *G*'nin kenar sayısı $\frac{nr}{2}$ 'dir.

İspat Teorem 3.1.3.1.'e göre kenarların sayısı tüm köşelerin derecelerinin toplamının yarısı kadar olduğundan *G*'nin kenar sayısı $\frac{nr}{2}$ olur. □

Tanım 3.1.4.2. Her köşesi diğer tüm köşeler ile komşu olan grafa *tam (complete) graf* denir. n köşeli tam graf K_n ile gösterilir.

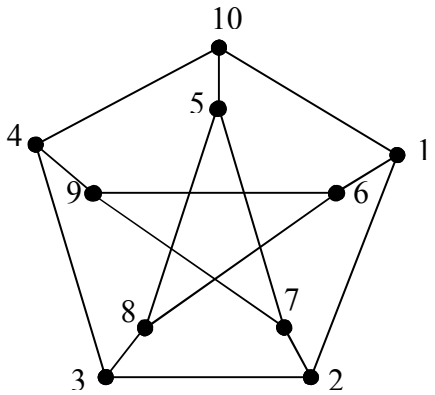
K_n grafının regülerlik derecesi $n-1$'dir. Dolayısıyla Teorem 3.1.3.1.'den de kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$'dir.

Örnek 3.1.4.2. Aşağıda 5. mertebeye kadar tüm K_n grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.31.

Tanım 3.1.4.3. 10 köşeli, 15 kenarlı 3-regüler grafa *Petersen graf* denir.

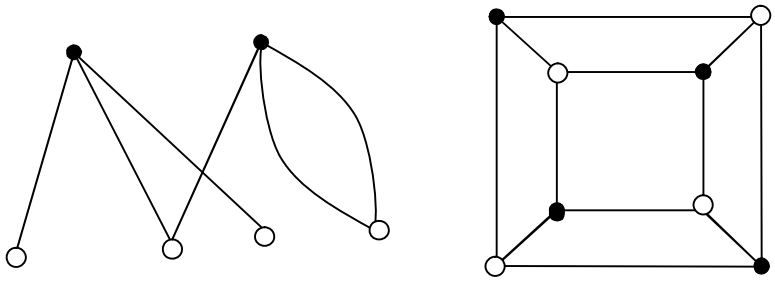


Şekil 3.32.

3.1.5. İki Parçalı Graflar

Tanım 3.1.5.1. Bir grafın köşeleri iki ayrı kümeden oluşuyor ve her bir kenar farklı kümelerden iki ayrı köşeyi birbirine bağlıyor ise bu tür graflara *iki parçalı (bipartite) graf* denir.

Örnek 3.1.5.1.

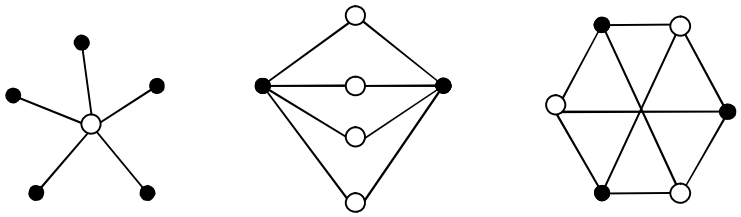


Şekil 3.33.

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi iki parçalı grafta bir kenarın uç köşeleri farklı kümelere aittir.

Şekil 3.6. ile verilen grafın köşeleri evler ve tesisatlar olarak iki küme belirttiğinden ve her bir kenar, bir ev ile bir tesisatı bağladığından graf iki parçalı graftır.

Tanım 3.1.5.2. Köşeler kümesi A ve B olan iki parçalı grafta A'ya ait her bir köşe B'nin her bir köşesiyle sadece bir kenarla komşu ise bu takdirde bu grafa *iki parçalı tam graf (complete bipartite graph)* denir. r elemanlı A kümesi ve s elemanlı B kümesi ile elde edilen iki parçalı tam graf $K_{r,s}$ veya $K_{s,r}$ şeklinde gösterilir. Örneğin, aşağıda farklı iki parçalı tam graflar çizilmiştir.



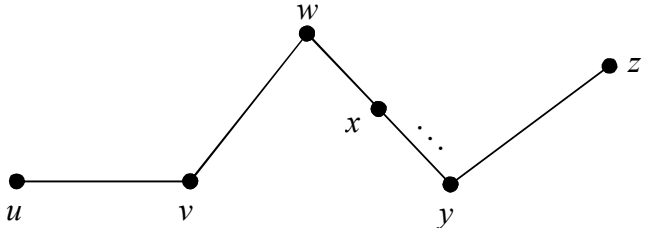
$K_{1,5}$ $K_{2,4}$ $K_{3,3}$

Şekil 3.34.

3.1.6. Yol, Patika ve İz

Tanım 3.1.6.1. Bir G grafında $uv, vw, wx, \ldots, yz$ şeklinde k tane ardışık komşu kenarlar dizisine *k uzunluğundaki yol* veya u ile z arasında bir *yol (walk)* denir.

Örnek 3.1.6.1. Aşağıda verilen graf üzerinde u'dan v'ye, v'den w'ye, w'den x'e, x'den y'ye ve y'den de z'ye tanımlanan yol, kısaca $uvwx\ldots yz$ şeklinde gösterilir. Ayrıca incelediğimiz graf yönlendirilmemiş olduğundan aynı yol; $zy\ldots xwvu$ olarak da gösterilebilir.

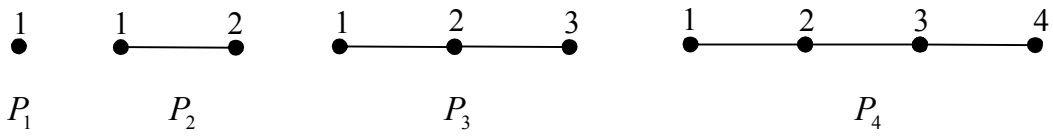


Şekil 3.35.

Tanım 3.1.6.2. Farklı kenarların takip edildiği yola *iz (trail)* denir.

Hem farklı kenarların hem de farklı köşelerin takip edildiği yola ise *patika (path)* denir. n köşeli bir patika P_n ile gösterilir.

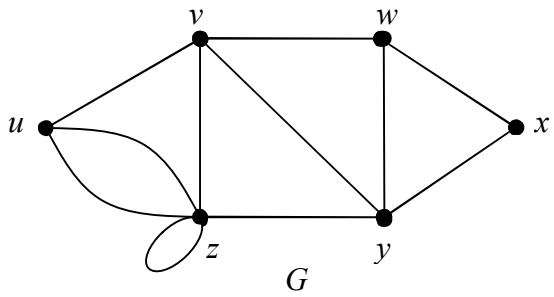
Örnek 3.1.6.2. P_i, $i = 1,2,3,4$ grafları verilsin.



Şekil 3.36.

Görüldüğü gibi bu graflar patika graflardır.

Örnek 3.1.6.3. Aşağıda verilen G grafını ele alalım.



Şekil 3.37.

vzzywxy yolunda her kenar bir kez kullanıldığından bu yol izdir. Fakat y ve z köşeleri ikişer kez kullanıldığından patika değildir.

xyzzvy yolu; uzunluğu 5 olan x köşesi ile y köşesi arasında bir izdir. Fakat z köşesi iki kez kullanıldığından patika değildir.

uvyz yolu, uzunluğu 3 olan u köşesi ile z köşesi arasında bir iz olup, ayrıca patikadır.

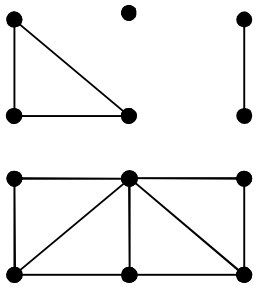
Tanım 3.1.6.3. $G = (V, E)$ grafı verilsin. G grafında $x, y \in V(G)$ köşeleri arasındaki en kısa patika yolunun uzunluğuna x *ve* y *köşeleri arasındaki uzaklık* denir ve $d(x, y)$ şeklinde gösterilir. Eğer böyle bir patika yolu mevcut değilse $d(x, y) = \infty$ olur.

Tanım 3.1.6.4. G grafında herhangi iki köşe ile oluşturulabilecek en büyük uzaklığa G'nin *çapı (diameter)* denir ve *çap*(G) ile gösterilir.

Tanım 3.1.6.5. Bir grafın her köşe çifti arasında bir patika varsa bu grafa *bağlantılı (connected)*, aksi takdirde *bağlantısız (unconnected)* denir.

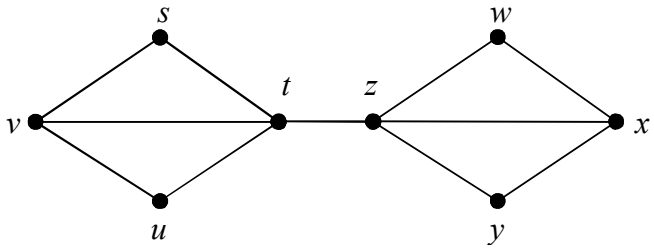
Her bağlantısız graf bağlantılı alt graflara ayrılabilir. Bu alt graflara *bileşen (component)* denir. Bir graftaki tüm bileşenlerin sayısı $w(G)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.6.4. Aşağıda verilen grafta her köşe çifti arasında bir patika yolu mevcut olmadığından bağlantılı değildir. Fakat bağlantılı dört alt grafa bölünebileceğinden bileşen sayısı dörttür. Yani $w(G) = 4$ olur.



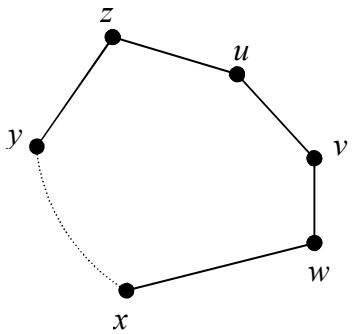
Şekil 3.38.

Tanım 3.1.6.6. Bağlantılı bir $G = (V, E)$ grafı ve $e \in E$ kenarı verilsin. Eğer G grafından e kenarının kaldırılması ile elde edilen $G - e$ alt grafı bağlantısız oluyorsa bu durumda e kenarına *köprü (bridge)* denir. Örneğin, aşağıdaki grafta tz kenarı kaldırıldığında graf, bağlantısız olacağından tz kenarı köprüdür.



Şekil 3.39.

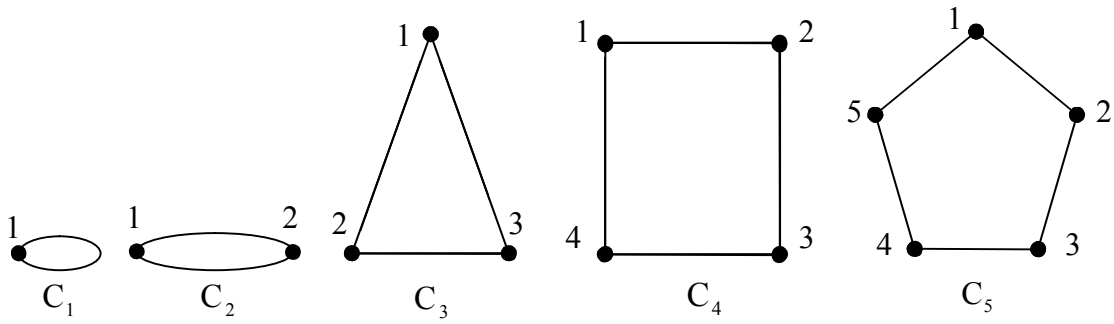
Tanım 3.1.6.7. Bir grafta aynı köşe ile başlayıp aynı köşe ile biten $uv, vw, wx, \ldots, yz, zu$ ardışık komşu kenarlar dizisine *kapalı yol (closed walk)* denir. Aksi takdirde *açık yol (open walk)* denir.



Şekil 3.40.

Tanım 3.1.6.8. Tüm kenarları farklı olan kapalı yola *kapalı iz (closed trail)* denir.

Tüm kenarları ve ortadaki tüm köşeleri farklı olan kapalı yola ise döngü (*cycle)* denir. n köşeli döngü C_n şeklinde gösterilir. Uzunluğu 3 olan döngüye özel olarak *üçgen (triangle)* denir.

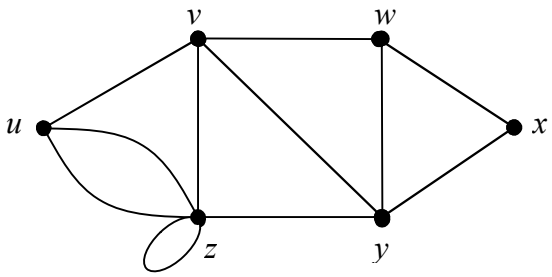


Şekil 3.41.

Yukarıdaki şekillerden de anlaşılacağı gibi bağlantılı ve 2-regüler olan graflar döngüdür.

C_n döngüsünden bir kenar kaldırılması ile elde edilen graf, n köşeli P_n patikasıdır.

Örnek 3.1.6.5.



Şekil 3.42.

ile verilen G grafında;

$vywxyzv$ kapalı yolunda takip edilen her kenar birbirinden farklı olduğundan $vywxyzv$ yolu kapalı izdir. Fakat y köşesinden iki kez geçildiğinden döngü değildir.

$zz, vwxyv$ ve $vwxyzv$ yolları döngü, $vwyv$ ve $wxyw$ yolları ise üçgendir.

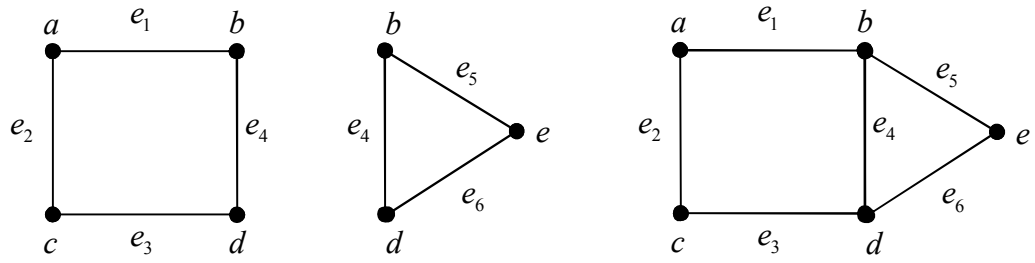
3.1.7. Graflar Üzerinde İşlemler

Tanım 3.1.7.1. G_1 ve G_2 grafları verilsin. G_1 ve G_2 graflarının birleşim grafı $G_1 \cup G_2$

şeklinde gösterilir. Bu durumda $G_1 \cup G_2 = \left(V\left(G_1 \cup G_2\right), E\left(G_1 \cup G_2\right)\right)$ olup bu birleşim grafının köşe ve kenar kümeleri,

$$V\left(G_1 \cup G_2\right) = V\left(G_1\right) \cup V\left(G_2\right)$$
$$E\left(G_1 \cup G_2\right) = E\left(G_1\right) \cup E\left(G_2\right)$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda G_1 ve G_2 graflarının birleşimi gösterilmiştir.



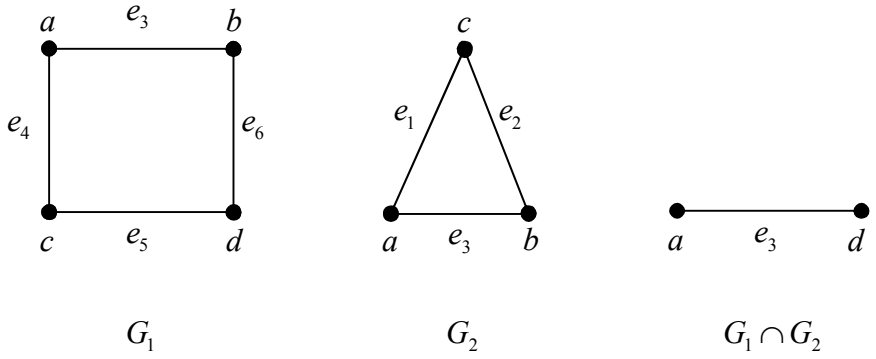
G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

Şekil 3.43.

Tanım 3.1.7.2. G_1 ve G_2 grafları, en az bir köşeleri ortak olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının kesişim grafı $G_1 \cap G_2$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $G_1 \cap G_2 = (V(G_1 \cap G_2), E(G_1 \cap G_2))$ olup bu kesişim grafının köşe ve kenar kümeleri

$$V\left(G_1 \cap G_2\right) = V\left(G_1\right) \cap V\left(G_2\right)$$
$$E\left(G_1 \cap G_2\right) = E\left(G_1\right) \cap E\left(G_2\right)$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda herhangi G_1 ve G_2 grafları ile bu grafların kesişim grafı gösterilmiştir.

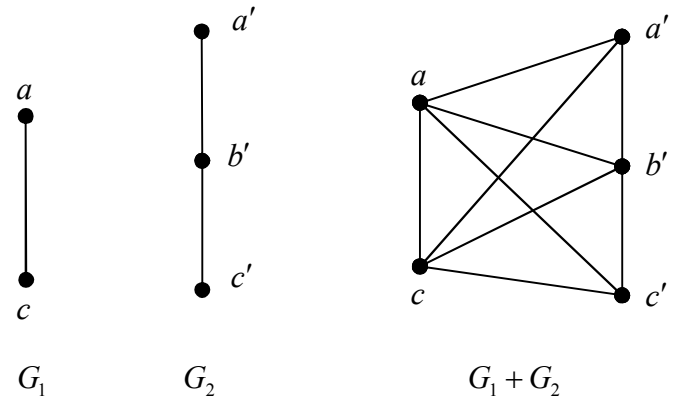


Şekil 3.44.

Tanım 3.1.7.3. G_1 ve G_2 grafları kesişimleri boş küme olan iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ toplam grafı olup köşe ve kenar kümeleri

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$
$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x_1x_2 : x_1 \in V(G_1),\ x_2 \in V(G_2)\}$$

biçiminde oluşturulur. Aşağıda iki grafın toplamı gösterilmiştir.

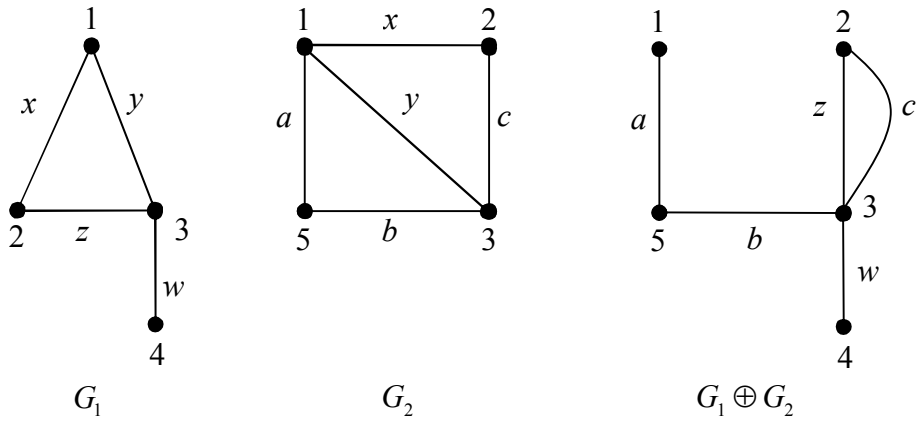


Şekil 3.45.

Tanım 3.1.7.4. $G_1(V_1, E_1)$ ve $G_2(V_2, E_2)$ grafları verilsin. G_1 ve G_2 graflarının halka toplamı $G_1 \oplus G_2$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $G_1 \oplus G_2 = (V(G_1 \oplus G_2), E(G_1 \oplus G_2))$ olup bu grafın köşe ve kenar kümeleri,

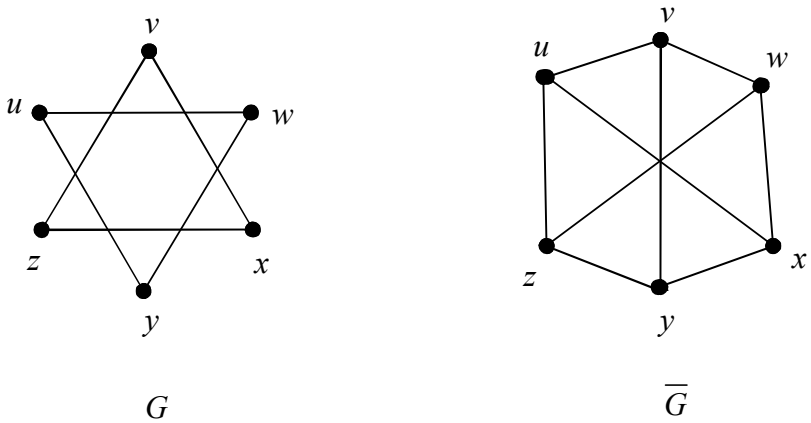
$$V(G_1 \oplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$
$$E(G_1 \oplus G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) - E(G_1) \cap E(G_2)$$

biçiminde oluşturulur.



Şekil 3.46.

Tanım 3.1.7.5. $G=(V,E)$ grafı verilsin. G grafında komşu olmayan köşelerin komşu yapılması ve komşu köşelerin de bağlı oldukları kenarların kaldırılması ile elde edilen basit $\overline{G}$ grafına G grafının *tamamlayıcısı (complement)* denir.

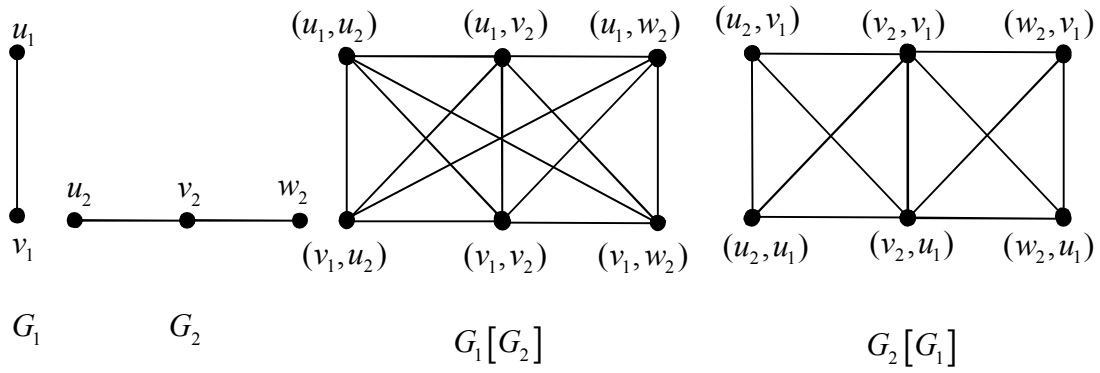


Şekil 3.47.

Tanım 3.1.7.6. $G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ grafları verilsin. Bu durumda $G_1[G_2]$ bileşke grafının köşeleri ve kenarları

$$V(G_1[G_2])=V_1\times V_2$$
$$E(G_1[G_2])=\{uv:\ u=(u_1,u_2)\ \text{ve}\ v=(v_1,v_2)\ \text{için}\ u_1\sim v_1\ \text{veya}\ [u_1=v_1\ \text{ve}\ u_2\sim v_2]\}$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda iki graf ve bu grafların bileşkeleri gösterilmiştir.



Şekil 3.48.

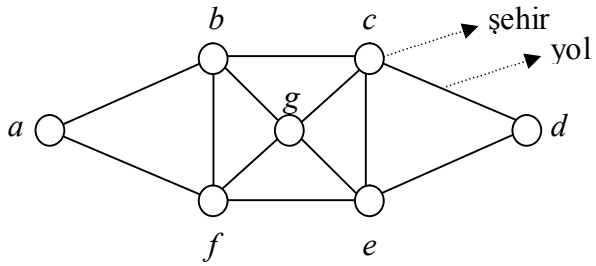
3.2. Euler ve Hamilton Grafları

Bu kısımda herhangi bir yol haritasındaki yol ve şehirlerle ilgili iki tip problemin çözümünü inceleyeceğiz. Bu problemler aşağıdaki gibidir:

Kâşif Problemi: Bir kâşif, çıkacağı turda tüm yollardan sadece bir kez geçip böylelikle her yolu görmek ve turun sonunda tura başladığı yere geri dönmek ister. Bu isteğe uygun bir tur düzenlenebilir mi?

Gezgin Problemi: Bir turist, turunu tüm şehirlerden sadece bir kez geçip her şehri görecek ve turunu başlangıç noktasına geri dönecek şekilde düzenleyebilir mi?

Örnek 3.2.1.



Şekil 3.49.

Bir kâşif turunu, tüm yollardan bir kez geçecek ve tura başladığı şehre geri dönecek biçimde *abcdefbgcegfa* veya *afgcdegbcefba* olarak planlayabilir. Bir turist de tüm şehirleri görecek ve tura başladığı şehirde turunu sonlandıracak şekilde *abcdegfa* veya *afedcgba* olarak turunu düzenleyebilir.

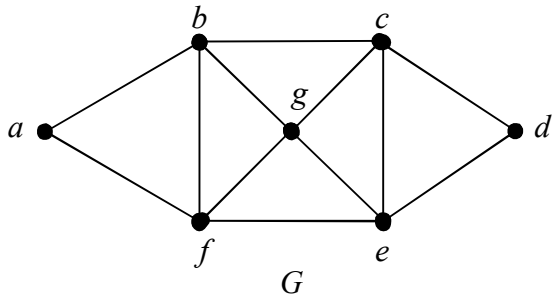
Görüldüğü gibi kâşif her yoldan tam bir kez geçerken bazı şehirlerden birden fazla geçebilir. Öte yandan turist de her şehirden tam bir kez geçerken bazı yollardan hiç geçmeyebilir.

Haritadaki şehirlerin köşeler ile, şehirleri bağlayan yolların da kenarlar ile temsil edildiği grafı göz önüne alalım. Bu takdirde kâşif problemi, grafın her kenarını içeren kapalı bir iz bulma iken, gezgin problemi de grafın her köşesini içeren bir döngü bulma problemidir.

Tanım 3.2.1. Her kenarı içerecek şekildeki bir kapalı izi kapsayan bağlantılı grafa *Euler graf* denir. Böyle bir ize de *Euler izi* denir.

Her köşeyi içerecek şekildeki bir döngüyü kapsayan bağlantılı grafa ise *Hamilton graf* denir. Böyle bir döngüye de da *Hamilton döngüsü* denir.

Örnek 3.2.2. Aşağıda verilen *G* grafının Euler graf ve Hamilton graf olup olmadığını inceleyelim.

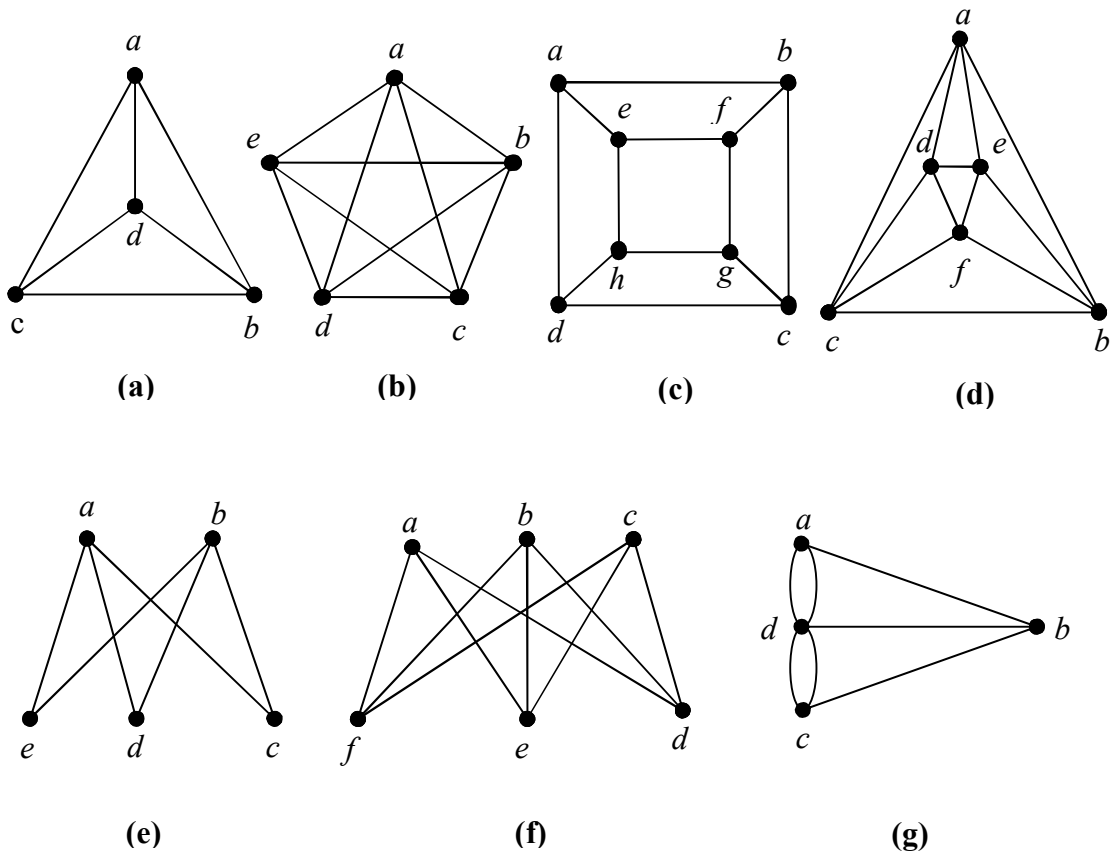


Şekil 3.50.

G grafında *abfgcbgedcefa* şeklinde her kenarı içeren bir kapalı iz olduğundan *G* grafı Euler graftır.

abcdegfa yolu her köşeyi içeren bir döngü olduğundan *G* grafı ayrıca Hamilton graftır.

Örnek 3.2.3. Aşağıda verilen grafların Euler graf ve Hamilton graf olup olmadığını inceleyelim.



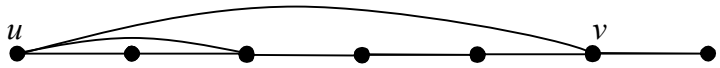
Şekil 3.51.

Tablo 3.2.

Graf	Euler	Euler izi	Hamilton	Hamilton döngüsü
(a)	Hayır	Yok	Evet	*abdca*
(b)	Evet	*abecadbcdea*	Evet	*abcdea*
(c)	Hayır	Yok	Evet	*abcdhgfea*
(d)	Evet	*acdfcbfebaeda*	Evet	*abefdca*
(e)	Hayır	Yok	Hayır	Yok
(f)	Hayır	Yok	Evet	*cdafbec*
(g)	Hayır	Yok	Evet	*badcb*

Lemma 3.2.1.1. *G* grafı verilsin. Eğer *G*'nin her köşesinin derecesi en az 2 ise bu durumda *G*, bir döngü kapsar.

İspat P, G grafındaki bir maksimal patikayı ve u da bu P patikanın uç köşesini göstersin. P, maksimal patika olduğundan uzatılamayacağı için u'nun tüm komşu köşeleri P'ye ait olmak zorundadır.



Şekil 3.52.

Ayrıca u'nun derecesi G'deki diğer tüm köşeler gibi en az 2 olduğundan ve P patikası maksimal olduğundan u köşesini yukarıda da gösterildiği gibi bir v köşesi ile komşu yapan en az bir kenar vardır. Bu takdirde uv kenarı P patikasının u'dan v'ye olan parçası ile bir döngü oluşturur. □

Teorem 3.2.1. Bir G grafının Euler graf olması için gerek ve yeter şart G'nin tüm köşelerinin derecelerinin çift olmasıdır.

İspat.

G grafı Euler graf olsun. Bu durumda G'de her kenarı içeren kapalı bir iz vardır. Bu izde her kenar sadece bir kez kullanıldığından geçtiği her köşenin derecesi 2'nin katı yani çift olacaktır.

G, tüm köşelerinin dereceleri çift olan bir graf olsun. G'nin Euler grafı olduğunu m kenar sayısı üzerinden tümevarımla gösterelim.

$m = 0$ için G, tek köşeli kapalı iz olduğundan Euler graftır.

m'den az kenarlı tüm G grafları Euler graf olsun.

Hipotezden G'nin tüm köşelerinin dereceleri çift olduğundan bu dereceler en az 2'dir. Bu takdirde Lemma 3.2.1.1.'den G, bir C döngüsü kapsar. G grafından bu C döngüsünün $E(C)$ kenarlarının silinmesi ile elde edilen grafı G' şeklinde gösterelim. C döngüsünde her köşede iki kenar olduğundan ve G'nin tüm köşelerinin dereceleri çift olduğundan G' grafının bütün bileşenlerindeki tüm köşe dereceleri çifttir. Dolayısıyla G' grafının bütün bileşenleri, m'den az kenarlı ve her bir bileşenin tüm köşeleri çift dereceli olduğundan hipotez gereği tüm bileşenler Euler graf olur. G'nin her kenarını içeren kapalı izini oluşturmak için ise aşağıdaki adımlar izlenir.

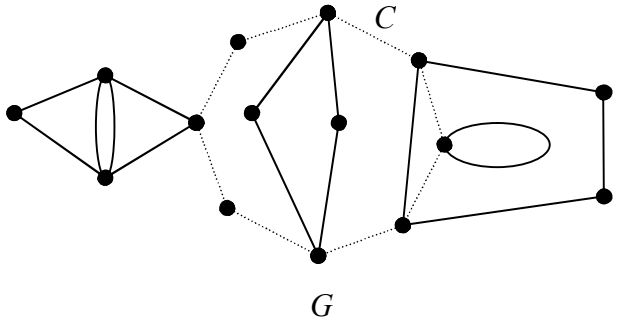
i) C döngüsü üzerinde herhangi bir v köşesi ile yola başlanır.

ii) C döngüsü üzerinde her kenardan bir kez geçecek şekilde G' grafının herhangi bir bileşenine ait döngü ile karşılaşıncaya kadar yola devam edilir.

iii) G' grafının bileşenindeki döngüye ait köşeye gelince bileşene ait döngü takip edilerek yolun başladığı C döngüsüne ait köşeye gelinir.

Gerektiği durumlarda iii) adımı uygulanarak C döngüsünün tüm kenarları takip edilecek şekilde oluşturulan kapalı Euler izi G grafının Euler olduğunu gösterir ki istenendir. □

Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki G grafı verilebilir.



Şekil 3.53.

Örnek 3.2.4. K_8 tam grafında her köşenin derecesi 7, yani tek olduğundan K_8 grafı Euler graf değildir.

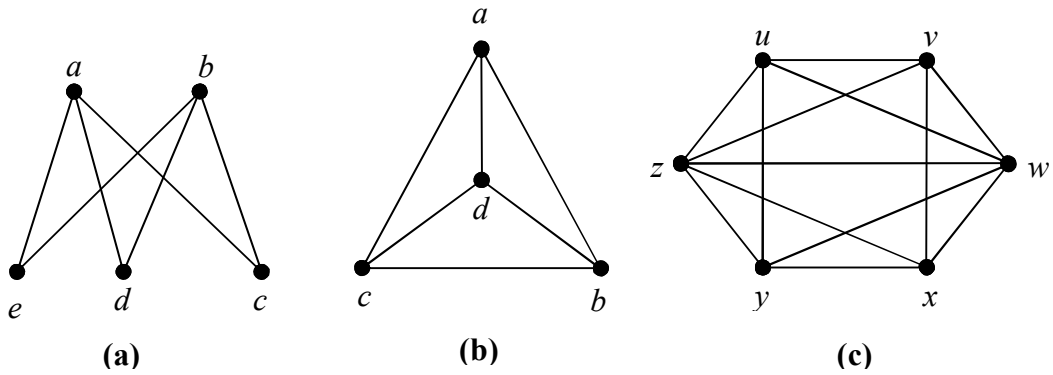
$K_{8,8}$ iki parçalı tam grafı 8. dereceden regüler olduğundan, yani tüm köşe dereceleri çift olduğundan Euler graftır**.**

C_8 döngüsünün tüm köşe dereceleri 2, yani çift olduğundan C_8, Euler graftır.

Tanım 3.2.2. Euler graf olması için sadece yola başladığı köşede yolunu bitirme şartını sağlamayan yani, her kenardan sadece bir kez geçecek şekilde kapalı değil de açık ize sahip olan grafa *yarı-Euler graf* denir. Böyle bir ize de *yarı-Euler izi* denir.

Teorem 3.2.2. G bağlantılı grafının yarı-Euler graf olması için gerek ve yeter şart tek dereceli 2 köşeye sahip olmasıdır.

Örnek 3.2.5. Aşağıdaki grafların yarı-Euler graf olup olmadıkları, eğer yarı-Euler graf iseler yarı-Euler izleri verilmiştir.



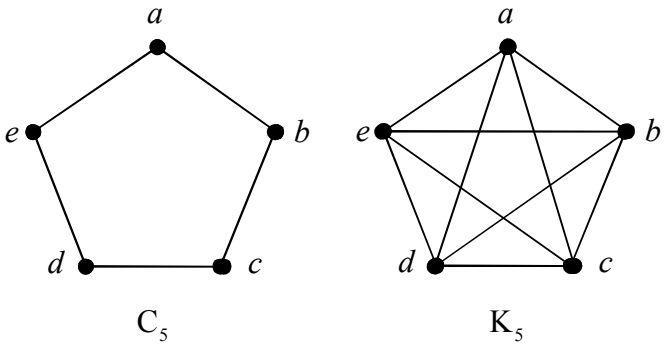
Şekil 3.54.

(a) grafında tek dereceli olan köşe sayısı 2 (a ve b köşeleri) olduğundan (a), yarı-Euler graftır. Yarı-Euler izlerinden biri *aebdacb* açık izidir.

(b) grafında tek dereceli olan köşe sayısı $4 \neq 2$ olduğundan (b) grafı yarı-Euler graf değildir.

(c) grafında tek dereceli olan köşe sayısı 2 (z ve w) olduğundan (c) grafı yarı-Euler graftır. *wvxzvuyzuwyxwz* şeklinde yarı-Euler izi bulunabilir.

Her köşesinden geçecek şekilde bir döngüye sahip olan grafları Hamilton graf olarak tanımlamıştık. İlk bakışta verilen bir grafın Hamilton olup olmadığını Euler graflardaki gibi bir kriter yardımıyla belirlenebileceği düşünülebilir. Fakat böyle bir kriter Hamilton graflar için mevcut değildir. Örneğin; *n*'in her değeri için C_n döngüsü, $n \geq 3$ için K_n tam grafı Hamilton graftır.



Şekil 3.55.

Teorem 3.2.3. (Ore's Teorem) $n \geq 3$ olmak üzere *G*, *n* köşeli basit bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde komşu olmayan her *u* ve *v* köşeleri için

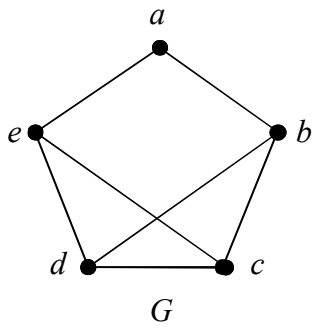
$$\text{der}(v) + \text{der}(w) \geq n$$

ise *G* grafı Hamilton graftır.

Örnek 3.2.6. Aşağıda Şekil 3.56. ile verilen grafta komşu olmayan herhangi iki köşe göz önüne alınırsa

$$\text{der}(v) + \text{der}(w) \geq 5$$

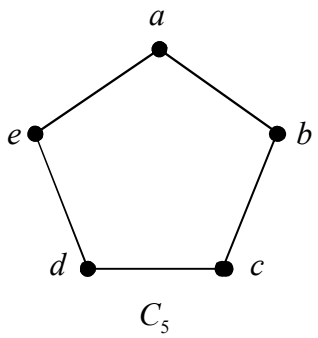
olduğundan Ore Teoremi gereği *G* grafı Hamilton graftır.



Şekil 3.56.

Teorem 3.2.3.'ün tersi doğru değildir. Yani her Hamilton graf Ore Teoremi'ni sağlamak zorunda değildir.

Örnek 3.2.7. C_5 döngüsü Hamilton graftır. Fakat C_5'de komşu olmayan her iki köşenin dereceleri toplamı 4, yani toplam köşe sayısından küçüktür. Dolayısıyla C_5 grafının Hamilton graf olması Ore Teoremi'ni sağlamasını gerektirmez.



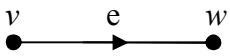
Şekil 3.57.

3.3. Yönlendirilmiş Graflar (Digraflar)

Tanım 3.3.1. Köşeler kümesi ile elemanları sıralı köşe çifti olan kenarlar kümesinden oluşan grafa *yönlendirilmiş graf (directed graph)* ya da kısaca *digraf* denir. Kenarlar, sıralı köşe çifti ile oluşturulduğundan yönlü olurlar.

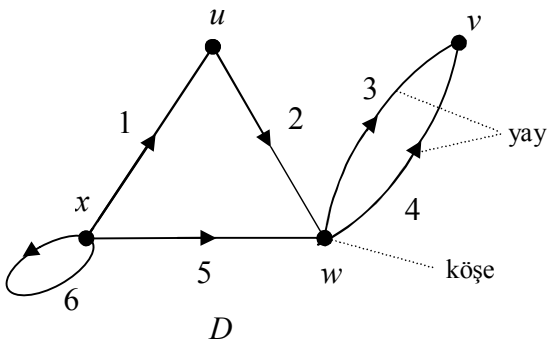
Herhangi bir digrafta yer alan yönlü kenarlara *yay (arc)* denir. Yayı oluşturan köşe çiftleri yayın *uç noktaları (endpoints)* olarak adlandırılır. Bu uç noktalardan ilkine *yayın kuyruğu* veya *başlangıcı*, ikincisine ise *yayın başı* veya *bitişi* adı verilir.

Bir yay ile bağlı iki köşeye *komşu köşeler (adjacent vertices)* denir. Örneğin; Şekil 3.58.'de verilen graf için *v* ve *w* köşeleri komşu köşelerdir.



Şekil 3.58.

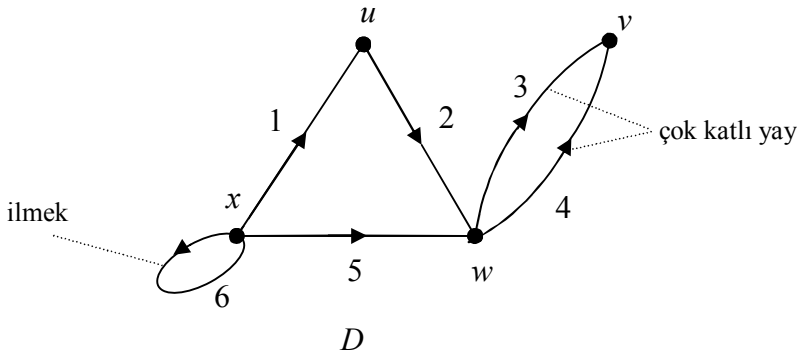
Örnek 3.3.1. Aşağıda köşeler kümesi $\{u,v,w,x\}$ ve yaylar kümesi $\{1,2,3,4,5,6\}$ olan D digrafı verilmiştir.



Şekil 3.59

Herhangi bir digraftaki yaylar, yönlerine göre köşe çiftleri ile de gösterilebilirler. Buna göre yukarıdaki D digrafında 1 yayı xu, 2 yayı uw, 3 ve 4 yayları wv, 5 yayı xw ve 6 yayı xx şeklinde gösterilir.

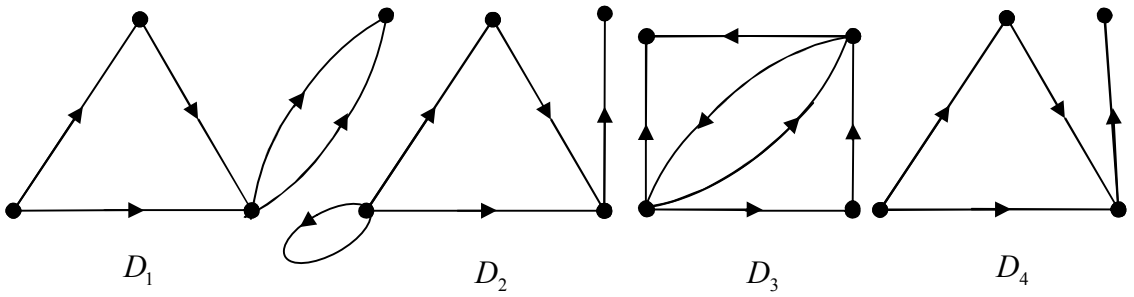
Tanım 3.3.2. Bir digrafta iki veya daha fazla yay, aynı iki köşeye aynı yön ile bağlı ise bu yaylara *çok katlı yay (multiple arcs)* denir. Başlangıcı ve bitişi aynı olan yaylara ise *ilmek(loop)* denir. Örneğin, aşağıda hem çok katlı yay hem de ilmek içeren bir D digrafı gösterilmiştir.



Şekil 3.60

Tanım 3.3.3. Çok katlı yaylara ve ilmeğe sahip olmayan digraflara *basit digraf (simple digraph)* denir.

Örnek 3.3.2. Aşağıda Şekil 3.61. ile verilen digrafların basit olup olmadıklarını inceleyelim.



Şekil 3.61.

D_1 digrafı çok katlı yay içerdiğinden D_2 digrafı da ilmek içerdiğinden basit digraf değillerdir. D_3 ve D_4 digrafları ne çok katlı kenar ne de ilmek içerdiklerinden basit digraflardır.

3.3.1. Digraflarda İzomorfizm

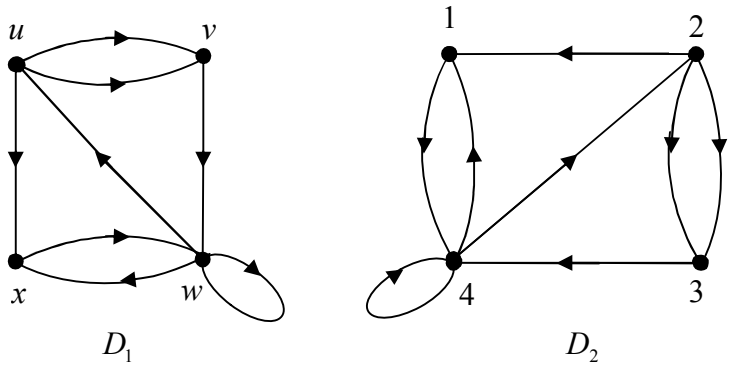
Tanım 3.3.1.1. D_1 ve D_2 digrafları verilsin. Eğer D_1 ve D_2 aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu digraflara *izomorf digraflar* denir.

i) $|V(D_1)| = |V(D_2)|$

ii) $|E(D_1)| = |E(D_2)|$

iii) $f : V(D_1) \to V(D_2)$ dönüşümü komşulukları koruyacak şekilde 1-1 ve örten bir dönüşüm olmalıdır. Yani; $e = u_1v_1$'in D_1 digrafında u_1'den v_1'e bağlı bir yay olması için gerek ve yeter şart $f(u_1)f(u_2)$'nin de D_2 digrafında $f(u_1)$'den $f(u_2)$'ye bir yay olmasıdır.

Örnek 3.3.1.1. Aşağıda birbirine izomorf D_1 ve D_2 digrafları verilmiştir.

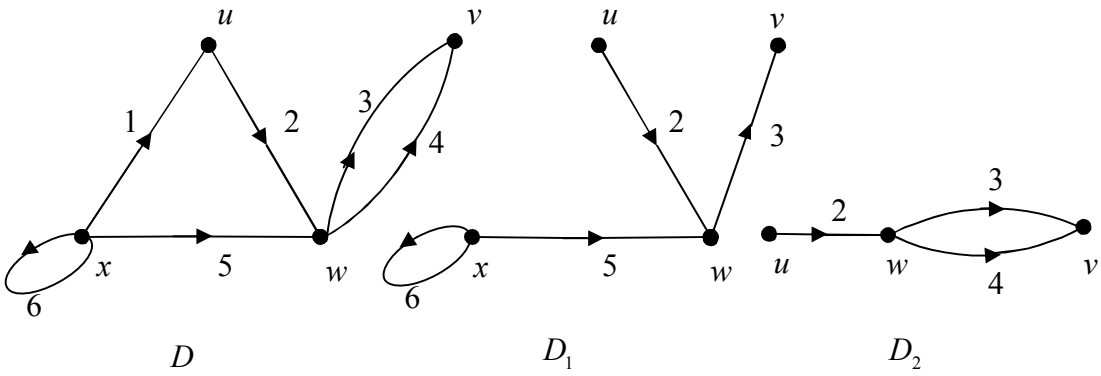


Şekil 3.62.

3.3.2. Alt Digraflar

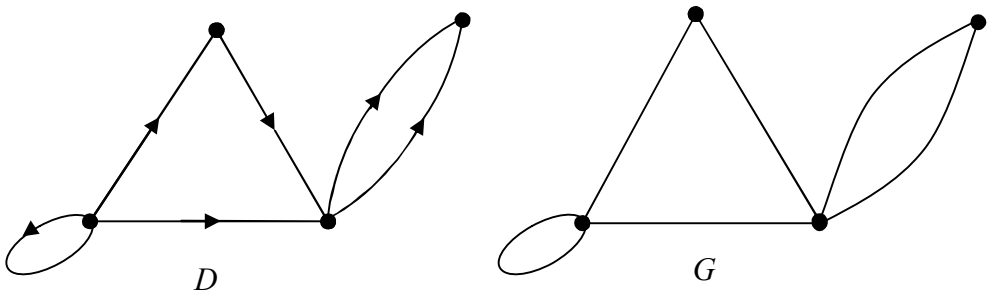
Tanım 3.3.2.1. Bir *G* digrafının bazı köşeleri ve bazı yayları kullanılarak oluşturulan digrafa *G*'nin *alt digrafı (subdigraph)* denir.

Örneğin; aşağıda bir *D* digrafı ve bu digrafın iki farklı alt digrafı verilmiştir.



Şekil 3.63.

Tanım 3.3.2.2. Bir digraftaki yayların oklarının kaldırılması ile elde edilen yeni grafa digrafın *kapsadığı graf (underlying graph)* denir.

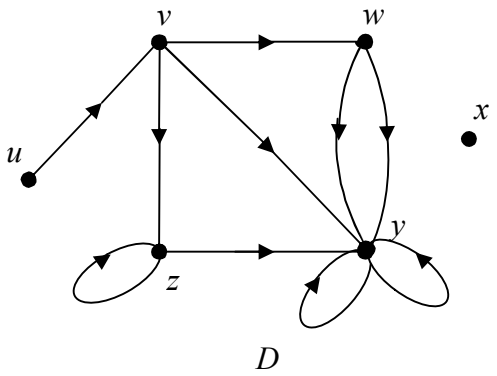


Şekil 3.64.

Tanım 3.3.2.3. D digrafı ve $v \in V(D)$ köşesi verilsin. v köşesinden bağlı (yani v köşesinin kuyruk olduğu) yayların sayısına v'nin *dış-derecesi (outdegree)*; v'ye bağlı (yani v köşesinin baş olduğu) yayların sayısına da v'nin *iç-derecesi (indegree)* denir. v köşesinin dış-derecesi $d^+(v)$ ile iç-derecesi ise $d^-(v)$ ile gösterilir.

Bir digrafta her bir ilmek karşılık geldiği köşe için 1 tane iç-derece ve 1 tane dış-derece olarak sayılır.

Örnek 3.3.2.1. Aşağıdaki D digrafında her bir köşenin iç ve dış derecelerini bulalım.



D

Şekil 3.65.

$\mathrm{d}^+(u)=1 \quad \mathrm{d}^+(v)=3 \quad \mathrm{d}^+(w)=2 \quad \mathrm{d}^+(x)=0 \quad \mathrm{d}^+(y)=2 \quad \mathrm{d}^+(z)=2$

$\mathrm{d}^-(u)=0 \quad \mathrm{d}^-(v)=1 \quad \mathrm{d}^-(w)=1 \quad \mathrm{d}^-(x)=0 \quad \mathrm{d}^-(y)=6 \quad \mathrm{d}^-(z)=2$

şeklinde olur. Ayrıca D digrafı için

Dış-derece dizisi $=(0,1,2,2,2,3)$, İç-derece dizisi $=(0,0,1,1,2,6)$

olur. D digrafının toplam yay sayısı 10, dış-dereceler toplamı 10 ve iç-dereceler toplamı 10'dur.

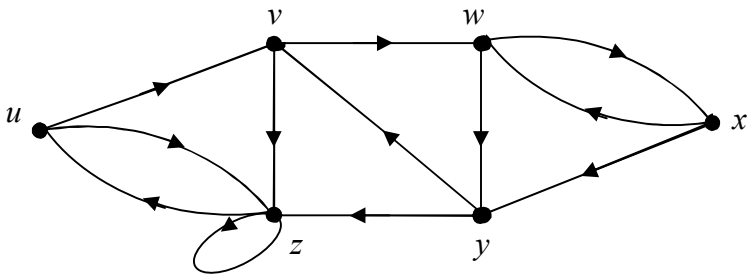
Teorem 3.3.2.1. Herhangi bir n köşeli, q tane yaylı ve köşeler kümesi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olan digrafta dış-dereceler veya iç-dereceler toplamı, digrafın toplam yay sayısına eşittir. Yani;

$$\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = q$$

dır.

Tanım 3.3.2.4. Bir digrafta $uv, vw, wx, \ldots, yz$ şeklinde k tane yayların dizisine k *uzunluğunda bir yol* denir. Tüm yayların farklı olduğu yola *iz (trail)* denir. Hem tüm yayların hem de tüm köşelerin farklı olduğu yola ise *patika (path)* denir.

Örnek 3.3.2.2. Aşağıda verilen D digrafını göz önüne alalım.



D

Şekil 3.66.

vwxyvwyzzu yolu, *v*'den *u*'ya uzunluğu 9 olan bir yoldur.

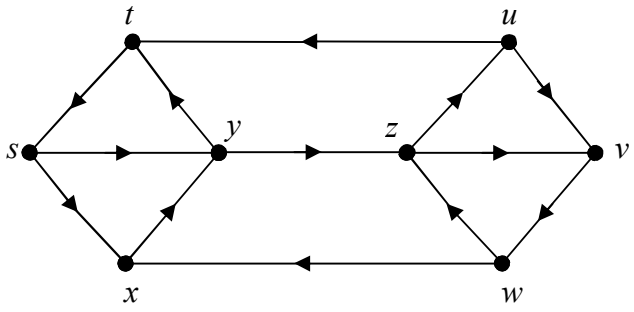
uvwyvz yolunda her bir yay bir kez kullanıldığından bu yol izdir.

vwxyz yolunda her bir yay ve köşe bir kez kullanıldığından bu yol patikadır.

Tanım 3.3.2.5. Bir digrafta başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan yola *kapalı yol*, tüm yayların farklı olduğu kapalı yola *kapalı iz (closed trail)*, uç köşeleri hariç ortadaki tüm köşelerin farklı olduğu kapalı ize ise *döngü (cycle)* denir.

Yukarıdaki Örnek 3.3.2.2. ile verilen D digrafında *uvwyvzu* yolu iz, *uvwxyzu* yolu da döngüdür.

Örnek 3.3.2.3.



H

Şekil 3.67.

H digrafında t köşesinden w köşesine tüm patikalar;

tsxyzuvw, *tsxyzw*, *tsyzuvw*, *tsyzvw*

dir. *w* köşesinden *t* köşesine olan tüm patikalar ise;

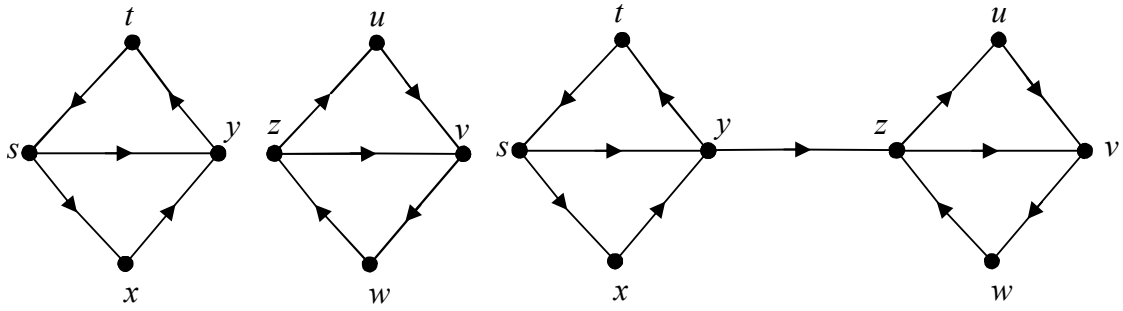
wxyt, *wzut*, *wxyzut*

şeklindedir. Fakat *t* ve *w* köşelerini kapsayan bir döngü yoktur.

Tanım 3.3.2.6. Bir digrafın kapsadığı graf bağlantılı ise digrafa *zayıf bağlantılı (weakly connected)* ya da kısaca *bağlantılı* denir. Aksi halde *bağlantısız (unconnected)* denir.

Bir digrafta her bir köşe çifti arasında en az bir patika mevcut ise bu digrafa *kuvvetli bağlantılı (strongly connected)* denir.

Örnek 3.3.2.4. Aşağıdaki digrafların bağlantılılığını ve kuvvetli bağlantılılığını inceleyelim.



Şekil 3.68.

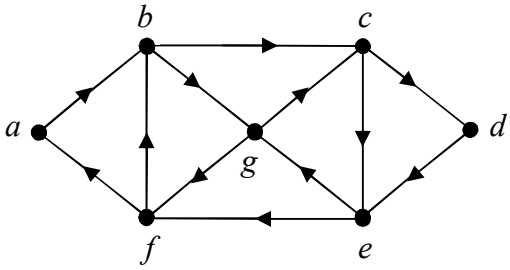
G digrafının kapsadığı graf bağlantısız olduğundan *G* digrafı da bağlantısızdır. *H* digrafının kapsadığı graf bağlantılı olduğundan *H*, bağlantılıdır; fakat kuvvetli bağlantılı değildir. Çünkü örneğin *z*'den *y*'ye bir patika mevcut değildir. Öte yandan Örnek 3.3.2.3. ile verilen *H* digrafının her bir köşe çifti arasında bir patika olduğundan *H*, kuvvetli bağlantılıdır.

3.3.3. Euler ve Hamilton Digrafları

Tanım 3.3.3.1. Bir *G* digrafında grafın her bir yayını içeren kapalı bir iz varsa *G* digrafına *Euler digraf* denir. Böyle bir ize de *Euler izi* denir.

Bir *G* digrafında grafın her köşesini içeren döngü varsa *G* digrafına *Hamilton digraf* denir. Böyle bir döngüye de *Hamilton döngüsü* denir.

Örnek 3.3.3.1.



(a)

Şekil 3.69.

(a) digrafında *abgfbcegcdefa* şeklinde her yayı içeren kapalı bir yol bulunabildiğinden (a) digrafı Euler digraftır. Ayrıca (a) digrafında *abcdegfa* yolu her köşeyi içeren bir döngü olduğundan (a) Hamilton digraftır.

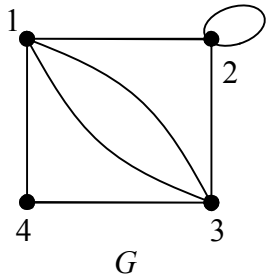
Teorem 3.3.3.1. *G* bağlantılı digrafının Euler digraf olması için gerek ve yeter şart *G*'nin her köşesinin iç-derecesi ile dış-derecesinin eşit olmasıdır.

Teorem 3.3.3.2. *G* Euler digrafı, herhangi iki yayı ortak olmayan döngülere ayrılabilir.

3.4. Grafların Matrisler Yardımıyla Temsili

Tanım 3.4.1. *G*, köşeleri $1,2,3,\ldots,n$ ile etiketlendirilmiş bir graf olsun. Bu durumda *i.* satır *j.* sütun elemanı, *G* grafında *i.* köşe ile *j.* köşeyi bağlayan kenarların sayısı olarak tanımlanan $n \times n$ matrise *G* grafının *komşuluk matrisi (adjacency matrix)* denir ve bu matris $A(G)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.4.1. Aşağıda Şekil 3.70. ile verilen grafın komşuluk matrisini oluşturalım.



G

Şekil 3.70.

1 ve 2 köşeleri bir kenar ile bağlı olduğundan komşuluk matrisinin $a_{1,2}$ ve $a_{2,1}$ elemanları 1'dir.

1 ve 3 köşeleri iki kenar ile bağlı olduğundan matrisin $a_{1,3}$ ve $a_{3,1}$ elemanları 2'dir.

1 ve 4 köşeleri bir kenar ile bağlı olduğundan matrisin $a_{1,4}$ ve $a_{4,1}$ elemanları 1'dir.

2 köşesi kendisine bir kenar ile bağlı olduğundan matrisin $a_{2,2}$ elemanı 1'dir.

2 ve 4 köşelerini bağlayan kenar olmadığından matrisin $a_{2,4}$ ve $a_{4,2}$ elemanları 0'dır.

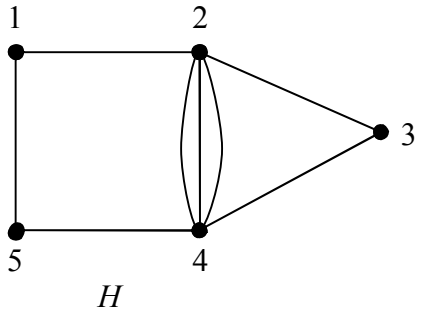
3 ve 4 köşelerini bağlayan bir kenar olduğundan matrisin $a_{3,4}$ ve $a_{4,3}$ elemanları 1'dir.

1,3 ve 4 köşelerini kendilerine bağlayan kenar olmadığından $a_{1,1}, a_{3,3}$ ve $a_{4,4}$ elemanları 0'dır. Sonuç olarak G grafının komşuluk matrisi;

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.4.2. Aşağıda H grafı ve H grafına karşılık gelen $A(H)$ komşuluk matrisi verilmiştir.



H

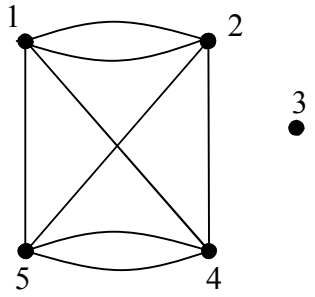
$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.71.

Komşuluk matrisinden yararlanılarak graflar oluşturulabilir. Örneğin,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini komşuluk matrisi olarak kabul eden graflardan biri



Şekil 3.72.

şeklinde verilebilir.

Komşuluk matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Bir grafın komşuluk matrisi esas köşegene göre simetriktir.

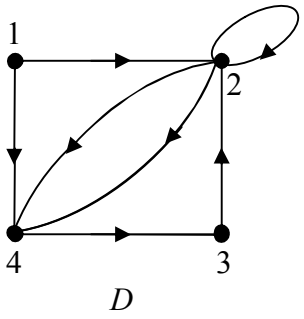
ii) İlmek içermeyen grafa ait komşuluk matrisinde esas köşegen elemanları sıfırdır.

iii) Komşuluk matrisinin herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının toplamı, bu satıra (veya sütuna) karşılık gelen köşenin derecesini verir. Örneğin, Şekil 3.71. ile verilen H grafında 2 köşesinin derecesi $A(H)$ komşuluk matrisinin 2. satır (veya 2. sütun) elemanlarının toplamı kadardır.

Benzer şekilde yönlendirilmiş graflarda da komşuluk matrisi tanımlanabilir.

Tanım 3.4.2. D, $1,2,3,\ldots,n$ ile etiketlendirilmiş n köşeli bir digraf olsun. Bu durumda *i.* satır *j.* sütun elemanı, D digrafında *i.* köşeden *j.* köşeye olan tüm yayların sayısı olarak tanımlanan $n \times n$ matrise D digrafının *komşuluk matrisi (adjacency matrix)* denir. Bir digrafın komşuluk matrisi $A(D)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.4.3. Aşağıda D digrafı ve bu digrafa karşılık gelen komşuluk matrisi gösterilmiştir.

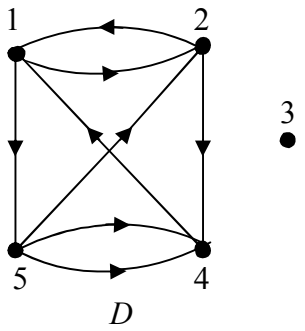


$$A(D)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Şekil 3.73.

Graflardakine benzer şekilde digraflar için de verilen herhangi bir M matrisini komşuluk matris kabul eden *D* digrafı çizilebilir. Örneğin,

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&2&0\end{bmatrix}$$



Şekil 3.74.

olur.

Digraflara ait komşuluk matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Herhangi bir digrafta komşuluk matrisi esas köşegene göre simetrik olmak zorunda değildir.

ii) İlmek içermeyen herhangi bir digrafın komşuluk matrisinde esas köşegen elemanları sıfırdır.

iii) Bir digrafa ait komşuluk matrisinde herhangi bir satırın elemanları toplamı, bu satıra karşılık gelen köşenin dış-derecesine; herhangi bir sütünun elemanları toplamı da bu sütuna karşılık gelen köşenin iç-derecesine eşittir. Yukarıdaki Örnek 3.4.3.'deki *D* digrafı için

$$d^{+}(2)=\sum 2.\ satır\ elemanları,\ \ d^{-}(2)=\sum 2.\ sütun\ elemanları$$

olarak bulunur.

Bir grafta ya da digrafta komşuluk matrisi yardımıyla yolların varlığını ve uzunluğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.4.1. *D*, köşeleri $1,2,3,\ldots,n$ şeklinde etiketlendirilmiş bir digraf, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve *A* da *D* digrafına karşılık gelen komşuluk matrisi olsun. Bu durumda digrafın *i* köşesinden *j* köşesine uzunluğu *k* olan tüm yolların sayısı, A^k matrisinin *i.* satır *j.* sütunda yer alan elemana karşılık gelir.

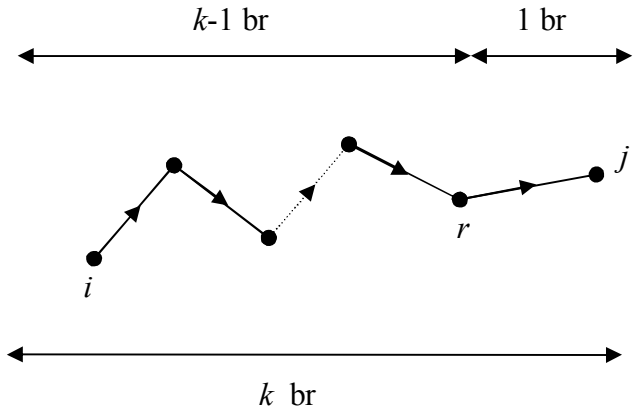
İspat İspatı *n* yol uzunluğu üzerinden tümevarımla yapalım.

$n=1$ için digrafın *i* köşesinden *j* köşesine uzunluğu 1 olan yolların sayısı, *A* komşuluk matrisinin *i.* satır ve *j.* sütun elemanına eşittir.

$n=k-1$ için digrafın *i* köşesinden *j* köşesine uzunluğu $k-1$ olan tüm yolların sayısı, A^{k-1} matrisinin *i.* satır *j.* sütununda yer alan elemana eşit olsun.

$n=k$ için teoremin ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

i köşesinden *j* köşesine uzunluğu *k* olan herhangi bir yol alalım. Öyle ki *i* köşesi, *j* köşesine komşu ve *j*'nin 1 kenar uzaklığındaki *r* köşesine uzunluğu $k-1$ olan yol ile bağlansın.



Şekil 3.75.

Hipotezden *i* köşesinden *r* köşesine uzunluğu $k-1$ olan yolların sayısı, A^{k-1} matrisinin *i.* satır *r.* sütun elemanı kadardır. Bu yolların sayısını a_{ir}^{k-1} şeklinde gösterelim. Ayrıca benzer düşünce ile *r* köşesinden *j* köşesine uzunluğu 1 olan yolların sayısı a_{rj} kadar olur. Dolayısıyla *r* köşesinden geçecek şekilde *i*'den *j*'ye uzunluğu *k* olan yolların sayısı $a_{ir}^{k-1}a_{rj}$ kadar olur. Sonuç olarak *i*'den *j*'ye uzunluğu *k* olan tüm yolların sayısı;

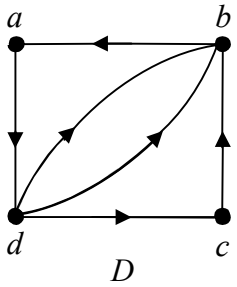
$$\text{Toplam yol}=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i \text{ köşesinden geçen tüm yolların sayısı}\right)$$
$$= a_{i1}^{k-1}a_{1j} + a_{i2}^{k-1}a_{2j} + \ldots + a_{ir}^{k-1}a_{rj} + \ldots + a_{in}^{k-1}a_{nj}$$

olur. Matrislerin çarpımı tanımından bu toplam $A^{k-1}A = A^k$ olur. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{k-1} & a_{i2}^{k-1} & \ldots & a_{ir}^{k-1} & \ldots & a_{in}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & a_{ij}^{k} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

olur. □

Örnek 3.4.4. Aşağıdaki *D* digrafını inceleyelim.



Şekil 3.76.

D digrafında, her bir köşe çifti arasında uzunluğu 1 olan yolların sayısını bulalım.

a köşesinden *b* ve *c* köşelerine uzunluğu 1 olan yol sayısı 0 iken *d* köşesine ise 1'dir. *b* köşesinden *a* köşesine söz konusu sayı 1 iken *c* ve *d* köşelerine 0'dır. *c*'den *b*'ye 1 tane uzunluğu 1 olan yol varken diğer köşelere giden böyle bir yol yoktur. Son olarak *d* köşesi için *d*'den *b*'ye 2 tane, *c*'ye 1 tane yol varken *a*'ya giden böyle bir yol yoktur. Ayrıca *D* digrafı ilmek içermediğinden tüm köşeler için kendilerine giden söz konusu yol sayısı 0'dır. Tüm değerleri aşağıdaki gibi gösterirsek;

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olacak şekilde D digrafına karşılık gelen A komşuluk matrisi elde edilir.

Benzer inceleme ile D digrafında bu kez her bir köşe çifti arasında uzunluğı 2 olan yolların sayısını bulalım. O zaman

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olacak şekilde D digrafına karşılık gelen A^2 komşuluk matrisi elde edilir. Buradan yukarıdaki teoreme göre;

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda elemanları, uzunluğu üç olan yolların sayısını gösteren matris de;

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilebilir.

Herhangi bir digrafın komşuluk matrisi yardımıyla kuvvetli bağlantılı olup olmadığı belirlenebilir.

Teorem 3.4.2. Köşeleri $1,2,3,\ldots,n$ şeklinde etiketlendirilmiş D digrafına karşılık gelen A komşuluk matrisi ve $B = A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ matrisi verilsin. Bu takdirde D digrafının

kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin köşegen olmayan elemanlarının pozitif (yani $i \neq j$ için $b_{ij} > 0$) olmasıdır.

İspat

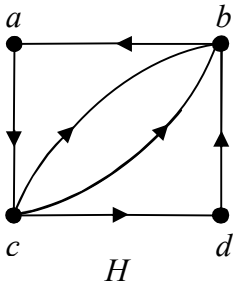
Kuvvetli bağlantılı D digrafı verilsin. D, kuvvetli bağlantılı olduğu için her bir köşesinden farklı her bir köşeye en az bir patika vardır. Öte yandan D, n köşeli olduğundan böyle bir patika en fazla n-1 uzunluğundadır. Ayrıca D'nin kuvvetli bağlantılılığı en az bir $k \leq n-1$ uzunluğu için farklı i ve j köşeleri arasında bir patika olmasını gerektirir. Bu yolların sayısı; A^k matrisinin a_{ij}^k elemanına karşılık geldiğinden $a_{ij}^k > 0$ 'dır. Bu takdirde;

$$B = A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots A^{n-1}$$

matrisi için $b_{ij} > 0 \ \ (i \neq j)$ olur ki istenendir.

B matrisinin köşegen olmayan her bir elemanı pozitif olsun. Bu takdirde $B = A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots A^{n-1}$ olduğundan en az bir $k \leq n-1$ için $a_{ij}^k > 0$ 'dır. Dolayısıyla $i \neq j$ için i köşesinden j köşesine en fazla $n-1$ uzunluğunda yol olduğundan D digrafı kuvvetli bağlantılıdır. □

Örnek 3.4.5. Aşağıdaki H digrafının kuvvetli bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.



Şekil 3.77.

Digraflarda tanımlanan komşuluk matrisi bulma metoduna göre; verilen H digrafının A komşuluk matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris yardımıyla yardımıyla *H* digrafında 1,2 ve 3 uzunluğundaki patikaları gösteren A, A^2 ve A^3 matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Digrafta birbirinden farklı her *i,j* köşe çifti, matrislerin köşegen üzerinde olmayan elemanlarına karşılık gelmektedir. Matrislerin en az birinde bu *i,j* köşe çiftinin arasındaki yol sayısını temsil eden eleman sıfırdan farklı ise verilen digraf kuvvetli bağlantılı olur.

Sonuç olarak *H* digrafı bu şartı sağladığından kuvvetli bağlantılıdır. Yani;

$$B = A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin köşegen üzerinde olmayan her elemanı pozitif olduğundan *H* digrafı kuvvetli bağlantılıdır.

Örnek 3.4.6.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini komşuluk matrisi kabul eden digrafın kuvvetli bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

Matris 5×5 tipinde olduğundan digraf 5 köşelidir. Dolayısıyla maksimum 4 uzunluğunda patika vardır. O halde elemanları digrafın farklı iki köşe çifti arasındaki yolların sayısını (uzunluğu sırasıyla 2,3 ve 4 olan) temsil eden A^2, A^3 ve A^4 matrisleri

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu takdirde $B=A+A^2+A^3+A^4$ matrisi de

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&1&2&2\\1&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&2&2\end{bmatrix}$$

olur. *B* matrisinin köşegen üzerinde olmayan tüm elemanları sıfırdan büyük olduğundan komşuluk matrisinin karşılık geldiği digraf kuvvetli bağlantılıdır.

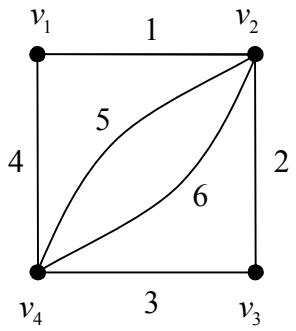
Bir grafın (digrafın) komşuluk matrisi, köşelerin komşuluk ilişkilerinden elde edilirken, incidence matrisi ise köşelerin kenarlarla (veya yaylarla) olan ilişkisinden elde edilir.

Tanım 3.4.3. *G* grafı, köşeleri $v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n$ ile kenarları ise $1,2,3,\ldots,m$ ile etiketlendirilmiş ve ilmek içermeyen bir graf olsun. O zaman bu şekilde tanımlanan *G* grafına ait $M=\left[m_{ij}\right]$ matrisinin *i.* satır ve *j.* sütun elemanı

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & i.\text{ köşe } j.\text{ kenar ile bağlı ise}\\ 0; & \text{aksi halde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $M(G)$ matrisine *G* grafının *incidence matrisi* denir.

Örnek 3.4.7. Aşağıda 4 köşeli ve 6 kenarlı G grafını



G

Şekil 3.78.

göz önüne alalım. v_1 köşesi 4 kenarı ile bağlı olduğundan matrisin 1. satır 4. sütun elemanı 1'dir. v_2 köşesi 4 kenarı ile bağlı olmadığından matrisin 2. satır 4. sütun elemanı 0'dır. Benzer şekilde tüm köşe ve kenar bağlılıkları incelenirse G grafının incidence matrisi,

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.4.1.

i) Grafta bir kenar, iki köşe ile bağlı olduğundan incidence matrisin her bir sütununda iki tane 1 vardır.

ii) Incidence matriste bir satırın toplamı, o satırın karşılık geldiği köşenin derecesini verir.

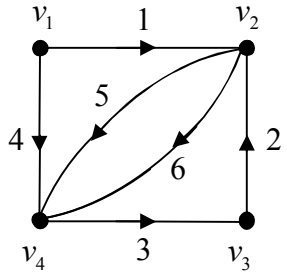
Yönlendirilmiş graflar için incidence matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.4.5. D digrafı ilmek içermeyen, köşeleri $v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n$ ile kenarları ise $1,2,3,\ldots,m$ ile etiketlendirilmiş bir digraf olsun. O zaman bu şekilde tanımlanan G digrafına ait $M=\left[m_{ij}\right]$ matrisinin i. satır ve j. sütun elemanı

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & j \text{ yayı } i \text{ köşesinden bağlı ise} \\ -1, & j \text{ yayı } i \text{ köşesine bağlı ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $M(D)$ matrisine D digrafının *incidence matrisi* denir.

Örnek 3.4.7. Aşağıda verilen D digrafını göz önüne alalım.



D

Şekil 3.79.

4 yayı v_1 köşesinden bağlı olduğundan matrisin 1. satır 4. sütun elemanı 1'dir. 1 yayı v_2 köşesine bağlı olduğundan matrisin 2. satır 1. sütun elemanı -1'dir. 1 yayı v_3 köşesine bağlı olmadığından 3. satır 1. sütun elemanı 0 olur. Benzer şekilde devam edilirse tüm köşe ve kenar bağlılıkları incelendiğinde D digrafının incidence matrisi;

$$M(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.4.2. İlmek içermeyen bir digrafa ait incidence matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Her bir sütununda bir tane 1 ve bir tane -1 vardır. Çünkü her bir yay bir köşeden diğerine bağlıdır.

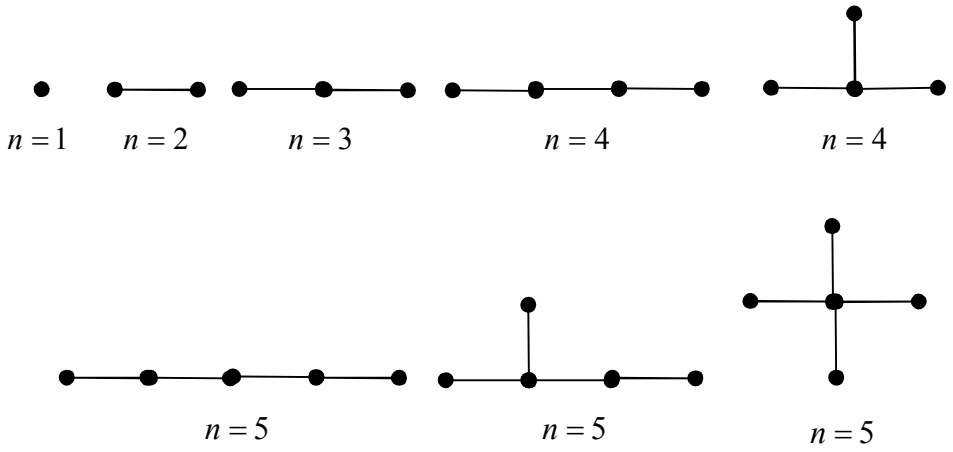
ii) Herhangi bir satırındaki "1"lerin toplam sayısı, o satıra karşılık gelen köşenin dış-derecesini verir.

iii) Herhangi bir satırındaki "-1"lerin toplam sayısı, o satıra karşılık gelen köşenin iç-derecesini verir.

3.5. Ağaçlar

Tanım 3.5.1. Döngü içermeyen graflara *orman (forest)* denir. Hem döngü içermeyen hem de bağlantılı olan graflara ise *ağaç (tree)* denir ve T ile gösterilir.

Aşağıda maksimum 5 köşeli (birbirine izomorf olmayan) ağaçlar gösterilmiştir.



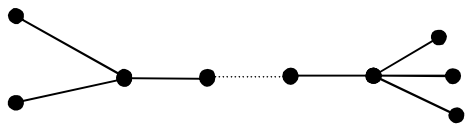
Şekil 3.80.

Tanım 3.5.2. Bir ağaçta derecesi 1 olan köşeye *yaprak (leaf)* denir.

Teorem 3.5.1. $G=(V,E)$ bağlantılı grafı verilsin. G grafının ağaç olması için gerek ve yeter şart G'nin her kenarının köprü olmasıdır. (Yani her $e \in E(G)$ için $G-e$ grafı iki bileşenli olmalıdır.)

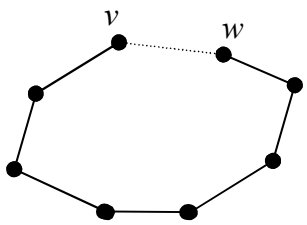
n köşeli her ağaç $n-1$ kenara sahiptir.

Bir ağaçta herhangi iki köşe arasında sadece 1 tane patika vardır ki bu patika komşu köşeleri birbirine bağlayan kenardır. Bu kenar kaldırılırsa köşeler arasında patika olmaz.



Şekil 3.81.

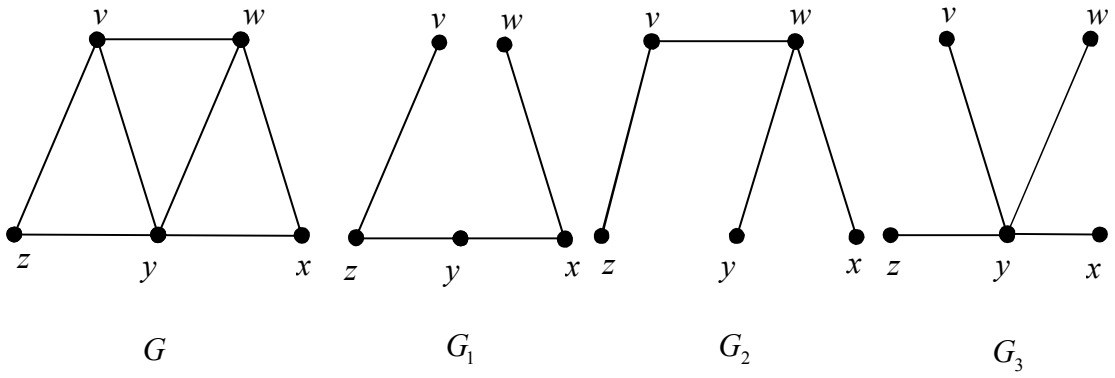
Bir $G=(V,E)$ ağacında herhangi iki $v,w \in V(G)$ köşeleri arasında sadece 1 tane patika vardır. Bu ağaca vw kenarı eklenirse bir döngü elde edilmiş olur.



Şekil 3.82.

Tanım 3.5.3. *G* bağlantılı grafı verilsin. *G*'nin her köşesini içeren ve ayrıca ağaç olan alt grafına *G*'nin *kapsayıcı ağacı (spanning tree)* denir.

Aşağıda bir *G* grafı ve bu grafın üç farklı kapsayıcı ağacı gösterilmiştir.



Şekil 3.83.

Teorem 3.5.2. *G* grafı verilsin. *G*'nin bağlantılı bir graf olması için gerek ve yeter şart kapsayıcı bir ağaca sahip olmasıdır.

4. GRAFLARDA FİBONACCİ SAYI DİZİSİ

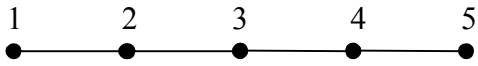
Bu bölümde grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri incelenmiştir.. Bu bölümdeki tanım, teorem, lemma, sonuç ve şekiller Prodinger ve Tichy (1982); Wingard (1995); Hopkins ve Staton (1984); Chism (2009); Horton (2007); Pedersen ve Vestergaard (2004); Chen ve Zhu (2012); Levit ve Mandrescu (2005); Startek ve ark. (2009); Zhao ve Li (2006); Holliday ve Krop (2011) adlı çalışmalardan alınmıştır.

Tanım 4.1. $G=(V,E)$ grafı ve $S\subseteq V(G)$ alt kümesi verilsin. Eğer S kümesine ait herhangi iki eleman (yani köşe) G grafında komşu olmuyorsa bu durumda S kümesine *bağımsız küme (independent set)* denir. 0-elemanlı ve 1-elemanlı S kümeleri bağımsız küme kabul edilir.

G grafında S'i alt küme kabul eden farklı bir bağımsız küme yok ise bu durumda S'e *maksimal bağımsız küme* denir.

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile grafların bağımsız küme sayıları arasındaki ilişki oldukça ilginçtir. Özellikle patika ve döngü graflarında bu sayı dizileri ve bağımsız küme sayıları çakışmaktadır. Yani, n köşeli P_n patikasındaki tüm bağımsız kümelerin sayısı F_{n+1}'dir. Ayrıca n köşeli C_n döngüsündeki tüm bağımsız kümelerin sayısı da L_n'dir.

Örnek 4.1. P_5 patikasını göz önüne alalım.



Şekil 4.1.

P_5 patikasının bağımsız kümelerini eleman sayılarına göre düzenleyelim.

Tablo 4.1.

0-elemanlı bağımsız kümeler	$\varnothing$
1-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$
2-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,5\}$
3-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1,3,5\}$

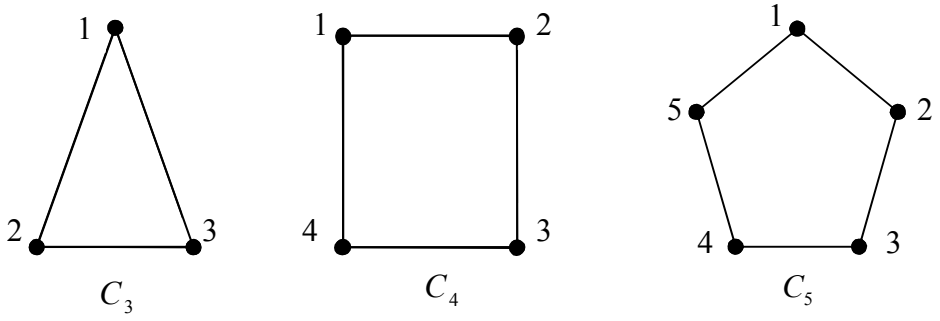
Tablodan da görüldüğü gibi P_5 grafının bağımsız kümelerinin sayısı $13=F_6$'dır.

n köşeli P_n grafında tüm bağımsız kümelerin sayısının $(n+1)$. Fibonacci sayısını vermesi sebebiyle, bu sayım aşağıdaki tanımda verildiği gibi özel olarak isimlendirilmiştir.

Tanım 4.2. G grafının tüm bağımsız kümelerinin sayısına G grafının *Fibonacci sayısı* denir ve $f(G)$ ile gösterilir.

Benzer şekilde n köşeli C_n döngüsünün Fibonacci sayısı $f(C_n) = L_n$ dir.

Örnek 4.2. C_3, C_4 ve C_5 döngülerini inceleyelim.



Şekil 4.2.

C_3, C_4 ve C_5 döngülerinin tüm bağımsız kümeleri ve Fibonacci sayıları aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

Tablo 4.2.

C_n grafları	0-elemanlı bağımsız küme	1-elemanlı bağımsız kümeler	2-elemanlı bağımsız kümeler	Fibonacci Sayısı
C_3	$\varnothing$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	-	$4 = L_3$
C_4	$\varnothing$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	$\{1,3\}, \{2,4\}$	$7 = L_4$
C_5	$\varnothing$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$	$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{3,5\}$	$11 = L_5$

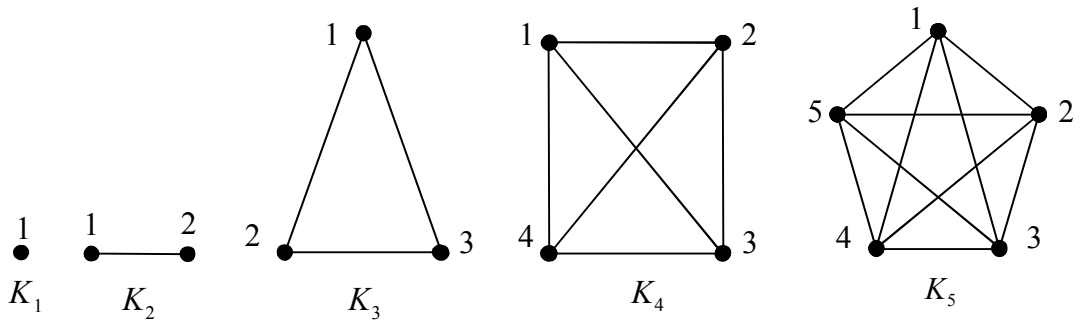
Lemma 4.1. n köşeli K_n tam grafın Fibonacci sayısı;

$$f(K_n) = n+1$$

dir.

İspat. Tam grafta her köşe diğer tüm köşeler ile komşu olduğundan 2 veya daha fazla elemanlı bağımsız küme oluşturulamaz. Dolayısıyla tüm bağımsız kümeler ya 0-elemanlı ya da 1-elemanlıdır. Bu durumda n köşeli tam grafın Fibonacci sayısı $n+1$ olur. □

Örnek 4.3.

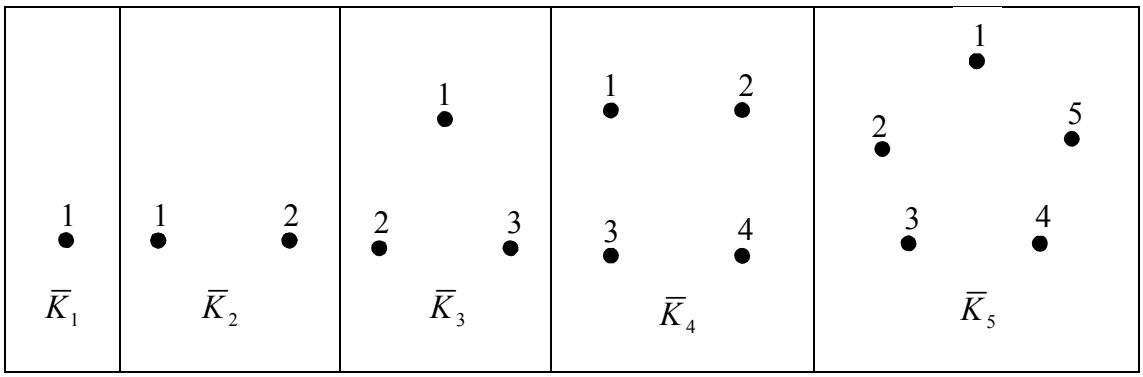


Şekil 4.3.

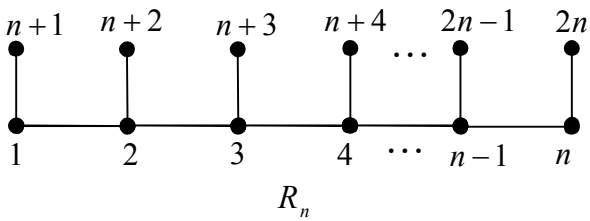
Yukarıda verilen K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_5 tam grafların Fibonacci sayıları sırasıyla 2,3,4,5 ve 6'dır.

Örnek 4.4. n grafın köşe sayısını göstermek üzere $f\left(\overline{K}_n\right) = 2^n$ dir.

Tablo 4.3.



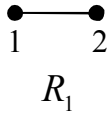
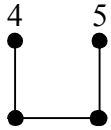
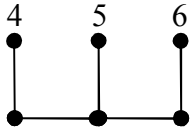
Örnek 4.5. R_n, aşağıda gösterildiği gibi $2n$ köşeli bir graf olsun.



Şekil 4.4.

R_n grafının Fibonacci sayısı iterasyon metodu yardımıyla hesaplanırsa, üç adım ilerleyerek elde edilen veriler Tablo 4.4. ile gösterildiği gibidir.

Tablo 4.4.

n	R_n grafı	0-elemanlı bağımsız küme	1-elemanlı bağımsız kümeler	2-elemanlı bağımsız kümeler	3-elemanlı bağımsız kümeler	$f(R_n)$
1	 R_1	$\varnothing$	$\{1\},\{2\}$	-	-	3
2	 R_2	$\varnothing$	$\{1\},\{2\},$ $\{3\},\{4\}$	$\{1,4\},\{2,3\},$ $\{3,4\}$	-	8
3	 R_3	$\varnothing$	$\{1\},\{2\},$ $\{3\},\{4\},$ $\{5\},\{6\}$	$\{1,5\},\{1,6\},$ $\{1,3\},\{2,4\},$ $\{2,6\},\{3,4\},$ $\{3,5\},\{4,5\},$ $\{4,6\},\{5,6\},$	$\{4,2,6\},$ $\{4,3,5\},$ $\{1,5,3\},$ $\{1,5,6\}$	22

Tablodan kolayca görülebileceği gibi

$$f(R_3) = 2f(R_2) + 2f(R_1)$$
$$f(R_4) = 2f(R_3) + 2f(R_2)$$

dir. Buradan iterasyona devam edilirse

$$f\left(R_n\right) = 2f\left(R_{n-1}\right) + 2f\left(R_{n-2}\right)$$

olur. Böylece

$$f(R_n) - 2f(R_{n-1}) - 2f(R_{n-2}) = 0$$
$$f(R_1) = 3,\ f(R_2) = 8$$

rekürans bağıntısına ulaşılır. Bu rekürans bağıntısı çözülerek

$$f(R_n) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

elde edilir. (Binet benzeri formül)

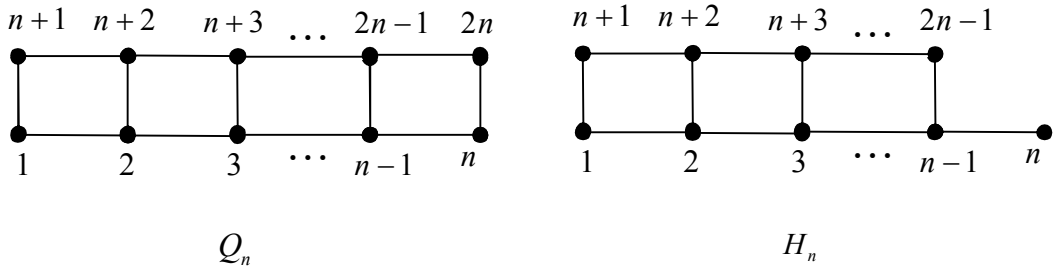
Tanım 4.3. $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V(G)$ olmak üzere *G*'nin *v* köşesini içermeyen bağımsız kümelerinin sayısı, $f_{-v}(G)$ ile ve *v* köşesini içeren bağımsız kümelerinin sayısı da $f_v(G)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4. $G = (V, E)$ bir graf ve *v*, *G*'nin herhangi bir köşesi olmak üzere *G*'nin tüm bağımsız kümelerinin sayısı (Fibonacci sayısı), *v* köşesini içermeyen bağımsız küme sayısı ile *v* köşesini içeren bağımsız küme sayısının toplamı kadardır. Yani;

$$\begin{aligned} f(G) &= f_{-v}(G) + f_v(G) \\ &= f(G-v) + f(G-N[v]) \end{aligned} \tag{4.1}$$

dir. Bu formüle *G'nin v köşesi üzerinden indirgeme formülü* denir.

Örnek 4.6. Aşağıda gösterilen $2n$ köşeli Q_n grafını ve $2n-1$ köşeli H_n grafını göz önüne alalım.



Q_n H_n

Şekil 4.5.

Q_n grafının Fibonacci sayısı, $2n$ köşesini içeren ve içermeyen bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir. O zaman (4.1) den

$$f(Q_n) = f(Q_n - 2n) + f(Q_n - N[2n])$$
$$= f(H_n) + f(H_{n-1}) \tag{4.2}$$

olur. Benzer şekilde H_n grafının Fibonacci sayısı da n köşesini içeren ve içermeyen bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

$$f(H_n) = f(H_n - n) + f(H_n - N[n])$$
$$= f(Q_{n-1}) + f(H_{n-1}) \tag{4.3}$$

olur ki (4.2) ve (4.3) denklemlerinden

$$f(H_{n-1}) = f(Q_{n-2}) + f(H_{n-2}) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) denklemleri toplanarak

$$f(H_{n-1}) + f(H_n) = f(Q_{n-1}) + f(Q_{n-2}) + f(H_{n-1}) + f(H_{n-2})$$
$$f(Q_n) = 2f(Q_{n-1}) + f(Q_{n-2})$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Q_n grafında $n=1$ ve $n=2$ için Fibonacci sayıları sırasıyla $f(Q_1)=3$ ve $f(Q_2)=7$ 'dir. Bu değerler göz önünde bulundurularak rekürans bağıntısı çözülürse,

$$f(Q_n) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.5. $G=(V,E)$ grafı ve $M \subseteq E(G)$ alt kümesi verilsin. Eğer M kümesine ait herhangi iki kenar G grafında komşu olmuyorsa, yani ortak köşe ile bağlı değilse bu durumda M kümesine bağımsız *kenar kümesi (matching)* denir.

Tanım 4.6. $G=(V,E)$ grafı ve $e\in E(G)$ kenarı verilsin. Bu durumda G grafının Fibonacci sayısı,

$$f(G)=f(G-e)-f(G-N(e))$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu formüle G grafının e kenarı üzerinden indirgeme formülü denir.

Lemma 4.2. $G=(V,E)$ bağlantılı bir graf ve $x\in V(G)$ olsun. O zaman

$$f(G)<2f(G-x)$$

dir.

İspat. *x, G*'nin herhangi bir köşesi ve *y* de *x*'in komşusu olsun. *A*, *x*'i içeren bağımsız kümelerin kümesini ve *B* de *x*'i içermeyen bağımsız kümelerin kümesini göstermek üzere tüm bağımsız kümelerin kümesi,

$$S=A\cup B$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse $G-x$ alt grafının bağımsız kümelerinin kümesi *B*'ye eşittir.

Her $A-\{x\}\in A$ kümesi ayrıca *B*'nin de elemanı olduğundan $|A|\le|B|$'dir. Fakat $\exists\{y\}\in B$'ye $A-\{x\}\in A$ kümesinde hiçbir küme karşılık gelmez. Çünkü *G* bağlantılı olduğundan *x*'in komşu olduğu en az bir *y* köşesi vardır ki bu köşe *G*'nin *x*'i içermeyen bağımsız kümelerinde yer alır. Yani, *x* ile *y* köşeleri komşu olduğundan asla aynı bağımsız kümenin elemanı olamazlar. Bu yüzden $\{y\}\in B$ bağımsız kümesi $A-\{x\}$ şeklinde elde edilemeyeceğinden $|A|<|B|$ olup $S=A\cup B$ olduğundan

$$f(G)=|A|+|B|<|B|+|B|=2|B|=2f(G-x)$$

elde edilir. □

Tanım 4.7. k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere G grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı $F_k(G)$ ile gösterilir. Bu durumda G grafının Fibonacci sayısının

$$f(G)=\sum_{k\geq 0}F_k(G)$$

olduğu açıktır.

Tanım 4.8. $G=(V,E)$ bir graf ve $v\in V$ olmak üzere G grafının k-elemanlı bağımsız küme sayısı için v köşesi üzerinden indirgeme formülü

$$F_k(G)=F_k(G-v)+F_{k-1}(G-N[v])$$

şeklindedir.

Lemma 4.3. P_n, n köşeli bir patikayı göstermek üzere,

i) $F_0(P_n)=1$

ii) $F_1(P_n)=n$

iii) $F_k(P_{n+1})=F_k(P_n)+F_{k-1}(P_{n-1});\quad 1\leq k\leq \left[\!\left[\frac{n+2}{2}\right]\!\right]$

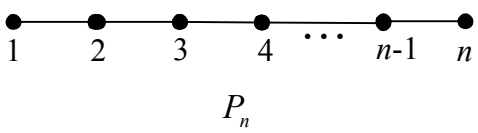
iv) $F_k(P_n)=\binom{n-k+1}{k};\quad 0\leq k\leq \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]$

dir.

İspat.

i) P_n grafının 0-elemanlı bağımsız kümesi sadece $\varnothing$ olduğundan $F_0(P_n)=1$ olur.

ii)

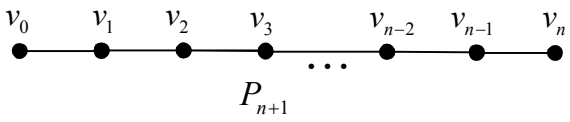


P_n

Şekil 4.6.

P_n grafının 1-elemanlı bağımsız kümeleri $\{1\},\{2\},\{3\},\ldots,\{n\}$ olduğundan $F_1(P_n)=n$ olur.

iii)



Şekil 4.7.

P_{n+1} grafının *k*-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı, v_0 köşesini içermeyen ve içeren *k*-elemanlı bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir. O halde

$$F_k(P_{n+1})=F_k(P_n)+F_{k-1}(P_{n-1})$$

olur. Burada P_{n+1} grafının v_0 köşesini içeren bağımsız küme sayısını hesaplarken, $v_1 \sim v_0$ olduğundan v_1 köşesi, v_0 köşesini içeren bağımsız kümelerin elemanı olamaz. Bu yüzden bu köşelerin silinmesi ile P_{n-1} elde edilir. Ayrıca v_0 köşesini içeren bağımsız kümelerin v_0 hariç geriye $k-1$ elemanı olacağından, v_0'ı içeren bağımsız küme sayısı P_{n-1} grafının $k-1$ elemanlı bağımsız küme sayısı $F_{k-1}(P_{n-1})$ kadar olur. Diğer taraftan v_0 köşesini içermeyen *k*-elemanlı bağımsız kümelerin sayısı $P_{n+1}-v_0 \simeq P_n$ grafının *k*-elemanlı Fibonacci sayısına eşittir.

iv) İspatı *n* köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.

$n=0$ için $F_k(P_0)=\binom{0-k+1}{k}=0$ dır.

$n=m$ için $F_k(P_m)=\binom{m-k+1}{k}$; $0\le k\le \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]$ olsun.

$n=m+1$ için $F_k(P_{m+1})=\binom{m-k+2}{k}$ olduğunu göstermeliyiz. iii) den

$$
\begin{aligned}
F_k\left(P_{m+1}\right) &= F_k\left(P_m\right) + F_{k-1}\left(P_{m-1}\right) \\
&= \binom{m-k+1}{k} + \binom{m-1-(k-1)+1}{k-1} \\
&= \binom{m-k+1}{k} + \binom{m-k+1}{k-1} \\
&= \binom{m-k+2}{k}
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1. P_n grafının Fibonacci sayısı için

$$f\left(P_n\right) = \sum F_k\left(P_n\right)$$

olduğundan

$$F_{n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k+1}{k}$$

dir.

Lemma 4.4. C_n, n köşeli bir döngü olmak üzere

i) $F_0\left(C_n\right) = 1$

ii) $F_1\left(C_n\right) = n$

iii) $F_k\left(C_n\right) = F_k\left(P_{n-1}\right) + F_{k-1}\left(P_{n-3}\right);\quad 1 \leq k \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$ ve $n \geq 3$

iv) $F_k\left(C_n\right) = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1};\quad 1 \leq k \leq \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$ ve $n \geq 3$

dir.

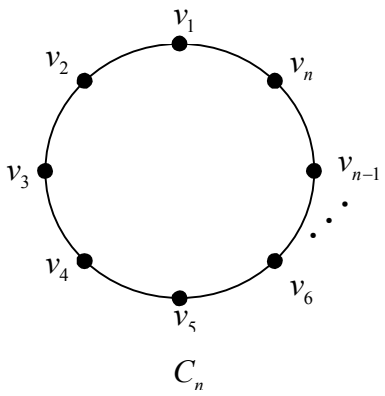
İspat.

i) C_n grafının 0-elemanlı bağımsız kümesi sadece $\varnothing$ olduğundan

$F_0\left(C_n\right) = 1$ 'dir.

ii) C_n grafının 1-elemanlı bağımsız kümeleri $\{1\},\{2\},\{3\},\ldots,\{n\}$ olduğundan $F_1(C_n) = n$ olur.

iii) C_n grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısını, sabit bir v_1 köşesini içermeyen ve içeren bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde yazabiliriz.



Şekil 4.8.

C_n grafında v_1 köşesi, v_2 ve v_n köşeleri ile komşu olduğundan bu köşeler v_1 köşesini içeren bağımsız kümelerin elemanı olamazlar. Bu yüzden C_n grafından v_1, v_2 ve v_3 köşelerinin silinmesiyle P_{n-3} grafı elde edilir. Ayrıca v_1 köşesini içeren bağımsız kümelerin v_1 hariç geriye $k-1$ elemanı olacağından, v_1 köşesini içeren bağımsız küme sayısı P_{n-3} grafının $k-1$ elemanlı bağımsız küme sayısı $F_{k-1}(P_{n-3})$ kadar olur. Diğer taraftan C_n grafının v_1 köşesini içermeyen k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı $C_n - v_1$ alt grafının k-elemanlı bağımsız küme sayısı ile aynı olup $C_n - v_1 \simeq P_{n-1}$ olduğundan bu sayı $F_k(P_{n-1})$ dir. Sonuç olarak

$$F_k(C_n) = F_k(P_{n-1}) + F_{k-1}(P_{n-3})$$

dir.

iv)

$$\begin{aligned}
F_k(C_n) &= F_k(P_{n-1}) + F_{k-1}(P_{n-3}) \\
&= \binom{n-1-k+1}{k} + \binom{n-3-(k-1)+1}{k-1} \\
&= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-k-1)!}{k(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\frac{n}{k} \\
&= \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.5. $n \geq 3$ için

$$1 + \sum_{k\geq 1} F_k(C_n) = L_n$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
f(C_n) &= \sum_{k\geq 0} F_k(C_n) \\
&= 1 + \sum_{k\geq 1} F_k(C_n)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca C_n grafının Fibonacci sayısı, $f(C_n) = L_n$ olduğundan bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen elde edilmiş olur. □

4.1. Bir veya İki Döngü İçeren Grafların Fibonacci Sayısı

Tanım 4.1.1. Sadece bir tane döngü içeren bağlantılı G grafına *unicyclic* denir.

Tanım 4.1.2. $|V(G)| \geq 3$ şeklindeki bir G grafının x köşesinin $G \to ad_{H(x,y)}G$ dönüşümü ile sabit bir $y \in V(H)$ köşesi ile tutturulmasıyla (yani x köşesine H grafının eklenmesi ile) elde edilen grafa *H-toplam grafı* denir ve ad_H şeklinde gösterilir.

Teorem 4.1.1. T, n köşeli bir orman olmak üzere

$$F_{n+1} \leq f(T) \leq 2^n$$

dir. ($T \simeq P_n$ için $f(T) = F_{n+1}$, $T \simeq \overline{K_n}$ için $f(T) = 2^n$ olur.)

Tanım 4.1.3. n köşeli $L_{n,k}$ grafı,

$$ad_{P_{n-k+1}(x,y)}(C_k)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $y \in V(P_{n-k-1})$ ve $x \in C_k$ dır.

Tanım 4.1.4. $n \geq d+1$ mertebeli $P_{n,d}$ grafı,

$$P_{n,d} = ad_{K_{1,n-d}}(P_d)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x \in V(P_d)$ ve $y \in K_{1,n-d}$ 'dir (y merkez köşe).

Tanım 4.1.5. $n \geq 6$, $k \geq 3$, $l \geq 3$ ve $k+l \leq n$ olmak üzere n mertebeli $R_{n,k,l}$ grafı

$$R_{n,k,l} = ad_{C_l(x,y)}(L_{n-l+1,k})$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x \in V(L_{n-l+1,k})$ ve $y \in V(C_l)$ 'dir.

Tanım 4.1.6. $n \geq 5$ ve $k \geq 3$ olmak üzere n mertebeli $C_{n,k}$ grafı;

$$C_{n,k} = ad_{C_k(x,y)}(C_{n-k+1})$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x \in V(C_{n-k+1})$ ve $y \in V(C_k)$ 'dır.

Teorem 4.1.2. *T*, *n*. mertebeden bir ağaç ve $çap(T) \geq d$ ise

$$f(T) \leq F_{d-1} + 2^{n-d} F_d$$

dir. ($T \simeq P_{n,d}$ için $f(T) = F_{d-1} + 2^{n-d} F_d$ olur.)

Teorem 4.1.3. *G*, $n \geq 3$ mertebeli grafı unicyclic ise $f(G) \geq L_n$'dir. $G \simeq C_n$ veya $G \simeq L_{n,3}$ durumunda $f(G) = L_n$ olur.

Teorem 4.1.4. *G*, $n \geq 3$ mertebeli ve bir tane döngü içeren herhangi bir graf ise $f(G) \geq L_n$ dir.

İspat. Eğer *G* grafı bağlantılı ise unicyclic olur. Bu durumda Teorem 4.1.3.'den $f(G) \geq L_n$ olur ki istenendir.

G grafı bir tane döngü içeren bağlantısız bir graf ise grafa kenarlar ekleyerek bağlantılı hale getirebiliriz. Bu durumda *G*, unicyclic olur ve *G*'nin önceki duruma göre bağlantısız küme sayısı azalır. Teorem 4.1.3.'den $f(G) \geq L_n$ olur ki istenendir. □

Şimdi iki döngü içeren grafların Fibonacci sayısını inceleyelim.

Lemma 4.1.1. $k \geq 3$ olmak üzere

i) $f(R_{n,3,3}) = 5F_{n-3}, \quad n \geq 6$

ii) $f(R_{n,k,3}) = (F_{n-k-3} + F_{n-k-1})F_{k-2} + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k, \quad n \geq k+3$

iii) $f(R_{n,k,n-k}) = F_{n-k}F_{k-2} + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k, \quad n \geq k+3$

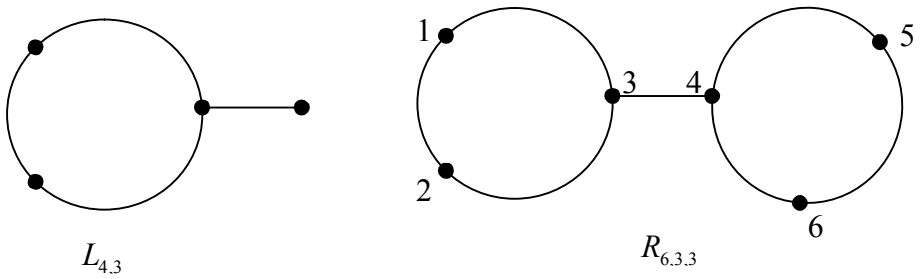
iv) $f(C_{n,k}) = F_{n-k-1}F_{k-2} + F_{n-k+1}F_k, \quad n \geq k+2.$

İspat.

i) Öncelikle $n = 6$ için doğruluğunu gösterelim. $R_{6,3,3}$ grafı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_{6,3,3} = ad_{C_3(x,y)}(L_{4,3})$$
$$L_{4,3} = ad_{P_2(x,y)}(C_3)$$

olur.



Şekil 4.9.

$R_{6,3,3}$ grafının tüm bağımsız kümelerinin kümesi

$$S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}\}$$

olup, Fibonacci sayısı

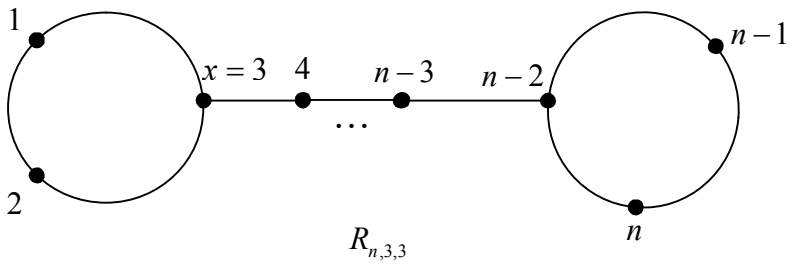
$$f\left(R_{6,3,3}\right) = |S| = 15 = 5F_3$$

olarak elde edilir.

$n \geq 7$ için verilen ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$$R_{n,3,3} = ad_{C_3(x,y)}(L_{n-2,3}) \text{ ve } L_{n-2,3} = ad_{P_{n-4}(x,y)}(C_3)$$

olup

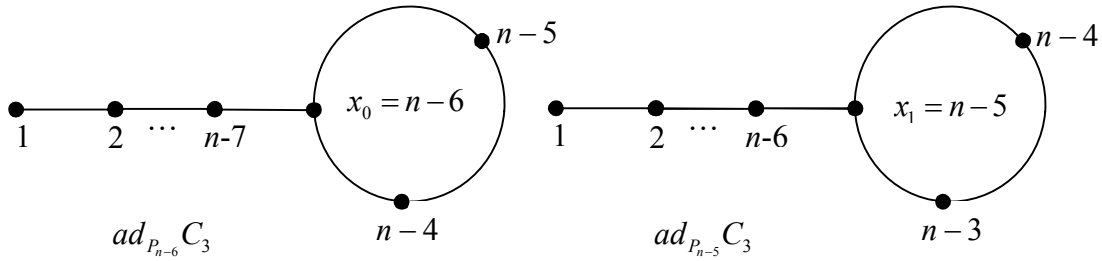


Şekil 4.10.

$R_{6,3,3}$ grafının x köşesi üzerinden indirgeme yaparak Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} f\left(R_{n,3,3}\right) &= f_x\left(R_{n,3,3}\right) + f_{-x}\left(R_{n,3,3}\right) \\ &= f\left(L_{n-4,3}\right) + f\left(P_2\right) f\left(L_{n-3,3}\right) \\ &= f\left(ad_{P_{n-6}} C_3\right) + 3f\left(ad_{P_{n-5}} C_3\right) \end{aligned}$$

olup aşağıdaki gösterilen $ad_{P_{n-6}} C_3$ grafının x_0 köşesinde $ad_{P_{n-5}} C_3$ grafının da x_1 köşesinde indirgeme yapılırsa



Şekil 4.11.

$$\begin{aligned} f\left(R_{n,3,3}\right) &= f_{x_0}\left(ad_{P_{n-6}} C_3\right) + f_{-x_0}\left(ad_{P_{n-6}} C_3\right) + 3\left(f_{x_1}\left(ad_{P_{n-5}} C_3\right) + f_{-x_1}\left(ad_{P_{n-5}} C_3\right)\right) \\ &= f\left(P_{n-8}\right) + 3f\left(P_{n-7}\right) + 3\left(f\left(P_{n-7}\right) + 3f\left(P_{n-6}\right)\right) \\ &= F_{n-7} + 6F_{n-6} + 9F_{n-5} \\ &= 10F_{n-5} + 5F_{n-6} \\ &= 5F_{n-4} + 5F_{n-5} \\ &= 5F_{n-3} \end{aligned}$$

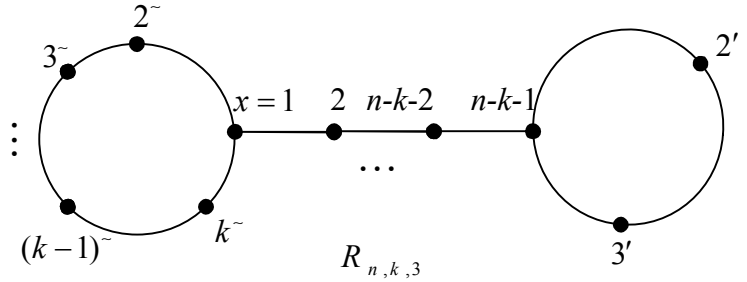
olur ki elde edilmek istenendir.

ii) $R_{n,k,3}$ ve $L_{n-2,k}$ grafları

$$R_{n,k,3} = ad_{C_3}(L_{n-2,k}),$$

$$L_{n-2,k} = ad_{P_{n-k-1}}(C_k)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

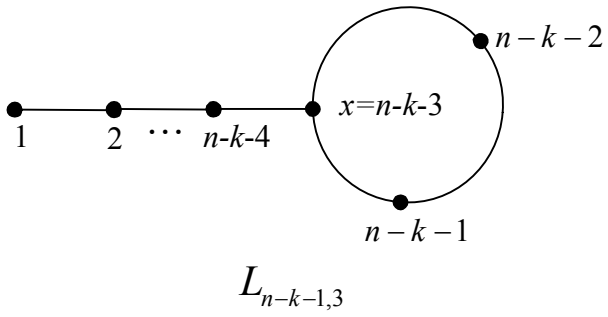


Şekil 4.12.

$R_{n,k,3}$ grafinda x köşesi üzerinden indirgeme yapılarak Fibonacci sayısı hesaplanırsa

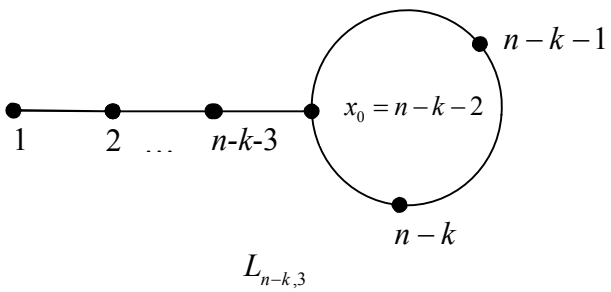
$$\begin{aligned} f\left(R_{n,k,3}\right) &= f_x\left(R_{n,k,3}\right) + f_{-x}\left(R_{n,k,3}\right) \\ &= f\left(P_{k-3}\right) f\left(L_{n-k-1,3}\right) + f\left(P_{k-1}\right) f\left(L_{n-k,3}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

olur. Burada $L_{n-k-1,3}$ ve $L_{n-k,3}$ grafları göz önüne alınarak Fibonacci sayıları



Şekil 4.13.

$$\begin{aligned} f\left(L_{n-k-1,3}\right) &= f_x\left(L_{n-k-1,3}\right) + f_{-x}\left(L_{n-k-1,3}\right) \\ &= f\left(P_{n-k-5}\right) + 3f\left(P_{n-k-4}\right) \end{aligned}$$



Şekil 4.14.

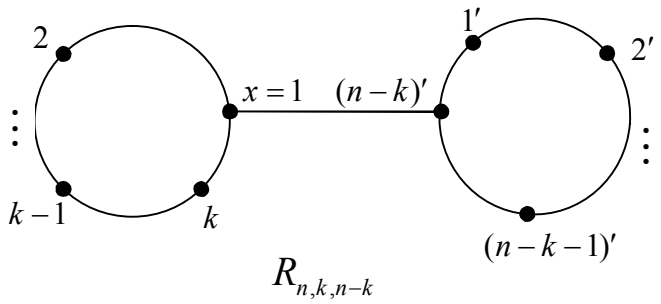
$$f\left(L_{n-k,3}\right) = f_{x_0}\left(L_{n-k,3}\right) + f_{-x_0}\left(L_{n-k,3}\right)$$
$$= f\left(P_{n-k-4}\right) + 3f\left(P_{n-k-3}\right)$$

olarak elde edilir. Bu değerler (4.5) de yerine yazılırsa

$$f\left(R_{n,k,3}\right) = f\left(P_{k-3}\right)\left(f\left(P_{n-k-5}\right) + 3f\left(P_{n-k-4}\right)\right) + f\left(P_{k-1}\right)\left(f\left(P_{n-k-4}\right) + 3f\left(P_{n-k-3}\right)\right)$$
$$= F_{k-2}\left(F_{n-k-4} + 3F_{n-k-3}\right) + F_k\left(F_{n-k-3} + 3F_{n-k-2}\right)$$
$$= F_{k-2}\left(F_{n-k-2} + F_{n-k-3} + F_{n-k-3}\right) + F_k\left(F_{n-k-1} + F_{n-k-2} + F_{n-k-2}\right)$$
$$= F_{k-2}\left(F_{n-k-1} + F_{n-k-3}\right) + F_k\left(F_{n-k} + F_{n-k-2}\right)$$

olur.

iii) $R_{n,k,n-k}$ grafının tanımından $R_{n,k,n-k} = ad_{C_{n-k}}\left(L_{k+1,k}\right)$ olur. Buradaki $L_{k+1,k}$ grafı da $L_{k+1,k} = ad_{P_2}\left(C_k\right)$ olarak tanımlıdır. Bu durumda $R_{n,k,n-k}$ grafı aşağıda gösterildiği gibidir. $R_{n,k,n-k}$ grafının Fibonacci sayısı x köşesi üzerinden indirgeme yaparak hesaplanırsa

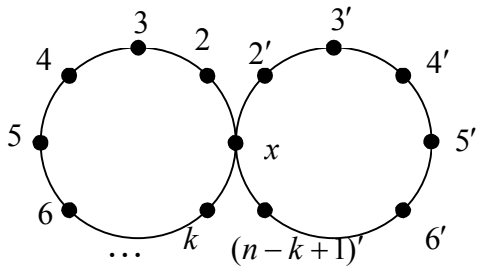


Şekil 4.15.

$$f\left(R_{n,k,n-k}\right) = f_x\left(R_{n,k,n-k}\right) + f_{-x}\left(R_{n,k,n-k}\right)$$
$$= f\left(P_{k-3}\right) f\left(P_{n-k-1}\right) + f\left(P_{k-1}\right) f\left(C_{n-k}\right)$$
$$= F_{k-2}F_{n-k} + F_k L_{n-k}$$
$$= F_{k-2}F_{n-k} + \left(F_{n-k} + F_{n-k-2}\right)F_k$$

olur.

iv) $C_{n,k}$ grafının tanımından $C_{n,k} = ad_{C_k}\left(C_{n-k+1}\right)$ olup aşağıdaki graf verilebilir.



$C_{n,k}$

Şekil 4.16.

$C_{n,k}$ grafında x köşesi üzerinden indirgeme yapılarak Fibonacci sayısı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} f\left(C_{n,k}\right) &= f_x\left(C_{n,k}\right) + f_{-x}\left(C_{n,k}\right) \\ &= f\left(P_{k-3}\right) f\left(P_{n-k-2}\right) + f\left(P_{k-1}\right) f\left(P_{n-k}\right) \\ &= F_{k-2}F_{n-k-1} + F_k F_{n-k+1} \end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 4.1.1. $k \geq 3$, $n \geq k+3$ için $f\left(R_{n,k,3}\right) \leq f\left(R_{n,k,n-k}\right) < f\left(C_{n,k}\right)$'dır.

İspat. $n > k+3$ için

$$\begin{aligned} F_{n-k-3} &< F_{n-k-2} \\ F_{n-k-1} + F_{n-k-3} &< F_{n-k-1} + F_{n-k-2} \\ F_{n-k-1} + F_{n-k-3} &< F_{n-k} \\ \left(F_{n-k-1} + F_{n-k-3}\right) F_{k-2} &< F_{n-k}F_{k-2} \\ \left(F_{n-k-1} + F_{n-k-3}\right) + \left(F_{n-k-2} + F_{n-k}\right) F_k &< F_{n-k}F_{k-2} + \left(F_{n-k-2} + F_{n-k}\right) F_k \\ f\left(R_{n,k,3}\right) &< f\left(R_{n,k,n-k}\right) \end{aligned}$$

olur. $n = k+3$ için de eşitlik gerçeklenir. Öte yandan

$$\begin{aligned} f\left(C_{n,k}\right) &= F_{n-k-1}F_{k-2} + F_{n-k+1}F_k \\ &= \left(F_{n-k} - F_{n-k-2}\right)F_{k-2} + \left(F_{n-k} + F_{n-k-1}\right)F_k \\ &= F_{n-k}F_{k-2} + \left(F_{n-k} + F_{n-k-2}\right)F_k - F_{n-k-2}F_{k-2} + F_{n-k-3}F_k \\ &= f\left(R_{n,k,n-k}\right) - \left(F_{n-k-3} + F_{n-k-4}\right)\left(F_k - F_{k-1}\right) + F_{n-k-3}F_k \\ &= f\left(R_{n,k,n-k}\right) + F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}\left(F_{k-1} + F_{k-2}\right) + F_{n-k-4}F_{k-1} \\ &= f\left(R_{n,k,n-k}\right) + F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}F_{k-2} \end{aligned}$$

olup

$$f\left(C_{n,k}\right) - f\left(R_{n,k,n-k}\right) = F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}F_{k-2} > 0$$

olur. Tüm bu eşitsizlikler birleştirilirse

$$f\left(R_{n,k,3}\right) \le f\left(R_{n,k,n-k}\right) < f\left(C_{n,k}\right)$$

olur ki istenendir. □

Lemma 4.1.2. $n \ge 6$, $k \ge 3$, $l \ge 3$ ve $k + l \le n$ olmak üzere

$$f\left(R_{n,k,l}\right) \ge f\left(R_{n,3,3}\right) = 5F_{n-3}$$

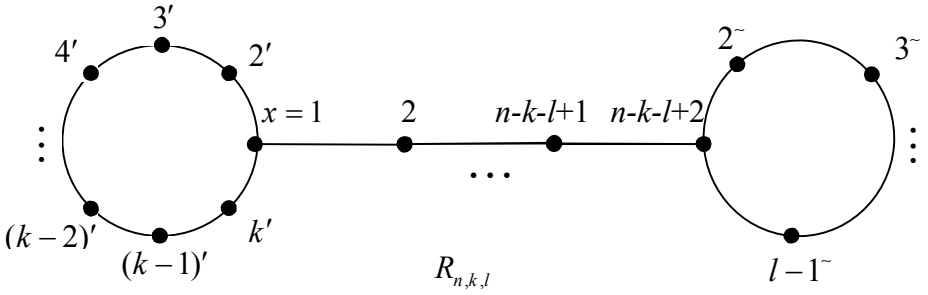
dir. ($k = l = 3$ durumunda eşitlik gerçeklenir.)

İspat.

Öncelikle $n \ge k + l + 1$ durumunu göz önüne alalım. $R_{n,k,l}$ grafı,

$$R_{n,k,l} = ad_{C_l(x,y)}(L_{n-l+1,k})$$

şeklinde elde edilir.

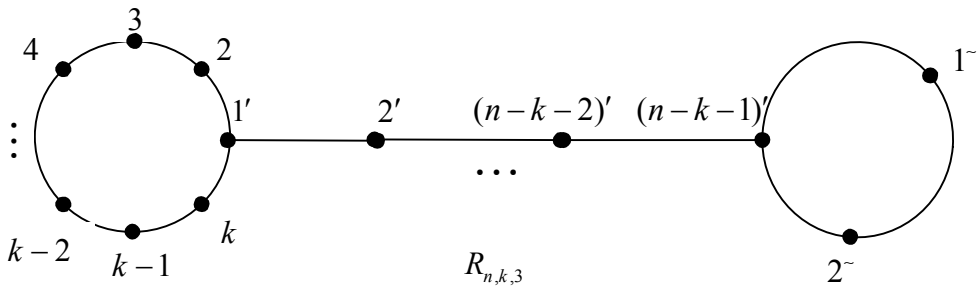


Şekil 4.17.

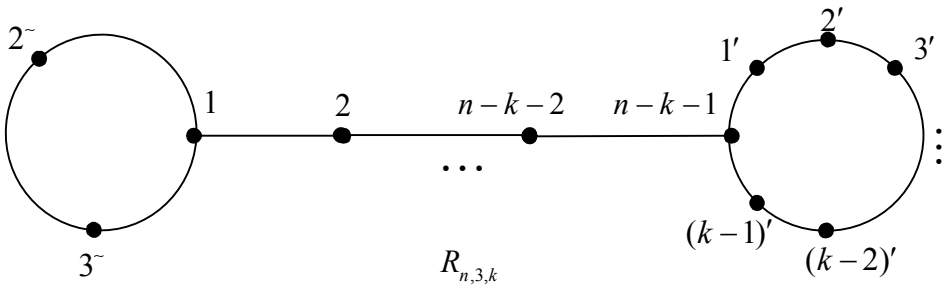
olup Fibonacci sayısı

$$f\left(R_{n,k,l}\right) = f_x\left(R_{n,k,l}\right) + f_{-x}\left(R_{n,k,l}\right)$$
$$= f\left(P_{k-3}\right) f\left(L_{n-k-1,l}\right) + f\left(P_{k-1}\right) f\left(L_{n-k,l}\right)$$

olur. $L_{n-k-1,l}$ ve $L_{n-k,l}$ grafları unicyclic graflardır. Bu durumda Teorem 4.1.3.'den $f\left(L_{n-k-1,l}\right)$, en küçük değerini $L_{n-k-1,l} \simeq C_{n-k-1}$ veya $L_{n-k-1,l} \simeq L_{n-k-1,3}$ olması durumunda alır. Bunun için $l = n-k-1$ veya $l = 3$ olmalıdır. Benzer şekilde $f\left(L_{n-k,l}\right)$ en küçük değeri $L_{n-k,l} \simeq C_{n-k}$ veya $L_{n-k,l} \simeq L_{n-k,3}$ durumunda elde edilir. Bunun için $l = n-k$ veya $l = 3$ olmalıdır. Sonuç olarak $f\left(R_{n,k,l}\right)$ değerinin en küçük olması için $l = 3$ olmalıdır. Yani, $f\left(R_{n,k,3}\right)$ minimum değer olur. Ayrıca $l = 3$ için $R_{n,k,3} \simeq R_{n,3,k}$ dır. Aşağıdaki şekillerden bu izomorfizm kolaylıkla görülebilir.



Şekil 4.18.



Şekil 4.19.

Benzer düşünce ile $f\left(R_{n,3,k}\right)$ değeri de $k=3$ için minimum olur. Lemma 4.1.1. i) den $f\left(R_{n,3,3}\right)\geq 5F_{n-3}$ idi. Bu durumda

$$f\left(R_{n,3,k}\right)\geq 5F_{n-3}$$

olur. Ayrıca $R_{n,k,3}\simeq R_{n,3,k}$ olduğundan

$$f\left(R_{n,k,3}\right)=f\left(R_{n,3,k}\right)\geq 5F_{n-3}$$

olur. $f\left(R_{n,k,3}\right)$ değeri $f\left(R_{n,k,l}\right)$ için minimum değer olduğundan

$$f\left(R_{n,k,l}\right)\geq f\left(R_{n,k,3}\right)=f\left(R_{n,3,k}\right)=5F_{n-3}$$

olur. Şimdi de $n=k+l$ durumunu göz önüne alalım. $k=l=3$ ise Lemma 4.1.1. i) den

$$f\left(R_{n,k,l}\right)=f\left(R_{n,3,3}\right)=5F_{n-3}$$

olur.

$k>3$ ve $l>3$ ise $n\geq k+4$ olup Sonuç 4.1.1. den

$$f\left(R_{n,k,l}\right)=f\left(R_{n,k,n-k}\right)>f\left(R_{n,k,3}\right)\geq f\left(R_{n,3,3}\right)=5F_{n-3}$$

olur. □

Teorem 4.1.5. *G*, *n*. mertebeden $(n \geq 6)$ iki ayrı döngü içeren keyfi bir graf olsun. Bu takdirde

$$f(G) \geq 5F_{n-3}$$

dir. ($G \simeq R_{n,3,3}$ için $f(G) = 5F_{n-3}$ olur.)

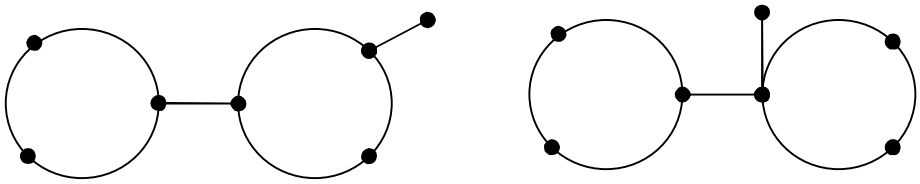
İspat. İspatı *G* grafının $R_{n,k,l}$ grafına izomorf olup olmaması durumuna göre inceleyelim.

1. Durum : $G \simeq R_{n,,k,l}$ ise Lemma 4.1.2.'den

$$f(G) = f(R_{n,k,l}) \geq 5F_{n-3}$$

olur.

2. Durum: $G \not\simeq R_{n,k,l}$ için ispatı *n* köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım. $G \not\simeq R_{n,k,l}$ olduğundan $n \geq 7$ dir. $n = 7$ mertebeli ve ayrık iki döngü içeren *G* grafı ($G \not\simeq R_{n,k,l}$) aşağıdaki graflardan birine izomorf olmak zorundadır.



G veya *G*

Şekil 4.20.

G'nin her iki durumu için de gerekli incelemeler yapılarak $f(G) \geq 5F_4$ olduğu görülür.

m mertebeli ayrık iki döngü içeren keyfi bir *H* grafı için $f(H) = 5F_{m-3}$ olsun.

$G \not\simeq R_{n,k,l}$ olduğundan $der_G(x) = 1$ olacak şekilde $x \in V(G)$ köşesi vardır. Bu durumda

$$f(G) = f_x(G) + f_{-x}(G)$$

dir.

S, *G* grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme ve S^* da $G-x$ grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere $x \notin S$ ise $x \in S^*$ olacak şekilde en az bir S^* bağımsız kümesi vardır.

$G-x$ grafı $n-1$ mertebeli olduğundan hipotez gereği

$$f(G-x) = f_{-x}(G) \geq 5F_{(n-1)-3} = 5F_{n-4}$$

olur.

S', $G-N[x]$ grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere $x \in S$ ise $S = S' \cup \{x\}$ olacak şekilde en az bir S' bağımsız kümesi vardır.

x, yaprak olduğundan $|N[x]| = 2$ olur. Bu takdirde $G-N[x]$ grafı $n-2$ mertebeli ve en az bir döngü içeren graftır. Bu durumda $G-N[x]$ grafının içerdiği döngü sayısına göre *G* grafının Fibonacci sayısını inceleyelim.

1. Durum: Eğer $G-N[x]$ grafı iki döngü içeriyorsa, hipotezden

$$f(G-N[x]) = f_x(G) \geq 5F_{(n-2)-3} = 5F_{n-5}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq 5F_{n-5} + 5F_{n-4} = 5F_{n-3} \end{aligned}$$

olur ki istenendir.

2. Durum: Eğer $G-N[x]$ grafı tek döngü içeriyorsa Teorem 4.1.4'ten

$$f_x(G) \geq L_{n-2}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq L_{n-2} + 5F_{n-4} \\ &\geq F_{n-2} + F_{n-4} + 5F_{n-4} \\ &\geq 5F_{n-3} \end{aligned}$$

olur ki istenendir. □

Lemma 4.1.3. $n \geq 5,\ 3 \leq k \leq n-2$ olmak üzere

$$f(C_{n,k}) \geq f(C_{n,3}) = F_{n-4} + 3F_{n-2} \geq 5F_{n-3}$$

dir. Ayrıca

i) $f(C_{n,k}) = f(C_{n,3})$ olması için gerek ve yeter şart $k = 3$ veya $k = n-2$ olmasıdır.

ii) $f(C_{n,3}) = 5F_{n-3}$ olması için gerek ve yeter şart $n = 5$ olmasıdır.

Teorem 4.1.6. *G*, *n*. mertebeden $(n \geq 5)$ iki döngü içeren keyfi bir graf olsun. Eğer *G*'deki döngüler bir ortak köşe içeriyorsa bu durumda

$$f(G) \geq 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

dir. ($G \simeq C_{n,3}$ için $f(G) = 3F_{n-2} + F_{n-4}$ olur.

İspat.

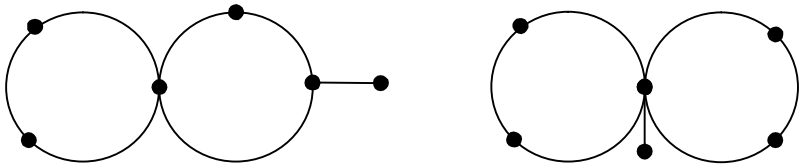
i) $G \simeq C_{n,k}$ ise Lemma 4.1.3.'den

$$f(C_{n,k}) \geq f(C_{n,3}) = 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

olup ispat tamamlanır.

ii) $G \not\simeq C_{n,k}$ için ispatı *n* üzerinden tümevarımla yapalım. $G \not\simeq C_{n,k}$ ise bu takdirde $n \geq 6$ dır.

$n = 6$ için *G* grafı aşağıdaki graflardan birine izomorf olmak zorundadır.



G veya *G*

Şekil 4.21.

Her iki grafda da gerekli incelemeler yapılarak

$$f(G) \geq 3F_4 + F_2$$

olduğu görülür.

m. mertebeden ve tek bir ortak köşesi olacak şekilde iki döngü içeren herhangi bir *H* grafı için

$$f(H) \geq 3F_{m-2} + F_{m-4}$$

olsun.

$G \not\cong C_{n,k}$ olduğundan $\text{der}_G(x) = 1$ olacak şekilde $x \in V(G)$ vardır. Bu durumda

$$f(G) = f_{-x}(G) + f_x(G)$$

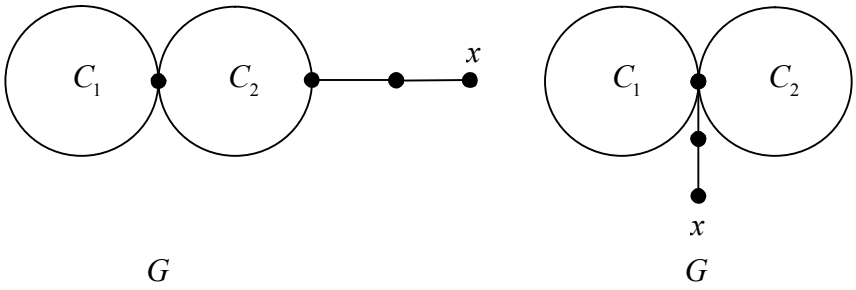
dir. *S, G* grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme ve S^* da $n-1$ mertebeli ve ortak bir köşesi olacak şekilde iki döngü içeren graf olan $G-x$ grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere $x \notin S$ ise $x \in S^*$ olacak şekilde en az bir S^* bağımsız kümesi vardır.

$G-x$ grafı $n-1$ mertebeli olduğundan hipotezden

$$f_{-x}(G) \geq 3F_{(n-1)-2} + F_{(n-1)-4} = 3F_{n-3} + F_{n-5}$$

olur. S', $G-N[x]$ grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere $x \in S$ ise $S = S' \cup \{x\}$ olacak şekilde en az bir S' bağımsız kümesi vardır. Diğer taraftan *x*, izole köşe olduğundan $|N[x]| = 2$ dir. Burada $G-N[x]$ grafı için 3 farklı durum söz konusudur.

1. Durum: Eğer $G-N[x]$ grafı iki elemanter döngü içeriyorsa, yani *G* grafı



Şekil 4.22.

şeklinde ise o zaman $G-N[x]$ grafı $n-2$ mertebeli olduğundan hipotezden

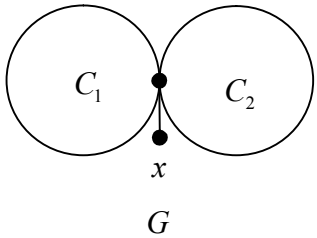
$$f_x(G) \geq 3F_{(n-2)-2} + F_{(n-2)-4} = 3F_{n-4} + F_{n-6}$$

olup,

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq 3F_{n-4} + F_{n-6} + 3F_{n-3} + F_{n-5} \\ &\geq 3F_{n-2} + F_{n-4} \end{aligned}$$

dir.

2. Durum: Eğer $G-N[x]$ grafı hiç elemanter döngü içermiyorsa, yani *G* grafı



Şekil 4.23.

şeklinde ise o zaman $G-N[x]$, $n-2$ köşeli bir ağaç olur. Teorem 4.1.1.'den

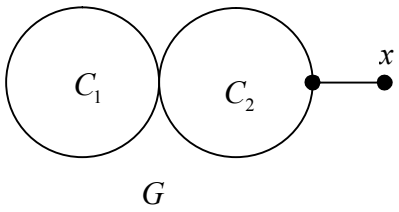
$$f_x(G) \geq F_{(n-2)+1} = F_{n-1}$$

olup

$$f(G) = f_x(G) + f_{-x}(G)$$
$$\geq F_{n-1} + 3F_{n-3} + F_{n-5} > 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

olur.

3. Durum: Eğer $G - N[x]$ grafı sadece bir tane döngü içeriyorsa, yani G grafı



G

Şekil 4.24.

şeklinde ise Teorem 4.1.4.'ten

$$f_x(G) \geq L_{n-2}$$

olup

$$f(G) = f_x(G) + f_{-x}(G)$$
$$\geq L_{n-2} + 3F_{n-3} + F_{n-5} > 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

dir. □

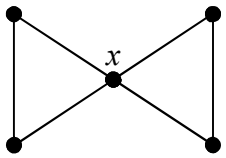
Tanım 4.1.7. $K_{1,n-1}$ yıldızına ayrık iki 3-döngü içerecek şekilde iki kenar eklenmesi ile elde edilen $n \geq 5$ mertebeli grafı, $H_{n,3,3}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.1.7. G, $n \geq 5$ mertebeli ve iki döngü içeren bağlantılı herhangi bir graf olsun. Bu takdirde

$$f(G) \leq 1 + 9.2^{n-5}$$

dir.($G \simeq H_{n,3,3}$ için $f(G) = 1 + 9.2^{n-5}$ dir.)

İspat. $n = 5$ için doğruluğunu gösterelim.



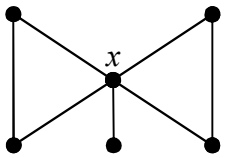
$H_{5,3,3}$

Şekil 4.25.

grafını göz önüne alalım. O zaman x köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} f(H_{5,3,3}) &= f_x(H_{5,3,3}) + f_{-x}(H_{5,3,3}) \\ &= 1 + f(P_2) f(P_2) \\ &= 1 + F_3 F_3 \\ &= 1 + 3.3 = 10 \le 1 + 9.2^{5-5} = 10 \end{aligned}$$

olur. $n = 6$ için doğruluğunu gösterelim.



$H_{6,3,3}$

Şekil 4.26.

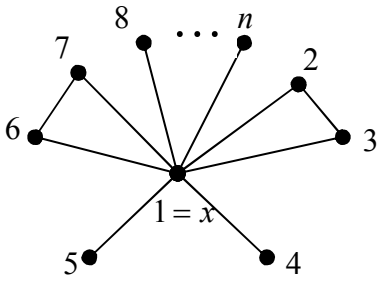
$$\begin{aligned} f(H_{6,3,3}) &= f_x(H_{6,3,3}) + f_{-x}(H_{6,3,3}) \\ &= 1 + 2 f(P_2) f(P_2) \\ &= 1 + 2F_3 F_3 \\ &= 1 + 2.3.3 = 19 \le 1 + 9.2^{6-5} = 19 \end{aligned}$$

olur.

$n \ge 7$ için üç durum söz konusudur.

1. Durum: $G \simeq H_{n,3,3}$ ise

x, $H_{n,3,3}$ grafında maksimum dereceli köşe olsun. Bu takdirde



$H_{n,3,3}$

Şekil 4.27.

$$\begin{aligned} f\left(H_{n,3,3}\right) &= f_x\left(H_{n,3,3}\right) + f_{-x}\left(H_{n,3,3}\right) \\ &= 1 + f\left(P_2\right) f\left(P_2\right) f\left(K_{n-5}\right) \\ &= 1 + 9.2^{n-5} \end{aligned}$$

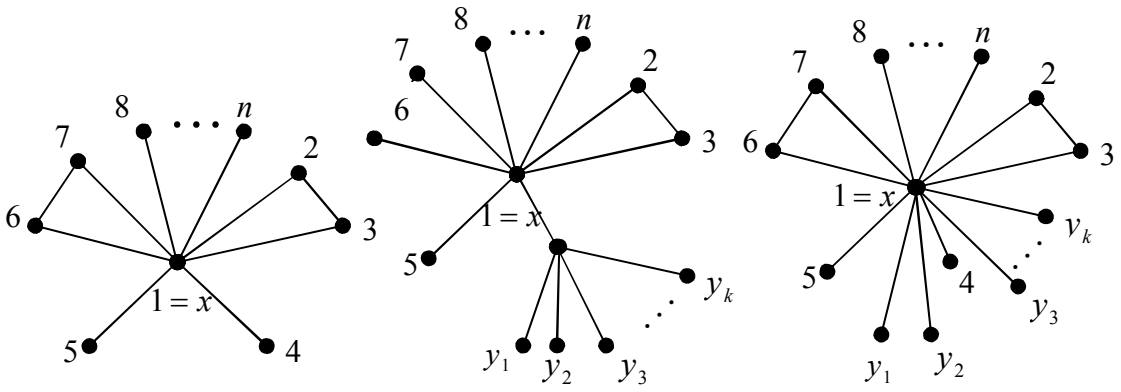
olur ki istenendir.

2. Durum: $G \simeq R$ ise

R, $6 \le p \le n$ olmak üzere $H_{p,3,3}$ grafının en az bir yaprağına en az bir yaprak eklenmesi ile elde edilen bir graf olsun. $y \in V\left(H_{p,3,3}\right)$ yaprağına eklenen R grafındaki yapraklar $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} (k \ge 1)$ şeklinde gösterilsin. Ayrıca

$$V\left(R^*\right) = V\left(R\right) \quad \text{ve} \quad E\left(R^*\right) = \left[E\left(R\right) \setminus \{yy_1, yy_2, \ldots yy_k\} \cup \{xy_1, xy_2, \ldots xy_k\}\right]$$

şeklinde elde edilen graf R^* ile gösterilsin.



$H_{p,3,3}$ $\qquad$ R $\qquad$ R^*

Şekil 4.28.

R ve R^* grafları için

$$f\left(R^*\right) > f\left(R\right)$$

dir. Gerçekten R_x, $R - xy$ grafının x'i içeren bileşeni olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(R\right) &= f_x\left(R\right) + f_{-x}\left(R\right) \\ &= f_x\left(R_x\right)2^k + f_{-x}\left(R_x\right)\left(1+2^k\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(R^*\right) &= f_x\left(R^*\right) + f_{-x}\left(R^*\right) \\ &= f_x\left(R_x\right)2^k + f_{-x}\left(R_x\right)2^{k+1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f\left(R^*\right) - f\left(R\right) &= f_x\left(R_x\right)2^k + f_{-x}\left(R_x\right)2^{k+1} - \left[f_x\left(R_x\right)2^k + f_{-x}\left(R_x\right)\left(1+2^k\right)\right] \\ &= \left(1-2^k\right) f_x\left(R_x\right) + \left(2^k - 1\right) f_{-x}\left(R_x\right) \\ &= \left(2^k - 1\right)\left(f_{-x}\left(R_x\right) - f_x\left(R_x\right)\right) \end{aligned}$$

olup $f_{-x}\left(R\right) > f_x\left(R\right)$ olduğundan $f\left(R^*\right) > f\left(R\right)$ dir. Benzer şekilde p ile iteratif olarak

$$R^* \simeq H_{n,3,3}$$

elde edilir. Bu durumda

$$f\left(R^*\right) = f\left(H_{n,3,3}\right) > f\left(R\right)$$

olup 1. durumdaki sonuç kullanılarak

$$1+9.2^{n-5}=f\left(H_{n,3,3}\right)>f\left(R\right)$$

olur.

3. Durum: $G\not\cong H_{n,3,3}$ ve $G\not\cong R$ ise G grafında çap$(T)\geq 5$ olacak şekilde bir kapsayıcı ağaç vardır. Teorem 4.1.2.'den

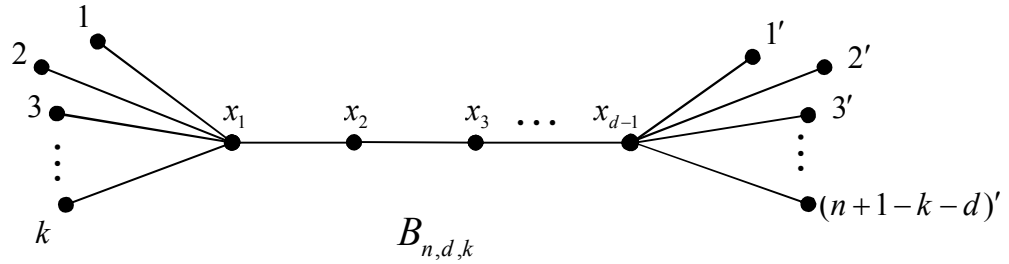
$$f\left(G\right)<f\left(T\right)\leq F_{5-1}+2^{n-5}F_5=F_4+2^{n-5}F_5=5+8.2^{n-5}\leq 9.2^{n-5}+1$$

olur ki istenendir. □

4.2. Ağaçlarda Fibonacci Sayısı

Bu kısımda bazı özel ağaçların Fibonacci sayıları ile ilişkileri verilmiştir. Öncelikle Broom grafları tanımlanarak, bu graflar üzerindeki incelemeler sonucu ağaçların Fibonacci sayıları için bir üst sınır elde edilmiştir. Ardından $P_{n,v_k,G}$ ve T_{n_1,n_2,n_3} ağaçları tanımlanarak, Fibonacci sayılarına göre bu ağaçlar sıralanmıştır.

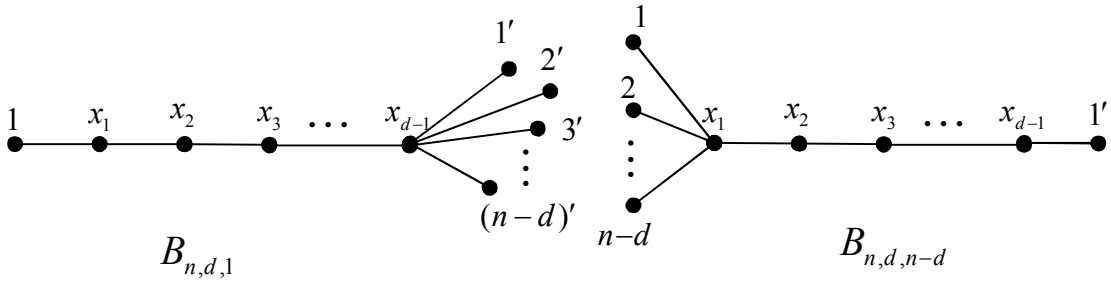
Tanım 4.2.1. $d\geq 3$, $n\geq d+1$ ve $1\leq k\leq n-d$ olmak üzere (n,d,k) tamsayı üçlüsü verilsin. $P_{d-1}: x_1\ldots x_{d-1}$ patikasında x_1 köşesine k tane ve x_{d-1} köşesine de $n+1-k-d$ tane yaprak eklenmesi ile elde edilen grafa *süpürge (broom) graf* denir ve $B_{n,d,k}$ şeklinde gösterilir.



Şekil 4.29.

$B_{n,d,k}$ süpürge grafı n. mertebeden d çaplı bir ağaçtır. x_1 ve x_{d-1} köşeleri bu ağacın iki kökünü oluşturur. Ayrıca x_1 ve x_{d-1} köklerine sırasıyla k ve $n+1-k-d$ tane yaprak bağlıdır.

$B_{n,d,1}$ ve $B_{n,d,n-d}$ süpürge graflarına *basit süpürge* denir. Aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi bu graflar izomorf graflardır.



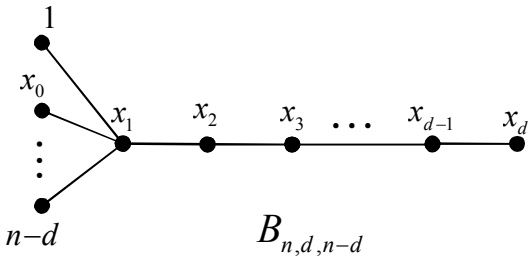
Şekil 4.30.

Lemma 4.2.1. $d \geq 3$ ve $n \geq d+1$ olmak üzere (n,d) ikilisi verilsin. Bu durumda

$$f\left(B_{n,d,1}\right) = f\left(B_{n,d,n-d}\right) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

dir.

İspat. $B_{n,d,1}$ ve $B_{n,d,n-d}$ grafları izomorf graflardır. Dolayısıyla Fibonacci sayıları eşit olacağından sadece birini göz önüne alalım.

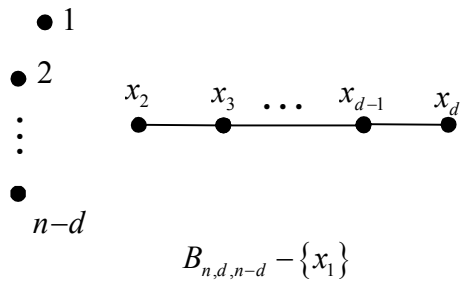


Şekil 4.31.

$P_{d+1} : x_0 x_1 \ldots x_d$ patikası $B_{n,d,n-d}$ grafının çapını belirleyen patikayı göstersin. $B_{n,d,n-d}$ grafının Fibonacci sayısını, grafın x_1 köşesi üzerinden indirgeme formülü ile hesaplayabiliriz. Yani

$$f\left(B_{n,d,n-d}\right) = f_{x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right) + f_{-x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right)$$

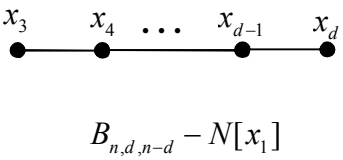
olur. Aşağıdaki graftan da kolayca görülebileceği gibi $f_{-x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right) = f\left(B_{n,d,n-d} - \{x_1\}\right)$ olup



Şekil 4.32.

$$f\left(B_{n,d,n-d}-\{x_1\}\right)=f\left(\overline{K_{n-d}}\right)f\left(P_{d-1}\right)$$
$$=2^{n-d}F_d$$

olur. Öte yandan $f_{x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right)=f\left(B_{n,d,n-d}-N\left[x_1\right]\right)$ olduğundan ve yine aşağıdaki graftan da kolayca anlaşılabileceği gibi $B_{n,d,n-d}-N\left[x_1\right]\simeq P_{d-2}$ olduğundan



Şekil 4.33.

$$f_{x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right)=f\left(B_{n,d,n-d}-N\left[x_1\right]\right)=f\left(P_{d-2}\right)=F_{d-1}$$

olur. Sonuç olarak $B_{n,d,n-d}$ grafının Fibonacci sayısı

$$f\left(B_{n,d,n-d}\right)=f_{x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right)+f_{-x_1}\left(B_{n,d,n-d}\right)$$
$$=f\left(B_{n,d,n-d}-N\left[x_1\right]\right)+f\left(B_{n,d,n-d}-\{x_1\}\right)$$
$$=F_{d-1}+2^{n-d}F_d$$

dir. □

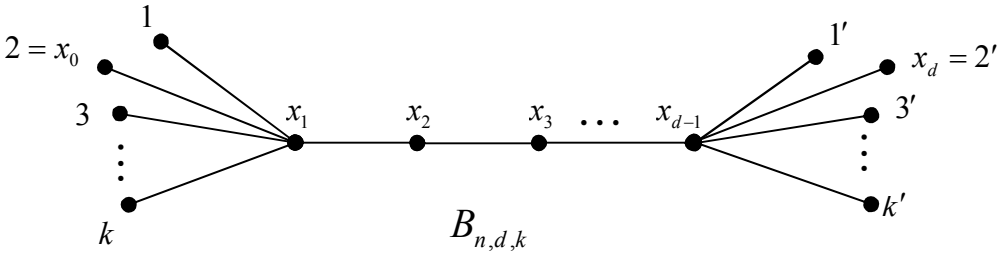
Teorem 4.2.1. $d\geq 3$, $n\geq d+1$ ve $1\leq k\leq n-d$ olmak üzere $\left(n,d,k\right)$ üçlüsü verilsin. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $f\left(B_{n,d,k}\right) = F_{d-3} + \left(2^k + 2^{k'}\right)F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1} \quad (k' = n-k-d+1)$

ii) $f\left(B_{n,d,k}\right) \le F_d + 2^{n-d}F_{d+1}$.

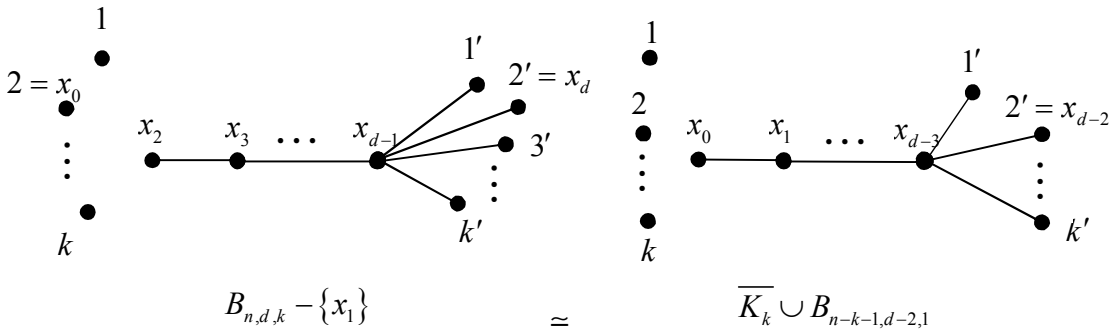
İspat.

i) Öncelikle $B_{n,d,k}$ süpürge grafındaki bağımsız kümeleri sayalım. $P_{d+1} : x_0x_1 \ldots x_d$ patikası, $B_{n,d,k}$ grafının kapsadığı maksimum uzunluklu patika olsun. x_1, grafın k tane yaprağının bağlı olduğu kök ve x_{d-1} de $k' = n-d+1-k$ tane yaprağının bağlı olduğu diğer kök olsun.



Şekil 4.34.

$B_{n,d,k}$ grafının Fibonacci sayısını x_1 köşesi üzerinden indirgeme formülü ile hesaplayalım.



Şekil 4.35.

şekilden de görüldüğü gibi

$$B_{n,d,k} - \{x_1\} \simeq \overline{K_k} \cup B_{n-k-1,d-2,1}$$

dir. Bu durumda

$$f\left(B_{n,d,k}-\{x_1\}\right)=f\left(\overline{K_k}\cup B_{n-k-1,d-2,1}\right)$$
$$=f\left(\overline{K_k}\right)f\left(B_{n-k-1,d-2,1}\right)$$
$$=2^k\left(F_{d-2}+2^{n-k-d+1}F_{d-1}\right)$$

dir. Öte yandan

$$B_{n,d,k}-N[x_1]\simeq B_{n-k-2,d-3,1}$$

olup

$$f\left(B_{n,d,k}-N[x_1]\right)=f\left(B_{n-k-2,d-3,1}\right)$$
$$=F_{d-3}+2^{n-k-d+1}F_{d-2}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak $B_{n,d,k}$ grafının Fibonacci sayısı

$$f\left(B_{n,d,k}\right)=f_{-x_1}\left(B_{n,d,k}\right)+f_{x_1}\left(B_{n,d,k}\right)$$
$$=f\left(B_{n,d,k}-\{x_1\}\right)+f\left(B_{n,d,k}-N[x_1]\right)$$
$$=2^k\left(F_{d-2}+2^{n-k-d+1}F_{d-1}\right)+F_{d-3}+2^{n-k-d+1}F_{d-2}$$
$$=2^k\left(F_{d-2}+2^{k'}F_{d-1}\right)+F_{d-3}+2^{k'}F_{d-2}$$
$$=F_{d-3}+F_{d-2}\left(2^k+2^{k'}\right)+2^{n-d+1}F_{d-1}$$

olur ki istenendir.

ii) $B_{n,d,k}$ grafının Fibonacci sayısı formülünde (yani i) de) $k=1$ alınarak

$$f\left(B_{n,d,1}\right)=F_{d-3}+\left(2+2^{n-d}\right)F_{d-2}+2^{n-d+1}F_{d-1}$$
$$=F_{d-1}+F_{d-2}+2^{n-d}\left(F_d+F_{d-1}\right)$$
$$=F_d+2^{n-d}F_{d+1}$$

olur. $k=n-d$ için de benzer şekilde hesaplama yapılır.

$1 < k < n-d$ için

$$f\left(B_{n,d,k}\right) < F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$2^k + 2^{n-d+1-k} < 2 + 2^{n-d}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\alpha = n-d$ olsun.

$$\begin{aligned} k &< n-d \\ k &< \alpha \\ 2^k &< 2^\alpha \\ 2^{k+1} &< 2^{\alpha+1} \\ \left(2^{k-1}-1\right)2^{k+1} &< \left(2^{k-1}-1\right)2^{\alpha+1} \\ 2^{2k} + 2^{\alpha+1} &< 2^{\alpha+k} + 2^{k+1} \\ 2^k + 2^{n-d+1-k} &< 2^{n-d} + 2 \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} F_{d-3} + \left(2^k + 2^{n-d+1-k}\right)F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1} &< F_{d-3} + \left(2 + 2^{n-d}\right)F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1} \\ f\left(B_{n,d,k}\right) &< F_d + 2^{n-d}F_{d+1} \end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 4.2.1. $1 \le d \le 3$ olmak üzere d çaplı *n.* mertebeden bir ağaç için

$$f\left(T\right) \le F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

dir. Ayrıca

i) $d = 1$ için $T \simeq K_2$ olup $f\left(T\right) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$ olur.

ii) $d = 2$ için $T \simeq K_{1,n-1}$ olup

$$f(T) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olur.

iii) $d = 3$ için $T \simeq B_{n,3,k}$ olup $1 \le k \le n-3$ olmak üzere

$$f(T) \le F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olur. ($k \in \{1, n-3\}$ için eşitlik elde edilir.)

Sonuç 4.2.2. $d \ge 3$ ve $n \ge d+1$ için

$$f\left(B_{n,d,1}\right) < f\left(B_{n,d-1,1}\right)$$

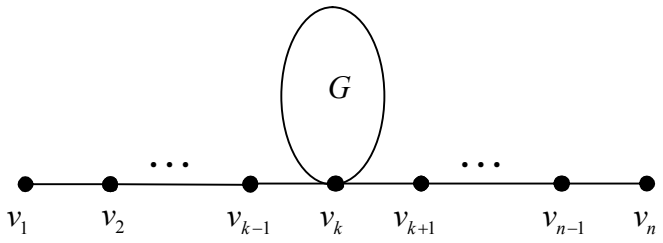
dir.

İspat.

$$\begin{aligned} 1 &< 2^{n-d} \\ F_{d-2} &< 2^{n-d} F_{d-2} \\ F_d - F_{d-1} &< 2^{n-d}\left(2F_d - F_{d+1}\right) \\ F_d + 2^{n-d} F_{d+1} &< F_{d-1} + 2^{n-(d-1)} F_d \\ f\left(B_{n,d,1}\right) &< f\left(B_{n,d-1,1}\right) \end{aligned}$$

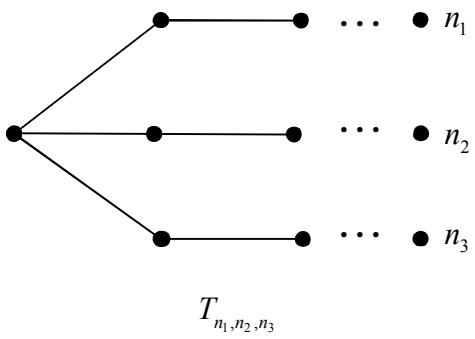
olur ki istenendir. □

Tanım 4.2.2. G herhangi bir ağaç ve $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bir patika olmak üzere $P_{n,v_k,G}$ ve T_{n_1,n_2,n_3} ağaçları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi tanımlanır.



$P_{n,v_k,G}$

Şekil 4.36.



Şekil 4.37.

Tanım 4.2.3. G ve H grafları verilsin. Eğer $f(G) \geq f(H)$ ise $G \geq H$ şeklinde sıralanırlar. $f(G) > f(H)$ oluyorsa $G > H$ şeklinde sıralanır.

Teorem 4.2.2. $n = 4m + i,\ i \in \{1,2,3,4\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere

$$P_{n,v_2,G} > P_{n,v_4,G} > \ldots > P_{n,v_{2m+2p},G} > P_{n,v_{2m+1},G} > \ldots > P_{n,v_3,G} > P_{n,v_1,G}$$

dir. Ayrıca $i = 1$ veya $i = 2$ ise $p = 0$, $i = 3$ veya $i = 4$ ise $p = 1$ olur.

İspat. $P_{n,v_k,G}$ grafının v_k köşesi üzerinden indirgeme yaparak Fibonacci sayısını hesaplayalım. $f(G - v_k) = A$ ve $f(G - N[v_k]) = B$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(P_{n,v_k,G}) &= f_{v_k}(P_{n,v_k,G}) + f_{-v_k}(P_{n,v_k,G}) \\ &= f(P_{v_{k-2}}) f(G - N[v_k]) f(P_{v_{n-k-1}}) + f(P_{v_{k-1}}) f(G - v_k) f(P_{v_{n-k}}) \\ &= BF_k F_{n-k+1} + AF_{k+1} F_{n-k+2} \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Ayrıca

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{5}$$

ve

$$F_a F_b = \frac{L_{a+b} - (-1)^a L_{b-a}}{5}$$

olduğundan

$$F_a F_b = \frac{\alpha^{a+b} + \beta^{a+b} - (\alpha\beta)^a \beta^{b-a} - (\alpha\beta)^a \alpha^{b-a}}{5}$$
$$= \frac{\alpha^{a+b} + \beta^{a+b} - (-1)^a (\alpha^{b-a} + \beta^{b-a})}{5}$$
$$= \frac{L_{a+b} - (-1)^a L_{b-a}}{5}$$

olup bu eşitlik kullanılarak (4.6) denklemi yeniden düzenlenirse;

$$f(P_{n,v_k,G}) = AF_{k+1}F_{n-k+2} + BF_k F_{n-k+1}$$
$$= A\left[\frac{L_{n+3} - (-1)^{k+1} L_{n-2k+1}}{5}\right] + B\left[\frac{L_{n+1} - (-1)^k L_{n-2k+1}}{5}\right] \text{o} \qquad (4.7)$$
$$= \frac{1}{5}\left(AL_{n+3} + BL_{n+1} + (-1)^k L_{n-2k+1}(A-B)\right)$$

olarak elde edilir.

$G - N[v_k]$ grafının her bir bağımsız kümesi aynı zamanda $G - v_k$ grafının da bağımsız kümesi olduğundan $B < A$ dır. Ayrıca $P_{n,v_k,G} \simeq P_{n,v_{n-k+1,G}}$ dir. (4.7) eşitliği kullanılarak $i \in \{1,2\}$ için

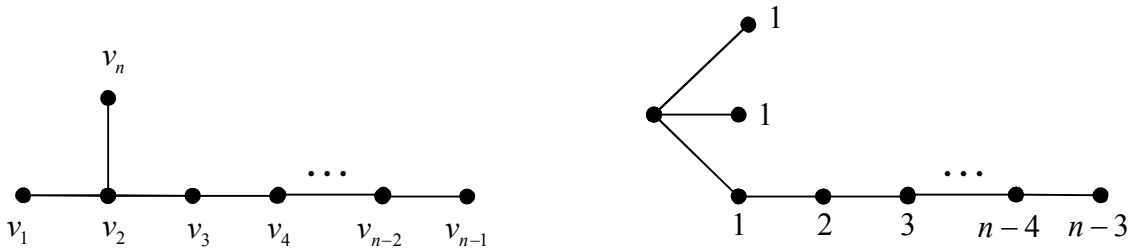
$$P_{n,v_2,G} > P_{n,v_4,G} > \ldots > P_{n,v_{2m},G} > P_{n,v_{2m+1},G} > \ldots > P_{n,v_3,G} > P_{n,v_1,G}$$

$i \in \{3,4\}$ için

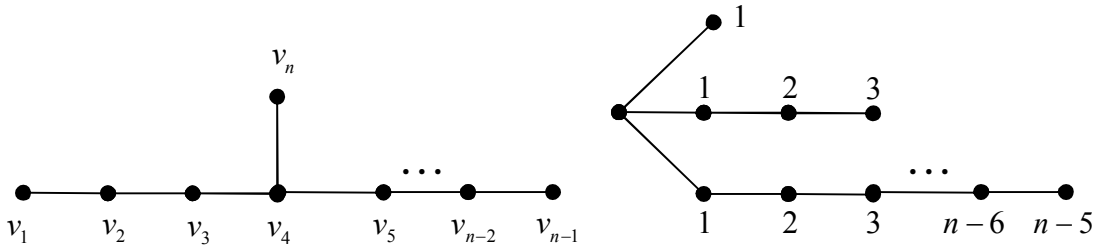
$$P_{n,v_2,G} > P_{n,v_4,G} > \ldots > P_{n,v_{2m+2},G} > P_{n,v_{2m+1},G} > \ldots > P_{n,v_3,G} > P_{n,v_1,G}$$

olur. □

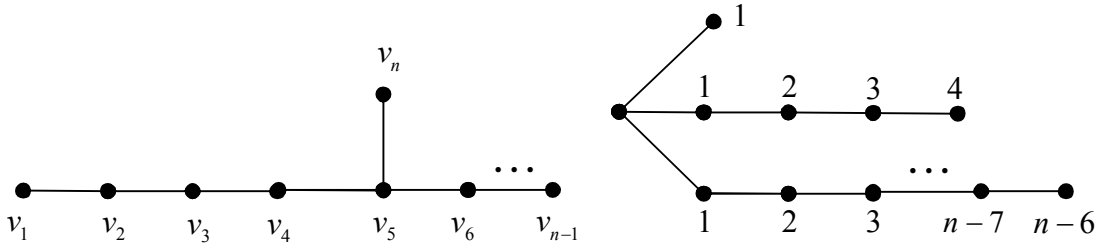
Sonuç 4.2.3. $G \simeq P_2$ alınarak aşağıdaki izomorf graflar elde edilir.



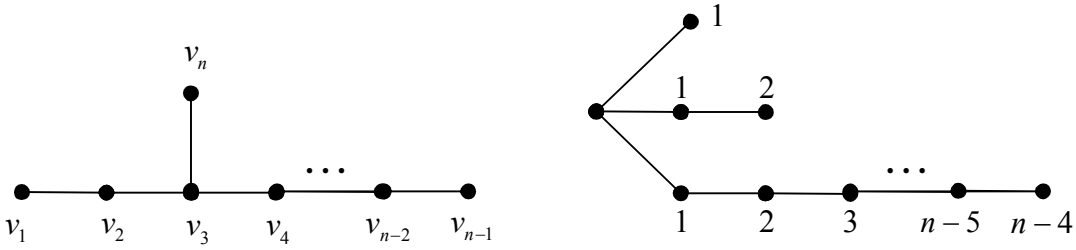
$P_{n,v_2,G} \simeq T_{1,1,n-3}$



$P_{n,v_4,G} \simeq T_{1,3,n-5}$



$P_{n,v_5,G} \simeq T_{1,4,n-6}$



$P_{n,v_3,G} \simeq T_{1,2,n-4}$

Şekil 4.38.

grafları göz önüne alınarak ve Teorem 4.2.2. kullanılarak

$$T_{1,1,n-3} \succ T_{1,3,n-5} \succ \ldots \succ T_{1,4,n-6} \succ T_{1,2,n-4}$$

elde edilir. Benzer şekilde $G \simeq P_3$ alınıp, Teorem 4.2.2.'den

$$T_{2,1,n-4} \succ T_{2,3,n-6} \succ \ldots \succ T_{2,4,n-7} \succ T_{2,2,n-5}$$

elde edilir. Ayrıca $T_{1,2,n-4} \simeq T_{2,1,n-4}$ olduğundan yukarıdaki sıralamalar birleştirilirse

$$T_{1,1,n-3} \succ T_{1,3,n-5} \succ \ldots \succ T_{1,4,n-6} \succ T_{1,2,n-4} \succ T_{2,3,n-6} \succ \ldots \succ T_{2,4,n-7} \succ T_{2,2,n-5}$$

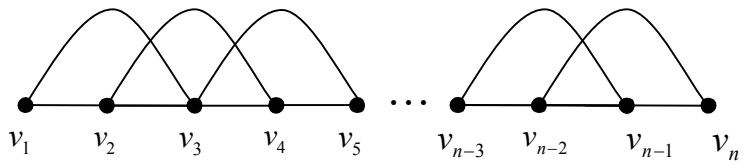
olarak elde edilir.

4.3. Kuvvet Grafları

Tanım 4.3.1. *G*, *n* köşeli herhangi bir graf olmak üzere *G*'de aralarında maksimum *k* uzaklık bulunan köşelerin bir kenar ile bağlanması sonucu elde edilen grafa *G* grafının *k. kuvvet grafı* denir ve $G(n,k)$ veya G_n^k şeklinde gösterilir.

G grafı ile $G(n,k)$ kuvvet grafı aynı köşe kümesine sahiptirler.

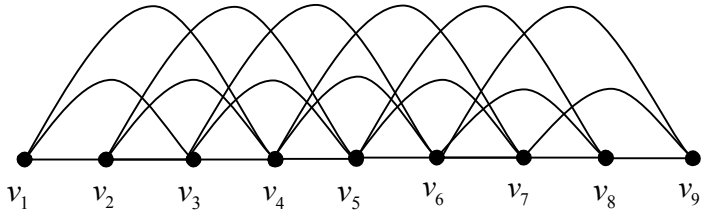
Örnek 4.3.1. P_n patika grafının 2. kuvvet grafı aşağıda gösterildiği gibidir.



$$P_n^2 = P(n,2)$$

Şekil 4.39.

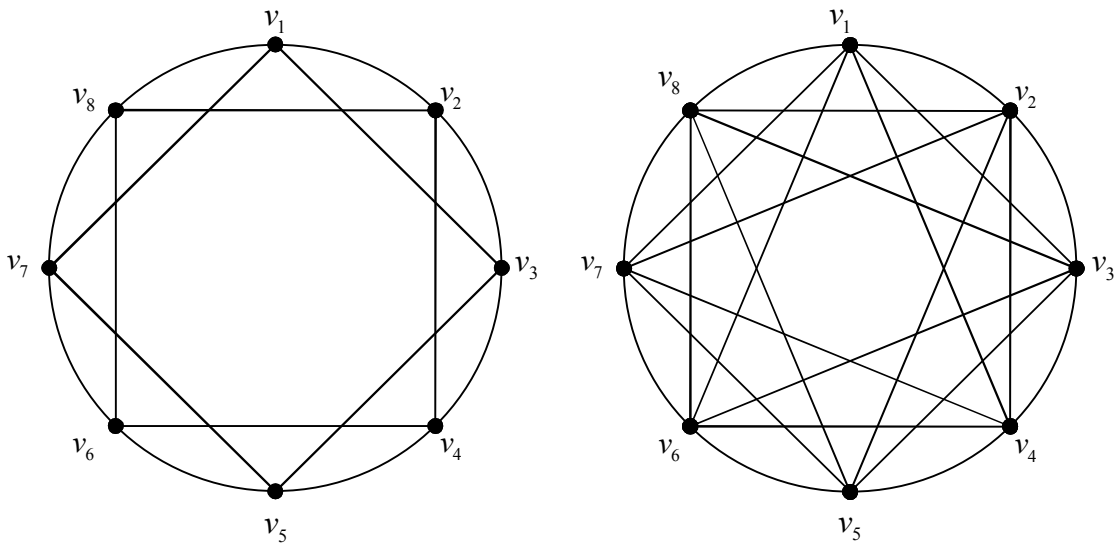
Örnek 4.3.2. P_n patika grafının küp grafı $G = P_9^3 = P(9,3)$ aşağıdaki gibidir.



$$P_9^3 = P(9,3)$$

Şekil 4.40.

Örnek 4.3.3. C_8 ve C_{13} döngülerinin kare grafları aşağıdaki gibidir.



C_8^2 C_8^3

Şekil 4.41.

Sonuç 4.3.1. Herhangi bir *G* grafı için

i) $G(n,0)$, kenar içermeyen *n* köşeli bir graftır.

ii) $G(n,1) = G$ dir.

iii) Eğer *G* bağlantılı bir graf ise $r \geq n-1$ için $G(n,r) = K_n$ olur.

Sonuç 4.3.2. $G(n,0)$ grafının *k*-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı ve Fibonacci sayısı;

$$F_k\left(G(n,0)\right) = \binom{n}{k}, \quad f\left(G(n,0)\right) = 2^n$$

dir.

Şimdi $P(n,r)$ kuvvet grafının Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$r=1$ için $P(n,1)=P_n$ grafının Fibonacci sayıları

$$F_k\left(P(n,1)\right)=\binom{n+1-k}{k}$$
$$f\left(P(n,1)\right)=F_{n+1}$$

dir. $r\geq 2$ için $F_k\left(P(n,r)\right)$ ve $f\left(P(n,r)\right)$ değerleri aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 4.3.1. $n\geq 1$, $r\geq 0$ ve $0\leq k\leq n$ için

$$F_k\left(P(n,r)\right)=F_k\left(P(n-1,r)\right)+F_{k-1}\left(P(n-1-r,r)\right)$$

dir.

İspat. $G=P(n,r)$ grafında v_0 uç köşe olmak üzere

$$G-v_0=P(n-1,r)$$
$$G-N[v_0]=P(n-r-1,r)$$

olduğu görülür. Bu uç köşe üzerinden indirgeme yapıldığında

$$F_k(G)=F_k(G-v_0)+F_{k-1}(G-N[v_0])$$
$$F_k\left(P(n,r)\right)=F_k\left(P(n-1,r)\right)+F_{k-1}\left(P(n-1-r,r)\right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.3.1. $r\geq 0$ ve $0\leq k\leq n$ olmak üzere

$$F_k\left(P(n,r)\right)=\binom{n+r-rk}{k}$$

dır.

İspat. Öncelikle $n \le r+1$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $P(n,r) = K_n$ olur. Bu yüzden

$$F_0\left(P(n,r)\right) = F_0\left(K_n\right) = 1 = \binom{n+r-r.0}{0}$$
$$F_1\left(P(n,r)\right) = F_1\left(K_n\right) = n = \binom{n+r-r.1}{1}$$
$$F_k\left(P(n,r)\right) = F_k\left(K_n\right) = 0 = \binom{1}{k} \ge \binom{n-r}{k} \ge \binom{n+r-r.k}{k} \quad (k \ge 2)$$

olur ki teoremin ifadesi doğrudur.

$n \ge r+2$ için ispatı n köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım. n'den küçük tüm değerler için teoremin ifadesi doğru olsun. Bu durumda

$$F_k\left(P(n,r)\right) = \binom{n+r-r.k}{k}$$

olduğunu gösterelim. Lemma 4.3.1.'den

$$\begin{aligned} F_k\left(P(n,r)\right) &= F_k\left(P(n-1,r)\right) + F_{k-1}\left(P(n-1-r,r)\right) \\ &= \binom{(n-1)+r-rk}{k} + \binom{(n-r-1)+r-r(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-1+r-rk}{k} + \binom{n-1+r-rk}{k-1} \\ &= \binom{n+r-rk}{k} \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.3.2. $n \ge r+2$ için

$$f\left(P(n,r)\right) = f\left(P(n-1,r)\right) + f\left(P(n-r-1,r)\right)$$

dir.

İspat. Lemma 4.3.1. ve

$$f\left(P(n,r)\right)=\sum_{k}F_k\left(P(n,r)\right)$$

den istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de $C(n,r)$ kuvvet grafının Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$r=1$ için $C(n,1)=C_n$ grafının tüm *k*-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı ve Fibonacci sayısı

$$F_k\left(C_n\right)=\begin{cases}1 & ,k=0\\ \dfrac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1} & ,1\le k\le \dfrac{n}{2}\end{cases}$$

$$f\left(C_n\right)=1+\sum_{k\ge 1}\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}=L_n$$

dir. □

$r=2$ için $C(n,2)$ grafının tüm *k*-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.3.3. $n\ge 6$ ve $0\le k\le n$ için

i) $F_k\left(C(n,2)\right)=F_k\left(P(n-2,2)\right)+2F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)$

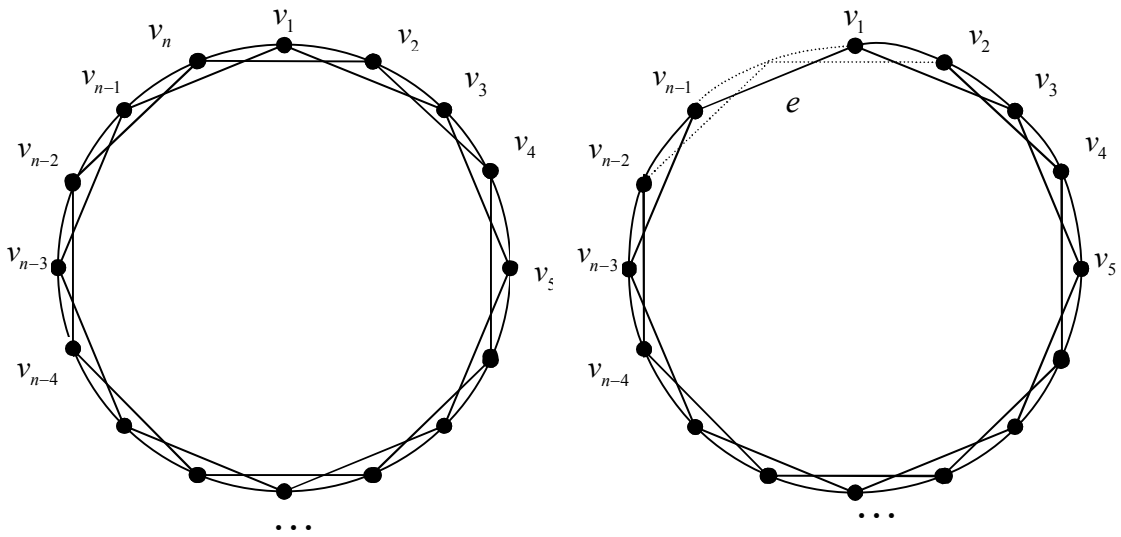
ii) $f\left(C(n,2)\right)=f\left(P(n-2,2)\right)+2f\left(P(n-5,2)\right)$

olur.

İspat. $C(n,2)$ grafının v_n köşesi üzerinden köşe indirgeme formülünden

$$\begin{aligned}f\left(C(n,2)\right)&=f\left(C_n-v_n\right)+f\left(C_n-N[v_n]\right)\\ F_k\left(C(n,2)\right)&=F_k\left(C_n-v_n\right)+F_k\left(C_n-N[v_n]\right)\end{aligned}\qquad(4.8)$$

şeklindedir. Aşağıdaki şekillerden de kolayca görülebileceği gibi

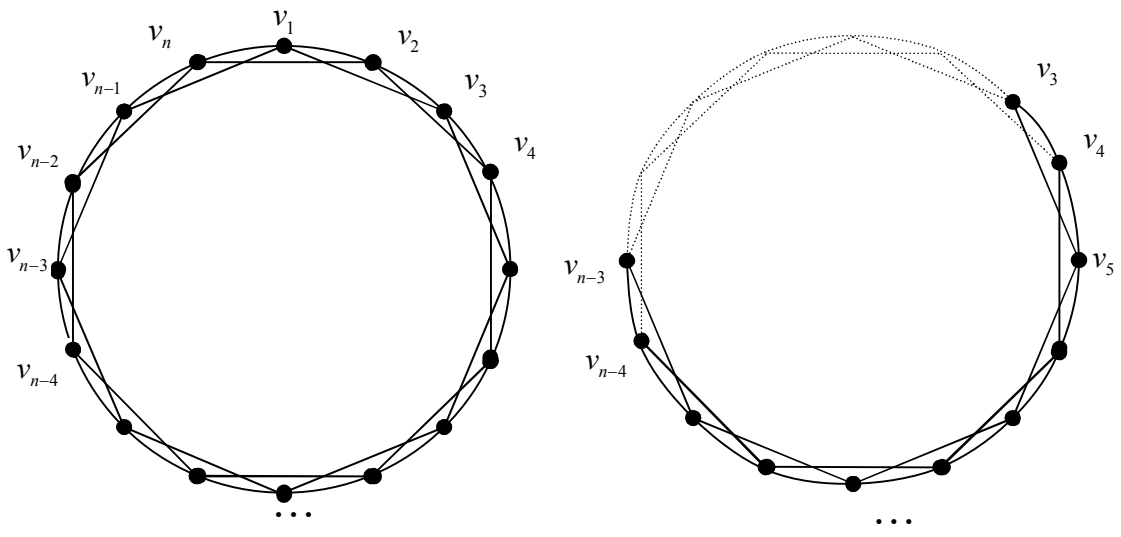


$C(n,2)$ $\qquad$ $C(n,2)-v_n \simeq P(n-1,2)+e$

Şekil 4.42.

$$f(C_n - v_n) = f\left(P(n-1,2)+e\right),$$
$$F_k(C_n - v_n) = F_k\left(P(n-1,2)+e\right) \tag{4.9}$$

ve



$C(n,2)$ $\qquad$ $C(n,2)-N[v_n] \simeq P(n-5,2)$

Şekil 4.43.

$$f(C_n - N[v_n]) = f\left(P(n-5,2)\right),$$
$$F_k(C_n - N[v_n]) = F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right) \tag{4.10}$$

olur. (4.9) ve (4.10) değerleri (4.8) da yerine yazılırsa

$$f\left(C(n,2)\right) = f\left(P(n-1,2)+e\right) + f\left(P(n-5,2)\right),$$
$$F_k\left(C(n,2)\right) = F_k\left(P(n-1,2)+e\right) + F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)$$

olarak elde edilir. $P(n-1,2)+e$ grafında e kenarının v_1 uç köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$\left(P(n-1,2)+e\right)-v_1 = P(n-2,2),$$
$$\left(P(n-1,2)+e\right)-N[v_1] = P(n-5,2)$$

olduğundan

$$f\left(\left(P(n-1,2)+e\right)\right) = f\left(P(n-2,2)\right) + f\left(P(n-5,2)\right),$$
$$F_k\left(\left(P(n-1,2)+e\right)\right) = F_k\left(P(n-2,2)\right) + F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)$$

olup,

$$f\left(C(n,2)\right) = f\left(P(n-2,2)\right) + 2f\left(P(n-5,2)\right),$$
$$F_k\left(C(n,2)\right) = F_k\left(P(n-2,2)\right) + 2F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.3.4. $n \geq 6$ ve $0 \leq k \leq n$ için

$$F_k\left(C(n,2)\right) = \binom{n-2k}{k} + 2\binom{n-1-2k}{k-1}$$

dir.

İspat. Teorem 4.3.3.'den

$$F_k\left(C(n,2)\right) = F_k\left(P(n-2,2)\right) + 2F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)$$

ve $P(n,r)$ kuvvet grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k\left(P_{n,r}\right)=\binom{n+r-rk}{k}$$

olup

$$\begin{aligned}F_k\left(C(n,2)\right)&=F_k\left(P(n-2,2)\right)+2F_{k-1}\left(P(n-5,2)\right)\\&=\binom{n-2+2-2k}{k}+2\binom{n-5+2-2(k-1)}{k-1}\\&=\binom{n-2k}{k}+2\binom{n-1-2k}{k-1}\end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.3.5. $r\geq 0$, $n\geq 2r+2$ olmak üzere $k\geq 1$ için

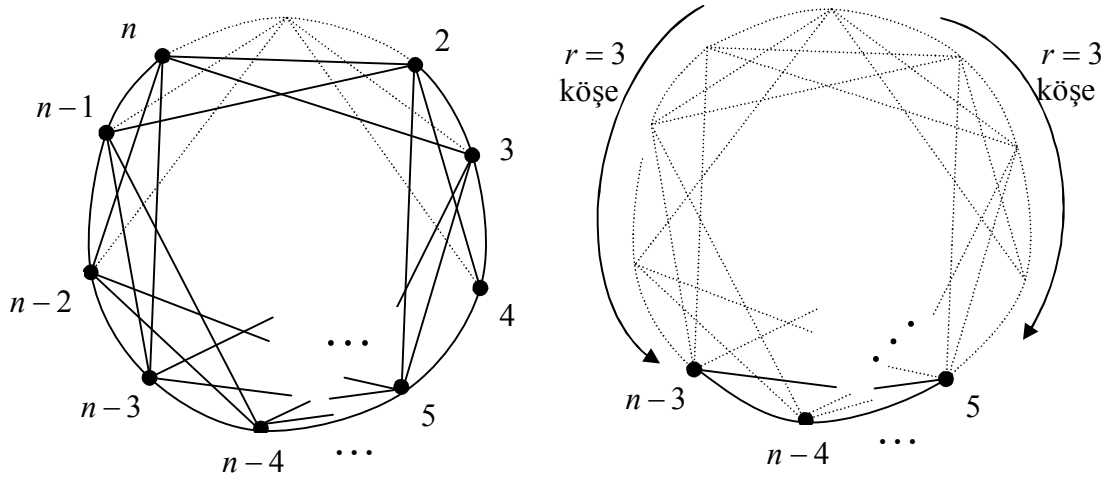
$$\begin{aligned}f\left(C(n,r)\right)&=f\left(P(n-r,r)\right)+r\left[f\left(P(n-1-2r,r)\right)\right],\\F_k\left(C(n,r)\right)&=F_k\left(P(n-r,r)\right)+r\left[F_{k-1}\left(P(n-1-2r,r)\right)\right]\end{aligned}$$

dir.

İspat. $C(n,r)$ grafının köşeleri $1,2,\ldots,n$ şeklinde etiketlenir ve sırasıyla $1,2,\ldots,r$ köşeleri üzerinde indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned}f\left(C(n,r)\right)&=f\left(G_1\right)+f\left(P(n-1-2r,r)\right),\\F_k\left(C(n,r)\right)&=F_k\left(G_1\right)+F_{k-1}\left(P(n-1-2r,r)\right)\end{aligned}$$

olur. G_1, 1 köşesinin kaldırılması ile elde edilen graftır. 1 köşesi ve bu köşenin komşularının kaldırılması ile elde edilen graf ise $P(n-1-2r,r)$ kuvvet grafıdır. Fakat G_1, ne bir patika grafın ne de döngü grafın kuvvetidir. Bulunan bu eşitliklerin daha kolay anlaşılabilmesi için aşağıdaki $C(n,3)$ örneği verilmiştir.



$C(n,3)-\{1\}=G_1$ $\qquad$ $C(n,3)-N[1]=P(n-1-2.3,3)=P(n-7,3)$

Şekil 4.44.

G_1 grafında {2} köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f(G_1)=f(G_2)+f\left(P(n-1-2r,r)\right)$$

olup, buradan

$$f\left(C(n,r)\right)=f(G_2)+2f\left(P(n-1-2r,r)\right),$$
$$F_k\left(C(n,r)\right)=F_k(G_1)+2F_{k-1}\left(P(n-1-2r,r)\right)$$

olur. Bu şekilde adım adım indirgeme yapılıp *i*. köşe kaldırılırsa

$$f\left(C(n,r)\right)=f(G_i)+i\left[f\left(P(n-1-2r,r)\right)\right],$$
$$F_k\left(C(n,r)\right)=F_k(G_i)+i\left[F_{k-1}\left(P(n-1-2r,r)\right)\right]$$

elde edilir. Son olarak $(i+1)$. köşe kaldırıldığında $(i+1)$. köşenin bir tarafında *r* tane diğer tarafında da $(r-i)$ tane komşusu kaldırılacağından

$$G_i - N[i] = P(n-(i+1)-r-(r-i),r)$$
$$= P(n-2r-1,r)$$

olur ve

$$f(G_i) = f(G_{i+1}) + f(P(n-2r-1,r))$$

elde edilir. Böylece

$$f(C(n,r)) = f(G_i) + (i+1) f(P(n-1-2r,r))$$

olur. Sonuç olarak $1 \le i \le r$ için

$$f(C(n,r)) = f(G_i) + i[f(P(n-1-2r,r))]$$
$$F_k(C(n,r)) = F_k(G_i) + i[F_{k-1}(P(n-1-2r,r))]$$

elde edilir.

Son olarak $i = r$ için $G_r \simeq P(n-r,r)$ olur ki bu durumda

$$f(C(n,r)) = f(P(n-r,r)) + r[f(P(n-1-2r,r))],$$
$$F_k(C(n,r)) = F_k(P(n-r,r)) + r[F_{k-1}(P(n-1-2r,r))]$$

olur. □

Teorem 4.3.6. $n \ge 2r+2$, $r \ge 0$ ve $0 \le k \le n$ için

$$F_k(C(n,r)) = \binom{n-rk}{k} + r\binom{n-1-rk}{k-1}$$

dir.

İspat. Teorem 4.3.1.'den

$$F_k\left(P(n,r)\right)=\binom{n+r-rk}{k}$$

dir. Ayrıca Teorem 4.3.6. da kullanılarak

$$\begin{aligned}F_k\left(C(n,r)\right)&=F_k\left(P(n-r,r)\right)+r\left[F_{k-1}\left(P(n-1-2r,r)\right)\right]\\&=\binom{(n-r)+r-rk}{k}+r\binom{n-1-2r+r-r(k-1)}{k-1}\\&=\binom{n-rk}{k}+r\binom{n-1-rk}{k-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. Grafların Fibonacci Polinomu

Tanım 4.4.1. G grafı verilsin. k pozitif bir tamsayı olmak üzere, G'nin k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı $F_k(G)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\sum F_k\left(G\right)x^k$$

şeklinde elde edilen polinoma *G grafının Fibonacci polinomu* denir ve $f_G\left(x\right)$ veya $f\left(G\right)\left(x\right)$ şeklinde gösterilir.

Lemma 4.4.1. $G=\left(V,E\right)$ grafı verilsin. G grafına ait herhangi bir $v\in V$ köşesi için

$$\begin{aligned}f_{G-v}\left(x\right)&=\sum_{k\geq 0}a_kx^k\\f_{G-N[v]}\left(x\right)&=\sum_{k\geq 0}b_kx^k\end{aligned}$$

ise $k\geq 1$ için G grafının k-elemanlı bağımsız kümesi

$$f_k = a_k + b_{k-1}$$

dir.

Teorem 4.4.1. *v,* $G = (V, E)$ grafının herhangi bir köşesi olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G-v}(x) + x f_{G-N[v]}(x)$$

dir.

İspat. Lemma 4.4.1. kullanılarak eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f_{G-v}(x) + x f_{G-N[v]}(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k + x \sum_{k\geq 0} b_k x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k + \sum_{k\geq 1} b_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k\geq 1} (a_k + b_{k-1}) x^k \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1} f_k x^k \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.4.2. e, uç köşeleri v_1 ve v_2 olan $G = (V, E)$ grafına ait bir kenar olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{G-e}(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k \\ f_{G-N[e]}(x) &= \sum_{k\geq 0} b_k x^k \end{aligned}$$

ise $k \geq 2$ için $f_k = a_k - b_{k-2}$ dir.

Teorem 4.4.2. *e,* $G = (V, E)$ grafına ait bir kenar olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G-e}(x) - x^2 f_{G-N[e]}(x)$$

dir.

İspat. Lemma 4.4.2. kullanılarak eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse;

$$\begin{aligned} f_{G-e}(x) - x^2 f_{G-N[e]}(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k - x^2 \sum_{k\geq 0} b_k x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} a_k x^k - \sum_{k\geq 2} b_{k-2} x^k \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{k\geq 2} (a_k - b_{k-2}) x^k \\ &= 1 + f_1 x + \sum_{k\geq 2} f_k x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} f_k x^k \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 4.4.3. $G_1, G_2, \ldots, G_n$'ler G grafına ait bileşenler olmak üzere G grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k(G) = \sum F_{j_1}(G_1) F_{j_2}(G_2) \ldots F_{j_n}(G_n)$$

dir.

İspat. $n = 2$ için ispat yapalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir. G grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin j-elemanlı bağımsız kümesi G_1 bileşenine, $k - j$-elemanlı bağımsız kümesi G_2 bileşenine ait olsun. Bu durumda G grafının k-elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k(G) = \sum_{j=0}^{k} F_j(G_1) F_{k-j}(G_2)$$

şeklinde hesaplanır. □

Teorem 4.4.3. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ G grafına ait bileşenler olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G_1}(x) f_{G_2}(x) \ldots f_{G_n}(x)$$

dir.

İspat. $n=2$ için ispat yapalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned} f_{G_1}(x) f_{G_2}(x) &= \sum_{k\geq 0} g_k x^k \sum_{k\geq 0} h_k x^k \\ &= \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}^{k} \left(g_l(G_1)\right)\left(h_{k-l}(G_2)\right) x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} f_k(G) x^k \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

olur. □

Lemma 4.4.4. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ graflarının toplamı G olsun. Bu durumda

$$f_G(x) = f_{G_1}(x) + f_{G_2}(x) + \ldots + f_{G_n}(x) - (n-1)$$

dir.

İspat. $n=2$ için hesaplayalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$\begin{aligned} f_{G_1}(x) + f_{G_2}(x) - 1 &= 1 + \sum_{k\geq 1} f_{1_k} x^k + 1 + \sum_{k\geq 1} f_{2_k} x^k - 1 \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1} \left(f_{1_k} + f_{2_k}\right) x^k \\ &= \sum_{k\geq 0} f_k x^k \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

olur. □

Lemma 4.4.5. *G*, *m* köşeli bir graf olmak üzere

$$f_G(x) - 1 = x\left[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \ldots + f_{G-v_1-v_2-\ldots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)\right]$$

dir.

İspat. *G* grafında herhangi bir v_1 köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_G(x) = f_{G-v_1}(x) + xf_{G-N[v_1]}(x) \tag{4.11}$$

olur. $G - v_1$ grafında v_2 köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_{G-v_1}(x) = f_{G-v_1-v_2}(x) + xf_{G-v_1-N[v_2]}(x)$$

olur. Bu değer (4.11) de yerine yazılırsa

$$f_G(x) = f_{G-v_1-v_2}(x) + x\left[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x)\right]$$

olur. Bu şekilde köşe indirgemeye devam edilerek *m* köşenin sırasıyla hepsi kaldırılırsa

$$\begin{aligned} f_G(x) &= f_{G-v_1-v_2-\ldots-v_m}(x) + x\left[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \ldots + f_{G-v_1-v_2-\ldots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)\right] \\ &= f_{\varnothing}(x) + x\left[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \ldots + f_{G-v_1-v_2-\ldots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)\right] \end{aligned}$$

olup

$$f_G(x) - 1 = x\left[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \ldots + f_{G-v_1-v_2-\ldots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)\right]$$

olur. □

Teorem 4.4.4. K_n tam grafının Fibonacci polinomu

$$f_{K_n}(x) = 1 + nx$$

dir.

İspat. K_n grafında 0-elemanlı bağımsız küme sadece $\varnothing$ olduğundan $F_0(K_n) = 1$'dir. 1-elemanlı bağımsız küme sayısı $F_1(K_n) = n$'dir. K_n grafında tüm köşeler komşu olduğundan $i \geq 2$ için $F_i(K_n) = 0$ olur. Bu takdirde,

$$f_{K_n}(x) = \sum_{k\geq 0} F_k x^k = 1 + nx$$

olarak elde edilir. □

Lemma 4.4.6. Herhangi bir G grafı ve bu grafa ait $f_G(x)$ Fibonacci polinomu verilsin. Bu durumda $x = 1$ için

$$f_G(1) = f(G)$$

dir.

İspat. $f_G(1) = \sum_{k\geq 0} F_k(G) = f(G)$ olur. □

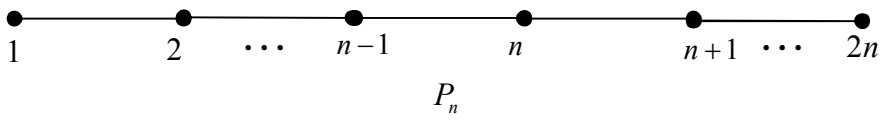
Tanım 4.4.2. G_1 ve G_2 grafları verilsin. Eğer

$$f_{G_1}(x) = f_{G_2}(x)$$

oluyorsa G_1 ve G_2 graflarına *bağımsız denk graflar* denir.

Sonuç 4.4.1. G_1 ve G_2 grafları bağımsız denk graflar ise her $k \geq 0$ için $F_k(G_1) = F_k(G_2)$ dir.

Teorem 4.4.5. $n \geq 2$ olmak üzere P_{2n} patikası ile $G = P_{n-1} \cup C_{n+1}$ birleşim grafı bağımsız denktir.



P_n

Şekil 4.45.

P_n grafının n. köşesi üzerinden köşe indirgeme formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_{P_{2n}}(x) &= f_{P_{2n-\{n\}}}(x) + x f_{P_{2n-N[n]}}(x) \\ &= f_{P_{n-1}}(x) + x f_{P_{n-2}}(x) f_{P_{n-1}}(x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. G, P_{n-1} ve C_{n+1} graflarının birleşimi olduğundan

$$f_G(x) = f_{P_{n-1}}(x) f_{C_{n+1}}(x) \tag{4.13}$$

olur. C_{n+1} grafının herhangi bir köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_{C_{n+1}}(x) = f_{P_n}(x) + x f_{P_{n-2}}(x)$$

olup bu değer (4.13) de yerine yazılırsa

$$f_G(x) = f_{P_{n-1}}(x) f_{P_n}(x) + x f_{P_{n-2}}(x) f_{P_{n-1}}(x) \tag{4.14}$$

olur ki (4.12) ve (4.14) değerleri eşit olduğundan P_{2n} ve G grafları bağımsız denktir. □

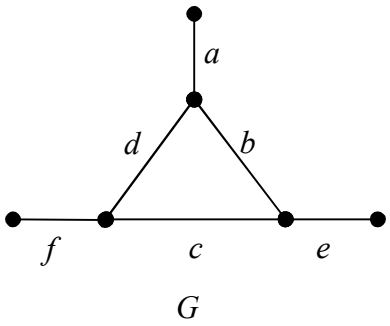
4.5. Grafların Bağımsız Kenar Kümeleri

Önceki kısımda bağımsız köşe kümesini tanımlamıştık. Bu kısımda ise bağımsız kenar kümesi kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri elde edilecektir.

$G = (V, E)$ grafı ve $M \subseteq E(G)$ alt kümesi verilsin. Eğer M kümesine ait herhangi iki kenar G grafında komşu olmuyorsa, yani ortak köşe ile bağlı değilse bu durumda M kümesini bağımsız kenar kümesi (matching) olarak tanımlamıştık. G grafının tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı $|M(G)|$ şeklinde gösterilir.

$\varnothing$ ve 1 elemanlı kümeler bağımsız kenar kümesi kabul edilirler.

Örnek 4.5.1. Aşağıda verilen G grafını göz önüne alalım.



Şekil 4.46.

G grafının tüm bağımsız kenar kümelerinin kümesi

$$M(G)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{a,c\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,f\},\{d,e\},\{e,f\},\{a,e,f\}\}$$

olup $|M(G)|=14$'tür.

Lemma 4.5.1. $G=(V,E)$ grafı verilsin. Bu takdirde

i) $|M(G)|=|M(G-uv)|+|M(G-\{u,v\})|$

ii) $|M(G)|=|M(G-v)|+\sum_{u\in N(v)}|M(G-\{u,v\})|$

dir.

İspat.

i) $uv\in E(G)$ için G grafının tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı, G'nin uv kenarını içeren ve içermeyen bağımsız kenar küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

G grafının uv kenarını içermeyen bağımsız kenar kümelerinin sayısı G grafından uv kenarının silinmesi ile elde edilen $G-uv$ alt grafının bağımsız kenar küme sayısı kadardır.

G grafının uv kenarını içeren bağımsız kenar kümelerinde, u ve v köşelerini uç köşe kabul eden kenarlar yer almayacaktır. Bu yüzden G grafının uv kenarını içeren bağımsız kenar kümelerinin sayısı G grafından u ve v köşelerinin silinmesi ile elde edilen $G-\{u,v\}$ alt grafının bağımsız kenar küme sayısına eşit olur. Sonuç olarak

$$|M(G)|=|M(G-uv)|+|M(G-\{u,v\})|$$

dir.

ii) $v\in V(G)$ için G grafının tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı, G'nin v köşesini içeren ve içermeyen bağımsız kenar küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

G grafının v köşesini içermeyen bağımsız kenar kümelerinin sayısı, G grafından v köşesinin silinmesi ile elde edilen $G-v$ alt grafının bağımsız kenar küme sayısına eşitir.

v köşesi kendisi ile komşu olan köşeler ile bir kenar oluşturacağından G grafının v köşesini içeren bağımsız kenar kümelerinin sayısı, G'nin ayrı ayrı v ile oluşturulan kenarlarını içeren bağımsız kenar küme sayılarının toplamı kadar olur.Sonuç olarak

$$\left|M\left(G\right)\right| = \left|M\left(G-v\right)\right| + \sum_{u \in N(v)} \left|M\left(G-\{u,v\}\right)\right|$$

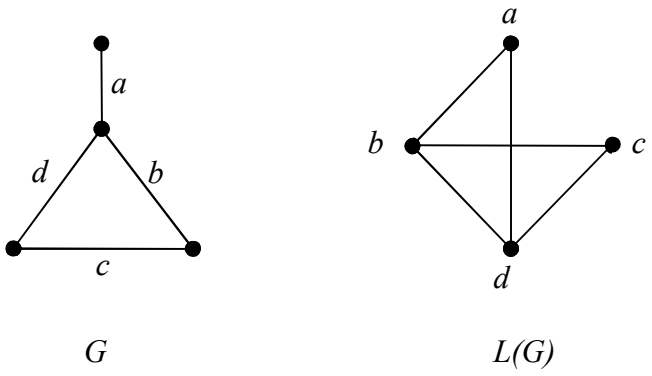
dir. □

Tanım 4.5.1. G grafı verilsin. Aşağıdaki iki adım yardımıyla elde edilen $L(G)$ grafına G grafının *çizgi grafı (line grafı)* denir.

i) G grafının kenarları $L(G)$ grafını köşelerini oluşturur.

ii) G grafındaki kenarların ortak köşe içermeleri durumunda $L(G)$ grafında bu kenarlara karşılık gelen köşeler bir kenar ile bağlanır.

Örnek 4.5.2. Aşağıda bir G grafı ve bu G grafına ait $L(G)$ çizgi grafı verilmiştir.



G $L(G)$

Şekil 4.47.

Teorem 4.5.1. Bir G grafının tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı, G'nin çizgi grafının Fibonacci sayısına eşittir. Yani

$$\left|M\left(G\right)\right| = f\left(L\left(G\right)\right)$$

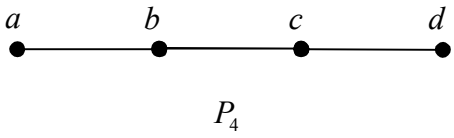
dir.

Tanım 4.5.2. *n* tane köşe ve *n*-1 tane paralel kenar kümelerinden oluşan grafa *patika tipi (path-type) graf* denir.

Teorem 4.5.2. *n* köşeli bir patikanın toplam bağımsız kenar sayısı F_n'dir.

$$\left(F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \ F_0 = 1,\ F_1 = 1\right)$$

Örnek 4.5.3. Aşağıda verilen P_4 patikasının toplam bağımsız kenar sayısını bulalım.



P_4

Şekil 4.48.

$$M\left(P_4\right) = \left\{\varnothing, \{ab\}, \{bc\}, \{cd\}, \{\{ab\}, \{cd\}\}\right\}$$

olup $\left|M\left(P_4\right)\right| = 5 = F_4$'tür.

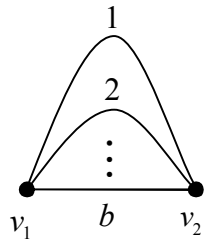
Lemma 4.5.2. *n* $(n \geq 2)$ köşeli ve her bir v_i, v_{i+1} köşeleri arasında *b* tane paralel kenar bulunan patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

şeklinde olan *n.* genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. *n* köşe sayısı üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$ için patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibidir.



G_2

Şekil 4.49.

G_2 grafının tüm bağımsız kenar kümeleri

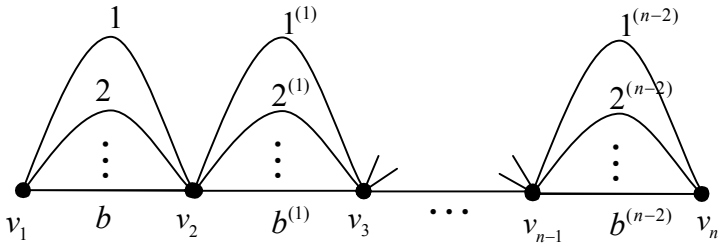
$$M(G_2) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{b\}\}$$

olup,

$$|M(G_2)| = b + 1 = F_1 + bF_0 = F_2$$

dir.

n'den az köşeli tüm G_m grafları için $|M(G_m)| = F_m$ olsun. O zaman *n* köşeli G_n grafları için gösterelim.



G_n

Şekil 4.50.

G_n grafında v_n köşesi üzerinde indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} |M(G_n)| &= |M(G_n - v_n)| + b|M(G_n - \{v_n, v_{n-1}\})| \\ &= |M(G_{n-1})| + b|M(G_{n-2})| \\ &= F_{n-1} + bF_{n-2} \\ &= F_n \end{aligned}$$

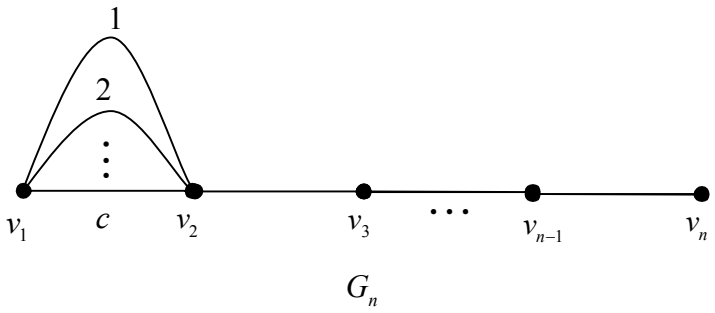
olur. □

Lemma 4.5.3. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve sadece ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ *c* tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = c,\ F_1 = 1$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



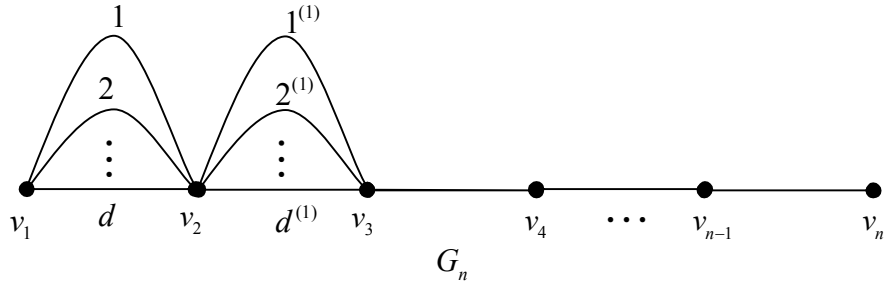
Şekil 4.51.

Lemma 4.5.4. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ ile ikinci kenarı $(e_2 = v_2v_3)$ *d* tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = 1,\ F_1 = d$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



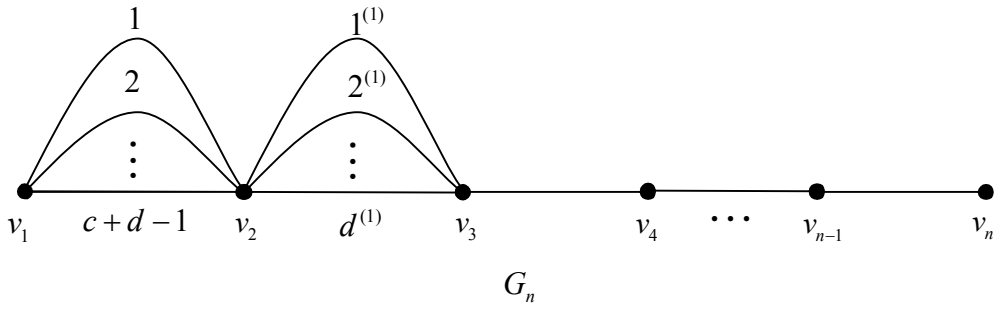
Şekil 4.52.

Lemma 4.5.5. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ $d + c - 1$ tane, ikinci kenarı $(e_2 = v_2v_3)$ da *d* tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = c,\ F_1 = d$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



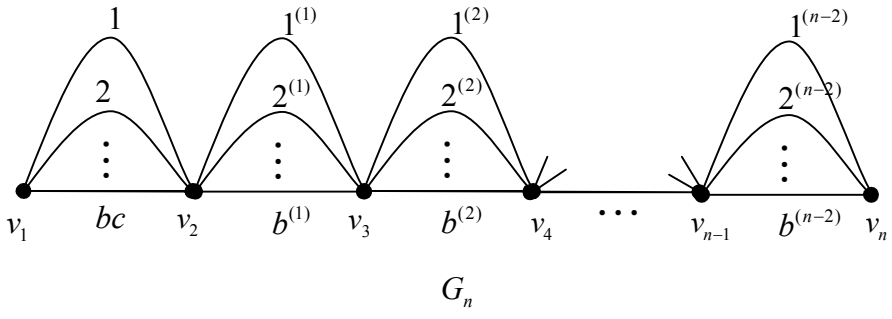
Şekil 4.53.

Lemma 4.5.6. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ bc tane, diğer kenarları da $(e_i = v_iv_{i+1}\ i > 1)$ b tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = c,\ F_1 = 1$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



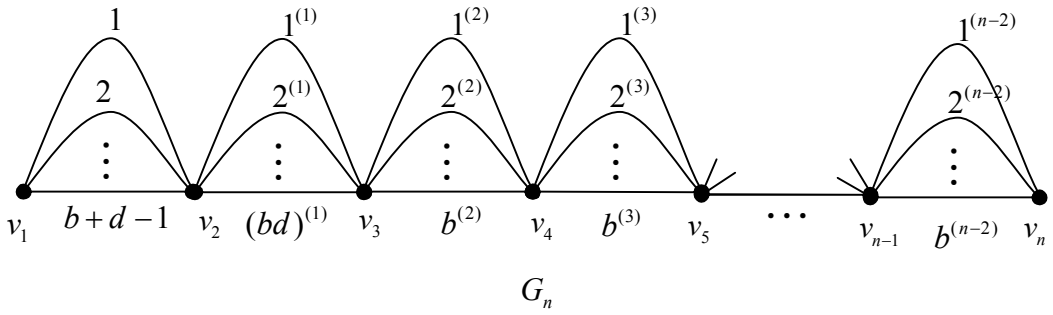
Şekil 4.54.

Lemma 4.5.7. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ $b+d-1$ tane, ikinci kenarı $(e_2 = v_2v_3)$ bd tane ve diğer kenarları da $(e_i = v_iv_{i+1}\ i > 2)$ da b tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = 1,\ F_1 = d$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



G_n

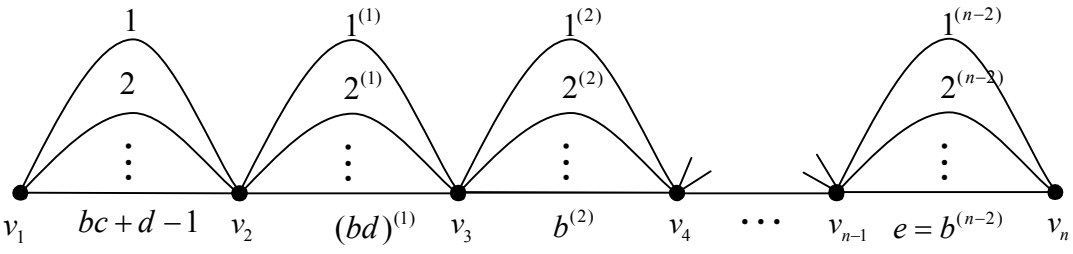
Şekil 4.55.

Teorem 4.5.3. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ $bc + d - 1$ tane, ikinci kenarı $(e_2 = v_2v_3)$ bd tane ve diğer kenarları da $(e_i = v_iv_{i+1}\ i > 2)$ b tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = c,\ F_1 = d$$

şeklinde olan *n*. genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



G_n

Şekil 4.56.

Teorem 4.5.4. $a > 1$ ve $n \geq 4$ için tüm bağımsız kenar küme sayılarının toplamı

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2};\ F_0 = c,\ F_1 = d$$

olacak şekilde bir patika tipi graf mevcut değildir.

İspat. Verilen tipteki en basit grafın $a > 1$ için

$$F_n = aF_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

şeklinde bağımsız kenar küme sayısına sahip olup olmadığını inceleyelim.

Bağımsız kenar küme sayısı $F_2 = a + 1$ olan graf 2 köşeli olacaktır. Bu yüzden $e_1 = v_1v_2$ kenarı a tane paralel kenar ile kopyalanmalıdır. Bu grafa bir köşe ekleyerek elde edilen patika tipi graf da $a^2 + a + 1$ tane bağımsız kenar kümesi üretmelidir. İlk kenar a tane bağımsız kenar kümesi ürettiğinden ikinci kenar $(e_2 = v_2v_3)$ a^2 tane paralel kenar ile kopyalanmalıdır. 4 köşeli patika tipi grafın ise $a^3 + a^2 + 2a + 1$ tane bağımsız kenar üretmesi için $e_3 = v_3v_4$ kenarının kaç tane kenar ile kopyalı olduğu incelenirse;

$$a^3 + a^2 + 2a + 1 = 1 + (a+1) + a^2 + (ax) + x$$

$$x = \frac{a(a^2+1)}{a+1}$$

olur ki x tamsayı olmadığından tüm bağımsız kenar küme sayısı F_n $(F_n = aF_{n-1} + F_{n-2}\ ;\ F_0 = 1,\ F_1 = 1)$ olacak şekilde bir patika tipi graf mevcut değildir.

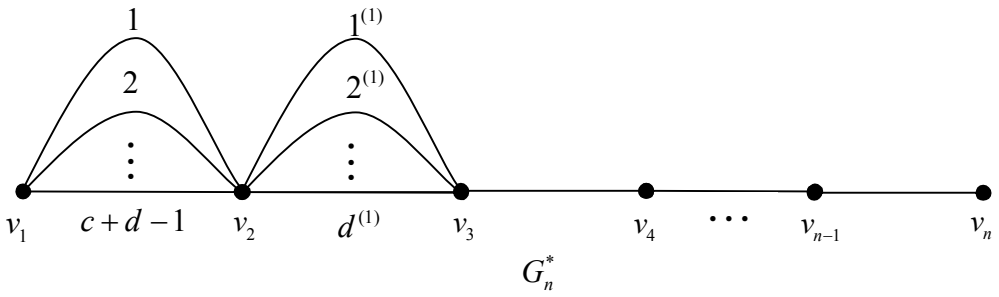
Benzer incelemeler ile tüm bağımsız kenar küme sayısı F_n $(F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}\ ;\ F_0 = c,\ F_1 = d)$ olacak şekilde de bir patika tipi grafın olmadığı kolayca görülür.

Lemma 4.5.8. *n,* $(n \geq 2)$ köşeli ve ilk kenarı $(e_1 = v_1v_2)$ $c + d - 1$ tane, ikinci kenarı $(e_2 = v_2v_3)$ da d tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$dF_{n-1} + cF_{n-2}$$

olur. Burada $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1$ dir.

İspat. Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



Şekil 4.57.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri üzerine detaylı bir araştırma yapılmıştır. Bazı özel graflarda bağımsız köşe kümelerinin sayısı ve bağımsız kenar kümelerinin sayısı gibi graflara ait temel kavramlar Fibonacci sayılarını vermektedir. Bu durum Fibonacci sayı dizilerinin graflar yardımıyla bir temsilini oluşturur. Benzer düşüncelerle farklı sayı dizilerinin graflar yardımıyla temsili araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Aldous, J. M., Wilson, R. J., 2003, Graphs and Applications An Introductory Approach, *Springer*, Great Britain.

Chen G., Zhu Z., 2012, The number of independent sets of unicyclic graphs with given matching *number, Discrete Applied Mathematics,* 160(1-2), 108-115.

Chism L. M., 2009, On Independence Polynomials and Independence Equivalence in Graphs, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.

Clark, J., Holton, D. A., 1991, A First Look at Graph Theory, *Allied Publishers Ltd.*, New Delhi-India.

Holliday S., Krop E., 2011, Sequences of Matchings in Path-Type Graphs, *Congressus Numerantium*, accepted.

Hopkins G., Staton W., 1984, Some Identities Arising from the Fibonacci Numbers of Certain Graphs, *Fibonacci Quarterly*, 22(3), 255-258.

Horton L. B. M., 2007, Enumeration of Independent Sets in Graphs, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.

Koshy, T., 2003, Discrete Mathematics with Applications, *Elsevier Academic Press*, USA.

Levit V. E., Mandrescu E., 2005, The independence polynomial of a graph-a survey, *Proceedings of the 1st International Conference on Algebraic Informatics*, Thessaloniki-Greece, 233-254.

Pedersen A. S., Vestergaard P.D., 2004, An Upper Bound on the Number of Independent Sets in a Tree, *Ars Combinatoria*.

Prodinger H., Tichy R.F., 1982, Fibonacci Numbers of Graphs, *Fibonacci Quarterly*, 20, 16-21.

Startek M., Wloch A., Wloch I., 2009, Fibonacci Numbers and Lucas Numbers in Graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 157(4),1175-1187.

Vasudev C., 2006, Graph Theory with Applications, *New Age International Publishers Ltd.,*New Delhi-India.

West, D. B., 2000, Introduction to Graph Theory, *Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd.*, Delhi-India.

Wingard G. C., 1995, Properties and Applications of the Fibonacci Polynomial of a Graph, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.

Zhao H., Li X., 2006, On The Fibonacci Numbers of Trees, *Fibonacci Quarterly*, 44(1), 32-37.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fadime ÖZKAN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Kadınhanı-09.06.1987
Telefon : (+90) 0506 216 69 84
Faks :
e-mail : fozkan@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Meram Konya Lisesi (YDA)	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010	Çankırı Karatekin Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİLLER

İngilizce